Matyáš Lerch
Elliptické funkce

Přir. Fak. MU Brno, 1926, 159 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501629

ELLIPTICKÉ FUNKCE

NAPSAL

MATYÁŠ LERCH

VYDÁNO S PODPOROU MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY

NÁKLADEM

PŘÍRODOVĚDECKÉ FAKULTY MASARYKOVY UNIVERSITY

V BRNĚ

TISKEM POLYGRAFIE, BRNO.

Předmluva.

Zesnulý prof. M. Lerch měl v úmyslu vydati učebnici teorie elliptických funkcí a integrálů ve dvou svazcích. Provedení tohoto plánu zmařila smrt. V pozůstalosti prof. Lercha nalezen byl rukopis prvého svazku díla. Vyžádal jsem si tento rukopis od choti prof. Lercha a nabyl jsem přesvědčení, že by bylo možné a prospěšné vydati jej tiskem. Choť prof. Lercha se vzácnou nezištností vzdala se nároku na honorář a ministerstvo školství a národní osvěty umožnilo tisk povolením úhrady. Zda a jaké změny by byl prof. Lerch ještě v textu snad učinil, nelze mi ovšem s určitostí říci; zdá se však, že by se byl omezil na menší změny, doplňky nebo opravy při korektuře. Toto vydání liší se od rukopisu prof. Lercha pouze tím, že: 1. bylo opraveno několik malých chyb (v numerických výpočtech a pod.), 2. byla přidána tabulka nejdůležitějších vzorců a obsah. Tyto změny provedl s mým vědomím p. dr. O. Borůvka, který také obstaral korekturu.

Eduard Čech.

Hlava I.

§ 1. Funkce trigonometrické.

Některé funkce, které nám podala trigonometrie, mají zvlášť jednoduché vlastnosti v počtu integrálním. Euler ukázal, jak lze je definovati ryze formálně na základě tohoto počtu a vyvinul touto cestou jejich základní vlastnosti.

Jako příklad vycházejme z integrálu

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{1}$$

takže v okruhu $|x| < 1$ platí

$$u = x - \binom{-\frac{1}{2}}{1}\frac{x^3}{3} + \binom{-\frac{1}{2}}{2}\frac{x^5}{5} - \binom{-\frac{1}{2}}{3}\frac{x^7}{7} + \dots$$

Obrácením řady obdržíme pro dosti malá u

$$x = u + \alpha_3 \frac{u^3}{3!} + \alpha_5 \frac{u^5}{5!} + \alpha_7 \frac{u^7}{7!} + \dots \tag{2}$$

inversní funkci integrálu (1). Na místě (1) můžeme psáti diferenciální rovnici

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{1-x^2} \tag{3}$$

se začáteční podmínkou

$$x = 0 \text{ pro } u = 0,$$

při čemž odmocnina $\sqrt{1-x^2}$ má přejíti v 1 pro $u = 0$.

Na místo (3) pišme

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 1 - x^2$$

a derivujme; na obou stranách objeví se činitel $2\frac{dx}{du}$, jejž potlačíme; i vyjde

$$\frac{d^2x}{du^2} = -x, \tag{4}$$

důležitá rovnice diferenciální 2. řádu. Vyjádříme-li její obě strany podle řady (2), obdržíme nejprve pro dosti malá u

$$\alpha_3 \frac{u}{1!} + \alpha_5 \frac{u^3}{3!} + \alpha_7 \frac{u^5}{5!} + \ldots$$
$$= -u - \alpha_3 \frac{u^3}{3!} - \alpha_5 \frac{u^5}{5!} - \ldots$$

odtud vychází

$$\alpha_3 = -1, \ \alpha_5 = -\alpha_3 = +1, \ \alpha_7 = -\alpha_5 = -1, \ldots$$

obecně

$$\alpha_{2\nu+1} = (-1)^\nu,$$

a hledaná inversní funkce integrálu (1) má pro dosti malá u rozvoj

$$x = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \frac{u^9}{9!} - \frac{u^{11}}{11!} + \ldots \tag{2*}$$

Rada ta je však stále konvergentní — celistvá transcendenta — a řeší problém inverse integrálu v celé obecnosti. Tím docházíme k funkci

$$x = \sin u,$$

ovšem bez jejího významu geometrického*, a její derivaci

$$\frac{dx}{du} = \cos u.$$

K větě součtové funkce sinus vede dvojí řešení diferenciální rovnice

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0; \tag{5}$$

jedno řešení jest

$$\psi(x) + \psi(y) = c, \quad \psi(x) = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

kde c značí integrační stálou, dosti malou, aby se jevila jako součet hodnot $\psi(x)$ a $\psi(y)$ pro malá x a y.

Druhé řešení rovnice (5) obdržíme, když jí udělíme tvar

$$\sqrt{1-y^2}\,dx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0.$$

Majíce na zřeteli, že y je funkce proměnné x, integrujme levou stranu po částech, i vyjde

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} + \int xy\left(\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) = C,$$

to jest vzhledem k (5)

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C,$$

---

* Geometrický význam vystoupí tu však také přirozeně, uvědomíme-li si, že na integrál (1) vede úkol rektifikace kruhového oblouku.

kde C je nová integrační stálá, jež musí býti funkcí veličiny c.

Pro $x=0$ máme $c=\psi(y)$, $C=y$,
tedy
$$c=\psi(C),$$
a tak máme addiční větu funkce arc sin x
$$\psi(x)+\psi(y)=\psi(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$$
a klademe-li
$$x=\sin u,\ y=\sin v,$$
základní větu trigonometrie
$$\sin(u+v)=\sin u\cos v+\cos u\sin v.$$

Podmínky, aby u a v byly dostatečně malé, se snadno zbavíme, uvážíme-li, že obě strany rovnice jsou vyjadřitelny řadami stále konvergentními.

§ 2. Elliptické funkce Jacobiovy.

Známý výraz pro délku oblouku na ellipse
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$
t. j.
$$a\int\frac{\sqrt{1-\lambda^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}dt,\ \lambda^2=\frac{a^2-b^2}{a^2},\tag{1}$$
vedl k tomu, že se veškery integrály tvaru
$$\int\text{Rac. fkce }(x,\sqrt{R(x)})\,dx,\tag{2}$$
kde
$$R(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$$
nazvaly *elliptickými.* Při tom se předpokládá, že aspoň jedna z konstant a_3, a_4 není nulou. Možno je skutečně převésti lineárními substitucemi na tvar, kde $R(x)$ má vyjádření $(1-x^2)(1-k^2x^2)$, a integrál (1) spadá skutečně do toho druhu, neboť jej lze psáti
$$\int\frac{1-\lambda^2t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2t^2)}}dt,\tag{1⁰}$$
takže naše konstanta k jest tu značena λ.

Budeme se tedy zabývati integrály elliptickými
$$\int\text{Rac. fkce }(x,\sqrt{R(x)}\,dx,$$
kde
$$R(x)=(1-x^2)(1-k^2x^2).\tag{A}$$

Z těch není však integrál (1^0) nejjednodušším, nýbrž

$$u = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{B}$$

tak zvaný integrál prvního druhu, který ostatně k úkolu délky oblouku na ellipse nemá bezprostředního vztahu.

Vyjdeme z integrálu (B) pro malá x a budeme studovati funkci obrácenou x jako funkci u, a ukážeme (Abel, Jacobi), že funkce ta jest jednoznačnou v celé rovině.

Jacobi kladl v integrálu

$$x = \sin\varphi,$$

takže jest

$$u = \int_0 \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \tag{3}$$

a nazval obrácenou tuto funkci φ proměnné u její amplitudou.

Značil pak $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \Delta\varphi$, $\varphi = am\, u$, a zavedl funkce

$$x = \sin am\, u,\quad \sqrt{1-x^2} = \cos am\, u,$$
$$\sqrt{1-k^2x^2} = \Delta\, am\, u,$$

které jsou vesměs, jak uvidíme, funkce jednoznačné a nazývají se elliptické funkce Jacobiovy. Veličina k nazývá se modulem.

Funkce $am\, u$ není jednoznačná a má nekonečný počet hodnot; z Eulerovy identity

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

pak vychází

$$am\, u = \frac{1}{i}\log(\cos am\, u + i\sin am\, u), \tag{4}$$

takže se $i\, am\, u$ jeví jako logaritmus jednoznačné funkce.

Přes to, že se amplituda svojí složitou povahou nehodí jako prvek theorie, má přece znamenitý význam mnemotechnický, neboť prostřednictvím této funkce φ a definic právě uvedených máme dle (3)

$$\frac{d\, am\, u}{du} = \Delta\, am\, u,\quad \frac{d\sin am\, u}{du} = \cos am\, u\,\Delta\, am\, u,$$
$$\frac{d\cos am\, u}{du} = -\sin am\, u\,\Delta\, am\, u, \tag{5}$$
$$\frac{d\,\Delta\, am\, u}{du} = -k^2\sin am\, u\cos am\, u,$$

což jsou vztahy veliké důležitosti. Připomeňme ještě, že $\sin am\, 0 = 0$, $\cos am\, 0 = 1$, $\Delta\, am\, 0 = 1$.

§ 3. Součtové věty.

Uvažujme integrál

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad R(x) = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2);$$

pro dosti malá x máme

$$u = x + \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^5 + \alpha_3 x^7 + \dots$$

a odtud inversí rovněž pro přiměřeně malá u

$$x = u + \beta_1 u^3 + \beta_2 u^5 + \beta_3 u^7 + \dots$$

Znamenáme-li náš integrál

$$u = \psi(x),$$

má diferenciální rovnice

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = 0 \tag{1}$$

řešení

$$\psi(x) + \psi(y) = c,$$

kde c je integrační stálá, již předpokládáme dosti malou, aby se jevila jako součet malých veličin $\psi(x)$ a $\psi(y)$.

Naší rovnici (1) lze též uděliti tvar

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = du,$$

kde u je pomocná proměnná. Máme tak rovnice

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{du}\right)^2 &= R(x) = 1 - (1 + k^2) x^2 + k^2 x^4 \\ \left(\frac{dy}{du}\right)^2 &= 1 - (1 + k^2) y^2 + k^2 y^4, \end{aligned} \tag{2}$$

jichž derivováním plyne

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{du^2} &= -(1 + k^2) x + 2k^2 x^3, \\ \frac{d^2y}{du^2} &= -(1 + k^2) y + 2k^2 y^3; \end{aligned}$$

první násobme y a druhou $-x$ a sečtěme:

$$y \frac{d^2x}{du^2} - x \frac{d^2y}{du^2} = 2k^2 xy(x^2 - y^2). \tag{3}$$

Dále máme z rovnic (2) bezprostředně

$$\left(y\frac{dx}{du}\right)^2 - \left(x\frac{dy}{du}\right)^2 = (y^2 - x^2)(1 - k^2 x^2 y^2);$$

těmito výrazy dělme v rovnici (3) na příslušných stranách, odstranivše ze jmenovatele činitele $y\frac{dx}{du} + x\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{y\frac{d^2x}{du^2} - x\frac{d^2y}{du^2}}{y\frac{dx}{du} - x\frac{dy}{du}} = -\frac{2k^2 xy}{1 - k^2 x^2 y^2}\left(y\frac{dx}{du} + x\frac{dy}{du}\right).$$

Na levé straně je čitatel derivací jmenovatele (dle u), napravo je závorka derivace součinu xy, takže integrace podá

$$\log\left(y\frac{dx}{du} - x\frac{dy}{du}\right) = \log(1 - k^2 x^2 y^2) + \log C,$$

kde C je nová integrační stálá.

Máme tak druhý tvar řešení diferenciální rovnice (1) — dosazujeme hodnoty za $\frac{dx}{du}$ a $\frac{dy}{du}$ —

$$\frac{y\sqrt{R(x)} + x\sqrt{R(y)}}{1 - k^2 x^2 y^2} = C.$$

První řešení bylo $y = \sin am(c - u)$, pro $u = 0$ je $y = \sin am\, c$, $C = y$, tedy

$$C = \sin am\, c,$$

t. j. při označení $c - u = v$, $y = \sin am\, v$

$$\sin am(u + v) = \frac{\sin am\, u \cos am\, v\, \Delta\, am\, v + \sin am\, v \cos am\, u\, \Delta\, am\, u}{1 - k^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\, v}, \tag{4}$$

součtová věta funkce $\sin am\, u$.

Gudermann zjednodušil Jacobiovo označení, jehož funkce nazval modulárními (mod. sinus, mod. cosinus, diferenta) a sice takto:

$$\sin am\, u = sn\, u,\quad \cos am\, u = cn\, u,\quad \Delta\, am\, u = dn\, u.$$

Máme tedy:

$$sn(u + v) = \frac{sn\, u\, cn\, v\, dn\, v + sn\, v\, cn\, u\, dn\, u}{1 - k^2 sn^2 u\, sn^2 v} =$$

$$= \frac{sn\, u\, sn' v + sn\, v\, sn' u}{1 - k^2 sn^2 u\, sn^2 v}.$$

Abychom odtud získali součtovou větu funkce cos am, znamenejme

$$Q = 1 - k^2 sn^2 u\, sn^2 v = 1 - k^2 x^2 y^2$$

a ve vzorci

$$Q^2 cn^2 (u+v) = Q^2 - (sn\, u\, cn\, v\, dn\, v + sn\, v\, cn\, u\, dn\, u)^2 \tag{α}$$

užijme na pravé straně identit

$$1 - k^2 x^2 y^2 = 1 - x^2 + x^2 (1 - k^2 y^2) = 1 - y^2 + y^2 (1 - k^2 x^2),$$

takže bude

$$\begin{aligned} Q^2 &= (cn^2 u + sn^2 u\, dn^2 v)(cn^2 v + sn^2 v\, dn^2 u) = \\ &= (cn^2 u\, cn^2 v + sn^2 u\, sn^2 v\, dn^2 u\, dn^2 v) + \\ &+ (sn^2 u\, cn^2 v\, dn^2 v + sn^2 v\, cn^2 u\, dn^2 u); \end{aligned}$$

pravá strana vzorce (α) po rozvinutí čtverce zredukuje se odpadnutím poslední závorky a zbývá

$$Q^2 cn^2 (u+v) = (cn\, u\, cn\, v - sn\, u\, sn\, v\, dn\, u\, dn\, v)^2,$$

tedy

$$cn(u+v) = \frac{cn\, u\, cn\, v - sn\, u\, sn\, v\, dn\, u\, dn\, v}{1 - k^2 sn^2 u\, sn^2 v}; \tag{5}$$

znaménko určeno dle okolnosti, že pro $u = v = 0$ obě strany mají hodnotu 1.

Dále máme

$$Q^2 dn^2 (u+v) = Q^2 - k^2 (sn\, u\, cn\, v\, dn\, v + sn\, v\, cn\, u\, dn\, u)^2,$$

a tu vpravo užijeme indentit

$$\begin{aligned} Q &= 1 - k^2 x^2 y^2 = 1 - k^2 x^2 + k^2 x^2 (1 - y^2) \\ &= 1 - k^2 y^2 + k^2 y^2 (1 - x^2), \end{aligned}$$

jež dávají

$$\begin{aligned} Q^2 &= (dn^2 u + k^2 sn^2 u\, cn^2 v)(dn^2 v + k^2 sn^2 v\, cn^2 u) = \\ &= (dn^2 u\, dn^2 v + k^4 sn^2 u\, sn^2 v\, cn^2 u\, cn^2 v) + \\ &+ k^2 (sn^2 u\, cn^2 v\, dn^2 v + sn^2 v\, cn^2 u\, dn^2 u) \end{aligned}$$

a odtud plyne po redukci

$$Q^2 dn^2 (u+v) = (dn\, u\, dn\, v - k^2 sn\, u\, sn\, v\, cn\, u\, cn\, v)^2,$$

takže

$$dn(u+v) = \frac{dn\, u\, dn\, v - k^2 sn\, u\, sn\, v\, cn\, u\, cn\, v}{1 - k^2 sn^2 u\, sn^2 v}. \tag{6}$$

Vyložený důkaz addičních vět Jacobiových funkcí podal G. Darboux. Připomeňme, že vzorce (5) a (6) lze také psáti

$$cn(u+v) = \frac{cn\, u\, cn\, v - cn'\, u\, cn'\, v}{1 - k^2 sn^2 u\, sn^2 v},$$

$$k^2 dn(u+v) = \frac{k^2 dn\, u\, dn\, v - dn'\, u\, dn'\, v}{1 - k^2 sn^2 u\, sn^2 v}.$$

Poněvadž výraz $1 - k^2 sn^2 u\, sn^2 v$ lze vyjádřiti jako cel. racionální funkci veličin $cn u$, $cn v$ a též veličin $dn u$, $dn v$, mají addiční theorémy Jacobiových funkcí tento společný tvar

$$\varphi(u+v) = R(\varphi(u), \varphi(v), \varphi'(u). \varphi'(v)),$$

kde R je racionální funkce svých čtyř argumentů.

§ 4. Obor existenční; funkcionální povaha.

Z vět addičních vychází jednoduchý způsob zjištění funkcionální povahy, jejž podal Weierstraß. Klade-li se v našich vzorcích (4)—(6) $u = v$, máme

$$sn\, 2u = \frac{2 sn\, u\, sn' u}{1 - k^2 sn^4 u}, \quad cn\, 2u = \frac{cn^2 u - (cn' u)^2}{1 - k^2 sn^4 u},$$
$$k^2 dn\, 2u = \frac{k^2 dn^2 u - (dn' u)^2}{1 - k^2 sn^4 u}. \qquad (\alpha)$$

Původně známe tři naše funkce ve tvaru mocninných řad

$$sn\, u = \mathfrak{P}_1(u), \quad cn\, u = \mathfrak{P}_2(u), \quad dn\, u = \mathfrak{P}_3(u),$$

z nichž první je lichá a druhé dvě sudé funkce; znamenejme ϱ společný poloměr konvergenční, takže pro $|u| < \varrho$ budou všechny tři řady konvergentní a tedy též jich derivace. Naše rovnice (α) pro každou ze tří funkcí — znamenejme ji $\varphi(u)$ — dávají vyjádření

$$\varphi(2u) = \frac{P_1(u)}{Q_1(u)}, \quad \varphi'(2u) = \frac{R_1(u)}{S_1(u)}, \quad (|u| < \varphi),$$

kde $P_1(u)$, $Q_1(u)\ldots$ jsou mocninné řady. Vložíme-li tyto hodnoty do vzorců (α), píšíce $2u$ za u, máme

$$\varphi(4u) = \frac{P_2(u)}{Q_2(u)}, \quad \varphi'(4u) = \frac{R_2(u)}{S_2(u)};$$

Zde bylo dlužno předpokládati $|2u| < \varrho$, tedy $|u| < \frac{\varrho}{2}$; ale řady $P_2 \ldots S_2$ konvergují pro $|u| < \varrho$, a tedy platí naše vzorce pro $|u| < \varrho$.

Podobně nalezneme

$$\varphi(8u) = \frac{P_3(u)}{Q_3(u)}, \varphi'(8u) = \frac{R_3(u)}{S_3(u)},$$

kde řady konvergují pro $|u| < \varrho$, a obecně

$$\varphi(2^\nu u) = \frac{P_\nu(u)}{Q_\nu(u)}, \ |u| < \varrho$$

čili
$$\varphi(u)=\frac{P_\nu\left(\frac{u}{2^\nu}\right)}{Q_\nu\left(\frac{u}{2^\nu}\right)}=\frac{P^*(u)}{Q^*(u)},\ |u|<2^\nu\varrho.$$

Naše funkce $\varphi(u)$ dají se tedy v každém konečném oboru vyjádřiti jako podíl dvou konvergentních mocninných řad, a chovají se tedy v celé rovině pravidelně až na některé póly (sing. místa bezpodstatná).

Snadno nahlédneme, že věty součtové (4), (5), (6) mají platnost všeobecnou, t. j. pro všecka u a v, až na místa singulární.

§. 5. Výjimečné případy $k=0, \pm 1$. Průběh funkcí v případě reálném.

Pro $k=0$ máme
$$u=\int_0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$
tedy $x=\sin u$, t. j.
$$sn\,u=\sin u,\ cn\,u=\cos u,\ dn\,u=1.$$

Pro $k^2=1$ jest
$$u=\int_0 \frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x},$$
tedy
$$x=\sin am\,u=\frac{e^{2u}-1}{e^{2u}+1}=\mathrm{Tg}\,u\,*,$$
$\cos am\,u=\Delta\, am\,u=\mathrm{Sec}\,u.$

Tyto případy krajní $k=0$ a $k^2=1$ nadále vyloučíme. Můžeme se dále omeziti na případ $|k|<1$. Neboť je-li v integrálu
$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda^2x^2)}}$$
modul λ absolutně větší jedné, přejde integrál substitucí $x=\frac{z}{\lambda}$ na
$$\frac{1}{\lambda}\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\ k=\frac{1}{\lambda},$$
kde $|k|<1$.

Chceme blíže studovati reálný případ, kdy totiž modul k jest reálný, kladný a menší jedné. Doplňkový modul

---

* Symboly Sin u, Cos u, Tg u značí funkce hyperbolické sin hyp, cos hyp, tan hyp u.

$$k' = \sqrt{1-k^2}$$

je pak rovněž reálný kladný ryzí zlomek.

Poněvadž funkce $sn\,u$ je lichá

$$sn(-u) = -sn\,u,$$

můžeme se omeziti na $x > 0$ v integrálu

$$u = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}};$$

zde může se x volně pohybovati až do $x=1$; u roste zároveň s x a největší hodnota u jest

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};$$

tedy máme

$$0 \leqq u \leqq K, \quad 0 \leqq x \leqq 1.$$

V oboru $u = (0 \ldots K)$ funkce $sn\,u$ roste a jest

$$sn\,0 = 0, \quad sn\,K = 1.$$

Funkce $cn\,u$ a $dn\,u$ mají tu záporné derivace a klesají od největší hodnoty $= 1$ počínaje; končí hodnotami

$$cn\,K = 0, \quad dn\,K = k'.$$

Užijme addiční věty (4) § 3 pro případ $u = K$, $v = -u$, kdy také součet $u+v$, t. j. $K-u$ náleží známému oboru $(0 \ldots K)$; vychází

$$sn(K-u) = \frac{cn\,u\,dn\,u}{1-k^2 sn^2 u},$$

t. j.

$$sn(K-u) = \frac{cn\,u}{dn\,u}. \tag{1}$$

Pravá strana je v okolí bodu $u=0$ jednoznačná* a můžeme klásti $-u$ za u, rozšiřujíce tak obor funkce; máme

$$sn(u+K) = \frac{cn\,u}{dn\,u}. \tag{1^0}$$

Známe nyní funkci sn v oboru $(-K \ldots 2K)$; zejména jest pro

---

* V těchto úvahách nepředpokládáme jednoznačnost obecně dokázanou.

$0 < u < 2K$ funkce $sn\,u$ kladná, a jak plyne z (1^0) pro $u = K$, jest

$$sn(2K) = 0.$$

Uvažujme dále pro malá kladná u, kdež

$$cn(K-u) = \sqrt{1 - \frac{cn^2 u}{dn^2 u}} = \frac{\sqrt{(1-k^2x^2)-(1-x^2)}}{dn\,u} = \frac{k'x}{dn\,u},$$

poněvadž levá strana a také $x = sn\,u$ jsou kladné. Jest

$$cn(K-u) = \frac{k'\,sn\,u}{dn\,u}, \tag{2}$$

$$cn(u+K) = -\frac{k'\,sn\,u}{dn\,u}. \tag{2^0}$$

Konečně

$$dn(K-u) = \sqrt{1 - k^2 \frac{cn^2 u}{dn^2 u}} = \frac{\sqrt{(1-k^2x^2)-k^2(1-x^2)}}{dn\,u}$$

má hodnotu

$$dn(K-u) = \frac{k'}{dn\,u}, \tag{3}$$

a

$$dn(u+K) = \frac{k'}{dn\,u}. \tag{3^0}$$

Připojme ještě

$$\operatorname{tg} am(K-u) = \frac{1}{k' \operatorname{tg} am\,u}.$$

Derivace $sn'\,v = cn\,v\,dn\,v$ pro $v = K+u$, t. j. na oboru $K < v < 2K$ je záporná a funkce $sn\,v$ zde tedy ubývá.

Funkce $sn\,u$ od $u=0$ do $u=K$ roste, odtud do $u=2K$ klesá. Její maximum na $u=K$ jest $=1$.

Funkce $cn\,u$ od $u=0$ do $u=2K$ stále klesá od 1 do -1 probíhajíc nulou na $u=K$.

Funkce $dn\,u$ od $u=0$ do $u=K$ klesá od 1 do k', od $u=K$ do $u=2K$ roste od k' do 1.

Pomocí vzorců (1^0) (2^0) (3^0) docházíme znalosti našich funkcí v oboru $(0 \ldots . 3K)$. Položme v nich $u+K$ za u, a obdržíme

$$sn(u+2K) = \frac{cn(u+K)}{dn(u+K)} = -\frac{k'\,sn\,u}{dn\,u} : \frac{k'}{dn\,u},$$

t. j.

$$sn(u+2K) = -sn\,u. \tag{4}$$

Podobně nalezneme

$$cn(u+2K) = -cn\,u, \tag{5}$$

$$dn(u+2K) = dn\,u. \tag{6}$$

Tyto rovnice doplňují definici funkcí našich na celý reálný obor; poslední ukazuje, že $dn\,u$ je periodická s periodou $2K$, kdežto $sn\,u$ a $cn\,u$ mění při periodě $2K$ toliko znamení a mají periodu $4K$:

$$sn(u+4K)=sn\,u, \quad cn(u+4K)=cn\,u.$$

Tyto poznatky o průběhu funkcí $sn\,u$, $cn\,u$ a $dn\,u$ vyplývají jednoduše z rovnic

$$sn\,u=\sin\varphi, \quad cn\,u=\cos\varphi, \quad dn\,u=\Delta\varphi,$$

kde aplituda φ je určena z rovnice

$$u=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Veličina u roste zároveň s φ a sice odpovídají hodnotám

$$\varphi=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ \ldots$$

hodnoty

$$u=0,\ K,\ 2K,\ 3K,\ 4K,\ \ldots$$

Neboť substituce $m\pi+\psi=\varphi$ a rozklad dávají

$$\int_0^{m\pi+\alpha}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\int_0^{m\pi}+\int_0^{\alpha}=m\,.\,2K+\int_0^{\alpha}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};$$

ale při tomto postupu bychom se nesetkali s důležitými vztahy (1)—(3⁰).

§ 6. Ryze pomyslná proměnná.

Diferenciální rovnice

$$\frac{dx}{du}=\sqrt{R(x)} \quad (x=0 \text{ pro } u=0),$$

která definuje funkci $\sin am\,u$, nabude po substituci

$$x=iy, \quad u=iv$$

tvaru

$$\frac{dy}{dv}=\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)},$$

z něhož plyne

$$v=\int_0^{y}\frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)}}, \tag{1}$$

takže v je zároveň s y vždy kladné reálné.

Ostatně základní řada

$$u = x + \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^5 + \ldots$$

podává pro $x = iy$ tvar

$$u = i(y - \alpha_2 y^3 + \alpha_2 y^5 - \ldots),$$

tedy v reálné, a taktéž rozvoj $sn(iv)$ dle mocnin v podává ryze pomyslné $x = iy$.

V integrálu lze za y klásti veškery hodnoty y od $-\infty$ do $+\infty$ a integrál při tom spojitě roste od $-K'$ do K', kde psáno

$$K' = \int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)(1+k^2 y^2)}}. \tag{2}$$

Substituce $y = \operatorname{tg} \psi$ dává

$$v = \int_0 \frac{d\psi}{\sqrt{\cos^2 \psi + k^2 \sin^2 \psi}} = \int_0 \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \psi}},$$

tedy zejména pro $y = \infty$ $(\psi = \frac{\pi}{2})$.

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \psi}}. \tag{2^0}$$

Integrál K' je tedy táž funkce proměnné k' jako integrál K modulu k.

Zároveň jsme našli, že platí

$$sn(iv) = iy, \quad y = \operatorname{tg} \psi, \quad \psi = am(v, k'),$$

tudíž

$$sn(iv, k) = i \frac{sn(v, k')}{cn(v, k')}. \tag{3}$$

Odtud

$$cn(iv, k) = \sqrt{1 + \frac{sn^2(v, k')}{cn^2(v, k')}} = \frac{1}{cn(v, k')},$$

$$dn(iv, k) = \sqrt{1 + k^2 \frac{sn^2(v, k')}{cn^2(v, k')}} = \frac{\sqrt{1 - k'^2 sn^2(v, k')}}{cn(v, k')},$$

takže vycházejí vztahy

$$cn(iv, k) = \frac{1}{cn(v, k')}, \tag{4}$$

$$dn(iv, k) = \frac{dn(v, k')}{cn(v, k')}. \tag{5}$$

Funkce

$$y = -i\,sn(iv, k)$$

roste kladnými hodnotami do nekonečna, roste-li v od 0 do K'; bod $u = iK'$ dává tedy nekonečnou hodnotu pro $sn\,u$; rovněž veličiny $cn\,u$ a $dn\,u$ jsou nekonečny pro $u = iK'$. Vychází to ostatně přímo z rovnic (3), (4), (5), kde pravé strany mají ve jmenovateli $cn(v, k')$ veličinu, která mizí pro $v = K'$. Veličina ta je analytická funkce pravidelná v okolí $v = K'$ a mizí tam pouze v prvním stupni, takže bod $v = K'$, je pólem prvního stupně pro funkce $sn\,iv$, $cn\,iv$, $dn\,iv$, jest tedy $u = iK'$ pólem prvního stupně pro funkce

$$sn(u, k),\ cn(u, k),\ dn(u, k).$$

Totéž platí pro $u = \pm iK', \pm 3iK', \pm 5iK', \ldots$

Užijme nyní věty součtové pro $u + iv$:

$$sn(u + iv) = \frac{sn\,u\,cn\,iv\,dn\,iv + sn\,iv \,.\, cn\,u\,dn\,u}{1 - k^2 sn^2 u\,sn^2 iv}, \tag{α}$$

u, v reálné. Poněvadž $-sn^2 iv$ je reálné a kladné, je jmenovatel $1 - k^2 sn^2 u\,sn^2 iv > 0$; i může nastati nekonečná hodnota pouze pro nekonečného čitatele. Veličiny $sn\,u$, $cn\,u$, $dn\,u$ jsou vždy konečné a tedy musí jedna z veličin $sn\,iv$, $cn\,iv \,.\, dn\,iv$ se státi nekonečnou, má-li býti $sn(u + iv) = \infty$. To je možné jen pro $v = \lambda K'$, λ liché. Avšak při stálém $sn^2 u > 0$ je pravá strana

$$\lim_{v = \lambda K'} sn\,(u + iv) = -\frac{1}{k^2 sn\,u} \lim \frac{cn\,iv\,dn\,iv}{sn^2 iv} = \frac{1}{k^2 sn\,u}\,\frac{dn(\lambda K', k')}{sn^2(\lambda K', k')} = \frac{1}{k\,sn\,u}$$

veličina konečná, a tedy muže nastati pól jen pro případ $sn^2 u = 0$, t. j. pro

$$u = 2\nu K, \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Funkce $sn\,u$ má tedy póly stupně prvního

$$u = 2\nu K + \lambda i K' \qquad \begin{pmatrix} \nu = 0, & \pm 1, & \pm 2, \ldots \\ \lambda = \pm 1, & \pm 3, & \pm 5, \ldots \end{pmatrix}$$

a žádné jiné. Totéž platí o $cn\,u$ a $dn\,u$.

§ 7. Hodnoty $f(u + iK')$, $f(u + K + iK')$.

Dle (3) § 6

$$sn(iv + iK') = i\,\frac{sn(v + K', k')}{cn(v + K', k')},$$

a dle (1^0), (2^0) § 5

$$sn(v + K', k') = \frac{cn(v, k')}{dn(v, k')}, \quad cn(v + K', k') = -\frac{k\,sn(v, k')}{dn(v, k')},$$

takže $$sn(iv + iK') = -\frac{i}{k}\frac{cn(v, k')}{sn(v, k')} = \frac{1}{k\,sn(iv, k)},$$

a dle toho lze bezpečně tvrditi, že obecně

$$sn(u + iK') = \frac{1}{k\,sn\,u}. \tag{1}$$

Plyne to přímo z rovnice (α) přechodem k limitě pro $v = K'$.

Odtud bezprostředně

$$cn(u + iK') = \sqrt{1 - \frac{1}{k^2 sn^2 u}} = \pm i\frac{dn\,u}{k\,sn\,u},$$

kde třeba ještě určiti znamení. Položíme $u = iv$, $v \sim 0$, načež

$$cn(iv + iK') \sim \pm i\frac{1}{kiv}$$

dává

$$\pm kv \sim \frac{1}{cn(iv + iK')} = cn(v + K', k').$$

Derivace pravé strany pro $v = 0$ jest

$$-sn(K', k')\,dn(K', k') = -k,$$

a tedy znamení spodní:

$$cn(u + iK') = -\frac{i\,dn\,u}{k\,sn\,u}. \tag{2}$$

Dále

$$dn(u + iK') = \sqrt{1 - \frac{1}{sn^2 u}} = \pm i\frac{cn\,u}{sn\,u};$$

tu je

$$cn(u + iK')\,dn(u + iK') = \pm\frac{cn\,u\,dn\,u}{k\,sn^2 u}$$

derivací funkce

$$sn(u + iK') = \frac{1}{k\,sn\,u},$$

tedy rovno

$$-\frac{cn\,u\,dn\,u}{k\,sn^2 u}$$

a platí znamení spodní

$$dn(u + iK') = -\frac{i\,cn\,u}{sn\,u}. \tag{3}$$

Z rovnic těch plyne dále

$$\begin{aligned} sn(u + 2iK') &= sn\,u, \\ cn(u + 2iK') &= -cn\,u, \\ dn(u + 2iK') &= -dn\,u, \end{aligned} \tag{4}$$

a tak docházíme k seznání dvojí periodicity našich funkcí

$$\begin{aligned} sn(u+2mK+2niK') &= (-1)^m sn\,u, \\ cn(u+2mK+2niK') &= (-1)^{m+n} cn\,u, \\ dn(u+2mK+2niK') &= (-1)^n dn\,u. \end{aligned} \tag{5}$$

Ve vzorcích (1)—(3) klaďme $u+K$ za u a užijme rovnic § 5

$$sn(u+K+iK') = \frac{dn\,u}{k\,cn\,u},$$

$$cn(u+K+iK') = -\frac{ik'}{k\,cn\,u},$$

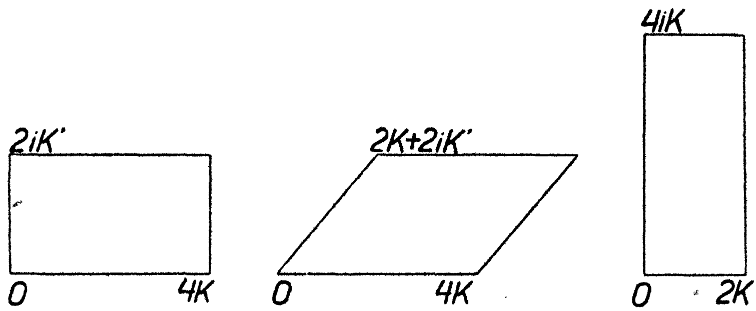
$$dn(u+K+iK') = ik'\frac{sn\,u}{cn\,u}.$$

Tyto funkce Jacobiovy $f(u)$ mají každá dvě periody, jichž poměr není reálný; znamenejme je 2ω, $2\omega'$, takže bude

$$f(u+2m\omega+2n\omega') = f(u)$$

a sice jest pro

$$\begin{aligned} f(u) = \;& sn\,u: 2\omega = 4K,\; 2\omega' = 2iK' \\ & cn\,u: 2\omega = 4K,\; 2\omega' = 2K+2iK' \\ & dn\,u: 2\omega = 2K,\; 2\omega' = 4iK'. \end{aligned}$$



§ 8. Rovnoběžník period.

Buďte ω, ω' dvě veličiny, jichž poměr

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega}$$

není reálný a u libovolná veličina reálná neb komplexní.

Veličinu

$$\frac{u}{\omega} = v$$

pak lze uvésti na tvar

$$v = \xi + \eta\tau,$$

kde ξ, η jsou reálné. K tomu cíli určíme nejprve reálné η tak, aby v rozdílu $v - \eta\tau$ odpadla část pomyslná, čímž η určeno jednoznačně; rozdíl ten $= \xi$ je reálný.

Nyní jsou určena jednoznačně celistvá kladná neb záporná čísla m, n podmínkami

$$\xi = \xi_0 + m, \quad \eta = \eta_0 + n, \quad 0 \leqq \xi < 1, \quad 0 \leqq \eta < 1,$$

takže se objeví

$$v = \xi_0 + \eta_0 \tau + m + n\tau$$

a odtud

$$u = \xi_0 \omega + \eta_0 \omega' + m\omega + n\omega'.$$

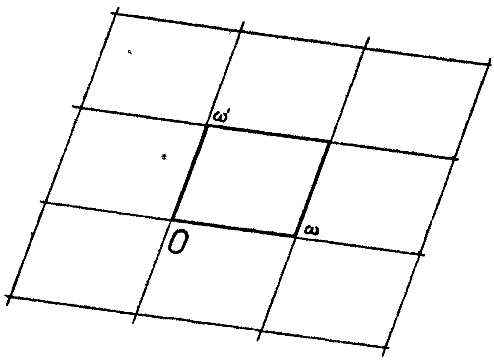
Každou komplexní veličinu tedy lze uvésti na tvar

$$u = u_0 + m\omega + n\omega',$$

kde

$$u_0 = \xi_0 \omega + \eta_0 \omega',$$

při čemž ξ_0, η_0 jsou kladné ryzí zlomky. Bod u_0 leží obecně uvnitř rovnoběžníka, jehož tři vrcholy jsou O, ω, ω', takže dvě strany jeho tvoří vektory ω a ω' vedené s počátku. Jen v případě, kdy jedna z čísel ξ_0, η_0 je nulou, padne bod na obvod rovnoběžníka a sice do jednoho z těchto vrcholů.



Bod $u_0 + m\omega + n\omega' = u$ vznikne z u_0 pošinutím o m délek ve směru ω a o n délek ve směru ω', takže u opíše určitý rovnoběžník shodný s původním, když u_0 opíše rovnoběžník základní (O, ω, ω').

Tyto rovnoběžníky tvoří síť, jejich strany jsou na přímkách dvou řad rovnoběžek ekvidistantních, celá rovina se tak rozpadne v rovnoběžníky. Každému bodu u odpovídá pak v základním rovnoběžníku representant či bod ekvivalentní u_0, jenž s ním jest vůči stranám obrazce homologickým.

Má-li funkce jednoznačná $f(u)$ periody ω, ω', bude

$$f(u) = f(u_0 + m\omega + n\omega') = f(u_0),$$

t. j. v homologických bodech má dvojperiodická funkce stejné hodnoty.

Rovnoběžník základní a každý jiný vzniklý z něho jakýmkoli pošinutím bez otočení) nazýváme *rovnoběžníkem* period.

Rovnoběžníky period, o nichž byla zmínka na konci § 7, mají stejný plošný obsah.

Obyčejně však vztahujeme funkce *sn*, *cn*, *dn* k rovnoběžníku vektorů $2K$, $2iK'$, který není sice rovnoběžníkem period, ale hodnoty funkcí v stejnolehlých bodech se liší nanejvýš znamením.

V rovnoběžníku (u nás — při reálném $k < 1$ — je to obdélník) $2K$, $2iK'$ mají Jacobiovy funkce $sn\,u$, $cn\,u$, $dn\,u$ jeden pól $u = iK'$ prvního stupně a jedno místo nulové

$$u = 0,\; K,\; K + iK';$$

derivace mají hodnoty

$$sn'0 = 1,\quad cn'K = -k',\quad dn'(K + iK') = ik'0.$$

Vzorec (α) § 6 ukazuje, že může nastati $sn(u + iv) = 0$ pouze při

$$sn\,u\,cn\,iv\,dn\,iv + sn\,iv\,cn\,u\,dn\,u = 0, \tag{β}$$

aneb když součin $sn\,u\,sn\,iv$ je nekonečný. Tato okolnost může nastati jen pro $sn\,u \lesseqgtr 0$, $v = K'$, ale v tom případě zůstává pravá strana vzorce (α) od nuly různou. — Zbývá tedy jen čitatel (β); tu je první člen reálný, druhý ryze pomyslný, a musí tedy současně

$$sn\,u\,cn\,iv\,dn\,iv = 0,\quad sn\,iv\,.\,cn\,u\,dn\,u = 0,$$

což vyžaduje $u = 2mK + 2niK'$, $v = 0$.

Ze součtové věty máme

$$sn(u+v) + sn(u-v) = \frac{2\,sn\,u\,cn\,v\,dn\,v}{1 - k^2 sn^2 u\, sn^2 v},$$

$$sn(u+v) - sn(u-v) = \frac{2\,sn\,v\,cn\,u\,dn\,u}{1 - k^2 sn^2 u\, sn^2 v}.$$

Pišme $u + v = x$, $u - v = a$; poslední rovnice přejde v

$$sn\,x - sn\,a = \frac{2\,sn\frac{x-a}{2}\,cn\frac{x+a}{2}\,dn\frac{x+a}{2}}{1 - k^2 sn^2\frac{x+a}{2}\,sn^2\frac{x-a}{2}}.$$

Pravá strana vymizí pouze když vymizí čitatel a pro $sn\frac{x-a}{2} = \infty$, tedy pro

$$\frac{x-a}{2} = 2mK + 2niK',\quad \frac{x-a}{2} = 2mK + (2n+1)iK',$$

$$\frac{x+a}{2} = (2m+1)K + 2niK',\quad \frac{x+a}{2} = (2m+1)K + (2n+1)iK';$$

poslední dvě eventuality lze shrnouti ve tvar

$$\frac{x+a}{2} = (2m+1)K + niK',$$

první dvě se spojují v

$$\frac{x-a}{2} = 2mK + niK',$$

a tak máme dvě soustavy hodnot

$$x = a + 4mK + 2niK', \quad x = (2K - a) + 4mK + 2niK',$$

pro něž platí $sn\,x = sn\,a$.

Podobně bude

$$cn\,x = cn\,a \text{ pro } x = \pm a + (km + 2)K + (4n + 2)iK',$$
$$dn\,x = dn\,a \text{ pro } x = \pm a + 2mK + 4niK'.$$

Nabude-li jedna z rovnic $sn\,x = p$, $cn\,x = q$, $dn\,x = r$ určitého řešení, které můžeme předpokládati v rovnoběžníku period, má tam ještě (a jen) jedno řešení další.

Později seznáme, že dané hodnoty p, q, r mohou býti zcela libovolné.

Hlava II.

§ 1. Pomocné věty z nauky o funkcích.

Věta. *Chová-li se analytická funkce $f(z)$ na místě z pravidelně a má v něm hodnotu od nuly různou, existují v každém jeho okolí body $z+\zeta$, v nichž jest absolutní hodnota funkce menší.*

Důkaz. Mocninný rozvoj funkce v okolí bodu z má obecně tvar

$$f(z+\zeta)=f(z)+A\zeta^{\nu}(1+a_1\zeta+a_2\zeta^2+\ldots),$$

kde A je konstanta od nuly různá a ν kladné celistvé číslo. Při označení

$$\varphi=a_1+a_2\zeta+a_3\zeta^2+\ldots$$

lze psáti

$$\frac{f(z+\zeta)}{A}=\frac{f(z)}{A}+\zeta^{\nu}(1+\varphi.\zeta);$$

položme pak

$$\frac{f(z)}{A}=Re^{i\Theta}\ \text{(trigonometrický tvar)}$$

a volme ζ tak, aby

$$\zeta^{\nu}=-\varrho^{\nu}e^{i\Theta},\ \text{t. j. }\zeta=\varrho e^{i\frac{\Theta+\pi}{\nu}};$$

tak se objeví tvar

$$\frac{f(z+\zeta)}{A}=e^{i\Theta}[R-\varrho^{\nu}(1+\varphi.\zeta)];$$

prostý obnos této veličiny je menší než

$$(R-\varrho^{\nu})+\varrho^{\nu+1}\,|\varphi|. \qquad (\alpha)$$

Veličina $|\varphi(\zeta)|$ zůstává pod stálou mezí G, pokud ϱ nepřevýší určitou mez, takže veličina (α) bude menší než

$$R-\varrho^{\nu}+G\varrho^{\nu+1}=R-\varrho^{\nu}(1-G\varrho),$$

a tato veličina je menší než R, jakmile se volí $\varrho<\frac{1}{G}$. Pro všecka ζ udaného tvaru, volená s tímto omezením platí tedy

$$\left|\frac{f(z+\zeta)}{A}\right|<R=\left|\frac{f(z)}{A}\right|,$$

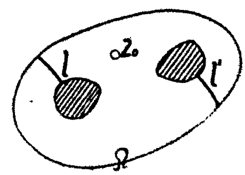
t. j.

$$|f(z+\zeta)|<|f(z)|.\text{*)}$$

---

* Této metody užil Cauchy k důkazu existence řešení algebraických rovnic.

Uvažujme nyní funkci $f(z)$, která je ve všech bodech určitého oboru Ω analyticky pravidelnou a v oboru samém jednoznačnou, a před pokládejme, že v určitém místě z_0 ležícím uvnitř Ω má funkce hodnotu absolutně menší než ve všech bodech okraje.



Minimum funkce reálné a kladné $|f(z)|$ pak musí příslušeti nějakému bodu z' uvnitř Ω a musí $f(z') = 0$; neboť by jinak dle předešlé věty ležely v okolí bodu z' body s menšími absolutními hodnotami $f(z)$.

Máme tedy větu, která zobecňuje základní větu algebry: *Dosáhne-li analyticky pravidelná a jednoznačná funkce uvnitř nějakého oboru Ω hodnoty menší než na jeho okraji, leží uvnitř tohoto oboru aspoň jedno její nulové místo.*

Funkce, která jest jednoznačná i pravidelná v určitém oboru Ω a na žádném místě jeho nevymizí, dosáhne svého minima absolutní hodnoty v některém místě okraje oboru Ω.

Uvažujme nyní analytickou funkci pravidelnou a jednoznačnou na oboru Ω

$$f(z) = u + iv,$$

kde reálné funkce u, v jsou spojité funkce reálných proměnných x, y $(x + iy = z)$, hovící diferenciálním rovnicím

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Z těch vychází

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \tag{2}$$

a funkce, těmto rovnicím hovící, slují logaritmické potenciály.

Je-li potenciál u dán, můžeme určiti funkci v, která mu jako sdružený potenciál přísluší dle rovnic (1). Neboť tyto rovnice dávají úplný diferenciál

$$dv = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

a integrací vychází funkce v.

Tu se ovšem může státi, že funkce v není v oboru Ω jednoznačnou, když okraj tohoto oboru je tvořen více čarami. Funkce v pak bude tvaru

$$v + m\omega + n\omega' + p\omega'' + \ldots,$$

kde $m, n, p, \ldots$ jsou celistvá čísla, a $\omega, \omega', \omega'', \ldots$ značí integrály vzaté podél vnitřních okrajových složek oboru Ω.

Funkce $u + iv$ má pak nekonečný počet hodnot, které se liší o ryze pomyslné konstanty (periody). V takovém případě rozkrojíme obor Ω podél čar $l, l' \ldots$, takže po provedení těchto řezů přechází obor v nový — stále ještě souvislý — obor Ω'. V tomto oboru jest $f(z) = u + iv$ jednoznačnou, podobně jako e^{u+iv}, e^{-u-iv}.

Minimální hodnoty absolutní (e^u a e^{-u}) těchto funkcí odpovídají minimu resp. maximu potenciálu u, a dle dokázané právě věty musí příslušné body z ležeti na okraji bodu Ω'.

Zbývá ještě ukázati, že tyto body padnou na okraj původního oboru Ω, t. j. neleží na pomocných čarách $l, l', \ldots$

Kdyby minimum funkce u padlo na př. na čáru l do bodu z', docílili bychom změnou čáry l případu, kdy minimum leží mimo tuto čáru.

Poněvadž pak e^{u+iv} je funkce pravidelná, měli bychom v sousedství body z'' s menší hodnotou $|e^{u+iv}|$, t. j. u by nemělo v bodě z' minima.

Stejnou vlastnost dokážeme o funkci v, poněvadž $v - iu$ jest analytická funkce.

Věta: *Logaritmický potenciál jednoznačný a pravidelný v jistém oboru dosahuje svých extrémních hodnot na okraji.*

T. j. na okraji oboru Ω existují dva body z', z'' s hodnotami potenciálu u', u'' a pro všecky vnitřní body má potenciál u hodnotu obsaženou mezi u' a u'':

$$u' < u < u''.$$

Věta: *Dva log. potenciály mohou míti na okraji oboru Ω hodnoty společné; v tom případě nejsou však oba pravidelné a jednoznačné.*

Vymizí-li jednoznačný a pravidelný potenciál podél celého okraje, jest identicky nulou.

Věta je důsledek předešlé, neboť (v druhé části) jsou obě krajní hodnoty $= 0$ a střední hodnoty s nimi splývají. První část věty jest jen jiný tvar části druhé.

Aplikace. Uvažujme nekonečnou řadu

$$f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + \ldots \qquad \text{I.}$$

složenou z analytických funkcí, které se vesměs chovají pravidelně na oboru Ω a jsou v něm jednoznačny, a předpokládejme, že tato řada konverguje s t e j n o m ě r n ě na okraji oboru. Ukážeme, že pak řada I konverguje také uvnitř Ω a sice stejnoměrně.

Důkaz. Položme

$$f_\nu(z) = u_\nu + i v_\nu,$$

a znamenejme hodnoty na okraji $\bar{u}_\nu$, $\bar{v}_\nu$.

Pro předepsanou dle libosti kladnou veličinu δ pak platí nerovnosti

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n+r} \bar{u}_\nu\right| < \delta, \quad \left|\sum_{\nu=n}^{n+r} \bar{v}_\nu\right| < \delta, \tag{3}$$

pro všecka n dostatečně veliká a pro všecka kladná r. Je to bezprostřední důsledek předpokládané konvergence řady okrajových hodnot

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(\bar{u}_\nu + i\bar{v}_\nu).$$

Avšak součty

$$U = \sum_{\nu=n}^{n+r} u_\nu, \quad V = \sum_{\nu=n}^{n+r} v_\nu$$

jsou log. potenciály jednoznačné a pravidelné na oboru Ω; extrémní hodnoty funkce U příslušejí okrajovým hodnotám a jsou dle (3) mezi $-\delta$ a δ, podobně u V; bude tedy pro body vnější i vnitřní

$$|U| < \delta, |V| < \delta,$$

t. j. dle Cauchyova principu, řady

$$\sum_1^{\infty} u_\nu, \sum_1^{\infty} v_\nu, \sum_1^{\infty}(u_\nu + i v_\nu) = \sum_1^{\infty} f_\nu(z)$$

konvergují na celém oboru Ω stejnoměrně. Ze známé Weierstraßovy věty elementární vychází, že součet řady je analytickou funkcí z.

§ 2. Problém Dirichletův pro mezikruží.

Mezikruží se středem v pólu souřadnic polárních r a Θ, omezené kruhy $r = r_1$ a $r = r_2$, $r_1 > r_2$ buď oborem logaritmického potenciálu, který chceme definovati jeho okrajovými hodnotami.

