Matyáš Lerch

Zur Theorie der Kronecker'schen Doppelreihe $Ser(\xi, \eta, u, v, w)$

Monatsh. Math. Phys. 5 (1894), 367–379

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501472

Zur Theorie der Kronecker'schen Doppelreihe Ser (ξ, η, u, v, w).

Von M. Lerch in Weinberge bei Prag.

Im Artikel XXI. seiner großen Abhandlung zur Theorie de elliptischen Functionen*) bemerkt Kronecker, dass in der von ihm untersuchten Doppelreihe

$$\sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{u + mv + nw}$$

„überhaupt ein neues Fundament für die Theorie der elliptischen und ϑ-Functionen gewonnen" ist; hieraus, sowie aus dem Umstande, dass Kronecker auf die Begründung verschiedener Eigenschaften dieser Größe wiederholt zurückgegangen ist, ist ersichtlich, dass Kronecker seine Doppelreihe besonders vom methodischen Standpunkte aus gepriesen hat. Seine Formel

$$\sum_{m,n} \frac{e^{2\pi i(n\xi - m\eta)}}{u + mv + nw} =$$

$$= \frac{1}{v} e^{\frac{2\eta u\pi i}{v}} \vartheta_1'\left(0, \frac{w}{v}\right) \vartheta_1\left(\frac{u + \xi v + \eta w}{v}, \frac{w}{v}\right) \vartheta_1\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right) \vartheta_1\left(\frac{\xi v + \eta w}{v}, \frac{w}{v}\right)$$

lässt sich zwar in mannigfacher Weise begründen, namentlich kann man der Reihe links eine zweite an das Weierstrass'sche $p(u)$ erinnernde absolut convergierende Doppelreihe

$$\frac{1}{u} + \sum_{m,n}{}' e^{2\pi i(n\xi - m\eta)}\left(\frac{1}{u + mv + nw} - \frac{1}{mv + nw} + \frac{u}{(mv + nw)^2}\right)$$

zur Seite stellen, indem man sie als Function von u betrachtet; dadurch wird aber der eigenthümliche Umstand, dass nach Absonderung des einfachen Exponentialfactors $e^{\frac{2\eta u\pi i}{v}}$ die rechte Seite eine analytische Function von $\xi v + \eta w$ wird, eigentlich gar nicht aufgeklärt.

---

*) Sitzungsberichte der kön. preußischen Akademie der Wissenschaften 1890.

Die Absicht folgender Mittheilungen ist nun, die Wertbestimmung der Kronecker'schen Doppelreihe in der Art auszuführen, dass man sie lediglich als Function von ξ und η auffasst und dabei an ihrer Gestalt als Doppelreihe festhält.

1.

Es seien ξ, η zwei positive echte Brüche, v, w irgendwelche complexe Größen, deren Verhältnis nicht reell ist, u eine complexe Constante, welche nicht in der Form $mv + nw$ (m, n ganze Zahlen) dargestellt werden kann. Wir bilden die doppelt unendliche Reihe

$$S(\xi, \eta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(n\xi - m\eta)}}{u + mv + nw}$$

und zeigen zunächst, dass sie in dem Gebiete $0 < \xi < 1$, $0 < \eta < 1$ mit Anschluss der Grenzen gleichmäßig convergiert.

Zu dem Zwecke zerlegen wir den Ausdruck $S(\xi, \eta)$ in vier Bestandtheile, welche entstehen, wenn man nur diejenigen Glieder behält, welche ihre Summationsindices m, n aus einer der vier möglichen Reihencombinationen von

$$0, 1, 2, 3, \ldots \text{ und } -1, -2, -3, \ldots$$

schöpfen. Es genügt nun die Convergenz des einen Bestandtheiles

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(n\xi - m\eta)}}{u + mv + nw}$$

darzulegen, da die drei übrigen Ausdrücke in derselben Weise behandelt werden können.

Es soll also dargethan werden, dass die Reihen

$$A_m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(n\xi - m\eta)}}{u + mv + nw}$$

in Bezug auf ξ, η gleichmäßig convergieren und dass durch ihre Summation ebenfalls eine gleichmäßig convergierende Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m$$

entsteht.

