Eduard Čech
Sobre las seudovariedades

Rev. Mat. Hisp. Am. vol. 11, No. 7-10 (1936), 161-176

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501054

SOBRE LAS SEUDOVARIEDADES (1)

Antes de entrar en el contenido propio de estas conferencias, daré una breve idea de algunos resultados fundamentales de la teoría de la homología, tal como serán aplicados más tarde (2).

Un *complejo* K es un conjunto finito ($\neq 0$) de elementos (llamados *vértices* del complejo), en el cual se distinguen algunos subconjuntos (llamados *símplices* del complejo); dos condiciones deben ser satisfechas:

1) Cada vértice es elemento distinguido.

2) Cada subconjunto de un conjunto distinguido es distinguido.

Si se ha dado un grupo abeliano R fijo, podemos formar, como es sabido, K-*cadenas* (con coeficientes pertenecientes a R) y sus *fronteras*, que conducen a las nociones de *ciclos* y *homologías*. Consideraremos también ciclos y homologías *relativos* en el sentido de Lefschetz. Un *subcomplejo* K_1 de un complejo K es un complejo tal que (no solamente cada vértice de K_1 es un vértice de K, sino que también) todo K_1-
mente cada vértice de K_1 es un vértice de K, sino que también) todo K_1
simplex es un K-simplex. Supongamos que $K_2 \subset K_1 \subset K$ y que $C^n(K)$ es una (n, K)-cadena. Diremos que $C^n(K)$ está situada en K_1 [y lo expresamos simbólicamente así: $C^n(K) \subset K_1$] si $C^n(K)$ es una K_1-cadena.

Diremos que $C^n(K)$ es un (n, K)-*ciclo módulo* K_2 *en* K_1, si $C^n(K) \subset K_1$, $F\,C^n(K) \subset K_2$, designando la letra F la frontera de...

También se dirá que $C^n(K)$ es *homóloga a cero módulo* K_2 *en* K_1 (y lo escribiremos así: $C^n(K) \sim 0$ mód. K_2 en K_1), si existe una $(n+1, K)$-cadena $D^{n+1}(K) \subset K_1$ tal que

$$F\,D^{n+1}(K) = C^n(K) + E^n(K)$$

donde

$$E^n(K) \subset K_2.$$

---

(1) Este artículo es el contenido esencial de una serie de conferencias que pronuncié en el *Institute for Advanced Study, Princeton* (al final de 1935) y en la Universidad de *Michigan* (marzo 1936). Algunos de los resultados expuestos habían sido anunciados (sin demostración) en mis Memorias: *Sur la décomposition d'une pseudovariété par un sous-ensemble fermé.* (Comptes Rendus Paris, tomo **193**, 1934) y *Les théorèmes de dualité en topologie.* (Comptes Rendus du 2ème Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves, Prague, 1934). Una Memoria más completta aparecerá más tarde. La traducción ha sido hecha por el Prof. Rodríguez Bachiller.

(2) Las demostraciones se podrán ver en mi Memoria *Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque,* Fundamenta Mathematicae, tomo **12**, 1932.

Para nuestros propósitos es esencial que el grupo de coeficientes R sea un *campo*. En consecuencia así lo supondremos ahora. Si $r \varepsilon R$ y si $C^n(K)$ es una (n, K)-cadena, entonces podemos formar evidentemente la cadena $r\, C^n(K)$.

Sea ahora R un espacio topológico; es decir, un conjunto abstracto (cuyos elementos llamaremos *puntos*), en el cual se distinguen ciertos conjuntos (llamados *conjuntos cerrados*) mediante las dos propiedades siguientes : — (1) 0 y R son cerrados, — (2) la suma de dos conjuntos cerrados es cerrada, — (3) la intersección de cualquier número de conjuntos cerrados es cerrada y — (4) todo conjunto compuesto de un solo punto es cerrado. Un conjunto $U \subset R$ se dice que es *abierto* si $R - U$ es cerrado.

Un *recubrimiento* U del espacio R es un conjunto finito de conjuntos abiertos $\neq 0$ de R, cuya suma es el espacio total R. Un recubrimiento es un complejo en virtud de la siguiente definición: si $U_0, U_1, \ldots, U_n$ son diferentes vértices (= elementos) de U, entonces $(U_0, U_1, \quad, U_n)$ es un U-simplex si y sólo si

$$\prod_0^n U_i \neq 0.$$

Si $S \subset R$ y si U es un recubrimiento de R, entonces $U(S)$ será el subcomplejo de U definido como sigue: un U-simplex $(U_0, U_1, \ldots, U_n)$ pertenece a $U(S)$ si y sólo si

$$S \,.\, \prod_0^n U_i \neq 0.$$

Esta definición es útil esencialmente sólo para subconjuntos *cerrados* S de R, a causa de que se tiene siempre $U(S) = U(\bar{S})$ (la barra encima de la letra designa siempre la *acumulación*).

Si $S = \bar{S} \subset T = \bar{T} \subset R$ y si $C^n(U)$ es una (n, U)-cadena, escribiremos $C^n(U) \subset S$ en lugar de $C^n(U) \subset U(S)$; diremos que $C^n(U)$ es un (n, U)-ciclo módulo S en T, si $C^n(U)$ es un (n, U)-ciclo mód. $U(S)$ en $U(T)$ y de un modo semejante podemos interpretar una homología $C^n(U) \sim 0$ mód. S en T. Si $S = 0$ diremos que se trata de ciclos *absolutos;* si $T = R$ prescindiremos de las palabras "en T".

Sean ahora U y V dos recubrimientos (del espacio R_1 *solamente* consideraremos recubrimientos de R). Decimos que V es un *afinamiento* de U si es posible hacer corresponder a cada vértice V del recubrimiento V un vértice $U = \pi V$ del recubrimiento U tal que $V \subset U$. La operación simbolizada por π se llama *proyección* (de V) sobre U; en general, existen muchas proyecciones de esta clase.