Zaveďme značení

$$\varrho = \frac{r_2}{r_1} (< 1),$$

$$T_\nu = a_\nu \cos \nu\Theta + b_\nu \sin \nu\Theta, \quad T'_\nu = a'_\nu \cos \nu\Theta + b'_\nu \sin \nu\Theta,$$
$$r_2 < r < r_1,$$

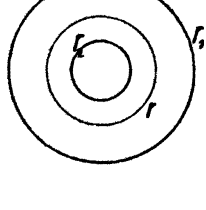
při čemž předpokládáme konstanty a_ν, b_ν, a'_ν, b'_ν tak voleny, aby řady absolutních hodnot

$$\Sigma|a_\nu|, \Sigma|b_\nu|, \Sigma|a'_\nu|, \Sigma|b'_\nu|$$

byly konvergentní, takže řady

$$\sum_1^{\infty} T_\nu, \sum_1^{\infty} T'_\nu$$

konvergují absolutně.



Utvořme nyní součet

$$S = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varrho^\nu}{1-\varrho^{2\nu}} \left(\frac{r^\nu}{r_2^\nu} - \frac{r_2^\nu}{r^\nu}\right) T_\nu +$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varrho^\nu}{1-\varrho^{2\nu}} \left(\frac{r_1^\nu}{r^\nu} - \frac{r^\nu}{r_1^\nu}\right) T'_\nu;$$

jeho konvergence plyne z okolnosti, že $\lim \varrho^\nu = 0$ pro $\nu = \infty$, a že veličiny

$$\frac{\varrho r}{r_2} = \frac{r}{r_1}, \quad \varrho \frac{r_2}{r},$$

$$\varrho \frac{r_1}{r} = \frac{r_2}{r}, \quad \varrho \frac{r}{r_1}$$

jsou ryzí zlomky; konvergence součtu S zůstává pak stejnoměrnou v celém mezikruží vůči proměnným r a Θ, poněvadž řady ΣT_ν a $\Sigma T'_\nu$ jsou absolutně konvergentní.

Neboť uvedené právě poměry nabudou nanejvýš hodnoty 1, padne-li bod na okraj mezikruží ($r = r_1$, resp. r_2).

Z toho pak vychází, že

$$\lim_{r = r_1} S = \sum_{\nu=1}^{\infty} T_\nu, \quad \lim_{r = r_2} S = \sum_{\nu=1}^{\infty} T'_\nu.$$

Vzpomeňme dále okolnosti, že výraz

$$\frac{a_0 \log r_2 - a'_0 \log r_1}{2 \log \varrho} + \frac{a'_0 - a_0}{2 \log \varrho} \log r$$

má za okrajové hodnoty

$$\text{pro } r = r_1 \text{ veličinu } \frac{a_0}{2},$$

$$\text{pro } r = r_2 \text{ veličinu } \frac{a_0'}{2}.$$

Píšeme-li k vůli stručnosti

$$A = \frac{a_0 \log r_2 - a'_0 \log r_1}{2 \log \varrho}, \quad B = \frac{a'_0 - a_0}{2 \log \varrho}, \tag{1}$$

dospíváme tak k poznatku, že výraz

$$U(r, \Theta) = A + B \log r + S$$

má na okraji mezikruží hodnoty

$$\begin{aligned} \varphi_1(\Theta) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} T_\nu, \; r = r_1, \\ \varphi_2(\Theta) &= \frac{a'_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} T'_\nu, \; r = r_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Výraz ten je však logaritmický potenciál, uvnitř mezikruží (r_1, r_2) jednoznačný a pravidelný.

$$\begin{aligned} U(r, \Theta) = A + B \log r &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varrho^\nu}{1 - \varrho^\nu} \left(\frac{r^\nu}{r_2^\nu} - \frac{r_2^\nu}{r^\nu} \right) T_\nu + \\ &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varrho^\nu}{1 - \varrho^{2\nu}} \left(\frac{r_1^\nu}{r^\nu} - \frac{r^\nu}{r_1^\nu} \right) T'_\nu, \end{aligned} \tag{3}$$

a jest podmínkami okrajovými

$$U = \varphi_1 \text{ pro } r = r_1, \; U = \varphi_2 \text{ pro } r = r_2$$

úplně určen.

Obecnost problému jest (pro náš postup) omezena značně podmínkou, aby řady (2) byly absolutně konvergentní; avšak řešení to našim aplikacím úplně vyhovuje.

Náš potenciál U je reálná část funkce komplexní proměnné

$$z = r e^{i\Theta};$$

$$F(z) = A' + B \log z + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varrho^\nu}{1-\varrho^{2\nu}} \left(\frac{a_\nu - ib_\nu}{r_2^\nu} z^\nu - \frac{a_\nu + ib_\nu}{z^\nu} r_2^\nu \right) + \\ + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varrho^\nu}{1-\varrho^{2\nu}} \left(\frac{a'_\nu + ib'_\nu}{z^\nu} r_1^\nu - \frac{a'_\nu - ib'_\nu}{r_1^\nu} z^\nu \right). \tag{4}$$

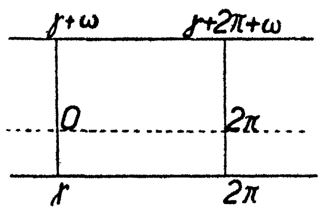
Zavedeme-li symboliku

$$a_{-\nu} = a_\nu, \; a'_{-\nu} = a'_\nu, \; b_{-\nu} = -b_\nu, \; b'_{-\nu} = -b'_\nu,$$

bude lze tento výraz formálně zjednodušiti

$$F(z) = A' + B \log z + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\varrho^\nu}{1-\varrho^{2\nu}} \left(\frac{a_\nu - ib_\nu}{r_2^\nu} - \frac{a'_\nu - ib'_\nu}{r_1^\nu} \right) z^\nu. \tag{4^0}$$

V obou výrazech značí A' konstantu, jejíž reálná část je výraz A dle (1). Čárka při Σ' značí vynechání nemožného členu pro $\nu = 0$. Buď nyní γ ryze pomyslná veličina libovolná, ω rovněž ryze pomyslné, ale kladné, takže reálná veličina kladná $\varrho = e^{i\omega}$ je menší jednotky.



Rovnoběžky s osou reálnou vedené v rovině komplexní proměnné ψ body $\psi = \gamma$ a $\psi = \gamma + \omega$ nechť určují pás, v němž je definována synektická funkce $f(\psi)$ proměnné ψ, jejíž reálná část U je na obou přímkách periodická o 2π.

Znamenáme-li

$$e^{i\gamma} = r_1, \quad e^{i(\gamma+\omega)} = r_2$$

— což jsou veličiny reálné a kladné —

$$\frac{r_2}{r_1} = \varrho = e^{i\omega} < 1$$

a klademe-li v (4^0) neb (4)

$$z = e^{i\psi},$$

tedy pro $z = r e^{i\Theta}$, $r = r_1$, máme $\psi = \gamma + \Theta$ a pro $r = r_2$ pak $\psi = \gamma + \omega + \Theta$. Proměnná z probíhá pak mezikruží omezené kruhy (r_1) a (r_2), a sice zaujme každý bod svoji polohu jen jednou, opíše-li proměnná ψ

obdélník o vrcholech $(\gamma, \gamma+2\pi, \gamma+2\pi+\omega, \gamma+\omega)$, který z daného pásu vytínají přímky vedené z bodů $\psi=\gamma$ a $\psi=\gamma+2\pi$ rovnoběžně s osou pomyslnou; funkce $f(\psi)$ přechází pak ve funkci $F(z)$ proměnné z uvnitř mezikruží (r_1, r_2), jejíž reálná část $U(r,\Theta)$ je v mezikruží jednoznačná a na pásu periodická o 2π.

Zejména jest tedy

1. pro $\psi=\gamma+\Theta$, $\quad U=\varphi_1(\Theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu\Theta+b_\nu\sin\nu\Theta)$,

2. pro $\psi=\gamma+\omega+\Theta$, $U=\varphi_2(\Theta)=\frac{a'_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a'_\nu\cos\nu\Theta+b'_\nu\sin\nu\Theta)$.

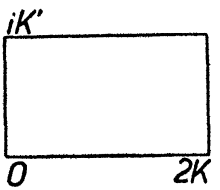
Při takto stanovených konstantách $a, b, \ldots b'$ platí pak následující vyjádření funkce $f(\psi)$ pro ψ v našem pásu ležící

$$f(\psi)=A'+Bi\psi+\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\varrho^\nu}{1-\varrho^{2\nu}}\left(\frac{a_\nu-ib_\nu}{r_2^\nu}-\frac{a'_\nu-ib'_\nu}{r_1^\nu}\right)e^{i\nu\psi}. \tag{5}$$

§ 3. Aplikace na funkci $\frac{1}{sn^2 u}$. Funkce H a Θ.

Funkce

$$\Phi(u)=\frac{1}{sn^2 u}$$



má periodu $2K$ a zůstává konečnou v rovnoběžníku $(0, 2K, iK')$ mimo body $u=0$ a $u=2K$. Mimo to jest reálnou na obou stranách horizontálních, dle věty

$$sn(u+iK')=\frac{1}{k\,sn\,u}.$$

Stejným způsobem jako $\Phi(u)$ se stává nekonečnou funkce

$$\Phi_0(u)=\frac{\pi^2}{4K^2\sin^2\frac{u\pi}{2K}},$$

takže rozdíl

$$i[\Phi(u)-\Phi_0(u)]=f(\psi), \quad \psi=\frac{u\pi}{K}$$

je funkce proměnné ψ, synektická na obdélníku $(0, 2\pi, 2\pi+\frac{iK'\pi}{K}, \frac{iK'\pi}{K})$; poněvadž $\Phi(u)$ má na horizontálních stranách hodnotu reálnou, má reálná část $f(\psi)$ na těchto přímkách tutéž hodnotu jako funkce

$$-i\Phi_0(u)=-\frac{i\pi^2}{4K^2\sin^2\frac{\psi}{2}}=\frac{i\pi^2}{K^2}\frac{e^{i\psi}}{(1-e^{i\psi})^2}.$$

Zde jest $\gamma = 0$, $\omega = \frac{iK'\pi}{K}$,

$$r_1 = 1,\; r_2 = e^{i\omega} = e^{-\frac{K'\pi}{K}} = q = \varrho.$$

Na spodní straně $(r = r_1)$ jest i Φ_0 ryze pomyslné, tedy trigonometrická řada $\varphi_1(\Theta) = 0$, takže

$$a_\nu = 0,\; b_\nu = 0.$$

Na vrchní straně rovnoběžníka jest

$$\psi = \omega + \Theta,\quad -i\Phi_0(u) = \frac{i\pi^2}{K^2}\,\frac{q e^{i\Theta}}{(1 - q e^{i\Theta})^2},$$

což dle identity

$$\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_1^\infty \nu z^\nu$$

má hodnotu

$$-i\Phi_0(u) = \frac{i\pi^2}{K^2}\sum_{\nu=1}^\infty \nu q^\nu e^{i\nu\Theta}$$

a reálná část

$$\varphi_2 = -\frac{\pi^2}{K^2}\sum_{\nu=1}^\infty \nu q^\nu \sin \nu\Theta,$$

což dává

$$a_\nu' = 0,\; b_\nu' = -\frac{\pi^2}{K^2}\,.\,\nu q^\nu.$$

Ve výrazu (5) tedy veličina $B = 0$ a A' je neznámá ryze pomyslná konstanta Ci, a máme po dosazení hodnot

$$f(\psi) = Ci + i\sum_{\nu=1}^\infty \frac{q^\nu}{1-q^{2\nu}}(b'_\nu e^{\nu i\psi} + b'_\nu e^{-i\nu\psi}) =$$

$$= Ci - 2i\frac{\pi^2}{K^2}\sum_{\nu=1}^\infty \frac{\nu q^{2\nu}}{1-q^{2\nu}}\cos\nu\psi,$$

t. j. po úpravě

$$\frac{1}{sn^2 u} = \frac{\pi^2}{4K^2\sin^2\frac{u\pi}{2K}} + C - \frac{2\pi^2}{K^2}\sum_{\nu=1}^\infty \frac{\nu q^{2\nu}}{1-q^{2\nu}}\cos\frac{\nu u\pi}{K}, \tag{1}$$

kde C jest konstanta prozatím neznámá.

Trigonometrická řada konverguje pro $u = \xi + i\eta$, $-2K' < \eta < 2K'$. Při opětné zkratce

$$\psi = \frac{u\pi}{K}$$

máme pak

$$2\sum_1^\infty \frac{\nu q^{2\nu}}{1-q^{2\nu}}\cos\nu\psi = \sum_{\nu,\pm}\frac{\nu q^{2\nu}}{1-q^{2\nu}}e^{\pm i\nu\psi} =$$

$$= \sum_{\nu,\pm} \sum_{\mu} \nu\, q^{2\mu\nu} e^{\pm i\nu\psi} = \sum_{\mu,\pm} \frac{q^{2\mu} e^{\pm i\psi}}{(1-q^{2\mu}e^{\pm i\psi})^2} =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(q^{\mu} e^{\frac{i\psi}{2}} - q^{-\mu} e^{-\frac{i\psi}{2}})^2} + \frac{1}{(q^{\mu} e^{-\frac{i\psi}{2}} - q^{-\mu} e^{\frac{i\psi}{2}})^2} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{4} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\psi}{2} + \frac{i\mu K'\pi}{K}\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\psi}{2} - \frac{i\mu K'\pi}{K}\right)} \right\},$$

což udílí vzorci (1) tvar

$$\frac{1}{sn^2 u} = \frac{\pi^2}{4K^2 \sin^2 \frac{u\pi}{2K}} + C + \frac{\pi^2}{4K^2} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\sin^2 \frac{u+2\mu iK'}{2K}\pi},$$

kde v řadě vynechán člen $\mu = 0$; ten však umístěn jest v čele pravé strany a jeho spojením s řadou vychází

$$\frac{1}{sn^2 u} = C + \frac{\pi^2}{4K^2} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sin^2 \frac{u+2\mu iK'}{2K}\pi}. \tag{2}$$

Řada v pravo konverguje pro všecka u mimo póly

$$u = 2\mu iK' + 2\nu K$$

a podává tedy vyjádření funkce všeobecně platné. Dosaďme sem $u + iK'$ za u a uvažme, že

$$4\sin^2 \frac{u+(2\mu+1)iK'}{2K}\pi = 4\sin^2 \frac{u+\lambda iK'}{2K}\pi,\ \lambda = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$$

a tedy

$$k^2 sn^2 u = C + \frac{\pi^2}{4K^2} \sum_{\lambda} \frac{1}{\sin^2 \frac{u+\lambda iK'}{2K}\pi}; \tag{3}$$

pravá strana

$$= C - \frac{\pi^2}{K^2} \sum_{l,\pm} \frac{q^l e^{\pm i\psi}}{(1-q^l e^{\pm i\psi})^2} = C - \frac{\pi^2}{K^2} \sum_{\nu, l, \pm} \nu q^{\nu l} e^{\pm i\nu\psi},$$

což po sečtení vůči $l = 1, 3, 5, \ldots$ dává

$$k^2 sn^2 u = C - \frac{2\pi^2}{K^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu q^{\nu}}{1-q^{2\nu}} \cos \frac{\nu u \pi}{K}. \tag{4}$$

Zde integrace od $u = 0$ do $u = K$ dává

$$CK = \int_0^K k^2 sn^2 u\, du = \int_0^1 \frac{k^2 x^2\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Ze vzorce (2) máme pro funkci

$$Z_1(u)=\int\left(C-\frac{1}{sn^2u}\right)du=\frac{1}{u}+(u)$$

$$Z_1(u)=\frac{\pi}{2K}\operatorname{cotg}\frac{u\pi}{2K}+\frac{\pi}{2K}\sum_1^\infty\left\{\operatorname{cotg}\frac{u+2\mu iK'}{2K}\pi+\operatorname{cotg}\frac{u-2\mu iK'}{2K}\pi\right\}$$

a znamenáme-li

$$\int Z_1(u)\,du=\log\frac{H(u)}{G},$$

vyjde

$$\log\frac{H(u)}{G}=\log\frac{2K}{\pi}+\log\sin\frac{u\pi}{2K}+$$

$$+\sum_{\mu=1}^\infty\log\left\{\frac{\sin\frac{2\mu iK'+u}{2K}\pi\,\sin\frac{2\mu iK'-u}{2K}\pi}{\sin^2\frac{\mu iK'}{K}\pi}\right\}.$$

Avšak

$$\sin\frac{2\mu iK'+u}{2K}\pi\,.\,\sin\frac{2\mu iK'-u}{2K}\pi=$$

$$=-\tfrac{1}{4}(1-q^{2\mu}\xi)(1-q^{2\mu}\xi^{-1})\,q^{-2\mu},$$

kde $\xi=e^{\frac{u\pi i}{K}}$; obecný člen naší řady zní

$$\log\frac{(1-q^{2\mu}\xi)(1-q^{2\mu}\xi^{-1})}{(1-q^{2\mu})^2}$$

a vychází tedy

$$H(u)=\frac{2GK}{\pi}\sin\frac{u\pi}{2K}\prod_1^\infty\frac{(1-q^{2\mu}e^{\frac{u\pi i}{K}})(1-q^{2\mu}e^{-\frac{u\pi i}{K}})}{(1-q^{2\mu})^2}.$$

Znamenejme

$$\vartheta_1(v|\tau)=2q^{\frac{1}{4}}\sin v\pi\prod_{\nu=1}^\infty(1-q^{2\nu})(1-q^{2\nu}e^{2v\pi i})(1-q^{2\nu}e^{-2v\pi i}),\quad(5)$$

kde $q=e^{\tau\pi i}$, Im. $\tau>0$; pak bude při vhodně volené konstantě náš výraz

$$H(u)=\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\Big|\frac{iK'}{K}\right).\quad(6)$$

Při tom je hlavní výsledek ten, že

$$C-\frac{1}{sn^2u}=D^2\log H(u)=\frac{H''(u)}{H(u)}-\left\{\frac{H'(u)}{H(u)}\right\}^2.\quad(7)$$

Ze vzorce (3) pak podobným způsobem soudíme, že

$$C-k^2\,sn^2 u = D_u^2 \sum_\lambda \log \frac{\sin \frac{\lambda i K' + u}{2K}\pi \, \sin \frac{\lambda i K' - u}{2K}\pi}{\sin^2 \frac{\lambda i K' \pi}{2K}},$$

$$(\lambda = 1, 3, 5, 7, \ldots)$$

aneb

$$C-k^2\,sn^2 u = D_u^2 \log \Theta(u), \tag{8}$$

kde

$$\Theta(u) = \vartheta_0\left(\frac{u}{2K} \,\Big|\, \frac{iK'}{K}\right), \tag{9}$$

$$\vartheta_0(v\,|\,\tau) = \prod_1^\infty (1-q^{2\nu})(1-q^{2\nu-1}e^{2v\pi i})(1-q^{2\nu-1}e^{-2v\pi i}). \tag{9*}$$

Srovnáním (7) a (8) plyne

$$D^2 \log \Theta(u) = D^2 \log H(u+iK'),$$

a musí tedy existovati vztah tvaru

$$e^{\alpha u+\beta}\,\Theta(u) = H(u+iK'),$$

t. j. obecněji

$$\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\,\Big|\,\tau\right) = e^{\alpha' v+\beta'}\,\vartheta_0(v\,|\,\tau),$$

který se snadno verifikuje. Předně máme $(\lambda = 1, 3, 5, \ldots)$

$$\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right) = \frac{A}{i}\left(e^{v\pi i}q^{\frac{1}{2}} - e^{-v\pi i}\,q^{-\frac{1}{2}}\right) q^{\frac{1}{4}}\, \Pi(1-q^{\lambda+2}e^{2v\pi i})(1-q^\lambda e^{-2v\pi i})$$

$$A = \Pi(1-q^{2\nu}).$$

Na pravé straně se výraz

$$\frac{qe^{2v\pi i}-1}{q^{\frac{1}{2}}\,e^{v\pi i}}\,q^{\frac{1}{4}}$$

spojí s první částí součinu a vznikne

$$\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right) = iq^{-\frac{1}{4}}\,e^{-v\pi i}A\,\Pi(1-q^\lambda e^{2v\pi i})(1-q^\lambda e^{-2v\pi i}),$$

t. j.

$$\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right) = i\,e^{-\pi i(v+\frac{\tau}{4})}\,\vartheta_0(v). \tag{10}$$

Ze vzorce (8)

$$C-k^2\,sn^2 u = \frac{\Theta''(u)}{\Theta(u)} - \left(\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}\right)^2$$

plyne pro $u=0$ — je $\Theta'(u)$ funkce lichá a tedy $\Theta'(0)=0$ — *

---

* V literatuře též přichází funkce $Z(u) = \int_0 k^2 sn^2 u\,du$; ta má tedy vyjádření

$$Z(u) = \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}\,u - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}.$$

$$C = \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}. \tag{11}$$

Zavede-li se označení

$$E = \int_0^K dn^2 u\, du = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi, \tag{12⁰}$$

máme tedy

$$E = K(1-C) = K\left[1 - \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}\right],\ K - E = \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} K. \tag{12}$$

V tom značení přepišme vzorce (1) a (4) na jich definitivní tvar

$$\frac{1}{sn^2 u} = \frac{K-E}{K} + \frac{\pi^2}{4K^2 sin^2 \frac{u\pi}{2K}} - \frac{2\pi^2}{K^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu q^{2\nu}}{1-q^{2\nu}} \cos \frac{\nu u \pi}{K}, \tag{1*}$$

$$dn^2 u = \frac{E}{K} + \frac{2\pi^2}{K^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu q^{\nu}}{1-q^{2\nu}} \cos \frac{\nu u \pi}{K}. \tag{4*}$$

Vedle toho pak

$$\frac{K-E}{K} - \frac{1}{sn^2 u} = D^2 \log H(u), \tag{7*}$$

$$\frac{K-E}{K} - k^2 sn^2 u = dn^2 u - \frac{E}{K} = D^2 \log \Theta(u). \tag{8*}$$

Z této rovnice máme

$$\int_0 dn^2 u\, du = \frac{Eu}{K} + \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},$$

vzorec pro délku oblouku ellipsy

$$x = a \sin\varphi, \quad y = b\cos\varphi; \quad t = \sin\varphi:$$

$$s = a \int_0 \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = a \int_0 dn^2 u\, du,\ u = \int_0 \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

kde

$$k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}.$$

Jak vidno, vyjadřuje se tu délka oblouku jako jednoznačná funkce prvořadého integrálu u.

Oblouk hyperbo'y.

Délka oblouku na hyperbole

$$\xi = a \operatorname{Cos}\varphi, \quad \eta = b \operatorname{Sin}\varphi \quad \left(\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1\right)$$

jest

$$s = \int\limits_0 \sqrt{a^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi + b^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi}\, d\varphi = \int\limits_0 \sqrt{(a^2+b^2) \operatorname{Cos}^2 \varphi - a^2}\, d\varphi.$$

Znamenejme $a^2 + b^2 = c^2$ a položme

$$\operatorname{Cos} \varphi = \frac{1}{x}, \quad d\varphi = \frac{-dx}{x\sqrt{1-x^2}},$$

tedy

$$s = -\int\limits_1 \frac{\sqrt{c^2 - a^2 x^2}}{x^2 \sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Pro modul $k = \frac{a}{c}$, $x = sn(u, k)$ bude tedy

$$\frac{s}{c} = -\int\limits_K \frac{1 - k^2 sn^2 u}{sn^2 u}\, du = k^2 (u - K) - \int\limits_K \frac{du}{sn^2 u}.$$

Avšak

$$\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} - \frac{1}{sn^2 u} = D^2 \log H(u),$$

tedy

$$-\int\limits_K \frac{du}{sn^2 u} = \log \frac{H(u)}{H_1(0)} + (K - u) \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)},$$

takže vycházejí

$$\frac{s}{c} = \log \frac{H(u)}{H_1(0)} + \left[\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} - k^2\right] (K - u)$$

$$sn\left(u, \frac{a}{c}\right) = \frac{1}{\operatorname{Cos} \varphi} = \frac{a}{\xi},$$

při čemž oblouk se měří od vrcholu $\varphi = 0$.

V jiné symbolice

$$\frac{s}{c} = \log \frac{\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\right)}{\vartheta_2} + \left[\frac{\vartheta_0''}{4K^2 \vartheta_0} - k^2\right] (K - u).$$

§ 4. Jiné odvození. Vyjádření *sn u, cn u, dn u* funkcemi theta. Hodnoty *K* a *k*, *k'*.

Nalezených výsledků lze nabýti přímo. Zaveďme k vůli zjednodušení na místě u značení $2Kv$; funkce

$$\frac{4K^2}{sn^2(2Kv)}$$

má póly $v = m + n\tau$, $\tau = \frac{iK'}{K}$, $(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ a na nich se chová jako příslušné výrazy

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(v - n\tau)\pi};$$

jich součet

$$f(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi^2}{\sin^2(v - n\tau)\pi}$$

jest jednoznačná funkce analytická, až na tyto póly pravidelná. Má periody 1 a τ:

$$f(v+1) = f(v), \quad f(v+\tau) = f(v),$$

a jest na obvodě rovnoběžníka period $(0, 1, 1+\tau, \tau)$ reálná; neboť pro reálná v jsou členy po dvou $(n = \nu$ a $n = -\nu)$ sdruženy, a pro ryze pomyslná v je $\sin(v - n\tau)\pi$ ryze pomyslný, jeho čtverec tedy reálný.

Totéž platí o $sn^2(2Kv)$ a tedy rozdíl obou funkcí

$$F(v) = \frac{4K^2}{sn^2(2Kv)} - f(v)$$

je funkce v rovnoběžníku period pravidelná a na jeho okraji reálná, tudíž jest $F(v)$ konstanta.

Zavedené celistvé transcendenty $H(u)$, $\Theta(u)$ mají tyto vlastnosti

$$H(u + 2K) = -H(u), \quad \Theta(u + 2K) = \Theta(u), \tag{a}$$

jež plynou bezprostředně ze součinové definice funkcí $\vartheta_1(v)$ a $\vartheta_0(v)$:

$$\vartheta_1(v+1) = -\vartheta_1(v), \quad \vartheta_0(v+1) = \vartheta_0(v). \tag{13a}$$

Z definice (5) plyne

$$\vartheta_1(v+\tau) = -iq^{\frac{1}{4}}(q^2 e^{2v\pi i} - 1) . q^{-1} e^{-v\pi i} A \prod_1^{\infty}(1 - q^{2\nu+2} e^{2v\pi i})$$
$$(1 - e^{-2v\pi i}) \prod_1^{\infty}(1 - q^{2\nu} e^{-2v\pi i}),$$

kde $A = \prod_1^{\infty}(1 - q^{2\nu})$.

Vpravo první závorka vstoupí do prvního nekonečného součinu a vyjde

$$\vartheta_1(v+\tau) = -2\sin v\pi . e^{-2v\pi i} q^{-1} . A q^{\frac{1}{4}} \prod_1^{\infty}(1 - q^{2\nu} e^{2v\pi i})(1 - q^{2\nu} e^{-2v\pi i}),$$

$$\vartheta_1(v+\tau) = -e^{-\pi i(2v+\tau)} \vartheta_1(v). \tag{13b}$$

Podobně vypočteme

$$\vartheta_0(v+\tau) = -e^{-\pi i(2v+\tau)} \vartheta_0(v). \tag{13c}$$

Tyto vzorce se kryjí s relacemi

$$H(u+2iK') = -H(u)e^{-\frac{\pi i}{K}(u+iK')},$$

$$\Theta(u+2iK') = -\Theta(u)e^{-\frac{i\pi}{K}(u+iK')}. \qquad (b)$$

O funkci

$$\varphi(u) = \frac{H(u)}{\Theta(u)}$$

dle těchto vzorců zjistíme periodické vlastnosti

$$\varphi(u+2K) = -\varphi(u), \quad \varphi(u+2iK') = \varphi(u).$$

Nulová místa funkce $H(u)$ jsou přesně

$$u = 2mK + 2niK'$$

táž, jako u funkce $sn\,u$, a stejně póly, nulová místa funkce $\Theta(u)$ jsou

$$u = 2mK + (2n+1)iK';$$

neboť z definice funkce $\vartheta_0(v)$ je zřejmo, že vymizí jen pro

$$v = m + (n+\tfrac{1}{2})\tau.$$

Funkce

$$\frac{sn\,u}{\varphi(u)} = F(u)$$

je tedy pravidelná v celé rovině a je mimo to reálná na obvodu obdélníka $(0,\ 2K,\ 2K+2iK',\ 2iK')$; neboť jest $\varphi(u)$ reálná pro reálná u a ryze pomyslné pro ryze pomyslná u, jako $sn\,u$. Bude tedy nutně $F(u)$ konstantou A.

$$sn\,u = A\varphi(u) = A\frac{H(u)}{\Theta(u)};$$

$u = K$ dává

$$A = \frac{\Theta(K)}{H(K)} = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2},$$

tedy

$$sn\,u = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{H(u)}{\Theta(u)} = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{u}{2K}\right)}. \qquad (14)$$

Derivací na $u = 0$ plyne

$$\frac{H'(0)}{\Theta(0)} = \frac{\vartheta_1'}{2K\vartheta_0} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}, \qquad (14^0)$$

kde bylo dosazeno

$$\Theta(0) = \vartheta_0(0) = \vartheta_0,$$

$$H'(0) = \frac{\vartheta_1'(0)}{2K} = \frac{\vartheta_1'}{2K},$$

$$\vartheta_1' = 2\pi q^{\frac{1}{4}} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - q^{2\nu})^3.$$

Zaveďme další dvě transcendenty Jacobiovy

$$\begin{aligned} H(u+K) &= H_1(u) = \vartheta_2\left(\frac{u}{2K}\right), \\ \Theta(u+K) &= \Theta_1(u) = \vartheta_3\left(\frac{u}{2K}\right), \end{aligned} \tag{15a}$$

kde

$$\vartheta_2(v|\tau) =$$
$$= \vartheta_1(v+\tfrac{1}{2}) = 2q^{\frac{1}{4}} \cos v\pi . \prod_1^{\infty}(1-q^{2\nu})(1+q^{2\nu}e^{2v\pi i})(1+q^{2\nu}e^{-2v\pi i}) \tag{15}$$
$$\vartheta_3(v|\tau) = \vartheta_0(v+\tfrac{1}{2}) = \prod_1^{\infty}(1-q^{2\nu})(1+q^{2\nu-1}e^{2v\pi i})(1+q^{2\nu-1}e^{-2v\pi i}).$$

Tyto cel. funkce hoví podmínkám

$$\begin{aligned} \vartheta_2(v+1) &= -\vartheta_2(v), & \vartheta_2(v+\tau) &= e^{-\pi i(2v+\tau)}\vartheta_2(v), \\ \vartheta_3(v+1) &= \vartheta_3(v), & \vartheta_3(v+\tau) &= e^{-\pi i(2v+\tau)}\vartheta_3(v). \end{aligned} \tag{16}$$

Poněvadž

$$\vartheta_1(\tfrac{1}{2}) = \vartheta_2(0) = \vartheta_2,$$
$$\vartheta_0(\tfrac{1}{2}) = \vartheta_3(0) = \vartheta_3,$$

dávají rovnice (14) pro $u = K$ a (14^0)

$$1 = 2K\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{\vartheta_1'\vartheta_3},$$

tedy vyjádření periody

$$2K = \frac{\vartheta_1'\vartheta_3}{\vartheta_0\vartheta_2},$$

které ještě zjednodušíme.

Dělíme-li

$$\vartheta_1' = \pi . 2q^{\frac{1}{4}}\prod(1-q^{2\nu})^3$$

součinem hodnot

$$\vartheta_0 = \prod(1-q^{2\nu})(1-q^{2\nu-1})^2$$
$$\vartheta_2 = 2q^{\frac{1}{4}}\prod(1-q^{2\nu})(1+q^{2\nu})^2$$
$$\vartheta_3 = \prod(1-q^{2\nu})(1+q^{2\nu-1})^2,$$

obdržíme

$$\frac{\vartheta_1'}{\pi\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3} = \frac{1}{\varphi(q)^2},$$
$$\varphi(q) = \prod(1+q^{2\nu})(1+q^{2\nu-1})(1-q^{2\nu-1}) =$$
$$= \prod(1+q^{2\nu})\prod(1-q^{2(2\nu-1)}).$$

První součin lze štěpením na sudá a lichá ν psáti

$$\prod(1+q^{4\nu})\prod(1+q^{2(2\nu-1)})$$

a dosazením vychází vztah

$$\varphi(q) = \varphi(q^3).$$

Odtud plyne

$$\varphi(q) = \varphi(q^2) = \varphi(q^4) = \varphi(q^8) = \ldots.$$
$$\varphi(q) = \varphi(q^{2^m}),$$

tedy ježto $\lim\limits_{n=\infty} \varphi(q^n) = 1$, $\varphi(q) = 1$:

$$\vartheta_1{}' = \pi\,\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_3, \tag{17}$$
$$2K = \pi\,\vartheta_3{}^2. \tag{18}$$

Podobně jako vzorec

$$sn\,u = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\cdot\frac{\vartheta_1(\frac{u}{2K})}{\vartheta_0(\frac{u}{2K})} = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\,\frac{H(u)}{\Theta(u)}, \tag{14}$$

při čemž parametr funkcí theta jest

$$\tau = \frac{iK'}{K},$$

nalezneme druhé dva, určujíce konstanty z hodnoty $cn(0) = dn(0) = 1$,

$$cn\,u = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}\,\frac{\vartheta_2(\frac{u}{2K})}{\vartheta_0(\frac{u}{2K})} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}\,\frac{H_1(u)}{\Theta(u)}, \tag{19}$$

$$dn\,u = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\,\frac{\vartheta_3(\frac{u}{2K})}{\vartheta_0(\frac{u}{2K})} = \frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}. \tag{20}$$

Poslední dává pro $u = K$

$$k' = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\,\frac{\vartheta_3(\frac{1}{2})}{\vartheta_0(\frac{1}{2})},$$

t. j.

$$k' = \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\right)^2, \quad \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3} = \sqrt{k'}, \tag{21}$$

$$\sqrt[4]{k'} = \frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)(1-q^7)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)(1+q^7)\ldots}.$$

Z rovnice (10)

$$\vartheta_1\left(v + \frac{\tau}{2}\right) = ie^{-\pi i\left(v+\frac{\tau}{4}\right)}\,\vartheta_0(v) \tag{10}$$

plyne dále

$$\vartheta_0\left(v + \frac{\tau}{2}\right) = ie^{-\pi i\left(v+\frac{\tau}{4}\right)}\,\vartheta_1(v); \tag{10 a}$$

tudíž obdržíme z (14) při $u = 2Kv$:

$$sn(u + iK') = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_1(v + \frac{\tau}{2})}{\vartheta_0(v + \frac{\tau}{2})} = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_1(v)} = \left(\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\right)^2 \frac{1}{sn\,u}.$$

Tato hodnota má ale býti

$$\frac{1}{k\,sn\,u},$$

a tak vychází

$$k = \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\right)^2, \ \sqrt{k} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3},$$
$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\ q^{\frac{1}{8}} \frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)\ (1+q^3)(1+q^5)\ldots}. \tag{22}$$

Z těchto vzorců je zřejmý postup, jakým možno počítati hodnoty q, u z daných k a $x = sn\,u$, o čemž jednáno bude později.

Neopomeňme si všimnouti zajímavého důsledku vztahů (21) a (22): $k^2 + k'^2 = 1$ dává

$$\vartheta_0^4 + \vartheta_2^4 = \vartheta_3^4. \tag{23}$$

§ 5. Řady pro funkce theta.

Vyjděme z celistvé transcendenty

$$\vartheta_3(v) = A \prod_1^\infty (1 + q^{2n-1} e^{2v\pi i})(1 + q^{2n-1} e^{-2v\pi i}),$$
$$q = e^{\tau\pi i}, \ |q| < 1, \ A = \prod_1^\infty (1 - q^{2n}),$$

při čemž jinak je τ zcela obecné. Je z tvaru součinu zřejmo, že bude lze tuto funkci rozvinouti v řadu stále konvergentní tvaru

$$\vartheta_3(v) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu e^{2\nu v\pi i}.$$

Součinitelé A_ν se určí na základě vztahu

$$q\,\vartheta_3(v + \tau) = e^{-2v\pi i} \vartheta_3(v);$$

dosazením řad vychází totiž

$$\Sigma A_\nu q^{2\nu+1} e^{2\nu v\pi i} = \sum_{-\infty}^{\infty} A_\nu e^{2(\nu-1)v\pi i};$$

pravou stranu lze psáti

$$\sum_{-\infty}^{\infty} A_{\nu+1} e^{2\nu v\pi i},$$

a porovnání obou řad dává

$$A_{\nu+1} = A_\nu q^{2\nu+1}$$

čili

$$A_{\nu+1}\, q^{-(\nu+1)^2} = A_\nu\, q^{-\nu^2}$$

a je tedy

$$A_\nu\, q^{-\nu^2} = A_0, \quad A_\nu = A_0\, q^{\nu^2},$$

takže bude

$$\vartheta_3(v) = A_0 \sum_{-\infty}^{\infty} q^{\nu^2} e^{2\nu v \pi i}.$$

Znamenejme $A = \dfrac{1}{\psi(q)}$,

$$T_3(v) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2nv\pi i},$$

$$T_0(v) = T_3(v + \tfrac{1}{2}) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2nv\pi i},$$

$$T_1(v) = -i\, e^{\pi i\left(v + \frac{\tau}{4}\right)}\, T_0\left(v + \frac{\tau}{2}\right) = -i \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)v\pi i},$$

$$T_2(v) = T_1(v + \tfrac{1}{2}) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)v\pi i},$$

i bude obecně

$$T_k(v) = \psi(q)\, \vartheta_k(v).$$

Dle toho také

$$sn(2Kv) = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} \frac{T_1(v)}{T_0(v)}, \quad cn(2Kv) = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_2} \frac{T_2(v)}{T_0(v)}, \quad dn(2Kv) = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3} \frac{T_3(v)}{T_0(v)}$$

a derivuje li se první zlomek, vyjde po dosazení

$$T_0(v)\, T_1'(v) - T_1(v)\, T_0'(v) = B\, T_2(v)\, T_3(v), \tag{α}$$

kde B je stálé. Zde derivujme dvakráte na $v = 0$:

$$T_0 T_1''' - T_0'' T_1' = B(T_2'' T_3 + T_3'' T_2).$$

Podle (α) jest

$$T_0 T_1' = B\, T_2 T_3,$$

a tedy předposlední rovnice dává, dělíme-li tímto výrazem,

$$\frac{T_1'''}{T_1'} = \frac{T_0''}{T_0} + \frac{T_2''}{T_2} + \frac{T_3''}{T_3}. \tag{β}$$

Rady T_k hoví parciální rovnici

$$\frac{\partial^2 T}{\partial v^2} = 4\pi i \frac{\partial T}{\partial \tau}.$$

a z ní plyne

$$T_1''' = 4\pi i \frac{\partial T_1'}{\partial \tau}, \quad T_k'' = 4\pi i \frac{\partial T_k}{\partial \tau},$$

takže rovnice (β) zní

$$\frac{d \log T_1'}{d\tau} = \frac{d \log T_0}{d\tau} + \frac{d \log T_2}{d\tau} + \frac{d \log T_3}{d\tau},$$

a odtud

$$T'_1 = c\, T_0\, T_2\, T_3,$$

kde c je číselná konstanta. Avšak dosazením výrazů

$$T_0 = 1 - 2q + 2q^4 - \ldots, T_3 = 1 + 2q + 2q^4 + \ldots, T_2 = 2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + \ldots$$

$$T'_1 = 2\pi\,(q^{\frac{1}{4}} - 3\,q^{\frac{9}{4}} + \ldots)$$

vychází odtud

$$c = \pi,$$

t. j.

$$T_1' = \pi\, T_0\, T_2\, T_3.$$

Poněvadž

$$T_k = \psi(q)\,\vartheta_k,\ T_1' = \psi(q)\,\vartheta_1',$$

vychází dosazením

$$\psi(q) = \psi(q)^3,\ \psi(q)^2 = 1,$$

$$1 + 2q + \ldots = \pm (1 - q^2)(1 + q)^2 \ldots$$

tedy

$$\psi(q) = 1,$$

a máme tak čtyři Jacobiovy funkce theta ($q = e^{\tau\pi i}$)

$$\vartheta_3(v\,|\,\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2nv\pi i} = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{(2nv + n^2\tau)\pi i},$$

$$\vartheta_0(v\,|\,\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2nv\pi i} = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{(2nv + n^2\tau)\pi i},$$

$$\vartheta_2(v\,|\,\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)v\pi i} = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{(2n+1)v\pi i + (n+\frac{1}{2})^2\tau\pi i},$$

$$\vartheta_1(v\,|\,\tau) = -i \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)v\pi i} =$$

$$= -i \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{(2n+1)v\pi i + (n+\frac{1}{2})^2\tau\pi i}.$$

Po sloučení symetrických členů vycházejí tyto přehledné výrazy:

$$\vartheta_3(v) = 1 + 2q\cos 2v\pi + 2q^4\cos 4v\pi + 2q^9\cos 6v\pi + \ldots$$

$$= 1 + 2\sum_{1}^{\infty} q^{\nu^2}\cos 2\nu v\pi,$$

$$\vartheta_0(v) = 1 - 2q\cos 2v\pi + 2q^4\cos 4v\pi - 2q^9\cos 6v\pi + \ldots$$

$$= 1 + 2\sum_{1}^{\infty} (-1)^{\nu} q^{\nu^2}\cos 2\nu v\pi,$$

$$\vartheta_2(v) = 2q^{\frac{1}{4}}\cos v\pi + 2q^{\frac{9}{4}}\cos 3v\pi + 2q^{\frac{25}{4}}\cos 5v\pi + \ldots$$

$$= 2\sum q^{\frac{1}{4}\lambda^2}\cos\lambda v\pi,$$

$$\vartheta_1(v) = 2q^{\frac{1}{4}}\sin v\pi - 2q^{\frac{9}{4}}\sin 3v\pi + 2q^{\frac{25}{4}}\sin 5v\pi - \ldots$$

$$= 2\sum (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} q^{\frac{1}{4}\lambda^2}\sin\lambda v\pi,$$

$$(\lambda = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots).$$

Tyto řady vyznamenávají se mimo svůj elegantní tvar také rychlou konvergencí.

Chování funkcí ϑ vůči periodám 1 a τ je vyjádřeno společnou rovnicí

$$\vartheta_{gh}(v+1)=(-1)^g\,\vartheta_{gh}(v),\ \vartheta_{gh}(v+\tau)=(-1)^h\,e^{-\pi i(2v+\tau)}\,\vartheta_{gh}(v), \qquad \text{(A)}$$

při čemž dvojí index, t. zv. charakteristika či známka g, h se na jednoduchý Jacobiův převádí takto:

$$\vartheta_{11}(u)=\vartheta_1(u),\ \vartheta_{10}(u)=\vartheta_2(u),\ \vartheta_{01}(u)=\vartheta_0(u),\ \vartheta_{00}(u)=\vartheta_3(u).$$

Podmínkami (A) jsou celistvé transcendenty ϑ_{gh} charakterisovány až na činitele nezávislého na v; podmínka

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial v^2}=4\pi i\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau},$$

pak nechává neurčitým pouze číselného činitele.

Společným vzorcem se vyjadřují tyto funkce takto

$$\vartheta_{gh}(u|\tau)=(-1)^{gh}\sum_{-\infty}^{\infty}e^{\pi i(\nu+\frac{1}{2}g)^2\tau+2\pi i(\nu+\frac{1}{2}g)(u+\frac{1}{2}h)}. \qquad \text{(B)}$$

Chování vzhledem k připojení polovičních period $\frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{1+\tau}{2}$ líčí následující tabulky:

$$\vartheta_1(u+\tfrac{1}{2})=\vartheta_2(u),\ \vartheta_2(u+\tfrac{1}{2})=-\vartheta_1(u),\ \vartheta_3(u+\tfrac{1}{2})=\vartheta_0(u),$$
$$\vartheta_0(u+\tfrac{1}{2})=\vartheta_3(u);$$

$$\vartheta_1(u+\frac{\tau}{2})=ie^{-\pi i(u+\frac{\tau}{4})}\vartheta_0(u),\ \vartheta_2(u+\frac{\tau}{2})=e^{-\pi i(u+\frac{\tau}{4})}\vartheta_3(u),$$

$$\vartheta_3(u+\frac{\tau}{2})=e^{-\pi i(u+\frac{\tau}{4})}\vartheta_2(u),\ \vartheta_0(u+\frac{\tau}{2})=ie^{-\pi i(u+\frac{\tau}{4})}\vartheta_1(u);$$

$$\vartheta_1(u+\frac{1+\tau}{2})=e^{-\pi i(u+\frac{\tau}{4})}\vartheta_3(u),\ \vartheta_2(u+\frac{1+\tau}{2})=-ie^{-\pi i(u+\frac{\tau}{4})}\vartheta_0(u),$$

$$\vartheta_3(u+\frac{1+\tau}{2})=ie^{-\pi i(u+\frac{\tau}{4})}\vartheta_1(u),\ \vartheta_0(u+\frac{1+\tau}{2})=e^{-\pi i(u+\frac{\tau}{4})}\vartheta_2(u).$$

Stačí si pamatovati tento typ:

$$f_\alpha(u+\frac{\tau}{2})=f_\beta(u)\,\varepsilon\, e^{-\pi i(u+\frac{\tau}{4})},$$

$$\alpha,\beta=0,1 \text{ neb } 1,0:\varepsilon=i,$$
$$\alpha,\beta=2,3 \text{ neb } 3,2:\varepsilon=1.$$

Podle obecné definice jest

$$\vartheta_{g+2,h} = \vartheta_{gh}, \quad \vartheta_{g,h+2} = (-1)^g \vartheta_{gh},$$

vztah velmi důležitý pro úpravu jistých vzorců.

V definici (B) pišme $\nu + \frac{1}{2} g = n$, takže

$$\vartheta_{gh}(u|\tau) = (-1)^{gh} \Sigma e^{n^2\tau\pi i + 2n(u + \frac{1}{2}h)\pi i};$$

odtud máme

$$\vartheta_{gh}\left(u + \frac{g'\tau + h'}{2}\right) = (-1)^{gh} \Sigma e^{n^2\tau\pi i + ng'\tau\pi i + 2n(u + \frac{h+h'}{2})\pi i}.$$

Exponent lze psáti

$$(n + \frac{g'}{2})^2 \tau\pi i - \tfrac{1}{4} g'^2 \tau\pi i + 2(n + \frac{g'}{2})(u + \frac{h+h'}{2})\pi i -$$

$$- g'(u + \frac{h+h'}{2})\pi i =$$

$$= (\nu + \frac{g+g'}{2})^2 \tau\pi i + 2(\nu + \frac{g+g'}{2})(u + \frac{h+h'}{2})\pi i - g'(u + \tfrac{1}{4} g'\tau)\pi i -$$

$$- g'(h+h')\frac{\pi i}{2};$$

máme tedy nejprve

$$\vartheta_{gh}\left(u + \frac{g'\tau + h'}{2}\right) =$$

$$= (-1)^{gh + (g+g')(h+h')} \vartheta_{g+g', h+h'}(u)\, e^{-g'(u + \frac{1}{4} g'\tau)\pi i}\, i^{-g'(h+h')},$$

tedy konečně

$$\vartheta_{gh}\left(u + \frac{g'\tau + h'}{2}\right) = (-1)^{gh'} i^{g'(h+h')} e^{-\pi i g'(u + \frac{1}{4} g'\tau)} \vartheta_{g+g', h+h'}(u). \qquad \text{(B*)}$$

Poznamenejme ještě vzorec platný pro kladná i záporná n:

$$\vartheta_{gh}(u + n\tau) = (-1)^{nh} e^{-n\pi i(2u + n\tau)} \vartheta_{gh}(u).$$

§ 6. Vzorce součtové; vztah Weierstrassův.

Funkce

$$\frac{H(u+v)\, H(u-v)}{H(u)^2\, H(v)^2}$$

má periody $2K$ a $2iK'$, jak to plyne z rovnic

$$H(u + 2K) = -H(u)$$

$$H(u + 2iK') = -e^{\frac{\pi i}{K}(u + iK')} H(u),$$

a mimo to v okolí bodu $u=0$ má rozvoj tvaru

$$-\frac{1}{a^2u^2}+\mathfrak{P}(u^2),\quad a=H'(0).$$

Týž tvar rozvoje až na znamení má funkce $\frac{1}{a^2sn^2u}$, takže součet

$$\frac{H(u+v)H(u-v)}{H(u)^2H(v)^2}+\frac{1}{a^2sn^2u}=f(u),\quad a=H'(0),$$

je funkce synektická o periodách $2K$, $2iK'$. Funkce ta při reálných v je reálná pro u reálné a ryze pomyslné, tedy na obvodu obdélníka $(0;\ 2K,\ 2iK')$ a tudíž konstantou.

Dosazení $u=v$ dává

$$f(v)=\frac{1}{a^2sn^2v},$$

a tedy plyne základní vzorec

$$H'(0)^2\frac{H(u+v)H(u-v)}{H^2(u)H^2(v)}=\frac{1}{sn^2v}-\frac{1}{sn^2u}. \tag{1}$$

Poněvadž

$$H(u+iK')=ie^{-\frac{\pi i}{2K}(u+\frac{1}{2}iK')}\Theta(u),$$

obdržíme záměnou u, v za $u+iK'$, $v+iK'$ na levé straně

$$-\frac{H(u+v)e^{-\frac{\pi i}{K}(u+v+iK')}\,.\,H(u-v)H'(0)^2}{e^{-\frac{\pi i}{K}(u+\frac{1}{2}iK')-\frac{\pi i}{K}(v+\frac{1}{2}iK')}\Theta^2(u)\Theta^2(v)}=$$

$$=-\frac{H(u+v)H(u-v)}{\Theta^2(u)\,.\,\Theta^2(v)}H'(0)^2,$$

takže touto záměnou vznikne

$$sn^2u-sn^2v=H'(0)^2\frac{H(u+v)H(u-v)}{k^2\Theta^2(u)\,.\,\Theta^2(v)}; \tag{2}$$

$$H'(0)=\frac{\vartheta_1'}{2K}=\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{\vartheta_3},\quad k=\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\right)^2;\quad \frac{H'(0)}{k}=\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{\vartheta_2},$$

$$sn^2u-sn^2v=\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{\vartheta_2}\right)^2\frac{H(u+v)(Hu-v)}{\Theta^2(u)\,.\,\Theta^2(v)}. \tag{2*}$$

Do identity

$$(A-B)(C-D)+(A-C)(D-B)+(A-D)(B-C)=0$$

vložme

$$A=\frac{1}{sn^2a},\ B=\frac{1}{sn^2b},\ C=\frac{1}{sn^2c},\ D=\frac{1}{sn^2d},$$

a užijme rovnice (1); vyjde po zkrácení vzorec *Weierstrassův*

$$\begin{aligned}
&H(a+b)\,H(a-b)\,H(c+d)\,H(c-d)+\\
&+H(a+c)\,H(a-c)\,H(d+b)\,H(d-b)+\\
&+H(a+d)\,H(a-d)\,H(b+c)\,H(b-c)=0,
\end{aligned}\tag{3}$$

aneb v symbolice funkce ϑ_1

$$\begin{aligned}
&\vartheta_1(a+b)\,\vartheta_1(a-b)\,\vartheta_1(c+d)\,\vartheta_1(c-d)+\\
&+\vartheta_1(a+c)\,\vartheta_1(a-c)\,\vartheta_1(d+b)\,\vartheta_1(d-b)+\\
&+\vartheta_1(a+d)\,\vartheta_1(a-d)\,\vartheta_1(b+c)\,\vartheta_1(b-c)=0,
\end{aligned}\tag{5*}$$

ke kterémužto vztahu se ještě vrátíme.

