Eduard Čech; Bedřich Pospíšil

I. Sur les espaces compacts. II. Sur les caractères des points dans les espaces L

Spisy Přírod. Fak. Univ. Brno 258 (1938), 14 pp.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501057

S P I S Y
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
MASARYKOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ MASARYK
RÉDIGÉES PAR

ANTONÍN ŠIMEK

Rok 1938 Čís. 258

I. SUR LES ESPACES COMPACTS

(O KOMPAKTNÍCH PROSTORECH)

II. SUR LES CARACTÈRES DES POINTS DANS LES ESPACES $\mathfrak{L}$

(O CHARAKTERECH BODŮ V $\mathfrak{L}$-PROSTORECH)

PAR

EDUARD ČECH et BEDŘICH POSPÍŠIL

VYCHÁZÍ S PODPOROU MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY

VLASTNÍM NÁKLADEM VYDÁVÁ
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
BRNO, KOUNICOVA 63

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ

KNIHKUPECTVÍ A. PÍŠA, BRNO, ČESKÁ 28

I. SUR LES ESPACES COMPACTS.
(O KOMPAKTNÍCH PROSTORECH.)

II. SUR LES CARACTÈRES DES POINTS DANS LES ESPACES $\mathfrak{L}$.
(O CHARAKTERECH BODŮ V $\mathfrak{L}$-PROSTORECH.)

Ouvrages cités.

«AU» ... P. Alexandroff et P. Urysohn, Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Verhandelingen des konink. Akademie van Wetenschappen, eerste Sectie, Deel XIV, No 1.

«Č» ... E. Čech, On bicompact spaces, Annals of Math., 38, 1937, pp. 823—844.

«P, esp. abstr.» ... B. Pospíšil, Trois notes sur les espaces abstraits, ces publications 249, 1937.

«P, exist.» ... B. Pospíšil, Théorèmes d'existence pour les caractères des points, Čas. mat. fys. 67, No 3, Praha 1938.

I. Sur les espaces compacts.

On appelle *caractère* du point p dans l'espace topologique R la plus petite puissance d'un système d'entourages de p dans R qui contienne, pour tout entourage quelconque U de p dans R, un entourage-élément V avec $V \subset U$. Nous commençons par une généralisation d'un théorème dû à MM. Alexandroff et Urysohn («AU», p. 29). Étant donnée une puissance $\mathfrak{a}$ infinie quelconque, un espace topologique sera dit *compact* ($\mathfrak{a}$), lorsque toute famille $\mathfrak{F}$ de puissance $\leqq \mathfrak{a}$ d'ensembles fermés admet des points communs à tous ses ensembles-éléments, supposé que cette proposition soit vraie pour toute sous-famille finie de $\mathfrak{F}$.

THÉORÈME I. *Soit R un espace régulier compact* ($\mathfrak{a}$); *soit* $\mathfrak{a}$ *la borne inférieure des caractères des points dans R. Alors, la puissance de R n'est pas inférieure à* $2^{\mathfrak{a}}$.

Démonstration. Désignons par α le plus petit nombre ordinal de puissance $\mathfrak{a}$. Soit s_ξ une suite transfinie quelconque du type ξ; alors, nous désignons par $[s_\xi, y]$ la suite transfinie du type $\xi + 1$ qui s'en obtient en lui ajoutant le terme y; y est le dernier terme de $[s_\xi, y]$. Dorénavant, nous désignons par s_ξ une suite du type ξ et dont les termes ne prennent que les valeurs 0 et 1. Ainsi, on a fait correspondre, à tout ξ ordinal de puissance $\mathfrak{x}$, une famille de puissance $2^{\mathfrak{x}}$ des suites s_ξ.

Pour prouver notre théorème, on n'a qu'à faire correspondre, à toute suite s_ξ avec $\xi = \eta + 1 < \alpha$, un sous-ensemble ouvert O_{s_ξ} sous les conditions suivantes (nous désignons par $\overline{M}$ la fermeture dans R d'un $M \subset R$ quelconque):

(i) Étant donnée une suite quelconque s_ξ ($\xi < \alpha$), la partie commune des O_{s_η}, où s_η parcourt tous les segments de types isolés de la suite s_ξ, est non vide,

(ii) $\overline{O}_{[s_\xi, o]} \cdot \overline{O}_{[s_\xi, 1]} = 0\ (\xi < \alpha)$,

(iii) $\overline{O}_{[s_\xi, y]} \subset O_{s_\xi}\ (\xi = \eta + 1 < \alpha;\ y = 0, 1)$.

Les conditions (i), (ii) et (iii) prouvent notre théorème. En effet, étant donnée une famille finie quelconque de segments $[s_\xi, y]$ d'une suite donée quelconque s_α, la partie commune de tous les $O_{[s_\xi, y]}$ correspondant est non vide d'après (i). Il en est de même, à plus forte raison, de la partie commune des $\overline{O}_{[s_\xi, y]}$. Alors, par compacticité ($\mathfrak{a}$) de notre espace, on établit ainsi la propriété de ne pas être vide de la partie commune de tous les $\overline{O}_{[s_\xi, y]}$ où $[s_\xi, y]$ parcourt tous les segments confinaux à 2 de la suite s_α. La relation (iii) entraîne alors que la partie commune $s_\alpha{}^*$ de tous les O_{s_ξ} en question est non vide. De plus, pour de différentes suites s_α, nos ensembles $s_\alpha{}^*$ sont disjoints deux à deux en vertu de la condition (ii). Alors, l'ensemble-somme de tous les $s_\alpha{}^*$ a la puissance $\geqq 2^{\mathfrak{a}}$, d'où notre théorème.