Si $(V_0, V_1, \ , V_n) = \tau_n$ es un (n, U)-simplex existen dos posibilidades: o bien $\pi V_0, \pi V_1, \ldots, \pi V_n$ no son todos diferentes entre sí y entonces escribiremos $\pi \tau_n = 0$; o bien sí lo son, y entonces $(\pi V_0, \pi V_1, \ldots, \pi V_n)$ es un (n, U)-simplex σ_n y escribiremos $\pi \tau_n = \sigma_n$. Esta operación de proyectar un simplex debe ser entendida en tal sentido que si τ_n está orientado, también $\pi \tau_n$ tenga una orientación definida (y cuya obtención es obvia).

Sean π_1 y π_2 dos proyecciones de V sobre U y $C^n(V)$ un (n, V)-ciclo mód. S en T. Entonces $\pi_1 C^n(V)$ y $\pi_2 C^n(V)$ son dos (n, U)-ciclos mód. S en T, homólogos entre sí mód. S en T. Por consiguiente, aunque la proyección no queda determinada sin ambigüedad, sí se logra esto si se aplica a ciclos de un cierto tipo (mód. S en T) con tal que identifiquemos ciclos homólogos entre sí (también mód. S en T).

Recordemos la notación $S = \overline{S} \subset T = \overline{T} \subset R$. Un (n, R)-ciclo mód. S en T es una función C^n que hace corresponder a cada recubrimiento U de R (como U-coordenada de C^n) un cierto (n, U)-ciclo $C^n(U)$ mód. S en T, pero suponiendo que se verifica la condición siguiente: Si V es un afinamiento de U, entonces $\pi C^n(V) \sim C^n(U)$ mód. S en T (desde luego π es una proyección de V sobre U). La definición de la suma $C^n_1 + C^n_2$ de dos (n, R)-ciclos y del producto $r C^n$ $(r \varepsilon R)$ es trivial. $C^n \approx 0$ significa, naturalmente, que $C^n(U) \sim 0$ para cada recubrimiento U.

Aunque nuestras suposiciones fundamentales son extremadamente generales (al punto a que hemos llegado no es muy esencial el que R sea un espacio topológico), podemos obtener ya un importante teorema y nada trivial. Es conveniente partir de una definición: Una *familia lisa* $\Lambda^n(U)$ de (n, U)-ciclos mód. S en T, es una familia no nula de ciclos tales que satisfagan a la siguiente propiedad: si

$$r_1 + r_2 = 1, \qquad C^n(U) \sim r_1 C^n_1(U) + r_2 C^n_2(U),$$
$$C^n_1(U) \varepsilon \Lambda^n(U), \quad C^n_2(U) \varepsilon \Lambda^n(U), \quad r_1 \varepsilon R, \quad r_2 \varepsilon R,$$

entonces $C^n(U) \varepsilon \Lambda^n(U)$. Ahora podemos establecer el siguiente

TEOREMA FUNDAMENTAL DE EXISTENCIA

Supongamos dada, para cada recubrimiento U, una familia lisa $\Lambda^n(U)$ de (n, U)-ciclos mód. S en T tal que, si V es un afinamiento de U, $\pi \Lambda^n(V) \subset \Lambda^n U)$. Entonces existe un (n, R)-ciclo C^n mód. S en T tal que $C^n(U) \varepsilon \Lambda(U)$ para todo U.

Los tres lemas siguientes, que veremos, son muy útiles; son inmediatos corolarios del teorema fundamental de existencia. Cada lema irá precedido por una observación obvia (independiente del teorema de existencia).

Si C^n es un (n, R)-ciclo mód. S en T y si hacemos $\Gamma^{n-1}(U) = F\, C^n(U)$ para todo recubrimiento U, entonces Γ^{n-1} es un $(n-1, R)$-ciclo absoluto en S que designaremos por $F\, C^n$ (1). Evidentemente, $\Gamma^{n-1} \sim 0$ en T. Pero recíprocamente:

Lema I.—*Si* Γ^{n-1} *es un* $(n-1, R)$*-ciclo absoluto en* S, *que* $\Gamma^{n-1} \sim 0$ *en* T, *existe un* (n, R)*-ciclo* C^n *mód.* S *en* T *tal que*

$$F\, C^n \sim \Gamma^{n-1} \text{ en } S.$$

Si C^n es un (n, R)-ciclo mód. S en T y si existe un (n, R)-ciclo absoluto Γ^n tal que $C^n \sim \Gamma^n$ mód. S, entonces $F\, C^n \sim 0$ en S. Y recíprocamente:

Lema II.—*Si* C^n *es un* (n, R)*-ciclo mód.* S *en* T *tal que* $F\, C^n \sim 0$ *en* S, *existe un* (n, R)*-ciclo absoluto* Γ^n *en* T *tal que* $C^n \sim \Gamma^n$ *mód. S.*

Si C^n es un (n, R)-ciclo mód. S, si D^n es un (n, R)-ciclo mód. S en T y si $C^n \sim D^n$ mód. S, entonces $C^n \sim 0$ en T. Inversamente también.

Lema III.—*Si* C^n *es un* (n, R)*-ciclo mód.* S *tal que* $C^n \sim 0$ *mód.* T, *existe un* (n, R)*-ciclo* D^n *mód.* S *en* T *tal que* $C^n \sim D^n$ *mód.* S.

Naturalmente, muy pocos teoremas sobre la homología pueden ser probados sin introducir espacios R más particulares. Teniendo esto en cuenta, nosotros supondremos que el espacio R es *normal.* Esto significa que: si S_1 y S_2 son dos conjuntos *cerrados* tales que $S_1 S_2 = 0$, existe entonces dos conjuntos abiertos G_1 y G_2 con las propiedades siguientes $S_1 \subset G_1$, $S_2 \subset G_2$, $G_1 . G_2 = 0$. En un espacio normal R los lemas IV-VI que siguen, son ciertos. (La importancia del lema IV es de evidencia inmediata.)

Si $S_1 \subset R$, $S_2 \subset R$, entonces $U(S_1 S_2) \subset U(S_1) . U(S_2)$, pero en general $U(S_1 S_2) \neq U(S_1) . U(S_2)$. Por tanto, $C^n(U) \subset S_1$, $C^n(U)\, S_2$ no implica $C^n(U) \subset S_1 S_2$. Más aún:

Lema IV.—*Dado un recubrimiento* U *y dados dos conjuntos cerrados* S_1 *y* S_2 *existe un afinamiento* V *y una proyección* π *tales que* $C^n(V) \subset S_1$, $C^n(V) \subset S_2$ *implica* $\pi\, C^n(V) \subset S_1 S_2$.

