Matyáš Lerch
Některé dedukce z věty Carnotovy

Zprávy Král. Čes. spol. nauk, II. tř., 1882, 132–139

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501576

5—6cm., sind nach ∞P verlängert und viele von ihnen sehr schön entwickelt. Sie zeigen die gewöhnliche Combination $\infty P. \infty \bar{P} \infty. - P.$ Untersucht man den am westlichen Fusse vorkommenden Basalt mikroskopisch, so erscheint das Bild zur Hälfte aus kleinen, weisslichgrauen Angitschnitten, zur Hälfte aus farblosen, polysynthetischen Plagioklasleisten bestehend, unter denen grössere Augitkrystalle von graulich weisser Farbe, mit einem Stich ins Grünliche und ziemlich grosse Amphibolkrystalle von brauner Farbe liegen. Hin und wieder sieht man grelle Leisten des Apatits, die auch im Augit und Amphibol als Einschlüsse anzutreffen sind. Der Olivin ist in unregelmässigen, theils runden, theils eckigen Formen von lichtgrünlicher Farbe und der Magnetit in mittelgrossen Körnern gleichmässig vertheilt.

18.

Některé dedukce z věty Carnotovy.

Podal **Matyáš Lerch** a předložil prof. **F. Studnička** dne 24. března 1882.

1. Libovolný bod x přímky dané stanovme poměrem $\frac{ax}{bx} = (abx)$ algebraicky pojatých vzdáleností jeho ode dvou pevných bodů a, b přímky té, a nazývejme hodnotu poměru tohoto parametrem bodu x na základě bodů a, b utvořeným.

Úkol. Dány jsou dva body x_1 x_2 na přímce $\overline{ab}$ a má se stanoviti bod x, jehož parametr (abx) rovná se součinu $(abx_1) . (abx_2)$ parametrů bodův daných.

Řešení. Nekonečně vzdálený bod přímky u má parametr $(abu) = 1$. Následovně bude

$$(abx_1) . (abx_2) = (abx) . (abu)$$

aneb

$$\frac{(abx_1)}{(abx)} = \frac{(abu)}{(abx_2)}$$

Každá strana této rovnice značí dvojpoměr čtyř bodův, a tudíž jí můžeme dáti tvar

$$(abx_1x) = (abux_2) = (bax_2u)$$

Z toho plyne, že body ab, x_1x_2, ux tvoří involuci, t. j. že v involuci stanovené družinami ab, x_1x_2 odpovídá úběžnému bodu u bod hledaný x, jenž se, jak známo, zove středem této involuce.

Je-li nám dáno n bodů $x_1x_2x_3\ldots x_n$, a máme-li sestrojiti bod x stanovený podmínkou

$$(abx)=(abx_1)\,.\,(abx_2)\,.\,(abx_3)\ldots abx_n),$$

stanovme nejprvé body x_{12}, $x_{34}\ldots$ určené rovnicemi

$$(abx_{12})=(abx_1)\,.\,(abx_2)$$
$$(abx_{34})=(abx_3)\,.\,(abx_4)$$
$$\cdots\cdots$$

a obdržíme

$$(abx)=(abx_{12})\,(abx_{34})\ldots,$$

kdež možno podobně pokračovati.

Bod x nazývejme součinovým bodem daných bodů $x_1x_2\ldots x_n$ na základě bodů ab, a to i tehdy, splývají-li tyto v jediný. V tomto případě bude dlužno považovati bod, v němž splývají, za samodružný prvek naší involuce.

