Matyáš Lerch

Mittheilungen aus der Integralrechnung

Monatsch. Math. Phys. 1 (1890), 105–112

Mittheilungen aus der Integralrechnung.

Von **Mathias Lerch** in Prag.

1.

Die sogenannte Fourier-Bessel'sche Function

$$J(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu}}{4^\nu (\nu\,!)^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{ix\cos a}\, da$$

hat folgende Eigenschaften:

1. Sie ist eine ganze transcendente Function und wird für alle reellen unendlich großen Werte der Veränderlichen x unendlich klein, und zwar wird sie für dieselben durch einen Ausdruck von der Form $\frac{A\cos x + B\sin x}{\sqrt{x}}$ approximativ dargestellt.

2. Es besteht für sämmtliche positive α und für beliebige reelle β die von Herrn Lipschitz herrührende Formel*)

$$\int_0^\infty e^{-\alpha r} J(\beta r)\, dr = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

und die hieraus durch Differentiation nach α entstehende

$$\int_0^\infty e^{-\alpha r} J(\beta r)\, r\, dr = \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}}\,. \tag{1}$$

Unsere Absicht ist, aus diesen Eigenschaften der J-Function die Weber'sche Formel**)

$$\int_0^\infty J(z) \log z\, dz = \Gamma'(1) - \log 2 \tag{2}$$

zu erschließen.

Zuerst folgt aus der Eigenschaft (1), dass das Integral

$$A = \int_0^\infty J(z) \log z\, dz$$

---

*) Es lassen sich aus der Lipschitz'schen Formel mehrere Eigenschaften der J-Function direct erschließen; es ist interessant zu bemerken, dass diese Function durch die Lipschitz'sche Gleichung eindeutig bestimmt ist, wenn man nur hinzufügt, dass $J(x)$ sich von 0 bis $+\infty$ stetig ändert und reell bleibt. Es ist $J(x)$ die erzeugende Function im Sinne Abel's der sie determinierenden Function $\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$. Das Murphy'sche Theorem (vgl. Bertrand, Calcul intégral, pag. 509) liefert unmittelbar eine Darstellung dieser Function.

**) Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. LXXV.

existiert. Führt man az als neue Integrationsvariabele ein, so kommt

$$A = \log a \int_0^\infty J(az)\, a\, dz + a \int_0^\infty J(az) \log z\, dz,$$

und da nach (1)

$$\int_0^\infty J(az)\, a\, dz = 1$$

ist, so haben wir

$$A = \log a + a \int_0^\infty J(az) \log z\, dz.$$

Multipliciert man beiderseits mit $e^{-a}\, da$ und integriert zwischen den Grenzen $(0 \ldots \infty)$, so resultiert

$$A = \Gamma'(1) + \int_0^\infty e^{-a}\, a\, da \int_0^\infty J(az) \log z\, dz.$$

Um dieses Doppelintegral zu bestimmen, betrachten wir zuerst das folgende

$$(\alpha) \qquad B_N = \int_0^\infty e^{-a}\, a\, da \int_0^N J(az) \log z\, dz,$$

wobei N eine beliebige positive reelle Größe ist. Wir setzen das gesuchte Doppelintegral B_∞ gleich B und werden nachher beweisen, dass $\lim\limits_{N=\infty} B_N = B$ ist.

Es ergibt sich offenbar aus (α) die Formel

$$B_N = \int_0^N \log z\, dz \int_0^\infty e^{-a} J(az)\, a\, da,$$

die nach (1) in die folgende übergeht

$$(\beta) \qquad B_N = \int_0^N \frac{\log dz}{(1+z)^{\frac{3}{2}}}.$$

Es handelt sich nun um den Nachweis der Gleichung $\lim\limits_{N=\infty} B_N = B$. Zu diesem Zwecke setze man

$$\int_N^\infty J(az) \log z\, dz = R_N$$

und beweise, dass die Differenz

$$B - B_N = \int_0^\infty e^{-a}\, a\, R_N\, da$$

für unendlich große Werte N unendlich klein wird. Weil für $a = 0$ die Function R_N unendlich wird, so ist zunächst das Verhalten dieser Function für unendlich kleine a zu studieren. Man hat offenbar

$$a R_N = \int_{aN}^{\infty} J(z) \log z \; dz - \log a \int_{aN}^{\infty} J(z)\, dz.$$

Es gibt nun eine nummerische Constante g, welche die absoluten Werte der beiden Integrale rechter Hand übertrifft, was auch a, N seien; somit haben wir

$$| a R_N | < \left(1 + \log \frac{1}{a}\right) g\,, \text{ falls } a < 1.$$

Bedeutet also ε irgend einen positiven echten Bruch, so besteht die Ungleichung

$$\left| \int_0^{\varepsilon} e^{-a} a R_N \, da \right| < g \left[\int_0^{\varepsilon} e^{-a} da + \int_0^{\varepsilon} e^{-a} \log \frac{1}{a} \, da \right].$$

Man kann nun offenbar immer ε so bestimmen, dass die beiden Integrale rechts beliebig kleine Werte haben, und somit wird man durch passende Wahl von ε auch die Ungleichung erzielen

$$\left| \int_0^{\varepsilon} e^{-a} a R_N \, da \right| < \delta\,,$$

in welcher δ eine vorgeschriebene beliebige Größe ist, während N irgend eine positive reelle Größe bedeuten kann.