Reste à construire les ensembles $O_{[s_\xi, y]}$, ($\xi < \alpha$). Nous procédons par induction transfinie. Admettons alors qu'on ait donné déjà la construction en question pour tous les $\xi < \iota < \alpha$. Distinguons deux cas:

I. ι est un nombre-limite. La partie commune $s_\iota{}^*$ de tous les O_{s_ξ}, où s_ξ parcourt tous les segments de types isolés de la suite s_ι, est non vide. On le voit de la même façon que dans le cas $\iota = \alpha$ qui vient d'être traité. Alors, $s_\iota{}^*$ contient au moins deux points distincts p_0 et p_1. En effet, si $s_\iota{}^*$ n'en contenait qu'un seul, le pseudocaractère de ce point dans R serait $< \mathfrak{a}$, c'est à dire ce point serait la partie commune de moins de $\mathfrak{a}$ ensembles ouverts. Mais c'est impossible ce qu'on prouve par un procédé dû aux auteurs précités («AU», p. 65) et duquel il résulte que le caractère du point en question serait $< \mathfrak{a}$.

Cela étant, il existe, par régularité de R, deux ensembles ouverts $O_{[s_\iota, 0]}$ et $O_{[s_\iota, 1]}$ à fermetures disjointes et qui contiennent le point p_0 et p_1 resp. Les conditions (i) et (ii) se trouvent ainsi vérifiées. On n'a pas besoin de vérifier la troisième; car elle est dépourvue du sens.

II. Dans le cas où $\iota = \varkappa + 1$, on n'a qu'à choisir deux sous-ensembles ouverts non vides quelconques $O_{[s_\iota, 0]}$ et $O_{[s_\iota, 1]}$ à fermetures disjointes et contenues dans O_{s_ι}, pour satisfaire aux conditions (i), (ii) et (iii).

Remarquons encore que M. Novák s'est aperçu du fait que notre théorème reste vrai sous l'hypothèse plus générale suivante faite sur R: R est la partie commune d'une famille de puissance $< \mathfrak{a}$ d'ensembles ouverts dans un espace régulier compact (α); les caractères des points dans R sont $\geqq \alpha$. On l'obtient par une modification légère du procédé qui vient d'être donné.

Nous nous servirons de la construction des O_{s_ξ} dans la démonstration du second théorème. Avant de l'énoncer, rappelons qu'on appelle *complet* («Č», p. 837) tout espace qui est un G_δ dans un espace bicompact.

THÉORÈME II. *Soit E un espace complet compact complètement normal; soit S un sous-ensemble de E tel que toute fonction réelle bornée continue définie sur S admet une extension continue sur l'espace E tout entier. Alors, S est compact en soi.*

L'hypothèse de normalité complète est essentielle. Pour s'en convaincre, il suffit de poser $E = \beta(S)$ («Č») avec un S non compact complètement régulier quelconque; en effet, E est bicompact (alors même complet, compact et normal) et toute fonction réelle bornée continue définie sur S admet une extension continue sur E tout entier. De même, la compacticité de E est essentielle ce qui est bien trivial.

D'autre part, il n'en est pas ainsi de la propriété de E d'être complet. En effet, nous la remplaçons, dans la démonstration, par les conditions suivantes: (iv) E est la partie commune d'une famille de puissance $\aleph_1$ d'ensembles ouverts $O_\iota\,(\iota < \omega_1)$ dans un espace R régulier compact ($\aleph_1$) et (v) les fermetures dans R d'ensembles fermés dans E disjoints deux à deux sont disjointes deux à deux. Tout espace complet normal satisfait à ces conditions («Č», p. 837, Chap. III, § 2).

Démonstration du théorème II. Supposons par impossible que S ne soit pas compact. Alors, S contient un ensemble infini J sans points d'accumulation dans S. L'espace S étant (complètement) normal, toute fonction réelle bornée définie sur l'espace isolé J admet une extension continue sur S, alors même sur l'espace E tout entier en vertu de nos hypothèses. Alors, on peut admettre a priori la condition suivante: (vi) L'ensemble S considéré comme espace est isolé.

D'après un théorème bien connu d'Urysohn, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction réelle bornée continue définie sur S admette une extension continue sur l'espace normal E est qu'elle en admette une sur la fermeture de S dans E. De plus, la dite fermeture jouit évidemment des propriétés (iv) et (v), supposé que l'espace E en jouisse. Car elle est la partie commune des $F\,O_\iota$ où F désigne la fermeture dans R de l'ensemble S. Alors, on peut admettre a priori la condition suivante: (vii) S est dense dans l'espace E.