En estrecha relación con esta proposición está el siguiente:

Lema V.—*Dados* $S = \bar{S}$ *y un recubrimiento* U, *existen un con-*

(1) La observación siguiente es de gran utilidad: Si D^n es otro (n, R)-ciclo mód. S en T, entonces $C^n \sim D^n$ mód. S implica $F\, C^n \sim F\, D^n$ en S.

junto abierto $G \subset S$ *y un afinamiento* V *tales que* $C^n(V) \subset \overline{G}$ *implica* $C^n(V) \subset S$.

LEMA VI.—*Si* $S = \overline{S} \subset T = \overline{T} \subset R$, $T - S = \Sigma P_k$, *siendo los conjuntos* P_k *mutuamente separados (en número finito) y si* C^n *es un* (n, R)*-ciclo mód.* S *en* T, *entonces existen* (n, R)*-ciclos* C^n_k *módulo* $S\,\dot{P}_k = \overline{P}_k - P_k$ *en* $\overline{P}_k$ *tales que* $C^n \sim \Sigma\, C^n_k$ *mód.* S *en* T.

Dado un subconjunto cerrado S de R, denotaremos por M la familia de todos los $(n-1, R)$-ciclos absolutos Γ^{n-1} en S tales que son ~ 0 en R, considerando a cada uno de tales Γ^{n-1} como igual a cero si es ~ 0 en S (1). M es un *módulo*; entendiendo por tal un grupo abeliano aditivo con multiplicadores (operadores) $r \in R$ (cada uno de los cuales determina un automorfismo de M). Puesto que R es un *campo,* M posee siempre una base independiente; el número de elementos de una base (que es el mismo para todas las bases), será llamado el *rango* de M.

Si R es una n-variedad (en el sentido clásico), es bien conocido el teorema siguiente: *Si* $S = \overline{S} \subset R \neq S$, *el número* p *de componentes de* $R - S$ *es* $= q + 1$, *siendo* q *el rango del módulo* M.

La igualdad $p = q + 1$ puede ser descompuesta en dos mitades: $p \leqslant q + 1$ y $p \geqslant q + 1$. Es notable que la primera mitad puede ser probada en un caso inesperadamente general.

TEOREMA I. *Supongamos que existen* (n, R)*-ciclos absolutos* $\Omega^n_i (1 \leqslant i \leqslant m)$ *con la propiedad siguiente: Si* T_1 *y* T_2 *son dos conjuntos cerrados tales que* $T_1 \neq R \neq T_2$ *y si* Δ^n_1 *es un* (n, R)*-ciclo absoluto en* T_1 *y análogamente* Δ^n_2 *para* T_2, *entonces la homología* $\sum_1^m r_i\, \Omega^m_i \sim \Delta^n_1 + \Delta^n_2$ *implica* $r_1 = \ldots = r_m = 0$. *Sea* $S = \overline{S} \subset R$. *Si* $R - S$ *tiene al menos* $p + 1$ *componentes, entonces el rango del módulo* M *es* $\geqslant p\,m$.

Prueba. Tenemos $R - S = \sum_0^n P_k$, siendo los conjuntos $P_k \neq 0$ y separados. Por el lema VI existen (n, R)-ciclos $C^{n'}_{ik}$ módulo $S\,\dot{P}_k$ en $\overline{P}_k$ $(1 \leqslant i \leqslant m, 0 \leqslant k \leqslant p)$ tales que $\Omega^n_i \sim \sum_0^p C^n_{ik}$ módulo S y por consiguiente $\Omega^n_i \sim \Omega^n_{ik}$ módulo $R - P_k$. Hagamos $\Gamma^{n-1}_{ik} = F\, C^n_{ik}$ (aquí y en lo que sigue k recorre los valores 1, 2, ..., p solamente, el $k = 0$

(1) n es un entero dado; más tarde, n será la dimensión de R.

quedando excluído). Evidentemente $\Gamma_{ik}^{n-1} \varepsilon M$. Sea $\Sigma\, r_{ik}\, \Gamma_{ik}^{n-1} \sim 0$ en S. Precisamente tenemos que demostrar que todos los $r_{ik} = 0$. Supongamos que, por el contrario, $r_{11} \neq 0$. Ahora, $\Sigma r_{ik}\, C_{ik}^{n}$ es un (n, R)-ciclo módulo S en $\mathrm{R} - \mathrm{P}_0$ y $\mathrm{F}\, \Sigma\, r_{ik}\, C_{ik}^{n} \sim 0$ en S. En virtud del lema II se sigue que existe un (n, R)-ciclo absoluto Δ_0^n en $\mathrm{R} - \mathrm{P}_0$ tal que $\Sigma\, r_{ik}\, C_{ik}^{n} \sim \Delta_0^n$ módulo S. Si $k \geqslant 2$, entonces $C_{ik}^{n} \subset \mathrm{R} - \mathrm{P}_1$; por consiguiente:

$$\Sigma r_{ik} C_{ik}^{n} \sim \Sigma\, r_{i1}\, C_{i1}^{n} \text{ mód. } \mathrm{R} - \mathrm{P}_1 .$$

Puesto que $\mathrm{S} \subset \mathrm{R} - \mathrm{P}_1$, tenemos:

$$\Sigma\, r_{i1}^{n}\, C_{i1}^{n} \sim \Delta_0^n \text{ mód. } \mathrm{R} - \mathrm{P}_1 .$$

Pero

$$C_{i1}^{n} \sim \Omega_i^n \text{ mód. } \mathrm{R} - \mathrm{P}_1 .$$

Luego

$$\Sigma\, r_{i1}\, \Omega_i^n - \Delta_0^n \sim 0 \text{ mód. } \mathrm{R} - \mathrm{P}_1 .$$

A causa del lema III se deduce que existe un (n, R)-ciclo absoluto $\Delta_1^n \subset \mathrm{R} - \mathrm{P}_1$, tal que $\Sigma\, r_{i1} \Omega_i^n \sim \Delta_0^n + \Delta_1^n$. Y como $\Delta_0^n \subset \mathrm{R} - \mathrm{P}_0 \neq \mathrm{R}$, $\Delta_1^n \subset \mathrm{R} - \mathrm{P}_1 \neq \mathrm{R}$, obtenemos $r_{i1} = 0$; en particular $r_{11} = 0$ en contradicción con lo supuesto.

