Matyáš Lerch

Extrait d'une lettre à M. Darboux

Bull. Sci. Math., II. Sér. 27 (1903), 161–164

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501552

De ces équations nous obtiendrons facilement

$$\begin{aligned}
2\xi_1 + \alpha - 4e_1 &= -x_1,\\
2\xi_2 + \alpha - 4e_2 &= -x_2,\\
2\xi_3 + \alpha - 4e_3 &= -x_3.
\end{aligned}$$

D'où il suit que

$$\alpha = 0, \qquad \xi_1 = \frac{8}{3}e_1, \qquad \xi_2 = \frac{8}{3}e_2, \qquad \xi_3 = \frac{8}{3}e_3;$$

$$x_1 = -\frac{4}{3}e_1, \qquad x_2 = -\frac{4}{3}e_2, \qquad x_3 = -\frac{4}{3}e_3.$$

Par conséquent

$$\gamma = 4b, \qquad g_2 = -\frac{27}{4}a, \qquad g_3 = \frac{27}{16}b;$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+4a)(x^3+3ax+b)}} = \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 + \frac{27}{4}az - \frac{27}{16}b}}.$$

La réduction s'effectuera au moyen de la substitution

$$\frac{x^3+4b}{x^2+4a} = 4p(u, g_2, g_3) \quad (^1).$$

L'étude des cas de réduction des intégrales abéliennes dépendant des radicaux du troisième, quatrième et sixième degré est réservée pour une autre fois.

CORRESPONDANCE.

(Extrait d'une lettre de M. Mathias Lerch à M. Darboux.)

Je viens de lire l'article de M. H. Lebesgue, paru dans le récent numéro du *Bulletin des Sciences mathématiques*. En rapprochant le théorème qui y est énoncé d'un théorème fort

(1) E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 219; Königsberger, *Journal de Borchardt*, t. 85, p. 287.

connu de Weierstrass, d'après lequel, toute série des polynomes uniformément convergente, dans un domaine à deux dimensions, a pour somme une fonction synectique, il m'a paru intéressant de revenir de plus près sur la formule de Seidel (*Journal de Crelle*, t. 73)

$$x - iy = 2\int_0^\infty \lim_{n=\infty} \frac{z^{n-1}\xi}{z^n + \xi^n}\, d\xi, \tag{1}$$

où $z = x + iy$.

Il n'y a aucun doute que l'intégrale qui figure au second membre ne pourra jamais être développée en une série des polynomes en z. Mais au lieu de cette intégrale je vais considérer l'expression

$$\Phi_n(z) = 2\int_0^\infty \frac{z^{n-1}\xi}{z^n + \xi^n}\, d\xi. \tag{2}$$

Elle n'a aucun sens, si la quantité z^n est réelle et négative; pour éviter toute complication, je me borne à supposer $y > 0$ et à prendre

$$z = x + iy = re^{\Theta\pi i}, \qquad (0 < \Theta < 1),$$

où Θ est une quantité irrationnelle. On vérifie aisément que l'intégrale (2) est donnée par la formule

$$\Phi_n(z) = A_n z + B_n z, \tag{3}$$

où

$$A_n = \frac{2\pi}{n \sin\frac{2\pi}{n}} e^{-\frac{4m\pi i}{n}},$$

$$B_n = -\frac{2\pi}{n \sin\frac{2\pi}{n}} + 2\int_0^\infty \frac{\eta\, d\eta}{1 + \eta^n},$$

m désignant la fonction numérique

$$m = \mathrm{E}\left(\frac{n\Theta + 1}{2}\right). \tag{4}$$

Cela étant, il est clair que

$$\lim_{n=\infty} B_n = 0, \qquad \lim_{n=\infty} A_n = e^{-2\Theta\pi i},$$

de sorte qu'il vient

$$(5) \qquad \lim_{n=\infty} \Phi_n(z) = z e^{-2\Theta\pi i} = r e^{-\Theta\pi i} = x - iy;$$

mais la convergence n'est pas uniforme.

Écrivons en effet cette limite sous la forme

$$(5)' \qquad \varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \varphi_3(z) + \ldots = x - iy;$$

où l'on a posé

$$\varphi_1(z) = \Phi_1(z), \qquad \varphi_\nu(z) = \Phi_\nu(z) - \Phi_{\nu-1}(z).$$

Les $\varphi_\nu(z)$ sont en effet des polynomes en z, car on a

$$\varphi_\nu(z) = c_\nu z,$$

où la constante c_ν est donnée par l'expression

$$(6) \qquad c_\nu = (A_\nu - A_{\nu-1}) + (B_\nu - B_{\nu-1});$$

Mais cette expression fait voir que la série $(5)'$ n'entre point dans la catégorie de celles dont on traite la convergence uniforme ; car en changeant aussi peu qu'on le veut l'angle de la variable z, une infinité des termes de la série changeront de forme en changeant les valeurs de leurs coefficients qui, en effet, sont des fonctions discontinues de Θ.

On se trouve en présence d'un développement qui a quelque analogie avec le développement en fraction décimale

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots;$$

en modifiant les chiffres suffisamment éloignés $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$, on effectue une variation de la somme x, donnée d'avance. Chaque chiffre est une constante tant que x varie dans un certain intervalle; mais la totalité des chiffres $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots)$ varie nécessairement avec x.

Je termine avec la vérification de la formule (3). La substitution $\xi = z\eta$ donne d'abord

$$2\int_0^\infty \frac{z^{n-1}\xi\, d\xi}{z^n + \xi^n} = 2z\int \frac{\eta\, d\eta}{1 + \eta^n},$$

le chemin pour la deuxième intégrale étant le vecteur indéfiniment prolongé du point $\frac{1}{\omega}$. La fonction sous le signe somme a des pôles $\eta = e^{-\frac{\lambda \pi i}{n}}$ $(\lambda = 1, 3, 5, \ldots, 2m - 1)$ qui se trouvent entre le chemin de l'intégration et la partie positive de l'axe réel, si l'on a

$$m = \mathrm{E}\left(\frac{n\Theta + 1}{2}\right).$$

Le résidu au pôle η ayant pour valeur $-\frac{\eta^2}{n}$, nous aurons, en faisant usage du théorème de Cauchy,

$$\int \frac{\eta\, d\eta}{1 + \eta^n} = -\frac{2\pi i}{n} \sum_{\lambda} e^{-\frac{2\lambda\pi i}{n}} + \int_0^{\infty} \frac{\eta\, d\eta}{1 + \eta^n}$$

$$(\lambda = 1, 3, 5, \ldots 2m - 1),$$

d'où la formule (3) se tire immédiatement.

Fribourg, le 11 avril 1903.