Eduard Čech

Classe différentielle des courbes. Sections et projections

Rev. Math. Pures Appl. 2 (1957), 151-159

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501095

CLASSE DIFFÉRENTIELLE DES COURBES SECTIONS ET PROJECTIONS

PAR

EDUARD ČECH

(Prague)

Dans ma communication *Sur l'existence de dérivées en géométrie différentielle**) j'ai classifié les courbes de l'espace E_3 selon les ordres de différentiabilité des éléments osculateurs (point, tangente, plan osculateur). Les démonstrations sont données dans mon Mémoire *Détermination du type différentiel d'une courbe de l'espace à deux, trois ou quatre dimensions***) cité ici par *TD*, où j'ai considéré aussi les courbes de E_4. Le présent Mémoire complète *TD* en examinant l'invariance projective du type différentiel; en outre, on considère ici, du point de vue du type différentiel, l'opération de projection d'une courbe de E_3 ou de E_4, ainsi que l'opération de section, corrélative à la projection.

1. Considérons une courbe $C(t)$ de l'espace E_n, rapportée à un paramètre t donné, qu'on supposera *régulier* dans le sens que, en chaque point $X(t)$ de la courbe, il existe une tangente $T_1(t)$, un plan osculateur $T_2(t), \ldots$, un hyperplan osculateur $T_{n-1}(t)$ tels que les coordonnées de $X(t)$; $T_1(t), \ldots, T_{n-1}(t)$ possèdent des dérivées continues du premier ordre et qu'on ait

$$dX \neq 0, \ dT_1 \neq 0, \ \ldots, \ dT_{n-1} \neq 0$$

pour chaque t. Posons.

$$r_0 = \text{cl}\ X(t),\ r_1 = \text{cl}\ T_1(t),\ \ldots,\ r_{n-1} = \text{cl}\ T_{n-1}(t), \tag{1}$$

où $\text{cl}\ f(t) \geqq k\ (\geqq 0)$ signifie que la fonction $f(t)$ possède pour chaque t des dérivées continues jusqu'à l'ordre k. La suite finie

$$(r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}) \tag{2}$$

sera appelée *classe différentielle* de $C(t)$. Nous excluons le cas

$$r_0 = r_1 = \ldots = r_{n-1} = \infty$$

---

*) Quatrième Congrès des Mathématiciens Roumains, Bucarest, 27 mai—4 juin 1956.
**) Czechoslovak Mathematical Journal, 1957, t. 7 (82), n° 4.

de classe différentielle infinie, ce cas étant banal du point de vue qui nous occupe. Les nombres (1) sont donc des entiers positifs; l'entier $r \geqq 0$, où

$$r = \min_{0 \leqq i \leqq n-1} r_i - 1, \tag{3}$$

sera appelé *indice différentiel* de $C(t)$.

On voit sans peine que les nombres (1) sont assujettis aux conditions

$$|r_i - r_{i-1}| \leqq 1 \quad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq n-1; \tag{4}$$

si la classe différentielle (2) est liée *seulement* par les relations (4), ce que je n'ai vérifié que pour $n \leqq 4$, il y a pour chaque valeur $r \geqq 0$ de (3), 3^{n-1} valeurs possibles pour la classe différentielle, car si r est donné, les suites (2) sont évidemment en correspondance biunivoque avec les suites

$$(r_1 - r_0, \ldots, r_{n-1} - r_{n-2})$$

dont le nombre est manifestement 3^{n-1} en vertu de (4).

