Matyáš Lerch

Über eine charakterische Eigenschaft der Gattungen vom Geschlechte Null

Monatsch. Math. Phys. 2 (1891), 465–468

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501704

Über eine charakteristische Eigenschaft der Gattungen vom Geschlechte Null.

Von **M. Lerch** in Weinberge bei Prag.

Indem ich mich an die in Herrn Kroneckers Festschrift zu Herrn Kummers Doctor-Jubiläum*) entwickelten Begriffsbestimmungen anschließe, betrachte ich eine Wurzel x der im natürlichen höchstens eine Unbestimmte R enthaltenden Rationalitätsbereich irreductibeln Gleichung mit ganzen Coefficienten

$$x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_{n-1} x + c_n = 0,$$

und den dadurch definierten Gattungsbereich (x).

Von den Gattungen algebraischer Größen verdienen diejenigen besondere Beachtung, welche durch den Umstand charakterisiert sind, dass ihre Primdivisoren der Hauptclasse angehören, und die im Folgenden als unicursale oder als Gattungen vom Geschlechte Null bezeichnet werden sollen. Dieselben haben vor anderen Gattungen das für sich, dass ihre Arithmetik, resp. Algebra sich von derjenigen der natürlichen Rationalitätsbereiche nur unwesentlich unterscheidet, weil hier jeder Satz sein Analogon hat und sämmtliche Operationen (wie z. B. Zerlegung in Primfactoren) ohne Zuhilfenahme sowohl von Unbestimmten, als auch vom Idealen ausführbar sind.

Der Zweck vorliegender Mittheilung ist, den Nachweis zu führen, dass:

---

*) Journal f. d. reine und angew. Mathematik. Bd. 92.

Für jede ganze bilineare primitive Form des Bereiches (x)

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta \backsim 1\;, \quad \begin{pmatrix}\alpha = 1, 2, \ldots m\\ \beta = 1, 2, \ldots m'\end{pmatrix}$$

die Gleichung

$$\sum a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta = 1$$

immer und nur dann in ganzen, dem Gattungsbereich (x) angehörigen Größen u, v lösbar ist, wenn die Gattung (x) unicursal ist, d. h. wenn sie keine anderen Divisoren als die der Hauptclasse besitzt.

Der Beweis des ersten Theiles des Satzes ist dem für den analogen Satz im rationalen Gebiete von Herrn Frobenius*) entwickelten Beweise wörtlich nachzubilden und der zweite Theil wird, wie folgt, begründet:

Es möge der Gattungsbereich (x) so beschaffen sein, dass jede bilineare primitive ganze Form $\sum a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta$ den Wert Eins erhält, wenn man für die Unbestimmten u, v passend gewählte ganze Größen von (x) einsetzt.

Diese Voraussetzung lässt sich auch so formulieren, dass in jedem Systeme von m linearen Formen ohne gemeinsamen Theiler, $\sum_\beta a_{\alpha\beta} v_\beta = A_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots . m)$, die Unbestimmten v (als ganze Größen von (x)) so specialisiert werden können, dass die Formen in m Größen $\bar{A}_\alpha$ übergehen, welche theilerfremd bleiben, d. h. für welche die Form $\sum \bar{A}_\alpha u_\alpha$ primitiv wird.

Ist nun $\sum a_{\alpha\beta\gamma} u_\alpha u'_\beta u''_\gamma$ eine trilineare ganze primitive Form von (x), also die sämmtlichen linearen Formen $A_{\alpha\beta} = \sum_\gamma a_{\alpha\beta\gamma} u''_\gamma$ ohne gemeinsamen Theiler, so lassen sich dem Vorigen zufolge die Unbestimmten u''_γ durch solche ganze Größen von (x) ersetzen, dass die resultirenden ganzen Größen $\bar{A}_{\alpha\beta}$ theilerfremd bleiben, und somit die bilineare Form $\sum A_{\alpha\beta} u_\alpha u'_\beta$ primitiv wird.