2. Carnot vyslovil větu, jejíž speciálný případ není než počtářským vyjádřením věty Pascalovy, která zní:

„Protínají-li strany libovolného trojúhelníka abc libovolnou kuželosečku v bodech x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2, jest vždycky vyplněna relace

$$(1)\qquad (abz_1)\,.\,(abz_2)\,.\,(bcx_1)\,.\,(bcx_2)\,.\,(cay_1)\,(cay_2)=1$$

Z této věty učiňme následující dedukci:

Stanovme body x_3 y_3 z_3 na stranách trojúhelníka bc, ca, ab vyhovující podmínkám

$$(\alpha)\qquad \begin{aligned}(abz_1)\,.\,(bcx_2)\,.\,(cay_3)&=-1\\(bcx_1)\,.\,(cay_2)\,.\,(abz_3)&=-1\\(cay_1)\,.\,(abz_2)\,.\,(bcx_3)&=-1\end{aligned}$$

Násobíme-li tyto rovnice a přihlížíme-li k (1), obdržíme podmínku

$$(\beta)\qquad (abz_3)\,.\,(bcx_3)\,.\,(cay_3)=-1$$

Podle theorému de Cévy (viz Dr. Em. a Ed. Weyr, Základové vyšší geom., str. 25) následuje z rovnice (α), že přímky cz_1, ax_2, by_3, dále ax_1, by_2, cz_3 a posléz by_1, cz_2, ax_3 procházejí jediným bodem 2, 3, 1 (viz obraz), kdežto z (β) plyne, že přímky ax_3, by_3, cz_3 procházejí týmž bodem s.

Následovně:

„Náležejí-li body x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2 téže kuželosečce a protínají-li se přímky $\overline{y_1y_2}$, $\overline{z_1z_2}$; $\overline{z_1z_2}$, $\overline{x_1x_2}$; $\overline{x_1x_2}$, $\overline{y_1y_2}$ v bodech a, b, c, procházejí přímky $\overline{a1}$, $\overline{b2}$, $\overline{c3}$ spojující body tyto s průseky přímek $\overline{by_1}$, $\overline{cz_2}$; $\overline{cz_1}$, $\overline{ax_2}$; $\overline{ax_1}$, $\overline{by_2}$ týmž bodem (s)."

3. Sestrojíme-li body součinové průseků x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2 na základě vrcholů trojúhelníka Carnotova, obdržíme pro tyto body x, y, z, vyhovující podmínkám

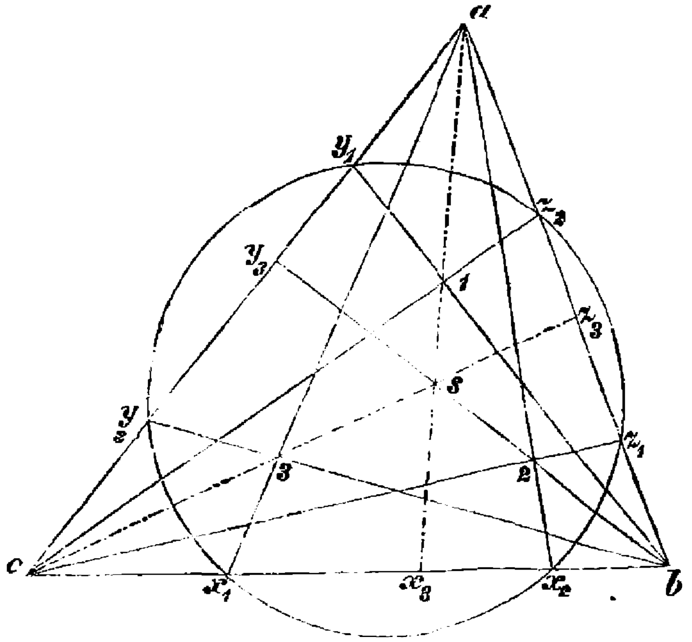
$$(abz) = (abz_1)(abz_2)$$
$$(bcx) = (bcx_1)(bcx_2)$$
$$(cay) = (cay_1)(cay_2)$$

podle (1) relaci

$$(abz) \, . \, (bcx) \, . \, (cay) = 1,$$

kteráž dle věty Menelaovy udává, že body x, y, z náležejí téže přímce.

