Matyáš Lerch
Zur Théorie der Gauss'schen Summen

Math. Ann. 57 (1903), 554–567

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501558

Zur Theorie der Gaußschen Summen.

Von

M. Lerch in Freiburg (Schweiz).

I.

Es sei ω eine rationale reelle Zahl und es bedeute, wie im folgenden überhaupt, $\sqrt{\frac{\omega}{i}}$ denjenigen Wert der Quadratwurzel, dessen reeller Teil positiv ist. Alsdann wird durch das System von Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} F(v+1) = F(v) - ie^{\frac{v^2\pi i}{\omega}}, \\ F(v+\omega) = F(v)e^{\pi i(2v+\omega)} + \sqrt{\frac{\omega}{i}} \end{cases}$$

eine eindeutige Funktion $F(v)$ der stetigen Variablen v vollkommen definiert.

Denn es ergeben sich aus (1) unmittelbar die Relationen

$$(2^1)\qquad F(v+n) = F(v) - i\sum_{\nu=0}^{n-1} e^{\frac{\pi i}{\omega}(v+\nu)^2},$$

$$(2^2)\qquad F(v-n) = F(v) + i\sum_{\nu=1}^{n} e^{\frac{\pi i}{\omega}(v-\nu)^2},$$

$$(2^3)\qquad F(v+n\omega) = e^{n\pi i(2v+n\omega)}F(v) + \sqrt{\frac{\omega}{i}}\sum_{\nu=0}^{n-1} e^{2\nu v\pi i + (2n\nu-\nu^2)\omega\pi i},$$

in welchen n eine positive ganze Zahl bedeutet. Wir werden häufig $F(v,\omega)$ an Stelle von $F(v)$ schreiben, wenn es nötig sein wird, den Parameter ω anzugeben; die Funktion $F\left(v, \frac{r}{s}\right)$, welche dem Falle eines positiven $\omega = \frac{r}{s}$ entspricht, läßt sich dann mit Hülfe der Gleichungen (2^1) für $n = r$ und (2^3) für $n = s$ direkt berechnen, womit unsere Behauptung erwiesen ist; ähnlich bestimmt sich $F\left(v, -\frac{r}{s}\right)$ mit Hülfe der Gleichungen (2^2) und (2^3). Die Resultate lauten

$$(3^1)\quad \begin{cases} F\left(v, \frac{r}{s}\right)\cdot\left(1-(-1)^{rs}e^{2svπi}\right) \\ = i\sum\limits_{ν=0}^{r-1} e^{\frac{sπi}{r}(v+ν)^2} + \sqrt{\frac{r}{is}}\sum\limits_{ν=0}^{s-1} e^{2νvπi - \frac{ν^2 rπi}{s}}, \end{cases}$$

$$(3^2)\quad \begin{cases} F\left(v, -\frac{r}{s}\right)\cdot\left(1-(-1)^{rs}e^{2svπi}\right) \\ = -i\sum\limits_{ν=1}^{r} e^{-\frac{sπi}{r}(v-ν)^2} + \sqrt{\frac{ir}{s}}\sum\limits_{ν=0}^{s-1} e^{2νvπi + \frac{ν^2 rπi}{s}}, \end{cases}$$

und sie zeigen, daß die Funktion $F(v)$ eine eindeutige analytische ist, und man kann, allerdings mit Heranziehung von viel komplizierteren Hülfsmitteln, beweisen, daß $F(v)$ eine *ganze* transcendente Funktion von v ist. Man verifiziert ferner leicht mit Hülfe der Fundamentalgleichungen (1) die Beziehungen

$$(4)\qquad F(v, ω) = i\sqrt{\frac{ω}{i}}\, e^{\frac{v^2 πi}{ω}} F\left(\frac{v}{ω}, \frac{-1}{ω}\right) + \sqrt{\frac{ω}{i}},$$

$$(5)\qquad F(v, ω) + F(1-v, ω) = \sqrt{\frac{ω}{i}},$$

und hieraus vermöge (1)

$$(5^0)\qquad F(v, ω) + F(-v, ω) = \sqrt{\frac{ω}{i}} + ie^{\frac{v^2 πi}{ω}}$$

Nimmt man als bekannt an, daß $F(v)$ für $v=0$ und $v=\frac{1}{2}$ endlich bleibt, so erschließt man aus (5) und (5^0) die speziellen Werte

$$(6)\qquad F\left(\frac{1}{2}, ω\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{ω}{i}},\quad F(0) = \frac{1}{2}\left(i + \sqrt{\frac{ω}{i}}\right),$$

oder wegen (3^1), wenn $ω$ positiv ist,

$$(7)\qquad i\sum_{ν=0}^{r-1} e^{\frac{ν^2 sπi}{r}} + \sqrt{\frac{r}{is}}\sum_{ν=0}^{s-1} e^{-\frac{ν^2 rπi}{s}} = \frac{1-(-1)^{rs}}{2}\left(i + \sqrt{\frac{r}{is}}\right),$$

$$(8)\qquad i\sum_{ν=0}^{r-1} e^{(2ν+1)^2\frac{sπi}{4r}} + \sqrt{\frac{r}{is}}\sum_{ν=0}^{s-1}(-1)^ν e^{-\frac{ν^2 rπi}{s}} = \frac{1-(-1)^{(r+1)s}}{2}\sqrt{\frac{r}{is}}.$$