Zu dem Zwecke bedienen wir uns der in mancher Frage nützlichen Abel'schen Identität

$$\sum_{n=0}^{p} a_n b_n = \sum_{n=0}^{p-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_p b_p,$$

in welcher $A_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ gesetzt ist. Wird hier

$$a_n = e^{2\pi i(n\xi - m\eta)}, \quad b_n = \frac{1}{u + mv + nw}$$

genommen, so folgt

$$\sum_{n=0}^{p} \frac{e^{2\pi i(n\xi - m\eta)}}{u + mv + nw} = \frac{w}{e^{2\xi\pi i} - 1} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{e^{-2\pi i.m\eta}\left(e^{2\pi i(n+1)\xi} - 1\right)}{(u + mv + nw)(u + mv + nw + w)}$$

$$+ \frac{1}{e^{2\xi\pi i} - 1} \cdot \frac{e^{-2\pi i.m\eta}\left(e^{2\pi i(p+1)\xi} - 1\right)}{u + mv + pw},$$

und hieraus folgt, dass der Grenzwert

$$\lim_{p=\infty} \sum_{n=0}^{p} \frac{e^{2\pi i(n\xi - m\eta)}}{u + mv + nw} = A_m$$

existiert und dass seine Convergenz in Bezug auf ξ, solange $0 < \xi < 1$, sowie auf η eine gleichmäßige ist. Es ergibt sich zugleich der für die Erledigung der zweiten Frage nützliche Ausdruck

$$A_m = \frac{w}{e^{2\xi\pi i} - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i.m\eta}\left(e^{2\pi i(n+1)\xi} - 1\right)}{(u + mv + nw)(u + mv + nw + w)}.$$

Wird nun in der obigen Abel'schen Identität $a_m = e^{2\pi i.m\eta}$,

$$b_m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(n+1)\xi} - 1}{(u + mv + nw)(u + mv + nw + w)}$$

gesetzt, so folgt zunächst

$$\frac{e^{2\xi\pi i} - 1}{w} \sum_{m=0}^{q} A_m$$

$$= \frac{v}{e^{-2\eta\pi i} - 1} \sum_{m=0}^{q-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2s + v + w)\left(e^{2\pi i(n+1)\xi} - 1\right)\left(e^{-2\pi i(m+1)\eta} - 1\right)}{s(s+v)(s+w)(s+v+w)} +$$

$$+ \frac{1}{e^{-2\eta\pi i} - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(e^{2\pi i(n+1)\xi} - 1\right)\left(e^{-2\pi i(q+1)\eta} - 1\right)}{(u + qv + nw)(u + qv + nw + w)},$$

wobei der Kürze wegen die Bezeichnung $s = u + mv + nw$ benutzt wurde.

Und hieraus folgt wiederum, dass die unendliche Reihe $S_0 = \sum_{m=0}^{\infty} A_m$ in Bezug auf ξ, η, solange $0 < \xi < 1$, $0 < \eta < 1$ bleibt, gleichmäßig convergiert und der Größe

$$S_0 = \frac{v\,w}{\left(e^{2\xi\pi i}-1\right)\left(e^{-2\eta\pi i}-1\right)}$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2s+v+w)\left(e^{2\pi i(n+1)\xi}-1\right)\left(e^{-2\pi i(m+1)\eta}-1\right)}{s\,(s+v)\,(s+w)\,(s+v+w)}$$

gleich ist. Diese letzte Doppelsumme ist nun absolut convergent und ändert demnach ihren Wert nicht, wenn die Summation zuerst in Bezug auf m und dann erst in Bezug auf n ausgeführt wird; hieraus folgt die Gleichung

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(n\xi - m\eta)}}{u+mv+nw} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(n\xi - m\eta)}}{u+mv+nw},$$

wodurch auch das für uns wichtige Resultat

$$(1)\qquad \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(n\xi - m\eta)}}{u+mv+nw} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(n\xi - m\eta)}}{u+mv+nw}$$

gewonnen wird.