*) Journal f. d. reine u. angew. Mathematik. Bd. 86, § 4.

Unserer eben gemachten Voraussetzung zufolge lässt sich die Gleichung $\sum \overline{A}_{\alpha\beta} u_\alpha u'_\beta = 1$ in ganzen Größen u, u' lösen, und dies besagt, dass es Wertsysteme der u, u', u'' gibt, für welche die betrachtete trilineare primitive Form $\sum A_{\alpha\beta\gamma} u_\alpha u'_\beta u''_\gamma$ den Wert Eins erhält.

Ist ferner $\sum a_{\alpha\beta\gamma\delta} u_\alpha u'_\beta u''_\gamma u'''_\delta$ eine primitive quadrilineare Form unseres Bereiches, so sind die linearen Formen $\underline{A}_{\alpha\beta\gamma} = \sum_\delta a_{\alpha\beta\gamma\delta} u'''_\delta$ ohne gemeinsamen Theiler und es lassen sich die u''' so specialisieren, dass die resultierenden Werte $\overline{A}_{\alpha\beta\gamma}$ von $A_{\alpha\beta\gamma}$ theilerfremd bleiben; alsdann lässt sich aber nach dem zuletzt bewiesenem Satze die Gleichung $\sum \overline{A}_{\alpha\beta\gamma} u_\alpha u'_\beta u''_\gamma = 1$ und deshalb auch die Gleichung $\sum A_{\alpha\beta\gamma\delta} u_\alpha u'_\beta u''_\gamma u'''_\delta = 1$ in ganzen $u\, u'\, u''\, u'''$ lösen.

Indem wir so fortfahren, gelangen wir zum Satze, dass unserer Voraussetzung zufolge

jede ν-fach lineare primitive ganze Form des Bereiches (x) für passend gewählte ganze Werte der Unbestimmten den Wert Eins erhält.

Dies vorausgeschickt, sei nun $\mathfrak{P}_1$ irgend welche Primform des Bereiches (x), z eine dieselbe im Sinne der Äquivalenz enthaltende ganze Größe von (x) und

$$z \sim \mathfrak{P}_1\, \mathfrak{P}_2 \ldots . \mathfrak{P}_\nu = \Phi$$

deren Zerlegung in Primfactoren. Diese Primformen mögen linear und in durchaus verschiedenen Buchstaben geschrieben vorausgesetzt werden, so dass deren Product Φ eine ν-fach lineare Form ist. Der Quotient $\frac{\Phi}{z}$ ist dann eine ganze primitive ν-fach lineare Form von (x) und erhält nach unserer Voraussetzung den Wert Eins, wenn man an Stelle der Unbestimmten passend gewählte ganze Größen von (x) substituiert. Wird allgemein mit $\overline{\mathfrak{P}}_\alpha$ das Resultat dieser Substitution in $\mathfrak{P}_\alpha$ angedeutet, so kommt $z = \overline{\mathfrak{P}}_1\, \overline{\mathfrak{P}}_2 \ldots . \overline{\mathfrak{P}}_\nu$. Es ist offenbar $\overline{\mathfrak{P}}_\alpha$ eine ganze Größe des Bereiches (x), welche die Form $\mathfrak{P}_\alpha$ enthält und da das Product der ν ganzen Formen

$$\frac{\overline{\mathfrak{P}}_\alpha}{\text{div.}\, \mathfrak{P}_\alpha}\,, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots \nu)$$

dem Quotienten $\frac{z}{\text{div.}\ \Phi} \sim 1$ äquivalent, also eine primitive Form ist, so ist jede derselben selbst eine primitive Form, und somit

$$\mathfrak{P}_\alpha \sim \overline{\mathfrak{P}}_\alpha,$$

d. h. jede der Formen $\mathfrak{P}_\alpha$ und insbesondere die anfangs betrachtete Primform $\mathfrak{P}_1$ ist einer ganzen Größe des Gattungsbereiches (x) äquivalent, was eben begründet werden sollte.