Matyáš Lerch

Nouvelle formule pour la différentiation d'une certaine classe de séries trigonométriques

Atti Accad. Sci. Torino 35 (1899), 54–59

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501519

Nouvelle formule pour la différentiation d'une certaine classe de séries trigonométriques;

Note de M. LERCH à Fribourg (Suisse).

En 1894 j'ai donné une règle pour obtenir la dérivée de la fonction (*)

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu} \sin 2\nu x\pi$$

et qui consiste dans l'équation

$$f'(x) \cdot \frac{\sin x\pi}{\pi} = -c_1 \sin x\pi + \sum_{1}^{\infty} (c_\nu - c_{\nu+1}) \sin(2\nu + 1) x\pi.$$

Bien que les conditions sous lesquelles cette relation a lieu, sont satisfaites dans plusieurs cas qui se présentent naturellement et appartiennent donc à une classe de problèmes qu'on appelle utiles, ces résultats et les autres analogues établis dans les notes citées ne s'appliquent pas au cas où les quantités c_ν ont des signes différents.

Sous ce point de vue il peut avoir quelque intérêt, si j'établirai une règle permettant d'obtenir la dérivée de la fonction $f(x)$ sous l'hypothèse que les sommes

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n$$

tendent vers m limites différentes pour n indéfiniment croissant, de manière que la limite sera déterminée en faisant parcourir n une série arithmétique de module m.

Je vais d'abord établir un lemme qui nous sera indispen-

(*) " Comptes rendus de Paris ", 2^{e} sem. Un peu plus complètement dans les " Annales de l'École Normale Supérieure ", T. XII, 1895, et dans le " Bulletin général de l'Académie de Prague ", T. V.

sable dans la suite et qui présente d'ailleurs l'intérêt par son analogie avec une question traitée par Gauss. Il s'agit de prouver que la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{e^{2x\pi i(w+\nu)}}{w+\nu}$$

s'exprime sous forme finie lorsque w est un nombre rationnel; j'ai développé les calculs dans un mémoire publié par l'Académie de Prague (*) et je me borne donc à vérifier le résultat qui est

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\frac{a}{m}+n}\, e^{2x\pi i\left(\frac{a}{m}+n\right)} = -\sum_{\kappa=1}^{m} e^{-\frac{2\kappa a\pi i}{m}} \log\left(1-e^{\frac{2\pi i}{m}(x+\kappa)}\right).$$

On suppose que l'entier m soit positif et plus grand que un, puis que l'entier a appartient à la suite $1, 2, 3, \ldots m$; le logarithme doit avoir sa partie imaginaire contenue entre $-\pi$ et $+\pi$, et x peut être supposé réel, mais fractionnaire, sans quoi le résultat manquerait du bon sens, le premier membre étant divergent et le deuxième devenant infini.

Pour vérifier la formule (1) j'emploie la formule élémentaire pour le développement du $\log(1+z)$ qui donne

$$-\log\left(1-e^{\frac{2\pi i}{m}(x+\kappa)}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\, e^{\frac{2\nu\pi i}{m}(x+\kappa)};$$

multiplions par $e^{-\frac{2\kappa a\pi i}{m}}$ et ajoutons pour $\kappa = 1, 2, \ldots m$; la somme ainsi formée S constitue le deuxième membre de la formule à vérifier, et peut s'écrire

$$S = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\, e^{\frac{2\nu\pi i}{m}x} \sum_{\kappa=1}^{m} e^{\frac{(\nu-a)\pi i}{m}\kappa}.$$

Or la somme intérieure ne diffère de zéro que lorsque $\nu - a$

(*) „Různé výsledky v theorii funkce gamma„; Mémoires (rozpravy) de Prague, V^{e} année, n° 14; 1896.

est un multiple de m et a pour valeur m; on devra donc prendre $\nu = a + mn$, ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots$) ce qui donne

$$S = m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a+mn} e^{\frac{2x\pi i}{m}(a+mn)}$$

ce qui n'est autre chose que la série (1).

Cela étant, considérons la série trigonométrique

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu} e^{2\nu x\pi i}, \tag{2}$$

et en posant

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_\nu = C_\nu, \tag{3}$$

employons l'identité bien connue d'Abel qui donne

$$\sum_1^{m.n+1} \frac{c_\nu}{\nu} e^{2\nu x\pi i} = \sum_{\nu=1}^{mn} C_\nu \left(\frac{e^{2\nu x\pi i}}{\nu} - \frac{e^{2(\nu+1)x\pi i}}{\nu+1} \right) + C_{mn+1} \frac{e^{2(mn+1)x\pi i}}{mn+1}.$$

Si l'on suppose que les limites

$$\lim_{\mu=\infty} C_{\varrho+m\mu} = A_\varrho \qquad (\rho = 1, 2, 3, \ldots m) \tag{4}$$

existent, les quantités C_ν resteront au-dessous d'une limite indépendante de ν, et le terme

$$C_{mn+1} \frac{e^{2(mn+1)x\pi i}}{mn+1}$$

disparaîtra pour n infini. Il s'ensuit

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{mn} C_\nu \left(\frac{e^{2\nu x\pi i}}{\nu} - \frac{e^{2(\nu+1)x\pi i}}{\nu+1} \right).$$

Posons maintenant

$$C_{\varrho+\mu m} = A_\varrho + B_{\varrho+\mu m} \tag{4^a}$$

de la sorte que les quantités B_n tendent vers zéro pour n infini, et écrivons l'équation précédente comme il suit :