2.

Aus den vorhergehenden Betrachtungen folgt, dass die Reihe $S(\xi, \eta)$ eine in dem Gebiete $0 < \xi < 1$, $0 < \eta < 1$ überall endliche und stetige Function von ξ und η definiert; es soll nun gezeigt werden, dass der Ausdruck

$$f = S(\xi, \eta)\, e^{-\frac{2\eta u\pi i}{v}}$$

die Veränderlichen nur in der Verbindung $v\xi + w\eta$ enthält, d. h. dass derselbe eine Function der complexen Veränderlichen $x = v\xi + w\eta$ ist.

Zu dem Zwecke betrachten wir die Function

$$(a)\qquad \Phi(\xi, \eta) = -\,v\,w\,.\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\left(n\xi - \frac{u+mv}{v}\eta\right)}}{(u+mv)(u+mv+nw)},$$

welche man auch in die Form

$$\Phi = v \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\left(n\xi - \frac{u+mv}{v}\eta\right)}}{n(u+mv+nw)}$$

$$-v \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2n\xi\pi i}}{n} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i\frac{u+mv}{v}\eta}}{u+mv} - vw \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i\frac{u+mv}{v}\eta}}{(u+mv)^2}$$

oder nach der bekannten Formel

$$\sum{}' \frac{e^{2n\xi\pi i}}{n} = 2\pi i\left(\frac{1}{2} - \xi\right)$$

in die Form

$$(b) \qquad \Phi(\xi,\eta) = v \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\left(n\xi - \frac{u+mv}{v}\eta\right)}}{n(u+mv+nw)}$$

$$+2\pi i\left(\xi - \frac{1}{2}\right) \cdot v \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\eta\pi i\frac{u+mv}{v}}}{u+mv} - vw \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\eta\pi i\frac{u+mv}{v}}}{(u+mv)^2}$$

setzen kann; durch den bei Summationszeichen angefügten Strich soll angedeutet werden, dass bei der Summation der sonst sinnstörende Wert $n = 0$ ausgenommen werden soll.

Berechnet man nun die partiellen Differentialien, indem man das erste $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} d\xi$ mit Hilfe der Form (*b*), das zweite $\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} d\eta$ durch Benützung von (*a*) bestimmt, so erhält man das vollständige Differential von Φ in der Form

$$d\Phi(\xi,\eta) = 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\left(n\xi - \frac{u+mv}{v}\eta\right)}}{u+mv+nw} \cdot (v\,d\xi + w\,d\eta).$$

Es ist nun $\Phi(\xi,\eta)$ eine im Bereiche $0 < \xi < 1$, $0 < \eta < 1$ endliche und stetige Function, welche zwei erste ebenfalls endliche und stetige Ableitungen $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$ besitzt und ihr Differential lautet

$$d\Phi(\xi,\eta) = 2\pi i . f(\xi,\eta) . (v\,d\xi + w\,d\eta).$$

Nach einer leicht zu gewinnenden Verallgemeinerung des Cauchy'schen Integralsatzes ist also

$\Phi(\xi, \eta)$ eine analytische Function der complexen Veränderlichen $v\xi + w\eta$, welche sich in dem durch die Ungleichungen $0 < \xi < 1, 0 < \eta < 1$ charakterisierten Parallelogramme regulär verhält, mit eventueller Ausnahme einiger auf dem Umfange des Parallelogramms befindlichen singulären Stellen. Dasselbe gilt demnach von ihrer durch $2\pi i$ getheilten Ableitung, deren Wert durch den Ausdruck

$$e^{-\frac{2\eta u\pi i}{v}} S(\xi, \eta)$$

dargestellt wird.

3.

Durch das Vorhergehende ist nun nachgewiesen, dass eine Gleichung

$$(2) \qquad \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(n\xi - m\eta)}}{u + mv + nw} = e^{\frac{2\eta u\pi i}{v}} F(u, v\xi + w\eta)$$

bestehen muss, in welcher $F(u, x)$ eine analytische Function von x bedeutet, welche sich innerhalb des Parallelogramms $(0, v, v+w, w)$ regulär verhält. Es bleibt uns nur noch übrig, das Verhalten der stetigen Fortsetzung von F zu untersuchen.