Die Gleichung (7) wird sicher immer dann bestehen, wenn rs eine ungerade Zahl ist, weil alsdann der Ausdruck

$$1-(-1)^{rs}e^{2svπi}$$

für $v=0$ von Null verschieden bleibt, und daher die Größe $F(0)$ sich mit Hülfe von (3^1) in völlig bestimmter Weise berechnen läßt. In diesem

Falle wird aber auch die Gleichung (7) selbstverständlich, da sich in jeder der beiden Summen die Glieder paarweise aufheben, und nur die Glieder $\nu = 0$ übrig bleiben. Der allein interessante Fall, wann die Gleichung (7) nicht eine selbstverständliche Identität wird, ist also der, wann rs eine gerade Zahl ist; dann lautet die Gleichung (7)

$$(7^0) \qquad i\sum_{\nu=0}^{r-1} e^{\frac{\nu^2 s\pi i}{r}} + \sqrt{\frac{r}{is}} \sum_{\nu=0}^{s-1} e^{-\frac{\nu^2 r\pi i}{s}} = 0$$

Diese Gleichung kann aber auch in der Form

$$(7^1) \qquad \sqrt{\frac{ri}{s}} \sum_{\nu=0}^{s-1} e^{-\frac{\nu^2 r\pi i}{s}} = \sum_{\nu=0}^{r-1} e^{\frac{\nu^2 s\pi i}{r}} \quad (rs \text{ gerade})$$

geschrieben werden, und sie drückt diejenige Beziehung zwischen zwei Gaußschen Summen aus, welche Kronecker als das Reziprozitätsgesetz der letzteren bezeichnete, und welche bereits im Jahre 1840 (Comptes Rendus und Journal von Liouville) Cauchy gelehrt hat.

Nun läßt sich im Falle eines geraden $r \cdot s$ aus dem Bestehen der Gleichung (7^0) auch umgekehrt die Endlichkeit der Größe $F\left(v, \frac{r}{s}\right)$ für $v = 0$ nach (3^1) leicht erschließen; da alsdann nach (2^3) $F(n\omega) = F\left(\frac{nr}{s}\right)$ und somit wegen (2^1) und (2^2) auch $F\left(\frac{k}{s}\right)$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ endlich bleiben muß, und weil ferner nach (3^1) die Funktion $F(v)$ keine anderen singulären Stellen haben kann, als die Pole erster Ordnung $v = \frac{k}{s}$, so ist dann die Funktion $F(v)$ überall endlich und somit ganz. Es läßt sich daher aus dem Bestehen der Cauchyschen Reziprozität (7^0) allein schon der Umstand erschließen, daß $F\left(v, \frac{r}{s}\right)$ eine ganze Transcendente ist, sobald rs eine gerade Zahl bedeutet.

In ähnlicher Weise läßt sich aus dem Bestehen der Gleichung (8) für ein ungerades $r \cdot s$ die Folgerung ziehen, daß auch in diesem Falle $F\left(v, \frac{r}{s}\right)$ eine ganze Funktion ist.

Wir gehen nun dazu über, die Gleichungen (7) und (8) direkt zu begründen*).

---

*) Kronecker entwickelte die erste Reziprozitätsgleichung, welche auf die Relation (7) zurückkommt, nach Andeutungen Cauchys (l. c.), in seiner Abhandlung „Ueber den vierten Gaußschen Beweis des Reziprozitätsgesetzes für die quadratischen Reste" (Monatsberichte der Berliner Akademie, 1880), hat dann für dieselbe eine aus Dirichletschen Prinzipien geschöpfte Ableitung gegeben (Festschrift d. math. Gesell-

II.

Eine verhältnismäßig einfache und durchsichtige, sowie strenge Begründung der Cauchyschen Reziprozitätseigenschaft der Gaußschen Summen beruht auf der Formel

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{a}(u+n)^2} = \sqrt{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-an^2\pi + 2nu\pi i}, \tag{9}$$

welche sich im Gaußschen Nachlaß vorfand und welche selbstständig von Cauchy entdeckt wurde und später bei Jacobis Untersuchungen über die elliptischen Transcendenten auftauchen mußte; in derselben bedeutet a eine komplexe Größe, deren reeller Teil positiv ist, und die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ ist durch die Bedingung, daß ihr reeller Teil positiv sei, unzweideutig bestimmt. Neben der Formel (9) kommt namentlich der Spezialfall $u = 0$ in Betracht, d. h.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{a}n^2} = \sqrt{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-an^2\pi}. \tag{9^0}$$