On reconnaît immédiatement que la classe différentielle (2) est invariante envers les transformations homographiques de $C(t)$ et qu'une transformation dualistique change (2) en

$$(r_{n-1}, \ldots, r_1, r_0).$$

Dans le Mémoire *TD*, j'ai donné pour $n = 2, 3, 4$ l'expression de la classe différentielle (2) moyennant les invariants métriques de $C(t)$. Définissons les fonctions $K_i(t)$ moyennant les formules de Frenet

$$\frac{dX}{dt} = K_0 e_1,$$

$$\frac{de_1}{dt} = K_1 e_2, \quad \frac{de_i}{dt} = -K_{i-1} e_{i-1} + K_i e_{i+1} \ (2 \leqq i \leqq n-2), \quad \frac{de_n}{dt} = -K_{n-1} e_{n-1}.$$

Alors la classe différentielle de $C(t)$ s'exprime moyennant les nombres cl K_i $(0 \leqq i \leqq n-1)$ pour $n = 2$ selon le tableau [*TD*, n° 2]

cl $K_0(t)$	cl $K_1(t)$	r_0	r_1
r	r	$r+1$	$r+1$
$\geqq r+1$	r	$r+2$	$r+1$
r	$\geqq r+1$	$r+1$	$r+2$

(5)

pour $n = 3$ selon le tableau [TD, (3.8)]

cl $K_0(t)$	cl $K_1(t)$	cl $K_2(t)$	r_0	r_1	r_2
r	r	r	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$\geqq r+1$	r	r	$r+2$	$r+1$	$r+1$
r	$\geqq r+1$	r	$r+1$	$r+2$	$r+1$
r	r	$\geqq r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
r	$\geqq r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$
$\geqq r+1$	r	$\geqq r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+2$
$r+1$	$\geqq r+1$	r	$r+2$	$r+2$	$r+1$
$\geqq r+2$	$\geqq r+1$	r	$r+3$	$r+2$	$r+1$
r	$\geqq r+1$	$\geqq r+2$	$r+1$	$r+2$	$r+3$

(6)

pour $n = 4$ selon les tableaux TD (5.12), (5.12′), (5.12″) que nous ne reproduirons pas ici.

2. Soit H un hyperplan fixe de l'espace E_n qui contient la courbe $C(t)$ rapportée au paramètre régulier t et supposons que H ne contienne aucun point de la courbe $C(t)$. Alors, en variant t, la trace de la tangente $T_1(t)$ sur l'hyperplan H décrit dans cet hyperplan une courbe $C'(t)$ que nous appellerons *section* de la courbe $C(t)$ et pour laquelle t est manifestement de nouveau un paramètre régulier. Si l'on désigne par $[L]$ l'intersection de H avec un sous-espace linéaire L de E_n, on voit sans peine que

$$[T_1(t)],\ [T_2(t)],\ \ldots,\ [T_{n-1}(t)]$$

sont respectivement le point, la tangente, ..., le $(n-2)$—plan osculateur de la courbe $C'(t)$. Il en résulte que la classe différentielle de $C'(t)$ est

$$(r'_1, \ldots, r'_{n-1}), \tag{7}$$

où

$$r'_i = \text{cl}\ [T_i(t)] \quad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq n-1. \tag{8}$$

En comparant (8) à (1) on voit que l'on a toujours

$$r'_i \geqq r_i \quad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq n-1. \tag{9}$$

Or il est aisé de voir que l'inégalité $r'_i > r_i$ est exceptionnelle; en effet, si l'on connaît les coordonnées des intersections de l'espace $T_i(t)$ avec deux hyperplans H_1 et H_2, on en peut calculer les coordonnées de $T_i(t)$ moyennant des opérations rationnelles, ce qui prouve que pour i donné il existe au plus une position de l'hyperplan H telle que $r'_i > r_i$. Il en résulte que, pour décider si l'inégalité $r'_i > r_i$ est possible, il suffit d'examiner le cas où H est l'hyperplan à l'infini. Or, dans ce cas les éléments osculateurs (point, tangente, ...) de la courbe $C'(t)$ sont manifestement

$$e_1, [e_1 e_2], \ldots, [e_1 e_2 \ldots e_{n-1}] = e_n.$$

En particulier, pour $n = 3$ on a le tableau *TD* (3.2).