En désignant toujours par $\overline{M}$ la fermeture dans E d'un $M \subset E$ quelconque, on voit que (viii) les relations

$$F_1 \subset E,\ F_2 \subset E,\ F_1 \overline{F}_2 + \overline{F}_1 F_2 = 0$$

entraînent que $\overline{F}_1 \overline{F}_2 = 0$. En effet, par normalité complète de E, il existe deux ensembles ouverts dans E: G_1 et G_2 disjoints et tels que $F_1 \subset G_1$, $F_2 \subset G_2$. D'après (vii), les ensembles $S\,G_1$ et $S\,G_2$ resp. sont denses dans G_1 et G_2 resp. Soit g une fonction réelle bornée définie sur S et qui prend la valeur i sur l'ensemble $S\,G_i$. Soit f l'extension continue de g sur l'espace E tout entier. Alors, la fonction f prend la valeur i sur l'ensemble $\overline{G}_i$ ce qui prouve que $\overline{G}_1\,\overline{G}_2 = 0$. On en tire l'égalité voulue $\overline{F}_1\,\overline{F}_2 = 0$.

Chaque point de S est isolé dans E d'après (vi) et (vii). De plus, le caractère de chaque point de $E - S$ dans l'espace $E - S$ est indénombrable; on le prouve par un procédé donné par Čech («Č», pp. 836 et 837). De plus, l'espace $E - S$ jouit des propriétés (iv), (v) et (viii) énoncées pour E. Alors, en remplaçant par $E - S$ l'espace E, il suffit de prouver la propositon suivante:

(ix) Un espace compact normal E à caractères des points indénombrables ne saurait jouir en même temps des propriétés (iv), (v) et (viii).

En effet, on peut construire, pour $\alpha = \aleph_1$, les ensembles O_{s_ξ} assujettis aux conditions (i), (ii) et (iii) dans notre espace R (sic!). De plus, on peut assujettir les $s_\xi{}^*$ à la condition de contenir des points de E. En effet, on voit que les procédés I et II de la démonstration du théorème I restent vrais, lorsqu'on y remplace les O_{s_ξ} par les $E\,O_{s_\xi}$ correspondant. De même, on peut admettre que les fermetures dans R de tous les O_{s_ξ} avec un ξ donné soient contenues dans O_ξ. Les $s_\alpha{}^*(\alpha = \omega_1)$ en question sont alors contenus dans l'espace E.

Les suites s_α peuvent être considérées comme les points d'un espace C dont la topologie sera définie comme suit. Soit J un ensemble fini de nombres ordinaux $< \alpha$. Soit s_α une certaine de nos suites. Soit U l'ensemble de toutes les suites-points de C dont le ι-ième terme est égal au ι-ième terme de s_α pour tout $\iota \in J$. Alors, les U parcourent les entourages définissants de s_α dans l'espace C. Il est aisé de voir que la transformation $s_\alpha{}^* \to s_\alpha$ de l'espace-somme C^* des $s_\alpha{}^*$ en l'espace C est continue. Les ensembles U étant à la fois ouverts et fermés dans C, il en est de même de leurs originaux U^* dans l'espace C^*. Soit s'_α la partie commune des fermetures dans R de tous les U^* qui contiennent $s_\alpha{}^*$. Les ensembles s'_α sont disjoints deux à deux. En effet, soient s_α et t_α deux suites-points de C. Soient U et V deux entourages à la fois fermés et ouverts dans C des points s_α et t_α resp., $UV = 0$. Les originaux correspondant U^* et V^* sont alors séparés (c'est à dire disjoints et fermés dans leur somme) ce qui entraîne, d'après (viii), que leurs fermetures dans E sont disjointes. Il en est de même, selon (v), des fermetures des ensembles en question dans l'espace R ce qui prouve que les ensembles s'_α et t'_α sont sans points communs, c. q. f. d.

De plus, étant donné un sous-ensemble quelconque ouvert G de R, $s'_\alpha \subset G$, il existe un U, $s_\alpha \subset U$, tel que la fermeture dans R de l'ensemble U^* est contenue dans G. Dans le cas contraire, les intersections finies des fermetures en question contiendraient des points de $R - G$. Ce dernier ensemble étant compact ($\aleph_1$), la partie commune s'_α de toutes nos fermetures ne serait pas contenue dans G (cf. «AU», p. 65). De plus, les dites fermetures sont ouvertes dans l'espace-somme des s'_α. On le tire du raisonnement du § précédent où l'on a posé $V = C - U$.

D'autre part, il existe deux sous-ensembles séparés A_1 et A_2 de C et tels qu'étant donnés deux G_1 et G_2 ouverts dans C, $A_1 \subset G_1$, A_2 et G_2, les ensembles G_1 et G_2 ne sauraient être disjoints («P, esp. abstr.»,p. 8). Les originaux A'_1 et A'_2 des ensembles A_1 et A_2 dans la transformation $s'_\alpha \to s_\alpha$ de l'espace-somme C' des s'_α en s_α jouissent de la même propriété. Car tout ensemble ouvert dans C' et qui contient A'_i contient aussi l'original d'un certain G_i en vertu du § précédent. D'autre part, les ensembles A'_i sont séparés d'où l'on tire le fait impossible que C' ne saurait être complètement normal. En effet, tout espace normal à propriété (viii) est même complètement normal.

Notre théorème se trouve ainsi prouvé.

Remarquons encore que l'ensemble S peut vérifier le second théorème sans être fermé dans E même dans le cas d'un E bicompact. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à poser E égal à l'espace ordonné des nombres ordinaux $\leqq \omega_1$ et $S = E - (\omega_1)$ («Č», p. 836).

COROLLAIRE. *Soit S un espace non compact complètement régulieri Alors, l'espace $\beta(S)$ ne saurait être complètement normal.*

L'espace $\beta(S)$ se trouve défini dans le mémoire cité de Čech.

