Matyáš Lerch

Příspěvky k theorii řad nekonečných

Zprávy Král. Čes. spol. nauk, II. tř., 1885, 174–179

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501489

In einfachster Form erfordert die Bestimmung der Kegelschnitte K, Π_0 folgende Operationen:

Man projicire o_2 in die Axe A orthogonal nach a und trage von diesem Punkte auf A die Strecke $\overline{ac}$ gleich dem Parameter der Parabel auf. Dadurch erhält man den Punkt c; der Punkt q' liegt auf der Geraden o_2c so, dass $\overline{cq'} = \overline{o_2c}$. Zu c bestimmt man den bezüglich Γ_1, Γ_2 conjugirten Punkt c' und hat so den Durchmesser $c'q'$ des Kreises K gefunden. Die Axe A_0 der Parabel Π_0 ist parallel zu A und halbirt die Entfernung $c'm'$ des Punktes c' von A. Die Axe A_0 schneidet D in d_0; führt man nun durch m' eine Senkrechte zu ed_0, so trifft dieselbe die Axe A_0 in dem Scheitel n' von Π_0.

Wir haben in dem Vorhergehenden die Axen der Kegelfläche (s Γ_1) unter der Voraussetzung construirt, dass die Grundlinie Γ_1 vollständig dargestellt ist. Sollte dies nicht der Fall sein, so kann man nichtdestoweniger in derselben Weise verfahren, wenn ein vollständig dargestellter Kegelschnitt Δ zur Verfügung steht, welcher dann insofern an die Stelle von Γ_1 tritt, als man neben dem Kreise K den zu Δ homothetischen Kegelschnitt Π_0 des Netzes zu bestimmen und auf Δ perspectivisch ähnlich zu beziehen hat.

13.

Příspěvky k theorii řad nekonečných.

Napsal Matyáš Lerch a předložil prof. dr. F. Studnička dne 13. března 1885.

V následujících řádcích hodlám poukázati na důležitou generalisaci kriterií konvergence řad nekonečných, k níž jsem byl veden svými studiemi o podstatě čísel irracionalných.

Poněvadž pak i tento předmět poskytuje zajímavosti, odhodlal jsem se tuto několika slovy vzpomenouti nejzákladnějších pojmův analyse.

Připisuje toliko číslu racionalnému arithmetickou existenci, nahražuji nicméně geometrický pojem veličiny irracionalné *skutečným útvarem arithmetickým*.

Předepsánli určitý zákon, dle něhož lze vyvoditi jakýkoli počet racionalných čísel $a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_\nu\ \ldots\ldots$ jednoznačně přiřaděných prvkům přirozené řady čísel 1, 2, 3, . . . ν, . pak pravíme, že je nám dána neomezená řada veličin $a_1\, a_2\, a_3 \ldots .$

Jeli nám dána neomezená řada veličin

$$(1) \qquad a_1, a_2, a_3, \ldots . \; a_\nu, \ldots .$$

té vlastnosti, že lze volbou dostatečně velikého ν učiniti rozdíl $a_{\nu+\mu} - a_\nu$ pro všecka kladná μ libovolně malým, nazýváme ji *posloupností číselnou* (a_ν).

Dvě číselné posloupnosti (a_ν) a (b_ν) jsou rovnomocny, $(a_\nu) \sim (b_\nu)$, klesáli rozdíl $a_\nu - b_\nu$ s rostoucím ν pod každou mez.

Souhrn všech posloupností rovnomocných s posloupností danou (a_ν) tvoří *limitu*. Tato je stanovena kteroukoli z těchto posloupností, z nichž každá naopak považována býti může za representant limity.

Limitu obsahující posloupnosť (a_ν) znamenejme $\lambda\iota\mu(a_\nu)$. Jeli pak $(a_\nu) \sim (b_\nu)$, bude dle definice $\lambda\iota\mu(a_\nu) = \lambda\iota\mu\,(b_\nu)$.

Posloupnosť $\left(1-\frac{1}{2^\nu}\right)$, t. j.

$$1-\frac{1}{2}, \; 1-\frac{1}{4}, \; 1-\frac{1}{8}, \ldots . \; 1-\frac{1}{2^\nu}, \ldots .$$

je rovnomocná s posloupností

$$1, \quad 1, \quad 1, \qquad 1,$$

kterou znamenejme (1), t. j. máme

$$\left(1-\frac{1}{2^\nu}\right) \sim (1) \quad \text{čili} \quad \lambda\iota\mu\left(1-\frac{1}{2^\nu}\right) = \lambda\iota\mu\,(1).$$

Takovéto limity obsahující jednu posloupnosť rovných prvků, takže všecky prvky a_ν jsou rovny racionalnému číslu a, zoveme *racionalnými*, píšíce a místo $\lambda\iota\mu(a)$.

Limity nemající tuto vlastnosť zoveme irracionalnými.