Podle 1. odstavce obdržíme tudíž větu:



„Středy involuc stanovených vrcholy libovolného trojúhelníka na stranách jeho a průseky těchto stran s libovolnou kuželosečkou náležejí téže přímce.“

Odtud plyne **lineárné** řešení následující úlohy:

Jest dána kuželosečka dvěma dvojinama imaginarních a jedním realným bodem; má se stanoviti druhý průsek libovolné přímky vedené tímto bodem s kuželosečkou.

Řeš. Dané dvojiny buďtež y_1y_2, z_1z_2, daný bod x_1, hledaný x_2; přímky $\overline{y_1y_2}$, $\overline{z_1z_2}$ jsou vždy realné a protínají se v bodě a, kdežto s přímkou $\overline{x_1x_2}$ mají body c, b společné.

Sestrojme střed y involuce ca, y_1y_2 a střed z involuce ab, z_1z_2 a vyšetřme průsek x přímky $\overline{yz}$ se stranou $\overline{x_1x_2}$.

Involuce bc, x_1x_2 stanovena je nyní párem bc a svým středem x; sestrojíme-li pak bod x_2 tvořící v ní družinu s x_1, řešili jsme úkol.

4. Všeobecný případ věty Carnotovy zní:

Protínají-li strany ab, bc, ca libovolného trojúhelníka abc kteroukoliv křivku rovinnou stupně n-tého v bodech resp. $z_1z_2 \ldots z_n$, $x_1x_2 \ldots x_n$, $y_1y_2 \ldots y_n$, vyhovují tyto podmínce (viz Cremona-Weyr, Úvod. I. str. 43.).

$$(2) \qquad (abz_1)(abz_2)\ldots(abz_n).(bcx_1)(bcx_2)\ldots(bcx_n)\times$$
$$.(cay_1)(cay_2)\ldots(cay_n) = 1$$

Na každé straně utvořme si z průsečných bodů r ($< n$) skupin a sestrojme jejich body součinové na základě vrcholů trojúhelníka

$$z_1' z_2' z_3' \ldots z_r', \; x_1' x_2' \ldots x_r', \; y_1' y_2' \ldots y_r'$$

i patrno, že tyto vyhoví podmínce

$$(2') \qquad (abz_1')(abz_2')\ldots(abz_r').(bcx_1')(bcx_r')\ldots(bcx_r')$$
$$.(cay_1')(cay_r')\ldots(cay_r') = 1$$

t. j. body ty náležejí křivce stupně r.

Kdybychom byli na př. rozdělili průseky každé strany s křivkou ve dvě skupiny, byli bychom obdrželi sestrojením součinových bodů na základě vrcholů trojúhelníka šest bodů téže kuželosečky.

„Sestrojíme-li součinové body všech průseků každé strany trojúhelníka s křivkou, obdržíme tři body téže přímky."

Imaginarné průseky přímek s realnými křivkami vyskytují se po dvou, a tu nevyhnutelně třeba zvlášť tyto „sdružené" body spojovati v součinové, má-li konstrukce býti realnou.

Jakožto zvláštní případ uvedených vět obdržíme pro $n = 3$.

Sestrojíme-li součinové body x, y, z průseků x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2 stran libovolného trojúhelníka s křivkou stupně třetího na základě vrcholů tohoto, nalezají se tyto body součinové se zbývajícími průseky stran x_3, y_3, z_3 s křivkou na téže kuželosečce.

Na základě této poznámky obdržíme dosti jednoduché řešení následující úlohy:

Pro křivku stupně třetího známe dvakráte tři průsečíky její s dvěma přímkama L, M, další dva body (realné neb pomyslné) n_1n_2 a realný bod devátý s; určiti průseky libovolné přímky vedené bodem s s křivkou onou.

Řeš. Přímky dané LM tvoří s přímkou N určenou body n_1n_2 (patrně vždy realnou) trojúhelník; buďtež l_1l_2, m_1m_2 průseky těchto přímek s křivkou ať již realné neb pomyslně sdružené, dále l_3, m_3 třetí body průsečné vždy patrně realné.