cl $K_1(t)$	cl $K_2(t)$	cl $e_1(t)$	cl $e_3(t)$
r	r	$r+1$	$r+1$
$\geqq r+1$	r	$r+2$	$r+1$
r	$\geqq r+1$	$r+1$	$r+2$

(10)

En comparant avec les tableaux (5) et (6) on déduit que pour $n = 3$ on a le résultat suivant: *Si la classe différentielle* (r_0, r_1, r_2) *de* $C(t)$ *n'a ni la forme* $(r+1, r+2, r+2)$ *ni la forme* $(r+1, r+2, r+3)$, *alors, pour chaque position du plan H, la classe différentielle de* $C'(t)$ *est égale à* (r_1, r_2) *et l'indice différentiel de* $C'(t)$ *est alors égal à celui de* $C(t)$. *Si la classe différentielle de* $C(t)$ *est* $(r+1, r+2, r+2)$, *il peut exister un plan exceptionnel H tel que la classe différentielle de* $C'(t)$ *relative à H soit* $(r+3, r+2)$. *Si la classe différentielle de* $C(t)$ *est* $(r+1, r+2, r+3)$, *il peut exister un plan exceptionnel H tel que la classe différentielle de* $C'(t)$ *relative à H soit* (r'_1, r'_2), *les entiers* r'_1, r'_2 *n'étant soumis qu'aux conditions*

$$r'_1 \geqq r+2, \ r'_2 \geqq r+3, \ |r'_1 - r'_2| \leqq 1.$$

En faisant usage du tableau *TD* (5.3), que nous ne reproduirons pas ici, on déduit pour $n = 4$: *Si la classe différentielle* (r_0, r_1, r_2, r_3) *n'a aucune des six formes exceptionnelles*

$$(r+1, r+2, r+2, r+k) \text{ avec } k = 1 \text{ ou } k = 2 \text{ ou } k = 3, \quad (11)$$

$$(r+1, r+2, r+3, r+k) \text{ avec } k = 2 \text{ ou } k = 3 \text{ ou } k = 4, \quad (12)$$

la classe différentielle de $C'(t)$ *est, pour chaque hyperplan H, égale à* (r_1, r_2, r_3). *Dans les trois cas* (11) *on a toujours* $r'_2 = r_2$, $r'_3 = r_3$, *si* (r'_1, r'_2, r'_3) *indique la classe différentielle de* $C'(t)$, *mais il se peut qu'il existe un hyperplan exceptionnel, pour lequel* $r'_1 = r_1 + 1$. *Dans les trois cas* (12), *si l'hyperplan H est exceptionnel, pour* $k = 2$ *on a* $r'_2 = r_2$, $r'_3 = r_3$, $r'_1 > r_1$; *pour* $k = 3$ *on a* $r'_3 = r_3$, $r'_2 \geqq r_2$, $r'_1 > r_1$; *pour* $k = 4$ *on a* $r'_3 \geqq r_3$, $r'_2 \geqq r_2$, $r'_1 > r_1$; *outre les conditions indiquées, les valeurs de* r'_1, r'_2, r'_3 *ne sont limitées que par les inégalités usuelles*

$$|r'_1 - r'_2| \leqq 1 \quad , \quad |r'_2 - r'_3| \leqq 1.$$

3. Les résultats du n° 2 peuvent être transformés par dualité. Soit P un point fixe de l'espace E_n contenant $C(t)$ et supposons que P n'appartienne à

aucun hyperplan osculateur de $C(t)$. Le paramètre t étant régulier pour la courbe $C(t)$, il l'est aussi pour la *projection* $C^*(t)$ de $C(t)$ du centre P dans un hyperplan fixe π qui ne passe pas par P. La classe différentielle