Es seien nun λ, μ zwei von Null verschiedene ganze Zahlen und man betrachte die Funktion

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi\left(x + \frac{\lambda i}{\mu}\right)}; \tag{10}$$

in derselben muß der reelle Teil der unabhängigen Veränderlichen x positiv sein, und wir wollen das Verhalten von $\varphi(x)$ für unendlich kleine Werte von x untersuchen. Zu dem Zwecke führen wir in (10) die Substitution $n = 2\mu m + \varrho$ $(0 \leqq \varrho < |2\mu|;\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots)$ aus; setzen wir der Kürze wegen

$$\varphi_\varrho(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-4\mu^2 x\pi\left(m + \frac{\varrho}{2\mu}\right)^2}, \tag{10^a}$$

---

schaft in Hamburg, 1900; Vorlesungen über die Theorie der Integrale, herausg. von E. Netto, 1894).

Daß die von Cauchy benutzten, zum Teil von Laplace stammenden und von Kronecker ebenfalls angewendeten Grenzübergänge nicht vollkommen streng sind, habe ich vor mehreren Jahren erkannt, und habe namentlich 1887 in einem Aufsatze (Jornal de sc. math. e astron.; Porto; vol. VIII) die nötigen Ergänzungen ausgeführt. Der eigentliche Zweck jenes Aufsatzes war allerdings kein algebraischer, sondern es handelte sich um einen neuen Beweis der Tatsache, daß die elliptische Transcendente $\vartheta_3(0\,|\,\omega)$ über die reelle Achse hinaus in die negative Halbebene ω nicht fortgesetzt werden kann.

so lautet das Resultat

$$(10^b) \qquad \varphi(x) = \sum_{\varrho=0}^{|2\mu|-1} e^{-\frac{\varrho^2 \lambda \pi i}{\mu}} \varphi_\varrho(x).$$

Wir setzen nun $x = \xi + i\eta$, $\xi > 0$, und machen die Annahme, daß das Verhältnis $\frac{\eta}{\xi}$ in endlichen Grenzen bleibt, während beide Größen ξ und η unendlich klein werden.

Setzt man in der Gleichung (9)

$$u = \frac{\varrho}{2\mu}, \quad a = \frac{1}{4\mu^2 x},$$

so ergibt sich

$$\varphi_\varrho(x) = \frac{1}{|2\mu|\sqrt{x}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi}{4\mu^2 x} + \frac{n\varrho\pi i}{\mu}}$$

oder übersichtlicher geschrieben

$$(10^c) \qquad \varphi_\varrho(x) = \frac{1}{|2\mu|\sqrt{x}} + \frac{1}{|\mu|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{n^2\pi}{4\mu^2 x}} \cos\frac{n\varrho\pi}{\mu}.$$

Nun ist aber wegen $x = \xi + i\eta$

$$\left| e^{-\frac{n^2\pi}{4\mu^2 x}} \right| = e^{-\frac{n^2\pi}{4\mu^2\xi} \cdot \frac{1}{1+\sigma^2}},$$

wenn $\sigma = \frac{\eta}{\xi}$ gesetzt wird. Die Annahme, daß dieser Quotient σ in endlichen Grenzen bleibe, ergibt die Ungleichung

$$\frac{1}{1+\sigma^2} \geqq 2g,$$

wobei g eine positive, von x unabhängige Größe bedeutet. Es ist dann

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{n^2\pi}{4\mu^2 x}} \cos\frac{n\varrho\pi}{\mu} \right| \leqq \frac{1}{\sqrt{\xi}} e^{-\frac{2n^2 g\pi}{4\mu^2\xi}},$$

und weil für hinreichend kleine ξ die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} e^{-\frac{n^2 g\pi}{4\mu^2\xi}} < \delta$$

bei vorgeschriebenem positiven δ erfüllt wird, so ist

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{n^2\pi}{4\mu^2 x}} \cos\frac{n\varrho\pi}{\mu} \right| < \delta e^{-\frac{n^2 g\pi}{4\mu^2\xi}};$$

da aber die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 g\pi}{4\mu^2\xi}}$$

z. B. für $\xi < 1$ unterhalb einer konstanten Grenze G bleibt, so folgt hieraus die Ungleichung

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-\frac{n^2\pi}{4\mu^2 x}} \cos\frac{n\varrho\pi}{\mu}\right| < \delta G,$$

sobald x hinreichend klein wird, wenn nur die über $\eta:\xi$ getroffene Voraussetzung erfüllt ist.

Damit wird aber bewiesen, daß der zweite Teil der rechten Seite von (10^c) zu gleicher Zeit mit x unendlich klein (und zwar sehr intensiv) wird, sodaß also die Grenzformel

$$\lim_{x=0}\left[\varphi_\varrho(x) - \frac{1}{|2\mu|\sqrt{x}}\right] = 0 \tag{10^d}$$

folgt.