Wir wollen zuerst den Nachweis führen, dass die Function sich innerhalb der Strecke $0 \ldots v$ überall regulär verhält; zu dem Zwecke bringen wir die linke Seite der Gleichung (2) in eine Form, welche gestattet die oben auseinandergesetzten, die Function Φ betreffenden Schlüsse auf die Umgebungen der besprochenen Punkte auszudehnen.

Wir bemerken zuerst, dass die Gleichung besteht

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(n\xi - m\eta)}}{u + mv + nw} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\left(\nu\xi + m(\xi - \eta)\right)}}{u + m(v + w) + \nu w},$$

welche resultiert, wenn links $n = m + \nu$ gesetzt wird.

Man erhält daher an Stelle von (2) die Gleichung

$$(2a) \quad e^{\frac{2\eta u\pi i}{v}} F(u, v\xi + w\eta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\left(n\xi + m(\xi - \eta)\right)}}{u + m(v + w) + nw};$$

Ist nun $\xi - \eta$ positiv, so wird in der rechten Seite das Argument $\eta - \xi$ durch $\eta - \xi + 1$ zu ersetzen, und die Doppelsumme durch

$$e^{\frac{2u\pi i}{v+w}(\eta-\xi+1)} F(u, v\xi + w\eta + w \mid v+w, w)$$

ausgedrückt. Der Ausdruck

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\left(\frac{u+nw}{w}\xi + m(\xi-\eta)\right)}}{u + m(v+w) + nw}$$

ist dann eine analytische Function des Arguments $x = v\xi + w\eta$, welche sich regulär verhält solange ξ und $\xi - \eta$ positiv und kleiner als Eins bleiben. Daraus schließt man, dass die Function $F(u, v\xi + w\eta)$ sich in Bezug auf das zweite Argument regulär verhält, selbst wenn die reelle Variable η die zum Theile negativen Werte von $\xi - 1$ bis ξ durchläuft; speciell ist damit also dargethan, dass die Function F sich längs der Strecke $(0 \ldots v)$ mit etwaiger Ausnahme der Endpunkte regulär verhält. Die Gleichung $(2a)$ besteht auch für kleine negative η; da nun die rechte Seite von $(2a)$ mit der linken Seite von (2) zusammenfällt, und die Reihe (2) für $-1 < \eta < 0$ durch

$$e^{\frac{2(\eta+1)u\pi i}{v}} F(u, v\xi + w\eta + w)$$

summiert wird, so entsteht die Formel

$$F(u, v\xi + w\eta) = e^{\frac{2u\pi i}{v}} F(u, v\xi + w\eta + w)$$

oder anders geschrieben

$$(3a) \qquad F(u, x) = e^{\frac{2u\pi i}{v}} F(u, x + w).$$

Aus der Gleichung (1) lässt sich ferner schließen

$$e^{\frac{2\eta u\pi i}{v}} F(u, v\xi + w\eta \mid v, w)$$

$$= e^{\frac{2(1-\xi)u\pi i}{w}} F(u, (1-\xi)v + (1-\eta)w \mid w, v);$$

somit haben wir

$$F(u, x \mid v, w) = e^{\frac{2(v-x)u\pi i}{vw}} F(u, v + w - x \mid w, v).$$

Hieraus folgt, dass sich unsere Function F auch längs der Strecke $0 \ldots w$ mit etwaiger Ausnahme der Endpunkte regulär verhält und dass die Gleichung besteht

$$(3b) \qquad F(u, x + v) = F(u, x).$$

Mit Hilfe der beiden Gleichungen (3*a*) und (3*b*) schließt man, dass unsere Function $F(u, x)$ in der ganzen Ebene (x) eindeutig bleibt und keine anderen Singularitäten besitzen kann, als in den Punkten $x = mv + nw$, $(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Aus den Gleichungen

$$(3)\qquad \begin{cases} F(u, x + v) = F(u, x)\,, \\ F(u, x + w) = e^{\frac{-2u\pi i}{v}} F(u, x) \end{cases}$$

folgt nun, dass die Gleichung (2) für sämmtliche reelle Werte ξ, η giltig bleibt, mit Ausnahme der ganzzahligen, für welche die Reihe divergiert.