$$(r_0^*, \ldots, r_{n-2}^*)$$

de $C^*(t)$, indépendante de la position de π, satisfait toujours aux inégalités

$$r_i^* \geqq r_i \quad \text{pour} \quad 0 \leqq i \leqq n-2.$$

En général, on a même $r^* = r_i$; pour chaque i il existe au plus un point exceptionnel P tel que $r_i^* > r_i$. Pour $n = 3$, si la classe différentielle de $C(t)$ n'a ni la forme $(r+2, r+2, r+1)$ ni la forme $(r+3, r+2, r+1)$, il n'existe aucun point exceptionnel; si la classe différentielle de $C(t)$ est $(r+2, r+2, r+1)$, il se peut qu'il existe un point exceptionnel P, tel que la classe différentielle de $C^*(t)$ soit $(r+2, r+3)$. Si la classe différentielle de $C(t)$ est $(r+3, r+2, r+1)$, il se peut qu'il existe un point exceptionnel P, tel que la classe différentielle de $C^*(t)$ soit (r_0^*, r_1^*) où les entiers r_0^*, r_1^* ne sont soumis qu'aux conditions

$$r_0^* \geqq r+3 \quad , \quad r_1^* \geqq r+2 \quad , \quad |r_0^* - r_1^*| \leqq 1.$$

Pour $n = 4$, un point exceptionnel P existe tout au plus pour les formes suivantes de la classe différentielle de $C(t)$:

$$(r+k, r+2, r+2, r+1), \ k = 1 \ \text{ou} \ k = 2 \ \text{ou} \ k = 3, \tag{13}$$

$$(r+k, r+3, r+2, r+1), \ k = 2 \ \text{ou} \ k = 3 \ \text{ou} \ k = 4. \tag{14}$$

Si P est un point exceptionnel, on a $r_0^* = r_0$, $r_1^* = r_1$, $r_2^* = r_2 + 1$ dans le cas (13); dans le cas (14), on a $r_0^* = r_0$, $r_1^* = r_1$, $r_2^* > r_2$ si $k = 2$, $r_0^* = r_0$, $r_1^* \geqq r_1$, $r_2^* > r_2$ si $k = 3$, $r_0^* \geqq r_0$, $r_1^* \geqq r_1$, $r_2^* > r_2$ si $k = 4$; les valeurs indiquées de r_0^*, r_1^*, r_2^* ne sont limitées que par les inégalités

$$|r_0^* - r_1^*| \leqq 1 \quad , \quad |r_1^* - r_2^*| \leqq 1.$$

4. La courbe C de l'espace E_n sera dite régulière si elle possède au moins un paramètre régulier t. Les rapports mutuels des quantités $K_i \, (0 \leqq i \leqq n-1)$ sont alors indépendants du choix de t: on a

$$K_0 : K_1 : \ldots : K_{n-1} = 1 : k_1 : \ldots : k_{n-1},$$

les $k_i \; (1 \leqq i \leqq n-1)$ étant les courbures de C. Or, considérons les paramètres réguliers distingués

$$\sigma_i = \int K_i \, dt \qquad (0 \leqq i \leqq n-1) \tag{15}$$

qui sont indépendants du choix initial de t et dont on connaît la signification géométrique; en particulier σ_0 est l'arc de C. Soit

$$(r_{i0}, r_{i1}, \ldots, r_{i,n-1}) \quad , \quad (0 \leqq i \leqq n-1) \tag{16}$$

la classe différentielle de $C(\sigma_i)$. Si t est un paramètre régulier quelconque et si (1) est la classe différentielle de $C(t)$, alors

$$r_i \leqq r_{ii} \quad \text{pour} \quad 0 \leqq i \leqq n-1$$

et plus précisément

$$r_i = \min\,[r_{ii},\ \mathrm{cl}\,\sigma_i(t)] \tag{17}$$

de manière que $r_i = r_{ii}$ si et seulement si $\mathrm{cl}\,\sigma_i(t) \geqq r_{ii}$. Dans le Mémoire *TD* j'ai appelé *type différentiel* de C la matrice carrée d'ordre n dont la $(i+1)^{\text{ème}}$ ligne est égale à (16). Il résulte de (17) que ce type différentiel détermine les classes différentielles relatives à tous les paramètres réguliers. Le type différentiel n'étant pas toujours un invariant projectif de C, appelons *type projectif* de C la suite finie