Setzen wir demnach in geringer Abweichung von Kronecker

$$G(\lambda, \mu) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{|2\mu|-1} e^{-\frac{\alpha^2\lambda\pi i}{\mu}}, \tag{11}$$

so ergibt sich aus (10^b) und (10^d) die gewünschte Beziehung

$$\lim_{x=0}\left[\varphi(x) - \frac{G(\lambda,\mu)}{|\mu|\sqrt{x}}\right] = 0. \tag{12}$$

Sie kann in noch schärferer Weise durch die folgende Formel ausgesprochen werden

$$\vartheta_3\left(0\,\middle|\,-\frac{\lambda}{\mu} + ix\right) = \frac{G(\lambda,\mu)}{|\mu|\sqrt{x}} + R, \tag{12*}$$

in welcher R eine Funktion von x bedeutet, die mit x so intensiv gegen die Null konvergiert, daß dabei alle Quotienten

$$\frac{R}{x^m} \qquad (m = 1, 2, 3, 4, \cdots)$$

unendlich klein werden*).

Eine Konsequenz der Gleichung (12) ist die Formel von Cauchy und Kronecker

$$\lim_{x=0}\sqrt{x}\,\varphi(x) = \frac{1}{|\mu|}\,G(\lambda,\mu). \tag{12^0}$$

Aus dem Bestehen der Formel (12*) schließt man, daß die Funktion der komplexen Veränderlichen ω

) Man bemerkt die Analogie der Formel (12) mit gewissen halbkonvergenten Entwickelungen, wie z. B. mit derjenigen für die Lambertsche Reihe $\sum \frac{1}{e^{nx}-1}$ für kleine x. Näheres darüber findet sich in einer späteren Notiz.

$$\vartheta_3(0\,|\,\omega) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2\omega\pi i}$$

nur in positiver (nördlicher) Halbebene existieren kann. Denn bedeutet $(\alpha \cdots \beta)$ ein Stück der reellen Achse, so ist entweder für sämtliche rationale Werte $-\frac{\lambda}{\mu}$ des Intervalls $(\alpha \cdots \beta)$ der Ausdruck $G(\lambda, \mu)$ gleich Null, und dann wird nach (12*) die Funktion $\vartheta_3(0\,|\,\omega)$ unendlich klein, wenn sich ω irgend welchem rationalen Werte des Intervalls $(\alpha \quad \beta)$ nähert. Wäre daher $\vartheta_3(0\,|\,\omega)$ im Intervalle synektisch, so müßte es daselbst überall gleich Null sein, und die Funktion müßte somit für sämtliche ω verschwinden, was aber nicht der Fall ist.

Man betrachte jetzt das Punktsystem (Mannigfaltigkeit) der rationalen Werte $-\lambda:\mu$, in welchen $G(\lambda, \mu)$ von Null verschieden ist. Jedes Intervall der reellen Achse, in welchem das betrachtete Punktsystem nicht überalldicht vertreten ist, muß nach dem Vorhergehenden eine singuläre Strecke für $\vartheta_3(0\,|\,\omega)$ sein. Ist aber im Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ unsere Mannigfaltigkeit überalldicht vertreten, so werden sich in der komplexen Umgebung eines jeden Punktes von $(\alpha \cdots \beta)$ Stellen finden lassen, wo nach (12*) die Funktion $\vartheta_3(0\,|\,\omega)$ beliebig große Werte annimmt; dieselbe kann also wieder in keinem Teile von $(\alpha \cdots \beta)$ synektisch sein*).

Indem wir nun wieder zu unserem Gegenstande zurückkehren, setzen wir in (9°) $a = x + \frac{\lambda i}{\mu}$, wobei x reell und alsdann positiv vorausgesetzt werde; multipliziert man auf beiden Seiten mit $\sqrt{x}$, so kommt zunächst

$$\text{(a)} \qquad \lim_{x=0}\left\{\sqrt{x+\frac{\lambda i}{\mu}}\cdot\sqrt{x}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi\left(x+\frac{\lambda i}{\mu}\right)}\right\} = \lim_{x=0}\sqrt{x}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi}{x+\frac{\lambda i}{\mu}}}$$

Die linke Seite ist nach (12°) offenbar

$$\frac{1}{|\mu|}\,G(\lambda, \mu)\sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}},$$

wobei die Quadratwurzel ihren reellen Teil positiv hat. Um aber den Ausdruck auf der rechten Seite von (a) zu ermitteln, beachten wir, daß

$$\frac{1}{x+\frac{\lambda i}{\mu}} = \frac{\mu}{\lambda i} + \frac{\mu^2 x}{\lambda^2 - i\lambda\mu x} = \frac{-\mu i}{\lambda} + z,$$

wenn

$$z = \frac{\mu^2 x}{\lambda^2 - i\lambda\mu x}$$

*) Man vergl. hierzu unseren oben zitierten Aufsatz.