Rovnice (2*) po odstranění jmenovatelů nabude tvaru

$$\vartheta_0^2\,H(u+v)\,H(u-v)=\Theta^2(v)\,H^2(u)-H^2(v)\,\Theta^2(u);$$

vložme $u+iK'$ za u:

$$\vartheta_0^2\,\Theta(u+v)\,\Theta(u-v)=\Theta^2(v)\,\Theta^2(u)-H^2(v)\,H^2(u),\tag{4}$$

což lze též psáti vzhledem k identitě $\frac{H(x)}{\Theta(x)}=\sqrt{k}\,sn\,x$:

$$\vartheta_0^2\,\frac{\Theta(u+v)\,\Theta(u-v)}{\Theta^2(u)\,\Theta^2(v)}=1-k^2\,sn^2u\,sn^2v.\tag{4*}$$

Obraťme se nyní k funkci

$$Z(u)=\int\limits_0 k^2\,sn^2u\,du=Cu-\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)};$$

logaritmické derivování (4*) dle u a v podá po dosazení hodnot vzorce

$$Z(u+v)+Z(u-v)-2\,Z(u)=2\,k^2\,\frac{sn\,u\,sn'u\,sn^2v}{Q},$$

$$Z(u+v)-Z(u-v)-2\,Z(v)=\frac{2\,k^2\,sn\,v\,sn'v\,sn^2u}{Q};$$

$$Q=1-k^2\,sn^2u\,sn^2v.$$

Sečtením vychází addiční věta druhořadých integrálů

$$Z(u+v)-Z(u)-Z(v)=k^2\,sn\,u\,sn\,v\,\frac{sn\,v\,sn'u+sn\,u\,sn'v}{Q},$$

t. j.

$$Z(u+v)-Z(u)-Z(v)=k^2\,sn\,u\,sn\,v\,sn(u+v).\tag{A}$$

Podobně obdržíme pro funkci

$$Z_1(u)=\int\frac{du}{sn^2u}=Cu-\frac{H'(u)}{H(u)},$$

(kde integrační stálá určena podmínkou, aby funkce byla lichá) na základě rovnice (1)

$$Z_1(u+v)-Z_1(u)-Z_1(v)=\frac{\dfrac{cn\,u\,dn\,u}{sn^3 u}-\dfrac{cn\,v\,dn\,v}{sn^3 v}}{\dfrac{1}{sn^2 u}-\dfrac{1}{sn^2 v}}. \tag{B}$$

Odečteme-li výsledky (A) a (B) užívajíce identity

$$Z_1(u)-Z(u)=-\frac{sn'u}{sn\,u}=-\frac{cn\,u\,dn\,u}{sn\,u},$$

vyjde

$$\frac{sn'(u+v)}{sn(u+v)}=\frac{sn'u}{sn\,u}+\frac{sn'v}{sn\,v}-\frac{sn'u\,sn^3 v-sn'v\,sn^3 u}{sn\,u\,sn\,v\,(sn^2 v-sn^2 u)}+$$
$$+k^2\,sn\,u\,sn\,v\,sn(u+v).$$

První tři členy vpravo dají

$$\frac{sn\,u\,sn'u-sn\,v\,sn'v}{sn^2 u-sn^2 v},$$

takže máme konečně vzorec

$$\frac{sn'(u+v)}{sn(u+v)}=\frac{sn\,u\,sn'u-sn\,v\,sn'v}{sn^2 u-sn^2 v}+k^2\,sn\,u\,sn\,v\,sn(u+v). \tag{C}$$

Logaritmickým derivováním vzorce (4*) vůči v obdržíme po odstranění -2

$$k^2\frac{sn\,v\,cn\,v\,dn\,v\,sn^2 u}{1-k^2 sn^2 v\,sn^2 u}=\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)}+\frac{1}{2}\frac{\Theta'(u-v)}{\Theta(u-v)}-\frac{1}{2}\frac{\Theta'(u+v)}{\Theta(u+v)}.$$

Integrujme obě strany vůči u od $u=0$:

$$k^2\int_0\frac{sn\,v\,cn\,v\,dn\,v\,sn^2 u\,du}{1-k^2 sn^2 v\,sn^2 u}=\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)}u+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-v)}{\Theta(u+v)}. \tag{5}$$

Jacobi označil tuto funkci $\Pi(u,v)$; klademe-li

$$k\,sn\,v=c,\quad sn\,u=x,\quad k^2\,sn\,v\,sn'v=b,$$

zní levá strana $[b^2=c^2(1-c^2)(k^2-c^2)]$

$$b\int_0\frac{x^2\,dx}{(1-c^2x^2)\sqrt{R(x)}}=\frac{b}{c^2}\int_0\frac{dx}{(1-c^2x^2)\sqrt{R(x)}}-\frac{b}{c^2}u,$$

takže máme pro třetiřadý integrál eliptický

$$\int_0\frac{dx}{(1-c^2x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=u+\frac{c^2}{b}\Pi(u,v),$$
$$sn\,v=\frac{c}{k},\quad b=k^2\,sn\,v\,sn'v. \tag{5⁰}$$

Definice

$$\Pi(u,v) = u\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-v)}{\Theta(u+v)}$$

dává bezprostředně

$$\Pi(u,v) - \Pi(v,u) = u\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} - v\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = v\,Z(u) - u\,Z(v).$$

Dva třetiřadé integrály, v nichž vyměněny argument u a parametr v, mají rozdíl vyjádřený dvěma integrály druhořadými.

Změňme označení:

$$sn\,v = c,\quad sn'\,v = \sqrt{R(c)}.$$

$$\Pi(u,v) = k^2 c\sqrt{R(c)}\int_0 \frac{x^2\,dx}{(1-k^2c^2x^2)\sqrt{R(x)}},$$

$$v\,Z(u) = \int_0 \frac{dc}{\sqrt{R(c)}}\int_0 \frac{k^2x^2\,dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

Vztah tedy zní po krácení na k^2:

$$c\sqrt{R(c)}\int_0 \frac{x^2\,dx}{(1-k^2c^2x^2)\sqrt{R(x)}} - x\sqrt{R(x)}\int_0 \frac{c^2\,dc}{(1-k^2c^2x^2)\sqrt{R(c)}} =$$

$$= \int_0 \frac{dc}{\sqrt{R(c)}}\int_0 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{R(x)}} - \int_0 \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}\int_0 \frac{c^2\,dc}{\sqrt{R(c)}}.$$

§ 7. Trigonometrický rozvoj funkce $sn\,u$.

Funkce $sn\,u$ má na iK' pól s residuem $\frac{1}{k}$, takže se tam chová jako

$$\frac{1}{k(u-iK')}.$$

Položme

$$u = \frac{2K\psi}{\pi},\quad sn\,u = f(\psi);$$

$$f(\psi+\pi) = -f(\psi),\quad f(\psi+2\pi) = f(\psi).$$

Potřebujeme ještě funkci, která má v určitém horizontálním pásu stejné póly s týmiž residuy; poněvadž v okolí $u = iK'$, t. j. $\psi = \frac{\tau\pi}{2}$, jest

$$f(\psi) = \frac{\pi}{2Kk\left(\psi - \frac{\tau\pi}{2}\right)} + \dots$$

bude tomuto požadavku hověti funkce

$$f_o(\psi)=\frac{\pi}{2Kk\sin(\psi-\frac{\tau\pi}{2})},$$

která mimo to má tytéž vlastnosti

$$f_o(\psi+\pi)=-f_o(\psi),\quad f_o(\psi+2\pi)=f_o(\psi),$$

takže uvnitř pásu

$$0\leqq \text{Im.}\,\psi\leqq 2K'.$$

je funkce

$$\Phi(\psi)=i[f(\psi)-f_o(\psi)]$$

všude synektická.

Máme tedy při applikaci základní věty § 2, vzorce (4^0), klásti

$$\gamma=0,\quad \omega=\tau\pi,\quad \varrho=q,$$

a určiti reálnou část U funkce $\Phi(\psi)$ na přímkách Ox a její rovnoběžce bodem $\eta=\tau\pi$, t. j. třeba klásti

$$\psi=\Theta,\quad U=\varphi_1(\Theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_1^\infty(a_\nu\cos\nu\Theta+b_\nu\sin\nu\Theta);$$

$$\psi=\tau\pi+\Theta,\quad U=\varphi_2(\Theta)=\frac{a'_o}{2}+\sum_1^\infty(a'_\nu\cos\nu\Theta+b'_\nu\sin\nu\Theta).$$

Reálná část funkce $\Phi(\psi)$ na ose reálné splývá s reálnou částí $-if_0(\Theta)$, poněvadž $if(\Theta)$ je ryze pomyslné, podobně na přímce $\psi=\tau\pi+\Theta$ splývá U s reálnou částí $-if_0(\tau\pi+\Theta)$.

A tu jest

$$-if_0(\Theta)=\frac{\pi}{Kk(e^{i\Theta-\frac{\tau\pi i}{2}}-e^{-i\Theta+\frac{\tau\pi i}{2}})}=\frac{\pi}{Kk}\frac{q^{\frac{1}{2}}e^{-i\Theta}}{1-qe^{-2i\Theta}}=$$

$$=\frac{\pi}{Kk}\Sigma q^{\frac{\nu}{2}}e^{-\nu i\Theta},\qquad (\nu=1,3,5,7,\ldots)$$

tedy reálná část

$$\varphi_1(\Theta)=\frac{\pi}{Kk}\Sigma q^{\frac{\nu}{2}}\cos\nu\Theta;\quad b_o=b_1=b_2=\ldots=0,\ a_{2\mu}=0,$$

$$a_\nu=\frac{\pi}{Kk}q^{\frac{\nu}{2}},\qquad (\nu=1,3,5,\ldots).$$

Dále jest

$$-if_0(\tau\pi+\Theta)=\frac{\pi}{Kk(e^{i\Theta+\frac{\tau\pi i}{2}}-e^{-i\Theta-\frac{\tau\pi i}{2}})}=-\frac{\pi}{Kk}\frac{q^{\frac{1}{2}}e^{i\Theta}}{1-qe^{2i\Theta}}=$$

$$=-\frac{\pi}{Kk}\sum_\nu q^{\frac{\nu}{2}}e^{\nu i\Theta},\qquad (\nu=1,3,5,\ldots)$$

a reálná část

$$\varphi_2(\Theta) = -\frac{\pi}{Kk}\sum_\nu q^{\frac{\nu}{2}} \cos\nu\Theta;\; b'_\mu = 0, \quad a'_{2\mu} = 0,$$

$$a'_\nu = -\frac{\pi}{Kk} q^{\frac{\nu}{2}}, \qquad (\nu = 1, 3, 5, \ldots).$$

Naše funkce $\Phi(\psi)$ má tedy v uvažovaném pásu rozvoj dle (5) § 2, ježto $r_1 = 1$, $r_2 = q$:

$$i[f(\psi) - f_0(\psi)] =$$

$$A' + \frac{\pi}{Kk}\left\{\sum_\nu \frac{q^{\frac{\nu}{2}}}{1 - q^{2\nu}}(1 + q^\nu)e^{i\nu\psi} - \sum_\nu \frac{q^{\frac{\nu}{2}}}{1 - q^{2\nu}}(q^{2\nu} + q^\nu)e^{-i\nu\psi}\right\} =$$

$$= A' + \frac{\pi}{Kk}\left\{2i\sum_\nu \frac{q^{\frac{\nu}{2}}}{1 - q^\nu}\sin\nu\psi + \sum q^{\frac{\nu}{2}} e^{-i\nu\psi}\right\}; \tag{1}$$

přičteme-li na obou stranách

$$if_0(\psi) = -\frac{\pi}{Kk}\sum q^{\frac{\nu}{2}} e^{-\nu i\psi},$$

zjednoduší se výsledek — po substituci $\psi = \frac{u\pi}{2K}$ —

$$sn\, u = \frac{2\pi}{Kk}\sum_\nu \frac{q^{\frac{\nu}{2}}}{1 - q^\nu}\sin\frac{\nu u\pi}{2K}, \; (\nu = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots); \tag{1*}$$

konstanta A' vypadne, poněvadž obě strany musí býti funkce liché.

V nehotovém vzorci (1) lze klásti $\psi + \frac{\tau\pi}{2}$ za ψ;

$$f\left(\psi + \frac{\tau\pi}{2}\right) = sn(u + iK') = \frac{1}{k\, sn\, u},$$

$$f_0\left(\psi + \frac{\tau\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2Kk\sin\psi},$$

takže bude první tvar pravé strany (1) po substituci

$$i(f - f_0) = \frac{2\pi i}{Kk}\sum \frac{q^\nu}{1 - q^\nu}\sin\nu\psi,$$

a tím vychází

$$\frac{1}{sn\, u} = \frac{\pi}{2K\sin\frac{u\pi}{2K}} + \frac{2\pi}{K}\sum_\nu \frac{q^\nu}{1 - q^\nu}\sin\frac{\nu u\pi}{2K}, \; (\nu = 1, 3, 5, 7, \ldots). \tag{2}$$

Dosazením $u + K$ za u vychází z (1*) a (2) vzhledem ke známému vztahu

$$sn(u+K)=\frac{cn\,u}{dn\,u}$$

$$\frac{cn\,u}{dn\,u}=\frac{2\pi}{Kk}\Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\frac{q^{\frac{\nu}{2}}}{1-q^{\nu}}\cos\frac{\nu u\pi}{2K},\ (\nu=1,3,5,\ldots) \tag{3}$$

$$\frac{dn\,u}{cn\,u}=\frac{\pi}{2K\cos\frac{u\pi}{2K}}+\frac{2\pi}{K}\Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\frac{q^{\nu}}{1-q^{\nu}}\cos\frac{\nu u\pi}{2K},(\nu=1,3,5,7\ldots) \tag{4}$$

Derivování podá

$$\frac{k'^2\,sn\,u}{cn^2 u}=\frac{\pi^2}{4K^2}\frac{\sin\frac{u\pi}{2K}}{\cos^2\frac{u\pi}{2K}}-\frac{\pi^2}{K^2}\Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\frac{\nu q^{\nu}}{1-q^{\nu}}\sin\frac{\nu u\pi}{2K}. \tag{4'}$$

Derivace na $u=0$ dává podle vzorů (18) a (21) § 4

$$\vartheta_0^4\,\vartheta_3^2=1-4\sum_{\nu}(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\frac{\nu^2 q^{\nu}}{1-q^{\nu}},\qquad (\nu=1,3,5,\ldots).$$

V (1*) pišme

$$e^{\frac{u\pi i}{2K}}=\xi,\quad 2i\sin\frac{\nu u\pi}{2K}=\xi^{\nu}-\xi^{-\nu},$$

a dále

$$\frac{q^{\frac{\nu}{2}}}{1-q^{\nu}}=\sum_{\mu}q^{\frac{\mu\nu}{2}},\qquad (\mu=1,3,5,7,\ldots)$$

a ve výsledku

$$\frac{iKk}{\pi}sn\,u=\sum_{\mu,\nu}q^{\frac{1}{2}\mu\nu}(\xi^{\nu}-\xi^{-\nu}) \tag{5}$$

proveďme sčítání vůči ν:

$$\frac{iKk}{\pi}sn\,u=\sum_{\mu}\left(\frac{q^{\frac{\mu}{2}}\xi}{1-q^{\mu}\xi^2}-\frac{q^{\frac{\mu}{2}}\xi^{-1}}{1-q^{\mu}\xi^{-2}}\right) \tag{5a}$$

$$(\xi=e^{\frac{u\pi i}{2K}};\ \mu=1,3,5,\ldots).$$

Pravou stranu lze přetvořiti pomocí identity

$$-\frac{q^{\frac{\mu}{2}}\xi^{-1}}{1-q^{\mu}\xi^{-2}}=\frac{q^{-\frac{\mu}{2}}\xi}{1-q^{-\mu}\xi^2}$$

a objeví se

$$\frac{iKk}{\pi}sn\,u=\sum_{\mu}\frac{q^{\frac{\mu}{2}}\xi}{1-q^{\mu}\xi^2}=\frac{i}{2}\sum_{\mu}\frac{1}{\sin\frac{u+\mu iK'}{2K}\pi} \tag{5b}$$

$$u=\pm1,\pm3,\pm5,\pm7,\ldots$$

Tak nacházíme řady konvergentní v celé rovině a rozklady v částečné zlomky: $(\mu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \ldots)$

$$
\begin{aligned}
K k \, sn\, u &= -i\pi \sum_{\mu} \frac{q^{\frac{\mu}{2}} \xi}{1 - q^{\mu} \xi^2} = \frac{\pi}{2} \sum_{\mu} \frac{1}{\sin \frac{u + \mu i K'}{2K} \pi}, \\
\frac{K}{sn\, u} &= -i\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{q^{\nu} \xi}{1 - q^{2\nu} \xi^2} = \frac{\pi}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sin \frac{u + 2\nu i K'}{2K} \pi}, \\
K k \frac{cn\, u}{dn\, u} &= \pi \sum_{\mu} \frac{q^{\frac{\mu}{2}} \xi}{1 + q^{\mu} \xi^2} = \frac{\pi}{2} \sum_{\mu} \frac{1}{\cos \frac{u + \mu i K'}{2K} \pi}, \\
K \frac{dn\, u}{cn\, u} &= \pi \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{q^{\nu} \xi}{1 + q^{2\nu} \xi^2} = \frac{\pi}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cos \frac{u + 2\nu i K'}{2K} \pi},
\end{aligned}
\qquad (5^*)
$$

při čemž veskrz

$$\xi = e^{\frac{u\pi i}{2K}}.$$

Je záhodno provésti verifikace jednoho z těchto vzorců, na př. druhého.

Funkce

$$f(u) = -2i \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{q^{\nu} \xi}{1 - q^{2\nu} \xi^2} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sin \frac{u + 2\nu i K'}{2K} \pi}$$

má vesměs jednoduché póly $u = 2mK - 2\nu i K'$, takže součin

$$f_1(u) = f(u)\, H(u)$$

je funkce veskrz synektická; poněvadž

$$f(u + 2iK') = f(u), \; f(u + 2K) = -f(u),$$

bude

$$f_1(u + 2iK') = -e^{\frac{\pi i}{K}(u + 2K')} f_1(u), \; f_1(u + 2K) = f_1(u),$$

což jsou charakteristické vlastnosti funkce $\Theta(u)$. Poněvadž se hledíme vyhnouti těmto metodám, ukážeme přímo, že funkce $f(u)$ vymizí na $u = iK'$; je to samozřejmé, neboť v součtu

$$f(iK') = \sum \frac{1}{\sin \frac{(2\nu + 1) iK'}{2K} \pi} = \sum_{\mu} \frac{1}{\sin \frac{\mu i K' \pi}{2K}}$$

se členy po dvou ruší.

Tudíž je součin

$$F(u) = \frac{f(u)\, H(u)}{\Theta(u)}$$

funkce synektická na rovnoběžníku $(O; 2K, 2iK')$. Na reálné ose jest $f(u), H(u), \Theta(u)$ reálné, tedy též $F(u)$; pro ryze pomyslná u je pak $f(u)$ a $H(u)$ je ryze pomyslné, $\Theta(u)$ reálné, tudíž $F(u)$ reálné.

Funkce synektická $F(u)$ má periody $2K$, $2iK'$ a je na okraji rovnoběžníka reálná, tudíž je veličinou stálou:

$$f(u) = A\frac{\Theta(u)}{Hu)}.$$

Pro nekonečně malá u jest dle definice

$$f(u) = \frac{1}{\sin\frac{u\pi}{2K}} + \mathfrak{P}(u) = \frac{2K}{\pi u} + \mathfrak{P}_1(u)$$

$$A\frac{\Theta(u)}{H(u)} = A\frac{\Theta(0)}{H'(0)u} + \mathfrak{P}_2(u),\ H'(0) = \frac{\vartheta_1'}{2K} = \frac{\pi\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2K},$$

$$A\frac{\Theta(0)}{H'(0)} = \frac{2K}{\pi},\ A = \vartheta_2\vartheta_3$$

$$f(u) = \vartheta_2\vartheta_3\frac{\Theta(u)}{H(u)} = \frac{\pi\vartheta_3^2}{\pi}\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\frac{\Theta(u)}{H(u)} = \frac{2K}{\pi}\frac{1}{sn\,u}.$$

Tím zmíněná řada pro $K : sn\,u$ dokázána, a z ní plynou ostatní tři vzorce (5*).

§ 8. Zrychlená konvergence. Aritmetické důsledky.

Obraťme se ještě k dvojnásobné řadě (5). Rozštěpme ji na dvě části I + II, při čemž I obsahuje členy $\mu > \nu$ $(\mu = \nu + 2m)$ a druhá řada II členy $\mu \leqq \nu$ $(\nu = \mu + 2n)$; $m > 0$, $n \geqq 0$.

$$\mathrm{I} = \Sigma q^{\frac{1}{2}\nu^2 + m\nu}(\xi^\nu - \xi^{-\nu}) = 2i\sum_\nu \frac{q^{\frac{1}{2}\nu^2+\nu}}{1-q^\nu}\sin\frac{\nu u\pi}{2K},$$

$$\mathrm{II} = \Sigma q^{\frac{1}{2}\mu^2 + n\mu}(\xi^{\mu+2n} - \xi^{-\mu-2n})$$

$$= \sum_\mu q^{\frac{1}{2}\mu^2}\left\{\frac{\xi^\mu}{1-q^\mu\xi^2} - \frac{\xi^{-\mu}}{1-q^\mu\xi^{-2}}\right\}$$

$$= 2i\Sigma q^{\frac{1}{2}\mu^2}\frac{\sin\mu v\pi - q^\mu\sin(\mu-2)v\pi}{1-2q^\mu\cos 2v\pi + q^{2\mu}};\ v = \frac{u}{2K}.$$

Tak nacházíme rozklad ve dvě řady rychle konvergentní

$$\frac{Kk}{2\pi}sn\,u = \Sigma\frac{q^{\frac{1}{2}\nu^2+\nu}}{1-q^\nu}\sin\nu v\pi +$$

$$+ \Sigma q^{\frac{1}{2}\nu^2}\frac{\sin\nu v\pi - q^\nu\sin(\nu-2)v\pi}{1-2q^\nu\cos 2v\pi + q^{2\nu}}; \tag{6}$$

$$\left(v = \frac{u}{2K},\ \nu = 1, 3, 5, 7, \ldots\right)$$

Vyjádření je všeobecně platné; můžeme je považovati za vztah mezi dvěma transcendentami na pravé straně, neboť jejich povaha je značně složitější než u funkce $sn\,u$.

Položme $u = K$ do (6); po krátké redukci obdrží se

$$\tfrac{1}{4}\vartheta_2^2 = \Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}} q^{\frac{1}{2}\nu^2} \frac{1+q^{2\nu}}{1-q^{2\nu}}, (\nu = 1, 3, 5, \ldots) \tag{a}$$

$$\frac{\frac{1}{4}\vartheta_2^2}{1-q^2} = \Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}} q^{\frac{1}{2}\nu^2} \frac{1+q^{2\nu}}{(1-q^{2\nu})(1-q^2)};$$

$$\frac{q^{2\nu}}{(1-q^{2\nu})(1-q^2)} = \sum_1^\infty \left[\frac{n}{\nu}\right] q^{2n}, \frac{1}{(1-q^{2\nu})(1-q^2)} = \sum_0^\infty \left[\frac{n+\nu}{\nu}\right] q^{2n}$$

$$\frac{\frac{1}{4}\vartheta_2^2}{1-q^2} = \sum_{\nu, n \geqq 0} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} q^{\frac{1}{2}\nu^2} \left\{1 + 2\left[\frac{n}{\nu}\right]\right\} q^{2n}. \tag{b}$$

Buď

$$x^2 + y^2 = 2N, \ N \equiv 1 \ (\text{mod. } 4)$$
$$x, y = 1, 3, 5, \ldots$$

Počet řešení znamenejme $f(N)$; je pak

$$\tfrac{1}{4}\vartheta_2^2 = \Sigma f(N)\, q^{\frac{N}{2}}, \tfrac{1}{4}\frac{\vartheta_2^2}{1-q^2} = \Sigma F(N) q^{\frac{N}{2}},$$

$$F(N) = f(N) + f(N-4) + f(N-8) + f(N-12) + \ldots$$

Na pravé straně součinitel při $q^{\frac{1}{2}N}$ zní

$$(F(N) = \sum_{\nu=1,3,5,\ldots} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \left\{1 + 2\left[\frac{N-\nu^2}{4\nu}\right]\right\},$$

takže máme vztah

$$f(N) + f(N-4) + f(N-8) + f(N-12) + \ldots \tag{c}$$
$$= \sum_{\nu=1,3,5,\ldots} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \left\{1 + 2\left[\frac{N-\nu^2}{4\nu}\right]\right\}.$$

Příklad. $N = 13$ dává na pravo

$$(1 + 2[\tfrac{12}{4}]) - (1 + 2[\tfrac{4}{12}]) = 6;$$

rovnice $x^2 + y^2 = 2.13,\ 2.9,\ 2.5,\ 2$ mají tedy dohromady 6 lichých řešení: Skutečně

$$26 = 1 + 5^2 (2),\ 18 = 3^2 + 3^2 (1), 10 = 1 + 3^2 (2),\ 2 = 1 + 1 (1).$$

Vložme ještě do (4) $u = 0$; máme

$$\frac{2K}{\pi} = \vartheta_3^2 = 1 + 4\Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{q^\nu}{1-q^\nu}, \ (\nu = 1, 3, 5, 7, \ldots). \tag{d}$$

Radu lze převésti na dvojnásobnou

$$4\Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}} q^{\nu k} (k=1, 2, 3,\ldots);$$

člen q^n se vyskytne pro $\nu k=n$, takže $\nu=\delta$ probíhá liché dělitele čísla n, a je pak součinitel při q^n roven součtu
$4\Sigma(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}$, t. j. čtyřnásobné převaze dělitelů $4k+1$ nad děliteli $4k+3$.

Poněvadž

$$\vartheta_3^2=\Sigma q^{x^2+y^2}, (x, y=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3,\ldots)$$

máme větu:

Počet rozkladů čísla n ve dva čtverce (čísel kladných neb záporných) rovná se čtyřnásobné převaze dělitelů čísla n tvaru $4a+1$ nad děliteli tvaru $4a+3$.

Př. $n=65=5.13$; $\delta=1, 5, 13, 65$, rozklady $65=1+8^2=4^2+7^2$ platí za $8+8=16=4.4$ řešení jako $x=\pm 1$, $y=\pm 8$; $x=\pm 8$, $y=\pm 1$.

Ze (3) plyne při $u=0 (\nu=1, 3, 5, 7,\ldots)$

$$\tfrac{1}{4}\vartheta_2^2=\Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\frac{q^{\frac{\nu}{2}}}{1-q^\nu}. \tag{a'}$$

Rovnice vede k výsledku, že ($n\equiv 1$ mod. 4) počet řešení rovnice

$$x^2+y^2=2n$$

kladnými lichými čísly rovná se převaze dělitelů čísla n tvaru $4k+1$ nad děliteli tvaru $4k+3$. Věta jest obsažena v předešlé; podmínka $2n\equiv 2 (8)$ zaručuje totiž lichost obou čísel x, y.

Utvořme v (1*) derivaci na místě $u=0$:

$$1=\frac{\pi^2}{K^2 k}\Sigma\frac{\nu q^{\frac{\nu}{2}}}{1-q^\nu}, \; (\nu=1, 3, 5,\ldots)$$

$$\vartheta_2^2\vartheta_3^2=4\Sigma\frac{\nu q^{\frac{\nu}{2}}}{1-q^\nu}=4\sum_{n=1,3,5,\ldots} f(n)\, q^{\frac{n}{2}}, \tag{e}$$

$f(n)$ součet dělitelů čísla n, n liché.

Na levé straně máme

$$4\sum_{x_1, x_2, y_1, y_2} q^{\frac{x_1^2+x_2^2}{4}+y_1^2+y_2^2} \qquad \begin{pmatrix} x_1, x_2=1, 3, 5,\ldots \\ y_1, y_2=0, \pm 1, \pm 2,\ldots \end{pmatrix}$$

a tedy počet řešení rovnice

$$x_1^2+x_2^2+4(y_1^2+y_2^2)=2n$$

jest vyjádřen funkcí $f(n)$.

V addičním vzorci

$$sn(u+v) = \frac{sn\,u\,sn'\,v + sn\,v\,sn'\,u}{1 - k^2\,sn^2\,u\,sn^2\,v}$$

položme $u = v = \frac{iK'}{2}$; levá strana je ∞, tedy musí

$$k^2\,sn^4\frac{iK'}{2} = 1,\; sn\frac{iK'}{2} = \frac{i}{\sqrt{k}},\; cn\frac{iK'}{2} = \sqrt{\frac{1+k}{k}},\; dn\frac{iK'}{2} = \sqrt{1+k}. \quad (f)$$

Vložme to do (1*); zde bude

$$\sin\frac{\nu u \pi}{2K} = \sin\frac{\nu\tau}{4}\pi = \frac{1}{2i}\left(q^{\frac{\nu}{4}} - q^{-\frac{\nu}{4}}\right) = \frac{i}{2}q^{-\frac{\nu}{4}}\left(1 - q^{\frac{\nu}{2}}\right),$$

$$\frac{q^{\frac{\nu}{2}}}{1-q^{\nu}}\sin\frac{\nu u \pi}{2K} = \frac{i}{2}\,\frac{q^{\frac{\nu}{4}}}{1+q^{\frac{\nu}{2}}},$$

a tak vychází

$$\vartheta_2\vartheta_3 = 2\Sigma\frac{q^{\frac{\nu}{4}}}{1+q^{\frac{\nu}{2}}}; \qquad \nu = 1, 3, 5, \ldots \qquad (g)$$

Pro $u = \frac{iK'}{2}$ máme

$$\frac{cn\,u}{dn\,u} = \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2},\quad \frac{q^{\frac{\nu}{2}}}{1-q^{\nu}}\cos\frac{\nu u \pi}{2K} = \frac{1}{2}\,\frac{q^{\frac{\nu}{4}}}{1-q^{\frac{\nu}{2}}},$$

a tedy dle (3)

$$\vartheta_2\vartheta_3 = 2\Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\frac{q^{\frac{\nu}{4}}}{1-q^{\frac{\nu}{2}}},$$

což se dá snadno vyvodit z hořejšího výsledku.

Dále máme

$$dn(K-u) = \frac{k'}{dn\,u},$$

tedy

$$dn\frac{K}{2} = \sqrt{k'},\; sn\frac{K}{2} = \frac{\sqrt{1-k'}}{k},\; cn\frac{K}{2} = \frac{\sqrt{k'(1-k')}}{k}; \qquad (h)$$

tyto tři veličiny lze též psáti

$$\sqrt{k'},\; \frac{1}{\sqrt{1+k'}},\; \sqrt{\frac{k'}{1+k'}}.$$

Pro $u = \frac{K}{2}$ pak $\sin\frac{\nu u \pi}{2K} = \sin\frac{\nu\pi}{4} = \frac{\varepsilon_\nu}{\sqrt{2}}$, kde řada znamének ε_1, ε_3, ε_5, $\varepsilon_7, \ldots$ sestává z periody 1, 1, — 1, — 1, takže

$$\varepsilon_\nu = (-1)^{\frac{\nu-1}{2} + \frac{\nu^2-1}{8}}.$$

Z rovnice (1*) tedy plyne pro $u=\frac{K}{2}$

$$\vartheta_3\sqrt{\vartheta_3^2-\vartheta_0^2}=2\sqrt{2}\,\Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}+\frac{\nu^2-1}{8}}\frac{q^{\frac{\nu}{2}}}{1-q^\nu};\quad \nu=1,3,5,7,\ldots \tag{i}$$

a řada (2) podá

$$\vartheta_3\sqrt{\vartheta^2_3+\vartheta^2_0}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,\Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}+\frac{\nu^2-1}{8}}\frac{q^\nu}{1-q^\nu};\ \nu=1,3,5\,7,\ldots \tag{j}$$

Pomocí addiční věty a hořejších hodnot funkcí pro $\frac{K}{2}$ a $\frac{iK'}{2}$ obdržíme

$$sn\,\frac{K+iK'}{2}=\sqrt{\frac{1-k'}{k}}\,\frac{1+k+ik'}{1+k-k'}; \tag{k}$$

dále jest pro $u=\frac{K+iK'}{2}$

$$q^{\frac{\nu}{2}}\sin\frac{\nu u\pi}{2K}=q^{\frac{\nu}{2}}\sin\frac{\pi}{4}(\nu+\nu\tau)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^{\frac{\nu-1}{2}+\frac{\nu^2-1}{8}}.\ q^{\frac{\nu}{4}}\frac{1+q^{\frac{\nu}{2}}}{2}+$$
$$+i\frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^{\frac{\nu^2-1}{8}}q^{\frac{\nu}{4}}\frac{1-q^{\frac{\nu}{2}}}{2}$$

a tedy plyne z (1)

$$\sqrt{\frac{1-k'}{k}}\,\frac{1+k+ik'}{1+k-k'}=\frac{\sqrt{2}}{\vartheta_2^2}\Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}+\frac{\nu^2-1}{8}}\frac{q^{\frac{\nu}{4}}}{1-q^{\frac{\nu}{2}}}+$$
$$+\frac{i\sqrt{2}}{\vartheta_2^2}\Sigma(-1)^{\frac{\nu^2-1}{8}}\frac{q^{\frac{\nu}{4}}}{1+q^{\frac{\nu}{2}}},$$

z čehož odloučením částí reálné a pomyslné po dosazení hodnot

$$\left.\begin{aligned}&\vartheta_2\frac{(\vartheta_3^2+\vartheta_2^2)\sqrt{\vartheta_3^2-\vartheta_0^2}}{\vartheta_3^2+\vartheta_2^2-\vartheta_0^2}=\sqrt{2}\,\Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}+\frac{\nu^2-1}{8}}\frac{q^{\frac{\nu}{4}}}{1-q^{\frac{\nu}{2}}},\\ &\frac{\vartheta_2\vartheta_0^2\sqrt{\vartheta_3^2-\vartheta_0^2}}{\vartheta_3^2+\vartheta_2^2-\vartheta_0^2}=\sqrt{2}\,\Sigma(-1)^{\frac{\nu^2-1}{8}}\frac{q^{\frac{\nu}{4}}}{1+q^{\frac{\nu}{2}}};\ \nu=1,3,5,7,\ldots\end{aligned}\right\} \tag{l}$$

§ 9. Transformace.

Konečně integrujme rovnici (1*) od $u=0$:

$$\int_0 sn\,u\,du=\frac{4}{k}\,\Sigma\,\frac{q^{\frac{\nu}{2}}}{1-q^\nu}\cdot\frac{1-\cos\frac{\nu u\pi}{2K}}{\nu};$$

integrál

$$J = \int_0 sn\,u\,du = \int_0 \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

se po substituci $x^2 = z$ převede na

$$J = \frac{1}{2}\int_0 \frac{dz}{(1-z)\sqrt{\frac{1-k^2z}{1-z}}}.$$

Položme

$$\sqrt{\frac{1-k^2z}{1-z}} = t;\quad z = \frac{t^2-1}{t^2-k^2},\quad (1-z)t = \frac{k'^2t}{t^2-k^2},\quad dz = 2k'^2\frac{t\,dt}{(t^2-k^2)^2};$$

$$J = \int_1 \frac{dt}{t^2-k^2} = \frac{1}{2k}\log\frac{t-k}{t+k} - \frac{1}{2k}\log\frac{1-k}{1+k}.$$

$$t = \frac{dn\,u}{cn\,u},$$

$$\int_0 sn\,u\,du = \frac{1}{2k}\log\frac{dn\,u - k\,cn\,u}{dn\,u + k\,cn\,u} + \frac{1}{2k}\log\frac{1+k}{1-k} =$$

$$= \frac{1}{k}\log\frac{1+k}{k'} - \frac{1}{k}\log\frac{dn\,u + k\,cn\,u}{k'},$$

a konečně

$$k\int_0 sn\,u\,du = \log\frac{1+k}{dn\,u + k\,cn\,u} =$$

$$= 4\sum_\nu \frac{1}{\nu}\frac{q^{\frac{\nu}{2}}}{1-q^\nu}\left[1 - \cos\frac{\nu u\pi}{2K}\right]. \tag{7}$$

$$dn\,u + k\,cn\,u = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3{}^2}\frac{\vartheta_3\vartheta_3(v) + \vartheta_2\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)},\quad v = \frac{u}{2K}.$$

Pravou stranu (7) lze psáti ($\mu, \nu = 1, 3, 5, \ldots$)

$$4\sum \frac{1}{\nu} q^{\frac{\mu\nu}{2}}\left(1 - \frac{\xi^\nu + \xi^{-\nu}}{2}\right),\quad \xi = e^{\frac{u\pi i}{2K}},$$

a tento výraz dle známé identity

$$\sum \frac{1}{\nu} z^\nu = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}$$

má hodnotu

$$2\sum_\mu \log\frac{1+q^{\frac{\mu}{2}}}{1-q^{\frac{\mu}{2}}} - \sum \log\frac{(1+q^{\frac{\mu}{2}}\xi)(1+q^{\frac{\mu}{2}}\xi^{-1})}{(1-q^{\frac{\mu}{2}}\xi)(1-q^{\frac{\mu}{2}}\xi^{-1})} =$$

$$= \log \frac{\vartheta_3(0|\frac{\tau}{2})}{\vartheta_0(0|\frac{\tau}{2})} - \log \frac{\vartheta_3(\frac{u}{4K}|\frac{\tau}{2})}{\vartheta_0(\frac{u}{4K}|\frac{\tau}{2})}, \qquad \tau = \frac{iK'}{K},$$

takže

$$k\int_0 sn\,u\,du = -\log dn\left(\frac{Lu}{2K}, l\right), \tag{7^1}$$

kde l a L značí modul a poloperiodu pro parametr $\frac{\tau}{2}$:

$$\sqrt{l} = \frac{\vartheta_2(0|\frac{\tau}{2})}{\vartheta_3(0|\frac{\tau}{2})}, \quad 2L = \pi\,\vartheta_3^2\left(0|\frac{\tau}{2}\right);$$

$$\frac{dn\,u + k\,cn\,u}{1+k} = dn\left(\frac{Lu}{2K}, l\right). \tag{7^2}$$

Poznamenejme ještě výsledek (7) pro $u = K$:

$$k\int_0^K sn\,u\,.\,du = \log\frac{1+k}{k'} = 4\sum_\nu \frac{1}{\nu}\,\frac{q^{\frac{\nu}{2}}}{1-q^\nu}; \quad \nu = 1, 3, 5, 7, \ldots$$

Ze (7^2) pro $u = 2K$:

$$l' = \frac{1-k}{1+k}, \quad l = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}.$$

(7^2) vymizí pro

$$\frac{Lu}{2K} = L + iL' = L\left(1+\frac{\tau}{2}\right), \text{ tedy pro } u = 2K + iK';$$

$$dn(u+iK') = -i\frac{cn\,u}{sn\,u}, \quad cn(u+iK') = -i\frac{dn\,u}{k\,sn\,u};$$

$$dn(u+iK') + k\,cn(u+iK') = -i\frac{cn\,u + dn\,u}{sn\,u};$$

pro $u = 2K$ vymizí čitatel i jeho derivace, čímž věc potvrzena. Derivace (7^2) dává

$$k\,sn\,u\frac{dn\,u + k\,cn\,u}{1+k} = \frac{l^2 L}{2K}\,sn(v,l)\,cn(v,l) = k\,sn\,u\,.\,dn(v,l);\, v = \frac{Lu}{2K}. \tag{7^3}$$

Zde porovnáme hodnoty derivace na $u = 0$:

$$\left(\frac{lL}{2K}\right)^2 = k,$$

z čehož vychází

$$\frac{L}{2K} = \frac{\sqrt{k}}{l} = \frac{1+k}{2}.$$

Rovnice (7^3) tedy zní

$$sn(u,k)=\frac{2}{1+k}\frac{sn(v,l)\,cn(v,l)}{dn(v,l)};\quad v=\frac{1+k}{2}u. \tag{7^4}$$

Znamená-li se

$$sn(u,k)=x,\quad sn(v,l)=y,$$

vyjadřuje (7^4) transformaci integrálů

$$\int_0 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\frac{2}{1+k}\int_0 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}},$$
$$x=\frac{2}{1+k}\frac{y\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-l^2y^2}}. \tag{7^5}$$

Transformace (7^5) jest Landenova. Abychom ji uvedli na obvyklý tvar, položme $z=x^2$, $s=y^2$, takže

$$z=\frac{4}{(1+k)^2}\frac{s(1-s)}{1-l^2s},\ l=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}. \tag{α}$$

Odtud

$$(1-z)(1+k)^2(1-l^2s)=(1-l^2s)(1+k)^2-4s+4s^2=$$
$$=4s^2-4(1+k)s+(1+k)^2=(1+k-2s)^2,$$

to jest

$$1-z=\frac{(1+k-2s)^2}{(1+k)^2(1-l^2s)}; \tag{β}$$

podobně

$$1-k^2z=\frac{\left(1-\frac{2k}{1+k}s\right)^2}{1-l^2s}.$$

Dělením (α) a (β) máme

$$\frac{z}{1-z}=\frac{4s(1-s)}{(1+k-2s)^2},$$

a odtud

$$\operatorname{tg}\operatorname{am}u=\frac{2\,sn v\,cn v}{1+k-2sn^2v}.$$

Znamenáme-li tedy amplitudy

$$\operatorname{am}(u,k)=\varphi,\quad \operatorname{am}(v,l)=\psi,$$

máme transformační vzorec (Landen a Legendre):

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin 2\psi}{k+\cos 2\psi}\ \text{aneb}\ \sin(2\psi-\varphi)=k\sin\varphi,$$
$$\int_0 \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{2}{1+k}\int_0 \frac{d\psi}{\sqrt{1-l^2\sin^2\psi}},\quad l=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}. \tag{L}$$

S ním setkáme se ještě při otázce číselného stanovení elliptických integrálů.

Při té příležitosti vyložme ještě blíže transformaci, kterou se převádí modul k v modul doplňkový k'.

Při přechodu k v modul k' vymění se integrály K, K', takže nový parametr τ' příslušný k modulu k' má hodnotu

$$\tau' = \frac{iK}{K'} = -\frac{1}{\tau}$$

a vychází vztah

$$K\left(\frac{-1}{\tau}\right) = K'(\tau) \equiv \frac{\tau}{i} K(\tau),$$

to jest

$$\vartheta_3^2\left(0 \middle| \frac{-1}{\tau}\right) = \frac{\tau}{i} \vartheta_3^2(0|\tau); \quad \vartheta_3(0|\tau) = \sqrt{\frac{i}{\tau}}\, \vartheta_3\left(0 \middle| \frac{-1}{\tau}\right). \tag{8}$$

Dále

$$k\left(\frac{-1}{\tau}\right) = k'(\tau), \quad k'\left(\frac{-1}{\tau}\right) = k(\tau),$$

tedy

$$\frac{\vartheta_2\left(0 \middle| -\frac{1}{\tau}\right)}{\vartheta_3\left(0 \middle| -\frac{1}{\tau}\right)} = \frac{\vartheta_0(0|\tau)}{\vartheta_3(0|\tau)},$$

tedy dle (8)

$$\vartheta_0(0|\tau) = \sqrt{\frac{i}{\tau}}\, \vartheta_2\left(0 \middle| \frac{-1}{\tau}\right), \vartheta_2(0|\tau) = \sqrt{\frac{i}{\tau}}\, \vartheta_0\left(0 \middle| \frac{-1}{\tau}\right). \tag{8^1}$$

Veličina

$$f(v) = \vartheta_3\left(\frac{v}{\tau} \middle| \frac{-1}{\tau}\right),$$

má vlastnosti

$$f(v-1) = f(v)\, e^{-\frac{\pi i}{\tau}(2v-1)}, \quad f(v+\tau) = f(v).$$

Můžeme utvořiti součin

$$F(v) = e^{cv^2} f(v),$$

pro nějž platí

$$F(v-1) = F(v);$$

je totiž

$$F(v-1) = F(v)\, e^{c(-2v+1) - \frac{\pi i}{\tau}(2v-1)}$$

a stačí voliti

$$c + \frac{\pi i}{\tau} = 0.$$

Máme tedy

$$F(v) = e^{-\frac{\pi i}{\tau} v^2}\, \vartheta_3\left(\frac{v}{\tau} \middle| \frac{-1}{\tau}\right),$$

$$F(v-1) = F(v), \quad F(v+\tau) = e^{-\pi i(2v+\tau)} F(v),$$

což jsou vlastnosti funkce $\vartheta_3(v|\tau)$.

Podíl

$$G(v) = \frac{F(v)}{\vartheta_3(v|\tau)}$$

je pro ryze pomyslná τ reálný při reálném v, poněvadž jeho složky jsou reálné, dále pro ryze pomyslná v je $F(v)$ reálné a také $\vartheta_3(v)$; mimo to má $G(v)$ periody 1 a τ, takže jest $G(v)$ na obvodě rovnoběžníka $(O;\ 1,\ \tau)$ reálné. Je v něm však také synektické, ježto čitatel vymizí na všech místech

$$\frac{v}{\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\tau} + \nu\right), \text{ t. j. } v = \frac{\mu + \nu\tau}{2}, \quad (\mu,\ \nu = \pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5, \ldots$$

na nichž vymizí jmenovatel. Z toho vychází $G(v) =$ konst.

Poněvadž pak

$$G(0) = \frac{\vartheta_3\left(0 \,\Big|\, \frac{-1}{\tau}\right)}{\vartheta_3(0|\tau)} = \sqrt{\frac{\tau}{i}},$$

máme hledaný vztah

$$\vartheta_3(v|\tau) = \sqrt{\frac{i}{\tau}}\, e^{-\frac{\pi i}{\tau} v^2}\, \vartheta_3\left(\frac{v}{\tau} \,\Big|\, \frac{-1}{\tau}\right). \tag{8^2}$$

Ve vzorcích našich dlužno bráti odmocniny $\sqrt{\frac{i}{\tau}}$, $\sqrt{\frac{\tau}{i}}$ kladně.

Stejně bychom dokázali vzorce

$$\vartheta_0(v|\tau) = \sqrt{\frac{i}{\tau}}\, e^{-\frac{\pi i}{\tau} v^2}\, \vartheta_2\left(\frac{v}{\tau} \,\Big|\, \frac{-1}{\tau}\right), \tag{8^3}$$

$$\vartheta_2(v|\tau) = \sqrt{\frac{i}{\tau}}\, e^{-\frac{\pi i}{\tau} v^2}\, \vartheta_0\left(\frac{v}{\tau} \,\Big|\, \frac{-1}{\tau}\right),$$

$$\vartheta_1(v|\tau) = i\sqrt{\frac{i}{\tau}}\, e^{-\frac{\pi i}{\tau} v^2}\, \vartheta_1\left(\frac{v}{\tau} \,\Big|\, \frac{-1}{\tau}\right), \tag{8^4}$$

které ostatně vycházejí přímo z (8^2) substitucí $v + \frac{1}{2}$, $v + \frac{\tau}{2}$.

* * *

Při Landenově transformaci, kterou se integrál (p. 61)

$$F(k, \varphi) = \int_0 \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

převádí na integrál $F(l, \varphi)$ s modulem

$$l = k\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{2\sqrt{k}}{1+k} \text{ vzorcem } F(k, \varphi) = \frac{2}{1+k} F(l, \psi),$$

můžeme nový integrál přetvořiti týmž způsobem; tak tvoříme moduly $k_1, k_2, \ldots. k_n, \ldots.$ a amplitudy $\varphi_1, \varphi_2, \ldots. \varphi_n, \ldots.$

$$\sin(2\varphi_n - \varphi_{n-1}) = k_{n-1}\sin\varphi_{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots; \ \varphi_0 = \varphi),$$

načež

$$F(k, \varphi) = \frac{2}{1+k}\,\frac{2}{1+k_1}\cdots\frac{2}{1+k_{n-1}}F(k_n, \varphi_n) =$$
$$= \frac{k_n}{\sqrt{k}}\sqrt{k_1 k_2 \ldots. k_{n-1}}\; F(k_n, \varphi_n).$$

Moduly k_n se při tom rychle blíží jednotce, neboť

$$k_n = k\left(\frac{\tau}{2^n}\right) = k'\left(-\frac{2^n}{\tau}\right) = \left(\frac{1 - 2\mathfrak{q}^m + 2\mathfrak{q}^{4m} - \ldots}{1 + 2\mathfrak{q}^m + 2\mathfrak{q}^{4m} + \ldots}\right)^2, \ \mathfrak{q} = e^{-\frac{\pi i}{\tau}}, m = 2^n.$$

* * *

Pro integrály

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \ K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\varphi}},$$
$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi, \ E' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k'^2\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

známe vztahy

$$2K = \pi\vartheta_3^2, \ iK' = \tau K,$$
$$E = K - CK, \ C = \frac{\vartheta_0''}{4K^2\vartheta_0},$$

tedy

$$E = K - \frac{\vartheta_0''}{4K\vartheta_0}. \qquad (\alpha)$$

Zbývá ještě vyjádřiti

$$E' = K' - \frac{\vartheta_0''(0|\frac{-1}{\tau})}{4K'\vartheta_0(0|\frac{-1}{\tau})}$$

funkcemi parametru τ. Znamenáme-li $\frac{1}{\tau} = \tau_1$, máme

$$\vartheta_0(v|\tau_1) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\,\vartheta_2(\tau v|\tau)\, e^{v^2\tau\pi i},$$

tedy po dvojnásobném derivování logaritmu na $v = 0$

$$\frac{\vartheta_0''(0|\tau_1)}{\vartheta_0(0|\tau_1)} = 2\tau\pi i + \tau^2\frac{\vartheta_2''(0|\tau)}{\vartheta_2(0|\tau)}.$$

Je pak

$$D^2\log\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)} = D^2\log cn(2Kv); \ cn\, u = 1 - \frac{u^2}{2} + \ldots. \qquad v = 0,$$

$$\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} = -4K^2,$$

tedy

$$\frac{\vartheta_0''(0|\tau_1)}{\vartheta_0(0|\tau_1)} = 2\tau\pi i + \tau^2\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} - 4(\tau K)^2$$

$$E' = K' - \frac{2\tau\pi i}{4K'} - K' - \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\frac{\tau}{4K'},$$

$$E' = \frac{\pi}{2K} + \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\cdot\frac{K'}{4K}. \tag{β}$$

Z (α) a (β) máme

$$EK' + E'K = \frac{\pi}{2} + KK', \tag{9}$$

ellogantní vztah mezi uvedenými čtyřmi integrály, který pochází od Legendrea.

§ 10. Trigonometrické řady pro $dn\,u$.