$$(r_{00},\ r_{11},\ \ldots,\ r_{n-1,\,n-1}) \tag{18}$$

qui est manifestement invariante envers les transformations homographiques de C; une transformation dualistique de C change (18) en

$$(r_{n-1,\,n-1},\ \ldots,\ r_{11},\ r_{00}).$$

Une sous-suite

$$[i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_k] \tag{19}$$

de la suite finie $[0, 1, \ldots, n-1]$ est appelée *liaison* de C s'il existe un paramètre régulier t tel que $r_i(t) = r_{ii}$ pour chaque terme i de (19); chaque liaison est manifestement un invariant projectif de C et, si (19) est une liaison de C alors

$$[n-1-i_k,\ \ldots,\ n-1-i_2,\ n-1-i_1]$$

est une liaison de chaque transformée dualistique de C. Appelons aussi *indice projectif* de C l'entier non négatif r égal à la valeur maximum de l'indice différentiel de $C(t)$, t parcourant tous les paramètres réguliers de C. Des formules du Mémoire *TD* on déduit sans peine que pour $n \leqq 4$ on a

$$r = \min_{0 \leqq i \leqq n-1} r_{ii} - 2; \tag{20}$$

mais je ne sais pas si (20) vaut aussi pour les valeurs supérieures de n.

5. Pour $n = 2$, il s'ensuit de *TD*, n° 2, que si $\mathrm{cl}\,k_1(\sigma_0) = r$, où k_1 est la courbure de C, le type différentiel de C est

$$\begin{pmatrix} r+2 & r+1 \\ r+1 & r+2 \end{pmatrix},$$

de manière que r est l'indice projectif de C. Il en résulte que pour chaque r il n'y a qu'un seul type projectif $(r+2,\ r+2)$, qui est toujours sans liaison.

Pour $n = 3$, j'ai montré [*TD*, n° 4] comment on peut déterminer le type différentiel de C si les deux courbures k_1, k_2 de C sont exprimées en fonction de σ_1. Pour chaque valeur de $r = 0, 1, 2, \ldots$ (r étant l'indice projectif de C), on a selon TD les six possibilités suivantes pour le type différentiel, soit τ, de C.

Si $\mathrm{cl}\ k_1\ (\sigma_1) = \mathrm{cl}\ k_2\ (\sigma_1) = \mathrm{cl}\ \dfrac{k_1(\sigma_1)}{k_2(\sigma_1)} = r$, on a

$$\tau = \begin{pmatrix} r+2 & r+1 & r+1 \\ r+1 & r+2 & r+1 \\ r+1 & r+1 & r+2 \end{pmatrix}.$$

Si $\mathrm{cl}\ k_1\ (\sigma_1) = \mathrm{cl}\ \dfrac{k_2(\sigma_1)}{k_1(\sigma_1)} = r$, $\mathrm{cl}\ k_2\ (\sigma_1) \geqq r+1$, on a

$$\tau = \begin{pmatrix} r+2 & r+1 & r+2 \\ r+1 & r+2 & r+1 \\ r+2 & r+1 & r+2 \end{pmatrix}.$$

Si $\mathrm{cl}\ k_1\ (\sigma_1) = \mathrm{cl}\ k_2\ (\sigma_1) = r$, $\mathrm{cl}\ \dfrac{k_1(\sigma_1)}{k_2(\sigma_1)} = r+1$, on a

$$\tau = \begin{pmatrix} r+2 & r+1 & r+1 \\ r+1 & r+2 & r+2 \\ r+1 & r+2 & r+3 \end{pmatrix}.$$

Si $\mathrm{cl}\ k_2\ (\sigma_1) = \mathrm{cl}\ \dfrac{k_1(\sigma_1)}{k_2(\sigma_1)} = r$, $\mathrm{cl}\ k_1\ (\sigma_1) = r+1$, on a

$$\tau = \begin{pmatrix} r+3 & r+2 & r+1 \\ r+2 & r+2 & r+1 \\ r+1 & r+1 & r+2 \end{pmatrix}.$$