II. Sur les caractères des points dans les espaces $\mathfrak{L}$.

LEMME. *Soit R un espace régulier; soit N un sous-ensemble infin. de R. Alors, N contient une suite de points distincts a_n telle qu'on peut faire correspondre, à tout n naturel, un sous-ensemble ouvert O_n de R de façon qu'on ait $a_n \in O_n$ et $O_k O_l = 0$ pour $k \neq l$.*

En effet, supposons qu'on ait déjà construit des ensembles $O_1, O_2, \ldots, O_n$ de façon que l'ensemble $N_n = N - (\overline{O}_1 + \overline{O}_2 + \ldots + \overline{O}_n)$ fût infini (nous désignons par $\overline{M}$ la fermeture dans R de l'ensemble $M \subset R$). L'ensemble N_n contient évidemment un point a_{n+1} tel que l'ensemble $N_n - \overline{O}_{n+1}$ est infini pour un entourage convenable O_{n+1} de a_{n+1}. Car l'ensemble N_n ne possède qu'un seul point-limite tout au plus. De plus, on peut assujettir $\overline{O}_{n+1}$ à la condition d'être disjoint des $\overline{O}_k$ déjà construits.

Soit E un ensemble donné quelconque. Soit u une fonction qui fait correspondre, à tout sous-ensemble quelconque M de E, un certain sous-ensemble uM de E. On appelle *espace topologique général* tout couple ordonné (E, u). La topologie u peut être introduite de plusieurs manières différentes. Le but de ce travail est d'étudier le rapport mutuel des deux manières de procéder suivantes:

I. Faisons correspondre, à tout point p de E, un système $\Omega(p)$ non vide de sous-ensembles de E. Soit uM l'ensemble des points p de E tels que l'ensemble MU n'est vide pour aucun $U \in \Omega(p)$. Nous disons que $\Omega(p)$ est un *système complet d'entourages* du point p dans l'espace (E, u). Suivant M. Markoff, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de tels systèmes $\Omega(p)$ est qu'on ait à la fois $u0 = 0$ et $uM_1 \subset uM_2$ lorsque $M_1 \subset M_2 \subset E$. Nous nous bornerons ici exclusivement à l'étude des topologies u qui satisfont aux dites conditions. On appelle *caractère* ou *pseudocaractère* resp. du point p dans (E, u) la plus petite puissance $\chi_u(p)$ ou $\psi_u(p)$ resp. d'un système $\Omega(p)$ ou d'un sous-système de $\Omega(p)$ tel que la partie commune de ses ensembles-éléments est égale à celle des ensembles appartenant à $\Omega(p)$ resp.: $\psi_n(p)$ ne dépend pas du choix particulier de $\Omega(p)$. Nous étudierons ici la notion de caractère; nous ne traiterons le pseudocaractère que dans les cas où cela ne compliquera pas nos considérations.

II. Nous écrivons $\lambda(u) = 1$ si et seulement si l'on peut faire correspondre, à de certaines suites infinies dénombrables de points de E — dites convergentes —, d'une façon univoque, des points-limites $\in E$ de façon que uM soit l'ensemble des limites des suites convergentes extraites de M. On dit que toute suite convergente converge vers sa limite. L'ordre de termes de nos suites n'influence pas leur convergence. L'égalité $\lambda(u) = 0$ veut dire que $\lambda(u) \neq 1$.

On écrira de même $\lambda^*(u) = 1$ lorsqu'on aura les axiomes suivants: a) Toute suite dont tous les termes sont égaux à un certain point constant converge vers ce point, b) toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite et, c) lorsqu'une suite ne converge pas vers p, on en peut extraire une suite partielle dont aucune sous-suite ne converge vers p. Nous écrirons $\lambda^*(u) = 0$ lorsque $\lambda^*(u) \neq 1$.

De plus, nous faisons correspondre, à toute topologie u, la topologie $\bar{u}$ ou $\bar{u}M$ est le plus petit ensemble tel que $M \subset \bar{u}M$ et que $N \subset \bar{u}M$ entraîne que $uN \subset \bar{u}M$.

Dorénavant, désignons par F l'ensemble des fonctions réelles continues définies sur l'espace topologique R. Soit Q un sous-ensemble dense de R. La topologie u de l'espace (F, u) sera définie par convergence: On appellera convergente vers $f \in F$ toute suite $f_n \in F$ pour laquelle $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ pour tous les $x \in Q$ au sens usuel.

THÉORÈME I. *Soit R un espace complètement régulier quelconque; soit $u \subset v \subset \bar{u}$. Alors, les caractères des points dans l'espace (F, v) sont au moins égaux à la puissance de Q.*

L'inclusion $u \subset v \subset \bar{u}$ veut dire que $uM \subset vM \subset \bar{u}M$ pour chaque $M \subset F$.

