Matyáš Lerch

Sur la formule fondamentale de Dirichlet qui sert à déterminer le nombre des classes de formes quadratiques binaires définies

C. R. Acad. Sci., Paris 135 (1902), 1314–1315

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501546

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la formule fondamentale de Dirichlet qui sert à déterminer le nombre des classes de formes quadratiques binaires définies.* Note de M. **Mathias Lerch**, présentée par M. Émile Picard.

« J'ai remarqué depuis longtemps que plusieurs résultats de Kronecker s'obtiennent avec très peu de calcul, si l'on envisage les quantités

$$\text{(1)} \qquad R(\omega, s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\omega+\nu)^s},$$

$$\text{(2)} \qquad K(a, b, c; s) = \sum{}' \frac{1}{(am^2+bmn+cn^2)^s}$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \text{excepté } m = n = 0),$$

où (a, b, c) est une forme positive du discriminant $-\Delta = b^2 - 4ac$, aux coefficients réels quelconques. En effet, on sait que la différence $R(\omega, s) - \frac{1}{s-1}$ est une fonction entière de s et j'ai démontré la même chose au sujet de la quantité

$$K(a, b, c; s) - \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} \frac{1}{s-1},$$

dans mon Mémoire : « Sur les séries malmsténiennes » (*Académie de Prague*, 1891). Cela étant, la formule fondamentale de Dirichlet fournit la relation

$$\text{(3)} \qquad \sum_{(a,b,c)} K(a, b, c; s) = \tau\Delta^{-s} R(1, s) \sum_{r=1}^{-1} \left(\frac{-\Delta}{r}\right) R\left(\frac{r}{\Delta}, s\right),$$

qui subsiste dans tout le plan de la variable complexe s; ici (a, b, c) parcourt un système complet des représentants des différentes classes primitives et positives du discriminant négatif $-\Delta$ supposé fondamental, puis on a $\tau = 2$ à l'exception de $\Delta = 3$ où $\tau = 6$, et de $\Delta = 4$ où $\tau = 4$.

» D'après un théorème donné, en 1867, par Ernest Schroeder, on connaît les deux premiers termes dans le développement de Maclaurin

$$\text{(4)} \qquad R(\omega, s) = \left(\frac{1}{2} - \omega\right) + \log \frac{\Gamma(\omega)}{\sqrt{2\pi}} s + \ldots,$$

puis j'ai trouvé, dans le Mémoire cité plus haut, le développement analogue

$$(5)\qquad K(a,b,c) = -1 - 2s\log\left[\frac{2\pi}{\sqrt{c}}\,H\left(\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\right)H\left(\frac{b+i\sqrt{\Delta}}{3c}\right)\right]+\ldots,$$

en désignant par $H(\omega)$ le produit infini

$$e^{\frac{\omega\pi i}{12}}\prod_{1}^{\infty}(1-e^{2n\omega\pi i}).$$

» Au moyen de ces préliminaires on trouve aisément les deux premiers coefficients dans les développements par la série de Maclaurin des deux membres de l'équation (3). En comparant les termes constants, il s'ensuit immédiatement la formule connue

$$(\mathrm{A})\qquad \mathrm{Cl}(-\Delta) = -\frac{\tau}{2\Delta}\sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{r}\right)r,$$

le premier membre désignant le nombre des classes. La comparaison des termes en s fournit la relation

$$(\mathrm{B})\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{\tau}{2}\sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{r}\right)\log\Gamma\left(\frac{r}{\Delta}\right)\\ &\quad = 2\sum_{(a,b,c)}\log\left[\sqrt{\frac{2\Delta\pi}{c}}\,H\left(\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\right)H\left(\frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\right)\right];\end{aligned}\right.$$

j'avais annoncé en 1897 (*Bulletin* de M. Darboux) qu'on peut l'obtenir d'une manière directe qui vient d'être exposée. Elle contient, pour $\Delta = 3$ et $\Delta = 4$, les résultats obtenus par M. Bigler au sujet des quantités $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$ et $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$.

» J'ai obtenu des résultats analogues pour les formes de discriminants positifs. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Une application de la théorie des résidus au prolongement analytique des séries de Taylor.* Note de M. **Ernst Lindelöf**, présentée par M. E. Picard.

« 1. Soit $F(x)$ une fonction analytique holomorphe à l'origine, et

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$