Si $\mathrm{cl}\ k_1\ (\sigma_1) = \mathrm{cl}\ k_2\ (\sigma_1) = r$, $\mathrm{cl}\ \dfrac{k_1(\sigma_1)}{k_2(\sigma_1)} \geqq r+2$, on a

$$\tau = \begin{pmatrix} r+2 & r+1 & r+1 \\ r+1 & r+2 & r+3 \\ r+1 & r+2 & r+3 \end{pmatrix}.$$

Si $\mathrm{cl}\ k_2\ (\sigma_1) = \mathrm{cl}\ \dfrac{k_1(\sigma_1)}{k_2(\sigma_1)} = r$, $\mathrm{cl}\ k_1\ (\sigma_1) \geqq r+2$, on a

$$\tau = \begin{pmatrix} r+3 & r+2 & r+1 \\ r+3 & r+2 & r+1 \\ r+2 & r+1 & r+2 \end{pmatrix}.$$

Il en résulte sans peine que, pour chaque valeur r de l'indice projectif, on a pour le type projectif (r_{00}, r_{11}, r_{22}) et pour les liaisons les quatre possibilités suivantes que je désigne par $\alpha(r)$, $\beta(r)$, $\gamma(r)$, $\delta(r)$.

$$\alpha(r): r_{00} = r_{11} = r_{22} = r + 2, \text{ aucune liaison;}$$

$$\beta(r): r_{00} = r_{11} = r_{22} = r + 2, \text{ liaison [02];}$$

$$\gamma(r): r_{00} = r_{11} = r + 2, \ r_{22} = r + 3, \text{ liaison [12];}$$

$$\delta(r): r_{00} = r + 3, \ r_{11} = r_{22} = r + 2, \text{ liaison [01].}$$

Pour $n = 4$, j'ai aussi déterminé [*TD*, n° 6] le type différentiel de la courbe C, en supposant ses courbures k_1, k_2, k_3 exprimées en fonctions d'un paramètre choisi convenablement parmi les paramètres distingués σ_0, σ_1, σ_2, σ_3. Pour chaque valeur r de l'indice projectif, il y a 41 valeurs possibles [*TD* (6.6) — (6.46)] du type différentiel, que nous ne reproduirons pas ici. Ceci conduit sans peine à 16 possibilités (pour chaque valeur de r) pour le type projectif et les liaisons:

I (r) type proj. $(r + 2, r + 2, r + 2, r + 2)$, aucune liaison;
II (r) type proj. $(r + 2, r + 2, r + 2, r + 2)$, liaison [02];
III (r) type proj. $(r + 2, r + 2, r + 2, r + 2)$, liaison [13];
IV (r) type proj. $(r + 2, r + 2, r + 2, r + 2)$, liaison [12];
V (r) type proj. $(r + 2, r + 2, r + 2, r + 2)$, liaison [03];
VI (r) type proj. $(r + 2, r + 2, r + 2, r + 2)$, liaisons [03] et [12];
VII (r) type proj. $(r + 2, r + 2, r + 2, r + 2)$, liaisons [02] et [13];
VIII (r) type proj. $(r + 3, r + 2, r + 2, r + 2)$, liaison [01];
IX (r) type proj. $(r + 2, r + 2, r + 2, r + 3)$, liaison [23];
X (r) type proj. $(r + 3, r + 2, r + 2, r + 2)$, liaison [013];
XI (r) type proj. $(r + 2, r + 2, r + 2, r + 3)$, liaison [023];
XII (r) type proj. $(r + 3, r + 2, r + 2, r + 3)$, liaisons [01] et [23];
XIII (r) type proj. $(r + 3, r + 3, r + 2, r + 2)$, liaisons [02] et [12];
XIV (r) type proj. $(r + 2, r + 2, r + 3, r + 3)$, liaisons [13] et [12];
XV (r) type proj. $(r + 4, r + 3, r + 2, r + 2)$, liaison [012];
XVI (r) type proj. $(r + 2, r + 2, r + 3, r + 4)$, liaison [123].