4.

Wir gehen nun dazu über, das Verhalten der Function $F(u, x)$ an der Stelle $x = 0$ zu studieren. Die Untersuchung soll nach folgendem Plane ausgeführt werden: Da die Function in der Umgebung von $x = 0$ eindeutig ist, wird sie daselbst durch folgende Reihe darstellbar sein müssen:

$$F(u, x) = \mathfrak{P}(x) + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3}{x^3} + \cdots,$$

wobei $\mathfrak{P}(x)$ eine gewöhnliche Potenzreihe andeutet. Wird nun nachgewiesen, dass die um den Nullpunkt herumgeführten Integrale

$$(c)\qquad \int\limits_{(0)} F(u, x) x^k\, dx\,, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Null sind, so muss $c_2 = c_3 = \ldots = 0$, und es bleibt uns allein die Form

$$F(u, x) = \mathfrak{P}(x) + \frac{c_1}{x}$$

übrig, in der wir dann c_1 leicht finden werden.

Um nun das Verschwinden der Integrale (*c*) darzulegen, benützen wir die Entwickelung

$$x = a_1 \sin\frac{2\pi x}{v} + a_3 \sin^3\frac{2\pi x}{v} + a_5 \sin^5\frac{2\pi x}{v} + \cdots.$$

welche für kleine Werte von x nothwendig existiert; und da die ungeraden Potenzen von $\sin\frac{2\pi x}{v}$ sich durch die sinus der ungeraden Multipla von $2\pi x$ linear darstellen lassen, so wird unsere Aufgabe auf die Gleichungen

$$\int\limits_{(0)} F(u, x) \sin\frac{2kx\pi}{v}\, dx = 0$$

zurückgeführt.

Um nun die Integrale

$$\int\limits_{(0)} F(u,x)\, e^{\frac{2kx\pi i}{v}}\, dx$$

zu berechnen, setzen wir $x = v\xi + w\eta$ und benutzen die Gleichung

$$F(u,x) = \sum_{m,\,n} \frac{e^{2\pi i\left(n\xi - \frac{u+mv}{v}\eta\right)}}{u+mv+nw},$$

so dass sich

$$f(\xi,\eta) = F(u,x)\, e^{\frac{2kx\pi i}{v}} = \sum_{m,\,n} \frac{e^{2\pi i\left[(k+n)\xi - \left(u+mv-kw\right)\frac{\eta}{v}\right]}}{u+mv+nw}$$

ergibt, und diese Gleichung besteht für sämmtliche reelle Werte von ξ und η. Für den Integrationsweg wählen wir das Periodenparallelogramm, welches durch die Punkte $\xi = \pm\frac{1}{2}$, $\eta = \pm\frac{1}{2}$ bestimmt wird; es ist dann

$$\int\limits_{(0)} F(x)\, e^{2kx\pi i}\, dx = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\left(\xi, -\frac{1}{2}\right) v\, d\xi - \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\left(\xi, +\frac{1}{2}\right) v\, d\xi +$$

$$+ \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{1}{2}, \eta\right) w\, d\eta - \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\left(-\frac{1}{2}, \eta\right) w\, d\eta.$$

Da aber

$$f(\xi+1,\eta) = f(\xi,\eta),$$

$$f(\xi,\eta+1) = e^{\frac{2\pi i}{v}(kw-u)} f(\xi,\eta),$$

so heben sich die beiden letzten Integrale und es bleibt

$$\int\limits_{(0)} F(x)\, e^{2kx\pi i}\, dx = \left(1 - e^{\frac{2\pi i}{v}(kw-u)}\right) v \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\left(\xi, -\frac{1}{2}\right) d\xi.$$