gesetzt wird. Der imaginäre Teil von z wird hier im Verhältnis zum reellen unendlich klein (mit x), und somit nach (12^0)

$$\text{(b)} \qquad \lim_{z=0} \sqrt{z} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi\left(z-\frac{\mu i}{\lambda}\right)} = \frac{1}{|\lambda|} G(-\mu, \lambda).$$

Da aber

$$\lim \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{z}} = \left|\frac{\lambda}{\mu}\right|$$

ist, so ist aus (b) zu schließen, daß die rechte Seite von (a) den Wert

$$\left|\frac{\lambda}{\mu}\right| \cdot \frac{1}{|\lambda|} G(-\mu, \lambda) = \frac{1}{|\mu|} G(-\mu, \lambda)$$

hat; damit ist aber die Cauchy-Kroneckersche Reziprozität

$$(13) \qquad G(\lambda, \mu) \sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}} = G(-\mu, \lambda)$$

bewiesen.

Da nun wie leicht zu sehen

$$(11^0) \qquad G(\lambda, \mu) = \frac{1+(-1)^{\lambda\mu}}{2} \sum_{\alpha=0}^{|\mu|-1} e^{-\frac{\alpha^2\lambda\pi i}{\mu}},$$

so wird sich aus (13) für $\lambda = r$, $\mu = s$, (rs gerade) die Gleichung (7^1) ergeben; die Beziehung (7) ist daher bewiesen.

III.

In den Berliner Monatsberichten vom Jahre 1880 versuchte Kronecker aus dem Bestehen der Relation (13) mit Rücksicht auf (12^0) umgekehrt die Transformationsformel (9^0) zu deduzieren*). In einer Fortsetzung**) bemerkt er später, daß seine Schlüsse auch dann bestehen bleiben, wenn man an Stelle von (13) die rein algebraisch zu begründende Tatsache

$$\frac{\sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}}\, G(\lambda, \mu)}{G(-\mu, \lambda)} = \pm 1$$

benützt. Er beruft sich dabei auf den Cauchyschen Integralsatz für den Fall einer Kreisfläche

$$\text{(a)} \qquad \Phi(\xi) - 1 = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Phi(x) - 1}{x - \xi}\, dx,$$

in dem er unter $\Phi(x)$ das eine Mal die Funktion

*) Seite 696 u. ff.

**) Seite 854 daselbst.

$$\text{(b)} \qquad \sqrt{\log\frac{1}{x}}\,\frac{\sum x^{n^2\pi}}{\sum y^{n^2\pi}}, \qquad \begin{pmatrix}\log x\cdot\log y=1,\\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots\end{pmatrix}$$

das andere Mal ihr Quadrat setzt. In der Formel (a) hat die Kreisfläche einen Halbmesser $|x| = r < 1$, welchen Kronecker gegen Eins konvergieren läßt. Er setzt $x = re^{2s\pi i}$, ferner

$$\frac{\Phi(x)-1}{x-\xi} = \chi(r, s),$$

nimmt dann an Stelle von (a) (S. 697, Z. 3)

$$\text{(c)} \qquad \Phi(\xi) - 1 = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\mu=\infty}\frac{1}{\mu}\sum_{\lambda=0}^{\mu-1}\lim_{r=1}\chi\left(r, \frac{\lambda}{\mu}\right),$$

eine Gleichung, die durch nichts begründet wird.

Ihre Quelle wäre in der Formel zu suchen

$$\Phi(\xi) - 1 = \int_0^1 \chi(r, s) re^{2s\pi i}\, ds, \qquad (|\xi| < r < 1),$$

welche aus (a) durch obige Substitution hervorgeht; die rechte Seite ist alsdann gleich

$$\lim_{\mu=\infty}\frac{1}{\mu}\sum_{\lambda=0}^{\mu-1}\chi\left(r, \frac{\lambda}{\mu}\right) re^{\frac{2\lambda\pi i}{\mu}},$$

und man hätte daher die richtige Gleichung

$$\text{(c}'\text{)} \qquad \Phi(\xi) - 1 = \lim_{r=1}\lim_{\mu=\infty}\frac{1}{\mu}\sum_{\lambda=0}^{\mu-1}\chi\left(r, \frac{\lambda}{\mu}\right) e^{\frac{2\lambda\pi i}{\mu}},$$

wenn sich von der Funktion $\Phi(\xi)$ beweisen ließe, daß sie innerhalb des Kreises $|\xi| \leqq 1$ synektisch bleibt*). Aber auch nach Beseitigung des formalen Versehens, das sich in Kroneckers Formel (c) eingeschlichen hat, spricht kein Grund für ihre Richtigkeit. Denn die Gleichung

$$\text{(c}''\text{)} \qquad \lim_{r=1}\lim_{\mu=\infty}\frac{1}{\mu}\sum_{\lambda=0}^{\mu-1}\bar{\chi}\left(r, \frac{1}{\mu}\right) = \lim_{\mu=\infty}\frac{1}{\mu}\sum_{\lambda=0}^{\mu-1}\lim_{r=1}\bar{\chi}\left(r, \frac{\lambda}{\mu}\right),$$

welche die korrigierte Kroneckersche Formel (c) wiedergeben würde, ist nur dann richtig, wenn die Funktion $\bar{\chi}(r, s)$ gewisse Grenzbedingungen erfüllt, von denen in der Kroneckerschen Beweisführung gar keine Rede ist.