Způsob, jakým se získal rozvoj pro $sn\,u$ v předešlém paragrafu, vede na podobný obrat u funkce

$$f(u) = cn\,u + i\,sn\,u = e^{i\,am\,u}; \tag{1}$$

je patrně

$$f'(u) = i\,dn\,u\,.\,f(u),$$

t. j.

$$i\,dn\,u = \frac{f'(u)}{f(u)}.$$

Nulová místa i póly funkce $f(u)$ jsou zahrnuta mezi póly funkce $i\,dn\,u$; z rovnice

$$i\,dn\,(u + iK') = \frac{cn\,u}{sn\,u}$$

plyne, že na bodech

$$iK' + 2mK + 4niK' \text{ má } i\,dn\,u \text{ residuum } +1,$$
$$3\,iK' + 2mK + 4niK' \text{ má } i\,dn\,u \text{ residuum } -1,$$

takže první body tvoří místa nulová a druhé body póly funkce $f(u)$. Tato má tedy stejné póly i místa nulová jako funkce

$$\frac{\vartheta_1\left(\frac{u}{2K} - \frac{\tau}{2}\,|\,2\tau\right)}{\vartheta_0\left(\frac{u}{2K} - \frac{\tau}{2}\,|\,2\tau\right)}, \quad \tau = \frac{iK'}{K}. \tag{2}$$

Znamenáme-li

$$k(2\tau) = k_1,$$

máme dle § 9

$$k = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}, \quad k' = \frac{1-k_1}{1+k_1},$$

tedy

$$k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}, \quad k_1' = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}.$$

Pro veličinu

$$2K_1 = \pi\,\vartheta_3^2(0|2\tau)$$

pak platí

$$\frac{K}{2K_1} = \frac{1+k_1}{2} = \frac{1}{1+k'}.$$

Veličina (2) jest až na stálého činitele

$$sn\left(K_1\frac{u-iK'}{K},\ k_1\right),$$

a jest pravděpodobně

$$cn\,u + i\,sn\,u = \frac{sn\left(\frac{1+k'}{2}u - \frac{iK_1'}{2},\ k_1\right)}{-\,sn\left(\frac{iK_1'}{2},\ k_1\right)}.$$

Hodnoty

$$sn\left(\frac{iK_1'}{2},\ k_1\right) = \frac{i}{\sqrt{k_1}}, \quad cn\left(\frac{iK_1'}{2},\ k_1\right).\ dn\left(\frac{iK_1'}{2}, k_1\right) = \frac{1+k_1}{\sqrt{k_1}}$$

pak dávají

$$cn\,u + i\,sn\,u = \frac{sn'(w,k_1) + i(1+k_1)\,sn(w,k_1)}{1+k_1\,sn^2(w,k_1)};\quad w = \frac{1+k'}{2}u.$$

Tu se pak přímo verifikuje rovnost částí reálných a pomyslných, uváží-li se, že hodnotám

$$u + 2mK + 2niK' \text{ odpovídají } w + 2mK_1 + niK_1',$$

takže všecky čtyři reálné funkce mají periody $4K$, $4iK'$ a jsou reálné pro reálná u, pro ryze imaginární u pak současně buď reálné neb ryze pomyslné.

Podstatnou a hlavní otázkou jest, že log $f(u)$ se liší od logaritmu výrazu (2) o veličinu stálou; výraz (2) čili

$$-ie^{v\pi i}(1-qe^{-2v\pi i})\frac{\Pi(1-q^{4\nu-1}\xi)\ \Pi\left(1-q^{4\nu+1}\frac{1}{\xi}\right)}{\Pi(1-q^{4\nu-3}\xi)\ \Pi\left(1-q^{4\nu-1}\frac{1}{\xi}\right)}$$

$$\left(v = \frac{u}{2K},\ \xi = e^{2v\pi i}\right)$$

se přepíše na

$$-ie^{v\pi i}\,\Pi\frac{(1-q^{4\nu-1}\xi)(1-q^{4\nu-3}\frac{1}{\xi})}{(1-q^{4\nu-3}\xi)(1-q^{4\nu-1}\frac{1}{\xi})},$$

takže bude pravděpodobně

$$\log f(u)=A+v\pi i+\sum_1^\infty\{\log(1-q^{4\nu-1}\xi)-\log(1-q^{4\nu-1}\frac{1}{\xi})-$$
$$-\log(1-q^{4\nu-3}\xi)+\log(1-q^{4\nu-3}\frac{1}{\xi})\}$$

a sice $A=0$.

Po rozvinutí logaritmů máme

$$\sum_\nu\log(1-q^{4\nu-1}\xi)=-\sum_{\mu,\nu}\frac{1}{\mu}q^{4\mu\nu-\mu}\xi^\mu=-\sum\frac{1}{\mu}\frac{q^{3\mu}\xi^\mu}{1-q^{4\mu}},$$

$$\sum_\nu\log(1-q^{4\nu-3}\xi)=-\sum\frac{1}{\mu}\frac{q^\mu\xi^\mu}{1-q^{4\mu}},$$

$$-\sum_{\nu=1}^\infty\log(1-q^{4\nu-3}\xi)+\sum_{\nu=1}^\infty\log(1-q^{4\nu-1}\xi)=\sum\frac{1}{\mu}\frac{q^\mu}{1+q^{2\mu}}\xi^\mu,$$

$$\log(cn\,u+i\,sn\,u)=\frac{u\pi i}{2K}+2i\sum_{\mu=1}^\infty\frac{1}{\mu}\frac{q^\mu}{1+q^{2\mu}}\sin\frac{\mu u\pi}{K},\tag{3}$$

čili

$$am\,u=\frac{u\pi}{2K}+2\sum_{\mu=1}^\infty\frac{1}{\mu}\frac{q^\mu}{1+q^{2\mu}}\sin\frac{\mu u\pi}{K},\tag{3*}$$

a odtud derivováním

$$dn\,u=\frac{\pi}{2K}+\frac{2\pi}{K}\sum_1^\infty\frac{q^\mu}{1+q^{2\mu}}\cos\frac{\mu u\pi}{K}.\tag{4}$$

Tuto rovnici dokážeme nyní přímo; položme za tím účelem

$$\frac{u\pi}{2K}=v,\quad e^{2v\pi i}=\xi$$

$$\Phi(v)=1+2\sum_1^\infty\frac{q^\mu}{1+q^{2\mu}}2\cos 2\mu v\pi=1+2\sum_1^\infty\frac{q^\mu}{1+q^{2\mu}}(\xi^\mu+\xi^{-\mu});\tag{5a}$$

s použitím řady geometrické máme odtud ($\mu=1,2,3,\ldots;\ \nu=1,3,5,\ldots$)

$$\Phi(v)=1+2\sum_{\mu,\nu}(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}q^{\mu\nu}(\xi^\mu+\xi^{-\mu})$$

a sečteme-li dle μ

$$\Phi(v)=1+2\sum(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\left(\frac{q^\nu\xi}{1-q^\nu\xi}+\frac{q^\nu\xi^{-1}}{1-q^\nu\xi^{-1}}\right);\tag{5b}$$

Položme $v+\tau$ za v a v druhé řadě odlučme člen pro $\nu=1$

$$2\frac{q^{-1}\xi^{-1}}{1-q^{-1}\xi^{-1}}=\frac{2}{q\xi-1},$$

k první pak připojme člen pro $\nu = 1$, t. j.

$$2\frac{q\xi}{1-q\xi} - 2\frac{q\xi}{1-q\xi}$$

a uvažme, že

$$1 + \frac{2}{q\xi - 1} + \frac{2q\xi}{1-q\xi} = -1;$$

i vyjde

$$\Phi(v+\tau) = -\Phi(v);$$

mimo to

$$\Phi(v+1) = \Phi(v).$$

Při $v = \frac{u}{2K}$ je tedy $\frac{\Phi(v)}{dn\,u}$ reálná pro reálná u i pro u ryze pomyslná; funkce má dále periody $2K$, $2iK'$ a je tedy reálnou na obvodě rovnoběžníka $(0;\ 2K, 2iK')$. Podle (5b) je $\Phi(v) = 0$, pro $v = \frac{1+\tau}{2}$; neboť tu hodnota $\xi = -q$ dává

$$\Phi = 1 + 2\Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\left(\frac{-q^{\nu+1}}{1+q^{\nu+1}} - \frac{q^{\nu-1}}{1+q^{\nu-1}}\right) =$$

$$= 1 - 2\sum_{0}^{\infty}(-1)^{\mu}\frac{q^{2\mu}}{1+q^{2\mu}} + 2\sum_{1}^{\infty}(-1)^{\mu}\frac{q^{2\mu}}{1+q^{2\mu}} =$$

$$= 1 - \frac{2}{2} = 0.$$

Tudíž je

$$\frac{\Phi(v)}{dn\,u}$$

synektickou a následkem toho stálou;

$$dn\,u = A\,\Phi\left(\frac{u}{2K}\right).$$

Dle (5b)

$$\lim_{\xi=q}(1 - q\xi^{-1})\,\Phi(v) = 2;$$

dále

$$(1 - q\xi^{-1})\,dn\,u = (1 - e^{\tau\pi i - 2v\pi i})\,dn\,u = e^{-\pi i\left(v - \frac{\tau}{2}\right)}\,2i\sin\left(v - \frac{\tau}{2}\right)\pi\,dn\,u =$$

$$= 2ie^{-\frac{\pi i}{2K}(u - iK')}\sin\frac{u - iK'}{2K}\pi\ \ dn\,u$$

má dle vzorce

$$dn\,u = -i\frac{cn(u - iK')}{sn(u - iK')}$$

limitu

$$2i\frac{\pi}{2K}(-i) = \frac{\pi}{K},$$

tedy

$$\frac{\pi}{K} = 2A, \quad A = \frac{\pi}{2K},$$

takže vychází

$$dn\, u = \frac{\pi}{2K} \Phi \left(\frac{u}{2K}\right),$$

což jest právě vzorec (4). Tvar (5^b) pak dává rozklad v částečné zlomky ($\xi = e^{\frac{u\pi i}{K}}$)

$$\frac{2K}{\pi} dn\, u = 1 + 2\Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \left(\frac{q^\nu \xi}{1 - q^\nu \xi} + \frac{q^\nu \xi^{-1}}{1 - q^\nu \xi^{-1}}\right). \tag{5}$$

Dosazením $u + K$, $u + iK'$, $u + K + iK'$ pak nacházíme

$$\begin{aligned} \frac{2KK'}{\pi} \frac{1}{dn\, u} &= 1 + 4 \sum_1^\infty (-1)^\mu \frac{q^\mu}{1 + q^{2\mu}} \cos \frac{\mu u \pi}{K} = \\ &= 1 - 2\Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \left(\frac{q^\nu \xi}{1 + q^\nu \xi} + \frac{q^\nu \xi^{-1}}{1 + q^\nu \xi^{-1}}\right). \end{aligned} \tag{5^1}$$

$$\frac{2K}{\pi} \frac{cn\, u}{sn\, u} = i + 2i\Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{q^{\nu+1}\xi}{1 - q^{\nu+1}\xi} + 2i\Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{q^{\nu-1}\xi^{-1}}{1 - q^{\nu-1}\xi^{-1}} =$$

$$= i - 2i\sum_1^\infty (-1)^\mu \frac{q^{2\mu}\xi}{1 - q^{2\mu}\xi} + 2i\sum_0^\infty (-1)^\mu \frac{q^{2\mu}\xi^{-1}}{1 - q^{2\mu}\xi^{-1}};$$

$$i + \frac{2i}{\xi - 1} = i + \frac{1}{e^{v\pi i} \sin v\pi} = \operatorname{cotg} v\pi,$$

tedy

$$\begin{aligned} \frac{2K}{\pi} \frac{cn\, u}{sn\, u} &= \operatorname{cotg} \frac{u\pi}{2K} - 2i\sum_1^\infty (-1)^\mu q^{2\mu} \left\{\frac{\xi}{1 - q^{2\mu}\xi} - \frac{\xi^{-1}}{1 - q^{2\mu}\xi^{-1}}\right\} = \\ &= \operatorname{cotg} \frac{u\pi}{2K} - 4\sum_{\nu=1}^\infty \frac{q^{2\nu}}{1 + q^{2\nu}} \sin \frac{\nu u \pi}{K}. \end{aligned} \tag{5^2}$$

Za účelem verifikace volme $u = \frac{K}{2}$:

$$\frac{cn \frac{K}{2}}{sn \frac{K}{2}} = \sqrt{k'} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3},$$

tedy vychází ($\nu = 1, 3, 5, \ldots;\ \mu = 1, 2, 3, 4, \ldots$)

$$\vartheta_0 \vartheta_3 = 1 - 4\Sigma \frac{(-1)^{\frac{\nu-1}{2}} q^{2\nu}}{1 + q^{2\nu}} = 1 + 4 \sum_{\mu, \nu} (-1)^{\frac{\nu-1}{2} + \mu} q^{2\mu\nu},$$

$$\vartheta_0 \vartheta_3 = \sum_{x,y}^{-\infty,\infty} (-1)^y q^{x^2+y^2} = (\sum_{-\infty}^{\infty} q^{4a^2})^2 - (\sum_{-\infty}^{\infty} q^{(2b+1)^2})^2 =$$
$$= \sum q^{4(a^2+a'^2)} - 4 \sum q^{l^2+l'^2}, \qquad l, l' = 1, 3, 5, \ldots$$
$$a, a' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Rozklady čísla 2n ve dva sudé čtverce čísel kladných neb záporných převyšují čtyřnásobný počet rozkladů téhož čísla ve dva liché čtverce čísel kladných o čtyřnásobný součet

$$\sum_{\delta\delta'=n} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}+\delta'}.$$

Pro sudá n je tento součet $\geqq 0$, pro lichá n jest týž $\leqq 0$.

Vložme $u + K$ za u do (5^2); obdržíme

$$\vartheta_0^2 \frac{sn\, u}{cn\, u} = \operatorname{tg} \frac{u\pi}{2K} + 4 \sum_1^{\infty} (-1)^\nu \frac{q^{2\nu}}{1+q^{2\nu}} \sin \frac{\nu u \pi}{K} =$$
$$= \operatorname{tg} \frac{u\pi}{2K} - 2i \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^\mu q^{2\mu} \left(\frac{\xi}{1+q^{2\mu}\xi} - \frac{\xi^{-1}}{1+q^{2\mu}\xi^{-1}} \right). \tag{5^3}$$

Derivujme zde na $u = 0$:

$$\vartheta_0^2 = \frac{\pi}{2K} + \frac{4\pi}{K} \sum_1^{\infty} (-1)^\nu \frac{\nu q^{2\nu}}{1+q^{2\nu}},$$

to jest

$$\vartheta_0^2 \vartheta_3^2 = 1 + 8 \sum_1^{\infty} (-1)^\nu \frac{\nu q^{2\nu}}{1+q^{2\nu}} = 1 - 8 \sum_{\mu,\nu} (-1)^{\mu+\nu} \nu q^{2\mu\nu},$$

takže: *součet znamének* $(-1)^{a+b}$ *utvořený pro všecky rozklady*

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2n, \quad (a, b, c, d = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

rovná se součtu

$$-8 \sum_{\delta\delta'=n} (-1)^{\delta+\delta'} \delta.$$

O tomto součtu

$$f(n) = \sum_{\delta\delta'=n} (-1)^{\delta+\delta'} \delta$$

lze říci následující:

1. pro lichá n jest $f(n)$ součet dělitelů čísla n;
2. pro sudá n, lichá $\frac{n}{2}$ máme

$$f(n) = -f\left(\frac{n}{2}\right) - 2f\left(\frac{n}{2}\right) = -3f\left(\frac{n}{2}\right);$$

3. pro m liché:

$$f(4m) = -f(m) + 2f(m) - 4f(m) = -3f(m),$$
$$f(8m) = -f(m) + 2f(m) + 4f(m) - 8f(m) = -3f(m).$$

Obecně

$$f(2^k m) = -3f(m).$$

Derivuje-li se (5^2) a (5^3), vychází

$$\vartheta_3^4 \frac{dnu}{sn^2 u} = \frac{1}{\sin^2 \frac{u\pi}{2K}} + 8 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu q^{2\nu}}{1+q^{2\nu}} \cos\frac{\nu u \pi}{K}, \tag{6}$$

$$\vartheta_0^2 \vartheta_3^2 \frac{dnu}{cn^2 u} = \frac{1}{\cos^2 \frac{u\pi}{2K}} + 8 \sum_{1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\nu q^{2\nu}}{1+q^{2\nu}} \cos\frac{\nu u \pi}{K}. \tag{6'}$$

§ 11. Trigonometrické řady pro $cn\,u$.

Funkce

$$f(u) = dnu + ik snu$$

hoví rovnici

$$f'(u) = f(u) \,.\, ik cnu,$$

take ž

$$ik cnu = \frac{f'(u)}{f(u)};$$

mimo to jest

$$ik cn(u + iK') = \frac{dnu}{snu},$$

tedy

$$\frac{f'(u + 2mK + 2niK' + iK')}{f(u + 2mK + 2niK' + iK')} = (-1)^{m+n} \frac{dnu}{snu},$$

takže residuum funkce $\frac{f'(u)}{f(u)}$ na pólu $2mK + (2n+1)\, iK'$ jest $(-1)^{m+n}$; funkce $f(u)$ má tedy místa nulová

$$2K - iK' \equiv iK',$$

póly

$$2K + iK' \equiv 3iK' \equiv -iK'$$

a základní periody

$$4K,\ 2K + 2iK'.$$

Tytéž vlastnosti má funkce $\left(\frac{2K + 2iK'}{4K} = \frac{1+\tau}{2}\right)$

$$\frac{\vartheta_1\left(\frac{u - iK'}{4K} \,\middle|\, \frac{1+\tau}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u + iK'}{4K} \,\middle|\, \frac{1+\tau}{2}\right)} = \frac{\vartheta_1\left(\frac{2v - \tau}{4} \,\middle|\, \frac{1+\tau}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{2v + \tau}{4} \,\middle|\, \frac{1+\tau}{2}\right)}.$$

Jmenovatel je až na exponenciální faktor

$$\vartheta_1\left(\frac{v-1}{2} - \frac{\tau}{4}\right) = -\vartheta_2\left(\frac{v}{2} - \frac{\tau}{4}\right),$$

takže bude

$$f(u)=A\frac{\vartheta_1\left(\frac{v}{2}-\frac{\tau}{4}\,\middle|\,\frac{1+\tau}{2}\right)}{\vartheta_2\left(\frac{v}{2}-\frac{\tau}{4}\,\middle|\,\frac{1+\tau}{2}\right)},\quad v=\frac{u}{2K},$$

a při $\xi=e^{v\pi i}$

$$\log f(u)=A'+\log\frac{1-q^{\frac{1}{4}}\xi^{-1}}{1+q^{\frac{1}{4}}\xi^{-1}}\prod_1^\infty\frac{(1-(-1)^\nu q^{\nu-\frac{1}{2}}\xi)(1-(-1)^\nu q^{\nu+\frac{1}{2}}\xi^{-1})}{(1+(-1)^\nu q^{\nu-\frac{1}{2}}\xi)(1+(-1)^\nu q^{\nu+\frac{1}{2}}\xi^{-1})}=$$

$$=A'+\log\prod_1^\infty\frac{1-(-1)^\nu q^{\nu-\frac{1}{2}}\xi}{1+(-1)^\nu q^{\nu-\frac{1}{2}}\xi}\cdot\frac{1+(-1)^\nu q^{\nu-\frac{1}{2}}\xi^{-1}}{1-(-1)^\nu q^{\nu-\frac{1}{2}}\xi^{-1}}=$$

$$=A'-2\sum_{\mu,\nu}\frac{(-1)^\nu}{\mu}q^{\frac{2\nu-1}{2}\mu}(\xi^\mu-\xi^{-\mu}),\quad(\mu=1,3,5,\ldots.),$$

tedy konečně $(\mu=1,3,5,7,\ldots.)$

$$\log f(u)=4i\sum_\mu\frac{1}{\mu}\frac{q^{\frac{\mu}{2}}}{1+q^\mu}\sin\frac{\mu u\pi}{2K};$$

poněvadž konstanta $A'=0$ vypadne.

Odtud tedy po derivování a krácení na i

$$k\,cnu=\frac{4\pi}{2K}\sum_\mu\frac{q^{\frac{\mu}{2}}}{1+q^\mu}\cos\frac{\mu u\pi}{2K};\quad\mu=1,3,5,\ldots\tag{1}$$

čili

$$\vartheta_2^2\,cnu=4\sum\frac{q^{\frac{\mu}{2}}}{1+q^\mu}\cos\frac{\mu u\pi}{2K}.\tag{1*}$$

Uvedeme-li to nazpět v řadu dvojnásobnou $(\mu,\nu=1,3,5,\ldots.)$

$$2\sum(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}q^{\frac{\mu\nu}{2}}(\xi^\mu+\xi^{-\mu}),$$

obdržíme

$$\vartheta_2^2\,cnu=2\sum(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\left(\frac{q^{\frac{\nu}{2}}\xi}{1-q^\nu\xi^2}+\frac{q^{\frac{\nu}{2}}\xi^{-1}}{1-q^\nu\xi^{-2}}\right),\tag{2}$$

$$\xi=e^{\frac{u\pi i}{2K}}.$$

Nyní lze uvažováním dvojperiodických vlastností pravé strany vésti přesný důkaz jako v případě funkce dnu. Tak jsme zároveň získali vztah

$$\log(dnu+iksnu)=4i\sum\frac{1}{\mu}\frac{q^{\frac{\mu}{2}}}{1+q^\mu}\sin\frac{\mu u\pi}{2K},$$

$$(\mu=1,3,5,7,\ldots.)$$

a jeho důsledek

$$dn\,u + ik\,sn\,u = A\frac{\vartheta_1(\frac{v}{2}-\frac{\tau}{4}|\frac{1+\tau}{2})}{\vartheta_2(\frac{v}{2}-\frac{\tau}{4}|\frac{1+\tau}{2})},\quad A = -\frac{\vartheta_2(\frac{\tau}{4}|\frac{1+\tau}{2})}{\vartheta_1(\frac{\tau}{4}|\frac{1+\tau}{2})}.$$

* * *

Vzorce naše vycházejí ostatně přímo ze základní věty § 2 (5). Funkce $dn\,u$ má periodu $2K$ a možno zavésti proměnnou

$$\psi = \frac{u}{K}\pi;$$

volíme pak $\gamma = 0$, $\omega = \frac{2iK'}{K}\pi$, $\rho = q^2$.

Z rovnice

$$dn(u + iK') = -i\frac{cn\,u}{sn\,u}$$

plyne, že funkce $dn\,u$ má na pólu iK' residuum $-i$, takže funkce

$$dn\left(\frac{K\psi}{\pi}\right)$$

se chová v okolí bodu $\psi = \frac{\omega}{2}$ jako

$$-\frac{i\pi}{K(\psi - \frac{\omega}{2})} \text{ čili jako } -\frac{i\pi}{2K}\operatorname{cotg}\left(\frac{\psi}{2} - \frac{\omega}{4}\right),$$

která v rovnoběžníku $(2\pi, \omega)$ jiných pólů nemá. Výraz

$$f(\psi) = i\left[dn\left(\frac{K\psi}{\pi}\right) + \frac{i\pi}{2K}\operatorname{cotg}\left(\frac{\psi}{2} - \frac{iK'\pi}{2K}\right)\right]$$

je tedy na rovnoběžníku $(0;\ 2\pi, \omega)$ funkce synektická, a na horizontálních stranách splývá její reálná část U s reálnou částí funkce

$$-\frac{\pi}{2K}\operatorname{cotg}\left(\frac{\psi}{2} - \frac{\omega}{4}\right) = \Phi(\psi).$$

Nyní jest

$$\Phi(\Theta) = -\frac{\pi}{2K}\cdot i\frac{e^{\frac{i\Theta}{2}}q^{-\frac{1}{2}} + e^{-\frac{i\Theta}{2}}q^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{i\Theta}{2}}q^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{i\Theta}{2}}q^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= -\frac{i\pi}{2K}\frac{1 + qe^{-i\Theta}}{1 - qe^{-i\Theta}} = -\frac{i\pi}{2K}\left[1 + 2\sum_1^\infty q^\nu e^{-\nu i\Theta}\right], \qquad (a)$$

tedy reálná část

$$\varphi_1(\Theta) = -\frac{\pi}{K}\sum_{\nu=1}^{\infty} q^\nu \sin \nu\Theta;\quad a_\nu = 0, b_\nu = -\frac{\pi}{K}q^\nu.$$

Dále

$$\Phi(\omega+\Theta) = -\frac{\pi}{2K}\operatorname{cotg}\left(\frac{\Theta}{2}+\frac{\omega}{4}\right) = -\frac{\pi i}{2K}\cdot\frac{e^{\frac{i\Theta}{2}}q^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{i\Theta}{2}}q^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{i\Theta}{2}}q^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{i\Theta}{2}}q^{-\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{i\pi}{2K}\left[1 + 2\sum_1^{\infty} q^\nu e^{\nu i\Theta}\right],$$

takže reálná část

$$\varphi_2(\Theta) = -\frac{\pi}{K}\sum_1 q^\nu \sin\nu\Theta;\quad a'_\nu = 0,\ b'_\nu = b_\nu.$$

Poněvadž zde $r_1 = 1$, $r_2 = \varrho = q^2$, máme pro kladná ν

$$i\left(\frac{b'_\nu}{r_1{}^\nu} - \frac{b_\nu}{r_2{}^\nu}\right) = -\frac{i\,b_\nu}{q^{2\nu}}(1-q^{2\nu}),\quad i(b'_{-\nu}r_1{}^\nu - b_{-\nu}r_2{}^\nu) = -i\,b_\nu(1-q^{2\nu}),$$

řada (5) § 2 bude

$$f(\psi) = -\sum_1^{\infty} i\,b_\nu\left(\frac{e^{i\nu\psi}}{1+q^{2\nu}} - \frac{q^{2\nu}e^{-i\nu\psi}}{1+q^{2\nu}}\right)$$

t. j pro $u = \frac{K\psi}{\pi}$

$$\begin{aligned} dn\,u = &-\frac{i\pi}{2K}\operatorname{cotg}\left(\frac{\psi}{2} - \frac{iK'\pi}{2K}\right) + \\ &+ \frac{\pi}{K}\sum_1^{\infty}\frac{q^\nu}{1+q^{2\nu}}\left(e^{i\nu\psi} - q^{2\nu}e^{-i\nu\psi}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Ve vnitřní závorce nahraďme $q^{2\nu}$ hodnotou $(1+q^{2\nu})-1$, načež vyjde

$$\begin{aligned} dn\,u = &-\frac{i\pi}{2K}\operatorname{cotg}\left(\frac{\psi}{2} - \frac{\omega}{4}\right) - \frac{\pi}{K}\sum_1^{\infty} q^\nu e^{-\nu i\psi} + \\ &+ \frac{2\pi}{K}\sum_1^{\infty}\frac{q^\nu}{1+q^{2\nu}}\cos\nu\psi; \end{aligned}$$

první řada vpravo má dle (a) i se znamením — hodnotu

$$\frac{1}{i}\left[\Phi(\Theta) + \frac{i\pi}{2K}\right] = \frac{\pi}{2K} + \frac{i\pi}{2K}\operatorname{cotg}\left(\frac{\psi}{2} - \frac{\omega}{4}\right)$$

a zbývá vzorec nám známý

$$dn\,u = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K}\sum_1^{\infty}\frac{q^\nu}{1+q^{2\nu}}\cos\frac{\nu u\pi}{K}. \tag{4*}$$

Hledáme-li $dn(u+iK')$, dosadíme $\psi + \frac{\omega}{2}$ za ψ do rovnice (4), která platí pro celý rovnoběžník; tím výraz

$$e^{\nu i \psi} - q^{2\nu} e^{-\nu i \psi}$$

přejde v

$$q^{\nu}(e^{\nu i \psi} - e^{-\nu i \psi}) = 2\, i\, q^{\nu} \sin \nu \psi,$$

a vyjde

$$dn(u + iK') = -\frac{i\pi}{2K} \operatorname{cotg} \frac{u\pi}{2K} + \frac{2\pi i}{K} \sum_1^{\infty} \frac{q^{2\nu}}{1+q^{2\nu}} \sin \frac{\nu u \pi}{K},$$

t. j. po dosazení

$$\frac{cn\, u}{sn\, u} = \frac{\pi}{2K} \operatorname{cotg} \frac{u\pi}{2K} - \frac{2\pi}{K} \sum_1^{\infty} \frac{q^{2\nu}}{1-q^{2\nu}} \sin \frac{\nu u \pi}{K} \tag{5}$$

jako výše.

* * *

Obraťme se nyní k funkci $cn\, u$; její reálná perioda je $4\, K$, a tedy položíme

$$\psi = \frac{u\pi}{2K},\ \omega = \frac{2iK'}{2K}\pi, \varrho = q;$$

ze vztahu

$$cn(u + iK') = -\frac{i\, dn\, u}{k\, sn\, u}$$

soudíme na povahu funkce v okolí pólu iK', kde se chová jako

$$\frac{-i}{k(u - iK')} = \frac{-i\pi}{2Kk(\psi - \frac{\omega}{2})},$$

takže funkce

$$f(\psi) = i\left[cn\, u + \frac{i\pi}{2Kk \sin(\psi - \frac{\omega}{2})}\right]$$

je na $\psi = \frac{\omega}{2}$ pravidelná, a poněvadž $f(\psi + \pi) = -f(\pi)$, je tato funkce synektickou na obdélníku $(O; 2\pi, \omega)$. Její reálná část na vodorovných stranách je táž jako u funkce

$$\Phi(\psi) = -\frac{\pi}{2Kk \sin(\psi - \frac{\omega}{2})};$$

jest pak

$$\Phi(\Theta) = -\frac{i\pi}{Kk} \frac{\sqrt{q}\, e^{-i\Theta}}{1 - q e^{-2i\Theta}} = -\frac{i\pi}{Kk} \Sigma q^{\frac{\nu}{2}} e^{-\nu i \Theta}, (\nu = 1, 3, 5, \ldots),$$

$$\varphi_1(\Theta) = -\frac{\pi}{Kk} \Sigma q^{\frac{\nu}{2}} \sin \nu\Theta,$$

a stejný výraz vyjde pro $\varphi_3(\Theta)$. Je tedy pro lichá ν

$$b_\nu = b'_\nu = -\frac{\pi}{Kk} q^{\frac{\nu}{2}},$$

kdežto

$$b_{2\mu} = b'_{2\mu} = 0, \; a_\mu = a'_\mu = 0.$$

Vzorec (5) § 2 pak dává

$$f(\psi) = \sum_{\nu=1,3,5,\ldots} \frac{q^\nu}{1-q^{2\nu}} i b_\nu \left\{ \frac{q^\nu - 1}{q^\nu} e^{i\nu\psi} + (1-q^\nu) e^{-i\nu\psi} \right\}$$

$$f(\psi) = \frac{i\pi}{Kk} \Sigma \left(\frac{q^{\frac{\nu}{2}}}{1+q^\nu} e^{i\nu\psi} - \frac{q^{\nu+\frac{\nu}{2}}}{1+q^\nu} e^{-i\nu\psi} \right),$$

takže po dosazení za $f(\psi)$

$$cn\, u = -\frac{i\pi}{2Kk \sin(\psi - \frac{\omega}{2})} + \frac{\pi}{Kk} \Sigma \left(\frac{q^{\frac{\nu}{2}}}{1+q^\nu} e^{i\nu\psi} - \frac{q^{\nu+\frac{\nu}{2}}}{1+q^\nu} e^{-i\nu\psi} \right) \tag{6}$$

$$(\nu = 1, 3, 5, \ldots, \psi = \frac{u\pi}{2K}).$$

Odtud obdržíme v okolí reálné osy, užije-li se identity

$$-\frac{q^{\nu+\frac{\nu}{2}}}{1+q^\nu} = \frac{q^{\frac{\nu}{2}}}{1+q^\nu} - q^{\frac{\nu}{2}},$$

a další identity výše užité

$$\frac{i\pi}{2Kk \sin(\psi - \frac{\omega}{2})} = -\frac{\pi}{Kk} \Sigma q^{\frac{\nu}{2}} e^{-i\nu\psi},$$

definitivně

$$cn\, u = \frac{2\pi}{Kk} \Sigma \frac{q^{\frac{\nu}{2}}}{1+q^\nu} \cos \frac{\nu u \pi}{2K}; \; \nu = 1, 3, 5, 7, \ldots \tag{1*}$$

Přechodný vzorec (6) platí v sousedství rovnoběžky z bodu iK', a můžeme v něm klásti

$$u + iK' \text{ za } u, \text{ t. j. } \psi + \frac{\omega}{2} \text{ za } \psi,$$

čímž vyjde

$$cn(u + iK') = -\frac{i\pi}{2Kk \sin\psi} + \frac{2\pi i}{Kk} \Sigma \frac{q^\nu}{1+q^\nu} \sin \nu\psi;$$

levá strana má hodnotu

$$-i \frac{dn\, u}{k\, sn\, u},$$

a bude tedy po redukci

$$\frac{dn\, u}{sn\, u} = \frac{\pi}{2K \sin \frac{u\pi}{2K}} - \frac{2\pi}{K} \Sigma \frac{q^\nu}{1+q^\nu} \sin \frac{\nu u \pi}{2K}; \; \nu = 1, 3, 5, 7, \ldots \tag{7}$$

§ 12. Eliptické konstanty. Aritmetické důsledky.

Pro funkci $x = sn\,u$ dává diferenciální rovnice

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 1 - (1 + k^2)x^2 + k^2 x^4$$

derivováním

$$\frac{d^2 x}{du^2} = -(1 + k^2)x + 2k^2 x^3,$$

$$\frac{d^3 x}{du^3} = [-(1 + k^2) + 6k^2 x^2]\frac{dx}{du},$$

a odtud máme

$$sn\,u = u - \frac{1 + k^2}{6}u^3 + \dots$$

Podobně

$$dn\,u = 1 - \frac{k^2}{2}u^2 + \dots,$$

a odtud plyne v okolí počátku

$$\frac{dn\,u}{sn\,u} = \frac{1}{u} + \frac{1 - 2k^2}{6}u + \dots \tag{1}$$

Z rovnice

$$\frac{1}{\sin\psi} = \frac{1}{\psi} + \frac{\psi}{6} + \dots$$

pak máme

$$\frac{\pi}{2K\sin\dfrac{u\pi}{2K}} = \frac{1}{u} + \frac{u\pi^2}{24K^2} + \dots$$

Vložíme-li tyto hodnoty do (7) § 11, obdržíme derivací na $u = 0$

$$\frac{1 - 2k^2}{6} - \frac{\pi^2}{24K^2} = -\frac{\pi^2}{K^2}\Sigma\frac{\nu q^\nu}{1 + q^\nu},$$

takže

$$(1 - 2k^2)\vartheta_3^4 = 1 - 24\Sigma\frac{\nu q^\nu}{1 + q^\nu};\ \nu = 1, 3, 5, 7, \dots \tag{2}$$

levá strana jest

$$\vartheta_3^4 - 2\vartheta_2^4 = \vartheta_0^4 - \vartheta_2^4. \tag{2⁰}$$

Stejně máme

$$cn\,u = 1 - \frac{u^2}{2} + \dots$$

$$\frac{cn\,u}{sn\,u} = \frac{1}{u} + \frac{k^2 - 2}{6}u + \dots, \operatorname{cotg}\psi = \frac{1}{\psi} - \frac{\psi}{3} + \dots$$

$$\frac{\pi}{2K}\operatorname{cotg}\frac{u\pi}{2K} = \frac{1}{u} - \frac{\pi^2}{12K^2}u + \dots,$$

takže (5^2) § 11 podá

$$\frac{k^2-2}{6}+\frac{\pi^2}{12K^2}=-\frac{2\pi^2}{K^2}\sum_1^\infty\frac{\nu q^{2\nu}}{1+q^{2\nu}},$$

t. j.

$$(2-k^2)\vartheta_3^4=2+48\sum_1^\infty\frac{\nu q^{2\nu}}{1+q^{2\nu}}=2\vartheta_3^4-\vartheta_2^4=\vartheta_3^4+\vartheta_0^4. \tag{3}$$

Podobně

$$\frac{1}{snu}=\frac{1}{u}+\frac{1+k^2}{6}u+\ldots,$$

tedy (2) § 7 podá

$$\frac{1+k^2}{6}-\frac{\pi^2}{24K^2}=\frac{\pi^2}{K^2}\Sigma\frac{\nu q^\nu}{1-q^\nu},\ (\nu=1,3,5\ldots).$$

$$(1+k^2)\vartheta_3^4=1+24\Sigma\frac{\nu q^\nu}{1-q^\nu}=\vartheta_2^4+\vartheta_3^4;\ (\nu=1,3,5,7,\ldots). \tag{4}$$

(2) a (4) dají sečtením

$$(2-k^2)\vartheta_3^4=2+24\Sigma\frac{2\nu q^{2\nu}}{1-q^{2\nu}}\ (\nu=1,3,5,\ldots). \tag{5}$$

Srovnáme-li s (3), máme

$$\Sigma\frac{\nu q^{2\nu}}{1-q^{2\nu}}=\sum_1^\infty\frac{\mu q^{2\mu}}{1+q^{2\mu}},\ (\nu=1,3,5,7,\ldots); \tag{5⁰}$$

tedy

$$\Sigma\nu q^{2\mu\nu}=\Sigma(-1)^{\mu'-1}\mu q^{2\mu\mu'}.$$

Značí-li $s'(n)$ součet lichých dělitelů čísla n, platí tedy vztah velmi jednoduchý

$$\sum_{\delta\delta'=n}(-1)^{\delta'-1}\delta=s'(n). \tag{6}$$

Př. $n=30$; $\quad\delta=1,2,3,5,6,10,15,30$

$$(-1)^{\delta'-1}\delta=-1,2,-3,-5,6,10,-15,30$$

$$\Sigma(-1)^{\delta'-1}\delta=24=1+3+5+15$$

$$n=12;\ s'(n)=4;\ \Sigma\pm\delta=-1-3-2+4-6+12=4.$$

Věc se dá verifikovati zcela elementárně. Rovněž indentita (5); pišme q místo q^2 a uvažujme rozdíl obou stran

$$\varphi(q)=\sum_\nu\frac{\nu q^\nu}{1-q^\nu}-\sum_1^\infty\frac{\mu q^\mu}{1+q^\mu}=\Sigma\frac{\nu q^\nu}{1-q^\nu}-\Sigma\frac{\nu q^\nu}{1+q^\nu}-\Sigma\frac{2\mu q^{2\mu}}{1+q^{2\mu}};$$

první dvě řady dají

$$\Sigma\frac{2\nu q^{2\nu}}{1-q^{2\nu}}$$

a tak vychází $\varphi(q)=2\varphi(q^2)$, takže $\varphi(q)=\text{konst.}=0$.

Rovnice (5), t. j.

$$2\vartheta_3^4 - \vartheta_2^4 = 2 + 48\Sigma\frac{\nu q^{3\nu}}{1-q^{3\nu}}, \quad (\nu = 1, 3, 5, \ldots)$$

dává větu:

Počet rozkladů

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2, \quad (x, y, z, t = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

převyšuje osmeronásobný počet rozkladů

$$4n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \quad (a, b, c, d = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$$

o dvacetičtyřnásobek součtu lichých dělitelů čísla $\frac{n}{2}$; *pro lichá* n *je tento rozdíl nulou.*

Trigonometrický rozvoj funkce $sn\,u$ pišme

$$\vartheta_2\vartheta_3\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)} = 4\Sigma\frac{q^{\frac{\nu}{2}}}{1-q^\nu}\sin\nu v\pi; \quad \nu = 1, 3, 5, 7, \ldots \qquad (a)$$

podobně

$$\vartheta_2\vartheta_3\frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_1(v)} = \frac{1}{\sin v\pi} + 4\Sigma\frac{q^\nu}{1-q^\nu}\sin\nu v\pi. \qquad (a')$$

Dříve ještě uvažme, že pro lichá ν

$$\frac{\sin\nu v\pi}{\sin v\pi} = 1 + 2\cos 2v\pi + 2\cos 4v\pi + \ldots + 2\cos(\nu-1)v\pi,$$

takže

$$\int_0^1\frac{\sin\nu v\pi}{\sin v\pi}dv = 1.$$

Násobme nyní výrazy (a), (a') a výsledek integrujme od $v = 0$ do $v = 1$:

$$\vartheta_2^2\vartheta_3^2 = 4\Sigma\frac{q^{\frac{\nu}{2}}}{1-q^\nu} + 8\Sigma\frac{q^{\frac{3\nu}{2}}}{(1-q^\nu)^2} = 4\Sigma q^{\frac{\mu\nu}{2}} + 8\Sigma\frac{\mu-1}{2}q^{\frac{\mu\nu}{2}},$$

t. j.

$$\vartheta_2^2\vartheta_3^2 = 4\Sigma\mu q^{\frac{\mu\nu}{2}}, \quad (\mu, \nu = 1, 3, 5, 7, \ldots). \qquad (b)$$

Násobme dále (a′) funkcí

$$\vartheta_1(v) = 2\Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}q^{\frac{1}{4}\nu^2}\sin\nu v\pi,$$

a integrujme od $v = 0$ do $v = 1$:

$$\vartheta_2\vartheta_3 = 2\Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}q^{\frac{\nu^2}{4}} + 4\Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\frac{q^{\frac{\nu^2}{4}+\nu}}{1-q^\nu} =$$
$$= 2\Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}q^{\frac{\nu^2}{4}}\frac{1+q^\nu}{1-q^\nu} \quad (\nu = 1, 3, 5, \ldots) \qquad (c)$$

Koeficient při $q^{\frac{n}{4}}$ vpravo je

$$4\sum_{\delta<\sqrt{n}}(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}+2J(\sqrt{n}),\ n\equiv 1\ (\mathrm{mod.}\ 4).$$

kde $J(\sqrt{n})$ je 1 pro celistvé $\sqrt{n}$, jinak $J=0$.

Počet rozkladů $n=a^2+x^2$ $(a=1,3,5,\ldots,\ x=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\ldots)$ *je dán výrazem*

$$J(\sqrt{n})+2\sum_{\delta<\sqrt{n}}(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}, \qquad (n\equiv 1, \mathrm{mod}\, 4),$$

kde δ *probíhá liché dělitele čísla* n.

Dále vzorec pro $\dfrac{cn\,u}{dn\,u}$ dává po derivaci

$$\frac{k'^2\,sn\,u}{dn^2 u}=\frac{\pi^2}{K^2 k}\sum(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\nu\frac{q^{\frac{\nu}{2}}}{1-q^\nu}\sin\frac{\nu u\pi}{2K};$$

násobme řadou

$$sn\,u=\frac{2\pi}{Kk}\sum\frac{q^{\frac{\nu}{2}}}{1-q^\nu}\sin\frac{\nu u\pi}{2K}$$

a integrujme od $u=0$ do $u=2K$:

$$\int_0^{2K}k'^2\frac{sn^2 u}{dn^2 u}du=\frac{2\pi^3}{K^2k^2}\sum(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\frac{\nu q^\nu}{(1-q^\nu)^2};$$

avšak

$$k'^2\frac{sn^2 u}{dn^2 u}=cn^2(K-u)=1-sn^2(K-u),$$

levá strana

$$2\int_0^{2K}cn^2(K-u)\,du=2K-2\int_0^{K}sn^2 u\,du=2K-\int_0^{K}sn^2 u\,du,$$

a tento integrál můžeme stanoviti tak, že násobíme samu sebou řadu pro $sn\,u$:

$$\int_0^{2K}sn^2 u\,du=\frac{4\pi^2}{Kk^2}\sum\frac{q^\nu}{(1-q^\nu)^2}.$$

Tedy též

$$\int_0^{2K}\frac{k'^2\,sn^2 u}{dn^2 u}du=2K-\frac{4\pi^2}{Kk^2}\sum\frac{q^\nu}{(1-q^\nu)^2},$$

a porovnáním obou výsledků plyne

$$2K^3k^2 = 2\pi^3 \Sigma (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{\nu q^\nu}{(1-q^\nu)^2} + 4\pi^2 K \Sigma \frac{q^\nu}{(1-q^\nu)^2},$$

t. j.

$$\vartheta_3^2 \vartheta_2^4 = 8\Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{\nu q^\nu}{(1-q^\nu)^2} + 8\vartheta_3^2 \Sigma \frac{q^\nu}{(1-q^\nu)^2}; (\nu = 1, 3, 5, 7, \ldots) \quad (d)$$

Druhá řada má hodnotu

$$\Sigma \frac{q^\nu}{(1-q^\nu)^2} = \Sigma \mu q^{\mu\nu} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\mu q^\mu}{1-q^{2\mu}}.$$

Radu

$$dn\, u = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)} = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{q^\mu}{1+q^{2\mu}} \cos 2\mu v\pi$$

násobme

$$\vartheta_0(v) = 1 + 2\sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^\mu q^{\mu^2} \cos 2\mu v\pi$$

a integrujme od $v = 0$ do $v = 1$:

$$\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3} = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K} \sum_1^\infty (-1)^\mu \frac{q^{\mu^2+\mu}}{1+q^{2\mu}},$$

t. j.

$$\vartheta_0 \vartheta_3 = 1 + 4\sum_1^\infty (-1)^\mu \frac{q^{\mu^2+\mu}}{1+q^{2\mu}}. \quad (e)$$

Obraťme se ještě ku vzorci (1) § 3

$$\frac{1}{sn^2 u} = \frac{\pi^2}{4K^2 \sin^2 \frac{u\pi}{2K}} + C - \frac{2\pi^2}{K^2} \sum_1^\infty \frac{\nu q^{2\nu}}{1-q^{2\nu}} \cos \frac{\nu u \pi}{K}, \quad (A)$$

$$C = \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} = \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0 . 4K^2}. \quad (7)$$

Volba $u = K$ dává

$$(C-1)\vartheta_3^4 + 1 = 8\sum_1^\infty (-1)^\nu \frac{\nu q^{2\nu}}{1-q^{2\nu}}; \quad (A^0)$$

$$\vartheta_0''(0) = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_0}{\partial \omega}, \ \omega = \frac{iK'}{K};$$

$$\frac{\vartheta_0''(0)}{\vartheta_0(0)} = 4\pi i D_\omega \log \vartheta_0, \ \vartheta_0 = \Pi(1-q^{2\nu})(1-q^{2\nu-1})^2$$

$$D \log \vartheta_0 = -\pi i \Sigma \frac{2\nu q^{2\nu}}{1-q^{2\nu}} - 2\pi i \Sigma \frac{(2\nu-1) q^{2\nu-1}}{1-q^{2\nu-1}}$$

$$\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} = 4\pi^2 \Sigma \frac{2\nu q^{2\nu}}{1-q^{2\nu}} + 8\pi^2 \Sigma \frac{(2\nu-1) q^{2\nu-1}}{1-q^{2\nu-1}} \quad (8)$$

$$C\vartheta_3^4 = \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0 \pi^2}, \quad (7^0)$$

tedy vztah hledaný zní

$$\vartheta_3^4 = 1 + 8\Sigma \frac{\nu q^{2\nu}}{1-q^{2\nu}} + 8\Sigma \frac{(2\nu-1)q^{2\nu-1}}{1-q^{2\nu-1}} - 8\Sigma(-1)^\nu \frac{\nu q^{2\nu}}{1-q^{2\nu}}.$$

Zde ruší se kladné členy poslední řady s částí řady první a zbude

$$\vartheta_3^4 = 1 + 8\Sigma \frac{2\lambda q^{2\lambda}}{1-q^{2\lambda}} + 8\Sigma \frac{\lambda q^\lambda}{1-q^\lambda}, \quad (\lambda = 1, 3, 5, 7\ldots) \tag{9}$$

Z identity

$$\Pi(1+q^n)\Pi(1-q^\lambda) = 1 \qquad \begin{pmatrix} n = 1, 2, 3, \ldots \\ \lambda = 1, 3, 5, \ldots \end{pmatrix}$$

plyne logaritmickým derivováním

$$\Sigma \frac{n q^n}{1+q^n} = \Sigma \frac{\lambda q^\lambda}{1-q^\lambda}; \tag{α}$$

je však

$$\frac{2q^{2\lambda}}{1-q^{2\lambda}} = \frac{q^\lambda}{1-q^\lambda} - \frac{q^\lambda}{1+q^\lambda},$$

tedy

$$S = \Sigma \frac{2\lambda q^{2\lambda}}{1-q^{2\lambda}} + \Sigma \frac{\lambda q^\lambda}{1-q^\lambda} = 2\Sigma \frac{\lambda q^\lambda}{1-q^\lambda} - \Sigma \frac{\lambda q^\lambda}{1+q^\lambda}.$$

Identita (α) dává

$$\Sigma \frac{\lambda q^\lambda}{1-q^\lambda} - \Sigma \frac{\lambda q^\lambda}{1+q^\lambda} = \Sigma \frac{2n q^{2n}}{1+q^{2n}},$$

takže vychází

$$S = \Sigma \frac{\lambda q^\lambda}{1-q^\lambda} + \Sigma \frac{2n q^{2n}}{1+q^{2n}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu q^\nu}{1+(-q)^\nu}$$

a tedy vychází pro (9) původní tvar Jacobiův:

$$\vartheta_3^4 = 1 + 8\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu q^\nu}{1+(-q)^\nu}. \tag{9*}$$

Výsledek lze psáti

$$\frac{d}{d\tau} \log \frac{\vartheta_2}{\vartheta_0} = \frac{\pi i}{4} \vartheta_3^4.$$

Počet řešení rovnice

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = n$$

kladnými a zápornými čísly rovná se dle (9) *osmeronásobnému součtu dělitelů lichých a lichosudých čísla n*.*

* Lagrange první ukázal aritmeticky, že lze každé číslo rozložiti ve čtyři čtverce.

Pro $n=6$ máme dělitele $1, 3, 2, 6$; součet $=12$; rozklad $6=0+1+$ $+1+4$ dává podnět k $\frac{24}{2}=12$ permutacím a z každé z nich vzniká kombinacemi znamének u tří prvků mimo 0 osm rozkladů. Všech řešení tedy 8×12.

Pro čísla $n=2^k$ máme tedy pouze 3×8 rozkladů ve 4 čtverce.

Př.
$$\begin{aligned} 16 &= 0+0+0+16 \ (4\times 2) \\ &= 4+4+4+4 \quad (2^4) \\ 32 &= 0+0+16+16 \ (6\times 2^2) \end{aligned}$$

Obecně máme rozklady

$$2^{2\nu}=0+0+0+2^{2\nu}=2^{2\nu-2}+2^{2\nu-2}+2^{2\nu-2}+2^{2\nu-2}$$
$$2^{2\nu+1}=0+0+2^{2\nu}+2^{2\nu}$$

a rozklady z nich odvozené; jiných rozkladů není.