6. Les résultats de *TD* ainsi que ceux des n[os] 2 et 3 de ce Mémoire permettent de déduire pour $n = 3$ et pour $n = 4$, de la connaissance du type projectif et des liaisons de la courbe C, les éléments correspondants de sa section C' moyennant un hyperplan H et de sa projection C^* ayant son centre au point C'. Nous nous contenterons d'énoncer les résultats.

Soit d'abord $n = 3$. Si le plan H et le point P ne sont pas exceptionnels, l'indice projectif de C' et celui de C^* sont égaux à l'indice projectif r de C. Si c'est le cas $\alpha(r)$ ou $\beta(r)$ qui a lieu pour C, aucun plan H et aucun point P ne sont exceptionnels. Dans le cas $\gamma(r)$ il n'existe aucun point exceptionnel, mais il peut exister un plan exceptionnel H, pour lequel l'indice projectif de la section C' peut avoir une valeur quelconque supérieure à r. Dans le cas $\delta(r)$

il n'existe aucun plan exceptionnel, mais il peut exister un point exceptionnel P, pour lequel l'indice projectif de la projection C^* peut avoir une valeur quelconque supérieure à r.

Soit maintenant $n = 4$. Pour la courbe C d'indice projectif r, nous avons 16 possibilités I (r)—XVI (r). Pour la section C' et la projection C^*, si ρ en est l'indice projectif, nous avons 4 possibilités $\alpha(\rho)$, $\beta(\rho)$, $\gamma(\rho)$, $\delta(\rho)$. Si l'hyperplan de section H et le centre de projection P ne sont pas exceptionnels, on aura la situation suivante:

Cas I (r).	Section α (r),	projection α (r).
Cas II (r).	Section α (r),	projection β (r).
Cas III (r).	Section β (r),	projection α (r).
Cas IV (r).	Section δ (r),	projection γ (r).
Cas V (r).	Section α (r),	projection α (r).
Cas VI (r).	Section δ (r),	projection α (r).
Cas VII (r).	Section β (r),	projection β (r).
Cas VIII (r).	Section α (r),	projection α (r).
Cas IX (r).	Section α (r),	projection α (r).
Cas X (r).	Section β (r),	projection α (r).
Cas XI (r).	Section α (r),	projection β (r).
Cas XII (r).	Section γ (r),	projection δ (r).
Cas XIII (r).	Section δ (r),	projection α $(r+1)$.
Cas XIV (r).	Section α $(r+1)$,	projection γ (r).
Cas XV (r).	Section δ (r),	projection δ $(r+1)$.
Cas XVI (r).	Section γ $(r+1)$,	projection γ (r).

Un hyperplan exceptionnel H ne peut exister que dans les cas XIV (r) et XVI (r). Si H est exceptionnel et si pour C on a XIV (r), alors, pour C', on a soit $\beta(r+1)$, soit $\delta(r+1)$; si pour C on a XVI (r), alors l'indice projectif r' de C' sera $\geqq r+2$ et tous les quatre cas $\alpha(r')$, $\beta(r')$, $\gamma(r')$ et $\delta(r')$ seront possibles. Un centre de projection exceptionnel P ne peut exister que dans les cas XIII (r) et XV (r). Si P est exceptionnel, et si pour C on a XIII (r), il en résultera pour C^* soit $\beta(r+1)$, soit $\gamma(r+1)$; si pour C on a XV (r), l'indice projectif r^* de C^* sera $\geqq r+2$ et tous les quatre cas $\alpha(r^*)$, $\beta(r^*)$, $\gamma(r^*)$ et $\delta(r^*)$ seront possibles. Un hyperplan ou point exceptionnel, s'il existe, est toujours univoquement déterminé.