Matyáš Lerch
Poznámky k theorii omezených derivací

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 2 (1893), č. 34, 1–15

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501750

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK II. TŘÍDA II. ČÍSLO 34.

POZNÁMKY

K THEORII OMEZENÝCH DERIVACÍ.

NAPSAL

M. LERCH.

PŘEDLOŽENO DNE 24. KVĚTNA 1893.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.

1893.

Tiskem J. Otty v Praze.

Některé vzorce a úkoly počtu integralního nabývají elegantního odvození a řešení pomocí t. zv. omezených derivací, jichž theorií zabývali se Liouville a Riemann, a jichž stopy jdou až k Abelovi.*) S tímto pojmem souvisejí následující úvahy, v nichž vyložíme mezi jiným důkaz o existenci derivace jistého druhu omezených integrálů.

1. Buď $f(\xi)$ funkce schopná integrace v mezeře $a \ldots x$ a uvažujme integrály

$$\Phi(x) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_a^x f(\xi)\,(x-\xi)^s\,d\xi\,, \tag{1^a}$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} \int_a^x \Phi(\zeta)\,(x-\zeta)^\sigma\,d\zeta\,, \tag{1^b}$$

utvořené pomocí realných konstant s a σ, jež jsou větší než -1, aby integrály existovaly.

Patrně máme

$$\Gamma(s+1)\,\Gamma(\sigma+1)\,\Psi(x) = \int_a^x (x-\zeta)^\sigma\,d\zeta \int_a^\zeta f(\xi)\,(\zeta-\xi)^s\,d\xi\,;$$

pravou stranu možno psáti jako dvojnásobný integrál

$$\int\int f(\xi)\,(\zeta-\xi)^s\,(x-\zeta)^\sigma\,d\xi\,d\zeta\,,$$

vzatý nad oborem definovaným pomocí nerovností $a < \xi < \zeta < x$, a odtud plyne, integrujeli se dříve vůči ζ,

$$\Gamma(s+1)\,\Gamma(\sigma+1)\,\Psi(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi \int_\xi^x (x-\zeta)^\sigma\,(\zeta-\xi)^s\,d\zeta\,.$$

Vnitřní integrál přetvořme substitucí

$$\zeta = \xi + t(x-\xi)\,,$$

*) Největších zasluh o tento druh úvah zjednal si náš krajan p. prof. dr. Ant. Grünwald; viz Schlömilchův časopis sv. 12, dále Rozpravy král. české společnosti náuk, řady VI svazek 11., třída math.-přírod., čís. 2, 1881.

kde t je nová integrační proměnná, i obdržíme

$$\int_\xi^x (x-\zeta)^\sigma (\zeta-\xi)^s \, d\zeta = (x-\xi)^{s+\sigma+1} \int_0^1 t^s (1-t)^\sigma \, dt$$

$$= \frac{\Gamma(s+1)\,\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(s+\sigma+2)} (x-\xi)^{s+\sigma+1} \,,$$

a tedy máme

$$(1^c) \qquad \Psi(x) = \frac{1}{\Gamma(s+\sigma+2)} \int_a^x f(\xi)\,(x-\xi)^{s+\sigma+1}\, d\xi \,,$$

čímž integrál (1^b) převeden na integrál jednoduchý, sestrojený pomocí původní funkce $f(\xi)$.

Píšemeli zde $s-1$ za s a klademeli $\sigma = -s$, máme vzorec

$$(2) \qquad \int_a^x f(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\Gamma(1-s)} \int_a^x \Phi(\zeta)\,(x-\zeta)^{-s}\, d\zeta \,,$$

kde položeno

$$(2^a) \qquad \Phi(\zeta) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_a^\zeta f(\xi)\,(\zeta-\xi)^{s-1}\, d\xi \,,$$

při čemž se za příčinou konvergence výrazů předpokládá $0 < s < 1$.

2. Ze vzorce (2) bychom obdrželi vzorec pro vyjádření funkce $f(x)$ dvojnásobným integrálem, kdybychom dovedli pravou stranu differencovati. Za tím účelem uvažujme výraz

$$\varphi(z) = \int_a^z F(x)\,(z-x)^{-\sigma}\, dx \,,$$

kde σ je realné, kladné a menší než 1; funkce $F(x)$ podrobena budiž pouze podmínce býti integrace schopnou v mezích $(a \ldots z)$, aby $\varphi(z)$ vůbec existovalo.

Kdyby $F(x)$ bylo v intervallu $(a \ldots z \ldots z')$ integrace schopno, na místě z však přetržito, tu by obecně neexistovala derivace $\varphi'(z)$ na místě z. Neboť volme jen zvláštní případ $F(x) = 0$ pro $0 \leqq x \leqq z$, $F(x) = 1$ pro $x > z$; pak bude

$$\varphi(z+h) = \int_z^{z+h} (z+h-x)^{-\sigma}\, dx \,, \qquad \varphi(z) = 0 \,,$$

a tedy

$$\frac{\varphi(z+h)-\varphi(z)}{h} = \frac{h^{-\sigma}}{1-\sigma}$$

bude nekonečné pro $h = 0$, a tím méně bude lze připustiti existenci derivace v případě obecném.