Určíme-li si součinové body lmn bodů $l_1 l_2$, m_1m_4, n_1n_2 na základě vrcholů trojúhelníka LMN, obdržíme pět bodů kuželosečky $lmnl_3m_3$, jež protíná přímku N v dalším bodě n_3, který lze různými způsoby sestrojiti.

Libovolný paprsek vedený bodem s nazveme X a hledané jeho průseky s křivkou x_1x_2, kdežto průsečíky téhož s přímkami L, M, N, po řadě a, b, c znamenati chceme. — V trojúhelníku LMX ustanovme součinové body l', m' průsečíků l_1l_2, m_1m_2; kuželosečka stanovená body $l_3 l' m_3 m' s$ protne přímku X v bodě x', jenž je součinovým bodem hledaných bodů $x_1 x_2$ na základě bodů ab.

Podobně sestrojíme za pomoci trojúhelníka MNX součinový bod x'' hledaných bodů na základě dvojiny bc.

Tímto způsobem zjednali jsme si dvé involuc, v nichž hledané body tvoří družinu; involuce ty stanoveny jsou družinou ab (bc) a středem x' (x''). Společná jim družina $x_1 x_2$ řeší úkol.

Odtud patrno, jak si máme počínati při řešení úloh druhého stupně.

5. Splynou-li vrcholy trojúhelníka Carnotova abc v jediný bod o, nezmění se tím naše úvahy v ničem, toliko třeba při konstrukci bodů součinových bod o považovati za samodružný prvek příslušné involuce.

Tvoří-li body proměnné $x_1 x_2$ involuci, vyhovují, jak známo, rovnici tvaru

$$\alpha \,.\, ox_1 \,.\, ox_2 + \beta\,(ox_1 + ox_2) + \gamma = o.$$

Má-li o býti bodem dvojným, musí rovnici této vyhověti substituce

$$ox_1 = ox_2 = o,$$

a tedy musí

$$\gamma = o$$

Stane-li se x_2 bodem úběžným ($ox_2 = \infty$), obdržíme pro střed x souřadnic

$$ox = -\frac{\beta}{\alpha}$$

což do hořejší rovnice vloženo podává

$$-\frac{\alpha}{\beta} = \frac{ox_1 + ox_2}{ox_1 \,.\, ox_2}$$

a tudíž

$$\frac{1}{ox} = \frac{1}{ox_1} + \frac{1}{ox_2}$$

Takto pokračujíce shledáme, že součinový bod daných bodů $x_1 x_2 \ldots x_n$ určen je rovnicí

$$\frac{1}{ox} = \frac{1}{ox_1} + \frac{1}{ox_2} + \ldots + \frac{1}{ox_n}$$

„Vedeme-li kterýmkoli bodem roviny (pólem) o paprsky, a ustanovíme-li jich průseků s danou křivkou stupně n-tého body součinové na základě v pólu splývající družiny, obdržíme jakožto geometrické místo těchto bodů přímku rovnoběžnou s přímou polárou daného bodu vzhledem ku křivce, jejíž vzdálenosť od pólu jest n-tý díl vzdálenosti jeho od poláry."

Je patrno, že jednoduchým způsobem dají se tyto výsledky zevšeobecniti, tak sice, že nahradíme přímku v nekonečnu libovolnou přímkou v konečnu; pak bude střed involuce nahražen bodem, jenž tvoří družinu s bodem (x_0), který je stanoven osou involuce (místem) na oné přímce.

Je-li x_0 onen bod, jenž nahražuje úběžný bod přímky X vedené pólem o, vyhoví konstruovaný bod podmínce

$$\frac{x_0x}{ox} = \frac{x_0x_1}{ox_1} + \frac{x_0x_2}{ox_2} + \ldots + \frac{x_0x_n}{ox_n}$$

čili dle známého označení

$$(x_0ox) = (x_0ox_1) + (x_0ox_2) + \ldots + (x_0ox_n).$$

Otáčí-li se X kol o, probíhá x přímku.