Tato okolnosť, že existují limity racionalné, vede nás přirozeně k tomu, abychom se snažili vždy nahraditi čísla limitami racionalnými, a pak vyšetřili, nemáli nalezená vlastnosť limity racionalné platnosť pro všecky limity vůbec. Takým způsobem se podaří všecky zákony formalné přenésti z čísel na limity racionalné a odtud na všecky limity bez rozdílu. To jest také vždy vodítkem jakožto princip permanence zákonů formalných při generalisaci pojmův elementarných. —

V následujícím uvažovány jsou soustavy nekonečné hodnot racionalných neb irracionálných či ve smyslu geometrickém soustavy bodů v počtu neomezeném.

Dánali taková soustava (a_ν) bodů řadou hodnot

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_\nu,\ \ldots\ldots$$

jejíž prvky jsou buď vesměs různy aneb i částečně neb vesměs rovny, nazýváme *arithmetickou derivací* soustavy (a_ν) a značíme $\underset{\nu=\infty}{D}(a_\nu)$ soustavu oněch bodů, které buď 1) přicházejí v řadě (a_ν) na nekonečném počtu míst, aneb 2) které jsou body hromadnými prvků z (a_ν), t. j. body x té vlastnosti, že pro každé sebe menší δ přicházejí prvky z (a_ν) v intervallu $(x-\delta \ldots x+\delta)$.

Ve zvláštním případě, kdy rozdíl $a_{\nu+\mu}-a_\nu$ je pro dosti veliká ν libovolně malým, je $\underset{\nu=\infty}{D}(a_\nu)=\underset{\nu=\infty}{lim}\, a_\nu$. Jeví se tu tedy arithmetická derivace jako rozšíření pojmu čísla a hodnoty mezné. Od *Cantorovy soustavy odvozené* liší se tento pojem tím, že tato sestává pouze z bodův hromadných nevšímajíc si bodů nekonečněkrát opakovaných.

Jakožto příklady stůjtež zde následující:

a) Arithmetická derivace soustavy $a_\nu = sin\, \nu x$ t. j. soustava $\underset{\nu=\infty}{D}(sin\, \nu x\pi)$ pozůstává buď z konečného počtu bodů položených v intervallu $(-1 \ldots\ldots +1)$ aneb na mezích, je-li x racionalné, a ze spojitého intervallu $(-1 \ldots\ldots +1)$, je-li x irracionalné.

b) Soustava zakončených zlomků decimalních intervallu $(0 \ldots\ldots 1)$ uvedena býti může v řadu

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots a_\nu\ \ldots\ldots,$$

v níž $a_1 = 0{\cdot}1$, $a_7 = 0{\cdot}7$, $a_{723} = 0{\cdot}723$ atd., takže

$$a_1 = a_{10} = a_{100} = \ldots\ldots,\quad a_2 = a_{20} = a_{200} = \ldots\ldots \text{ atd.}$$

Arithmetická derivace sestává pak ze spojitého intervallu $(0 \ldots\ldots 1)$, t. j.

$$\underset{\nu=\infty}{D}(a_\nu) = (0 \ldots\ldots 1)$$

c) Znamenáme-li symbolem $\nu_0,\ \nu_1,\ \nu_2,\ \ldots\ldots$ prvou, druhou, třetí atd. číslici od levé strany čísla ν v soustavě dekadické, tak že na př.

$$869_0 = 8,\quad 869_1 = 6,\quad 869_2 = 9,$$

bude míti soustava bodů

$$a_\nu = \sum_{\lambda=0}^{\nu} \frac{\nu_\lambda}{10^{2\lambda+1}}$$

za derivaci dokonalou soustavu bodů

$$x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{10^{2\nu+1}}$$

kde c_ν značí kterékoli číslo řady 0, 1, ... 9.

Tento pojem arithmetické derivace nekonečné soustavy osvědčuje se zvlášť užitečným v nauce o konvergenci řad nekonečných, což ukázati je hlavním předmětem této zprávy.

Je známo, že řada kladných sčítanců

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_\nu + \ldots\ldots$$

má konečný součet, je-li hodnota $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} = a$ menší než 1, a diverguje pro $a > 1$, kdežto pro případ $a = 1$ vyšetřena celá řada různých kriterií. Zdá se, že analysté považovali za samozřejmou a nevyhnutelnou podmínku, aby hodnota $\lim \frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}$ existovala. Nechť tomu však jakkoli, případ, kdy se $\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}$ pro nekonečně rostoucí ν žádné určité hodnotě neblíží, nebyl dosud uvažován, ačkoli není nesnadno zobecniti známá kriteria i pro tento případ.

Co v jednoduchém případu poskytuje $\lim \frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}$, to nám podává naše arithmetická derivace $\underset{\nu=\infty}{D}\left(\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}\right)$, jakož praví následující věta:

„Jsou-li veškery prvky soustavy $\underset{\nu=\infty}{D}\left(\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}\right)$ menší jednotky, konverguje řada kladných členů $\sum\limits_0^\infty u_\nu$."

„Pro divergenci stačí již podmínka, aby existovalo určité kladné celistvé číslo n, tak aby pro všecka kladná ν platila okolnost

$$\frac{u_{n+\nu+1}}{u_{n+\nu}} \geqq 1, \ (\nu = 0,\ 1,\ 2 \ldots.)."$$

Důkaz třeba poskytnouti pouze pro prvou část věty, ana je druhá samozřejmou.