Corolario. Sea R un subconjunto compacto del espacio euclídeo E_{n+1} y supóngase que existen $m + 1$ dominios o regiones complementarias de R (rel. a E_{n+1}) que admiten el conjunto R en su totalidad como frontera. Sean S un subconjunto cerrado de R y q el $(n - 1)$èsimo número de Betti de S. Entonces el conjunto $\mathrm{R} - \mathrm{S}$ tiene a lo más $\left[\dfrac{q}{m}\right] + 1$ componentes.

Este corolario ha sido dado por Wilder, pero en el caso $m \geqslant 2$) con q en vez de $\left[\dfrac{q}{m}\right] + 1$, que es menor, excepto cuando $q \leqslant 1$ ó $q = m = 2$.

Ahora vamos a suponer que R tiene las dos siguientes propiedades:

1) R es *bicompacto*; esto es, si una familia Φ de conjuntos abiertos recubre R, entonces una subfamilia *finita* de Φ recubre R.

2) dim. $R = n$. Lo cual significa: (*i*) cada recubrimiento U admite un afinamiento V tal que *dim.* $V \leqslant n$ (siendo dim. V la mayor

dimensión de un V-simplex), ($i\,i$) no todo recubrimiento U admite un afinamiento V tal que dim. $V < n$.

Estos supuestos implican lo siguiente: Si C^n es un (n, R)-ciclo mód. S, existe un conjunto cerrado mínimo $T \subset S$, unívocamente determinado, tal que $C^n \sim 0$ mód. T. La *existencia* de T es una consecuencia de 1), y la *unicidad* se deduce de 2). Llamaremos a T el *soporte* del ciclo C^n y lo aplicaremos en la forma siguiente: Si $C^n \sim 0$ mód. $T_0 = \overline{T}_0$, el conjunto T_0 debe contener al soporte T.

El espacio R se dirá que es una n-*seudovariedad* [1] si posee las siguientes propiedades:

1) R es un espacio bicompacto normal.

2) dim. R $= n$ ($= 1, 2, 3, \ldots$).

3) Existe algún (n, R)-ciclo absoluto Ω^n que *no* es ~ 0.

4) Si $S = \overline{S} \subset R \neq S$, y si Δ^n es un (n, R)-ciclo absoluto en S, entonces $\Delta^n \sim 0$.

5) Dados un punto $a \varepsilon R$ y un entorno [2] U de a, existe un entorno $V \sim U$ de a que tiene la propiedad siguiente: Si C^n es un (n, R)-ciclo mód. R — U cualquiera, existe un (n, R)-ciclo absoluto Ω^n tal que $C^n \sim \Omega^n$ mód. R — V.

En todo lo que sigue R es una seudovariedad dada y S es un subconjunto cerrado de R.

Teorema II. R *es un continuo localmente conexo.*

Prueba. Que R es un continuo es completamente trivial [3]. Si U es un entorno dado de un punto $a \varepsilon R$, sea V un entorno más pequeño de a como el indicado en la propiedad 5) de la definición de una n-seudovariedad. Es suficiente demostrar que todo el conjunto V es una parte de una cuasicomponente de U. Supongamos lo contrario. Entonces tenemos $U = P + Q$, siendo los sumandos separados y tales que $P \cdot V \neq 0 \neq Q \cdot V$. Sea Ω^n un (n, R)-ciclo absoluto que no es ~ 0. Puesto que Ω^n puede ser considerado como un (n, R)-ciclo mód. R — U, por el lema VI existen dos (n, R)-ciclos: C^n mód. $\overline{P}$ — U en $\overline{P}$ y D^n mód. $\overline{Q}$ — U en $\overline{Q}$, tales que $\Omega^n \sim C^n + D^n$ mód. R — U. En virtud de la propiedad 5) de una seudovariedad, existe un (n, R)-ciclo Ω_0^n, tal que $C^n \sim \Omega_0^n$ mód. R — V. Mas como $C^n \subset \overline{P}$, tenemos $\Omega_0^n \sim 0$ mó-

(1) Una denominación más propia sería seudovariedad *osientable,* pero no daré aquí la definición más general.

(2) Todos los entornos que empleo son abiertos.

(3) Loc. cit.

dulo $R - V + \overline{P} \subset R - Q\,V$. Teniendo en cuenta el lema III, se deduce que existe un (n, R)-ciclo absoluto Δ^n en $R - Q\,V$, tal que $\Omega_0^n \sim \Delta^n$. Y como $R - Q\,V \neq R$, $\Delta^n \sim 0$ por la propiedad 4) de una seudovariedad; se sigue que $\Omega_0^n \sim 0$, y, por consiguiente, $C^n \sim 0$ módulo $R - V$. Análogamente tenemos $D^n \sim 0$ mód. $R - V$. Ahora bien: $\Omega^n \sim C^n + D^n$ mód. $R - U \subset R - V$, luego $\Omega^n \sim 0$ módulo $R - V \neq R$. Por el lema III y la propiedad 4) de una seudovariedad, esto implica que $\Omega^n \sim 0$, lo cual es una contradicción.

LEMA VII.—*Sea* T *el soporte del* (n, R)-*ciclo* C^n *mód.* S. *Entonces el conjunto* $T - S$ *es abierto.*

Prueba. Supongamos, por lo contrario, que exista un punto $a \in (T - S)\,.\,\overline{R - T}$.

Puesto que $U = R - S$ es un entorno de a, podemos determinar un entorno más pequeño V de a, en virtud de la propiedad 5) de una seudovariedad. Entonces existe un (n, R)-ciclo absoluto Δ^n, tal que $C^n \sim \Delta^n$ mód. $R - V$. Como $C^n \sim 0$ mód. T, se tendrá $\Delta^n \sim 0$ mód. $R - V + T$. Pero $R - V + T$ es cerrado y $\neq R$, así que $\Delta^n \sim 0$, por el lema II y la propiedad 4) de una seudovariedad. Se deduce que $C^n \sim 0$ mód. $R - V$. Mas como T es el soporte de C^n, se debe tener $T \subset R - V$, lo cual evidentemente es erróneo.