Nachdem ε in dieser Weise bestimmt wurde, zerlege man das untersuchte Integral $B - B_N$ in die beiden Bestandtheile

$$\int_0^{\varepsilon} e^{-a} a R_N \, da\,, \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-a} a R_N \, da.$$

Im zweiten Integrale ist a immer $\geqq \varepsilon$ und man wird eine Zahl N_0 bestimmen können derart, dass für sämmtliche $N \geqq N_0$ die Größe R_N kleiner bleibt als δ, welchen Wert auch die Variable $a \geqq \varepsilon$ haben mag. Es folgt somit

$$\left| \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-a} a R_N \, da \right| < \delta \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-a} a \, da < \delta,$$

woraus in Verbindung mit obiger Umgleichung die nachstehende sich ergibt:

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-a} a R_N \, da \right| < 2\delta \text{ für } N \geqq N_0\,;$$

dieselbe drückt aber nur die Gleichung aus:

$$\lim_{N = \infty} (B - B_N) = 0,$$

so dass wir also in der That haben $B = \lim B_N$, und daher nach (β)

$$B = \int_0^\infty \frac{\log z \, dz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\log t \, dt}{(1+t)^{\frac{3}{2}} t^{\frac{1}{2}}}.$$

Dieses Integral ist aber offenbar die nach s genommene Ableitung des Integrals

$$\frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{t^{s-1} dt}{(1+t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4} \frac{\Gamma(s)\, \Gamma\left(\frac{3}{2} - s\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)},$$

in welcher dann $s = \frac{1}{2}$ zu nehmen ist.

Dies liefert

$$B = \frac{1}{2}\left[\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \Gamma'(1)\right],$$

oder weil

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \Gamma'(1) = \int_0^1 \frac{1 - x^{a-1}}{1-x}\, dx,$$

$$B = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1 - x^{-\frac{1}{2}}}{1-x}\, dx = -\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = -\log 2,$$

wodurch eben die Gleichung (2) erhalten wird.

Die hier angewandte Methode der Einführung neuer Variablen durch Substitution kann in anderen Fällen zur Wertbestimmung begrenzter Integrale mit Vortheil benutzt werden, worauf ich hier aber nicht eingehen will.

2.

Setzt man die Lipschitz'sche Gleichung in die Form

$$\int_0^\infty e^{-\alpha z} J(iz)\, dz = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}},$$

wobei die positive reelle Größe α größer als 1 angenommen werden muss, so gelangt man zur Formel

$$\int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{e^{ui\alpha}\, d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} = \int_{1+\varepsilon}^\infty d\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha(z-ui)} J(iz)\, dz.$$

Das Integral rechter Hand kann als Grenze des folgenden aufgefasst werden

$$\int_{1+\varepsilon}^N d\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha(z-ui)} J(iz)\, dz =$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-(1+\varepsilon)(z-ui)} - e^{-N(z-ui)}}{z-ui} J(iz)\, dz,$$

welches offenbar für $\lim N = \infty$ in den Ausdruck

$$\int_0^\infty \frac{e^{-(1+\varepsilon)z - ui}J(iz)\,dz}{z - ui}$$

übergeht, wenn nur u von Null verschieden ist. Ist nun u eine positive reelle Größe, so wird die Function unter dem Integralzeichen innerhalb des vierten Quadranten der z-Ebene holomorph und man sieht leicht, dass sich der Wert des Integrales nicht ändert, wenn man es längs der negativen imaginären Achse ererstreckt. Man erhält so die Formel:

$$\int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{e^{uia}\,da}{\sqrt{a^2-1}} = \int_0^\infty e^{(1+\varepsilon)(z+u)i}\frac{J(z)\,dz}{z+u}.$$

Weil nun für $z = \infty$ $J(z)$ wie $\frac{1}{\sqrt{z}}$ unendlich klein wird, so convergiert das Integral rechts absolut, und man wird zur Grenze $\varepsilon = 0$ übergehen können. Es entsteht so die Formel

$$\int_0^\infty \frac{e^{(z+u)i}J(z)\,dz}{z+u} = \int_1^\infty \frac{e^{uix}\,dx}{\sqrt{x^2-1}},$$

welche zwei andere in sich schließt, die durch Trennung des Reellen und Imaginären entstehen.