V rovnici (A) položme

$$u=\frac{K}{2},\quad sn\,\frac{K}{2}=\frac{\sqrt{1-k'}}{k},$$

tedy

$$\frac{k^2}{1-k'}=\frac{\pi^2}{2K^2}+C-\frac{2\pi^2}{K^2}\sum_1^\infty(-1)^\nu\frac{2\nu q^{4\nu}}{1-q^{4\nu}};$$

levá strana $=1+k'$ a tedy

$$C=\frac{\vartheta''_0}{(2K)^2\vartheta_0}=1+k'-\frac{\pi^2}{2K^2}+\frac{2\pi^2}{K^2}\sum_1^\infty(-1)^\nu\frac{2\nu q^{4\nu}}{1-q^{4\nu}}. \qquad (\alpha)$$

Táž substituce do vzorce

$$k^2 sn^2 u=C-\frac{2\pi^2}{K^2}\sum_{\nu=1}^\infty\frac{\nu q^\nu}{1-q^{2\nu}}\cos\frac{\nu u\pi}{K} \qquad (B)$$

dává

$$1-k'=C-\frac{2\pi^2}{K^2}\sum_{\nu=1}^\infty(-1)^\nu\frac{2\nu q^{2\nu}}{1-q^{4\nu}}. \qquad (\beta)$$

Sečtením (α) a (β) vychází vzorec nám již známý

$$4k'\frac{K^2}{\pi^2}=1+4\sum_1^\infty(-1)^\nu\frac{2\nu q^{2\nu}}{1+q^{2\nu}}=\vartheta_0^2\vartheta_3^2, \qquad (\gamma)$$

kdežto odečtení dává hořejší vzorec (A^0)

$$C=1-\frac{\pi^2}{4K^2}+\frac{2\pi^2}{K^2}\sum_1^\infty(-1)^\nu\frac{\nu q^{2\nu}}{1-q^{2\nu}}.$$

Volba $u=0$ v (B) dává

$$C=\frac{2\pi^2}{K^2}\sum_1^\infty\frac{\nu q^\nu}{1-q^{2\nu}}. \qquad (\delta)$$

Vložíme-li do řady (B) $u=\frac{iK'}{2}$, vyjde

$$C=\frac{\pi^2}{K^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu q^{\frac{1}{2}\nu}}{1-q^\nu}-k. \tag{ε}$$

Vzorec

$$\frac{1}{sn^2 u}=C-D^2\log H(u)$$

podá

$$C=\frac{1}{sn^2 u}+D_u\frac{H'(u)}{H(u)}.$$

Zde

$$\frac{H'(u)}{H(u)}=\frac{1}{2K}\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)}=\frac{1}{2K}\left\{\frac{1}{v}+\frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}v+\dots\right\}$$

$$=\frac{1}{u}+\frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\frac{u}{4K^2}+\dots$$

$$D_u\frac{H'(u)}{H(u)}=-\frac{1}{u^2}+\frac{1}{12K^2}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}+\dots$$

$$\frac{1}{sn^2 u}=\frac{1}{u^2}+\frac{1+k^2}{3}+\dots,$$

tedy

$$C=\frac{1+k^2}{3}+\frac{1}{12K^2}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}. \tag{η}$$

V rovnici (A) převeďme první člen pravé strany nalevo a ve výsledku položme $u=0$. Ježto

$$\frac{\pi^2}{4K^2\sin^2\frac{u\pi}{2K}}=\frac{1}{u^2}+\frac{\pi^2}{12K^2}+\dots,$$

vyjde

$$C=\frac{1+k^2}{3}-\frac{\pi^2}{12K^2}+\frac{2\pi^2}{K^2}\sum_1^{\infty}\frac{\nu q^{2\nu}}{1-q^{2\nu}}. \tag{φ}$$

Vložíme-li sem hodnotu (η), vznikne po zkrácení

$$1+\frac{\vartheta_1'''}{\pi^2\vartheta_1'}=24\sum_1^{\infty}\frac{\nu q^{2\nu}}{1-q^{2\nu}}. \tag{ψ}$$

$$\frac{1}{2\pi}\vartheta_1'=\Sigma(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda q^{\frac{1}{4}\lambda^2},\quad \frac{1}{2\pi^3}\vartheta_1'''=-\Sigma(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda^3 q^{\frac{1}{4}\lambda^2},$$

$$1+\frac{\vartheta_1'''}{\pi^2\vartheta_1'}=\frac{\Sigma(-1)^{\frac{l+1}{2}}(l^3-l)q^{\frac{1}{4}l^2}}{\Sigma(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda q^{\frac{1}{4}\lambda^2}},\quad \left(\begin{matrix}l=3,5,7,\dots\\ \lambda=1,3,5,\dots\end{matrix}\right).$$

Vložme tento výraz do (ψ) a odstraňme jmenovatele, uváživše dříve, že

$$\sum_1^\infty \frac{\nu q^{2\nu}}{1-q^{2\nu}} = \sum_1^\infty f(\nu) q^{2\nu}, \quad f(\nu) = \int \nu = \text{součet dělitelů } \nu,$$

vyjde

$$24 \Sigma (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \lambda f(\nu) q^{2\nu + \frac{\lambda^2}{4}} = \Sigma (-1)^{\frac{l+1}{2}} (l^3 - l) q^{\frac{1}{4}l^2}.$$

Exponenty jsou typu $\frac{n}{4}$, kde

$$n = \lambda^2 + 8\nu \equiv 1 \ (\text{mod. } 8);$$

porovnáním součinitelů při $q^{\frac{n}{4}}$ tedy plyne

$$24 \sum_{\lambda=1,3,5,\ldots} (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \lambda f\left(\frac{n-\lambda^2}{8}\right) = \begin{cases} 0 \text{ pro } \sqrt{n} \text{ irracionální} \\ (-1)^{\frac{l+1}{2}} (l^3 - l) \text{ pro } \sqrt{n} = l. \end{cases}$$

Příklad: $n = 25$; $f\left(\frac{25-1}{8}\right) = 4$, $f\left(\frac{25-9}{8}\right) = 3$

$$24(1.4 - 3.3) = -120 = (-1)^{\frac{5+1}{2}} (5^3 - 5).$$

§ 13. Přímá verifikace základních vzorců.

Uvažujme tři dvojperiodické funkce proměnné v

$$f_1(v) = \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}, \quad f_2(v) = \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)}, \quad f_3(v) = \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)};$$

derivace funkce $f_1(v)$ jest rovněž dvojperiodická, a dává podnět k úvaze o výraze

$$\Phi = \vartheta_0(v) \,.\, \vartheta_1'(v) - \vartheta_1(v) \vartheta_0'(v);$$

$$\vartheta_1(v) = -i \sum_{\nu=\pm1,\pm3,\pm5,\ldots} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} q^{\frac{1}{4}\nu^2} \xi^\nu, \quad \vartheta_0(v) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^\mu q^{\mu^2} \xi^{2\mu}; \quad \xi = e^{v\pi i}.$$

$$\vartheta_1'(v) = \pi \Sigma (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} q^{\frac{1}{4}\nu^2} \nu \xi^\nu, \quad \vartheta_0'(v) = \pi i \Sigma (-1)^\mu q^{\mu^2} 2\mu \xi^{2\mu},$$

tedy

$$\frac{1}{\pi} \Phi = \sum_{\mu,\nu} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}+\mu} \nu q^{\frac{1}{4}\nu^2+\mu^2} \xi^{\nu-2\mu} + \sum_{\mu,\nu} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}+\mu} 2\mu q^{\frac{1}{4}\nu^2+\mu^2} \xi^{\nu-2\mu}$$

$$= \sum_{n=\pm1,\pm3,\pm5,\ldots} A_n \xi^n.$$

Při stanovení A_n třeba klásti $\nu = n + 2\mu$, a vyjde

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} A_n = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} (n + 4\mu) q^{\frac{1}{4}n^2 + 2\mu^2 + n\mu} =$$

$$= n q^{\frac{1}{4}n^2} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} q^{2\mu^2 + n\mu} + q^{\frac{1}{4}n^2} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} 4\mu q^{2\mu^2+n\mu} =$$

$$= n q^{\frac{1}{4}n^2} \vartheta_3\left(\frac{n\tau}{2} \middle| 2\tau\right) + \frac{2}{\pi i} q^{\frac{1}{4}n^2} \vartheta_3'\left(\frac{n\tau}{2} \middle| 2\tau\right),$$

takže

$$A_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} q^{\frac{1}{4}n^2} \vartheta_3 (\frac{n\tau}{2} | 2\tau) [n + \frac{2}{\pi i} \varphi (\frac{n\tau}{2})],$$

kde

$$\varphi (u) = \frac{\vartheta_3' (u | 2\tau)}{\vartheta_3 (u | 2\tau)}.$$

Patrně

$$\varphi (u + m . 2\tau) = \varphi (u) - 2m\pi i;$$

poněvadž vždy

$$\frac{n}{2} = 2m \pm \frac{1}{2}, \ \pm 1 = (-1)^{\frac{n-1}{2}},$$

máme

$$\varphi (\frac{n\tau}{2}) = \varphi (\pm \frac{\tau}{2}) - 2m\pi i$$

$$n + \frac{2}{\pi i} \varphi (\frac{n\tau}{2}) = \frac{2}{\pi i} \varphi (\pm \frac{\tau}{2}) \pm 1 =$$

$$= \pm [1 + \frac{2}{\pi i} \varphi (\frac{\tau}{2})],$$

takže vychází

$$A_n = [1 + \frac{2}{\pi i} \varphi (\frac{\tau}{2})] \cdot q^{\frac{1}{4}n^2} \vartheta_3 (\frac{n\tau}{2} | 2\tau).$$

Podobně součin

$$\Phi_1 = \vartheta_2 (v) \vartheta_3 (v) = \Sigma q^{\frac{1}{4}\nu^2 + \mu^2} \xi^{\nu - 2\mu} =$$

$$= \sum_{n = \pm 1, \pm 3, \ldots} A'_n \xi^n; \quad A'_n = \sum_{\mu = -\infty}^{\infty} q^{\frac{1}{4}n^2 + 2\mu^2 + \mu n},$$

t. j.

$$A'_n = q^{\frac{1}{4}n^2} \vartheta_3 (\frac{n\tau}{2} | 2\tau) = \frac{A_n}{1 + \frac{2}{\pi i} \varphi (\frac{\tau}{2})};$$

tedy vychází

$$\vartheta_0 (v) \vartheta_1' (v) - \vartheta_1 (v) \vartheta_0' (v) = \pi G \vartheta_2 (v) \vartheta_3 (v),$$

$$G = 1 + \frac{2}{\pi i} \varphi (\frac{\tau}{2}).$$

Pro $v = 0$ vychází

$$\pi G \vartheta_2 \vartheta_3 = \vartheta_0 \vartheta_1', \ G = \vartheta_0^2,$$

t. j.

$$\vartheta_0^2 = 1 + \frac{2}{\pi i} \varphi (\frac{\tau}{2}), \quad \varphi (u) = \frac{\vartheta_3' (u | 2\tau)}{\vartheta_3 (u | 2\tau)}. \tag{1}$$

$$\frac{d f_1 (v)}{dv} = \pi \vartheta_0^2 f_2 (v) f_3 (v). \tag{2}$$

Podobně bychom zjistili

$$\frac{d f_2 (v)}{dv} = -\pi \vartheta_3^2 f_1 (v) f_3 (v), \tag{3}$$

$$\frac{d f_3(v)}{dv} = -\pi \vartheta_2^2 f_1(v) f_2(v). \tag{4}$$

Znamenejme k vůli stručnosti

$$\pi \vartheta_0^2 = a,\ \pi \vartheta_3^2 = b,\ \pi \vartheta_2^2 = c;\ f_1(v) = x,\ f_2(v) = y,\ f_3(v) = z;$$

naše rovnice znějí

$$x' = a y z,\ y' = -b z x,\ z' = -c x y;$$

odtud

$$b x x' + a y y' = 0,\ c x x' + a z z' = 0,$$

tedy integrací

$$b x^2 + a y^2 = a \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_0^2},\ c x^2 + a z^2 = a \frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_0^2},$$

čili

$$\begin{aligned} \vartheta_3^2 f_1^2(v) + \vartheta_0^2 f_2^2(v) &= \vartheta_2^2, \\ \vartheta_2^2 f_1^2(v) + \vartheta_0^2 f_3^2(v) &= \vartheta_3^2, \end{aligned} \tag{A}$$

z čehož po zavedení symboliky $sn\,u$, $cn\,u$, $dn\,u$ máme

$$cn^2 u = 1 - sn^2 u,\ dn\,u^2 = 1 - k^2 sn^2 u,$$

$$\frac{d\,sn\,u}{du} = cn\,u\ dn\,u = \sqrt{(1 - sn^2 u)\,(1 - k^2 sn^2 u)} \quad \text{atd.}$$

Výsledek (1)

$$\vartheta_0^2 = 1 + \frac{2}{\pi i} \varphi\left(\frac{\tau}{2}\right)$$

je sám o sobě zajímavý; tu máme pro $u = \frac{\tau}{2}$

$$\vartheta_3'(u) = 2 \pi i \sum_{-\infty}^{\infty} \nu q^{2\nu^2 + \nu},$$

tedy

$$\vartheta_0^2 = 1 + 4 \frac{\Sigma \nu q^{2(\nu + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{8}}}{\Sigma q^{2(\nu + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{8}}}$$

$$\vartheta_0^2 = \frac{\sum\limits_{-\infty,\infty} (4\nu + 1)\, q^{2(\nu + \frac{1}{4})^2}}{\sum\limits_{-\infty,\infty} q^{2(\nu + \frac{1}{4})^2}} =$$

$$= \frac{q^{\frac{1}{8}} - 3 q^{\frac{9}{8}} + 5 q^{\frac{25}{8}} - 7 q^{\frac{49}{8}} + 9 q^{\frac{81}{8}} - \dots}{q^{\frac{1}{8}} + q^{\frac{9}{8}} + q^{\frac{25}{8}} + q^{\frac{49}{8}} + \dots} = \frac{1}{\pi} \frac{\vartheta_1'(0 | \frac{\tau}{2})}{\vartheta_2(0 | \frac{\tau}{2})}. \tag{1a}$$

Dále máme

$$\frac{2}{\pi i} \frac{\vartheta'_3(u | 2\tau)}{\vartheta_3(u | 2\tau)} = 4 \sum_1^{\infty} \left(\frac{q^{4\nu - 2} e^{2u\pi i}}{1 + q^{4\nu - 2} e^{2u\pi i}} - \frac{q^{4\nu - 2} e^{-2u\pi i}}{1 + q^{4\nu - 2} e^{-2u\pi i}} \right)$$

$$\frac{2}{\pi i} \varphi\left(\frac{\tau}{2}\right) = 4 \sum_1^{\infty} \left(\frac{q^{4\nu - 1}}{1 + q^{4\nu - 1}} - \frac{q^{4\nu - 3}}{1 + q^{4\nu - 3}} \right) = -4 \sum_{\lambda = 1, 3, 5, \dots} (-1)^{\frac{\lambda - 1}{2}} \frac{q^{\lambda}}{1 + q^{\lambda}}.$$

Odtud tedy známé již řady ($\lambda = 1, 3, 5, 7, \dots$)

$$\vartheta_0^2 = 1 - 4\Sigma(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \frac{q^\lambda}{1+q^\lambda} \tag{1 b}$$

a záměnou q za $-q$

$$\vartheta_3^2 = 1 + 4\Sigma(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \frac{q^\lambda}{1-q^\lambda}. \tag{1 c}$$

Z (1 a) a (1 b), t. j.

$$\vartheta_0^2 = 1 + 4\Sigma(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}+\mu} q^{\lambda\mu} = 1 + 4\Sigma s(n)\, q^n,$$

plyne pro funkci

$$s(n) = \sum_{\delta} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}+\frac{n}{\delta}} \tag{5}$$

jednoduchý vztah

$$\Sigma q^{\frac{\nu^2}{8}} + 4\Sigma q^{\frac{\nu^2}{8}+\mu} s(\mu) = \Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \nu q^{\frac{\nu^2}{8}}.$$

Součinitel při $q^{\frac{n}{8}}$, $n \equiv 1 \pmod{8}$ dává

$$4 \sum_{\nu=1,3,5,\dots} s\left(\frac{n-\nu^2}{8}\right) = \begin{cases} 0, \text{ je-li } \sqrt{n} \text{ iracionální} \\ (-1)^{\frac{l-1}{2}} l - 1 \text{ pro } \sqrt{n} = l. \end{cases} \tag{5*}$$

Příklad: $n = 65$; $s(8) + s(7) + s(5) + s(2) = 0.$
$s(8) = 1, \quad s(7) = 0, \; s(5) = -2, \; s(2) = 1.$
$n = 25$; $s(3) + s(2) = 0 + 1$; $4 = 5 - 1.$

Na základě identity

$$(2\nu + 1)^2 = 8\binom{\nu+1}{2} + 1$$

můžeme pravou stranu v (1 a) psáti

$$\frac{\Sigma(-1)^\nu (2\nu+1)\, q^{\binom{\nu+1}{2}}}{\Sigma q^{\binom{\nu+1}{2}}}$$

a máme pak identitu

$$\Sigma q^{\binom{\nu+1}{2}} + 4\Sigma s(\mu)\, q^{\mu+\binom{\nu+1}{2}} = \Sigma(-1)\,\nu\,(2\nu+1)\, q^{\binom{\nu+1}{2}},$$

z níž plyne

$$4 \sum_{\mu=0,1,2,3,\dots} s\left[n - \binom{\nu+1}{2}\right] = \begin{cases} 0, \text{ není-li } n \text{ triangulární} \\ (-1)^m (2m+1) - 1, \text{ je-li } n = \binom{m+1}{2}. \end{cases}$$

Příklad: $n = 9$; $s(9) + s(8) + s(6) + s(3) = -1 + 1 + 0 + 0 = 0$;
$n = 18$; $s(18) + s(17) + s(15) + s(12) + s(8) + s(3) =$
$= 1 - 2 + 0 + 0 + 1 + 0 = 0.$

* * *

Rovnici ($1\,a$) lze psáti

$$\vartheta_0^2 = \frac{1}{\pi} \frac{\vartheta'_1(0|\frac{\tau}{2})}{\vartheta_2(0|\frac{\tau}{2})} = \vartheta_0(0|\tfrac{\tau}{2})\,\vartheta_3(0|\tfrac{\tau}{2})$$

a poněvadž z řad theta bezprostředně plyne

$$\vartheta_0(0|\tfrac{\tau}{2}) = \vartheta_3(0|2\tau) - \vartheta_2(0|2\tau), \quad \vartheta_3 0|(\tfrac{\tau}{2}) = \vartheta_3(0|2\tau) + \vartheta_2(0|2\tau),$$

vychází

$$\vartheta_0^2 = \vartheta_3^2(0|2\tau) - \vartheta_2^2(0|2\tau). \tag{1 d}$$

Zde jest

$$\vartheta_0^2 = 1 - 4\,\Sigma(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \frac{q^\lambda}{1+q^\lambda}, \quad \vartheta_3^2(0|2\tau) = 1 + 4\,\Sigma(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \frac{q^{2\lambda}}{1-q^{2\lambda}},$$

takže

$$\vartheta_2^2(0|2\tau) = 4\,\Sigma(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \left(\frac{q^{2\lambda}}{1-q^{2\lambda}} + \frac{q^\lambda}{1+q^\lambda}\right) = 4\,\Sigma(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \frac{q^\lambda}{1-q^{2\lambda}},$$

a vymění-li se τ za $\frac{\tau}{2}$:

$$\vartheta_2^2 = 4\,\Sigma(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \frac{q^{\frac{\lambda}{2}}}{1-q^\lambda}, \quad (\lambda = 1, 3, 5, \ldots). \tag{1 e}$$

Radu ($1\,c$) převeďme v dvojnásobnou

$$\Sigma(-1)^\mu q^{(2\mu+1)\nu} \quad (\mu \geq 0, \ \nu > 0)$$

a štěpme ji ve dvě I ($\nu > \mu$) a II ($\mu \geqq \nu$).

V první pišme $\nu = \mu + \alpha$,

$$I = \Sigma(-1)^\mu q^{(2\mu+1)(\mu+\alpha)} = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu q^{(2\mu+1)(\mu+1)} \frac{1}{1-q^{2\mu+1}},$$

$$II = \Sigma(-1)^{\nu+\alpha} q^{(2\nu+1+2\alpha)\nu} = \sum_{1}^{\infty} (-1)^\nu q^{\nu(2\nu+1)} \frac{1}{1+q^{2\nu}},$$

takže máme rychle konvergentní řadu

$$\vartheta_3^2 = 1 + 4\sum_1^\infty (-1)^\nu \frac{q^{2\nu^2+\nu}}{1+q^{2\nu}} - 4\sum_1^\infty (-1)^\nu \frac{q^{2\nu^2-\nu}}{1-q^{2\nu-1}}.$$

Podobně máme z ($1\,e$)

$$\vartheta_2^2 = 4\,\Sigma(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} q^{\frac{1}{2}\lambda^2} + 4\,\Sigma(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} q^{\frac{1}{2}\lambda^2+\lambda} \left(\frac{1}{1-q^\lambda} - \frac{1}{1+q^\lambda}\right) =$$

$$= 4 \sum_{\lambda=1,3,5,\ldots} (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} q^{\frac{1}{2}\lambda^2} \left\{1 + \frac{2q^{2\lambda}}{1-q^{2\lambda}}\right\}.$$

* * *

Vzorce (A) lze považovati za kvadratické vztahy mezi funkcemi $\vartheta_\nu(v)$

$$\vartheta_0^2 \vartheta_2^2(v) = \vartheta_2^2 \vartheta_0^2(v) - \vartheta_3^2 \vartheta_1^2(v),$$
$$\vartheta_0^2 \vartheta_3^2(v) = \vartheta_3^2 \vartheta_0^2(v) - \vartheta_2^2 \vartheta_1^2(v).$$

K těmto vztahům připojme ještě určení funkce $\vartheta_1(2u)$; její nulová místa jsou až na periody $m + n\tau$ patrně $0, \frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{1+\tau}{2}$, tedy souhrn nulových míst funkcí $\vartheta_1(u), \vartheta_2(u), \vartheta_0(u), \vartheta_3(u)$, která jsou vespolek různá; tudíž podíl

$$f(u) = \frac{\vartheta_1(2u)}{\vartheta_0(u)\vartheta_1(u)\vartheta_2(u)\vartheta_3(u)}$$

je transcendenta celistvá; mimo to jest

$$f(u+1) = f(u), \; f(u+\tau) = f(u);$$

pro reálná u jest $f(u)$ reálné; rovněž pro ryze pomyslná. Funkce $f(u)$ je reálnou na obvodě obdélníku $(O;\ 1, \tau)$ a tedy konstantou:

$$f(u) = \frac{2}{\vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3},$$
$$\vartheta_1(2u) = \frac{2\vartheta_1(u)\vartheta_0(u)\vartheta_2(u)\vartheta_3(u)}{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}.$$

Aby verifikace byla úplná, třeba ještě odvoditi věty addiční platné pro funkce theta. Tu již jsou však dány předpoklady pro důkaz vzorce (1) vyložený v § 6

$$\frac{H'(0)^2 H(u+v) H(u-v)}{H^2(u) H^2(v)} = \frac{1}{sn^2 v} - \frac{1}{sn^2 u},$$

a z něho plynoucí vztah (2)

$$\frac{H'(0)^2 H(u+v) H(u-v)}{k^2 \Theta^2(u) \Theta^2(v)} = sn^2 u - sn^2 v,$$

poněvadž vzorce pro

$$sn(u+c), \; cn(u+c), \; dn(u+c), \; c = K, \; iK', \; K + iK'$$

odpovídají vzorcům pro

$$\vartheta_\nu\left(v + \frac{1}{2}\right), \; \vartheta_\nu\left(v + \frac{\tau}{2}\right), \; \vartheta_\nu\left(v + \frac{1+\tau}{2}\right),$$

a netřeba je zvláště odvozovati.

Odstraňme jmenovatele a obdržíme po zavedení funkcí ϑ

$$\vartheta_0^2 \vartheta_1(u+v)\vartheta_1(u-v) = \vartheta_0^2(v)\vartheta_1^2(u) - \vartheta_0^2(u)\vartheta_1^2(v), \tag{6}$$

při čemž určení konstanty se stane nejpohodlněji v novém tvaru substitucí $u=0$.

Dále jsou funkce

$$\frac{\vartheta_0(u+v)\vartheta_1(u-v)+\vartheta_0(u-v)\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_0(u)\vartheta_1(u)}=F_1(u),$$

$$\frac{\vartheta_0(u+v)\vartheta_1(u-v)-\vartheta_0(u-v)\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_2(u)\vartheta_3(u)}=F_2(u)$$

synektické. Neboť u $F_1(u)$ vymizí čitatel pro $u=0$, a pro $u=\frac{\tau}{2}$, kdy $\vartheta_0(u)=0$, je čitatel dle základních vzorců

$$-e^{-2\pi i.\frac{\tau}{4}}\vartheta_1(v)\vartheta_0(-v)-e^{-2\pi i.\frac{\tau}{4}}\vartheta_1(-v)\vartheta_0(v)=0;$$

podobně u $F_2(u)$ je pro $u=\frac{1}{2}$ čitatel

$$\vartheta_3(v)\vartheta_2(-v)-\vartheta_3(-v)\vartheta_2(v)=0,$$

a pro $u=\dfrac{1+\tau}{2}$

$$e^{-2\pi i\frac{\tau}{4}}\vartheta_2(v)\,.\,\vartheta_3(-v)-e^{-2\pi i\frac{\tau}{4}}\vartheta_2(-v)\vartheta_3(v)=0.$$

Poněvadž funkce ty mají periody 1 a τ, jsou synektické v celé rovině. Volíme-li dále v reálné, jsou obě funkce reálné pro reálná u, a také pro u ryze pomyslná; neboť pro $u=ix$ jest

$$F_1(ix)=\frac{-\vartheta_0(v+ix)\vartheta_1(v-ix)+\vartheta_0(v-ix)\vartheta_1(v+ix)}{\vartheta_0(ix)\vartheta_1(ix)}$$

a tedy čitatel jako rozdíl sdružených veličin ryze pomyslný, tedy zlomek reálný. Podobně u $F_2(ix)$ jsou oba členy zlomku reálné.

Funkce $F_1(u)$, $F_2(u)$ jsouce na obdélníku $(0;1,\tau)$ synektické a na okraji reálné, jsou stálé a sice jest $(u=0)$

$$F_2=-\frac{2\,\vartheta_0(v)\vartheta_1(v)}{\vartheta_2\vartheta_3}$$

a (pro $u=\frac{1}{2}$)

$$F_1=\frac{2\,\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)}{\vartheta_2\vartheta_3}.$$

Z našich zlomků odstraňme nejprve jmenovatele a sečteme výsledky i obdržíme

$$\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0(u+v)\vartheta_1(u-v)=\vartheta_0(u)\vartheta_1(u)\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)-\\-\vartheta_0(v)\vartheta_1(v)\vartheta_2(u)\vartheta_3(u). \tag{7}$$

Zcela podobně nalezneme

$$\vartheta_0(u+v)\vartheta_2(u-v)+\vartheta_0(u-v)\vartheta_2(u+v)=\frac{2\vartheta_0(u)\vartheta_2(u)\vartheta_0(v)\vartheta_2(v)}{\vartheta_0\vartheta_2},$$

$$\vartheta_0(u+v)\vartheta_2(u-v)-\vartheta_0(u-v)\vartheta_2(u+v)=\frac{2\vartheta_1(u)\vartheta_3(u)\vartheta_1(v)\vartheta_3(v)}{\vartheta_0\vartheta_2},$$

$$\vartheta_0(u+v)\vartheta_3(u-v)+\vartheta_0(u-v)\vartheta_3(u+v)=\frac{2\vartheta_0(u)\vartheta_3(u)\vartheta_0(v)\vartheta_3(v)}{\vartheta_0\vartheta_3},$$

$$\vartheta_0(u+v)\vartheta_3(u-v)-\vartheta_0(u-v)\vartheta_3(u+v)=\frac{2\vartheta_1(u)\vartheta_2(u)\vartheta_1(v)\vartheta_2(v)}{\vartheta_0\vartheta_3},$$

takže vycházejí vztahy

$$\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_0(u+v)\vartheta_2(u-v)=\vartheta_0(u)\vartheta_2(u)\vartheta_0(v)\vartheta_2(v)+\vartheta_1(u)\vartheta_3(u)\vartheta_1(v)\vartheta_3(v), \quad (8)$$

$$\vartheta_0\vartheta_3\vartheta_0(u+v)\vartheta_3(u-v)=\vartheta_0(u)\vartheta_3(u)\vartheta_0(v)\vartheta_3(v)+\vartheta_1(u)\vartheta_2(u)\vartheta_1(v)\vartheta_2(v). \quad (9)$$

Z (6) plyne pak ještě dosazením $u+\frac{1}{2}$ a $u+\frac{1+\tau}{2}$

$$\vartheta_0^2\vartheta_2(u+v)\vartheta_2(u-v)=\vartheta_0^2(v)\vartheta_2^2(u)-\vartheta_3^2(u)\vartheta_1^2(v), \quad (8^0)$$

$$\vartheta_0^2\vartheta_3(u+v)\vartheta_3(u-v)=\vartheta_0^2(v)\vartheta_3^2(u)-\vartheta_2^2(u)\vartheta_1^2(v). \quad (9^0)$$

Dělením výrazů (6) a (7), pak (8^0), (8) a (9^0), (9) vycházejí věty addiční

$$\frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_2\vartheta_3}f_1(u+v)=\frac{f_1^2(u)-f_1^2(v)}{f_1(u)f_2(v)f_3(v)-f_1(v)f_2(u)f_3(u)},$$

$$\frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}f_2(u+v)=\frac{f_2^2(u)-f_3^2(u)f_1^2(v)}{f_2(u)f_2(v)+f_1(u)f_3(v)f_1(v)f_3(v)},$$

$$\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}f_3(u+v)=\frac{f_3^2(u)-f_2^2(u)f_1^2(v)}{f_3(u)f_3(v)+f_1(u)f_2(u)f_1(v)f_2(v)}.$$

Zde dosaďme $\frac{u}{2K}, \frac{v}{2K}$ za u a v, a užijme hodnot

$$f_1\left(\frac{u}{2K}\right)=\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\,sn\,u,\quad f_2\left(\frac{u}{2K}\right)=\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0}\,cn\,u,$$

$$f_3\left(\frac{u}{2K}\right)=\frac{\vartheta_3}{\vartheta_0}\,dn\,u,$$

a obdržíme nejprve

$$sn(u+v)=\frac{sn^2u-sn^2v}{sn\,u\,cn\,v\,dn\,v-sn\,v\,cn\,u\,dn\,u},$$

$$cn(u+v)=\frac{cn^2u-dn^2u\,sn^2v}{cn\,u\,cn\,v+sn\,u\,dn\,u\,sn\,v\,dn\,v},$$

$$dn(u+v)=\frac{dn^2u-k^2cn^2u\,sn^2v}{dn\,u\,dn\,v+k^2sn\,u\,sn\,v\,cn\,u\,cn\,v}.$$

U prvního z těchto vzorců rozšiřme zlomek výrazem, který ze jmenovatele vychází změnou znaménka — za +. Při označení

$$snu = s,\quad snv = s_1$$

máme pak

$$sn(u+v) = \frac{(s^2 - s_1^2)(snu\, cnv\, dnv + snv\, cnu\, dnu)}{s^2[1-(1+k^2)s_1^2 + k^2 s_1^4] - s_1^2[1-(1+k^2)s^2 + k^2 s^4]};$$

jmenovatel přejde na $(s^2 - s_1^2)(1 - k^2 s^2 s_1^2)$, a tak známý vztah

$$sn(u+v) = \frac{snu\, cnv\, dnv + snv\, cnu\, dnu}{1 - k^2 sn^2 u\, sn^2 v}. \tag{α}$$

Počínáme-li si podobně u druhého zlomku, objeví se ve jmenovateli

$$\begin{aligned} & cn^2 u\, cn^2 v - sn^2 u\, dn^2 u\, sn^2 v\, dn^2 v = \\ & = 1 - (s^2 + s_1^2) + s^2 s_1^2 [k^2(s^2 + s_1^2) - k^4 s^2 s_1^2] = \\ & = 1 - k^4 s^4 s_1^4 - (s^2 + s_1^2)(1 - k^2 s^2 s_1^2) = \\ & = (1 - k^2 s^2 s_1^2)(1 + k^2 s^2 s_1^2 - s^2 - s_1^2). \end{aligned}$$

Činitel

$$1 + k^2 s^2 s_1^2 - s^2 - s_1^2 = cn^2 u - dn^2 u\, sn^2 v$$

krátí se proti čitateli a zbývá

$$cn(u+v) = \frac{cnu\, cnv - snu\, dnu\, snv\, dnv}{1 - k^2 sn^2 u\, sn^2 v}. \tag{β}$$

Při úpravě třetího zlomku $dn(u+v)$ vyskytne se ve jmenovateli

$$\begin{aligned} & dn^2 u\, dn^2 v - k^4 sn^2 u\, sn^2 v\, cn^2 u\, cn^2 v = \\ & = 1 - k^2(s^2 + s_1^2) + k^4 s_1^2 s^2 - k^4 s^2 s_1^2 (1 - s^2 - s_1^2 + s^2 s_1^2) = \\ & = 1 - k^4 s^4 s_1^4 - k^2 (s^2 + s_1^2)(1 - k^2 s^2 s_1^2) = \\ & = (1 - k^2 s^2 s_1^2)(1 + k^2 s^2 s_1^2 - k^2 s^2 - k^2 s_1^2) \end{aligned}$$

a vyjde

$$dn(u+v) = \frac{dnu\, dnv - k^2 snu\, snv\, cnu\, cnv}{1 - k^2 sn^2 u\, sn^2 v}. \tag{γ}$$

Vzorce (β) a (γ) dávají bezprostředně

$$cn(u+v) = cnu\, cnv - snu\, snv\, dn(u+v); \tag{δ}$$

píšeme-li jej pro argumenty $u + v$, $-v$, vyjde

$$cnu = cn(u+v)\, cnv + sn(u+v)\, snv\, dnu. \tag{ε}$$

Znamenejme

$$amu = \varphi,\quad amv = \psi,\quad am(u+v) = \sigma,$$

naše vzorce pak znějí

$$\begin{aligned} \cos\sigma &= \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi\, \Delta\sigma, \\ \cos\varphi &= \cos\sigma \cos\psi + \sin\sigma \sin\psi\, \Delta\varphi. \end{aligned}$$

Do druhého vložme za $\cos\sigma$ výraz první:

$$\cos\varphi = \cos\varphi\cos^2\psi + \sin\sigma\sin\psi\,\Delta\varphi - \sin\varphi\sin\psi\cos\psi\,\Delta\sigma;$$

první člen zprava převedeme na levou stranu a krátíme $\sin\psi$; vyjde

$$\Delta\varphi = \frac{\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\,\Delta\sigma}{\sin\sigma};$$

podobně

$$\Delta\psi = \frac{\cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\varphi\,\Delta\sigma}{\sin\sigma},$$

a odtud (věta o součtu amplitud)

$$\Delta\varphi + \Delta\psi = \frac{\Delta\sigma + 1}{\sin\sigma}\sin(\varphi + \psi),\quad \Delta\varphi - \Delta\psi = \frac{\Delta\sigma - 1}{\sin\sigma}\sin(\varphi - \psi). \qquad (\eta)$$

Vzorce (α) a (β) dávají dělením

$$\operatorname{tg} am(u+v) = \frac{\operatorname{tg} am u \,.\, dn v + \operatorname{tg} am v\, dn u}{1 - \operatorname{tg} am u \operatorname{tg} am v\, dn u\, dn v},$$

t. j.

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{\operatorname{tg}\varphi\,\Delta\psi + \operatorname{tg}\psi\,\Delta\varphi}{1 - \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi\,\Delta\varphi\,\Delta\psi};$$

při počítání $\operatorname{tg} am(u+v)$ za daných φ, ψ zavedeme úhly ω a ϑ

$$\operatorname{tg}\varphi\,\Delta\psi = \operatorname{tg}\omega,\quad \operatorname{tg}\psi\,\Delta\varphi = \operatorname{tg}\vartheta,$$

načež

$$\operatorname{tg} am(u+v) = \operatorname{tg}(\omega + \vartheta).$$

Položme $\frac{u}{2}$ za u a v:

$$\operatorname{tg} am u = \operatorname{tg} 2\omega,\quad \operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg} am\frac{u}{2}\, dn\frac{u}{2}$$

a dle (η)

$$\frac{dn\frac{u}{2}}{sn\frac{u}{2}\, cn\frac{u}{2}} = \frac{dn u + 1}{sn u};$$

obě rovnice dají

$$sn^2\frac{u}{2} = \operatorname{tg}\omega \,.\, \frac{sn u}{dn u + 1} = \operatorname{tg}\omega \,.\, \frac{\sin 2\omega}{1 + \Delta(2\omega)},$$

$$sn\frac{u}{2} = \sin\omega\sqrt{\frac{2}{1 + \Delta(2\omega)}};\quad \operatorname{tg} 2\omega = \frac{sn u}{cn u}.$$

Odtud pak vzhledem k výrazu $\operatorname{tg}\omega$

$$\frac{cn\frac{u}{2}}{dn\frac{u}{2}} = \cos\omega\sqrt{\frac{2}{1 + \Delta(2\omega)}},\quad cn\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{\Delta(2\omega) + \cos 2\omega}{1 + \Delta(2\omega)}},$$

$$\frac{1}{dn\frac{u}{2}} = \cos\omega \sqrt{\frac{2}{\Delta(2\omega) + \cos 2\omega}}.$$

Ze vzorce (α) máme ($u = v$)

$$sn\, 2u = \frac{2\, sn\, u\, cn\, u\, dn\, u}{1 - k^2 sn^4 u};$$

identity

$$1 - k^2 sn^4 u = cn^2 u + sn^2 u\, dn^2 u = dn^2 u + k^2 sn^2 u\, cn^2 u$$

umožňují tvar*

$$1 + sn\, 2u = \frac{(cn\, u + sn\, u\, dn\, u)^2}{1 - k^2 sn^4 u}, \quad 1 + k\, sn\, 2u = \frac{(dn\, u + k\, sn\, u\, cn\, u)^2}{1 - k^2 sn^4 u}.$$

Dále máme

$$cn\, 2u = \frac{cn^2 u - sn^2 u\, dn^2 u}{1 - k^2 sn^4 u};$$

čitatel $= 1 - 2s^2 + k^2 s^4$, tedy

$$1 + cn\, 2u = \frac{2(1 - s^2)}{1 - k^2 s^4}, \qquad s = sn\, u,$$

t. j.

$$1 + cn\, 2u = \frac{2\, cn^2 u}{1 - k^2 sn^4 u}, \quad 1 - cn\, 2u = \frac{2\, sn^2 u\, dn^2 u}{1 - k^2 sn^4 u}.$$

Konečně poskytne

$$dn\, 2u = \frac{dn^2 u - k^2 sn^2 u\, cn^2 u}{1 - k^2 sn^4 u}$$

vztahy

$$1 + dn\, 2u = \frac{2\, dn^2 u}{1 - k^2 sn^4 u}, \quad 1 - dn\, 2u = \frac{2 k^2 sn^2 u\, cn^2 u}{1 - k^2 sn^4 u}.$$

Odtud plynou jednoduché vzorce

$$\sqrt{\frac{1 - cn\, 2u}{1 + cn\, 2u}} = -\frac{d \log cn\, u}{du}, \quad \sqrt{\frac{1 - dn\, 2u}{1 + dn\, 2u}} = -\frac{1}{k} \frac{d \log dn\, u}{du}.$$

Konečně

$$dn\, 2u + k'\, sn\, 2u = \frac{(k'\, sn\, u + cn\, u\, dn\, u)^2}{1 - k^2 sn^4 u}.$$

Poněvadž jmenovatel $1 - k^2 sn^4 u$ má derivaci $-4k^2 sn^3 u\, cn\, u\, dn\, u$, která s ním nikdy současně nemizí, jsou jeho nullová místa 1. stupně. Z funkcí

$$\sqrt{1 \pm sn\, u}, \quad \sqrt{1 \pm k\, sn\, u}, \quad \sqrt{1 \pm cn\, u}, \quad \sqrt{1 \pm dn\, u}, \quad \sqrt{dn\, u \pm k'\, sn\, u} \qquad (10)$$

---

* Hermite, Note etc. p. 814.

žádná není jednoznačná, je však jednoznačnou funkcí podíl a součin každých dvou z nich.

Můžeme k nim připojiti $e^{\frac{1}{2} i am u}$, poněvadž

$$e^{iam u} = cn u + i sn u = \frac{\left(cn \frac{u}{2} + i sn \frac{u}{2} dn \frac{u}{2}\right)^2}{1 - k^2 sn^4 \frac{u}{2}}.$$

Kromě uvedených rovnic zasluhují zmínku ještě následující, kde $s = sn u$:

$$(dn 2u - k')(1 - k^2 sn^4 u) = 1 - 2k^2 s^2 + (1 + k') k^2 s^4 - k';$$

po dosazení $k^2 = (1 + k')(1 - k')$ přejde pravá strana v

$$(1 - k')[1 - (1 + k') s^2]^2,$$

tedy

$$dn 2u - k' = (1 - k') \frac{[1 - (1 + k') sn^2 u]^2}{1 - k^2 sn^4 u},$$

$$dn 2u + k' = (1 + k') \frac{[1 - (1 - k') sn^2 u]^2}{1 - k^2 sn^4 u},$$

$$\frac{dn 2u - k'}{dn 2u + k'} = \frac{1 - k'}{1 + k'} \left(\frac{cn^2 u - k' sn^2 u}{cn^2 u + k' sn^2 u}\right)^2.$$

Dále jest

$$(k cn 2u + i k')(1 - k^2 s^4) = k(1 - s^2) - k s^2 (1 - k^2 s^2) + i k' - i k' k^2 s^4 =$$
$$= k + i k' - 2k s^2 + k^2 (k - i k') s^4,$$

což vzhledem k identitě $(k + ik')(k - ik') = 1$ lze psáti

$$(k + ik')[1 - 2k(k - ik') s^2 + k^2 (k - ik')^2 s^4],$$

tedy

$$\frac{k cn 2u + ik'}{k + ik'} = \frac{[1 - k(k - ik') sn^2 u]^2}{1 - k^2 sn^4 u} = \frac{[dn^2 u + ikk' sn^2 u]^2}{1 - k^2 sn^4 u},$$

$$\frac{k cn 2u + ik'}{k cn 2u - ik'} = \frac{k + ik'}{k - ik'} \left(\frac{dn^2 u + ikk' sn^2 u}{dn^2 u - ikk' sn^2 u}\right)^2.$$

Konečně

$$dn 2u + cn 2u = \frac{2 cn^2 u \, dn^2 u}{1 - k^2 sn^4 u}, \qquad dn 2u - cn 2u = \frac{2 k'^2 sn^2 u}{1 - k^2 sn^4 u},$$

$$\frac{dn 2u + k cn 2u}{1 + k} = \frac{1 - k sn^2 u}{1 + k sn^2 u}.$$

Vyjádříme-li funkce $1 \pm sn u$ elliptickými transcendentami $H\left(\frac{u}{2}\right)$, $\Theta\left(\frac{u}{2}\right)$ objeví se jako společný jmenovatel

$$\Theta^4\left(\frac{u}{2}\right)\left(1 - k^2 sn^4 \frac{u}{2}\right) = \Theta^4\left(\frac{u}{2}\right) - H^4\left(\frac{u}{2}\right).$$

Tato funkce vymizí na místech, na nichž $sn\,u = \infty$, tedy zároveň s $\Theta(u)$, a podíl

$$f(u) = \frac{\Theta^4\left(\frac{u}{2}\right) - H^4\left(\frac{u}{2}\right)}{\Theta(u)}$$

má zřejmě periody $4K$ a $4iK'$; je pak reálným na obvodě obdélníka $(0;\, 4K,\, 4iK')$, musí tedy jakožto funkce synektická býti stálou veličinou; $u = 0$ dává

$$f(0) = \Theta^3(0),$$

takže

$$\Theta^4\left(\frac{u}{2}\right) - H^4\left(\frac{u}{2}\right) = \vartheta_0^3\, \Theta(u),$$

$$\vartheta_0^4(v) - \vartheta_1^4(v) = \vartheta_0^3\, \vartheta_0(2v)$$

a dosadíme-li $v + \frac{1}{2}$

$$\vartheta_3^4(v) - \vartheta_2^4(v) = \vartheta_0^3\, \vartheta_0(2v). \tag{11}$$

Vložme sem

$$\vartheta_3(v) = \sum_{a}^{-\infty,\,\infty} q^{a^2} \xi^{2a},\quad \vartheta_2(v) = \sum_{\alpha = \pm 1,\, \pm 3,\, \pm 5,\ldots} q^{\frac{\alpha^2}{4}} \xi^{\alpha},\quad \xi = e^{v\pi i},$$

zní levá strana

$$\sum_{a,b,c,d} q^{a^2+b^2+c^2+d^2} \xi^{2(a+b+c+d)} - \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} q^{\frac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)} \xi^{\alpha+\beta+\gamma+\delta}.$$

Stálé členy v těchto řadách vzniknou z podmínek

$$a + b + c + d = 0,\quad \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$$

a odtud máme identitu

$$\vartheta_0^3 = \sum q^{a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2} - \sum q^{\frac{1}{4}[\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+(\alpha+\beta+\gamma)^2]}. \tag{11⁰}$$

Zde můžeme vyměnit q za $-q$,

$$\vartheta_3^3 = \sum_{a,b,c}^{-\infty,\,\infty} q^{a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2} + \sum_{\alpha,\beta,\gamma} q^{\frac{1}{4}[\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+(\alpha+\beta+\gamma)^2]}. \tag{11¹}$$

První řada obsahuje samé mocnosti sudé, druhá se skládá z mocností lichých; odtud soudíme, že

rozkladů čísla n ve tři čtverce

$$(n = x^2 + y^2 + z^2;\ x, y, z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

je tolik jako rozkladů

$$n = a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2,\ (a, b, c, = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

je-li n sudé, ale tolik jako rozkladů

$$4n = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + (\alpha + \beta + \gamma)^2, (\alpha, \beta, \gamma = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots)$$

je-li n liché.

Tyto rozklady tedy neexistují pro čísla tvaru $4k+7$, která nelze rozložiti ve tři čtverce.

Pro $n=13$ máme $n=0^2+2^2+3^2$, což dává $3\times 4=12$ řešení.

Rovnice

$$52=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+(\alpha+\beta+\gamma)^2$$

má řešení

$$\alpha=\pm 1,\ \beta=\pm 5,\ \gamma=\mp 5;$$

máme tak dvě řady

$$1, 5, -5;\ -1, 5, -5$$

a jejich permutace; počet rozkladů $=6+6=12$.

* * *

Na konec ještě proveďme transformaci čtverců $\vartheta_2^2(u)$, $\vartheta_3^2(u)$.

Nejprve násobme vespolek řady

$$\vartheta_3(u)=\sum_{-\infty}^{\infty} q^{\mu^2}\xi^{2\mu}=\sum_{-\infty}^{\infty} q^{\nu^2}\xi^{-2\nu},\quad \xi=e^{u\pi i},$$

a v součinu

$$\vartheta_3^2(u)=\sum_{\mu,\nu} q^{\mu^2+\nu^2}\xi^{2(\mu-\nu)}$$

stanovme koeficient při ξ^{2n}; položíme $\mu-\nu=n$ a obdržíme

$$\vartheta_3^2(u)=\sum_{-\infty}^{\infty} C_n\,\xi^{2n},$$

kde

$$C_n=q^{n^2}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} q^{2n\nu+2\nu^2}=q^{n^2}\vartheta_3(n\tau\,|\,2\tau).$$

Zjednodušení tohoto výrazu závisí na paritě čísla n; pro n liché máme

$$\vartheta_3(n\tau\,|\,2\tau)=\vartheta_3\left(\tau+\frac{n-1}{2}2\tau\,\middle|\,2\tau\right)=e^{-\frac{n-1}{2}\pi i\left(2\tau+\frac{n-1}{2}2\tau\right)}\vartheta_3(\tau\,|\,2\tau)$$

tedy

$$C_n=q^{\frac{n^2}{2}+\frac{1}{2}}\vartheta_3(\tau\,|\,2\tau)=q^{\frac{n^2}{2}}\vartheta_2(0\,|\,2\tau),$$

a příslušná část nalezené řady zní tedy $(n=\pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots)$

$$I=\sum q^{\frac{n^2}{2}}\xi^{2n}\,.\,\vartheta_2(0\,|\,2\tau)=\vartheta_2(0\,|\,2\tau)\,\vartheta_2(2u\,|\,2\tau).$$

Pro sudá n jest

$$\vartheta_3(n\tau\,|\,2\tau)=\vartheta_3\left(\frac{n}{2}\,.\,2\tau\,\middle|\,2\tau\right)=q^{-\frac{n^2}{2}}\vartheta_3(0\,|\,2\tau)$$

a příslušná část řady $(n=\pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots)$ má hodnotu

$$II=\vartheta_3(0\,|\,2\tau)\sum q^{\frac{n^2}{2}}\xi^{2n}=\vartheta_3(0\,|\,2\tau)\,\vartheta_3(2u\,|\,2\tau),$$

a tak získáváme vztah

$$\vartheta_3^2(u)=\vartheta_2(0|2\tau)\,\vartheta_2(2u|2\tau)+\vartheta_3(0|2\tau)\,\vartheta_3(2u|2\tau). \tag{12}$$

Dosaďme $u+\frac{\tau}{2}$; vzorce

$$\vartheta_3(u+\frac{\tau}{2})=e^{-\pi i(u+\frac{1}{4}\tau)}\vartheta_2(u),\ \vartheta_2(2u+\tau|2\tau)=e^{-\pi i(2u+\frac{1}{2}\tau)}\vartheta_3(2u|2\tau)$$

podají — společný činitel exponenciální odpadne —

$$\vartheta_2^2(u)=\vartheta_2(0|2\tau)\,\vartheta_3(2u|2\tau)+\vartheta_3(0|2\tau)\,\vartheta_2(2u|2\tau). \tag{12'}$$

Z (12) a (12′) plyne při označení $\Theta_\nu(v)=\vartheta_\nu(v|2\tau)$

$$\begin{aligned}\vartheta_3^2(u)-\vartheta_2^2(u)&=(\Theta_3-\Theta_2)\,[\Theta_3(2u)-\Theta_2(2u)],\\ \vartheta_3^2(u)+\vartheta_2^2(u)&=(\Theta_3+\Theta_2)\,[\Theta_3(2u)+\Theta_2(2u)].\end{aligned} \tag{α}$$

Je však při $e^{v\pi i}=\zeta$

$$\Theta_3(v)+\Theta_2(v)=\Sigma q^{2\alpha^2}\zeta^{2\alpha}+\Sigma q^{\frac{1}{2}\beta^2}\zeta^{\beta} \qquad \begin{pmatrix}\alpha=0,\pm 1,\pm 2,\ldots\\ \beta=\pm 1,\pm 3,\pm 5,\ldots\end{pmatrix}$$

a obě řady se shrnou v jedinou

$$\sum_{-\infty}^{\infty} q^{\frac{1}{2}\nu^2}\zeta^{\nu}=\vartheta_3(\frac{v}{2}\,|\,\frac{\tau}{2}),$$

což dává

$$\vartheta_3(v|2\tau)+\vartheta_2(v|2\tau)=\vartheta_3(\frac{v}{2}\,|\,\frac{\tau}{2}), \tag{13}$$

podobně

$$\vartheta_3(v|2\tau)-\vartheta_2(v|2\tau)=\vartheta_0(\frac{v}{2}\,|\,\frac{\tau}{2}), \tag{13'}$$

takže naše poslední rovnice (α) znějí

$$\vartheta_3^2(u|\tau)-\vartheta_2^2(u|\tau)=\vartheta_0(0\,|\,\frac{\tau}{2})\,\vartheta_0(u\,|\,\frac{\tau}{2}), \tag{14}$$

$$\vartheta_3^2(u|\tau)+\vartheta_2^2(u|\tau)=\vartheta_3(0\,|\,\frac{\tau}{2})\,\vartheta_3(u\,|\,\frac{\tau}{2}). \tag{14'}$$

Násobením těchto rovnic vychází

$$\vartheta_3^4(u)-\vartheta_2^4(u)=\vartheta_0(0\,|\,\frac{\tau}{2})\,\vartheta_3(0\,|\,\frac{\tau}{2})\,\vartheta_0(u\,|\,\frac{\tau}{2})\,\vartheta_3(u\,|\,\frac{\tau}{2}). \tag{15}$$

(14) dá pro $u=\frac{1}{2}$

$$\vartheta_0(0\,|\,\frac{\tau}{2})\,\vartheta_3(0\,|\,\frac{\tau}{2})=\vartheta_0^2, \tag{16}$$

takže se (15) přepíše na

$$\vartheta_3^4(u)-\vartheta_2^4(u)=\vartheta_0^2\,\vartheta_0(u\,|\,\frac{\tau}{2})\,\vartheta_3(u\,|\,\frac{\tau}{2}) \tag{15*}$$

a hořejší vztah (11) pak poskytne

$$\vartheta_0(u\,|\,\frac{\tau}{2})\,\vartheta_3(u\,|\,\frac{\tau}{2})=\vartheta_0\,\vartheta_0(2\,u). \tag{16}$$

Ze (14) a (14′) vychází dělením

$$\frac{dn^2(2\,Ku\,|\,\tau)-k\,cn^2(2\,Ku\,|\,\tau)}{dn^2(2\,Ku\,|\,\tau)+k\,cn^2(2\,Ku\,|\,\tau)}=\frac{l'}{dn(2\,Lu\,|\,\frac{\tau}{2})},$$

$$l=k(\frac{\tau}{2}),\ L=K(\frac{\tau}{2}).$$

Pišme nyní u za $2\,Ku$, $2\,v$ za $2\,Lu$, tedy

$$v=\frac{Lu}{2\,K}=\frac{1+k}{2}\,u,$$

rovnice bude

$$\frac{dn^2(u,k)-k\,cn^2(u,k)}{dn^2(u,k)+k\,cn^2(u,k)}=\frac{l'}{dn(2\,v,l)}. \tag{17}$$

Při $x=sn^2\,u$ zní levá strana

$$\frac{1-k}{1+k}\cdot\frac{1+kx}{1-kx}=l'\,\frac{1+kx}{1-kx},$$

a řešením plyne odtud

$$kx=k\,sn^2(u,k)=\frac{1-dn(2\,v,l)}{1+dn(2\,v,l)}=\left(\frac{l\,sn\,v\,cn\,v}{dn\,v}\right)^2,$$

t. j. transformace Landenova

$$sn(u,k)=\frac{2}{1+k}\,\frac{sn(v,l)\,cn(v,l)}{dn(v,l)}; \tag{17a}$$

$$l=\frac{2\sqrt{k}}{1+k},\ v=\frac{1+k}{2}\,u.$$

Výpočet podal zároveň

$$dn(2\,v,l)=\frac{1-k\,sn^2(u,k)}{1+k\,sn^2(u,k)}. \tag{17b}$$

Hodnoty l a L plynou z našich vzorců přímo; (14) a (14′) dává pro $u=0$

$$\vartheta_3^2+\vartheta_2^2=\vartheta_3^2(0\,|\,\frac{\tau}{2}),\ \vartheta_3^2-\vartheta_2^2=\vartheta_0^2(0\,|\,\frac{\tau}{2}),$$

z čehož

$$l'=\frac{1-k}{1+k};\ \frac{2}{\pi}\,L=\vartheta_3^2(0\,|\,\frac{\tau}{2})=(1+\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2})\,\vartheta_3^2,$$

t. j.

$$\frac{2}{\pi}\,L=(1+k)\,\frac{2}{\pi}\,K,\ \frac{L}{K}=1+k.$$

Hlava III.