Zvláštní případ nastane, je-li pól o v nekonečnu; pak bude $\frac{ox}{ox_0} = 1$ a tedy přejde poslední rovnice v následující

$$x_0x = x_0x_1 + x_0x_2 + \ldots + x_0x_n$$

6. Buďtež $x_1x_2 \ldots x_{2n}$, $y_1y_2 \ldots y_{2n}$, $z_1z_2 \ldots z_{2n}$ průseky stran trojúhelníka abc s křivkou stupně $2n$-tého; přímky

$$\overline{z_1x_{n+1}},\ \overline{x_2x_{n+2}} \ldots \overline{z_nx_{2n}};\ \overline{x_1y_{n+1}},\ \overline{x_2y_{n+2}} \ldots \overline{x_ny_{2n}};$$

$$\overline{y_1z_{n+1}},\ \overline{y_2z_{n+2}} \ldots \overline{y_nz_{2n}}$$

protínejtež zbývající strany trojúhelníka v bodech y_1', $y_2' \ldots y^n$ z'_1, $z_2' \ldots z_n'$; x_1', $x_2' \ldots x_n'$.

Považíme-li, že tu na př.

$$(abz_1)\,(bcx_{n+1})\,(cay_1') = 1, \text{ atd.}$$

obdržíme z rovnice (2) následující:

$$(abz_1') \,.\, (abz_2') \ldots (abz'_n) \,.\, (bcx_1')\,(bcx_2') \ldots (bcx_n')$$
$$.\,(cay_1')\,(cay_2') \ldots (cay_n') = 1,$$

z čehož patrno, že se body x_i', y_i' z_i'.
nalezají na křivce stupně n.

Stanou-li se vrcholy trojúhelníka n-násobnými body křivky stupně $2n$-tého, přejdou konstruované přímky v tečny křivky té v bodech n-násobných.

Následovně:

„Má-li křivka stupně $2n$-tého tři n-násobné body, protínají tečny křivky v těchto bodech sestrojené přímky vedené zbývajícíma dvěma body n-násobnýma v $3n$ bodech náležejících křivce stupně n-tého."

7. Buďtež abc libovolné tři body křivky stupně třetího; přímky ab, bc, ca protínejtež pak tuto v dalších bodech c', a', b'.

V bodě a splývají dva body křivky y_1, z_1, jichž přímka spojivá jest tečnou křivky v bodě a, je-li α průsek její s protější stranou trojúhelníka, bude dle věty Menelaovy

následovně:
$$(abz_1).(bc\alpha).(cay\alpha 1_1) =$$
$$(abz_1).(cay_1) = \frac{1}{(bc\alpha)}.$$

Provedeme-li podobné úsudky pro body β, γ, v nichž tečny v bodech b, c protínají protější strany trojúhelníka, obdržíme z věty Carnotovy rovnici
$$\frac{(bca')}{(bc\alpha)} \cdot \frac{(cab')}{(ca\beta)} \cdot \frac{(abc')}{(ab\gamma)} = 1.$$

Sestrojme nyní bod x vyhovující podmínce
$$\frac{(bca')}{(bc\alpha)} = (bcx)$$

Je-li u bod úběžný přímky bc, bude $(bcu) = 1$, a proto
$$\frac{(bca')}{(bcx)} = \frac{(bc\alpha)}{(bcu)},$$
aneb píšeme-li ve tvaru dvojpoměru,
$$(bca'x) = (bc\alpha u).$$

Považujeme-li pak b, c za samodružné body dvou promětných řad soumístných, jichž další družinu tvoří body $a'\alpha$, bude u centrálným bodem (jenž odpovídá bodu úběžnému) řady a'.