Insbesondere hat man mit Benützung der von Herrn **Mehler** mehrfach hervorgehobenen Formel

$$J(u) = \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{\sin ux\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

die folgende Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{\sin(z+u)}{z+u}J(z)\,dz = \frac{\pi}{2}J(u),$$

welche wir eben als Consequenz der Lipschitz'schen Formel herleiten wollten.

3.

Das Integral

$$\int_0^\infty \frac{da}{\Gamma(a)}$$

lässt sich in ein anderes verwandeln, in welchem unter dem Integralzeichen nur elementare Transcendenten vorkommen. Zu dieser Umwandlung dient die bekannte Formel

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = -\frac{e^{a\pi i}}{2\pi i}\int e^{-x}x^{-a}\,dx,$$

wobei das Integral längs einer beliebigen Curve auszudehnen ist, welche in $+\infty$ anfangend den Nullpunkt in positiver Richtung herumläuft und nachher ins $+\infty$ zurückkehrt. Wir wollen gleich anfangs voraussetzen, dass diese Curve stets außerhalb des Einheitskreises $|x| = 1$ verläuft, und dass somit der reelle Bestandtheil des natürlichen Logarithmus von x stets positiv bleibt. Unter x^{-a} soll die Größe $e^{-a \log x}$ verstanden werden und für $\log x$ ist dabei derjenige Wert der natürlichen Logarithmusfunction zu nehmen, dessen imaginärer Bestandtheil positiv ist und 2π nicht überschreitet. Man kann, um dies deutlicher hervortreten zu lassen, längs der positiven Hälfte der reellen Achse einen Schnitt ausführen und in der so zerschnittenen Ebene (x) die Größe $\log x$ als eine eindeutige holomorphe Function erklären, welche auf dem positiven Ufer des Schnittes reell ist und mit dem im arithmetischen Sinne zu nehmenden natürlichen Logarithmus von x zusammenfällt. Die correspondierenden Werte auf dem negativen Ufer sind um $2\pi i$ größer. Unter der über den Integrationsweg gemachten Voraussetzung haben wir offenbar in dem Ausdrucke rechts

$$J = \int_0^\infty \frac{da}{\Gamma(a)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty da \int e^{-x-a(\log x - \pi i)}\, dx$$

ein Doppelintegral im gewöhnlichen Sinne des Wortes und man wird die Integrationsfolge vertauschen können, ohne den Wert des Ausdrucks zu ändern; dies liefert die Formel

$$J = -\frac{1}{2\pi i}\int e^{-x}\frac{dx}{\log x - \pi i},$$

wobei der Integrationsweg derselbe ist wie in oben besprochener Formel. Wählen wir speciell für diesen Weg die Zusammensetzung von der Strecke $(+\infty \ldots r)$ — wobei $r > 1$ — dem Kreise $|x| = r$, den wir mit rAA' bezeichnen, und von der Strecke $(r \ldots \infty)$, so haben wir offenbar

$$-2\pi i\, J = \int_\infty^r \frac{e^{-x}\,dx}{\log x - \pi i} + \int_r^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\log x + \pi i} + \int_{(rAA')} \frac{e^{-x}\,dx}{\log x - \pi i}.$$

Das letzte Integral lässt sich nun mit Hilfe des Cauchy'schen Satzes transformieren. Die Function unter dem Integralzeichen ist in dem von der Kreislinie rAA' und dem Schnitte $(0 \ldots r)$ begrenzten Gebiete eine eindeutige analytische Function und hat daselbst die einzige, und zwar außerwesentliche Singularität an der Stelle $x = -1$. Es wird somit das längs der ganzen Begrenzung des in Rede stehenden Gebietes erstreckte Integral den Wert $-2\pi i \,.\, e$ haben, und hieraus folgt

$$\int_{(rAA')} = -2\pi i \,.\, e + \int_r^0 \frac{e^{-x}\,dx}{\log x - \pi i} + \int_0^r \frac{e^{-x}\,dx}{\log x + \pi i},$$

was in Verbindung mit obiger Darstellung von $-2\pi i\, J$ die gesuchte Formel

$$\int_0^\infty \frac{da}{\Gamma(a)} = e + \int_0^\infty \frac{e^{-x}\, dx}{\pi^2 + (\log x)^2}$$

liefert.

4.

Die arithmetische Summe

$$S = \sum_{h=1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\left(\frac{hn}{m} + \frac{1}{2}\right),$$

in welcher m, n ungerade ganze Zahlen sind, kann durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt werden, welches eine merkwürdige, bereits bekannte Eigenschaft derselben unmittelbar in Evidenz treten lässt.