Jsou-li veškery hodnoty soustavy $\underset{\nu=\infty}{D}\left(\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}\right)$ menší jednotky, pak existuje kladný zlomek ξ', jejž žádná z těchto hodnot nepřevyšuje; neb v opačném případě by musily hodnoty z $D\left(\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}\right)$ přicházeti jednotce libovolně blízko, tak že by také hodnota 1 obsažena byla v uvažované derivaci arithmetické, což vyloučeno. Máme-li hodnotu ξ', můžeme voliti ξ tak, aby $\xi' < \xi < 1$, což lze zajisté nesčíslnými způsoby splniti.

Pak existuje určité (konečné) číslo n, tak aby

$$\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} < \xi, \quad (\nu = n,\ n+1,\ n+2, \ldots)$$

Neb kdyby takové n neexistovalo, pak by přicházelo v řadě

$$a_\nu = \frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

nekonečně mnoho čísel větších neb rovných ξ; buďtež to čísla

$$a_{\mu_1}, a_{\mu_2}, \ldots a_{\mu_\lambda}, \ldots .$$

Ana se tato čísla vyskytují v počtu nekonečném, musí jich soustava míti arithmetickou derivaci $\underset{\lambda=\infty}{D}\left(a_{\mu_\lambda}\right)$, jejíž prvky se nalezají v intervallu $(\xi \ldots \infty)$ a tedy převyšují ξ'. Avšak prvky tyto náležejí též soustavě $\underset{\nu=\infty}{D}\left(\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}\right)$ a nemohou převyšovati ξ'. Následovně musí existovati číslo n řečené vlastnosti. Pak ale obdržíme násobením nerovností

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \xi, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < \xi, \ldots \quad \frac{u_{n+\nu}}{u_{n+\nu-1}} < \xi$$

následující nerovnost

$$u_{n+\nu} < \xi^\nu . u_n,$$

takže

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_{n+\nu} < u_n \sum_{\nu=0}^{\infty} \xi^\nu = u_n . \frac{1}{1-\xi}$$

je řadou konvergentní, a tedy také řada $\sum_0^\infty u_\nu$ konverguje.

Následující kriteria uvádím zde bez důkazu, ana jsou takměř samozřejma.

„Řada kladných členů $\sum_0^\infty u_\nu$ konverguje, sestává-li arithmetická derivace $\underset{\nu=\infty}{D}\left(\sqrt[\nu]{u_\nu}\right)$ soustavy $\left(\sqrt[\nu]{u_\nu}\right)$ z hodnot veskrz menších jednotky. Obsahuje-li však tato soustava $\left(\sqrt[\nu]{u_\nu}\right)$ mezi svými prvky též nekonečný počet prvků rovných neb převyšujících jednotku, diverguje řada $\sum\limits_0^\infty u_\nu$."

„Řada $\sum\limits_0^\infty u_\nu$ konverguje, existuje-li určité kladné n tak, aby platila nerovnost

$$\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} < 1 \quad (\nu = n,\ n+1,\ n+2, \ldots),$$

a sestává-li arithmetická derivace $\underset{\nu=\infty}{D}\left\{\nu\left(1-\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}\right)\right\}$ z hodnot vesměs větších jednotky.

Diverguje však řada Σu_ν, jakmile existuje určité kladné n, tak aby $\nu\left(1-\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}\right) \leqq 1$ pro $\nu = n,\ n+1,\ n+2 \ldots\ldots$"

Nejčastěji zajisté přicházejí řady, v nichž soustava

$$\underset{\nu\ \infty}{D}\left(\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}\right)$$

obsahuje hodnoty menší i větší jednotky. Že se takové případy vyskytují, ukazují následující dvě *konvergentní* řady:

a) $$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\frac{1+(-1)^\nu}{2^\nu}+\frac{1-(-1)^\nu}{\nu^2}\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2^{2k-1}}+\frac{2}{(2k+1)^2}\right\}$$

Jelikož tu $u_\nu = \frac{1+(-1)^\nu}{2^\nu}+\frac{1-(-1)^\nu}{\nu^2}$, sestává $D\left(\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}\right)$ z bodů $\lim\limits_{k=\infty}\frac{(2k+1)^2}{2^{2k+2}}=0$ a $\lim\frac{2^{2k}}{(2k+1)^2}=\infty$, tedy

$$\underset{\nu=\infty}{D}\left(\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}\right)=(0,\ \infty)$$

b) Značí-li $[\lambda k]$ celky (charakteristiku) obecného logarithmu čísla k, je-li ϑ libovolné kladné číslo menší jednotky, g větší jednotky, ale tak, aby $\vartheta\sqrt{g}<1$, bude řada s obecným členem

$$u_k = \vartheta^{k-[\lambda k]}\, g^{[\lambda k]}\cdot\frac{1+[\lambda k]}{2}$$

konvergovati, při čemž $\underset{\nu=\infty}{D}\left(\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}\right)=(\vartheta,\ \infty)$ sestává z bodů ϑ a ∞.