Ahora bien $T - S$ es abierto; por tanto, abierto en $R - S$, y $T - S$ es también cerrado en $R - S$. Por tanto:

LEMA VIII.—*El soporte* T *de un* (n, R)-*ciclo* C^n *mód.* S *es suma de componentes de* $R - S$.

LEMA IX.—*Sea* P *una componente de* $R - S$. *Sea* C^n *un* (n, R)-*ciclo mód.* S. *Entonces existe un* (n, R)-*ciclo absoluto* Ω^n *tal que* $C^n \sim \Omega^n$ *mód.* $R - P$.

Prueba. Elijamos un punto $a \in P$. Puesto que R es localmente conexo y S es cerrado, $P = U$ es abierto y por consiguiente es un entorno de a. Sea V un entorno más pequeño determinado por la propiedad 5) de una seudovariedad. Se sigue que existe un (n, R)-ciclo absoluto Ω^n tal que $C^n \sim \Omega^n$ mód. $R - V$. Por tanto, el soporte T de $C^n - \Omega^n$ está contenido en $R - V$. Por el lema VIII se deduce que $T \subset R - P$. Pero $C^n \sim \Omega^n$ mód. T, por definición de T. Y como $T \subset R - P$, obtenemos $C^n \sim \Omega^n$ mód. $R - P$.

Ahora recordemos que M era el módulo de todos los $(n - 1, R)$-ciclos absolutos Γ^{n-1} en S, tales que $\Gamma^{n-1} \sim 0$ en R, considerando a un tal ciclo Γ^{n-1} como cero si es ~ 0 en S.

Consideraremos submódulos N del módulo M (llamados *módulos* brevemente). Si N es un tal módulo, entonces $\overline{N}$ (la "acumulación" de N) es, por definición, la familia de todos aquellos $\Gamma^{n-1} \varepsilon M$ que tienen la siguiente propiedad: Dado un recubrimiento U, existe un $\Delta^{n-1} \varepsilon M$ (dependiente de U) tal que $\Gamma^{n-1}(U) \sim \Delta^{n-1}(U)$ en S. Evidentemente $\overline{N}$ es un módulo ($N \subset \overline{N} \subset M$).

En todo lo que sigue, Ψ designa la familia de *todas* las componentes de R — S. Si $\Phi \subset \Psi$, entonces $H(\Phi)$ designará el conjunto de puntos que es suma de todos los conjuntos pertenecientes a la familia Φ. E. g. $H(0) = 0$, $H(\Psi) = \mathrm{R} - \mathrm{S}$ y generalmente $H(\Phi) + H(\Psi - \Phi) = \mathrm{R} - \mathrm{S}$, $H(\Phi) \, . \, H(\Psi - \Phi) = 0$.

También en todo lo que sigue, si $\Phi \subset \Psi$, $M(\Phi)$ denotará el conjunto de todos aquellos $\Gamma^{n-1} \varepsilon M$, para los cuales $\Gamma^{n-1} \sim 0$ módulo $\mathrm{R} - H(\Phi)$. Así $M(0) = M$, $M(\Phi) = 0$. En general $\Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \Psi$ implica $M(\Phi_1) \subset M(\Phi_2)$.

Si $\Phi \subset \Psi$ entonces $M(\Phi)$ es un módulo y $\overline{M(\Phi)} = M(\Phi)$.

A partir de este punto supondremos que el $n^{\text{èsimo}}$ número de Betti de R (= rango del módulo de todos los (n, R)-ciclos) es *finito*. Lo designaremos por m y elegiremos, de una vez para siempre, una base de Betti Ω_i^n fija ($1 \leqslant i \leqslant m$) para los (n, R)-ciclos absolutos. Por la propiedad 3) de una seudovariedad $m > 0$. Veremos más adelante que en el caso $n = 1$ debe ser $m = 1$. Pero para $n > 1$, todo valor de m es posible. En efecto, Wilder ha dado un ejemplo en el espacio euclídeo E_{n+1}, de un conjunto compacto R tal que R es la frontera de todas las componentes de $\mathrm{E}_{n+1} - \mathrm{R}$, dando de antemano el número $m + 1 = 2, 3, \ldots$, ó $m = \infty$ de dichas componentes, y siendo cada una de estas componentes localmente conexas de modo uniforme. Es fácil demostrar (como corolario de nuestros siguientes teoremas) que un tal R es una n-seudovariedad, para la cual el número m tiene la significación antes explicada.

He aquí ahora un teorema general referente a la separación de una seudovariedad por un subconjunto cerrado arbitrario:

TEOREMA III. *Sean* $\Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \Psi$. *Sea* p *el número de las componentes que forman la familia* $\Phi_2 - \Phi_1$. *Sea* q *el rango del módulo* $M(\Omega_1)$ *mód.* $M(\Phi_2)$ (= *al máximo número de ciclos* $\Gamma_i^{n-1} \varepsilon M(\Phi_1)$ *tales que* $\Sigma \mathrm{r}_i \Gamma_i^{n-1} \varepsilon M(\Phi_2)$ *implique* $\mathrm{r}_i = 0$). *Sea*

$$c = 1 \text{ si } p > 0 \text{ y } \Phi_1 = 0.$$

$$c = 0 \text{ si } p = 0 \text{ o } \Phi_1 \neq 0.$$

Entonces $q = m(p - c)$.