*) Eine Wiedergabe der falschen Ausführungen Kroneckers findet sich in Herrn Bachmanns *Analytischer Zahlentheorie* (Leipzig, 1894), S. 179—183.

Außerdem ist kaum leicht direkt nachzuweisen, daß der Ausdruck (b) oder sein Quadrat innerhalb der Kreisfläche $|x| \leqq 1$ eindeutig bleibt. Denn nach einem positiven Umlauf um den Nullpunkt verwandelt sich $\log x$ in $\log x + 2\pi i$,

$$y \quad \text{in} \quad e^{\frac{1}{\log x + 2\pi i}}, \qquad x^{n^2\pi} \quad \text{in} \quad e^{2n^2\pi^2 i} x^{n^2\pi},$$

und es müßte daher zunächst der Nachweis geführt werden, daß die Größe

$$\text{(b')} \qquad \sqrt{\log\frac{1}{x} - 2\pi i} \cdot \frac{\sum e^{2n^2\pi^2 i} x^{n^2\pi}}{\sum e^{\frac{n^2\pi}{\log x + 2\pi i}}}$$

bis auf das Vorzeichen mit der Größe (b) übereinstimmt.

Aus diesen Gründen ist der Beweisversuch Kroneckers als vollständig verfehlt zu bezeichnen. Ja er ist sogar dadurch nicht zu retten, daß man den Cauchyschen Integralsatz durch einen anderen Fundamentalsatz der Funktionentheorie ersetzen würde, der besagt, daß eine analytische Funktion von ω $(\omega = x + iy,\, y > 0)$ identisch verschwindet, wenn sie sich zu gleicher Zeit mit y der Null nähert.

Es wurde nämlich bewiesen, daß die Größe

$$\text{(d)} \qquad \frac{\sqrt{\frac{\omega}{i}}\,\vartheta_3(0\,|\,\omega)}{\vartheta_3\left(0\,\middle|\,\frac{-1}{\omega}\right)}$$

in

$$\frac{\sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}}\,G(\lambda, \mu)}{G(-\mu, \lambda)},$$

also in ± 1 übergeht, wenn ω sich dem rationalen Werte $-\frac{\lambda}{\mu}$ unendlich nähert, aber über das Verhalten der Größe (d) beim Grenzübergang zu irrationalen Werten von ω ist nichts bekannt.

Daß die hier dargelegten Bedenken auch tatsächlich begründet erscheinen, läßt sich am bequemsten durch die Betrachtung der Funktion

$$f(\omega) = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)\, e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \omega\pi i},$$

d. h. von

$$f(\omega) = \frac{1}{\pi}\,\vartheta_1'(0\,|\,\omega)$$

dartun.

Setzt man $\omega = ix - \frac{\lambda}{\mu}$, und benützt die bequemere Form

$$f(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (2n+1)\, e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \omega\pi i},$$

so verwandelt sich durch die Substitution $n = 2\mu m + \varrho$ der Ausdruck $f(\omega)$ in

$$\text{(e)} \qquad \sum_{\varrho=0}^{|2\mu|-1} (-1)^{\varrho} e^{-\left(\varrho+\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\lambda\pi i}{\mu}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (4m\mu+2\varrho+1)\, e^{-4\mu^2 x\pi(m+\sigma)^2},$$

wobei

$$\sigma = \frac{2\varrho+1}{4\mu}$$

gesetzt wurde. Differenziert man nun die beiden Seiten der Gleichung (9) nach u, so folgt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+u) e^{-\frac{\pi}{a}(u+n)^2} = -i \cdot a\sqrt{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n e^{-an^2\pi+2nu\pi i};$$

wird hier $a = \frac{1}{4\mu^2 x}$, $u = \sigma$ genommen, so ergibt sich

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (m+\sigma)\, e^{-4\mu^2 x\pi(m+\sigma)^2} = \frac{1}{4|\mu|^3 x\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{n^2\pi}{4\mu^2 x}} \sin 2n\sigma\pi;$$

die rechte Seite wird aber mit x unendlich klein, und deshalb nähert sich auch der Ausdruck (e) zugleich mit x der Null; also

$$\lim_{x=0} f\left(ix - \frac{\lambda}{\mu}\right) = 0.$$

Die Funktion $f(\omega)$ nähert sich daher der Null, wenn ω gegen einen rationalen Wert konvergiert, und trotzdem bleibt die Funktion $f(\omega)$ in der ganzen Halbebene von Null verschieden*).