Předpokládejme tedy dále, že $F(x)$ je spojité, pokud x leží v jistém intervallu $(\alpha \ldots \beta)$, a proměnná z buď uvnitř tohoto intervallu. Dále chceme předpokládati, že rozdíl $F(z-h)-F(z)$ je nekonečně malý stupně vyššího než h^σ, t. j. že platí

$$\lim_{h=0} \frac{F(z-h)-F(z)}{h^\sigma} = 0\,,$$

a mimo to nechť integrál

$$\int_a^z \Big[F(x)-F(z)\Big]\,(z-x)^{-\sigma-1}\,dx$$

existuje.

Za těchto supposic vyšetřujme t. zv. poměr rozdílový v pravo vzatý $\frac{\Delta\varphi(z)}{\Delta z}=\frac{\varphi(z+\Delta z)-\varphi(z)}{\Delta z}$, kde přírůstek Δz je kladný a malý. Chceme dokázati existenci a nalézti hodnotu limity jeho pro $\Delta z = 0$.

Za tím účelem udělme integrálu $\varphi(z)$ tvar

$$\varphi(z)=\int_a^z \Big[F(x)-F(z)\Big]\,(z-x)^{-\sigma}\,dx + F(z)\int_a^z (z-x)^{-\sigma}\,dx\,;$$

t. j.

$$\varphi(z)=\int_a^z \Big[F(x)-F(z)\Big]\,(z-x)^{-\sigma}\,dx + \frac{F(z)\,(z-a)^{1-\sigma}}{1-\sigma}\,, \tag{a}$$

a znamenejme k vůli stručnosti

$$\psi(z)=\int_a^z \Big[F(x)-F(z)\Big]\,(z-x)^{-\sigma}\,dx\,. \tag{b}$$

Tu obdržíme

$$\frac{\Delta\psi(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\int_a^{z+\Delta z}\Big[F(x)-F(z+\Delta z)\Big]\,(z+\Delta z-x)^{-\sigma}\,dx$$

$$-\frac{1}{\Delta z}\int_a^z \Big[F(x)-F(z)\Big]\,(z-x)^{-\sigma}\,dx\,,$$

čili

$$\frac{\Delta\psi(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z}\Big[F(x)-F(z+\Delta z)\Big]\,(z+\Delta z-x)^{-\sigma}\,dx$$

$$+\int_a^z \frac{\Delta\Big\{\Big[F(x)-F(z)\Big]\,(z-x)^{-\sigma}\Big\}}{\Delta z}\,dx\,.$$

Prvý člen pravé strany dle věty o střední hodnotě integrálů rovná se veličině tvaru

$$\frac{1}{\Delta z}\left[F(z+h')-F(z+\Delta z)\right].\int_{\zeta}^{\zeta+\Delta\zeta}(z+\Delta z-x)^{-\sigma}\,dx$$

$$=\left[F(z+h')-F(z+\Delta z)\right]\frac{\Delta z^{-\sigma}}{1-\sigma},$$

kde $0<h'<\Delta z$. Tuto veličinu lze psáti

$$\left\{\left[F(z+h')-F(z+\Delta z)\right](\Delta z-h')^{-\sigma}\right\}\left(\frac{\Delta z-h'}{\Delta z}\right)^{\sigma}.\frac{1}{1-\sigma};$$

činitel $\left(\frac{\Delta z-h'}{\Delta z}\right)^{\sigma}$ zůstává mezi 0 a 1, kdežto závorka $\{\}$ má hodnotu malou pro malá Δz, dle supposice; odtud plyne

$$\lim_{\Delta\zeta=0}\frac{1}{\Delta z}\int_{\zeta}^{\zeta+\Delta\zeta}\left[F(x)-F(z+\Delta z)\right].(z+\Delta z-x)^{-\sigma}\,dx=0.$$

Máme tedy s chybou nekonečně malou

$$\frac{\Delta\psi(z)}{\Delta z}=\int_a^{\zeta}\frac{\Delta\left\{\left[F(x)-F(z)\right](z-x)^{-\sigma}\right\}}{\Delta z}\,dx,$$

a provedemeli operaci rozdílovou,

$$\frac{\Delta\psi(z)}{\Delta z}=\int_a^{\zeta}F(x)\frac{\Delta(z-x)^{-\sigma}}{\Delta z}\,dx-\frac{F(z+\Delta z)}{\Delta z}\int_a^{\zeta}(z+\Delta z-x)^{-\sigma}\,dx$$