§ 1. Některé integrační vzorce.

Vedle diferenciální rovnice

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

kterou se definuje funkce

$$x = sn\, u,$$

vyskytují se ještě další, které tu sestavíme v tabulku:

$$x = cn\, u, \quad \frac{dx}{du} = -k' \sqrt{(1-x^2)\left(1+\frac{k^2}{k'^2}x^2\right)};$$

$$x = dn\, u, \quad \frac{dx}{du} = -\sqrt{(1-x^2)(x^2-k'^2)};$$

$$x = \operatorname{tg} \operatorname{am} u, \quad \frac{dx}{du} = \sqrt{(1+x^2)(1+k'^2x^2)};$$

$$x = \operatorname{cotg} \operatorname{am} u, \quad \frac{dx}{du} = -\sqrt{1+x^2)(k'^2+x^2)};$$

$$x = \frac{1}{cn\, u}, \quad \frac{dx}{du} = +k' \sqrt{(x^2-1)\left(x^2+\frac{k^2}{k'^2}\right)};$$

$$x = \frac{1}{sn\, u}, \quad \frac{dx}{du} = -\sqrt{(x^2-1)(x^2-k^2)};$$

$$x = \frac{1}{dn\, u}, \quad \frac{dx}{du} = \sqrt{(x^2-1)(1-k'^2x^2)}.$$

Tak na př. při stanovení integrálu

$$J = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}$$

užijeme posledního vzorce, kladouce

$$x = \frac{1}{dn(u, k')}.$$

Pro $x = 1$ máme $u = 0$, pro $x = \frac{1}{k}$ jest $u = K'$, tedy — funkce x

v daných mezích stále roste —

$$J=\int_0^{K'} du = K':$$

$$K'=\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}. \tag{1}$$

Integrál ten se vyskytne při šetření průběhu integrálu

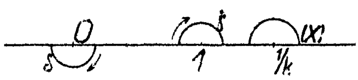
$$F(x)=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

pro případ, že x probíhá všechny reálné hodnoty.

Od $x=-1$ do $x=1$ mění se integrál od $F(-1)=-K$ do $F(1)=K$ jednotvárně. Poblíže $x=1$ pišme výraz ve tvaru

$$F(x)=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x}\sqrt{(1+x)(1-k^2x^2)}};$$

druhý radikál ve jmenovateli je funkce na bodě $x=1$ jednoznačná, a třeba jen vyšetřiti, v jakou hodnotu přejde $\sqrt{1-x}$, když bod x opíše



v severní polovici roviny malý polokruh γ; proměnná $1-x$ opíše při tom malý polokruh δ v jižní polovici roviny. ve směru naznačeném šipkou. Odmocnina $\sqrt{1-x}$ má při tom hodnotu $\sqrt{\varrho}\, e^{\frac{i\varphi}{2}}, \varphi=(0\ldots-\pi)$, kde ϱ značí poloměr kruhu, a tedy

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\frac{1}{\sqrt{\varrho}}e^{-\frac{i\varphi}{2}}$$

vrátí se do osy na úsek $(1\ldots\ \infty)$ s hodnotou

$$\frac{1}{\sqrt{\varrho}}e^{\frac{i\pi}{2}}=\frac{i}{\sqrt{x-1}},$$

takže pro $1<x<\frac{1}{k}$ bude

$$F(x)=K+i\int_1^x\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}};$$

proměnná $u=F(x)$ opíše při pohybu $x=(0\ldots\ 1)$ interval $0\ldots\ K$ na ose, načež opisuje přímku kolmou na osu, od $u=K$ do $u=iK'$.

Nyní je z tvaru

$$F(x)=K+i\int_1^x\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1+kx)}\sqrt{1-kx}}$$

zřejmo, ježto po opsání polokruhu kolem $x=\frac{1}{k}$ proměnná $\frac{1}{\sqrt{1-kx}}$ vrátí se do osy s hodnotou $\frac{i}{\sqrt{kx-1}}$, že $F(x)$ pokračuje výrazem

$$F(x)=K+iK'-\int_{\frac{1}{k}}^{x}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}};$$

bod u se pohybuje na přímce rovnoběžné s osou od bodu $K+iK'$ do

$$K+iK'-\int_{\frac{1}{k}}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}}=K+iK'-J,$$

když x opisuje dráhu $\left(\frac{1}{k}\ldots\infty\right)$.

Substituce $\frac{x}{k}$ do integrálu poskytne

$$J=\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-k^2)(x^2-1)}},$$

a předposlední vzorec tabulky ukazuje, že tu třeba klásti $x=\frac{1}{sn\,u}$; tu je pak pro $x=1$, $u=K$, pro $x=\infty$, $u=0$; tudíž vychází $J=K$, cesta od $x=0$ do $x=\infty$ po severní straně osy končí hodnotou

$$u=iK'.$$

Opíše-li x půlkruh nekonečně velký opíše u část malého okolí bodu iK', funkce

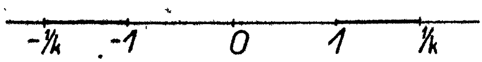
$$\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}=kx^2\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{k^2x^2}\right)}$$

zůstává jednoznačnou a vrátí se do reálné osy (okolí bodu $-\infty$) s hodnotou

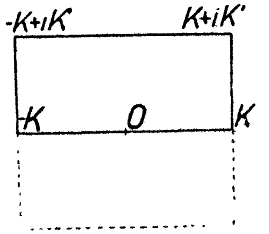
$$+\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}.$$

Mění-li se x od $-\infty$ do $-\frac{1}{k}$, probíhá $u=F(x)$ přímku rovnoběžnou s osou od $u=iK'$ do $u=iK'-K$, pak pro $x=(-\frac{1}{k}\ldots-1)$ přímku kolmou na osu od $u=-K+iK'$ do $-K$, načež se x mění od -1 do 0 s hodnotami od $u=-K$ do $u=0$:

Veďme v rovině x řezy $(1\ldots\frac{1}{k})$ a $(-1\ldots-\frac{1}{k})$ v úsecích osy



reálné; v rovině těmito řezy opatřené zůstává $\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$ funkcí jednoznačnou a můžeme v ní definovati $F(x)$ pro x na sever od osy v její blízkosti; když x opisuje tento okraj severní polovice roviny, opíše $u = F(x)$ okraj obdélníka $(-K, K, K+iK', -K+iK')$. $F(x)$ je pravidelná a jednoznačná v okolí úseku $(-1 \ldots 1)$ a přestoupí-li x do jižní polovice roviny, přestoupí $F(x)$ do hodnot pomyslně sdružených, a zejména opíše $u = F(x)$ obdélník $(-K, K, K-iK', -K-iK')$ symetrický, opíše-li x okraj jižní polovice roviny (x).



Oba obdélníky se skládají v jeden $(-K-iK', K-iK', K+iK', -K+iK')$, který dlužno považovati za obraz (rozkrojené) roviny (z) zprostředkovaný elliptickým integrálem $u = F(x)$.

§ 2. Pokračování. Nové odvození předchozích výsledků.

Aby se stal integrál u přístupnějším úvahám, proveďme v něm substituci tx za x, dovolenou pro reálná kladná x; tím obdržíme výraz

$$F(x) = \int_0^1 \frac{x\,dt}{\sqrt{(1-t^2x^2)(1-k^2t^2x^2)}}, \tag{A}$$

a je třeba jen rozšířiti jeho poznání pro komplexní x, aby se docílilo propagace funkce $F(x)$. Tu třeba především definovati odmocninou, aby byla určitou. Zvolíme

$$\sqrt{(1-t^2x^2)(1-k^2t^2x^2)} = \sqrt{1-tx}\,\sqrt{1+tx}\,\sqrt{1-ktx}\,\sqrt{1+ktx},$$

kde za odmocniny bereme hodnoty **hlavní**, jichž reálná část je kladnou.

Integrál nemá určitý smysl pouze pro taková x, pro něž naše odmocniny přestanou býti konečnými neb určitými.

Taková x umožňují, že pro některá t mezi 0 a 1 nastává

$$1 - t^2x^2 = 0 \text{ neb } 1 - k^2t^2x^2 = 0,$$

t. j. jsou to hodnoty tvaru

$$x = \pm\frac{1}{t}, \quad \pm\frac{1}{kt}, \tag{α}$$

kterým příslušejí body položené na ose reálné a sice na její úsecích $(-\infty \ldots -1)$, $(1 \ldots \infty)$, které znamenejme jako **řezy** *II*, *I*; poněvadž předpokládáme $0 < k < 1$, jsou oba druhy bodů na těchto řezích položeny a je vyplňují.

Pro všechna x v rovině položená mimo řezy I a II je pak integrál (A) konečná funkce analytická — synektická — a tvoří propagaci integrálu u do roviny opatřené řezy I a II.

Předešlé řezy $(1 \ldots \frac{1}{k})$ a $(-1 \ldots -\frac{1}{k})$ jsou částmi těchto řezů a znamenáme je

$$I^a,\ II^a;$$

zbývají pak části $I^b = (\frac{1}{k} \ldots \infty)$, $II^b = (-\infty \ldots -\frac{1}{k})$.

Funkce

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

má v protilehlých bodech řezů I^a a II^a hodnoty opačné, t. j.

$$F'(x+i0) + F'(x-i0) = 0$$

pro $1 < x < \frac{1}{k}$, resp. $-1 > x > -\frac{1}{k}$; následovně bude

$$F(x+i0) + F(x-i0) = \text{konst.}$$

Kolem bodu $x=1$ zůstává funkce spojitou (když ne jednoznačnou) a platí zejména

$$\lim_{\varepsilon=0} F(1+\varepsilon \pm i0) = \lim_{\varepsilon=0} F(1-\varepsilon \pm i0) =$$
$$= \lim_{\varepsilon=0} F(1-\varepsilon) = F(1) = K;$$

naše konstanta je tedy $2K$ a máme na úsecích I^a, II^a

$$F(x+i0) + F(x-i0) = 2K. \qquad (B)$$

Na úsecích I^b a II^b jest naopak

$$F'(x+i0) = F'(x-i0),$$

i bude zde

$$F(x+i0) - F(x-i0) = \text{konst.} = 2\lambda.$$

Abychom tuto konstantu určili, položme v (B) $x = \frac{1}{k} - \varepsilon$, zde pak $x = \frac{1}{k} + \varepsilon$, a proveďme limitní přechod $\varepsilon = 0$; vyjde

$$F(\tfrac{1}{k} + i0) - F(\tfrac{1}{k} - i0) = 2\lambda,$$

$$F(\tfrac{1}{k} + i0) + F(\tfrac{1}{k} - i0) = 2K,$$

tedy

$$F(\tfrac{1}{k} + i0) = K + \lambda.$$

Víme však z dřívějšího, že

$$F\left(\frac{1}{k}+i0\right)=K+iK',$$

tedy $\lambda=iK'$,

$$F(x+i0)-F(x-i0)=2iK', \tag{B'}$$

pro $x>1$.

* * *

Hořejší základní poznatky chceme ještě jednou vyložiti na základě tvaru (A). Nejprve se jedná o limitu

$$F(x_0+iy) \text{ pro } y=0, 1<x_0<\frac{1}{k}.$$

Tu máme $(x=x_0+iy)$,

$$F(x_0+iy)=\int_0^{\frac{1}{x_0}}\frac{x\,dt}{\sqrt{(1-x^2t^2)(1-k^2x^2t^2)}}+\int_{\frac{1}{x_0}}^{1}\frac{x\,dt}{\sqrt{(1-x^2t^2)(1-k^2x^2t^2)}}.$$

První integrál je spojitou funkcí y na $y=0$ a má hodnotu krajní zcela určitou. V druhém integrálu činitel $\sqrt{1-k^2x^2t^2}$ zůstává spojitým a má kladnou limitu $\sqrt{1-k^2x_0{}^2t^2}$, podobně $\sqrt{1+xt}$ má limitu $\sqrt{1+x_0t}$, naproti tomu $1-xt=1-tx_0-ity=-(tx_0-1+ity)$ má pro $y>0$ pomyslnou část zápornou, rovněž reálnou, tedy

$$\lim\sqrt{1-tx}=-i\sqrt{tx_0-1},$$

$$\lim_{y=0}\sqrt{1-t^2x^2}=-i\sqrt{t^2x_0-1},$$

$$\lim_{y=0}\int_{\frac{1}{x_0}}^{1}\frac{x\,dt}{\sqrt{(1-x^2t^2)(1-k^2x^2t^2)}}=i\int_{\frac{1}{x_0}}^{1}\frac{x_0\,dt}{\sqrt{(x_0{}^2t^2-1)(1-k^2x_0{}^2t^2)}}.$$

Avšak substituce $tx_0=\xi$ dává

$$\int_0^{\frac{1}{x_0}}\frac{x_0\,dt}{\sqrt{(1-x_0{}^2t^2)(1-k^2x_0{}^2t^2)}}=\int_0^1\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}=K,$$

$$\int_{\frac{1}{x_0}}^{1}\frac{x_0\,dt}{\sqrt{(x_0{}^2t^2-1)(1-k^2x_0{}^2t^2)}}=\int_1^{x_0}\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-k^2\xi^2)}},$$

t. j. pro $x=x_0+iy$, $y\geqq 0$, $1<x_0<\frac{1}{k}$ jest

$$\lim F(x_0+iy)=F(x_0+i0)=K+i\int_1^{x_0}\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-k^2\xi^2)}}$$

a hodnota

$$F(x_0 - i0)$$

je sdružená.

Je-li dále $x = x_0 + iy$, $x_0 > 1$, máme

$$(1 - x^2 t^2)(1 - k^2 t^2 x^2) = (1 + tx)(1 + ktx).(1 - tx)(1 - ktx),$$

první dva činitelé mají při $y \sim 0$ limitu kladnou, u druhých dvou to platí jen pro některé intervaly, a sice jest na $t = (0 \dots \frac{1}{x_0})$ limita kladná pro oba výrazy, na

$$t = (\frac{1}{x_0} \dots \frac{1}{kx_0}) \text{ jest } \sqrt{1 - t(x_0 + iy)} \sim -i\sqrt{tx_0 - 1}$$

$$\sqrt{1 - k(x_0 + iy)t} \sim \sqrt{1 - kx_0 t},$$

a na

$$t = (\frac{1}{kx_0} \dots 1) \text{ jest } \sqrt{1 - t(x_0 + iy)} \sim -i\sqrt{tx_0 - 1}$$

$$\sqrt{1 - kt(x_0 + iy)} \sim -i\sqrt{ktx_0 - 1},$$

tedy

$$\sqrt{(1 - t^2 x^2)(1 - k^2 t^2 x^2)} \sim -\sqrt{(t^2 x_0 - 1)(k^2 x_0 t^2 - 1)}$$

a tak vychází

$$F(x_0 + i0) = K + iK' - \int_{\frac{1}{k}}^{x_0} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(k^2 \xi^2 - 1)}}, \quad (x_0 > \frac{1}{k}).$$

Tím zároveň máme zjištěn hořejší vztah

$$F(x + i0) - F(x - i0) = 2iK', \quad x > \frac{1}{k}; \tag{B'}$$

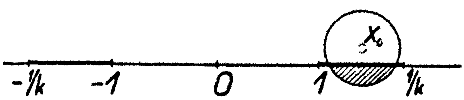
pro x položená na březích řezu II^b užijeme vlastnosti

$$F(x \pm iy) = -F(-x \mp iy)$$

a máme týž výsledek (B′). Naproti tomu platí na řezu II^a (t. j. $-\frac{1}{k} < x < -1$) na místo (B)

$$F(x + i0) + F(x - i0) = -2K.$$

Předpokládejme nyní, že proměnná x mění se spojitě a dospěje do blízkosti řezu I^a; Taylorovský rozvoj funkce $F(x)$ v okolí bodu x_0



$$F(x) = \mathfrak{P}(x - x_0)$$

konverguje pak pro $|x - x_0| < r$, kde r značí vzdálenost středu x_0 od nejbližšího singulárního bodu, zde tedy od bodu 1 nebo $\frac{1}{k}$. Bylo-li x_0 dosti blízko při řezu, překročí konvergenční obor osu, takže jeho část — v obr. stínovaná — octne se na jižní straně řezu. Zde však řada $\mathfrak{P}(x-x_0)$ nepodává více integrál $F(x)$, neboť pro x na řezu musí $\mathfrak{P}(x-x_0)$ splynouti s hodnotou

$$F(x+i0)=2K-F(x-i0),$$

a spojitost funkcí vyžaduje rovnost

$$\mathfrak{P}(x-x_0)=2K-F(x),$$

pro x representovaná částí vystínovanou.

Podobně překročí-li proměnná řez II^a, přejde funkce $F(x)$ spojitým přechodem v hodnotu $-2K-F(x)$.

Přestoupí-li proměnná x řez I^b neb II^b ze strany severní do jižní, pokračuje funkce $F(x)$ hodnotami $F(x)+2iK'$, děje-li se překročení směrem opačným, jsou hodnoty funkce po překročení dány výrazem $F(x)-2iK'$.

Znamenejme nyní u analytickou funkci definovanou prvkem (elementem) $u=F(x)$; opíše-li proměnná x uzavřenou dráhu, která se vyhýbá singulárním bodům ± 1, $\pm\frac{1}{k}$, a která: 1. m-krát protne řezy I^a neb II^a, 2. po té n'-krát přestoupí řezy I^b neb II^b ze severu k jihu a n''-krát řezy tyto z jihu k severu, vrátí se funkce u do původní polohy bodu x s hodnotou

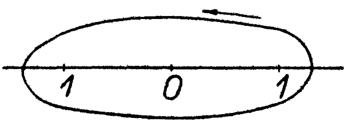
$$\bar{u}=F(x)+(n'-n'')\,2iK',$$

je-li m sudé, aneb

$$\bar{u}=\varepsilon 2K-F(x)-(n'-n'')\,2iK',$$

je-li m liché, při čemž $\varepsilon=+1$, byl-li překročen řez I^a, a $\varepsilon=-1$ při překročení řezu I^b.

Předpokládejme dále, že uzavřená cesta spočívá v m-násobném překročení řezů I^a a II^a (střídavě) a sice tak, že se tím v kladném neb záporném směru obíhá segment $(-1\ldots 1)$, a pak v překročení řezů I^b a II^b jako předešle; funkce $u=F(x)$ vrátí se do původní polohy bodu x s hodnotou



$$\bar{u}=\pm m.4K+(n'-n'')\,2iK'+F(x).$$

Z cest v obou případech popsaných lze každou uzavřenou dráhu složiti, a tak vychází:

Opíše-li proměnná x uzavřenou dráhu, vrátí se analytická funkce $u=F(x)$ do původní polohy s hodnotou

$$\bar{u} = F(x) + 4mK + 2niK',$$

aneb

$$\bar{u} = 2K - F(x) + 4mK + 2niK',$$

kde m, n jsou celistvá čísla kladná nebo záporná. Naopak lze pro předepsaná m, n na nekonečně mnoho způsobů zvoliti uzavřenou dráhu, která jednu neb druhou z napsaných hodnot vyvolá.

Hodnotu $-2K - F(x) + \ldots$ jsme zde nerespektovali, poněvadž

$$-2K = 2K - 4K$$

a $-4K$ se spojí s periodou $4mK$.

§ 3. Riemannova plocha.

K rovině (x) znázorňující proměnnou x připojme ještě jednu rovinu s ní v malé vzdálenosti rovnoběžně a pod ní vedenou, v ní počátek a osy buďte pravoúhlé průměty týchž prvků roviny původní. V tomto „spodním listu“ veďme také řezy I^a a II^a, t. j. $(1 \ldots \frac{1}{k})$ a $(-1 \ldots -\frac{1}{k})$, naproti tomu odstraňme řezy I^b a II^b v původním vrchním listu.

Algebraická funkce

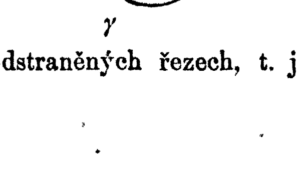
$$s = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}$$

je pak definována jednoznačně v těchto dvou rovinách tím, že stanovíme pro $x = 0$ hodnotu $s = 1$ pro list vrchní a hodnotu $s = -1$ pro list spodní. Hodnoty funkce s, k nimž na obou listech dospějeme po různých cestách vycházejících s počátku, vyčerpají soubor všech hodnot dvojznačné funkce s.

Na březích řezů př. $1 < x_0 < \frac{1}{k}$ máme

$$s(x_0 - i0) = -s(x_0 + i0)$$

na témž listě, neboť veličiny $s(x_0 - i0)$ docílíme po dráze téměř uzavřené γ ležící v rovině vrchní, vycházejíce z polohy $x_0 - i0$; avšak dráha γ obíhá pouze jeden bod ramifikační $x = 1$ funkce s, takže oběhem jejím se mění znamení funkce.



Totéž platí pro druhý řez a pro oba řezy spodní roviny. Naproti tomu jest na odstraněných řezech, t. j. $x < -\frac{1}{k}$ a pro $x > \frac{1}{k}$

$$s(x + i0) = s(x - i0).$$

Hodnoty $s(x)$ na stejnolehlých bodech obou listů jsou si opačně rovny a platí zejména, znamená-li

$$\begin{array}{lll} s(x)_{\mathrm{I}} & \text{hodnotu na vrchním listu,} & \\ s(x)_{\mathrm{II}} & \quad \text{"} \quad \text{" spodním} & \text{"} \end{array}$$

vztah

$$s(x)_{\mathrm{I}} = -s(x)_{\mathrm{II}},$$

tedy na březích řezů

$$s(x+i0)_{\mathrm{I}} = -s(x+i0)_{\mathrm{II}} = +s(x-i0)_{\mathrm{II}}$$

a stejně

$$s(x-i0)_{\mathrm{I}} = s(x+i0)_{\mathrm{II}},$$

čili jinak vyjádřeno:

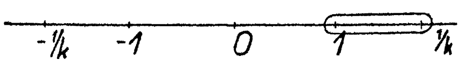
Funkce $s(x)$ má na severní (jižní) straně řezu vrchního listu tutéž hodnotu jako na jižní (severní) straně řezu ve spodním listu.

Zavedeme-li spojení obou listů podél obou řezů, tak aby severní břeh vrchního listu byl bezprostředně spojen s jižním břehem listu spodního a naopak, dospíváme k útvaru, t. zv. **ploše Riemannově**, jejíž body jsou navzájem jednoznačně přiřazeny bodům algebraického útvaru (x, s), k jehož názornému pochopení slouží.

Uzavřené čáře v rovině (x) neodpovídá vždy uzavřená čára na ploše Riemannově; ta jest uzavřena jen tehdy, vrátí-li se dvojice hodnot (x, s), a není uzavřená, když na ní jako dráze vrátí se s s opačným znamením, tedy do stejnolehlého bodu na listu opačném.

* * *

Veďme na vrchním listu uzavřenou čáru objímající těsně přechodní úsek $(1\ldots\frac{1}{k})$, považujíce ji za řez na Riemannově ploše, který proměnná nesmí překročiti; plocha ještě zůstává souvislou, přechodní úsek $(-\frac{1}{k}\ldots-1)$ tvoří spojení obou listů. Překročí-li proměnná x tento úsek (sestoupí do spodního listu), přejde integrál $u = F(x)$ ve tvar $-2K - F(x) = \bar{u}$, a podrží jej až na eventuální periody, pokud se proměnné nedovolí návrat do vrchního listu. Vůbec jsou hodnoty integrálu u



$$\begin{array}{lll} \text{na vrchním listu} & F(x) + 4mK + 2niK', \\ \text{" spodním "} & 2K - F(x) + 4mK + 2niK'. \end{array}$$

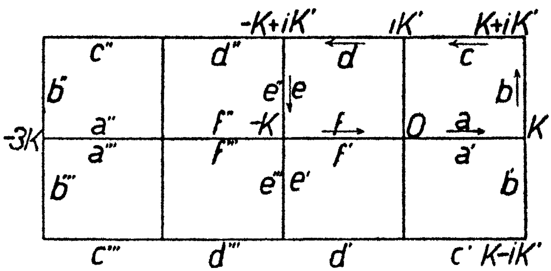
Dosud jsme vyšetřili, jaký obrazec opisuje proměnná $u = F(x)$, když proměnná x opisuje oba břehy původních řezů I a II a úsečku volnou $(-1\ldots1)$ na vrchním listě. Znamenejme úseky na severním břehu

$$(0\ldots 1) = a;\ (1\ldots \tfrac{1}{k}) = b;\ (\tfrac{1}{k}\ldots + \infty) = c;\ (-\infty\ldots -\tfrac{1}{k}) = d,$$
$$(-\tfrac{1}{k}\ldots -1) = e,\ (-1\ldots 0) = f;$$

na protějším břehu se s nimi kryjí úseky a', b',... f'.

Při tom co bod x opisuje úsečky a, b,... f, opisuje integrál $u = F(x)$ strany obdélníka týmiž literami znamenané, a sice bude tu

$$a = (O\ldots K),\ b = (K\ldots K + iK'),\ c = (K + iK'\ldots iK'),$$
$$d = (iK'\ldots -K + iK'),\ e = (-K + iK'\ldots -K),\ f = (-K\ldots O).$$



Dále, když x probíhá úsečky na opačném břehu a', b'... f', opíše u obrazec symetrický vzhledem k ose; celkový obdélník o stranách a, a', b, b', ... f, f' (v němž a, a', f, f' zapadnou dovnitř a nepatří více k obvodu) je pak obrazem vrchního listu při transformaci $u = F(x)$.

Nechť nyní proměnná x pomocí přechodné čáry $(-\frac{1}{k}\ldots -1)$ sestoupí do spodního listu, funkce u tím přejde na tvar $-2K - F(x)$, zůstávajíc spojitě připojenou ke své hodnotě na přechodní čáře. Mysleme si také na spodním listě vedeny řezy I a II; stal-li se přechod ze severu na jih, přešel vrchní severní břeh do spodního jižního, a tedy se jižní polovice spodního listu zobrazí tak, že se jeho příslušná strana e v obdélníku sjednotí s přímkou e původního obdélníka; vyjádření

$$\bar{u} = -2K - F(x)$$

to ostatně podá přímo. Výraz $F(x)$ na jižním břehu úseku $(-\frac{1}{k}\ldots -1)$, t. j. na úseku e' má hodnoty tvaru $F(x) = -K - it$, a bude poslední výraz po dosazení této hodnoty $\bar{u} = -K + it$.

Hodnoty

$$u = F(x) \text{ a } \bar{u} = -2K - F(x)$$

mají ostatně střed

$$\frac{u + \bar{u}}{2} = -K$$

a vychází tak vlastnost polární symetrie bodů u a $\bar{u}$ vzhledem k bodu $-K$ jako pólu.

Tím se k obdélníku o vrcholech $\pm K \pm iK'$ jako obrazu vrchního listu připojil obdélník o vrcholech $-3K \pm iK'$, $-K \pm iK'$ jakožto obraz listu spodního. *Oba obdélníky se spojují v obdélník o vrcholech*

$$-3K \pm iK', \; +K \pm iK',$$

který jest obrazem Riemannovy plochy, navzájem ji jednoznačně přiřazeným.

Známá nám okolnost, že rovnice $x = sn\, u$ má až na periody jen dvě řešení u a $2K - u$, se s tímto faktem kryje, neboť hodnoty $s = cn\, u\, dn\, u$ se pro u a $2K - u$ liší znamením, a body u a $2K - u$ náležejí tedy opačným listům.

V našem „rovnoběžníku period“ souvisejí protilehlé strany $b'' b'''$ a $b b'$ transformací $(u \ldots u + 4K)$, strany $c' d' d''' c'''$ a $c d d'' c''$ transformací $(u \ldots u + 2iK')$; tím by nanovo byla dokázána dvojperiodická vlastnost funkce $sn\, u$, kdyby byla jiným způsobem zjištěna jednoznačnost této funkce.

Hlavním výtěžkem těchto úvah je poznatek, že řešení rovnice $x = sn\, u$ pro reálná x nemůže náležeti vnitřním bodům rovnoběžníka period mimo úseky $a f a'' j''$, poněvadž tyto úseky a body na obvodu dávají tato řešení po dvou — tvaru u a $-2K - u$.

Uvažujme libovolný komplexní bod u uvnitř polovičního obdélníka omezeného přímkami $b b'$, $e e'$; veličina $x = sn\, u$ bude komplexní, tedy mimo řezy I a II; veličina

$$F(x) = F(sn\, u)$$

je pak uvnitř tohoto obdélníka, také na úsecích a, f, funkcí jednoznačnou a pravidelnou; na úsecích těchto máme

$$F(sn\, u) = u,$$

a tato rovnost platí v celém tomto oboru; na levé polovici obdélníka period pak

$$F(sn\, u) = -2K - u.$$

Uvažujme dále v rovině (vrchní list) opatřené řezy I a II libovolný bod x; veličina

$$\sin am\, [F(x)] = \varphi(x)$$

jest funkce synektická v rozkrojené rovině, a na úseku $(-1 \ldots 1)$ platí

$$\varphi(x) = x;$$

rovnice ta platí tedy v celé rovině, a tak vychází důležitá věta:

Rovnice $sn\, u = x$ má vždy řešení, a sice jest jedno z nich

$$u = F(x),$$

když bod x leží mimo řezy I a II.

* * *

Mysleme si nyní rovnoběžník period sestrojený z jemné ohebné pružné látky, na níž pomocí sítě velmi malých obdélníků jest analyticky vyznačena původní poloha bodů, i když podrobíme obdélník jakékoli deformaci. Za takovou deformaci volme ohnutí, kterým se strany cc', dd', $c''c'''$, $d''d'''$ převedou k sjednocení, takže z obdélníka vzniká roura, omezená kruhy, v něž přešly úseky bb' a $b''b'''$. Tuto rouru pak ohneme v prsten, aby se v stejnolehlých původně bodech kryly tyto kruhy.

Tak jsme v našem prstenci docílili uzavřené plochy, jejíž body jsou navzájem jednoznačně přiřaděny bodům Riemannovy plochy, a tedy bodům algebraického útvaru (x, s). Uzavřená plocha, na níž lze vésti p uzavřených navzájem se nestýkajících řezů, aniž se tím plocha rozpadla v nesouvislé kusy, sluje rodu p.

Dvě plochy, které sobě navzájem jednoznačně odpovídají — bod za bodem — jsou téhož rodu.

Prstenec je rodu 1.

Teorie funkcí elliptických dává podnět k analytickým funkcím $f(u)$, které mají periody $4K$ a $2iK'$, a jsou algebraicky vázány se svojí derivací[1]

$$\Phi(fu, f'u) = 0,$$

a tak, že při tom $sn\,u$ a $sn'\,u$ lze vyjádřiti racionálně pomocí $f(u)$ a $f'(u)$. Pak jest při $f(u) = z$, $f'(u) = y$ rovnice

$$\Phi(z, y) = 0$$

rodu 1, t. j. uzavřená plocha, v níž lze přetvořiti Riemennovu plochu znázorňující funkci y proměnné z, je rodu 1. Neboť si páry z, y jednoznačně odpovídají s body prstence a každé uzavřené čáře na prstenci přísluší uzavřená čára Riemannovy plochy (z, y).

§ 4. Metody výpočtu.

První způsob číselného stanovení integrálu prvního typu

$$u = \int_0 \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}, \quad \varphi = am\,u,$$

podává řada

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \sum_0^\infty (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} k^{2n} \sin^{2n}\varphi,$$

která konverguje při $k^2 \sin^2\varphi < 1$, tedy pro každé reálné φ, když $|k| < 1$; obdržíme tak

$$u = \sum_0^\infty (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} k^{2n} H_n(\varphi) = H_0 + \frac{1}{2} k^2 H_1 + \frac{1.3}{2.4} k^4 H_2 + \\ + \frac{1.3.5}{2.4.6} k^6 H_3 + \dots, \tag{1}$$

kde položeno

$$H_n(\varphi) = \int_0 \sin^{2n}\varphi\, d\varphi, \quad H_0 = \varphi. \tag{1a}$$

O těchto integrálech platí vztah

$$H_n(\varphi) = \frac{2n-1}{2n} H_{n-1} - \frac{\sin\varphi^{2n-1}\cos\varphi}{2n}, \tag{2}$$

který se snadno verifikuje diferencováním, a jehož pomocí se postupně vypočtou hodnoty

$$H_1 = \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi, \quad H_2 = \tfrac{3}{8}\varphi - (\tfrac{3}{8}\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\sin^3\varphi)\cos\varphi,$$

obecně $(n \geqq 1)$

$$H_n(\varphi) = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}\{\varphi - P_n\}$$

$$P_n = \cos\varphi\,(\sin\varphi + \frac{2}{3}\sin^3\varphi + \frac{2.4}{3.5}\sin^5\varphi + \ldots +$$

$$+ \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}\sin^{2n-1}\varphi), n \geqq 2,$$

$$P_1 = \sin\varphi\cos\varphi.$$

Vztahu (2) hoví též výraz

$$H_n = \sin\varphi\cos\varphi\,(\sin^{2n}\varphi + \frac{2n+2}{2n+3}\sin^{2n+2}\varphi +$$

$$+ \frac{(2n+2)(2n+4)}{(2n+3)(2n+5)}\sin^{2n+4}\varphi + \ldots].$$

Pokud $|k\sin\varphi|$ je dosti malé, lze řady (1) skutečně užíti k vypočtení hodnoty u. Pro případ $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $|k| < 1$ obdržíme rozvoj integrálu

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

Návratný vzorec (2) tu dává

$$H_n = \frac{2n-1}{2n} H_{n-1}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

a odtud

$$H_n = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\frac{\pi}{2}, \text{ ježto } H_0 = \frac{\pi}{2};$$

možno to psáti

$$H_n = (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{\pi}{2},$$

a rovnice (1) podá

$$K = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}^2 k^{2n} \tag{3}$$

řadu konvergentní pouze pro $|k| < 1$, která je však upotřebitelnou jen pro zcela malá k.

Dosadíme-li do (1) nalezený výraz H_n, upraví se nyní dle (3) výsledek takto:

$$u = \frac{2}{\pi} K\varphi - \sum_{1}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}^2 P_n k^{2n}, \tag{1*}$$

Řada (1) nicméně konverguje rychleji než tato poslední (1*).

Vyvinem ještě rozvoj integrálu K' podle mocností k, čímž zároveň poznáme povahu funkce K v sousedství bodu $k=1$.

Vyjdeme od integrálu

$$J = \int_0^K \log sn\, u\, du.$$

Vlastnost $sn(2K-u) = sn\, u$ umožní psáti

$$2J = \int_0^{2K} \log sn\, u\, du.$$

Při označení $u = 2Kv$ máme

$$sn\, u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}, \ \log \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)} = \log 2 q^{\frac{1}{4}} \sin v\pi + S(v),$$

$$S(v) = \sum_{1}^{\infty} \log(1 - q^{2n} e^{2iv\pi})(1 - q^{2n} e^{-2iv\pi}) -$$

$$- \sum_{1}^{\infty} \log(1 - q^{2n-1} e^{2iv\pi})(1 - q^{2n-1} e^{-2iv\pi}) =$$

$$= -2 \sum_{m,n} q^{2mn} \frac{\cos 2mv\pi}{m} + 2 \sum_{m,n} q^{(2n-1)m} \frac{\cos 2mv\pi}{m}, \ (m, n = 1, 2, 3, 4, \ldots).$$

Z toho plyne

$$\int_0^1 S(v)\, dv = 0,$$

$$2J = 2K \int_0^1 \left(\log \frac{q^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{k}} + \log 2 \sin v\pi\right) dv;$$

$$\int_0^1 \log(2 \sin v\pi)\, dv = 0, \quad \log q^{\frac{1}{4}} = -\frac{\pi K'}{4K},$$

tedy

$$2J = K \log \frac{1}{k} - \frac{\pi}{2} K',$$

z čehož plyne

$$K' = \frac{2}{\pi} K \log \frac{1}{k} - \frac{4}{\pi} J,$$

t. j. po dosazení $sn\,u = \sin\varphi$ v integrálu J

$$K' = \frac{2}{\pi} K \log \frac{1}{k} - \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \tag{4}$$

K podobnému konci vede integrál

$$^*J^0 = 2\int_0^K \log cn\,u\,du = \int_{-K}^K \log cn\,u\,du,$$

pro nějž substituce $u = 2Kv$,

$$cn\,u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)},$$

$$\log cn\,u = \log \sqrt{\frac{k}{k'}} + \log (2q^{\frac{1}{4}} \cos v\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos 2nv\pi,$$

dává

$$J^0 = 2K \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\log \sqrt{\frac{k'}{k}} - \frac{\pi K'}{4K} + \log 2 \cos v\pi)\, dv;$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \log (2 \cos v\pi)\, dv = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \log (2 \cos v\pi)\, dv = 0,$$

$$J^0 = K \log \frac{k'}{k} - \frac{\pi}{2} K', \qquad K' = \frac{2}{\pi} K \log \frac{k'}{k} - \frac{2}{\pi} J^0,$$

t. j.

$$K' = \frac{2}{\pi} K \log \frac{k'}{k} - \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \cos \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \tag{5}$$

Počněme s posledním integrálem; máme nejprve ($|k| < 1$)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \cos \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \sum_0^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} k^{2n} J_n,$$

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi \log \cos \varphi \, d\varphi.$$

Částečná integrace dává

$$\int \sin^{2n} \varphi \log \cos \varphi \, d\varphi = -\cos\varphi \sin^{2n-1} \varphi \log \cos \varphi +$$
$$+ \int \cos\varphi \left[(2n-1) \sin^{2n-2} \varphi \cos \varphi \log \cos \varphi - \sin^{2n-1} \varphi \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right] d\varphi,$$

z čehož po substituci mezi 0 a $\frac{\pi}{2}$

$$J_n = (2n-1)(J_{n-1} - J_n) - H_n,$$

kde H_n má týž význam jako výše:

$$H_n = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n} H_0,\ H_0 = \frac{\pi}{2}.$$

V rovnici tak nalezené

$$2n J_n - (2n-1) J_{n-1} = -H_n$$

násobme obě strany

$$\frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{1.3.5\ldots(2n-1)}:$$

$$\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)} J_n - \frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{1.3.5\ldots(2n-3)} J_{n-1} = -\frac{H_0}{2n},$$

$$\frac{2}{1} J_1 - J_0 = -\frac{H_0}{2}.$$

Sečtením výsledků plyne

$$\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots 2n-1} J_n = J_0 - \frac{\pi}{4} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}.$$

Znamenáme-li tedy

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n},\ s_0 = 0, \tag{6}$$

máme vzhledem k hodnotě

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi}{2} \log 2$$

vyjádření součinitelů

$$J_n = (-1)^{n-1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \left(\frac{\pi}{2} \log 2 + \frac{\pi}{4} s_n\right);$$

$$-\frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \log 4 \sum_0^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}^2 k^{2n} + \sum_1^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}^2 s_n k^{2n}.$$

První řada vpravo je dle (3) $\frac{2K}{\pi}$ a spojí se v rovnici (5) s prvním členem, čímž vychází

$$K' = \frac{2}{\pi} K \log \frac{4k'}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}^2 s_n k^{2n}. \tag{5*}$$

Řada přicházející v literatuře se obdrží na základě vztahu (4). Tu jest

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \sum_0^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} k^{2n} J'_n,$$

$$J'_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi \log \sin \varphi \, d\varphi.$$

Parciální integrace dá

$$J'_n = (2n-1)(J'_{n-1} - J'_n) + (H_{n-1} - H_n);$$

$$H_{n-1} - H_n = \frac{H_n}{2n-1} = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)} \cdot \frac{H_0}{2n},$$

takže vychází

$$\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)} J'_n - \frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{1.3.5\ldots(2n-3)} J'_{n-1} = \frac{H_0}{2n(2n-1)},$$

$$H_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Odtud

$$J'_n = (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \left[J'_0 + \frac{\pi}{2} \sum_1^n \frac{1}{2\nu(2\nu-1)} \right],$$

$$J'_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \varphi \, d\varphi = -\frac{\pi}{2} \log 2,$$

a po dosazení do (4) vychází

$$K' = \frac{2}{\pi} K \log \frac{4}{k} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}^2 \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2\nu(2\nu-1)} k^{2n}. \qquad (4^*)$$

Oba vzorce (4*), (5*) podobně jako (3) jsou způsobilé k výpočtům jen pro zcela malá k; ukazují však, jak se chová integrál K' pro nekonečně malá k: roste logaritmicky přes všechny meze, blíží-li se k nule.

Roste-li k od nuly počínajíc, roste funkce K, jak to vyplývá z řady (3); funkce $K' = K(\sqrt{1-k^2})$ při tom stále klesá od ∞ do $K(0) = \frac{\pi}{2}$. Pro k blízké 1 pak funkce $K = K'(\sqrt{1-k^2})$ se stává nekonečnou

Poměr

$$\frac{K'}{K}$$

tedy ustavičně klesá, probíhá-li k interval $(0\ldots1)$ a sice klesá od ∞ do 0; veličina

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$$

tedy při tom roste od nuly do 1.

Hodnoty k a q si odpovídají navzájem jednoznačně a může se q krajní hodnotě 1 libovolně přiblížiti; zařídíme-li však předem integrály tak, aby $k^2 \leqq \frac{1}{2}$, bude $K' \geqq K$, a tedy

$$q \leqq e^{-\pi} = 0{\cdot}0432139{18}\ldots$$

Ze vzorce (4*) plyne

$$\log q = -\frac{K'\pi}{K} - 2\log\frac{k}{4} + \frac{\pi}{K}\mathfrak{Q},$$

kde položeno

$$\mathfrak{Q} = \sum_1^\infty \binom{-\frac{1}{2}}{n}^2 \sum_1^n \frac{2}{2\nu(2\nu-1)} \cdot k^{2n}.$$

Položme

$$x = \frac{k^2}{4}, \quad 2\sum_1^n \frac{1}{2\nu(2\nu-1)} = \sigma_n;$$

máme

$$\frac{2}{\pi}K = \mathfrak{P}(x) = 1 + x + \frac{9}{4}x^2 + \frac{25}{4}x^3 + \frac{25.49}{64}x^4 +$$

$$+ \frac{49.81}{64}x^5 + \frac{9.7^2.11^2}{64}x^6 + \ldots.$$

$$\mathfrak{Q}(x) = \sigma_1 x + \frac{9}{4}\sigma_2 x^2 + \frac{25}{4}\sigma_3 x^3 + \frac{25.49}{64}\sigma_4 x^4 + \ldots,$$

$$\sigma_1 = 1,\ \sigma_2 = \frac{7}{6},\ \sigma_3 = \frac{37}{30},\ \sigma_4 = \frac{533}{420},$$

$$\sigma_5 = \frac{1627}{1260}, \ldots$$

Výpočet metodou neurčitých součinitelů dává

$$\frac{1}{\mathfrak{P}(x)} = 1 - x - \frac{5}{4}x^2 - \frac{11}{4}x^3 - \frac{469}{64}x^4 - \frac{1379}{64}x^5 - \frac{177306}{4^4}x^6 - \ldots,$$

odtud nalezneme

$$\frac{\pi}{2K}\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{Q}(x)}{\mathfrak{P}(x)} = x + \frac{13}{8}x^2 + \frac{23}{6}x^3 + \frac{2701}{4^4}x^4 + \ldots.$$

Tím dospíváme k výsledku

$$\sqrt{q} = \frac{k}{4}e^{\varphi\left(\frac{k^2}{4}\right)},\quad \varphi(x) = x + \frac{13}{8}x^2 + \frac{23}{6}x^3 + \frac{2701}{4^4}x^4 + \ldots$$

Je-li k blízko 1, položíme $1 - k^2 = \eta^2$ a máme

$$K = K(\sqrt{1-\eta^2}) = K'(\eta);$$

$$K' = K'(\sqrt{1-\eta^2}) = K(\eta),$$

tedy dle (3) a (4*)

$$K' = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}^2 \eta^{2n},$$
$$K = \frac{2}{\pi} K' \log \frac{4}{\eta} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}^2 \eta^{2n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2\nu(2\nu-1)};\tag{7}$$
$$\eta^2 = 1 - k^2.$$

Landenovou transformací lze každý případ na tento tvar převésti: podle této transformace vládne mezi moduly k a k_1 vztah

$$\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0|\tau)}{\vartheta_3(0|\tau)}, \quad \sqrt{k_1} = \frac{\vartheta_2(0|\frac{\tau}{2})}{\vartheta_3(0|\frac{\tau}{2})}$$

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\tag{8}$$

a pro příslušné integrály K a K_1 platí

$$K_1 = (1+k)K,\tag{9}$$

což lze též psáti

$$k_1 K_1 = 2\sqrt{k} K.\tag{9^0}$$

Z rovnic

$$iK' = \tau K, \quad iK'_1 = \frac{\tau}{2} K_1,$$

pak máme

$$K_1' = \tfrac{1}{2} K_1 \frac{K'}{K},$$

t. j.

$$\frac{K'}{K} = 2\frac{K'_1}{K_1}.\tag{10}$$

V případě $k = \frac{2}{3}$ máme ku př.

$$k_1 = \tfrac{2}{5}\sqrt{6} = 0{\cdot}979796, \quad \eta^2 = 0{\cdot}04 = 1 - k_1^2;$$

podle vzorců (7) máme tedy pro transformované periody

$$\frac{2}{\pi} K_1' = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 0{\cdot}04 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 0{\cdot}04^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 0{\cdot}04^3 + \ldots,$$

$$K_1 = \frac{2}{\pi} K_1' \log 20 - 2\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2\cdot 1}\eta^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{1}{2.1} + \frac{1}{4.3}\right)\eta^4 + \ldots\right\}.$$

V první řadě máme členy

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_1 &= 0{\cdot}01 \\ \mathfrak{T}_2 &= 0{\cdot}000225 \\ \mathfrak{T}_3 &= \phantom{0{\cdot}000}625 \\ \mathfrak{T}_4 &= \phantom{0{\cdot}0000}19 \\ (\mathfrak{T}_5 &= 0{\cdot}0^8 6) \end{aligned}$$

tedy

$$\frac{2}{\pi} K_1' = 1{\cdot}01023144.$$

Součinitelé, jimiž jsou tyto členy v druhé řadě opatřeny, jsou:

$$\frac{1}{2}, \; \frac{7}{12}, \; \frac{37}{60}, \; \frac{533}{840},$$

a jsou tedy členy ty pořadem

$$\begin{array}{r} 0{\cdot}005 \\ 0{\cdot}00013125 \\ 385 \\ 12 \\ \hline 0{\cdot}00513522, \end{array}$$

takže

$$K_1 = \frac{2}{\pi} K_1' \log 20 - 0{\cdot}01027044,$$

$$\log 20 = 2{\cdot}99573227355,$$

$$\frac{2}{\pi} K_1' \log 20 = 3{\cdot}02638293,$$

$$K_1 = 3{\cdot}01611249.$$

Odtud se vypočte

$$\operatorname{Log} q^{\frac{1}{2}} = -\pi \frac{K_1'}{K_1} \operatorname{Log} e = -\frac{\pi^2}{2} \frac{1{\cdot}01023144}{3{\cdot}01611249} \operatorname{Log} e.$$

§ 5. Další metody početní.

Možno počítati veličinu q, je-li dáno K. Máme

$$\sqrt{\frac{2}{\pi} K} = \vartheta_3 = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots,$$

tedy položíme-li

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi} K} - 1\right) = \xi,$$

máme rovnici

$$\varphi(q) \equiv q + q^4 + q^9 + \ldots - \xi = 0;$$

první sblížení je patrně

$$q_1 = \xi - \xi^4,$$

další plyne dle Newtonovy metody aproximační; máme

$$\varphi(q_1) = -\xi^4 + (\xi^4 - 4\xi^7 + 6\xi^{10} + \ldots) + \xi^9 + \ldots =$$
$$= -4\xi^7 + \xi^9 + 6\xi^{10} + \ldots$$

$$\varphi'(q_1) = 1 + 4(\xi^3 - 3\xi^6 + 3\xi^9) + 9\xi^8 + \ldots$$

a pro opravu možno se omeziti na

$$\delta q_1 = \frac{4\xi^7 - \xi^9 - 6\xi^{10}}{1 + 4\xi^3} = \frac{\xi^7 (4 - \xi^2 - 6\xi^3)(1 - 4\xi^3)}{1 - 16\xi^6},$$

t. j.

$$q = \xi - \xi^4 + 4\xi^7 - \xi^9 - 22\xi^{10} + \ldots, \tag{1}$$

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}K} - 1\right).$$

V případě $k = \frac{2}{3}$ (§ 4) se pohodlně (po Landenově transformaci) počítal integrál K_1'; položíme-li tedy

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}K_1'} - 1\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{N} - 1),\ N = \frac{2}{\pi}K_1',$$

dá nám (1) hodnotu

$$q_1 = e^{-\pi\frac{K_1}{K_1'}},$$

takže $\operatorname{Log} q^{\frac{1}{2}} . \operatorname{Log} q_1 = \pi^2 \operatorname{Log}^2 e$.