Démonstration. Pour tout point a de Q désignons par $O(a)$ l'ensemble des $f \in F$ avec $|f(a)| < 1$. $O(a)$ est un entourage dans $(F, \bar{u})$ de la fonction $o \in F$ égale à zéro identiquement, c'est à dire o *non* $\in \bar{u}\,[F - O(a)]$. A plus forte raison, $O(a)$ est un entourage de o dans (F, v). Nous allons nous servir du fait élémentaire bien connu suivant: Ω est un système complet d'entourages de o dans (F, v) si et seulement si tous ses ensembles-éléments sont des entourages de o dans (F, v) et que tout entourage quelconque de o dans (F, v) est un sur-ensemble d'un ensemble-élément de Ω. En désignant, pour tout entourage U de o dans (F, v), par U^* l'ensemble de tels $a \in Q$ que $U \subset O(a)$, remarquons qu'on prouvera plus tard que U^* est toujours fini. Admettons que U parcoure un système complet d'entourages de o dans (F, v). Alors, d'après ce qui précède, à chaque point a de Q on peut faire correspondre un $U = U(a) \subset O(a)$. Pour chaque $a \in Q$ soit T_a l'ensemble des $b \in Q$ avec $U(b) = U(a)$. On a ainsi subdivisé Q en tranches disjointes finies. En effet, on a $U(b) \subset O(b)$, alors $U(a) \subset O(b)$ pour tout $b \in T_a$; alors $T_a \subset U^*(a)$ d'où l'on tire que T_a est finie. Le nombre des T_a étant égal à la puissance de Q, il en est de même du nombre des $U(a)$. Alors la puissance du système des U est au moins égale à celle de Q. On en tire une proposition analogue pour toute fonction $\in F$ prise au lieu de o. Car (F, u) et $(F, \bar{u})$ sont des groupes topologiques.

Reste à prouver que U^* ne saurait être infini. En effet, on pourrait extraire, d'un U^* infini, une suite $\{a_n\}$ et définir des O_n de façon à satisfaire au lemme $(M = U^*)$. La régularité complète de l'espace R entraîne, pour chaque n naturel, l'existence d'une fonction $f_n \in F$ avec $f_n(a_n) = 2$ et qui s'annulle en dehors de O_n. Par définition de U^*, U ne contient aucune fonction f_n, d'où l'on tire que o *non* $\in v S$ où S désigne l'ensemble des f_n. D'autre part, $f_n(x)$ converge évidemment vers 0 pour chaque $x \in R$. Alors, on a $o \in u S$ ce qui est impossible. Car on aurait $o \in v S$.

Dans les notations précédentes, désignons par t la topologie de l'espace (F, t) définie par convergence comme suit. Les fonctions $f_n \in F$ convergent vers $f \in F$ lorsqu'on peut faire correspondre, à tout point de Q, un entourage dans R où les fonctions f_n convergent uniformément au sens usuel.

THÉORÈME II. *Soit R un espace normal quelconque; soit $t \subset v \subset \bar{u}$; soit $\mathfrak{a}$ le caractère d'un point quelconque dans l'espace (F, v). Alors, Q se laisse décomposer en $\mathfrak{a}$ sous-ensembles compacts en soi.*

Démonstration. On peut admettre que o soit le point en question. On n'a qu'à modifier légèrement la démonstration précédente. En effet, Q se laisse décomposer en tranches T_a, alors même en sous-ensembles $U^*(a)$ dont le nombre peut être pris $\leqq \mathfrak{a}$. Car on peut prendre la puissance du système des U égale à $\mathfrak{a}$. Reste à déduire la compacticité des U^*. En effet, on pourrait extraire, d'un U^* non compact en soi, une suite $\{a_n\}$ de points distincts sans points d'accumulation. Par normalité de R, on peut ajouter à chaque point a_n un entourage O_n dans R de façon que l'ensemble-somme des $\overline{O}_n$ avec $n \geq k$ soit fermé dans R pour tout k naturel et qu'on ait $\overline{O}_k \overline{O}_l = 0$ $(k \neq l)$ («AU», p. 55—56). En définissant les fonctions f_n comme auparavant, on voit que $f_n \in F - U$ pour chaque n, d'où l'on obtient comme plus haut la contradiction voulue.

Désignons par Π l'ensemble des polynômes à coëfficients rationnels définis sur un intervalle compact R. La topologie u de l'espace (Π, u) sera définie par convergence comme auparavant où l'on pose $Q = R$.

THÉOREME III. *Les caractères des points dans tout espace* (Π, v) *avec* $u \subset v \subset \bar{u}$ *sont égaux à* $exp\, \aleph_0$.

(Nous écrivons toujours $exp\, \mathfrak{x} = 2^{\mathfrak{x}}$.)

Démonstration. La puissance de Π étant égale, comme on sait, à $\aleph_0$, nos caractères ne peuvent pas surpasser $exp\, \aleph_0$ évidemment. Notre démonstration se réduit presque entièrement à celle du théorème I. Mais, il faut remplacer les fonctions f_n par des polynômes p_n que nous allons définir. D'après un théorème bien connu de Weierstrass, on peut trouver de tels p_n que $|f_n(x) - p_n(x)| < n^{-1}$ pour tous les $x \in R$. Ce sont justement nos polynômes à définir.

On voit que les théorèmes précédents restent valables, sans qu'on change leurs démonstrations, si l'on définit la topologie $\bar{u}$ comme suit. Pour définir un entourage du point f dans l'espace $(F, \bar{u})$ ou $(\Pi, \bar{u})$, on choisit un sous-ensemble fini quelconque K de Q et un $\varepsilon > 0$; les fonctions-éléments g de l'entourage à construire sont caractérisées par les inégalités $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ avec $x \in K$.