Prueba. Supongamos que $q < m(p - c)$, así que q es finito. Sean P_k $(0 \leqslant k < p)$ todas las componentes de $R - S$ pertenecientes a la familia $\Phi_2 - \Phi_1$. Por el lema IV, existen (n, R)-ciclos C^n_{ik} módulo $S\,\overline{P}_k$ en $\overline{P}_k$ tales que $C^n_{ik} \sim \Omega^n_i$ mód. $R - P_k$. Sea

$$\Gamma^{n-1}_{ik} = F\,C^n_{ik}$$

de modo que evidentemente

$$\Gamma^{n-1}_{ik} \varepsilon M(\Phi_1).$$

Puesto que $q < m(p - c)$, deben existir números r_{ik} que no son todos nulos y tales que

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} r_{ik}\,\Gamma^{n-1}_{ik} \sim 0$$

en $R - H(\Phi_2)$. En virtud del lema I se deduce que existe un (n, R)-ciclo D^n mód. S en $R - H(\Phi_2)$ tal que

$$F\,D^n \sim \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=c}^{p} r_{ik}\,\Gamma^{n-1}_{ik} \text{ en S.}$$

Se sigue, por tanto, que

$$D^n - \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=c}^{p} r_{ik}\,C^n_{ik}$$

es un (n, R)-ciclo mód. S en

$$\sum_{k=c}^{p} \overline{P}_k + R - H(\Phi_2)$$

cuya frontera es ~ 0 en S. A causa del lema II, se deduce que existe un (n, R)-ciclo absoluto

$$\Delta^n \subset \sum_{k=c}^{p} \overline{P}_k + R - H(\Phi_2)$$

tal que

$$D^n - \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=c}^{p} r_{ik}\,C^n_{ik} \sim \Delta^n \text{ mód. S.}$$

Ahora, si $c = 1$, se tiene

$$\sum_{k=c}^{p} \bar{P}_k + R - H(\Phi_2) \subset R - P_0 \neq R$$

y si $c = 0$, tenemos $\Phi_1, \neq 0$ y

$$\sum_{k=c}^{p} \bar{P}_k + R - H(\Phi_2) \subset R - H(\Phi_1) \neq R;$$

teniendo en cuenta la propiedad 4) de la definición de una seudovariedad, se obtiene que $\Delta^n \sim 0$ y, por consiguiente,

$$D^n \sim \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=c}^{p} r_{ik} C_{ik}^n \text{ mod. } S.$$

Elijamos el valor de k $(c \leqslant k \leqslant p)$. Tenmos

$$D^n \subset R - H(\Phi_2) \subset R - P_k, \qquad C_{ik}^n \sim \Omega_i^n \text{ mod. } R - P_k,$$

$$S \subset R - P_k, \qquad D^n \sim \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=c}^{p} r_{ik} C_{ik}^n.$$

En consecuencia,

$$\sum_{i=1}^{m} r_{ik} \Omega_i^n \sim 0 \text{ mod. } R - P_k.$$

Por el lema III y la propiedad 4) de una seudovariedad, esto implica $\sum_{i=1}^{m} r_{ik} \Omega_i^n \sim 0$, y por tanto, $r_{ik} = 0$, lo cual es una contradicción.

Supongamos ahora $q > m(p - c)$, así que p es finito. Existen ciclos

$$\Gamma_\lambda^{n-1} \varepsilon M(\Phi_1) \quad [0 \leq \lambda \leq m(p - c)]$$

tales que

$$\sum s_\lambda \Gamma_\lambda^{n-1} \varepsilon M(\Phi_2) \quad \text{implica} \quad s_\lambda = 0.$$

Sean P_k $(0 \leqslant k \leqslant p - c)$ todas las componentes que constituyen la familia $\Phi_2 - \Phi_1$. En vista del lema I, existen (n, R)-ciclos C_λ^n mód. S en $R - H(\Phi_1)$ tales que $F C_\lambda^n \sim \Gamma_\lambda^{n-1}$ en S. Por el lema IX existen números $r_{ik\lambda} \varepsilon R$, tales que

$$C_\lambda^n \sim \sum_{i=1}^{m} r_{1k\lambda}\, \Omega_i^n \quad \text{mod. } R - P_k\,.$$

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{\lambda=0}^{m(p-c)} r_{ik\lambda}\, s_\lambda = t_i \qquad (1 \leq i \leq m,\ 0 \leq k \leq p-1)$$

en donde $t_1 = \ldots = t_m = 0$ en el caso de $c = 0$. El número de ecuaciones de este sistema es menor que el número de incógnitas; siendo R un campo, se deduce la existencia de una solución s_λ, t_i tal que no todo s_λ es $= 0$. Evidentemente

$$\sum s_\lambda\, C_\lambda^n \sim \sum t_i\, \Omega_i^n \quad \text{mód. } R - P_k\,;$$

por consiguiente, el soporte T de $\sum s_\lambda C_\lambda^n - \sum t_i\, \Omega_i^n$ satisface a la inclusión $T \subset R - P_k$, de donde

$$T \subset R - \sum_{0}^{p-1} P_k = R - H(\Phi_2 - \Phi_1).$$

En el caso de $c = 0$, se tiene $t_i = 0$, $C_\lambda^n \subset R - H(\Phi_1)$, de donde $T \subset R - H(\Phi_1)$. Lo mismo sucede si $C = 1$, porque esto implica $H(\Phi_1) = 0$. Por tanto,

$$T \subset R - [\, H(\Phi_2 - \Phi_1) + H(\Phi_1)\,] = R - H(\Phi_2)$$

$$\sum s_\lambda\, C_\lambda^n \ \sum t_i\, \Phi_i^n \sim \text{mod. } R - H(\Phi_2)$$

y en consecuencia,

$$\sum s_\lambda\, \Gamma_\lambda^{n-1} \sim \sum s_\lambda\, F\, C_\lambda^n \sim 0 \quad \text{en } R - H(\Phi_2)\,,$$

lo cual implica la contradicción $s_\lambda = 0$.

Podemos ahora determinar el módulo $M(\Phi)$ en un caso muy general.

TEOREMA IV.—*Sea* Ξ *una familia de subconjuntos cerrados de* S *Sea* Φ *la familia de todas aquellas componentes* P *de* R — S *cuya frontera* $\bar{P} - P$ no *pertenece a la familia* Ξ. *Supongamos que* Ξ *tiene la propiedad siguiente: Para un conjunto cualquiera* $B \in \Xi$, *el conjunto* $H(\Phi)$ *es un subconjunto de un subconjunto conexo de* R — B. *Sea* N *el submódulo de* M *engendrado por todos los* $\Gamma^{n-1} \in M$ *tales que* $\Gamma^{n-1} \subset B$, *siendo* B *algún conjunto de la familia* Ξ. *Entonces se tiene* $M(\Phi) = N$.