Podobně sestrojíme body y, z vyhovující podmínkám
$$\frac{(cab')}{(ca\beta)} = (cay)$$
$$\frac{(abc')}{(ab\gamma)} = (abz) \text{ atd.}$$

Posléz dospějeme k výsledku:

„Centrálné body promětných řad na stranách trojúhelníka vepsaného křivce stupně třetího, jejichž samodružné prvky jsou vrcholy trojúhelníka toho, a jejichž další družinu tvoří průsek strany s křivkou a s tečnou o protějším vrcholu, náležejí po třech dvěma přímkám."

8. Jednoduchým obratem vyvoditi můžeme z věty Carnotovy obdobnou větu pro geometrii v prostoru.

Jsou-li $x_1 x_2 \ldots x_n$, $y_1 y_2 \ldots y_n$, $z_1 z_2 \ldots z_n$, $v_1 v_2 \ldots v_n$ průseky libovolné plochy stupně n-tého se stranami ab, bc, cd, da sborceného (prostorového) čtyřúhelníka $abcd$, platí relace
$$(abx_1)(abx_2)\ldots(abx_n).(bcy_1)(bcy_2)\ldots(bcy_n)$$
$$.(cdz_1)(cdz_2)\ldots(cdz_n).(dav_1)(dav_2)\ldots dav_n) = 1.$$

Sestrojíme-li na každé straně (hraně) čtyřúhelníka součinový bod daných průseků na základě vrcholů onoho, obdržíme čtvero bodů téže roviny.

Pro plochu stupně třetího zní poslední rovnice

$$(abx_1)(abx_2)(abx_3)(bcy_1)(bcy_2)(bcy_3)(cdz_1)(cdz_2)(cdz_3) \times$$
$$.(dav_1)(dav_2)(dav_3) = 1$$

Buďtež $x_4 y_4 z_4 v_4$ body vyhovující podmínkám

$$(abx_1).(bcy_2)\ (cdz_3).(dav_4) = 1$$
$$(bcy_1).(cdz_2).(dav_3)\ (abx_4) = 1$$
$$(cdz_1).(dav_2).(abx_3).(bcy_4) = 1$$
$$(dav_1).(abx_2).(bcy_3).(cdz_4) = 1$$

Násobivše tyto rovnice vespolek, obdržíme, majíce zároveň zřetel k hořejší rovnici, následující výsledek

$$(abx_4).(bcy_4).(cdz_4)\ (dav_4) = 1$$

Podle hořejších rovnic jsou body x_4, y_4, z_4, v_4 průseky rovin $y_1 z_2 v_3$, $z_1 v_2 x_3$, $v_1 x_2 y_3$, $x_1 y_2 z_3$ se zbývajícími stranami čtyřúhelníka a dle rovnice poslední náležejí body ty jediné rovině. — Výsledky reciproké netřeba tu uváděti.

19.

Zpráva o českém rukopise ve svěřenské knihovně císařské rodiny ve Vídni.

Četl ministr **Jos. Jireček** dne 3. dubna 1882.

Málo komu známo jest, že císařská rodina naše má založenou císařem Františkem I. fideikomisní bibliotheku, která nyní z milosti Jeho Veličenstva přestala býti uzavřenou, anobrž ku pracem vědeckým učiněna přístupnou. Dvorní rada A. M. Becker, nynější správce její, s pečlivostí všelikého vděku hodnou pracuje o to, aby poklady ty nabyly i přehlednosti a tudíž snadné užitelnosti. Knihovna obsahuje vzácná díla ze všech oborů ve stkvostných exemplářích, které dílem pro mocnáře rakouské schvalně byly upraveny. Zejména zastoupena tu klassická filologie, přírodní nauky, dějepis a národopis; ale hlavní ozdobou její jsou obrazy krajin a měst, přede vším pak podobizny osob, jež za posledních století vynikaly. Země rakouské skoro úplně jsou tu zastoupeny. Podobizen počítá se přes 70.000. Mimo to jsou tu některé převzácné rukopisy, pravé divy miniatur, jako ku př. breviář Karla Burgundského, modlitební kniha císaře Karla V. a drahně jiných.