Nous abordons maintenant les questions d'existence pour les caractères des points dans les espaces du type $\mathfrak{L}$ de M. Fréchet. Commençons par quelques définitions. Les deux topologies u et v définies sur un même ensemble sont dites *incomparables* si l'on n'a ni $u \subset v$ ni $v \subset u$. Nous disons que le nombre de topologies incomparables d'un certain genre est égal à $\mathfrak{x}$ lorsqu'il existe une famille de puissance $\mathfrak{x}$ de nos topologies incomparables et que $\mathfrak{x}$ est le plus grand nombre cardinal qui jouisse de la dite propriété. Ce nombre sera dit *précis*, lorsqu'il n'existe pas plus de $\mathfrak{x}$ topologies distinctes de notre genre.

Les théorèmes d'existence pour les caractères ne surpassant pas la puissance de l'espace ont été donnés, pour les espaces munis de la notion de limite, dans «P. exist.». Nous abordons ici des questions concernant de grands caractères. Dorénavant, nous désignons par E un ensemble quelconque infini de puissance $\mathfrak{e}$. Soit o un certain élément fixé de E. De plus, on aura $\omega(u) = 1$ pour une topologie u définie sur E, lorsque tous les points sont ouverts et fermés à la fois dans l'espace (E, u) sauf le point o qui est fermé sans être ouvert. La relation $\omega(u) = 0$ veut dire que $\omega(u) \neq 1$. Dorénavant, nous désignons par η une fonction à valeurs réelles dont l'argument parcourt toutes les topologies sur E. Soit $\mathfrak{z}$ un aleph quelconque $\leqq \mathfrak{e}$.

THÉORÈME IV. *Soit* $\omega \,.\, \lambda^* \leqq \eta \leqq \lambda$. *Alors, le nombre précis de topologies* w *incomparables avec* $\eta(w) = 1$, $\chi_w(o) = exp\, \mathfrak{e}$, $\psi_w(o) = \mathfrak{z}$ *est égal à* $exp\, \mathfrak{e}^{\aleph_0}$.

Démonstration. Remarquons d'abord que le nombre des u avec $\eta(u) = 1$ ne saurait surpasser $exp\, \mathfrak{e}^{\aleph_0}$. En effet, le nombre des suites dénombrables de points de E est égal à $\mathfrak{e}^{\aleph_0}$ (on ne tient pas compte de l'ordre!). On définit une topologie u avec $\lambda(u) = 1$ en ajoutant à chaque suite un point-limite $\in E$ ou la propriété de ne pas converger. Il y a donc $exp\, \mathfrak{e}^{\aleph_0}$ possibilités tout au plus, c. q. f. d.

Soit R un espace normal pouvant être décomposé en sous-espaces R_1 et R_2 disjoints et fermés dans R de façon que les propositions suivantes soient vérifiées: (i) La puissance de R_1 est $exp\, \mathfrak{e}$, (ii) la puissance de R_2 est $\mathfrak{e}^{\aleph_0}$, (iii) R possède une base ouverte $\mathfrak{B}$ de puissance $\mathfrak{e}$, c'est à dire un tel système $\mathfrak{B}$ d'ensembles ouverts que tout ensemble ouvert dans R est la somme des ensembles éléments d'un sous-système de $\mathfrak{B}$ et (iv) R_2 peut être décomposé en deux parties disjointes denses Δ et Θ; la puissance d'une certaine d'elles — soit Δ — est égale à $\mathfrak{e}^{\aleph_0}$.

Un tel espace R se construit bien aisément. En effet, on peut prendre pour R_1 le produit cartésien (v. «Č», p. 829 ou «P, esp. abstr.», p. 8) de $\mathfrak{e}$ espaces isolés à deux points. De même, le produit cartésien R_2 de $\aleph_0$ espaces homéomorphes à un espace bicompact de puissance $\mathfrak{e}$ et qui ne possède qu'un seul point non isolé jouit des propriétés qui viennent d'être énoncées. La normalité de R résulte de la bicompacticité des produits cartésiens d'espaces bicompacts («Č», p. 830). Car on sait que la bicompacticité entraîne la normalité.

Dorénavant, soit $\overline{M}$ la fermeture dans R de M quelconque. A tout couple d'ensembles-éléments U et V de $\mathfrak{B}$ avec $\overline{U} \subset V$, faisons correspondre, suivant Urysohn, une fonction $f_{U,V}$ réelle continue définie sur R avec $f_{U,V}(x) = 1$ ou $= 0$ resp. lorsque $x \in \overline{U}$ ou $x \in R - V$ resp. Soit E_1 l'ensemble des $f_{U,V}$. Posons encore $Q = R_1 + \Theta + \Gamma$ avec un $\Gamma \subset \Delta$ quelconque. La topologie u étant définie de la même manière que dans le théorème I, le caractère du point o dans l'espace $(E_1 + (o), u)$ est égal à $exp\, \mathfrak{e}$. En effet, ce caractère ne pouvant pas surpasser $exp\, \mathfrak{e}$ (car il n'y a que $\mathfrak{e}$ fonctions $f_{U,V}$ tout au plus), il suffit, pour prouver l'inégalité $\chi_u(o) \geqq exp\, \mathfrak{e}$, de reprendre le raisonnement du théorème I en s'apercevant que les f_n peuvent être choisies de façon qu'on ait toujours $f_n = f_{U,V}$ pour un couple convenable U, V (qui dépend de n).

Assujettissons encore l'ensemble Δ à la condition supplémentaire que (v) les caractères des points de Δ dans l'espace R soient dénombrables. En effet, cette condition est admissible en appelant Δ le produit cartésien qu'on obtient de R_2 en supprimant dans tout facteur le point unique non isolé.