Prueba.—I. Sea $\Gamma^{n-1} \subset B \varepsilon \Xi$, $\Gamma^{n-1} \sim 0$ en R. Por el lema I existe un (n, R)-ciclo C^n mód. B, tal que $F\ C^n \sim \Gamma^{n-1}$ en B. De acuerdo con la propiedad supuesta de Ξ, existe una componente Q de $R - B$, tal que $H(\Phi) \subset Q$. Por el lema IX existen números r_i, tales que $C^n \sim \Sigma r_i\ \Omega_i^n$ mód. $R - Q$, de modo que, a causa del lema III, existe un (n, R)-ciclo D^n mód. B en $R - Q$, tal que $C^n - r_i\ \Omega_i^n \sim D^n$ mód. B, de donde $F\ C^n \sim F\ D^n$ en B, y, por consiguiente, $\Gamma^{n-1} \sim F\ D^n$ en B. Pero $D^n \subset R - Q$, así que $\Gamma^{n-1} \sim 0$ en $R - Q \subset R - H(\Phi)$, es decir, $\Gamma^{n-1} \varepsilon M(\Phi)$. Se deduce que $N \subset M(\Phi)$. Puesto que $M(\Phi) = \overline{M(\Phi)}$ debe verificarse $\overline{N} \subset M(\Phi)$.

II. Queda por demostrar que $M(\Phi) \subset \overline{N}$. Sea $\Gamma^{n-1} \varepsilon M(\Phi)$ y sea U un recubrimiento dado. Tenemos que probar la existencia de un $\Delta^{n-1} \varepsilon N$, tal que $\Gamma^{n-1}(U) \sim \Delta^{n-1}(U)$ en S. En virtud del lema V, existe un entorno G de S y un afinamiento V de U, tal que para cualquier (n, U)-cadena $E^n(V)$, $E^n(V) \subset \overline{G}$ implique $E^n(V) \subset S$. Puesto que $\Gamma^{n-1} \varepsilon M(\Phi)$, de acuerdo con el lema I existe un (n, R)-ciclo C^n mód. S en $R - H(\Phi)$ con la propiedad de que $F\ C^n \sim \Gamma^{n-1}$ en S.

Y como $R - G$ es bicompacto y R es localmente conexo, $R - S$ tiene solamente un número finito de componentes P tales que a la vez $P \varepsilon \Psi - \Phi$ y $P - G \neq 0$. Sean P_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ todas esas componentes, y sea

$$Q = H(\Psi - \Phi) - \Sigma P_k$$

de donde $Q \subset G$. Teniendo en cuenta que

$$[R - H(\Phi)] - S = \Sigma P_k + Q$$

con sumandos separados, en virtud del lema VI existen (n, R)-ciclos D^n mód. $(S . \Sigma \overline{P_k})$ en ΣP_k y E^n mód. $S\ \overline{Q}$ en $\overline{Q}$, tales que $C^n \sim D^n + E^n$ mód. S, de donde $C^n \sim D^n$ mód. $\overline{Q}$, por lo cual $F\ D^n \sim F\ C^n \sim \Gamma^{n-1}$ en $\overline{Q} \subset \overline{G}$; por definición de G y V sale que $F\ D\ (V) \sim \Gamma^{n-1}(V)$ en S, de donde $F\ D^n(U) \sim \Gamma^{n-1}(U)$ en S, ya que V es un afinamiento de U y ambos $F\ D^n$ y Γ^{n-1} son $(n - 1, R)$-ciclos absolutos en S. Teniendo en cuenta que $D^n \subset \Sigma \overline{P_k}$ y que $\Sigma \overline{P_k} - S = \Sigma P_k$, con sumandos separados en el miembro de la derecha, el lema VI implica la existencia de (n, R)-ciclos D_k^n módulo $\overline{P_k} - P_k$ en $\overline{P_k}$, tales que $D^n \sim \Sigma D_k^n$ módulo S, de donde

$F\ D^n \sim \Sigma\ F\ D_k^n$ en S. Puesto que $P_k \varepsilon \Psi - \Phi$, tenemos $\overline{P}_k - P_k \varepsilon \Xi$. Y también como D_k^n es un ciclo módulo $\overline{P}_k - P_k$ en $\overline{P}_k$, se deduce que $F\ D_k^n \varepsilon N$, y por consiguiente, $\Delta^{n-1} = \Sigma\ F\ D_k^n \varepsilon N$. Ahora bien, se tiene:

$$F\ D^n\ (U) \sim \Gamma^{n-1}\ (U) \text{ en } S$$

y $F\ D^n \sim \Delta^{n-1}$ en S, lo cual implica que

$$\Gamma^{n-1}\ (U) \sim \Delta^{n-1}\ (U) \text{ en } S.$$

La significación del teorema IV aparecerá más claramente si consideramos algunos casos particulares de él, los cuales aún son muy generales.

Caso I. Sea A un subconjunto dado de S. (Nada se pierde en generalidad si se supone A cerrado). Supongamos la familia Ξ compuesta de todos los subconjuntos cerrados B de S tales que A *no* es subconjunto de B. La familia Φ consiste entonces en todas las componentes P de R — S cuyas fronteras contienen A. Es fácil verificar que, dado $B \varepsilon \Xi$, $H\ (\Phi)$ es un subconjunto de un subconjunto conexo de R — B. Por consiguiente, $M\ (\Phi) = \overline{N}$, donde el módulo N está engendrado por todos los $(n - 1, R)$-ciclos absolutos $\Gamma^{n-1} \sim 0$ en R, tales que $\Gamma^{n-1} \subset B \varepsilon \Xi$. Introduzcamos las siguientes notaciones:

1) q es el rango de M mód. $M\ (\Phi)$,
q^* " " " " $M\ (\Phi)$;

2) p, p^* es el número de componentes P de R — S tales que A $\left\{\begin{matrix}\text{es}\\ \text{no es}\end{matrix}\right\}$ un subconjunto de la frontera de P.

Podemos aplicar el teorema III de dos maneras, haciendo primero $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = \Phi$ y luego $\Phi_1 = \Phi$, $\Phi_2 = \Psi$; obtenemos los dos siguientes resultados:

3) Si $p = 0$, entonces $q = 0$; si $p > 0$, entonces $q = m\ (p - 1)$.