Omezíme-li se na logaritmy sedmimístné, kladouce

$$N = \sec^4 a,\ 2\xi = \operatorname{tg}^2 a;$$

$$N = 1{\cdot}0102314,\ \operatorname{Log} N = 0{\cdot}00442086$$

$$\operatorname{Log} \sec a = 0{\cdot}00110521,\ a = 4^0 5' 9_3''$$

$$\begin{array}{rl} \operatorname{Log} \operatorname{tg} a = & 8{\cdot}8539049 \\ & 7{\cdot}7078098 \\ & 0{\cdot}3010300 \\ \hline \operatorname{Log} \xi = & 0{\cdot}4067798 - 3, \quad \operatorname{Log} \xi^4 = 0{\cdot}62712 - 11 \end{array}$$

$$\xi = 0{\cdot}00255141,\quad q_1 = \xi; - \operatorname{Log} q_1 = 2{\cdot}5932202$$

$$\begin{array}{rl} \operatorname{Log} \pi = & 0{\cdot}4971499 \\ \operatorname{Log} \operatorname{Log} e = & 0{\cdot}6377843 - 1 \\ \hline \operatorname{Log} (\pi \operatorname{Log} e) = & 0{\cdot}1349342 \\ & 0{\cdot}2698684 \\ \operatorname{Log} \operatorname{Log} \dfrac{1}{q_1} = & 0{\cdot}4138393 \\ \hline & 0{\cdot}8560291 - 1 \end{array}$$

$$\operatorname{Log} \frac{1}{\sqrt{q}} = 0{\cdot}7178423$$

$$\operatorname{Log} q^{\frac{1}{2}} = 0{\cdot}2821577 - 1$$

* * *

Scheibner a Weierstrass užili indentity

$$\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} = 2\,\frac{q^{\frac{1}{4}} + q^{\frac{9}{4}} + q^{\frac{25}{4}} + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots},$$

z níž obrácením vychází rozvoj $q^{\frac{1}{4}}$ dle mocnin $\sqrt{k}$.

Znamenejme k vůli stručnosti

$$q^{\frac{1}{4}} = \xi, \quad \tfrac{1}{2}\sqrt{k} = \lambda,$$

načež se rovnice přepíše na

$$f(\xi) \equiv \xi + \xi^9 + \xi^{25} + \ldots - \lambda(1 + 2\xi^4 + 2\xi^{16} + 2\xi^{36} + \ldots) = 0;$$

první sblížení dává $\xi = \lambda$, druhé jest

$$\xi_1 = \lambda + 2\lambda^5,$$

a pro zdokonalení užijeme Newtonovy metody aproximační.

$$\begin{aligned} f(\xi_1) &= \lambda + 2\lambda^5 + (\lambda^9 + 18\lambda^{13} + 144\lambda^{17} + \ldots) - \\ &\quad - \lambda[1 + 2(\lambda^4 + 8\lambda^8 + 24\lambda^{12} + 32\lambda^{16}) + 2\lambda^{16} + \ldots] = \\ &= -[15\lambda^9 + 30\lambda^{13} - 78\lambda^{17} + \ldots]; \\ \xi f'(\xi) &= \xi + 9\xi^9 - 2\lambda[4\xi^4 + 16\xi^{16}] + \ldots. \\ \xi_1 f'(\xi_1) &= \lambda + 2\lambda^5 + 9[\lambda^9 + 18\lambda^{13} + 144\lambda^{17}] - \\ &\quad - 2\lambda[4(\lambda^4 + 8\lambda^8 + 24\lambda^{12} + 32\lambda^{16}) + 16\lambda^{16}] + \ldots \end{aligned}$$

Oprava $-(\lambda + 2\lambda^5)\dfrac{f(\xi_1)}{\xi_1 f'(\xi_1)}$ je řádu λ^9 a vystihuje přesnost řádu λ^{17}; proto bylo dovoleno vypustiti vyšší mocnosti než λ^{17}. Po redukci jest

$$\xi_1 f'(\xi_1) = \lambda - 6\lambda^5 - 55\lambda^9 - 30\lambda^{13} + 1008\lambda^{17} + \ldots$$

a opravené řešení zní tedy

$$\xi = (\lambda + 2\lambda^5)\left(1 + \frac{15\lambda^8 + 30\lambda^{12} - 78\lambda^{16}}{1 - 6\lambda^4 - 55\lambda^8 - 30\lambda^{12} + 1008\lambda^{16}}\right).$$

Řád sblížení λ^{17} se nepoškodí, vynecháme-li ve jmenovateli členy λ^{12} a λ^{16}, i vychází tak

$$\begin{gathered} \xi = (\lambda + 2\lambda^5)\left(1 + \frac{15\lambda^8 + 30\lambda^{12} - 78\lambda^{16}}{1 - 6\lambda^4 - 55\lambda^8}\right) + (\xi^{21}), \\ \xi = q^{\frac{1}{4}}, \ \lambda = \tfrac{1}{2}\sqrt{k}. \end{gathered} \tag{2}$$

Poznačení chyby jako řádu 21. pochází odtud, že rozvoj dle mocnin λ obsahuje mocnosti $1, 5, 9, 13, 17, \ldots$ z nichž první vynechaná je 21.

Rozvinutím pravé strany pak vychází obvyklý tvar

$$\xi = \lambda + 2\lambda^5 + 15\lambda^9 + 150\lambda^{13} + 1707\lambda^{17} + \dots \qquad (2^*)$$
$$\lambda = \tfrac{1}{2}\sqrt{k}.$$

* * *

Pohodlným je tento rozvoj jen pro malé hodnoty λ. Scheibner a Weierstrass zavedli na místě k do počtu nový modul, který se objeví po určité transformaci. Z rovnice

$$\sqrt{k'} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}, \quad \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} = \frac{\vartheta_3 - \vartheta_0}{\vartheta_3 + \vartheta_0}$$

plyne po dosazení řad

$$\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} = 2\frac{q + q^9 + q^{25} + \dots}{1 + 2q^4 + 2q^{16} + 2q^{36} + \dots} = \frac{\vartheta_2(0|4\tau)}{\vartheta_3(0|4\tau)}.$$

Parametru 4τ přísluší modul, který znamenejme l; je pak

$$\sqrt{l} = \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}, \quad \sqrt{l} = \frac{\vartheta_2(0|4\tau)}{\vartheta_3(0|4\tau)},$$

a můžeme užíti vzorců (2) pro hodnoty $\xi = q$, $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{l}$, to jest máme

$$q = \lambda + 2\lambda^5 + 15\lambda^9 + 150\lambda^{13} + 1707\lambda^{17} + \dots,$$
$$\lambda = \tfrac{1}{2}\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}: \qquad (3)$$

Může se státi (pro malá λ), že q vypadne tak malé, že se na užívaných místech objeví vesměs nuly, a výsledek se nehodí k výpočtu veličin řádu $q^{\frac{1}{4}}$; v tom případě užíváme vzorce (2).

Je-li k tak blízko jedné, že λ nevypadne dosti malé, můžeme užíti transformace ještě jednou, kladouce

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\frac{1-\sqrt{l'}}{1+\sqrt{l'}},$$

načež řada (3) dává q^4.

Také můžeme voliti

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}},$$

načež řada má součet $q^{\frac{1}{4}} = e^{-\frac{i\pi}{4\tau}} = e^{-\frac{K\pi}{4K'}}$.

Tak v případě $k = \frac{1}{4}$ by volba $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{k} = \frac{1}{4}$ nedávala řadu s rychlou konvergencí; zato již

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\sqrt{l} = 31 - 8\sqrt{15} = 0{\cdot}0161336$$

se k výpočtu výborně hodí.

* * *

Potřeba je však také početní metody pro stanovení integrálu u, t. j. pro řešení rovnice $sn\,u = x$ při daném x.

Vyjděme z identity zřejmé

$$\frac{\vartheta_3(v) - \vartheta_0(v)}{\vartheta_3(v) + \vartheta_0(v)} = \frac{2\,\Sigma q^{\mu^2} \cos 2\mu v \pi}{1 + \Sigma q^{\nu^2} \cos 2\nu v \pi}, \quad \begin{pmatrix} \mu = 1, 3, 5, \ldots \\ \nu = 2, 4, 6, \ldots \end{pmatrix}$$

čili

$$\frac{\dfrac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)} - 1}{\dfrac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)} + 1} = \frac{\vartheta_2(2v \mid 4\tau)}{\vartheta_3(2v \mid 4\tau)},$$

a po dosazení známých hodnot

$$\frac{dn(u, k) - \sqrt{k'}}{dn(u, k) + \sqrt{k'}} = \sqrt{l}\, \frac{cn\left(\dfrac{2Lu}{K}, l\right)}{dn\left(\dfrac{2Lu}{K}, l\right)},$$

kde

$$L = \frac{\pi}{2}\, \vartheta_3^2(0 \mid 4\tau)$$

jest integrál K příslušný k modulu l.

Tu opět plyne z rovnice

$$\sqrt{\frac{K}{L}} = \frac{\vartheta_3(0 \mid \tau)}{\vartheta_3(0 \mid 4\tau)}$$

rozložením členů čitatele podle sudých a lichých mocnitelů čísla q

$$\sqrt{\frac{K}{L}} = \frac{\vartheta_3(0 \mid 4\tau) + \vartheta_2(0 \mid 4\tau)}{\vartheta_3(0 \mid 4\tau)} = 1 + \sqrt{l} = \frac{2}{1 + \sqrt{k'}}. \tag{4}$$

Tak máme pro multiplikátor

$$\mathfrak{M} = \frac{2L}{K} = \frac{2}{(1 + \sqrt{l})^2} = \frac{(1 + \sqrt{k'})^2}{2}; \quad \sqrt{l} = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}},$$

a náš výsledek se přepíše na

$$\frac{dn(u, k) - \sqrt{k'}}{dn(u, k) + \sqrt{k'}} = \sqrt{l}\, \frac{cn(\mathfrak{M}u, l)}{dn(\mathfrak{M}u, l)}. \tag{5}$$

Pro početní praksi v tomto případě doporučuje se zavésti $x = sn^2 u$ jako danou veličinu, podobně pišme

$$s = sn^2(\mathfrak{M}u, l);$$

klademe-li mimo to

$$Q = \frac{dn\,u - \sqrt{k'}}{dn\,u + \sqrt{k'}} = \frac{\sqrt{1 - k^2 x} - \sqrt{k'}}{\sqrt{1 - k^2 x} + \sqrt{k'}}, \tag{6a}$$

objeví se (5) ve tvaru

$$Q^2 = l\frac{1-s}{1-l^2 s},$$

čili

$$s = \frac{l-Q^2}{l(1-Q^2 l)}. \tag{6b}$$

Pokud

$$0 \leqq \mathfrak{M} u \leqq L \tag{α}$$

plyne z rovnice $s = sn^2(\mathfrak{M} u, l)$

$$\mathfrak{M} u = \int_0^s \frac{d\eta}{2\sqrt{\eta(1-\eta)(1-l^2\eta)}} = \int_0^{\sqrt{s}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-l^2 t^2)}}.$$

Dělíme-li $\mathfrak{M}$ a dosadíme za u příslušný integrál, obdržíme hledaný vzorec transformační

$$\int_0^{\sqrt{x}} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} = \frac{2}{(1+\sqrt{k'})^2} \int_0^{\sqrt{s}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-l^2 t^2)}}. \tag{6}$$

Podmínka (α) se přepíše na

$$0 \leqq u \leqq \tfrac{1}{2}K, \text{ t. j. } x \leqq \frac{1}{1+k'}. \tag{α'}$$

Veličina Q je kladná pro tyto hodnoty, vymizí pro $u = \frac{K}{2}$, $x = \frac{1}{1+k'}$, a je zápornou pro $u = (\frac{K}{2} \ldots K)$, t. j. pro $x = (\frac{1}{1+k'} \ldots 1)$.

Zavádíme-li amplitudu ψ, $\sin\psi = \sqrt{s}$, můžeme ji počítati ze vzorce

$$\cos\psi = \frac{Q}{\sqrt{l}}\sqrt{\frac{1-l^2}{1-Q^2 l}}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\sqrt{l}}{l'Q}\sqrt{1-\frac{Q^2}{l}}. \tag{6c}$$

Máme-li počítati integrál (6) pro $x > \frac{1}{1+k'}$, užijeme vzorce

$$sn(K-u) = \frac{cn\,u}{dn\,u},$$

načež $K - u = u_1$ je v žádaných mezích 0 a $\frac{K}{2}$, a jest

$$x_1 = sn^2 u_1 = \frac{1-x}{1-k^2 x}.$$

Integrál

$$J = \int_0^{\sqrt{x_1}} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}$$

se vypočte dle (6) a hledaný integrál u bude

$$u = K - J.$$

Veličina $Q(x_1)$ je tu kladná a liší se od $Q(x)$ jen znamením. Nový integrál s modulem l se pohodlně počítá přímo dle (1) § 4.

$$F(l,\psi) = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - l^2 \sin^2\psi}} = H_0 + \tfrac{1}{2} l^2 H_1 + \frac{1.3}{2.4} l^4 H_2 + \frac{1.3.5}{2.4.6} l^6 H_3 + \ldots$$

$$H_0 = \psi, \quad H_1 = \tfrac{1}{2}\psi - \tfrac{1}{2}\sin\psi\cos\psi,$$

$$H_n(\psi) = \frac{2n-1}{2n} H_{n-1} - \frac{\sin^{2n-1}\psi\cos\psi}{2n},$$

při čemž $\sin\psi = \sqrt{s}$.

Průsvitnější je tvar

$$F(l,\psi) = \psi + \frac{1}{2^2}(\psi - \sin\psi\cos\psi) l^2 +$$

$$+ \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}[\psi - \sin\psi\cos\psi(1 + \tfrac{2}{3}\sin^2\psi)] l^4 +$$

$$+ \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}[\psi - \sin\psi\cos\psi(1 + \tfrac{2}{3}\sin^2\psi + \frac{2.4}{3.5}\sin^4\psi)] l^6 + \ldots$$

Řada konverguje tak rychle jako geometrická s poměrem $l^2 s$.

Volme jako příklad

$$k = \tfrac{1}{3}\sqrt{5}, \ x = \tfrac{9}{65} (= sn^2 u); \ k' = \tfrac{2}{3}.$$

$$\sqrt{l} = 5 - 2\sqrt{6} = 0{\cdot}1010205,$$

$$Q = \frac{\sqrt{18} - \sqrt{13}}{\sqrt{18} + \sqrt{13}} = \frac{31 - 2\sqrt{234}}{5} = 0{\cdot}0811766,$$

$$l^2 = 0{\cdot}0^3 1041, \quad Q^2 l = 0{\cdot}0^4 672;$$

$$\cos\psi = \frac{Q}{\sqrt{l}}(1 - 0{\cdot}0^4 185).$$

Dostaneme

$$u = 0{\cdot}3864366.$$

* * *

Z rovnice (5) máme stále při označení

$$Q = \frac{dn(u,k) - \sqrt{k'}}{dn(u,k) + \sqrt{k'}}, \quad \mathfrak{M}u = v,$$

$$Q^2 l = \frac{l^2 cn^2(v,l)}{dn^2(v,l)} = \frac{l^2 - 1 + dn^2(v,l)}{dn^2(v,l)},$$

takže

$$dn(v, l) = \frac{l'}{\sqrt{1 - Q^2 l}}. \tag{6d}$$

Poměr Q utvořený z této funkce znamenejme

$$Q_1 = \frac{dn(v, l) - \sqrt{l'}}{dn(v, l) + \sqrt{l'}} = \frac{\sqrt{l'} - \sqrt{1 - Q^2 l}}{\sqrt{l'} + \sqrt{1 - Q^2 l}}; \tag{7a}$$

pro velmi malá l máme v moci počítati čitatele se stejným počtem platných míst jako u jmenovatele, neboť tu klademe

$$\sqrt{l'} = \sqrt[4]{1 - l^2} = 1 - \tfrac{1}{4} l^2 - \tfrac{3}{32} l^4 - \ldots, \quad \sqrt{1 - Q^2 l} = 1 - \tfrac{1}{2} Q^2 l - \tfrac{1}{8} Q^4 l^2 - \ldots$$

Připomeňme dříve, že po zavedení veličiny

$$P = \frac{Q}{\sqrt{l}}$$

se naše výsledky píší

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sqrt{1 - P^2}}{P l'}, \quad \cos \psi = \frac{P l'}{\sqrt{1 - P^2 l^2}}; \quad \psi = am(v, l) = am(\mathfrak{M} u, l).$$

Zavedeme úhel Θ

$$\cos \Theta = P,$$

načež

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{1}{l'} \operatorname{tg} \Theta.$$

Nyní obraťme se k opětnému užití transformace (5), zavádějíce další modul l_1 a multiplikátor $\mathfrak{M}_1$:

$$\sqrt{l_1} = \frac{1 - \sqrt{l'}}{1 + \sqrt{l'}}, \quad \mathfrak{M}_1 = \frac{(1 + \sqrt{l'})^2}{2} = \frac{2}{(1 + \sqrt{l_1})^2}.$$

Veličina

$$Q_1 = \sqrt{l_1} \frac{cn(\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1 u, l_1)}{dn(\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1 u, l_1)} = P_1 \sqrt{l_1} \tag{7b}$$

je dána vzorcem (7a) čili

$$P_1 \sqrt{l_1} = \frac{\sqrt{l'} - \sqrt{1 - P^2 l^2}}{\sqrt{l'} + \sqrt{1 - P^2 l^2}}$$

i jest třeba jen vypočísti P_1 a určiti úhel ψ_1 rovnicí

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{\operatorname{tg} \Theta_1}{l_1'}, \quad \cos \Theta_1 = P_1.$$

Můžeme obyčejně s velkou přesností bráti $l_1' = 1$, takže bude

$$\psi_1 \doteq \Theta_1 = \arccos P_1;$$

současně jest se stejnou přesností (s chybou typu l_1^2)

$$cn(v, l_1) = \cos v, \quad dn(v, l_1) = 1, \quad v = \mathfrak{M}\mathfrak{M}_1 u;$$

tudíž

$$P_1 = \cos v, \quad v = \Theta_1,$$

a vychází definitivně

$$u = \frac{\arccos P_1}{\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1} = \frac{(1+\sqrt{l})^2}{2}\frac{(1-\sqrt{l_1})^2}{2}\arccos P_1. \tag{7*}$$

Iterační postup v každém případě osvědčí se pro počítání poloviční periody K. Stanovíme-li moduly $k_1, k_2 \ldots$ dle zákona

$$\sqrt{k_1} = \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}, \quad \sqrt{k_2} = \frac{1-\sqrt{k_1'}}{1+\sqrt{k_1'}}, \ldots$$

a znamenáme-li $K_1, K_2, \ldots$ příslušné úplné integrály, máme dle (4)

$$K = (1+\sqrt{k_1})^2 K_1, \quad K_1 = (1+\sqrt{k_2})^2 K_2, \ldots$$

Poněvadž k_n je nekonečně malé, je $K_n \sim \frac{\pi}{2}$ a odtud

$$\frac{2}{\pi}K = (1+\sqrt{k_1})^2(1+\sqrt{k_2})^2(1+\sqrt{k_3})^2 \ldots \tag{A}$$

čili

$$\vartheta_3 = (1+\sqrt{k_1})(1+\sqrt{k_2})(1+\sqrt{k_3})\ldots$$

Pro $k = \frac{\sqrt{5}}{3}$ na sedm míst to zní

$$\vartheta_3 = 1{\cdot}1010205 \times 1{\cdot}0^4 130 = 1{\cdot}1010348$$

a stačily by tyto členy pro dvacet míst, kdyby byly s tou přesností počítány.

Počítání dle této metody není obtížné ani pro hodnoty $k > \frac{1}{\sqrt{2}}$, na př. pro $k = \sin 75^0$; tak můžeme stanoviti oba integrály K i K' a pak určiti

$$\operatorname{Log} q = -\pi\frac{K'}{K}\operatorname{Log} e.$$

Analogicky s Gaussovým aritmeticko-geometrickým* průměrem možno počítání modulů $k_1, k_2, \ldots$

$$\sqrt{k_{\nu+1}} = \frac{1-\sqrt{k_\nu'}}{1+\sqrt{k_\nu'}}$$

vpraviti do následujícího algoritmu: Položíme, značíce a, b veličiny kladné, z nichž jedna libovolná,

$$\sqrt{k} = \frac{b}{a}; \quad 2a_1 = a + \sqrt[4]{a^4 - b^4}, \quad 2b_1 = a - \sqrt[4]{a^4 - b^4};$$

$$2a_2 = a_1 + \sqrt[4]{a_1^4 - b_1^4}, \quad 2b_2 = a_1 - \sqrt[4]{a_1^4 - b_1^4}; \ldots$$

---

* Viz na str. 146.

Je pak

$$\sqrt{k_1}=\frac{b_1}{a_1},\quad \sqrt{k_2}=\frac{b_2'}{a_2},\ldots\quad 1+\sqrt{k_1}=\frac{a}{a_1},\quad 1+\sqrt{k_2}=\frac{a_1}{a_2},\ldots$$

tedy

$$(1+\sqrt{k_1})(1+\sqrt{k_2})\ldots(1+\sqrt{k_n})=\frac{a}{a_n},$$

takže máme

$$\vartheta_3=\lim_{n=\infty}\frac{a}{a_n};\quad \frac{2}{\pi}K=\lim_{n=\infty}\left(\frac{a}{a_n}\right)^2.$$

Také multiplikátory $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1, \ldots$ se tu přehledně vyjadřují, takže máme po n transformacích

$$u_n=\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1\ldots\mathfrak{M}_{n-1}u=\frac{a_n^2}{a^2}2^n u.$$

Vyložme tuto metodu na příkladě

$$k=\sin 75^0=\tfrac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}),$$

kdy

$$k'=\tfrac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})=0{\cdot}25882.$$

Volíme

$$a=1,\quad b=\sqrt{k},$$

tedy

$$\sqrt[4]{a^4-b^4}=\sqrt{k'},\quad a_1=\frac{1+\sqrt{k'}}{2},\quad b_1=\frac{1-\sqrt{k'}}{2}.$$

Položíme

$$\sqrt{k'}=\cos\beta,\quad \beta=59^0\,25'\,14'',$$

načež

$$a_1=\cos^2\frac{\beta}{2},\quad b_1=\sin^2\frac{\beta}{2};$$

$$\operatorname{Log} a_1=0{\cdot}87758-1,\quad \operatorname{Log} b_1=0{\cdot}39030-1,$$

$$a_1=0{\cdot}75437,\quad b_1=0{\cdot}24564.$$

$$\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2=\sin\alpha_1,\quad \sqrt[4]{a_1^4-b_1^4}=a_1\sqrt{\cos\alpha_1},\quad \sqrt{\cos\alpha_1}=\cos\beta_1;$$

$$a_2=a_1\cos^2\frac{\beta_1}{2},\quad b_2=a_1\sin^2\frac{\beta}{2}.$$

$$\operatorname{Log} a_2=0{\cdot}87696-1,\quad \operatorname{Log} b_2=0{\cdot}02936-3,$$

$$a_2=0{\cdot}75330,\quad b_2=0{\cdot}00107,$$

$$a_3\doteq a_2,\quad b_3\doteq 0.$$

Nalezneme

$$K\doteq\frac{\pi}{2}\frac{1}{a_2^2}=2{\cdot}7682.$$

Na posledním místě má státi 1 místo 2, jak plyne z údaje C. Rungeova (Acta mathematica).

Význam tohoto aritmetického procesu je pouze mnemotechnický a nelze říci, že by tento početní postup vykazoval výhody před přímým stanovením čísel k_ν a před vzorcem (A).

Ukáže se to na vzorci (7*).

V případě $k = \frac{\sqrt{5}}{3}$ máme*

$$\mathrm{Log}\,\sqrt{l} = 0{\cdot}0044096 - 1,\quad \mathrm{Log}\,\sqrt{l_1} = 0{\cdot}1154464 - 5,$$

tedy $\mathrm{Log}\,l_1^2 = 0{\cdot}461\ldots - 20$, tedy $l_1' = 1$ s chybou na dvacátém místě.

Při počítání výrazu P_1 podle (7 a) bychom kladli

$$Pl = \sin\omega,\quad \frac{\cos\omega}{\sqrt{l'}} = \cos\omega',$$

načež by

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{l_1}}\,\mathrm{tg}^2\,\frac{\omega'}{2}.$$

Avšak úhel ω' se tu stanoví velmi nepřesně; neboť výpočet dává

$$L\cos\omega = 9{\cdot}9999854$$
$$L\sqrt{l'} = 9{\cdot}9999887$$

a tedy veličina ω' stanovena logaritmem

$$-L\frac{\cos\omega}{\sqrt{l'}} = \frac{33}{10^7},$$

jenž vznikl odečtením dvou zlomků, v nichž se všecky jisté číslice zrušily a zůstala jen dvě místa, z nich druhé již nejisté. Závada ta se odstraní transformací

$$P_1 = \frac{1+\sqrt{l'}}{\sqrt{l'}+\sqrt{1-P^2l^2}}\,\frac{\sqrt{l'}-\sqrt{1-P^2l^2}}{1-\sqrt{l'}} = \left(\frac{1+\sqrt{l'}}{\sqrt{l'}+\sqrt{1-P^2l^2}}\right)^2\left(\frac{P^2l^2}{1-l'}-1\right)$$

t. j.

$$P_1 = \left(\frac{1+\sqrt{l'}}{\sqrt{l'}+\sqrt{1-P^2l^2}}\right)^2[P^2(1+l')-1];\qquad \begin{aligned}1+\sqrt{l'} &= 2\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma_1,\\ \sqrt{1-P^2l^2} &= \cos\omega;\end{aligned}$$

$$P_1 = \left(\frac{\cos^2\frac{1}{2}\gamma_1}{\cos\frac{\omega+\gamma_1}{2}\cos\frac{\omega-\gamma_1}{2}}\right)^2(2P^2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha_1 - 1).$$

Operace o jednom kroku, spočívající ve stanovení P a ψ, zdá se výhodnější.

* * *

---

* Klademe $k = \sin\alpha$, $k' = \cos\alpha = \cos^2\gamma$, načež $\sqrt{l} = \mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}$, $\mathrm{tg}^4\frac{\gamma}{2} = l = \sin\alpha_1$, $l' = \cos\alpha_1 = \cos^2\gamma_1$, $\sqrt{l_1} = \mathrm{tg}^2\frac{\gamma_1}{2}, \ldots$

Jiná, avšak pracná metoda řešení rovnice $sn\, u = c$ spočívá na identitě

$$\frac{\sin v\pi - q^2 \sin 3 v\pi + q^6 \sin 5 v\pi - \ldots}{1 - 2 q^3 \cos 2 v\pi + 2 q^4 \cos 4 v\pi - \ldots} = \frac{c\sqrt{k}}{2\sqrt[4]{q}},$$

jež poskytne první sblížení (při známém q)

$$\sin v_0 \pi = \frac{c\sqrt{k}}{2\sqrt[4]{q}}, \quad u_0 = 2 K v_0.$$

Z addiční věty pak plyne při značení $\varphi = am\, u$, $\varphi_0 = am\, u_0$

$$\operatorname{tg} am (u - u_0) = \frac{\operatorname{tg} \varphi\, \Delta \varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi_0\, \Delta \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi_0\, \Delta \varphi\, \Delta \varphi_0} = \operatorname{tg} (a - b),$$

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} \varphi\, \Delta \varphi_0, \quad \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} \varphi_0\, \Delta \varphi.$$

Veličiny a, b známe

$$\left[\operatorname{tg} a = \frac{sn\, u}{cn\, u} dn\, u_0, \quad \operatorname{tg} b = \frac{sn\, u_0}{cn\, u_0} dn\, u\right]$$

a z nich vypočte se

$$\psi = am (u - u_0) = a - b,$$

načež

$$u - u_0 = \int_0 \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \psi + \frac{k^2}{4} (\psi - \sin \psi \cos \psi) + \frac{9k^4}{64} [\psi -$$

$$- \sin \psi \cos \psi (1 + \tfrac{2}{3} \sin^2 \psi)] + \ldots$$

Stanovení hodnot $sn\, u_0$, $cn\, u_0$, $dn\, u_0$ vyžaduje výpočet všech čtyř $\vartheta_\alpha (v_0)$, čímž se operace stává obtížnou.

* * *

Jiná někdy výhodnější metoda spočívá v použití funkce delta. Je-li dáno $sn\, u$, vypočteme $dn\, u$, načež nám rovnice

$$\frac{\vartheta_3 \left(\frac{u}{2K}\right)}{\vartheta_0 \left(\frac{u}{2K}\right)} = \frac{1}{\sqrt{k'}} dn\, u$$

podá

$$1 + 2 q \cos \frac{u\pi}{K} + 2q^4 \cos \frac{2 u\pi}{K} + 2 q^9 \cos \frac{3 u\pi}{K} + \ldots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k'}} dn\, u \left[1 - 2 q \cos \frac{u\pi}{K} + 2 q^4 \cos \frac{2 u\pi}{K} - 2 q^9 \cos \frac{3 u\pi}{K} + \ldots\right]$$

a odtud při označení

$$Q = \frac{dn\, u - \sqrt{k'}}{dn\, u + \sqrt{k'}}$$

$$\cos \frac{u\pi}{K} = \frac{Q}{2q} + q^3 Q \cos \frac{2 u\pi}{K} - q^8 \cos \frac{3 u\pi}{K} + \ldots \qquad (a)$$

Zpravidla jsme již nuceni zanedbati q^8, a dostáváme jako první sblížení

$$\cos\frac{u_1\pi}{K}=\frac{Q}{2q} \text{ s chybou řádu } q^3 Q;$$

dosadíme

$$\cos\frac{2u_1\pi}{K}=\frac{2Q^2}{4q^2}-1$$

a máme s chybou řádu $q^6 Q^2$

$$\begin{aligned}\cos\frac{u\pi}{K} &\doteq \frac{Q}{2q}+Q\,q^3\left(\frac{2Q^2}{4q^2}-1\right)=\\ &=\cos\frac{u_1\pi}{K}+2q^4\cos\frac{u_1\pi}{K}\cos\frac{2u_1\pi}{K}.\end{aligned} \tag{b}$$

Kdybychom na př. při $q=0{\cdot}006$ užívali tabulek 5-místných při počítání čísla Q, dostali bychom poměr $\frac{Q}{2q}$ a tedy též u jen na dvě místa správná; proto je třeba stanoviti Q se zvláštní péčí.

Kdybychom měli stanoviti

$$M=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\varphi}{\sqrt{25^2\cos^2\varphi+7^2\sin^2\varphi}}=\frac{1}{25}F\left(\sqrt{1-\frac{7^2}{25^2}},\varphi\right),\ \varphi=\frac{\pi}{3}$$

máme při $F=u$, $k=\frac{7}{25}$ rovnici

$$sn\,(u,\ k')=\sin\frac{\pi}{3}=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Je pak

$$sn\,(iu,\ k)=i\ \mathrm{tg}\,am\,(u,\ k')=i\sqrt{3},$$

tedy

$$dn\,(iu,\ k)=\sqrt{1+3k^2},$$

takže zde bude

$$Q=\frac{\sqrt{1+3k^2}-\sqrt{k'}}{\sqrt{1+3k^2}-\sqrt{k'}}.$$

Vypočteme dle Scheibner-Weierstrassovy metody

$$q=0{\cdot}00510257,\ \mathrm{Log}\ q=0{\cdot}7077890-3,$$

dále

$$k'=\sqrt{1-\frac{7^2}{25^2}}=\frac{24}{25},\ Q=\frac{\sqrt{772}-5\sqrt{24}}{\sqrt{772}+5\sqrt{24}}.$$

Máme tak

$$Q=\frac{3{\cdot}2899905}{52{\cdot}2797855};$$

logaritmy jsou

$$0{\cdot}5171946 \text{ a } 1{\cdot}7183338$$

a dostáváme
$$\mathrm{Log}\,\frac{Q}{2q} = 0{\cdot}7900418 = \mathrm{Log\,Cos}\,\frac{u\pi}{K};$$
druhý člen v (b) má jen slabý vliv na poslední místo i možno jej vynechati.

Abychom určili u, položme
$$\mathrm{Cos}\frac{u\pi}{K} = \sec\psi,\ \mathrm{Sin}\,\frac{u\pi}{K} = \mathrm{tg}\,\psi,$$
takže
$$e^{\frac{u\pi}{K}} = \sec\psi + \mathrm{tg}\,\psi = \mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\psi),$$
$$\frac{u\pi}{K} = \log\mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\psi).$$
Zde
$$\mathrm{Log}\cos\psi = 9{\cdot}2099582,\ \psi = 80^0\,40'\,2{\cdot}612''$$
$$\mathrm{Log\,tg}\,85^0\,20'\,1{\cdot}306'' \qquad = 1{\cdot}0881878$$
$$\log\mathrm{tg} = \frac{u\pi}{K} \qquad = 2{\cdot}505645.$$
Je však
$$\frac{2}{\pi}K = 1{\cdot}0205144, \quad \text{tedy } u = 1{\cdot}2785234.$$

* * *

Rovnice (5) ve tvaru
$$\frac{cn\,(v,\,l)}{dn\,(v,\,l)} = P, \quad P = \frac{1}{\sqrt{l}}\,Q, \quad Q = \frac{dn\,(u,\,k) - \sqrt{k'}}{dn\,(u,\,k) + \sqrt{k'}}, \tag{8}$$
v níž
$$v = \mathfrak{M}\,u, \quad \mathfrak{M} = \frac{(1+\sqrt{k'})^2}{2} = \frac{2}{(1+\sqrt{l})^2},$$
se řeší ve tvaru ($P = \sin\psi'$)
$$v = \int_P^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-l^2\xi^2)}} = \int_{\psi'}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - l^2\sin^2\varphi}},$$
což lze též psáti
$$v = \int_{\psi'}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{l'^2 + l^2\cos^2\varphi}},$$
a zavede-li se $\frac{\pi}{2} - \varphi$ za φ,
$$v = \int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\sqrt{l'^2 + l^2\sin^2\varphi}} = \sum_0^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n} H_n(\psi)\,\frac{l^{2n}}{l'^{2n+1}},$$
$$\psi = \frac{\pi}{2} - \psi',\ \cos\psi = P. \tag{8'}$$

V uvažovaném případě $k = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $sn(u, k) = \frac{3}{\sqrt{65}}$,

máme

$$\operatorname{Log} P = 9{\cdot}9050216,$$

$$\psi = 36^0\, 31'\, 40{\cdot}769''.$$

Veličina $\frac{l^2}{l'^2} \doteq l^2$ (na osm míst) $= 0{\cdot}0^3 10404$,

$\frac{1}{l'} = 1{\cdot}0^4 5020$, a vyjde (pro sedm míst)

$$v \doteq \frac{1}{l'} \left| \psi - \tfrac{1}{4}(\psi - \sin\psi \cos\psi)\, 0{\cdot}0^3 10404 \right|.$$

$$\begin{aligned}
2\psi &= 73^0\, 3'\, 21{\cdot}538'' \\
\operatorname{Log}(\tfrac{1}{2}\sin 2\psi) &= 0{\cdot}679 \;\; 6958 - 1 \\
\operatorname{Log} 0{\cdot}0^3 10404 &= \underline{0{\cdot}017 \;\; 2003 - 4} \\
& \; 0{\cdot}696 \;\; 8961 - 5 \\
\sin\psi \cos\psi \frac{l^2}{l'^2} &= 0{\cdot}0^4 4976 \\
\psi &= 0{\cdot}637 \;\; 5337 \\
\psi \frac{l^2}{l'^2} &= 0{\cdot}0^4\, 6633
\end{aligned}$$

$$v = 0{\cdot}637 \;\; 5296 \times 1{\cdot}0^4 502 = 0{\cdot}637 \;\; 5616$$

$$u = 0{\cdot}386 \;\; 4409.$$

Obraťme se nyní k transformaci obrácené; považujíce v, l za útvary původní, hledejme příslušné k nim prvky odvozené $u = v_1$, $k = l_1$; obdržíme tak transformaci

$$dn(v_1, l_1) = \sqrt{l_1'}\, \frac{dn(v, l) + \sqrt{l}\; cn(v, l)}{dn(v, l) - \sqrt{l}\; cn(v, l)}; \;\; \sqrt{l_1'} = \frac{1 - \sqrt{l}}{1 + \sqrt{l}}. \tag{9}$$

Při opakování této transformace se moduly $l_1, l_2 \ldots$ rychle blíží jednotce, tedy $\sqrt{l_1'}, \sqrt{l_2'}, \ldots$ jsou brzy velmi malé a výpočet podává pravou stranu ve tvaru málo přesném. Proto dosadíme za $\sqrt{l_1'}$ jeho hodnotu a výsledek

$$dn(v_1, l_1) = \frac{dn(v, l) + \sqrt{l}\; cn(v, l)}{1 + \sqrt{l}} \quad \frac{1 - \sqrt{l}}{dn(v, l) - \sqrt{l}\; cn(v, l)}$$

upravíme takto

$$dn(v_1, l_1) = \left(\frac{dn(v, l) + \sqrt{l}\; cn(v, l)}{1 + \sqrt{l}}\right)^2 \frac{1 - l}{dn^2(v, l) - l\, cn^2(v, l)}.$$

Ve druhém zlomku lze krátit činitelem $1 - l$ a obdržíme

$$dn(v_1, l_1) = \left(\frac{dn(v, l) + \sqrt{l}\, cn(v, l)}{1 + \sqrt{l}}\right)^2 \frac{1}{1 + l\, sn^2(v, l)}. \tag{9 a}$$

Připomeňme ještě vztahy

$$1+\sqrt{l_1'}=\frac{2}{1+\sqrt{l}},\quad v_1=\frac{2v}{(1+\sqrt{l_1'})^2}=\frac{(1+\sqrt{l})^2}{2}v. \qquad (9b)$$

Opakuje-li se tato transformace několikráte, tvoří se řada dvojic $l_1, v_1; l_2, v_2; \ldots$ a brzy dospějeme k dvojici l_n, v_n, v níž l_n je tak blízko jedné, že veličina l_n' z výpočtu vypadne a lze klásti $l_n \doteq 1$; je pak

$$dn(v_n, l_n)=dn(v_n, 1)=\frac{dn(iv_n, 0)}{cn(iv_n, 0)}=\mathrm{Sec}\, v_n;$$

veličinu v_n vypočteme z rovnice

$$\mathrm{Cos}\, v_n=\frac{1}{dn(v_n, l_n)},$$

načež určíme

$$v=\frac{(1+\sqrt{l_1'})^2}{2}\,\frac{(1+\sqrt{l_2'})^2}{2}\cdots\frac{(1+\sqrt{l_n'})^2}{2}v_n=$$

$$=\frac{2}{(1+\sqrt{l})^2}\,\frac{2}{(1+\sqrt{l_1})^2}\cdots\frac{2}{(1+\sqrt{l_{n-1}})^2}v_n.$$

Vzorec $(9a)$ lze upraviti na tvar pohodlnější pro výpočet, jakmile jsme u modulu l_ν, jehož doplněk l_ν' je dosti malý. K tomu cíli máme řadu

$$cn(v, l_\nu)=\sqrt{dn^2 v - l_\nu'^2 sn^2 v}=dn\, v\,[1-S_\nu(v)],$$

kde

$$S_\nu(v)=\tfrac{1}{2}z^2+\tfrac{1}{8}z^4+\tfrac{1}{16}z^6+\tfrac{5}{128}z^8+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2k-3)}{2.4.6\ldots 2k}z^{2k}+\ldots$$

$$z=\frac{l_\nu' sn(v, l_\nu)}{dn(v, l_\nu)};\quad z^2=\frac{l_\nu'^2}{l_\nu^2}\left(\frac{1}{dn^2(v, l_\nu)}-1\right).$$

Po dosazení této hodnoty nabývá $(9a)$ tvaru

$$dn(v_{\nu+1}, l_{\nu+1})=\frac{l_\nu\, dn^2(v_\nu, l_\nu)}{1+l_\nu-dn^2(v_\nu, l_\nu)}\left[1-\frac{\sqrt{l_\nu}}{1+\sqrt{l_\nu}}S_\nu(v_\nu)\right]^2. \qquad (9c)$$

Jakkoli nevelký tu třeba stanoviti počet výrazů (9) resp. $(9c)$, přece je počítání únavné. Obraz o tom podává dosud uvažovaný příklad

$$l=\frac{\sqrt{5}}{3},\ sn(v, l)=\frac{3}{\sqrt{65}};\ l'=\frac{2}{3}.$$

Položíme

$$\sqrt{l}=\cos\Theta,\quad \sqrt{l_1'}=\mathrm{tg}^2\frac{\Theta}{2};$$

pak

$$\mathrm{Log}\cos\Theta=9{\cdot}93618,\ \Theta=30^0\,18'\,25'',$$

$$\operatorname{Log} \cos \frac{\Theta}{2} = 9{\cdot}98463, \quad \operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} = 9{\cdot}43268,$$

$$\sqrt{l_1'} = 0{\cdot}073343, \quad l_1'^2 = 0{\cdot}0^4 2893, \quad l_1 = 1 - 0{\cdot}0^4 1446$$

i je zřejmo, že můžeme bráti $l_3' = 0$, tedy $n = 2$;

$$\frac{1}{dn(v_2, l_2)} \doteq \operatorname{Cos} v_2, \quad v = \frac{(1+\sqrt{l_1'})^2}{2} \cdot \frac{1}{2} v_2 = \frac{v_2}{(1+\sqrt{l}\,)^2},$$

t. j.

$$v = \frac{v_2}{4 \cos^4 \frac{\Theta}{2}}.$$

Náš příklad dává

$$\operatorname{Log} dn\, v_1 = 0{\cdot}90883 - 1, \quad dn^2 v_1 = 0{\cdot}65715, \quad z_1^2 = 0{\cdot}0^4 15,$$

a tak vypočteme

$$\frac{1}{dn\, v_2} = 2{\cdot}04344 = \operatorname{Cos} v_2, \quad v_2 = 1{\cdot}34168,$$

načež $v = 0{\cdot}38643$ ve shodě s předešlým výpočtem.

* * *

Jakmile dospějeme při předešlém postupu dosti malého l_ν', a to nastane vždy již pro $\nu = 1$, můžeme změniti metodu a stanoviti integrál v_1 jiným postupem. Znamenejme pak $v_1 = u$, $l_1 = k$; rovnice

$$\frac{1}{dn(u,k)} = x$$

řeší se pak integrálem

$$u = \int_1 \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k'^2 x^2)}},$$

aneb též

$$u = \int_0 \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi - k'^2}}, \quad \cos\varphi = dn(u,k). \tag{10}$$

Užijme tohoto posledního vztahu; vychází nejprve

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} k'^{2n} \mathfrak{A}_n, \tag{10a}$$

$$\mathfrak{A}_n = \int_0 \frac{d\varphi}{\cos^{2n+1}\varphi}; \quad \mathfrak{A}_0 = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\varphi\right); \tag{10b}$$

nutno předpokládati $|k'| < |\cos\varphi|$.

Z identity
$$(m+1)\int\frac{d\varphi}{\cos^{m+2}\varphi}=m\int\frac{d\varphi}{\cos^{m}\varphi}+\frac{\sin\varphi}{\cos^{m+1}\varphi}$$
plyne pak
$$2n\mathfrak{A}_n=(2n-1)\mathfrak{A}_{n-1}+\frac{\sin\varphi}{\cos^{2n}\varphi}. \tag{10c}$$

Z rovnice této lze postupně počítati $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$, ale možno také stanoviti explicitní vyjádření; nejprve
$$\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\mathfrak{A}_n=\frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{1.3.5\ldots(2n-3)}\mathfrak{A}_{n-1}+$$
$$+\frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{3.5.7\ldots(2n-1)}\frac{\sin\varphi}{\cos^{2n}\varphi},$$
$$\tfrac{2}{1}\mathfrak{A}_1=1.\mathfrak{A}_0+\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}.$$
Odtud
$$\mathfrak{A}_n=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\Big[\mathfrak{A}_0+\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\Big(1+\frac{2}{3}\frac{1}{\cos^2\varphi}+\frac{2.4}{3.5}\frac{1}{\cos^4\varphi}+\ldots$$
$$+\frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{3.5.7\ldots(2n-1)}\frac{1}{\cos^{2n-2}\varphi}\Big)\Big] \tag{10d}$$
$$\mathfrak{A}_1=\tfrac{1}{2}\Big(\mathfrak{A}_0+\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\Big),\quad \mathfrak{A}_2=\frac{1.3}{2.4}\Big[\mathfrak{A}_0+\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\Big(1+\frac{2}{3}\frac{1}{\cos^2\varphi}\Big)\Big],$$

takže při $dn\,u=\cos\varphi$ (pro isolaci členů s $\mathfrak{A}_0$)
$$u=\mathfrak{A}_0\frac{2}{\pi}K'+\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\Big[\Big(\frac{1}{2}\Big)^2k'^2+\Big(\frac{1.3}{2.4}\Big)^2k'^4\Big(1+\frac{2}{3}\sec^2\varphi\Big)+$$
$$+\Big(\frac{1.3.5}{2.4.6}\Big)^2k'^6\Big(1+\frac{2}{3}\sec^2\varphi+\frac{2.4}{3.5}\sec^4\varphi\Big)+$$
$$+\Big(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\Big)^2k'^8\Big(1+\frac{2}{3}\sec^2\varphi+\frac{2.4}{3.5}\sec^4\varphi+\frac{2.4.6}{3.5.7}\sec^6\varphi\Big)+\ldots\Big] \tag{10*}$$

V našem číselném příkladě $u=v_1$, $k=l_1$
$$k'^2=0{\cdot}0^4289,\ \operatorname{Log} dn\,u=\operatorname{Log}\cos\varphi=9{\cdot}90883,$$
$$\varphi=35^0\,50'\,26{\cdot}7'',\ \operatorname{Log}\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\varphi\Big)=0{\cdot}29134,$$
$$\log\ \operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\varphi\Big)=\mathfrak{A}_0=0{\cdot}67083.$$
$$\frac{2}{\pi}K'\doteq 1+\tfrac{1}{4}k'^2=1{\cdot}0^57,\qquad \tfrac{1}{4}k'^2\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=0{\cdot}0^56.$$
Tedy
$$v_1=0{\cdot}67083,\quad v=\frac{2v_1}{(1+\sqrt{l})^2}=\frac{v_1}{2\cos^4\frac{\Theta}{2}},\quad v=0{\cdot}38642.$$

Výsledku poslednímu lze uděliti poněkud přehlednější tvar. Znamenejme u' řešení rovnice (při daném $dn\,u$)

$$dn(u', 1) = dn(u, k), \tag{a}$$

čili ježto

$$dn(u', 1) = \operatorname{Sec} u',$$
$$dn(u, k) = \operatorname{Sec} u'; \tag{a_1}$$

při zavedení hyperbolické amplitudy φ zní to

$$dn(u, k) = \cos\varphi = \frac{1}{\operatorname{Cos} u'}, \quad \operatorname{Cos} u' = \sec\varphi,$$

načež

$$u' = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\varphi\right) = \mathfrak{A}_0,$$

a výsledek lze psáti — hodnota u příslušná k danému $dn\,u$ —

$$u = u' + \frac{1}{4}k'^2\left(u' + \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\right) + \ldots = u' + \frac{1}{4}k'^2(u' + \operatorname{Sin} u' \operatorname{Cos} u') + \ldots \tag{b}$$

jakožto řešení rovnice (a) o neznámé u, dostatečné pro velmi malá k', t. j. pro k velmi blízká 1.

* * *

Rychlejší než (10a) bude konvergence řady pro funkci

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + k'^2\sin^2\varphi}},$$

příslušné k malému k'. Řada ta zní

$$\begin{gathered} F(k_1\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} A_n(\varphi)\, k'^{2n}, \\ A_n(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{\cos^{2n+1}\varphi}, \quad A_0 = \log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\varphi\right), \end{gathered} \tag{11}$$

s konvergenční podmínkou

$$|k' \operatorname{tg}\varphi| < 1.$$

Koeficienty se stanoví na základě identity

$$d(\sin^{a+1}\varphi\cos^{b-1}\varphi) = (a+1)\sin^a\varphi\cos^b\varphi\, d\varphi - (b-1)\sin^{a+2}\varphi\cos^{b-2}d\varphi$$

jež podá

$$(2n+1)A_n + (2n+2)A_{n+1} = \frac{1}{\cos\varphi}\operatorname{tg}^{2n+1}\varphi. \tag{11a}$$

Pro explicitní vyjádření máme odtud

$$(-1)^n \frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)} A_n - (-1)^{n+1} \frac{2.4.6\ldots(2n+2)}{1.3.5\ldots(2n+1)} A_{n+1} =$$
$$= \frac{1}{\cos\varphi} (-1)^n \operatorname{tg}^{2n+1}\varphi . \frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5\ldots(2n+1)}.$$

Znamenáme-li

$$T_n = \frac{1}{\cos\varphi} \sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^\nu \frac{2.4\ldots 2\nu}{3.5\ldots(2\nu+1)} \operatorname{tg}^{2\nu+1}\varphi =$$
$$= \frac{1}{\cos\varphi} [\operatorname{tg}\varphi - \tfrac{2}{3}\operatorname{tg}^3\varphi + \frac{2.4}{3.5}\operatorname{tg}^5\varphi - \ldots +$$
$$+ (-1)^{n-1} \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)} . \operatorname{tg}^{2n-1}\varphi]. \tag{11 b}$$
$$T_1 = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\varphi},\ T_2 = \frac{1}{\cos\varphi} [\operatorname{tg}\varphi - \tfrac{2}{3}\operatorname{tg}^3\varphi], \ldots$$

obdržíme z posledního vztahu obecné vyjádření ($n = 1, 2, 3, \ldots$)

$$A_n = (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} (A_0 - T_n) = \binom{-\frac{1}{2}}{n} (A_0 - T_n),$$

a hledaný rozvoj zní

$$F(k, \varphi) = A_0 + \sum_1^\infty \binom{-\frac{1}{2}}{n}^2 [A_0 - T_n] k'^{2n}, \tag{11*}$$
$$A_0 = \log \operatorname{tg} (\frac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}\varphi).$$

V této vazbě

$$A_0 + (\tfrac{1}{2})^2 (A_0 - T_1) k'^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 (A_0 - T_2) k'^4 + \ldots$$

je konvergence rychlejší — pokud $\operatorname{tg}\varphi < 1$ — než po rozštěpení:

$$F(k, \varphi) = \frac{2}{\pi} K' A_0 - \sum_1^\infty \binom{-\frac{1}{2}}{n}^2 T_n k'^{2n} *. \tag{11 c}$$

V polynomu T_n členy střídají znamení a klesají, je-li $\operatorname{tg}\varphi < 1$, t. j. $\varphi < 45^0$. Pro tato φ bude pak

$$T_n < \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

---

* Hodnota $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+k'}}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{k'}}$, splňuje konvergenční podmínku; pro ni jest

$$F(k, \varphi) = \frac{K}{2}$$

a tak nám (11 c) přímo ukazuje povahu funkce $F(k, \varphi)$ poblíže sing. bodu $k = 1$.