Die betrachtete Summe S stimmt offenbar mit der Anzahl der positiven Differenzen

$$2hn + m - 2km, \left(\begin{array}{l} h = 1, 2, \ldots \frac{m-1}{2} \\ k = 1, 2, \ldots \frac{n-1}{2} \end{array}\right)$$

überein und wird also gleich der Gesammtzahl der in der Doppelsumme

$$f(x) = \sum_{h,k} x^{2hn - (2k-1)m}, \left(\begin{array}{l} h = 1, 2, \ldots \frac{m-1}{2} \\ k = 1, 2, \ldots \frac{n-1}{2} \end{array}\right)$$

vorhandenen positiven Potenzen von x. Da aber diese Doppelsumme aus $\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}$ Gliedern besteht, so ist die Anzahl Glieder mit negativen Exponenten in derselben gleich

$$S' = \frac{1}{4}(m-1)(n-1) - S,$$

und dieselbe Zahl S' kann auch direct bestimmt werden. Denkt man sich nämlich die Doppelsumme $f(x)$ bereits geordnet, so ist sie eine rationelle Function mit den zwei singulären Stellen $x = 0$, ∞ und ihre Coefficienten sind sämmtlich positive ganze Zahlen. Die Summe der Coefficienten von negativen Potenzen ist eben die Größe S', um welche es sich handelt. Sie wird offenbar gleich dem absoluten Gliede der Potenzentwicklung der Function

$$f(x) \,.\, (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{a-1}) = f(x) \,.\, \frac{1 - x^a}{1 - x},$$

wenn nur die positive ganze Zahl a hinreichend groß ist. Weil aber

$$f(x) = x^{2m + 2n - mn} \frac{1 - x^{m(n-1)}}{1 - x^{2m}} \cdot \frac{1 - x^{n(m-1)}}{1 - x^{2n}}$$

ist, so erhalten wir

$$(1)\quad S' = \frac{1}{2\pi i}\int x^{2m+2n-mn-1}\,\frac{1-x^a}{1-x}\,\frac{1-x^{m(n-1)}}{1-x^{2m}}\cdot\frac{1-x^{n(m-1)}}{1-x^{2n}}\,da,$$

wobei das Integral längs einer beliebigen den Nullpunkt umschließenden einfachen geschlossenen Curve zu erstrecken ist. Wählt man dafür den Kreis mit dem Halbmesser 1 und setzt $x = e^{2zi}$, so folgt

$$(2)\quad S' = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(a+m+n-1)z\,.\,\frac{\sin az}{\sin z}\cdot\frac{\sin m(n-1)z}{\sin 2mz}\cdot\frac{\sin n(m-1)z}{\sin 2nz}\,dz.$$

Schreibt man die rechte Seite in der Form

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(2a+m+n-1)z}{\sin z}\;\frac{\sin(m-1)nz\,.\,\sin(n-1)mz}{\sin 2mz\,.\,\sin 2nz}\,dz$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(m+n-1)z}{\sin z}\;\frac{\sin(m-1)nz\,.\,\sin(n-1)mz}{\sin 2mz\,.\,\sin 2nz}\,dz$$

und geht zur Grenze $a = \infty$ über, indem man das bekannte Theorem

$$\lim_{\omega=\infty}\int_0^\pi \frac{\sin\omega x}{\sin x}\,f(x)\,dx = \frac{1}{2}\,\pi\,[f(o)+f(\pi)]$$

angewendet, so ergibt sich die Gleichung

$$S' = \frac{1}{8}(m-1)(n-1) - \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(m+n-1)z\,.\,\sin(m-1)nz\,.\,\sin(n-1)mz\,dz}{\sin z\,.\,\sin 2mz\,.\,\sin 2nz}$$

woraus sich schließlich das gewünschte Resultat

$$(3)\quad S = \frac{1}{8}(m-1)(n-1) + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(m+n-1)\sin(m-1)nz\,.\,\sin(n-1)mz\,dz}{\sin z\,.\,\sin 2mz\,.\,\sin 2nz}$$

ergibt.

Jede der Formeln (1), (2), (3) lässt erkennen, dass die Summe S in Bezug auf m, n symmetrisch ist, und dass somit die interessante, zuerst vor Herrn Busche *) bewiesene Beziehung

$$\sum_{h=1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\left(\frac{hn}{m}+\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\left(\frac{km}{n}+\frac{1}{2}\right)$$

besteht. Dieselbe wurde neuerdings auch von Herrn J. Hacks (Acta mathematica, 12) arithmetisch abgeleitet.

*) Über eine Beweismethode in der Zahlentheorie. Göttingen 1883.