Désignons par v la topologie qu'on obtient de u en isolant tous les $f_{U,V}$ sauf o. Les entourages de o seront les mêmes pour les deux topo logies u et v. Pour mettre en évidence que v dépend de Γ, écrivons-la v_Γ. On voit que $v_{\Gamma''}$ *non* $\subset v_{\Gamma'}$ lorsque Γ' *non* $\subset \Gamma''$. En effet, soit $a \in \Gamma' - \Gamma''$. Il existe, d'après (v), deux suites d'ensembles-éléments de $\mathfrak{B}$, soit U_n et V_n, avec $\overline{U}_n \subset V_n$ et $V_{n+1} \subset V_n$, $a \in U_n$; les V_n ne contiennent que le point a en commun. Soit $f_n = f_{U_n, V_n}$. Il est bien évident que les nombres $f_n(x)$ convergent vers 0 pour tout $x \in \Gamma''$ tandis qu'on a $f_n(a) = 1$ pour tout n. Alors, $o \in v_{\Gamma''} S - v_{\Gamma'} S$, où S désigne la suite des f_n. On a donc $v_{\Gamma''}$ *non* $\subset v_{\Gamma'}$, c. q. f. d.

Soit E_2 un ensemble disjoint de $E_1 + (o)$ de puissance $\mathfrak{z}$ et de plus, soit E_3 un ensemble disjoint de $E_1 + E_2 + (o)$ de puissance $\mathfrak{e}$. Posons $E = E_1 + E_2 + E_3 + (o)$. Dans l'espace (E, w) à construire, tous les points seront ouverts et fermés à la fois, sauf le point o qui aura pour ses entourages les ensembles $E_2 - K + U$ avec un K fini quelconque et où U désigne un entourage quelconque de o dans l'espace $(E_1 + (o), v)$. On voit que $\lambda^*(w) = 1$. Ainsi, on vérifie sans peine toutes les propriétés voulues de la topologie w.

Pour établir l'existence de topologies w incomparables en nombre $exp\, \mathfrak{e}^{\aleph_0}$ il suffit de remplacer chacune d'elles par la topologie correspondente v et trouver les topologies v incomparables en nombre $exp\, \mathfrak{e}^{\aleph_0}$. D'autre part, nous avons déjà prouvé que les topologies $v_{\Gamma'}$ et $v_{\Gamma''}$ sont incomparables, supposé que les ensembles Γ' et Γ'' le soient, c'est à dire qu'on n'ait ni $\Gamma' \subset \Gamma''$ ni $\Gamma'' \subset \Gamma'$. Alors, il nous reste à prouver que, dans un ensemble Δ de puissance $\vartheta = \mathfrak{e}^{\aleph_0}$, on peut trouver des sous-ensembles incomparables en nombre $exp\, \vartheta$. Pour cela, envisageons un produit cartésien P d'espaces isolés à deux points à ϑ facteurs. On peut identifier les éléments de Δ à ceux d'une base ouverte de P. A chaque point p de P nous faisons correspondre le système Δ_p de tous les ensembles-éléments de Δ qui contiennent p. On sait qu'il existe, pour tout couple de points p' et p'' de P, un $U' \in \Delta_{p'}$ et un $U'' \in \Delta_{p''}$ avec $U' U'' = 0$. Alors, U'' *non* $\in \Delta_{p'}$ et U' *non* $\in \Delta_{p''}$ d'où l'incomparabilité des systèmes $\Delta_{p'}$ et $\Delta_{p''}$. Le nombre de ces systèmes étant égal à celui des p alors à $exp\, \vartheta$, on a le théorème à prouver.

Dorénavant, la relation $\nu(u) = 1$ ($\nu(u) = 0$) veut dire que l'espace doué de la topologie u est (n'est pas) complètement normal.

THÉORÈME V. *Soit* $\nu\,.\,\lambda^* \leqq \eta \leqq \lambda$. *Alors, le nombre précis de topologies* w *incomparables avec* $\eta(w) = 1$ *et* $\chi_w(e) = exp\, \mathfrak{e}$, $\psi_w(e) = \mathfrak{z}$ *pour tout* $e \in E$ *est égal à* $exp\, \mathfrak{e}^{\aleph_0}$.

Démonstration. Pour prouver ce théorème, il suffit de remplacer, les espaces $J = (E, w)$ que nous avons construits dans la démonstration précédente par les espaces N qui s'en obtiennent de la manière que nous allons décrire. Les points de N seront les suites finies $p = \{p^1, p^2, \ldots, p^k\}$ avec $p^l \in E - (o)$; posons $k = \lambda p$; soit U_p l'ensemble de tous les $q = \{q^1, q^2, \ldots\} \in N$ avec $\lambda q \geqq \lambda p$, $q^l = p^l$ pour $l = 1, 2, \ldots, \lambda p$; les entourages définissants du point p dans N seront les ensembles

$U_p - \sum_x U_r$ avec $x \in U_p - (p)$, $\lambda x = \lambda p + 1$ et x^{n+1} parcourant un ensemble $X \subset E$ tel que $E - X + (o)$ est un entourage de o dans J. Les propriétés désirées des espaces N se vérifient sans peine (cf. «P, exist.», 0·1 et 0·2).

Nous exprimons par $\tau(u) = 1$ la propriété de u qu'il existe, pour tout couple de points, des entourages ouverts disjoints; on écrit $\tau(u) = 0$ lorsque $\tau(u) \neq 1$.