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{mn} B_\nu \left(\frac{e^{2\nu x\pi i}}{\nu} - \frac{e^{2(\nu+1)x\pi i}}{\nu+1}\right) +$$

$$+ \sum_{\varrho=1}^{m} A_\varrho \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{e^{2x\pi i(\varrho+\mu m)}}{\rho+\mu m} - \frac{e^{2x\pi i(\varrho+1+\mu m)}}{\rho+1+\mu m}\right).$$

La fonction $f(x)$ se compose donc de deux parties dont l'une est la limite

$$\Phi(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{mn} B_\nu \left(\frac{e^{2\nu x\pi i}}{\nu} - \frac{e^{2(\nu+1)x\pi i}}{\nu+1}\right) \tag{5}$$

et l'autre

$$\Psi(x) = \frac{1}{m} \sum_{\varrho=1}^{m} A_\varrho \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{e^{2mx\pi i\left(\frac{\varrho}{m}+\mu\right)}}{\frac{\varrho}{m}+\mu} - \frac{e^{2mx\pi i\left(\frac{\varrho+1}{m}+\mu\right)}}{\frac{\varrho+1}{m}+\mu}\right) \tag{6}$$

est analytique et simple.

Ce point établi, supposons que la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu e^{2\nu x\pi i}$$

soit uniformément convergente dans un certain intervalle $(x_0 \ldots x_1)$ intérieur à l'intervalle $(0 \ldots 1)$; la série

$$\sum_{1}^{\infty} B_\nu \left(e^{2\nu x\pi i} - e^{2(\nu+1)x\pi i}\right)$$

sera de même uniformément convergente et son intégration évidemment légitime prouve que l'on a

$$\Phi'(x) = 2\pi i\,(1 - e^{2x\pi i}) \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu\, e^{2\nu x\pi i}. \tag{7}$$

Il ne reste qu'à différentier la fonction $\Psi(x)$. En changeant x en mx et a en ρ ou $\rho+1$ la formule (1) donne

$$\Psi_\varrho(x)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{e^{2mx\pi i\left(\frac{\varrho}{m}+\mu\right)}}{\frac{\varrho}{m}+\mu}=-\sum_{\varkappa=1}^{m}e^{-\frac{2\varkappa\varrho\pi i}{m}}\log\left(1-e^{2\pi i\left(x+\frac{\varkappa}{m}\right)}\right),$$

puis la quantité

$$\Psi_{m+1}(x)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{e^{2mx\pi i\left(\frac{m+1}{m}+\mu\right)}}{\frac{m+1}{m}+\mu}$$

s'écrira sous la forme

$$\Psi_{m+1}(x)=\Psi_1(x)-me^{2x\pi i},$$

de sorte que

$$\Psi(x)=\frac{1}{m}\sum_{\varrho=1}^{m-1}A_\varrho(\Psi_\varrho(x)-\Psi_{\varrho+1}(x))+\frac{1}{m}A_m(\Psi_m(x)-\Psi_1(x))+$$

$$+A_m e^{2x\pi i}.$$

Cela étant, on trouve aisément la formule

$$\Psi'_\varrho(x)=2m\pi i\,\frac{e^{2\varrho x\pi i}}{1-e^{2mx\pi i}},$$

d'où nous aurons

$$\Psi'(x)=2\pi i\sum_{\varrho=1}^{m-1}A_\varrho\,\frac{e^{2\varrho x\pi i}-e^{2(\varrho+1)x\pi i}}{1-e^{2mx\pi i}}+$$

$$+2\pi i\,A_m\,\frac{e^{2mx\pi i}-e^{2x\pi i}}{1-e^{2mx\pi i}}+2\pi i\,A_m\,e^{2x\pi i}$$

ou bien

$$\psi'(x)=\frac{2\pi i(1-e^{2x\pi i})}{1-e^{2mx\pi i}}\sum_{\varrho=1}^{m}A_\varrho\,e^{2\varrho x\pi i},$$

ce qu'on peut écrire

$$\Psi'(x) = 2\pi i \, \frac{\sin x\pi}{\sin mx\pi} \cdot \sum_{\varrho=1}^{m} A_\varrho \, e^{(2\varrho+1-m)x\pi i}. \tag{8}$$

On a donc le résultat suivant:

" Si les quantités

$$c_1, \; c_2, \; c_3, \ldots\ldots$$

sont telles que les sommes

$$C_\nu = c_1 + c_2 + c_3 \ldots + c_\nu$$

engendrent des limites finies et déterminées

$$\lim C_{mn+1} = A_1, \; \lim C_{mn+2} = A_2, \ldots \; \lim C_{mn} = A_m, \; (n = \infty),$$

et que les différences

$$C_{mn+\varrho} - A_\varrho = B_{mn+\varrho}$$

satisfont à la condition que la série

$$\sum_1^\infty B_\nu e^{2\nu x\pi i}$$

soit uniformément convergente dans un certain intervalle $(x_0 \ldots x_1)$, tout intérieur à $(0 \ldots 1)$, la dérivée de la fonction

$$f(x) = \sum_1^\infty \frac{c_\nu}{\nu} \, e^{2\nu x\pi i} \qquad (x_0 \leqq x \leqq x_1)$$

aura pour valeur l'expression

$$f'(x) = \frac{\sin x\pi}{\sin mx\pi} \cdot 2\pi i \sum_{\varrho=1}^{m} A_\varrho \, e^{(2\varrho+1-m)x\pi i} + 4\pi \sin x\pi \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu \, e^{(2\nu+1)x\pi i}.$$

On suppose en même temps que mx ne soit pas entier. Il est inutile d'énoncer les théorèmes qui en résultent en séparant les parties réelles et les parties imaginaires.