4) Si $p^* = 0$ o $p > 0$, entonces $q^* = m\ p^*$; si a la vez $p^* > 0$ y $p = 0$, entonces $q^* = m\ (p^* - 1)$.

Caso II. Supongamos dado un subconjunto conexo A de S (no necesariamente cerrado). Ξ es la familia de todos aquellos subconjuntos cerrados de S que no inciden con A. Φ es la familia de todos los componentes de R — S cuyas fronteras inciden con A. Como en el caso I, es fácil verificar que, dado un $B \varepsilon \Xi$, el conjunto $H\ (\Phi)$ es un subconjunto de un subconjunto conexo de R — B. Por consiguiente, $M(\Phi) = \overline{N}$, donde el módulo $\overline{N}$ es engendrado por todos los $\Gamma^{n-1} \varepsilon M$ tales que

$$\Gamma^{n-1} \subset B \varepsilon \Xi .$$

Introduzcamos otra vez la notación 1) y en lugar de la 2) esta otra:

2′) $\left.\begin{matrix} p \\ p^* \end{matrix}\right\}$ es el número de componentes P de R — S cuyas fronteras $\left\{\begin{matrix} \text{inciden} \\ \text{no inciden} \end{matrix}\right\}$ con el conjunto A. Entonces tenemos otra vez los resultados 3) y 4).

El caso II puede ser generalizado como sigue: Supongamos dado un subconjunto A de S y una familia $\Gamma \neq 0$ de subconjuntos de A tales que: (*i*) si $C \varepsilon \Gamma$ y $C^* \subset C$, entonces $C^* \varepsilon \Gamma$, (*ii*) si $C \varepsilon \Gamma$, A — C es conexo. (En particular, A debe ser conexo puesto que $O \varepsilon \Gamma$). será la familia de todos los $B = \overline{B} \subset S \ \Xi$ tales que el conjunto A B pertenece a Γ. Φ será la familia de todas las componentes de R — S cuyas fronteras inciden con A en un conjunto *no* perteneciente a Γ. Si empleamos 1) y además

2″) $\left.\begin{matrix} p \\ p^* \end{matrix}\right\}$ es el número de componentes de R — S cuyas fronteras inciden con A en un conjunto $\left\{\begin{matrix} \text{no perteneciente} \\ \text{perteneciente} \end{matrix}\right\}$ a la familia Γ, entonces tenemos otra vez 3) y 4).

Es fácil describir la 1-seudovariedad R más general. Si S consiste en dos puntos, entonces el módulo M tiene evidentemente rango $q = 1$. Pero si R — S tiene p componentes, del teorema III se deduce que $q = m(p - 1)$. Por consiguiente, $m = 1$, como antes se anunció, y $p = 2$. Se sigue que R tiene la propiedad de que dos puntos cualesquiera la descomponen precisamente en dos partes. En consecuencia, como es bien sabido, R es la suma de dos continuos simplemente ordenados que tienen en común únicamente los puntos extremos o terminales. Si R es separable, es un círculo.

Terminaré con un resumen muy rápido de algunos de mis resultados ulteriores.

Si $\{\Phi_i\}$ es una colección arbitraria (finita, numerable o no numerable) de subfamilias de Ψ, entonces

$$M(\Pi \Phi_i) = \overline{\Sigma M(\Phi_i)} ,$$

donde $\Sigma\, M\,(\Phi_i)$ es el menor módulo que contiene todos los $M\,(\Phi_i)$. Si la colección $\{\Phi_i\}$ es finita, entonces

$$\overline{\Sigma\, M\,(\Phi_i)} = \Sigma\, M\,(\Phi_i)\,.$$

Más difícil es describir $M\,(\Sigma\,\Phi_i)$. El resultado es que $M\,(\Sigma\,\Phi_i)$ puede determinarse mediante los módulos $M\,(\Phi_i)$ únicamente si sabemos, para cada par $(i\,,\,k)$, si $\Phi_i\,\Phi_k$ es o no nulo. En particular, se tiene simplemente,

$$M\,(\Sigma\,\Phi_i) = \Pi\, M\,(\Phi_i)$$

siempre que $\Phi_i\,\Phi_k \neq 0$.

Las observaciones que siguen ahora se enuncian solamente para seudovariedades separables (= metrizables). En el teorema III se tiene $p = \infty$ si y sólo si $q = \infty$. Mas podemos obtener resultados más precisos, El caso más sencillo es cuando p es *débilmente infinito,* esto es, para todo $\varepsilon > 0$ existe solamente un número finito de componentes $P\ \varepsilon\ \Phi_2 - \Phi_1$ cuyos diámetros sean $> \varepsilon$. La condición necesaria y suficiente es que el rango de

$$M\,(\Phi_1)\ \text{mód.}\ M\,(\Phi_2)$$

sea *muy* "débilmente infinito" en el sentido que sigue: Dado un $\varepsilon > 0$ el rango de

$$M\,(\Phi_1)\ \text{mód.}\ [M\,(\Phi_2) + N_\varepsilon]$$

es finito, donde N_ε es el módulo engendrado por todos los $\Gamma^{n-1}\ \varepsilon\ M\,(\Phi_1)$ tales que $\Gamma^{n-1} \subset B \subset S$, siendo el diámetro de B menor que ε.

Supongamos que la familia Ξ en el teorema IV tenga la propiedad siguiente: Si A_n y A son subconjuntos cerrados de S tales que ningún A_n pertenezca a Ξ, y si lím. $A_n = A$ (en el sentido de Hausdorff), entonces A no pertenece a Ξ. En tales condiciones (conservando las notaciones del teorema IV), tenemos $N = \overline{N}$, si y sólo si la siguiente proposición es verdadera: Si $P_k\ \varepsilon\ \Psi - \Phi$, $A =$ lím. P_k, entonces $A\ \varepsilon\ \Xi$. La propiedad supuesta de Ξ es verdadera en los dos casos I y II antes considerados como ilustraciones del teorema IV, pero no lo es necesariamente en la anterior generalización del caso II.

PROF. EDUARDO ČECH.

(Brno)