THÉORÈME VI. *Soit* $\tau \,.\, \lambda^* \leqq \eta \leq \lambda$, $\mathfrak{e} \leq \mathfrak{h}^{\aleph_0}$. *Alors, le nombre précis de topologies* w *incomparables avec* $\eta(w) = 1$ *et* $\chi_w(e) = exp\, \mathfrak{e}$ *pour tout* $e \in E$ *est égal à* $exp\, \mathfrak{e}^{\aleph_0}$ *sous la condition que tout espace en question contienne une partie dense de puissance* $\mathfrak{h}$.

Avant de le prouver, remarquons encore que la dite condition entraîne d'une façon bien triviale que $\mathfrak{e}$ ne saurait surpasser $\mathfrak{h}^{\aleph_0}$.

Démonstration. Pour prouver notre théorème, envisageons le produit cartésien P de $\aleph_0$ espaces isolés de puissances $\mathfrak{h}$. C'est un espace de Hausdorff à caractères dénombrables; c'est alors que P est un espace dont la topologie rend égale à l'unité la fonction λ^*. De plus, c'est un espace de puissance $\mathfrak{h}^{\aleph_0}$ contenant une partie dense T de puissance $\mathfrak{h}$. Modifions encore un peu la topologie de P en isolant tous les points de T et en prenant pour les entourages des points $p \in P - T$ les ensembles $T\, U$, où U parcourt les entourages de p dans P. Soit K un sous-espace de l'espace ainsi obtenu avec $T \subset K$ et tel que la puissance de $K - T$ est égale à $\mathfrak{e}$. Imaginons maintenant de posséder de tels espaces K en nombre infini dénombrable. Soient K_n (n naturel) les espaces en question supposés disjoints deux à deux. Étant donnée une valeur fixée de Γ dans la démonstration du théorème IV, nous allons construire un espace S (qui dépend de Γ) qui se composera du point o qu'on suppose étranger à tous les K_n et des derniers espaces eux-mêmes. Il existe pour tout n naturel une fonction f_n biunivoque dont l'argument parcourt l'ensemble E du théorème IV excepté le point o et dont les valeurs sont des points non isolés de K_n. Nous introduisons dans S la notion de limite qui sera identique, dans les K_n, à celle définie par la topologie des K_n. De plus, une suite infinie de points de $\sum_n K^i{}_n$, où $K^i{}_n$ désigne la partie isolée de K_n, aura o pour sa limite, lorsqu'elle ne contiendra une infinité de points en commun avec aucun K_n. Soit de plus $\sum_n F_n$ une décomposition en parties disjointes finies d'une suite de points convergente vers o dans l'espace (E, u) du théorème IV. Alors, la suite $\sum_n f_n(F_n)$ sera convergente vers o dans l'espace à construire. En énonçant encore pour convergeant vers un point p quelconque toute suite ne contenant qu'un nombre fini de termes distincts de p ainsi que toute suite-somme d'un nombre fini de suites convergeant vers p, on voit que la topologie r ainsi définie rend égale à l'unité la fonction λ^*. De plus, il est facile de prouver que $\bar{r} = r$

et qu'on obtient, en faisant varier Γ, des topologies r incomparables. C'est ainsi que nous avons obtenu la proposition intermédiaire suivante:

Le nombre précis de topologies r incomparables sur un ensemble de puissance $\mathfrak{e}$ *avec* $\bar{r} = r$, $\eta(r) = 1$ $(\tau \,.\, \lambda^* \leqq \eta \leqq \lambda)$ *où le caractère d'un point est égal à exp* $\mathfrak{e}$ *et telles que les espaces correspondents contiennent chacun une partie dense de puissance* $\mathfrak{h}$ *est égal à exp* $\mathfrak{e}^{\aleph_0}$.

Pour obtenir notre théorème, on n'a qu'à replacer tout espace S par un espace dont les points parcourent l'ensemble E des suites finies de points de $S-(o)$ et où la convergence des suites-points $p_n = \{p^1{}_n, p^2{}_n, \ldots, p_n^{k_n}\}$ vers un point $p = \{p^1, p^2, \ldots, p^k\}$ $(p^i{}_n \in S-(o),\ p^i \in S-(o))$ veut dire qu'ou bien $p_n = p$ pour presque tous les n, ou bien presque tous les k_n surpassent k et l'on a $p^i{}_n \to p^i\ (i \leqq k,\ n \to \infty)$, $p_n^{k+1} \to o$ (nous exprimons par $\to$ la convergence dans S).

Les propriétés de l'espace qui vient d'être construit se vérifient sans peine. En particulier, pour prouver la propriété de sa topologie de rendre égale à l'unité la fonction τ, il suffit d'envisager les entourages ouverts $U + (p)$ que nous allons décrire d'un $p = \{p^1, p^2, \ldots, p^k\} \in E$ quelconque. A chaque $l \leqq k$ faisons correspondre un sous-ensemble ouvert U_l de $S-(o)$ avec $p^l \in U_l$. De même, soit $U_{k+1} + (o)$ un sous-ensemble ouvert de S, o *non* $\in U_{n+1}$. Alors, U sera l'ensemble de tous les $q = \{q^1, q^2, \ldots, q^N\}$ avec $N > k$ et $q^l \in U_l$ pour $l \leqq k+1$.