Das Integral ist leicht zu bestimmen und wir haben zuerst

$$\int\limits_{(0)} F(u,x)\, e^{\frac{2kx\pi i}{v}}\, dx = 2vi.\sin\frac{\pi(u-kw)}{v} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m}{u-mv+kw},$$

also schließlich

$$\int\limits_{(0)} F(u,x)\, e^{\frac{2kx\pi i}{v}}\, dx = 2\pi i;$$

damit ist aber unsere Behauptung

$$\int\limits_{(0)} F(u,x) \sin\frac{2kx\pi}{v}\, dx = 0$$

begründet, und die Entwickelung von $F(u,x)$ in der Umgebung des Nullpunktes hat nothwendig die Form

$$\frac{c_1}{x} + \mathfrak{P}(x);$$

um c_1 zu erhalten, berechnen wir das Integral

$$\int\limits_{(0)} F(u,x)\, dx,$$

welches nach dem eben Ausgeführten den Wert $2\pi i$ hat. Andererseits ist

$$\int\limits_{(0)} \left(\frac{c_1}{x} + \mathfrak{P}(x)\right) dx = \pm 2\pi i . c_1,$$

wobei das obere oder das untere Vorzeichen statthat, jenachdem die Integration im positiven oder negativen Sinne geschieht, d. h. in unserem Falle, jenachdem der imaginäre Bestandtheil von $\frac{w}{v}$ positiv oder negativ ist.

Wird daher das Vorzeichen des imaginären Bestandtheiles von $\frac{w}{v}$ durch ε angedeutet, so folgt durch Vergleich der beiden Integralwerte

$$c_1 = \varepsilon,$$

und man hat daher das Resultat, dass die Potenzentwickelung der Function $F(u,x)$ die Form hat

$$F(u,x) = \frac{\varepsilon}{x} + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

5.

Die bisherigen Betrachtungen reichen vollkommen hin, um die Function $F(u, x)$ durch ϑ-Functionen auszudrücken. Denn das Product

$$F(u,x)\,\vartheta_1\left(\frac{x}{v}\right),$$

wobei in üblicher Weise

$$\vartheta_1\left(\frac{x}{v}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty} q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\sin(2n-1)\frac{x\pi}{v}, \qquad q=e^{\frac{\varepsilon w\pi i}{v}}$$

gesetzt wird, ist eine ganze transcendente Function, welche dasselbe Perioditätsverhalten aufweist, wie die Transcedente $\vartheta_1\left(\frac{u+x}{v}\right)$ und man wird daher auf den Quotienten

$$Q(x)=\frac{F(u,x)\,\vartheta_1\left(\frac{x}{v}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u+x}{v}\right)}$$

geführt; derselbe ist eine doppelt periodische Function mit einer einzigen außerwesentlichen singulären Stelle erster Ordnung $x=-u$ und somit eine Constante. Für $x=0$ hat die Function den Wert

$$Q(0)=\lim_{x=0}\vartheta_1\left(\frac{x}{v}\right)\left(\frac{\varepsilon}{x}+a_0+a_1x+\ldots\right)\cdot\frac{1}{\vartheta_1\left(\frac{u}{v}\right)},$$

d. h.

$$Q(0)=\frac{\varepsilon}{v}\cdot\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{v}\right)},$$

sodass sich die Kronecker'sche Formel

$$F(u,x)=\frac{\varepsilon}{v}\cdot\frac{\vartheta_1'(0)\,\vartheta_1\left(\frac{u+x}{v}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{v}\right)\vartheta_1\left(\frac{x}{v}\right)}$$

ergibt, oder anders geschrieben

$$(4)\qquad \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(m\xi+n\eta)}}{u+mv+nw}$$

$$=\frac{\varepsilon}{v}e^{-\frac{2\xi u\pi i}{v}}\frac{\vartheta_1'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)\vartheta_1'\left(\frac{u+\eta v-\xi w}{v},\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{v},\frac{\varepsilon w}{v}\right)\vartheta_1\left(\frac{\eta v-\xi w}{v},\frac{\varepsilon w}{v}\right)},$$

wobei noch einmal bemerkt werden mag, dass unter ε das Vorzeichen des imaginären Theiles von $\frac{w}{v}$ zu verstehen ist.