IV.

Es bleibt uns noch übrig, die Gleichung (8) zu beweisen, um die Eigenschaft von $F\left(u, \frac{r}{s}\right)$ als ganze Funktion von u auch für ungerade $r \cdot s$ zu begründen. Ich betrachte zu dem Zwecke die Ausdrücke:

---

*) Wenn man die Theorie der elliptischen Funktionen nicht benutzen will, so ist von den Beweisen der Relation (9) der von Gauß und Cauchy wohl am einfachsten. Derselbe beruht auf der trigonometrischen Entwickelung der linken Seite, man kann aber auch vom Laurentschen Satze Gebrauch machen. Eine andere Begründung desselben Resultates kann aber auch mit Hülfe eines Fundamentalsatzes der Theorie der erzeugenden Funktionen geleistet werden, welchen ich im Jahre 1892 in den Schriften der Prager Akademie bewiesen habe, und dessen neue Bearbeitung im 27. Bande der Acta mathematica abgedruckt ist.

$$\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2\pi\left(x+\frac{\lambda i}{\mu}\right)},$$

$$\chi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi\left(x+\frac{\lambda i}{\mu}\right)}$$

für unendlich kleine x. Es ergibt sich durch Anwendung von genau denselben Schlüssen, wie oben, daß die Differenzen

$$\psi(x) - \frac{1}{|2\mu|\sqrt{x}} \sum_{\varrho=0}^{|2\mu|-1} (-1)^\varrho e^{-\frac{\varrho^2\lambda\pi i}{\mu}},$$

$$\chi(x) - \frac{1}{|2\mu|\sqrt{x}} \sum_{\varrho=0}^{|2\mu|-1} e^{-\left(\varrho+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\lambda\pi i}{\mu}}$$

mit x unendlich klein werden.

Setzt man daher:

$$(14)\qquad \begin{cases} G_0(\lambda, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{\varrho=0}^{|2\mu|-1} (-1)^\varrho e^{-\frac{\varrho^2\lambda\pi i}{\mu}}, \\ G_2(\lambda, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{\varrho=0}^{|2\mu|-1} e^{-\left(\varrho+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\lambda\pi i}{\mu}}, \end{cases}$$

so folgt:

$$\lim_{x=0} \sqrt{x}\,\psi(x) = \frac{1}{|\mu|} G_0(\lambda, \mu),$$

$$\lim_{x=0} \sqrt{x}\,\chi(x) = \frac{1}{|\mu|} G_2(\lambda, \mu),$$

und wenn man in der Thetarelation

$$\sqrt{a} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{-an^2\pi} = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi}{a}}$$

an Stelle von a den Ausdruck $x + \frac{\lambda i}{\mu}$ setzt, dann beide Seiten mit $\sqrt{x}$ multipliziert und zur Grenze für $x = 0$ übergeht, so ergibt sich die neue Beziehung

$$(15)\qquad G_0(\lambda, \mu)\sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}} = G_2(-\mu, \lambda),$$

die schon Kronecker bekannt war*).

*) l. c., S. 860.

Man leitet ferner aus (14) unmittelbar ab

$$(14^{\text{bis}})\qquad \begin{cases} G_0(\lambda,\mu) = \dfrac{1+(-1)^{(\lambda+1)\mu}}{2} \displaystyle\sum_{\varrho=0}^{|\mu|-1} (-1)^\varrho e^{-\frac{\varrho^2 \lambda \pi i}{\mu}}, \\ G_2(\lambda,\mu) = \dfrac{1+(-1)^{\lambda(\mu+1)}}{2} \displaystyle\sum_{\varrho=0}^{|\mu|-1} e^{-(2\varrho+1)^2 \frac{\lambda\pi i}{\mu}}, \end{cases}$$

und hieraus folgt vermöge (15) für $\lambda = r$, $\mu = s$, wenn rs ungerade ist, die Relation (8).

Die Tatsachen, daß einerseits die Gleichungen (1) eine ganze transcendente Funktion $F(u)$ definieren, und daß andererseits die Reziprozitäten (13) und (15) bestehen, finden sich in solchem logischen Zusammenhange, daß jede derselben als eine Konsequenz der anderen erscheint.

Dabei vermitteln die Reziprozitäten einen Zusammenhang zwischen den elliptischen Theta-Nullwerten ϑ_3, ϑ_0, ϑ_2, und zwischen derjenigen analytischen Funktion der komplexen Veränderlichen u und ω, welche die Gleichungen (1) befriedigt. Ein Unterschied zwischen den beiden Kategorien von Funktionen tritt hier in der Form auf, daß die eben erwähnten Theta-Nullwerte auf die positive Halbebene beschränkt sind, während sich $F(u, \omega)$ in Bezug auf ω in der reellen Achse (außer in $\omega = 0$) regulär verhält. Aus diesem letzten Umstande glaube ich schließen zu dürfen, daß die Reziprozitäten (13) und (15) vielmehr der Theorie der Funktion $F(u, \omega)$ als der der elliptischen Funktionen angehören.