Rozvoje tohoto lze také s výhodou užíti v případě pomyslného $\varphi = i\omega$; pak jest

$$A_0 = \log\ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{i\omega}{2}\right) = 2i\ \mathrm{arc\,tg}\left(Tg\,\frac{\omega}{2}\right) = 2i\left(\mathrm{arc\,tg}\, e^{\omega} - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$T_n = \frac{i}{\mathrm{Cos}\,\omega}\sum_0^{n-1}\frac{2.4\ldots 2\nu}{3.5\ldots(2\nu+1)}\,\mathrm{Tg}^{2\nu+1}\omega = i\,T_n',$$

$$F(k, i\omega) = \frac{2}{\pi}K' i A'_0 - i\sum_1^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}^2 T_n' k'^{2n};\ A'_0 = 2\ \mathrm{arc\,tg}\, e^{\omega} - \frac{\pi}{2}.$$

Vzorce (11*) lze někdy užíti bez předchozí transformace; tak v našem případě $k' = \frac{2}{3}$, $k = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $sn\,u = \sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{65}}$ máme $k'\,\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{14}}$ a stačí v řadě vzíti pět členů:

$\mathrm{Log}\ \sin\varphi = 9{\cdot}57067,$
$\mathrm{Log}\ \mathrm{tg}\,\varphi = 9{\cdot}60303,$
$\mathrm{Log}\ \cos\varphi = 9{\cdot}96764,$

$\varphi = 21^0\,50'\,44{\cdot}2''$
$\mathrm{Log\ tg}\,(45^0 + \frac{1}{2}\varphi) = 0{\cdot}16975$
$\mathrm{Log\ Log\ tg} = 0{\cdot}22981 - 1$
$\mathrm{Log\ log}\ 10 = 0{\cdot}36222$
$0{\cdot}96764 - 1$
$\mathrm{Log}\,(A_0\cos\varphi) = 0{\cdot}55967 - 1$
$A_0\cos\varphi = 0.36280$

$\mathrm{L\,tg}\,\varphi = 0{\cdot}60303 - 1,$ $\mathrm{L\,tg}^3\varphi = 0{\cdot}80909 - 2,$ $\mathrm{L\,tg}^5\varphi = 0{\cdot}01515 - 2$
$\mathrm{L}\,\frac{2}{3} = 0{\cdot}82391 - 1,$ $\mathrm{L}\,\frac{8}{15} = 0{\cdot}72700 - 1$
$0{\cdot}63300 - 2$ $\quad 0{\cdot}74215 - 3$

$\mathrm{tg}\,\varphi = 0{\cdot}40090,$ $\frac{2}{3}\mathrm{tg}^3\varphi = 0{\cdot}04295.$ $\frac{2.4}{3.5}\mathrm{tg}^5\varphi = 0{\cdot}00552;$

$\mathrm{L\,tg}^7\varphi = 0{\cdot}22121 - 3,$ $\mathrm{L\,tg}^9\varphi = 0{\cdot}42727 - 4$
$\mathrm{L}\,\frac{48}{105} = 0{\cdot}66005 - 1,$ $\mathrm{L}\,\frac{384}{945} = 0{\cdot}60890 - 1$
$0{\cdot}88126 - 4$ $\quad 0{\cdot}03617 - 4$

$$\frac{2.4.6}{3.5.7}\mathrm{tg}^7\varphi = 0{\cdot}00076,\quad \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}\mathrm{tg}^9\varphi = 0{\cdot}00011.$$

Součiny $T_n\cos\varphi$ tedy postupně jsou $(n = 1, 2, \ldots 5)$:

0·40090, 0·35795, 0·36347, 0·36271, 0·36282,

a budou pak příslušné rozdíly $(A_0 - T_n)\cos\varphi$

$-0{\cdot}03810,\ 0{\cdot}00485,\ -0{\cdot}0^3 67,\ [0{\cdot}0^4 9,\ -0{\cdot}0^4 2];$

dlužno je násobiti $\binom{-\frac{1}{2}}{n}^2 k'^{2n}$, $k' = \frac{2}{3}$:

Ta čísla jsou

$$\frac{1}{4}k'^2 = \frac{1}{9},\ \frac{9}{64}k'^4 = \frac{1}{36},\ \frac{9.25}{64.36}.k'^6 = \frac{25}{4\cdot 9^3} = 0{\cdot}0085$$

a je zřejmo, že dva členy [ ] odpadnou; tedy

$$F.\cos\varphi = A_0\cos\varphi - 0{\cdot}004233 + 0{\cdot}000134 - 0{\cdot}0^5 6 = 0{\cdot}35869$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Log}(F.\cos\varphi) &= 0{\cdot}55472-1 \\ \operatorname{Log}\cos\varphi &= 0{\cdot}96764-1 \\ \operatorname{Log} F &= 0{\cdot}58708-1 \\ F &= 0{\cdot}38643. \end{aligned}$$

Poznámka: Z identity

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \tfrac{2}{3}x^3 + \frac{2.4}{3.5}x^5 + \dots$$

vychází pro $x = i\operatorname{tg}\varphi$

$$T_\infty = \frac{1}{i}\arcsin(i\operatorname{tg}\varphi);\ \text{položme}\ \sin\alpha = i\operatorname{tg}\varphi,\ \text{tedy}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi},\ e^{i\alpha} = \frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\tfrac{1}{2}\varphi\right)$$

$$T_\infty = -i\alpha = \log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\tfrac{1}{2}\varphi\right) = A_0.$$

§ 6. Metoda Landen-Legendreova.

Základní rovnici transformace Landenovy

$$dn\left(\frac{1+k}{2}u, l\right) = \frac{dn\,u + k\,cn\,u}{1+k},\quad l = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \tag{1}$$

můžeme přepsati na

$$dn\left(\frac{1+k}{2}u, l\right) = \frac{1-k\,sn^2\frac{u}{2}}{1+k\,sn^2\frac{u}{2}},$$

čili po záměně u za $2u$,

$$dn\ [(1+k)u, l] = \frac{1-k\,sn^2 u}{1+k\,sn^2 u}. \tag{2}$$

Kdybychom se pokusili opakovati tento proces, tvoříce postupně moduly

$$l = k_1,\quad k_2 = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1},\quad k_3 = \frac{2\sqrt{k_2}}{1+k_2},\dots$$

jež se rychle blíží jednotce, zaváděli bychom argumenty

$$u_1 = (1+k)u,\quad u_2 = (1+k_1)u_1,\quad u_3 = (1+k_2)u_2,\dots$$

jež rostou rychle (řadou geometrickou); v rovnici

$$dn(u_n, k_n) = z,\ \text{t. j.}\ dn(u_n, 1) = z,$$

kterou přepsati jest na

$$\operatorname{Cos} u_n = \frac{1}{z},$$

bychom měli neznámou u_n nepřesně určenou, poněvadž obě strany jsou těsně při 1.

Lze však toho postupu užíti při transformaci (1), která při udaných modulech zavádí argumenty

$$u_1 = \frac{1+k}{2} u, \quad u_2 = \frac{1+k_1}{2} u_1, \ldots \tag{1 a}$$

s určitou limitou u_n, poněvadž nekonečný součin

$$\frac{1+k}{2} \cdot \frac{1+k_1}{2} \cdot \frac{1+k_2}{2} \ldots$$

konverguje a to velmi rychle; jsme tak při označení

$$u_\alpha = w = u \cdot \frac{1+k}{2} \cdot \frac{1+k_1}{2} \cdot \frac{1+k_2}{2} \ldots$$

vedeni k určité rovnici

$$dn(w, 1) = z, \text{ t. j. } \operatorname{Cos} w = \frac{1}{z},$$

kterou lze řešiti, a po jejím řešení máme

$$u = w \prod_{\nu=0,1,2,\ldots} \frac{2}{1+k_\nu} = w \sqrt{\frac{k_1 k_2 \ldots}{k}}.$$

Pokud k_ν není příliš blízko 1, může se pravá strana (1) počítati substitucí

$$\frac{k'_\nu}{dn(u_\nu, k_\nu)} = \sin \Theta_\nu, \quad dn(u_{\nu+1}, k_{\nu+1}) = \frac{2}{1+k_\nu} \cos^2 \frac{\Theta_\nu}{2} dn(u_\nu, k_\nu)$$

čili

$$dn(u_{\nu+1}, k_{\nu+1}) = \frac{k_{\nu+1}}{\sqrt{k_\nu}} \cos^2 \frac{\Theta_\nu}{2} dn(u_\nu, k_\nu). \tag{1 b}$$

Tímto způsobem si budeme počínati vždy, je-li modul daný $k > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Tento postup neposkytuje však žádné výhody u porovnání s klasickou metodou Landen-Legendreovou, jež operuje amplitudami $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \ldots$; $\varphi_\nu = am(u_\nu, k_\nu)$ a spočívá ve vztazích

$$\sin(2\varphi_1 - \varphi) = k \sin \varphi, \quad \sin(2\varphi_2 - \varphi_1) = k_1 \sin \varphi_1, \ldots$$

Máme pak pro $k_n = 1$

$$sn(u_n, 1) = \sin \varphi_n = \operatorname{Tg} u_n, \quad \operatorname{Cos} u_n = \sec \varphi_n,$$

$$u_n = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}\varphi_n\right) = w.$$

* * *

Obraťme se nyní k rovnici (2); považujme v, l za dané a odvozujme z nich l_1, v_1; l_2, v_2;...

$$l_1 = k, \quad v_1 = u = \frac{v}{1 + l_1};$$

rovnice

$$l' = \frac{1 - k}{1 + k}, \quad k = \frac{1 - l'}{1 + l'}$$

dává tu zákon

$$l_1 = \frac{1 - l'}{1 + l'}, \quad l_2 = \frac{1 - l_1'}{1 + l_1'}, \ldots \tag{2a}$$

$$v_1 = \frac{v}{1 + l_1}, \quad v_2 = \frac{v_1}{1 + l_2}, \quad v_3 = \frac{v_2}{1 + l_3} \ldots$$

Veličiny l_1, l_2, ... rychle se blíží nule a tedy existuje limita

$$w' = v_\infty, \quad sn(w', 0) = \sin w' = \lim sn(v_n, l_n).$$

Načež

$$v = w'(1 + l_1)(1 + l_2)(1 + l_3) \ldots$$

Rovnice (2) dává

$$l_1\, sn^2(v_1, l_1) = \frac{1 - dn(v, l)}{1 + dn(v, l)}.$$

Dle tohoto vzorce lze počítati, pokud l_1 není příliš malé; dosazením výrazu pro l_1 plyne

$$sn^2(v_1, l_1) = \frac{1 + l'}{1 + dn(v, l)} \frac{1 - dn(v, l)}{1 - l'} = \left(\frac{1 + l'}{1 + dn\, v}\right)^2 \frac{1 - dn^2 v}{1 - l'^2},$$

t. j.

$$sn(v_1, l_1) = (1 + l') \frac{sn(v, l)}{1 + dn(v, l)} = \frac{2}{1 + l_1} \frac{sn\, v}{1 + dn\, v}. \tag{2b}$$

Pro malá l možno užíti řady

$$sn(v_1, l_1) = (1 + l')\, sn(v, l) \left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8}\xi^2 + \tfrac{1}{16}\xi^4 + \ldots\right],$$
$$\xi = l\, sn(v, l).$$

Z (2b) plyne, že pro $sn(v, l) = 1$ je též

$$sn(v_1, l_1) = 1, \ldots sn(v_n, l_n) = 1, \text{ tedy } \sin w' = 1,\ w' = \frac{\pi}{2},$$

a odtud

$$L = \frac{\pi}{2}(1 + l_1)(1 + l_2)(1 + l_3) \ldots \tag{3}$$

kde L značí úplný integrál K pro modul l. Možno tedy výsledek psáti též

$$v = w' \cdot \frac{2}{\pi} L.$$

Početní mechanismus

$$l = \sin \alpha, \quad l' = \cos \alpha, \quad l_1 = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha_1,$$

$$l_1' = \cos\alpha_1, \quad l_2 = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha_1}{2} = \sin\alpha_2, \ldots$$

$$sn(v, l) = \sin\varphi, \quad l\sin\varphi = \sin\psi; \quad sn(v_\nu, l_\nu) = \sin\varphi_\nu; \ldots$$

$$\sin\varphi_1 = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\psi}{2}}\sin\varphi, \quad \sin\varphi_2 = \frac{\cos^2\frac{\alpha_1}{2}}{\cos^2\frac{\psi_1}{2}}\sin\varphi_1, \ldots$$

Poznamenejme ještě

$$\frac{2}{\pi}L = \sec^2\frac{\alpha}{2}\sec^2\frac{\alpha_1}{2}\sec^2\frac{\alpha_2}{2}\ldots \tag{a}$$

čili

$$\vartheta_3 = \sec\frac{\alpha}{2}\sec\frac{\alpha_1}{2}\sec\frac{\alpha_2}{2}\ldots \tag{a'}$$

Tak pro $l = \frac{\sqrt{5}}{3}$ nacházíme postupně

$\frac{1}{2}\alpha_\nu$	$\mathrm{Log}\cos\frac{\alpha}{2}$	$\mathrm{Loc}\sec\frac{\alpha}{2}$
24° 5′ 41″	9·96041	0·03959
5° 46′ 6″	9·99780	0·00220
17′ 32″	9 99999	1
	$\mathrm{Log}\,\vartheta_3$	0·04180

Skutečně tu $\vartheta_3 = 1{\cdot}1010$.

Theoreticky je konvergence součinu (a') rychlejší než u řady ϑ_3. Z rovnice (2) snadno obdržíme obvyklý tvar

$$sn(v, l) = \frac{(1+k)\,sn\,u}{1+k\,sn^2 u}; \quad l = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad v = (1+k)u \tag{4}$$

a odtud vypočteme

$$1 - sn(v, l) = \frac{(1 - sn\,u)(1 - k\,sn\,u)}{1 + k\,sn^2 u}, \tag{4a}$$

$$1 - l\,sn(v, l) = \frac{(1 - \sqrt{k}\,sn\,u)^2}{1 + k\,sn^2 u}, \tag{4b}$$

$$1 + l\,sn(v, l) = \frac{(1 + \sqrt{k}\,sn\,u)^2}{1 + k\,sn^2 u}; \tag{4c}$$

poslední dva vztahy dávají

$$\left.\begin{aligned} \frac{1 - \sqrt{k}\,sn\,u}{1 + \sqrt{k}\,sn\,u} &= \sqrt{\frac{1 - l\,sn(v, l)}{1 + l\,sn(v, l)}} = V, \\ \sqrt{k}\,sn\,u &= \frac{1 - V}{1 + V}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Veličiny $l_1 = k$, $l_2, \ldots$ blíží se nule a proto upravíme pravou stranu na tvar

$$sn(u,k) = \frac{4}{1+k} \frac{sn(v,l)}{[\sqrt{1+l\,sn(v,l)} + \sqrt{1-l\,sn(v,l)}]^2}$$
$$k = \frac{1-l'}{1+l'},\ u = \frac{v}{1+k}. \qquad (5a)$$

Dle tohoto vzorce budeme počítati ($l = l_n$, $v = v_n$; $k = l_{n+1}$, $u = v_{n+1}$), je-li $k = l_{n+1}$ tak malé, že by dělení na $\sqrt{k}$ ohrožovalo přesnost výpočtu; před tím užíváme metody (5), kladouce

$$l_n\, sn(v_n, l_n) = \cos\psi_n, \text{ tedy } V_n = \operatorname{tg}\frac{\psi_n}{2},$$

načež

$$\sqrt{l_{n+1}}\, sn(v_{n+1}, l_{n+1}) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi_n}{2}\right).$$

Mechanismus početní je tedy tento

$$l_{\nu+1} = \frac{1-l_\nu'}{1+l_\nu'};\ \nu = 0, 1, 2, \ldots$$
$$l\, sn(v,l) = \cos\psi,\ \cos\psi_1 = \sqrt{l_1}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right),$$
$$\cos\psi_2 = \sqrt{l_2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi_1}{2}\right), \ldots$$

Poslední výpočet, kdy l_{n+1} je již velmi malé, užívá rovnic

$$sn(v_n, l_n) = \frac{\cos\psi_n}{l_n},$$

t. j.

$$sn(v_n, l_n) = \frac{1}{\sqrt{l_n}}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}\psi_{n-1}\right)$$

a rovnice (5a) pro určení $sn(v_{n+1}, l_{n+1})$.

Po té jest již $l^2_{n+1} \doteq 0$ a máme

$$sn(v_{n+1}, l_{n+1}) \doteq sn(w, 0) = \sin w;$$

tím určeno w a odtud

$$v = w(1+l_1)(1+l_2)\ldots$$

* * *

Veličiny $k, k_1, k_2, \ldots$ vedou k algoritmu t. zv. aritmeticko-geometrického průměru (Gauss). Zaveďme homogenní vyjádření

$$k = \frac{b}{a},\ k_1 = \frac{b_1}{a_1},\ k_2 = \frac{b_2}{a_2}, \ldots$$

Rovnice

$$k_{n+1} = \frac{2\sqrt{k_n}}{1+k_n} = \frac{2\sqrt{a_n b_n}}{a_n + b_n}$$

vede k substituci

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + b_n),\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \tag{6}$$

t. j. postupně se tvoří veličiny

$$a_1 = \tfrac{1}{2}(a + b),\ b_1 = \sqrt{ab};\ a_2 = \tfrac{1}{2}(a_1 + b_1),\ b_2 = \sqrt{a_1 b_1};\dots$$

Veličiny $k_1, k_2, \dots$ tvoří řadu rostoucí, $\lim k_n = 1$; máme tedy, ježto $k_n < 1$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_n k_n}{2} < a_n;\ b^2_{n+1} = a_n b_n = \frac{b_n^2}{k_n} > b_n^2,$$

tedy

$$a > a_1 > a_2 > a_3 > a_4 \dots$$
$$b < b_1 < b_2 < b_3 < b_4 \dots$$

$\lim a_n = \lim b_n$.

Tato limita nazývá se průměrem aritmeticko-geometrickým kladných veličin a, b; jest jich homogenní funkcí.

Veličiny

$$u_1 = \frac{1+k}{2}u,\ u_2 = \frac{1+k_1}{2}u_1, \dots$$

se tu přehledně vyjadřují vzorci

$$u_1 = \frac{a_1}{a}u,\ u_2 = \frac{a_2}{a}u_1, \dots\ u_n = \frac{a_n}{a}u.$$

Značí-li $\mathfrak{a} = \lim a_\nu$ uvažovaný průměr, obdržíme po vypočtení hodnoty u_n — n dosti veliké — z rovnice*

$$sn(u_n, 1) = \mathrm{Tg}\, u_n$$

výsledek

$$u = \frac{a}{\mathfrak{a}} u_n.$$

* * *

Obraťme se nyní k modulům l_ν. Dříve zavedeme čísla $c, c_1, c_2, \dots$ určená rovnicí

$$b_\nu^2 + c_\nu^2 = a_\nu^2; \tag{7}$$

snadno shledáme, že

$$c_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2},\ c_n = a_{n-1} - a_n. \tag{7a}$$

Položme při daném modulu l

$$l' = \frac{b}{a},$$

---

* $sn(u_n, k_n) = \sin\varphi$, $\mathrm{Cos}\, u_n = \sec\varphi$, $u_n = \log \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\varphi\right)$.

tedy

$$l_1 = \frac{1-l'}{1+l'} = \frac{a-b}{a+b} = \frac{c_1}{a_1},\ l_1' = \frac{b_1}{a_1};$$

$$l_2 = \frac{1-l_1'}{1+l_1'} = \frac{a_1-b_1}{a_1+b_1} = \frac{c_2}{a_2},\ l_2' = \frac{b_2}{a_2}, \ldots$$

obecně

$$l_n = \frac{c_n}{a_n},\ l_n' = \frac{b_n}{a_n},\ l' = \frac{b}{a}. \tag{7c}$$

Dále

$$1 + l_1 = \frac{2a}{a+b} = \frac{a}{a_1},\ 1 + l_2 = \frac{a_1}{a_2}, \ldots$$

takže obecně

$$v_n = \frac{a_n}{a} v,$$

jako dříve.

Vzorec (3) přejde na

$$L = \frac{\pi}{2}\frac{a}{\alpha} = \frac{\pi}{2}\lim\frac{a}{a_n};\ l' = \frac{b}{a}. \tag{3*}$$

* * *

V rovnici (4)

$$sn\,(v, l) = \frac{(1+k)\,sn\,u}{1+k\,sn^2 u};\ v = (1+k)\,u,$$

položme iu, iv za u a v a užijme vztahu

$$sn(iu, k) = i\,tn\,(u, k'),\quad (tn = \operatorname{tg} am)$$

a řešme výsledek vůči k:

$$tn\,(v, l') - k\,tn^2(u, k')\,tn\,(v, l') = (1+k)\,tn\,(u, k'),$$

$$k\,tn\,(u, k') = \frac{tn\,(v, l') - tn\,(u, k')}{1 + tn\,(u, k')\,tn\,(v, l')}.$$

Položme nyní $k' = h$, $k = h'$, $l = m'$, $l' = m$,

$$l' = \frac{1-k}{1+k} = \frac{1-h'}{1+h'} = m,$$

$$k = \frac{1-l'}{1+l'} = \frac{1-m}{1+m'},\quad v = \frac{2}{1+m}u$$

a pišme

$$am\,(u, h) = \varphi,\quad am\,(v, m) = \varphi_1;$$

výsledek zní

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = h' \operatorname{tg}\varphi.$$

Zaměníme-li litery h, m za k, k_1, máme při

$$sn(u,\ k) = \sin\varphi, \quad sn(v,\ k_1) = \sin\varphi_1,$$

$$k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}, \quad v = \frac{2}{1+k_1}\,u = (1+k')\,u \tag{8}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = k' \operatorname{tg}\varphi.$$

Položíme

$$k' = \frac{b}{a}; \quad a_{\nu+1} = \frac{a_\nu + b_\nu}{2}, \quad b_{\nu+1} = \sqrt{a_\nu b_\nu},$$

načež

$$k_\nu = \frac{c_\nu}{a_\nu}, \quad u_\nu = \frac{2^\nu a_\nu}{a}\,u, \quad u_1 = v = \frac{2\,a_1}{a}\,u.$$

Zde veličiny k_ν se rychle blíží nule a je pro dosti malé k_n

$$sn(u_n,\ k_n) \doteq \sin u_n = \sin\varphi_n, \quad u_n \doteq \varphi_n$$

$$u = \frac{\varphi_n}{2^n}\,\frac{a}{a_n};$$

jest pak

$$\frac{\varphi_n}{2^n} \doteq \psi, \quad a_n \doteq \mathfrak{a}, \quad u = \frac{a}{\mathfrak{a}}\,\psi.$$

* * *

Pomocí (4a) obdržíme ze (4) $(l = \frac{2\sqrt{k}}{1+k})$

$$\operatorname{tg}\ am(v,\ l) = (1+k)\frac{sn(u,\ k)}{cn(u,\ k)\,dn(u,\ k)}, \; v = (1+k)\,u. \tag{9}$$

Tohoto vzorce nelze užíti k počítání funkcí argumentu u, ale můžeme ho užíti pro $l = l_{n-1}$, $k = l_n$, když l_n je velmi malé; pak je totiž

$$dn(u,\ k) \doteq 1, \quad \operatorname{tg}\ am(u,\ k) \doteq \operatorname{tg} u.$$

a výpočet končí rovnicí*

$$\operatorname{tg} v_n \doteq \operatorname{tg} am\,(v_{n-1},\ l_{n-1});$$

když bylo ke Gaussovu algoritmu zvoleno $l' = \frac{b}{a}$, a kladeno $l_\nu = \frac{c_\nu}{a_\nu}$, máme při algoritmu (5) — nikoli při postupu (8) —

$$v_\nu = \frac{a_\nu}{a}\,v,$$

tedy

$$v \doteq \frac{a}{\mathfrak{a}}\,v_n.$$

* * *

* Totéž nám podá rovnice (4): $sn(u_{n-1},\ l_{n-1}) \doteq sn\,(u_n,\ l_n) \doteq \sin u_n$; věc je totiž obsažena v rovnici $am\,(u_{n-1},\ l_{n-1}) \doteq u_n$.

Známe-li $\operatorname{tg} am\,(v_{n-1}, l_{n-1}) = T_{n-1}$, aniž lze zanedbati l_n, můžeme počítati na základě (9)

$$(1 + l_n)\operatorname{tg} am\,(v_n, l_n) = T_{n-1}\,dn\,(v_n, l_n),$$
$$dn\,(v_n, l_n) \doteq 1 - \tfrac{1}{2} l_n^2\, sn^2 v_n - \tfrac{1}{8} l_n^4\, sn^4 v_n,$$

když se $sn\,v_n$ nahradí sblíženou hodnotou $\sin\left(\operatorname{arc\,tg} \dfrac{T_{n-1}}{1 + l_n}\right)$.

* * *

Výpočet integrálu K'. Zaveďme opět rostoucí moduly $k, k_1, k_2, \ldots$

$$k_{\nu+1} = \frac{2\sqrt{k_\nu}}{1 + k_\nu},\quad k'_{\nu+1} = \frac{1 - k_\nu}{1 + k_\nu};$$

příslušné úplné integrály

$$K,\ K_1,\ K_2, \ldots$$

jsou vázány vztahem

$$1 + k'_{\nu+1} = \frac{2}{1 + k_\nu} = \frac{2 K_\nu}{K_{\nu+1}},$$

a odtud máme

$$(1 + k_1')(1 + k_2')\ldots(1 + k_n') = \frac{2^n K}{K_n}.$$

Je pak

$$\frac{2}{\pi} K_n = \vartheta_3^2\left(0 \middle| \frac{\tau}{2^n}\right) = 2^n \frac{i}{\tau}\, \vartheta_3^2\left(0 \middle| \frac{-2^n}{\tau}\right)$$
$$= 2^n \frac{i}{\tau}\left\{1 + 2 q^{2^n} + 2 q^{4\cdot 2^n} + \ldots\right\}$$

a tedy s velikým sblížením

$$\lim \frac{2^n K}{K_n} = \frac{2}{\pi} K \frac{\tau}{i} = \frac{2}{\pi} K',$$

což dává

$$\frac{2}{\pi} K' = (1 + k_1')(1 + k_2')(1 + k_3')\ldots \tag{10}$$

Výsledek se kryje s (3), zamění-li se k za $k' = l$. Klademe skutečně v algoritmu Gaussově $k = \dfrac{b}{a}$, $k_\nu' = c_\nu$, $1 + k_\nu' = \dfrac{a_{\nu-1}}{a_\nu}$.

* * *

Obraťme se nyní k integrálům 2. typu

$$E(k,\varphi) = \int_0 \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi;$$

jako funkci proměnné u ji značme

$$el\,u = E(k,\ am\,u) = \int_0 dn^2 u\, du = el\,(u,\ k);$$

pro případ $\varphi = \frac{\pi}{2}$ píšeme

$$E(k) \text{ neb prostě } E \text{ místo } E(k, \tfrac{\pi}{2}).$$

Základní vzorec transformace Landenovy

$$\frac{dn\,u + k\,cn\,u}{1+k} = dn(v, l); \quad v = \frac{1+k}{2}u, \quad l = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$$

podá utvořením čtverců vzhledem k identitě

$$k^2 cn^2 u = dn^2 u - k'^2$$

$$dn^2(v, l) = \frac{1}{(1+k)^2}[2\,dn^2 u + 2k\,cn\,u\,dn\,u - k'^2];$$

tu jest

$$\frac{k'^2}{1+k} = 1 - k, \quad dv = \frac{1+k}{2}du;$$

násobíme-li dv a integrujeme, obdržíme tedy

$$el(v, l) = \frac{1}{1+k}[el(u, k) + k\,sn\,u] - \frac{1-k}{2}u. \tag{11}$$

Tento vzorec tvoří základ pro přímý výpočet integrálů 2. typu (sr. přísl. kapitolu v Schloemilchově Compendiu), avšak ty jsou sotva jednodušší než užití funkce $\Theta(u)$, a proto je pomíjíme, omezujíce se na úplné integrály.

Ze vztahu

$$v = \frac{Lu}{2K}, \text{ kde } L = K(l),$$

plyne, že platí současně $u = 2K$, $v = L$, $el(u) = 2E(k)$, $el(v) = E(l)$ a tedy

$$E(l) = \frac{2}{1+k}E(k) - (1-k)K. \tag{12}$$

Zavedeme opět rostoucí moduly k, $k_1 = l$, $k_2, \ldots$

$$k_{\nu+1} = \frac{2\sqrt{k_\nu}}{1+k_\nu}, \quad k'_{\nu+1} = \frac{1-k_\nu}{1+k_\nu}, \quad \frac{2}{1+k_\nu} = 1 + k'_{\nu+1};$$

máme tak dle (12)

$$E(k_{\nu+1}) = (1 + k'_{\nu+1})E(k_\nu) - (1-k_\nu)K_\nu,$$

a odtud

$$\frac{E(k_{\nu+1})}{(1+k_1')(1+k_2')\ldots(1+k'_{\nu+1})} = \frac{E(k_\nu)}{(1+k_1')(1+k_2')\ldots(1+k_\nu')} - \frac{(1-k_\nu)K_\nu}{(1+k_1')(1+k_2')\ldots(1+k'_{\nu+1})}.$$

Veličina $(1-k_\nu)K_\nu$ se vyjádří na základě vztahu

$$k'_{n+1}K_{n+1}=(1-k_n)K_n \quad (n=0, 1, 2,\ldots)$$

ve tvaru

$$(1-k_\nu)K_\nu=\frac{(1-k)(1-k_1)\ldots(1-k_\nu)}{k_1'k_2'\ldots k_\nu'}K$$

čili po dosazení

$$1-k_n=\frac{2k'_{n+1}}{1+k'_{n+2}},$$

$$(1-k_\nu)K_\nu=\frac{2^{\nu+1}k'_{\nu+1}K}{(1+k_1')(1+k_2')\ldots(1+k'_{\nu+1})};$$

jím vzniká vzorec — píšeme $E_\nu=E(k_\nu)$ —

$$\frac{E_\nu}{(1+k_1')(1+k_2')\ldots(1+k_\nu')}=$$

$$=\frac{E_{\nu+1}}{(1+k_1')(1+k_2')\ldots(1+k'_{\nu+1})}+\frac{2^{\nu+1}k'_{\nu+1}K}{(1+k_1')^2(1+k_2')^2\ldots(1+k'_{\nu+1})^2}.$$

$$(\nu=0, 1, 2,\ldots)$$

Sečteme-li tyto výsledky od $\nu=0$ do $\nu=n-1$, máme

$$E(k)=$$

$$=\frac{E_n}{(1+k_1')(1+k_2')\ldots(1+k_n')}+K\sum_{\mu=1}^{n}\frac{2^\mu k_\mu'}{(1+k_1')^2(1+k_2')^2\ldots(1+k_\mu')^2}.$$

Tu jest pak pro $n=\infty$

$$\lim k_n=1,\ \lim\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k_n^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=1=\lim E_n,$$

a dle (10)

$$\lim(1+k_1')(1+k_2')\ldots(1+k_n')=\frac{2}{\pi}K';$$

výsledek náš zní

$$E(k)=\frac{\pi}{2K'}+K\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2^\nu k_\nu'}{(1+k_1')^2(1+k_2')^2\ldots(1+k_\nu')^2}.$$

Při užití algoritmu Gaussova

$$k=\frac{b}{a},\ k_\nu=\frac{b_\nu}{a_\nu};\ a_{\nu+1}=\frac{a_\nu+b_\nu}{2},\ b_{\nu+1}=\sqrt{a_\nu b_\nu}$$

máme

$$k_\nu'=\frac{c_\nu}{a_\nu},\ c_\nu=a_{\nu-1}-a_\nu,\ 1+k_\nu'=\frac{a_{\nu-1}}{a_\nu},$$

a rovnice se přepíše na

$$E\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{\pi}{2K'}+K\sum_{\nu=1}^{\infty}2^\nu\frac{a_\nu c_\nu}{a^2}. \tag{13*}$$

Př.: $k=\frac{1}{2}$; $a=2,\quad b=1,\quad c=\sqrt{3},$

$$a_1=1\cdot 5,\quad b_1=1\cdot 41421,\quad c_1=0\cdot 5,$$
$$a_2=1\cdot 45710,\quad b_2=1\cdot 45647,\quad c_2=0\cdot 04290,$$
$$a_3=1\cdot 45678,\quad b_3=1\cdot 45679,\quad c_3=0\cdot 0^3 32.$$

Řada se redukuje na

$$\tfrac{2}{4}a_1c_1+\tfrac{4}{4}a_2c_2+\tfrac{8}{4}a_3c_3.$$

* * *

V rovnici (12), kterou pišme $(1+k)E(l)=2E(k)-(1-k^2)K$, dosaďme hodnoty

$$\frac{2}{\pi}E(k)=1+\sum_1^\infty\binom{-\frac{1}{2}}{n}\binom{\frac{1}{2}}{n}k^{2n}.$$
$$\frac{2}{\pi}K(1-k^2)=1+\sum_1^\infty\left[\binom{-\frac{1}{2}}{n}^2-\binom{-\frac{1}{2}}{n-1}^2\right]k^{2n}.$$
$$\binom{-\frac{1}{2}}{n}^2-\binom{-\frac{1}{2}}{n-1}^2=-\binom{-\frac{1}{2}}{n-1}^2\frac{4n-1}{(2n)^2},$$
$$\binom{-\frac{1}{2}}{n}\binom{\frac{1}{2}}{n}=-\binom{-\frac{1}{2}}{n-1}^2\frac{2n-1}{(2n)^2},$$

tedy

$$\frac{2}{\pi}[2E(k)-(1-k^2)K]=1+\sum_1^\infty\binom{-\frac{1}{2}}{n-1}^2\frac{k^{2n}}{(2n)^2}$$

a máme tak

$$E(l)=\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+k}\left\{1+\frac{k^2}{2^2}+\frac{1}{4}\frac{k^4}{4^2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{k^6}{6^2}+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\frac{k^8}{8^2}+\dots\right\},\quad (12^*)$$
$$k=\frac{1-l'}{1+l'}.$$

Současně platí řada o stejné konvergenci

$$K(l)=L=\frac{\pi}{2}(1+k)\left\{1+\frac{1}{4}k^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2k^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2k^6+\dots\right\}.$$

Je-li na př. $l=\frac{1}{2}$, jest

$$k=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=7-4\sqrt{3}=0\cdot 0717968,\quad k^2=0\cdot 0051546;$$

obě řady tedy rychle konvergují.

Vzpomeňme rovnic

$$el(u)=\frac{E}{K}u+\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},\quad \frac{f'(u)}{f(u)}=-k\,sn\,u,$$
$$f(u)=dn(v,\,l);$$

tak vychází z (11) integrací

$$\frac{E(l)}{L}\frac{v^2}{2}+\log\frac{\Theta(v,\,l)}{\Theta(0,\,l)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{E(k)}{K}\frac{u^2}{2}+\log\frac{\Theta(u,\,k)}{\Theta(0,\,k)}-\log dn(v,l)\right]-\frac{1-k^2}{8}u^2.$$

Dosadíme-li hodnotu za v, vypadne dle (12) u^2 z rovnice a výsledek zní

$$\left(\frac{\Theta(v,\,l)}{\Theta(0,\,l)}\right)^2 dn(v,\,l)=\frac{\Theta(u,\,k)}{\Theta(0,\,k)},$$

což by vedlo k určení hodnoty

$$\vartheta_0\left(\frac{v}{2L}\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)\vartheta_3\left(\frac{v}{2L}\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right):\vartheta_3\left(\frac{u}{2K}\,\middle|\,\tau\right)=\text{konst.}$$

čili po substituci $u=2K\xi,\ \frac{v}{2L}=\frac{u}{4K}=\frac{\xi}{2}$,

$$\vartheta_0\left(\frac{\xi}{2}\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)\vartheta_3\left(\frac{\xi}{2}\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right):\vartheta_0(\xi\,|\,\tau).$$

Tabulka důležitějších vzorců v textu odvozených.

Derivace funkcí snu, cnu, dnu, amu.

$$D_u\, snu = cnu\, dnu;\quad D_u\, cnu = -snu\, dnu;\quad D_u\, dnu = -k^2\, snu\, cnu;\quad D_u\, amu = dnu.$$

Zvláštní hodnoty funkcí snu, cnu, dnu.

	0	$\frac{K}{2}$	K	$2K$	$\frac{iK'}{2}$	iK'	$2iK'$
snu	0	$\frac{\sqrt{1-k'}}{k}$	1	0	$\frac{i}{\sqrt{k}}$	∞	0
cnu	1	$\frac{\sqrt{k'(1-k')}}{k}$	0	-1	$\sqrt{\frac{1+k}{k}}$	∞	-1
dnu	1	$\sqrt{k'}$	k'	1	$\sqrt{1+k}$	∞	-1

Periodické vlastnosti funkcí snu, cnu, dnu.

$$sn(u+2mK+2niK') = (-1)^m snu;\quad cn(u+2mK+2niK') = (-1)^{m+n} cnu;\quad dn(u+2mK+2niK') = (-1)^n dnu.$$

Součtové věty pro funkce snu, dnu, cnu.

$$sn(u+v) = \frac{snu\, cnv\, dnv + snv\, cnu\, dnu}{1-k^2 sn^2u\, sn^2v}.$$

$$cn(u+v) = \frac{cnu\, cnv - snu\, snv\, dnu\, dnv}{1-k^2 sn^2u\, sn^2v}.$$

$$dn(u+v) = \frac{dnu\, dnv - k^2 snu\, snv\, cnu\, cnv}{1-k^2 sn^2u\, sn^2v}.$$

Řady pro funkce snu, cnu, dnu.

$$snu = \frac{2\pi}{Kk} \sum_{\lambda=1,3,5,\ldots} \frac{q^{\frac{\lambda}{2}}}{1-q^\lambda} \sin\frac{\lambda u \pi}{2K};$$

$$cn u = \frac{2\pi}{Kk} \sum_{\lambda=1,3,5,\ldots} \frac{q^{\frac{\lambda}{2}}}{1+q^{\lambda}} \cos\frac{\lambda u\pi}{2K};$$

$$dn u = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K} \sum_{1}^{\infty} \frac{q^{\nu}}{1+q^{2\nu}} \cos\frac{\nu u\pi}{K};$$

$$\frac{1}{sn u} = \frac{\pi}{2K\sin\frac{u\pi}{2K}} + \frac{2\pi}{K} \sum_{\lambda=1,3,5,\ldots} \frac{q^{\lambda}}{1-q^{\lambda}} \sin\frac{\lambda u\pi}{2K};$$

$$\frac{dn u}{sn u} = \frac{\pi}{2K\sin\frac{u\pi}{2K}} - \frac{2\pi}{K} \sum_{\lambda=1,3,5\ldots} \frac{q^{\lambda}}{1+q^{\lambda}} \sin\frac{\lambda u\pi}{2K};$$

$$\frac{2K}{\pi}\frac{cn u}{sn u} = \operatorname{cotg}\frac{u\pi}{2K} - 4\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^{2\nu}}{1+q^{2\nu}} \sin\frac{\nu u\pi}{2K};$$

$$\frac{dn u}{cn u} = \frac{\pi}{2K\cos\frac{u\pi}{2K}} + \frac{2\pi}{K} \sum_{\lambda=1,3,5\ldots} (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \frac{q^{\lambda}}{1-q^{\lambda}} \cos\frac{\lambda u\pi}{2K};$$

$$\frac{cn u}{dn u} = \frac{2\pi}{Kk} \sum_{\lambda=1,3,5,\ldots} (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \frac{q^{\frac{\lambda}{2}}}{1-q^{\lambda}} \cos\frac{\lambda u\pi}{2K};$$

$$\frac{1}{sn^2 u} = \frac{K-E}{K} + \frac{\pi^2}{4K^2\sin^2\frac{u\pi}{K}} - \frac{2\pi^2}{K^2} \sum_{1}^{\infty} \frac{\nu q^{2\nu}}{1-q^{2\nu}} \cos\frac{\nu u\pi}{K};$$

$$dn^2 u = \frac{E}{K} + \frac{2\pi^2}{K^2} \sum_{1}^{\infty} \frac{\nu q^{\nu}}{1-q^{2\nu}} \cos\frac{\nu u\pi}{K}.$$

Součtová věta pro integrály druhého druhu.

$$Z(u+v) - Z(u) - Z(v) = k^2 sn u\, sn v\, sn(u+v).$$

Definice funkcí theta.

$$\vartheta_0(v\,|\,\tau) = \prod_{1}^{\infty} (1-q^{2\nu})(1-q^{2\nu-1}e^{2v\pi i})(1-q^{2\nu-1}e^{-2v\pi i});$$

$$\vartheta_1(v\,|\,\tau) = 2q^{\frac{1}{4}}\sin v\pi \prod_{1}^{\infty} (1-q^{2\nu})(1-q^{2\nu}e^{2v\pi i})(1-q^{2\nu}e^{-2v\pi i});$$

$$\vartheta_2(v\,|\,\tau) = \vartheta_1(v+\tfrac{1}{2}\,|\,\tau) = 2q^{\frac{1}{4}}\cos v\pi \prod_{1}^{\infty} (1-q^{2\nu})(1+q^{2\nu}e^{2v\pi i})(1+q^{2\nu}e^{-2v\pi i});$$

$$\vartheta_3(v\,|\,\tau) = \vartheta_0(v+\tfrac{1}{2}\,|\,\tau) = \prod_{1}^{\infty} (1-q^{2\nu})(1+q^{2\nu}e^{2v\pi i})(1+q^{2\nu}e^{-2v\pi i}).$$

Definice funkcí $H(u)$, $\Theta(u)$, $H_1(u)$, $\Theta_1(u)$.

$$H(u) = \vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\,\middle|\,\tau\right); \qquad H_1(u) = \vartheta_2\left(\frac{u}{2K}\,\middle|\,\tau\right);$$

$$\Theta(u) = \vartheta_0\left(\frac{u}{2K}\,\middle|\,\tau\right); \qquad \Theta_1(u) = \vartheta_3\left(\frac{u}{2K}\,\middle|\,\tau\right).$$

Periodické vlastnosti funkcí theta.

Značí-li se $\vartheta_{01}(u)=\vartheta_0(u)$, $\vartheta_{11}(u)=\vartheta_1(u)$, $\vartheta_{10}(u)=\vartheta_2(u)$, $\vartheta_{00}(u)=\vartheta_3(u)$, jest

$$\vartheta_{gh}(v+1)=(-1)^g\,\vartheta_{gh}(v);$$
$$\vartheta_{gh}(v+\tau)=(-1)^h\,e^{-\pi i(2v+\tau)}\,\vartheta_{gh}(v).$$

Chování se funkcí theta vůči polovičním periodám, viz tabulku na str. 44.

Transformační vzorce pro funkce theta.

$$\vartheta_0(v|\tau)=\sqrt{\frac{i}{\tau}}\,e^{-\frac{\pi i}{\tau}v^2}\,\vartheta_2\left(\frac{v}{\tau}\Big|-\frac{1}{\tau}\right);$$
$$\vartheta_1(v|\tau)=i\sqrt{\frac{i}{\tau}}\,e^{-\frac{\pi i}{\tau}v^2}\,\vartheta_1\left(\frac{v}{\tau}\Big|-\frac{1}{\tau}\right);$$
$$\vartheta_2(v|\tau)=\sqrt{\frac{i}{\tau}}\,e^{-\frac{\pi i}{\tau}v^2}\,\vartheta_0\left(\frac{v}{\tau}\Big|-\frac{1}{\tau}\right);$$
$$\vartheta_3(v|\tau)=\sqrt{\frac{i}{\tau}}\,e^{-\frac{\pi i}{\tau}v^2}\,\vartheta_3\left(\frac{v}{\tau}\Big|-\frac{1}{\tau}\right).$$

Řady pro funkce theta.

$$\vartheta_0(u)=1+2\sum_1^\infty(-1)^\nu q^{\nu^2}\cos 2\nu u\pi;$$
$$\vartheta_1(u)=2\sum_{\lambda=1,3,5\,..}(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}q^{\frac14\lambda^2}\sin\lambda u\pi;$$
$$\vartheta_2(u)=2\sum_{\lambda=1,3,5,..}q^{\frac14\lambda^2}\cos\lambda u\pi;$$
$$\vartheta_3(u)=1+2\sum_1^\infty q^{\nu^2}\cos 2\nu u\pi.$$

Vyjádření funkcí *snu*, *cnu*, *dnu* funkcemi theta.

$$snu=\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{u}{2K}\right)};\quad cnu=\frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2\left(\frac{u}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{u}{2K}\right)};\quad dnu=\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3\left(\frac{u}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{u}{2K}\right)}.$$

Zvláštní vzorce.

$$\vartheta_1'=\pi\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3;\qquad \sqrt{k}=\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3};\qquad E=K-\frac{\vartheta_0''}{4K\vartheta_0};$$
$$2K=\pi\vartheta_3^2;\qquad \sqrt{k'}=\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3};\qquad E'=\frac{\pi}{2K}+\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\frac{K'}{4K^2};$$
$$EK'+E'K=\frac{\pi}{2}+KK';$$
$$\vartheta_0^4+\vartheta_2^4=\vartheta_3^4;$$

$$\vartheta_3 = (1+\sqrt{k_1})(1+\sqrt{k_2})(1+\sqrt{k_3})\ldots;\ \sqrt{k_1} = \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}},\ \sqrt{k_2} = \frac{1-\sqrt{k_1'}}{1+\sqrt{k_1'}},\ldots$$

$$\vartheta_3^4 = 1 + 8\sum_1^\infty \frac{\nu q^\nu}{1+(-q)^\nu};$$

$$\vartheta_0^4 - \vartheta_2^4 = 1 - 24\sum_{\lambda=1,3,5,\ldots} \frac{\lambda q^\lambda}{1+q^\lambda};$$

$$\vartheta_0^4 + \vartheta_3^4 = 2 + 48\sum_1^\infty \frac{\nu q^{2\nu}}{1+q^{2\nu}};$$

$$\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4 = 1 + 24\sum_{\lambda=1,3,5\ldots} \frac{\lambda q^\lambda}{1-q^\lambda};$$

$$\vartheta_2\vartheta_3 = 2\sum_{\lambda=1,3,5,\ldots} \frac{q^{\frac{\lambda}{4}}}{1+q^{\frac{\lambda}{4}}};$$

$$\vartheta_2\vartheta_3 = 1 + 4\sum_1^\infty (-1)^\nu \frac{q^{\nu^2+\nu}}{1+q^{2\nu}};$$

$$\vartheta_2^2\vartheta_3^2 = 4\sum_{\lambda=1,3,5\ldots} \frac{\lambda q^{\frac{\lambda}{2}}}{1-q^\lambda};$$

$$\vartheta_0^2\vartheta_3^2 = 1 + 8\sum_1^\infty (-1)^\nu \frac{\nu q^{2\nu}}{1+q^{2\nu}}.$$

Integrační vzorce.

Viz tabulku na str. 101.

Vzorce pro numerický výpočet.

Transformace Landenova:

$$\int_0 \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{2}{1+k}\int_0 \frac{d\psi}{\sqrt{1-l^2\sin^2\psi}};\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin 2\psi}{k+\cos 2\psi},\ l = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}.$$

Výpočet integrálu prvního druhu $u = \int_0 \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$.

1. $$u = \sum_0^\infty (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} k^{2n} H_n(\varphi); \qquad |k| < 1.$$

$$H_n(\varphi) = \frac{1.3.5..2n-1}{2.4....2n}[\varphi - P_n];\ P_n = \cos\varphi\,[\sin\varphi + \frac{2}{3}\sin^3\varphi +$$

$$+ \frac{2.4}{3.5}\sin^5\varphi + \ldots + \frac{2.4..2n-2}{3.5..2n-1}\sin^{2n-1}\varphi];\ n \geqq 2.$$

$$P_1 = \sin\varphi\cos\varphi.$$

2. $$u=\frac{2}{\pi}K\varphi-\sum_1^\infty\binom{-\frac{1}{2}}{n}^2 P_n k^{2n}.$$

3. $$u=A_0+\sum_1^\infty\binom{-\frac{1}{2}}{n}^2[A_0-T_n]k'^{2n};\ T_n=\frac{1}{\cos\varphi}[\operatorname{tg}\varphi-\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3\varphi+$$
$$+\frac{2.4}{3.5}\operatorname{tg}^5\varphi+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2.4..2n-2}{3.5..2n-1}\operatorname{tg}^{2n-1}\varphi];\ n\geqq 2.$$
$$T_1=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\varphi};\quad A_0=\log\operatorname{tg}[\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}].$$

Výpočet úplných integrálů.

$$K=\frac{\pi}{2}\sum_1^\infty\binom{-\frac{1}{2}}{n}^2 k^{2n}.\qquad |k|<1.$$
$$K'=\frac{2}{\pi}K\log\frac{4k'}{k}+\sum_1^\infty\binom{-\frac{1}{2}}{n}^2 s_n k^{2n};\quad s_n=\sum_1^n\frac{1}{\nu}.$$
$$K'=\frac{2}{\pi}K\log\frac{4}{k}-2\sum_1^\infty\binom{-\frac{1}{2}}{n}^2\sum_1^n\frac{1}{2\nu(2\nu-1)}k^{2n}.$$
$$\frac{2}{\pi}K'=(1+k_1')(1+k_2')(1+k_3')\ldots;\quad k_{\nu+1}=\frac{2\sqrt{k_\nu}}{1+k_\nu},\ k'_{\nu+1}=\frac{1-k_\nu}{1+k_\nu}.$$
$$K(l)=\frac{\pi}{2}(1+k)[1+\frac{1}{4}k^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2k^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2k^6+..];\ k=\frac{1-l'}{1+l'}.$$
$$E(k)=\frac{\pi}{2K'}+K\sum_1^\infty\frac{2^\nu k_\nu'}{(1+k_1')^2(1+k_2')^2\ldots(1+k_\nu')^2}.$$
$$E(l)=\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+k}[1+\frac{k^2}{2^2}+\frac{1}{4}\frac{k^4}{4^2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{k^6}{6^2}+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\frac{k^8}{8^2}+\ldots];$$
$$k=\frac{1-l'}{1+l'}.$$

Výpočet parametru q z modulu k nebo z úplného integrálu.

$$\sqrt{q}=\frac{k}{4}e^{\varphi\left(\frac{k^2}{4}\right)};\ \varphi(x)=x+\frac{13}{8}x^2+\frac{23}{6}x^3+\frac{2701}{4^4}x^4+\ldots$$
$$q^{\frac{1}{4}}=\lambda+2\lambda^5+15\lambda^9+150\lambda^{13}+1707\lambda^{17}+\ldots;\ \lambda=\frac{1}{2}\sqrt{k}.$$
$$q=\lambda+2\lambda^5+15\lambda^9+150\lambda^{13}+1707\lambda^{17}+\ldots;\ \lambda=\frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}.$$
$$q=\xi-\xi^4+4\xi^7-\xi^9-22\xi^{10}+\ldots;\ \xi=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}K}-1\right).$$