6.

Führt man in die absolut convergierende Doppelreihe

$$\sum_{m,n}\frac{e^{2\pi i(m\xi+n\eta)}}{(u+mv+nw)^3}$$

neue Summationsbuchstaben m', n' mittelst der Substition

$$m=\alpha m'+\gamma n',$$
$$n=\beta m'+\delta n'$$

ein, wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen bedeuten, welche der Bedingung $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ unterworfen sind, so erhält man die Beziehung

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(m\xi+n\eta)}}{(u+mv+nw)^3}=\sum_{m'=-\infty}^{\infty}\sum_{n'=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(m'\xi'+n'\eta')}}{(u+m'v'+\eta'w')^3},$$

in welcher

$$(5)\qquad \begin{cases}\xi'=\alpha\xi+\beta\eta,\ \eta'=\gamma\xi+\delta\eta,\\ v'=\alpha v+\beta w,\ w'=\gamma v+\delta w\end{cases}$$

gesetzt wurde.

Hieraus ergibt sich zunächst die Gleichung

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(m\xi+n\eta)}}{u+mv+nw}-\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(m\xi'+n\eta')}}{u+mv'+nw'}$$
$$=\varphi(\xi,\eta)+u\psi(\xi,\eta),$$

in welcher φ und ψ von u unabhängig sind. Werden die Summen links mit Hilfe der Formel (4) ausgedrückt, so folgt unter der Voraussetzung $\varepsilon = 1$ die Gleichung

$$\frac{1}{v} e^{-\frac{2\xi\pi i}{v}} \frac{\vartheta_1'\left(0, \frac{w}{v}\right) \vartheta_1'\left(\frac{u+x}{v}, \frac{w}{v}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right) \vartheta_1\left(\frac{x}{v}, \frac{w}{v}\right)} - \frac{1}{v'} e^{-\frac{2\xi' u\pi i}{v'}} \frac{\vartheta_1'\left(0, \frac{w'}{v}\right) \vartheta_1\left(\frac{u+x}{v'}, \frac{w'}{v'}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{v'}, \frac{w'}{v'}\right) \vartheta_1\left(\frac{x}{v'}, \frac{w'}{v'}\right)}$$

$$= \varphi(\xi, \eta) + u\psi(\xi, \eta),$$

wobei $x = \eta v - \xi w$ gesetzt ist.

Wird hier successive u durch $u + v'$, $u + w'$ ersetzt, so reproduciert sich die linke Seite bis auf den Factor $e^{-2\xi'\pi i}$, resp. $e^{-2\eta'\pi i}$, wie leicht zu sehen, und dies erfordert

$$\varphi(\xi, \eta) = \psi(\xi, \eta) = 0,$$

sodass wir den Satz erhalten, dass die Function

$$(5^*) \qquad e^{-\frac{2\xi u\pi i}{v}} \frac{\vartheta_1'\left(0, \frac{w}{v}\right) \vartheta_1\left(\frac{u+x}{v}, \frac{w}{v}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right) \vartheta_1\left(\frac{x}{v}, \frac{w}{v}\right)},$$

in welcher $x = \eta v - \xi w$ gesetzt ist, ungeändert bleibt, wenn man die Parameter ξ, η, v, w durch die aquivalenten ξ', η', v', w' ersetzt.

Der hier entwickelte Beweis der Invarianz des Ausdrucks (5*) benutzt nur die einfachsten Mittel und führt keine dem Gebiete fremden Gebilde ein, wie z. B. die von Kronecker benutzte Reihe

$$\sum_{m,n} \frac{e^{2\pi i(n\sigma_0 - m\tau_0)}}{(u + mv + nw)^{1+\varrho}}$$

und ihre Darstellung durch Integrale.