Wenn der imaginäre Teil von ω positiv ist, so hat die analytische Funktion*)

$$\Psi(u,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(x+\frac{i}{2}-iu\right)^2} \frac{dx}{1+e^{2x\pi}}$$

dieselben Eigenschaften wie $F(u, \omega)$; daß sie über die reelle Achse hinaus in die negative Halbebene fortgesetzt werden kann, erkennt man leicht durch Modifikation des Integrationsweges; für rationale reelle Werte des ω stimmt daher $\Psi(u, \omega)$ mit unserem $F(u, \omega)$ überein; die *Eigenschaft von* $\Psi(u) = F(u)$ *als ganze Funktion von* u *tritt dabei in Evidenz.*

Eine elementare Herleitung der Eigenschaften unserer Transcendente $F\left(u, \pm\frac{r}{s}\right)$, so wie sie hier versucht worden ist, erscheint wohl als wünchens-

*) Die Grundlagen der Theorie der Funktion $\Psi(u, \omega)$ habe ich in zwei Abhandlungen entwickelt, welche unter den Schriften der Prager Akademie (1892, Nr. 24 und 1893, Nr. 23) erschienen sind. Außerdem habe ich — in etwas abgeänderter Form — darüber in der 66. Naturforscherversammlung in Wien einen Vortrag gehalten.

wert, und es wäre eine wesentliche Vervollkommnung der Theorie, wenn es einmal gelingen sollte, das Hauptresultat unabhängig von der Theorie der elliptischen Funktionen und von der Integralrechnung zu ergründen*).

Dasselbe Verfahren, welches wir oben zur Bestimmung von $F\left(u, \pm \frac{r}{s}\right)$ benutzten, leistet die Darstellung — in endlicher Form — jeder Funktion, welche einfache Periodizitätsbeziehungen gegenüber dem Parallelogramm $(1, \omega)$ besitzt, und bestimmt und endlich bleibt, wenn ω in eine reelle rationale Zahl übergeht.

Die arithmetischen Funktionen $G_0(\lambda, \mu)$ und $G_2(\lambda, \mu)$ sind eigentlich keine neuen Gebilde, da wie man leicht sieht

$$G_0(\lambda, \mu) = G(\lambda + \mu, \mu) \quad (\lambda \text{ ungerade}),$$

und (μ ungerade),

$$\begin{aligned} G_2(\lambda, \mu) &= e^{-\frac{\lambda\mu\pi i}{4}} G(\lambda + \mu, \mu), \text{ wenn } \lambda \text{ ungerade,} \\ G_2(2h, \mu) &= i^{-h\mu} G(2h, \mu). \end{aligned}$$

Auch läßt sich die Relation (15) mit Zuhülfenahme von (13) direkt beweisen.

Die Auswertung der Summen G_0 und G_2 geschieht daher mit Hülfe der bekannten Resultate

$$\begin{aligned} G(2h, m) &= \left(\frac{h}{m}\right)\sqrt{m}, \quad (m \equiv 1, \text{ mod. } 4), \\ G(n, 2k) &= \left(\frac{k}{n}\right)(1 - i^n)\sqrt{k}, \quad (k > 0), \end{aligned}$$

wobei angenommen wird, daß die beiden Argumente $2h$ und m, resp. n und $2k$ relativ prim sind, und die Quadratwurzeln entweder positiv oder imaginär positiv sind, wie im folgenden überhaupt. Es ist dann

$$\begin{aligned} G_0(\lambda, m) &= \left(\frac{2\lambda}{m}\right)\sqrt{m}, \quad (m \equiv 1, \text{ mod. } 4), \\ G_0(n, 2k) &= (-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\left(\frac{k}{n}\right)(1 - i^{(2k+1)n})\sqrt{k}, \quad (k > 0), \\ G_2(m, \mu) &= \frac{1-i}{\sqrt{2}}\left(\frac{m}{2\mu}\right)\sqrt{\mu}, \\ G_2(2h, m) &= (-i)^h\left(\frac{h}{m}\right)\sqrt{m}, \end{aligned}$$

wobei immer $m \equiv 1$ (mod. 4), und μ ungerade vorausgesetzt wird.

---

*) Ich bemerke nur noch, daß das Existenzgebiet der Funktion $\Psi(u, \omega)$ in Bezug auf ω eine Riemannsche Fläche ist, die aus einer vollen Ebene $\omega = x + iy$ als oberem Blatt und aus einer Halbebene $y < 0$ als unterem Blatt besteht; die Übergangslinie verläuft von $\omega = 0$ bis $\omega = \infty$ in der negativen Halbebene, und die reelle Achse des unteren Blattes ist eine singuläre Linie der Funktion.