$$+\frac{F(z)}{\Delta z}\int_a^{\zeta}(z-x)^{-\sigma}\,dx.$$

V prvém integrálu odečtěme $F(z)$ od $F(x)$ a vyčísleme členy ostatní; i obdržíme

$$\frac{\Delta\psi(z)}{\Delta z}=\int_a^{\zeta}\left[F(x)-F(z)\right]\frac{\Delta(z-x)^{-\sigma}}{\Delta z}\,dx+F(z)\int_a^{\zeta}\frac{\Delta(z-x)^{-\sigma}}{\Delta z}\,dx$$

$$+\frac{F(z+\Delta z)}{1-\sigma}(\Delta z)^{-\sigma}-\frac{F(z+\Delta z)(z+\Delta z-a)^{1-\sigma}-F(z)(z-a)^{1-\sigma}}{(1-\sigma)\Delta z}.$$

Užijemeli zde vzorce

$$\int_a^{\zeta}\frac{\Delta(z-x)^{-\sigma}}{\Delta z}\,dx=-\frac{(\Delta z)^{-\sigma}}{1-\sigma}+\frac{\Delta(z-a)^{1-\sigma}}{\Delta z}.\frac{1}{1-\sigma},$$

a kromě toho věty

$$\frac{\Delta(z-x)^{-\sigma}}{\Delta z} = -\sigma(z+h'-x)^{-\sigma-1}, \qquad 0 < h' < \Delta z,$$

máme

$$\frac{\Delta\psi(z)}{\Delta z} = -\sigma\int_a^{\zeta}\left[F(x)-F(z)\right](z+h'-x)^{-\sigma-1}\,dx + \frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{(1-\sigma)(\Delta z)^{\sigma}}$$

$$+\frac{1}{1-\sigma}F(z)\frac{\Delta(z-a)^{1-\sigma}}{\Delta z} - \frac{1}{1-\sigma}\frac{\Delta\{F(z)(z-a)^{1-\sigma}\}}{\Delta z}.$$

Porovnámeli tento výsledek s rovnicí (a) a (b), máme

$$\frac{\Delta\varphi(z)}{\Delta z} = -\sigma\int_a^{\zeta}\left[F(x)-F(z)\right](z+h'-x)^{-\sigma-1}\,dx$$

$$+\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{(1-\sigma).(\Delta z)^{\sigma}} + \frac{F(z)}{1-\sigma}\,\frac{\Delta(z-a)^{1-\sigma}}{\Delta z}$$

Blížíli se nyní Δz nulle, blíží se druhý a třetí výraz v pravo krajním hodnotám, resp.

$$0 \quad \text{a} \quad F(z).(z-a)^{-\sigma},$$

a kromě toho bude

$$\lim_{\Delta\zeta=0}\int_a^{\zeta}\left[F(x)-F(z)\right](z+h'-x)^{-\sigma-1}\,dx$$

$$=\int_a^{\zeta}\left[F(x)-F(z)\right](z-x)^{-\sigma-1}\,dx,$$

poněvadž rozdíl

$$\int_a^{\zeta}\left[F(x)-F(z)\right](z+h'-x)^{-\sigma-1}\,dx - \int_a^{\zeta}\left[F(x)-F(z)\right](z-x)^{-\sigma-1}\,dx$$

$$=\int_a^{\zeta}\left[F(x)-F(z)\right].\left[(z+h'-x)^{-\sigma-1}-(z-x)^{-\sigma-1}\right]dx$$

pro malá Δz je velmi malý.

Bude tedy

$$\lim_{\Delta\zeta=0}\frac{\Delta\varphi(z)}{\Delta z} = F(z).(z-a)^{-\sigma} - \sigma\int_a^{\zeta}\left[F(x)-F(z)\right](z-x)^{-\sigma-1}\,dx,$$

čímž úkol náš řešen.

Podobným v podstatě způsobem bychom nalezli, že limita

$$\lim_{\Delta z=0} \frac{\varphi(z-\Delta z)-\varphi(z)}{-\Delta z}$$

existuje a rovná se téléž veličině jako předešlá a máme tak větu:

»Jeli $F(x)$ funkce v oboru $(a \ldots \beta)$ integrace schopná, a jeli lze v tomto oboru určiti intervall $(\alpha \ldots \beta)$, v němž $F(x)$ je spojita a v němž podíl

$$\frac{F(x)-F(x')}{(x-x')^{\sigma}}, \quad 0<\sigma<1,$$

je nepatrný zároveň s $x-x'$, takže se blíží nulle, blížíli se x, x' společné hodnotě, a jestliže dále pro $\alpha<z<\beta$ existuje integrál

$$\int_a^z \Big[F(x)-F(z)\Big](z-x)^{-\sigma-1}\,dx,$$

pak bude pro $\alpha<z<\beta$

$$(3) \quad \frac{d}{dz}\int_a^z F(x)(z-x)^{-\sigma}\,dx$$

$$= F(z)(z-a)^{-\sigma}-\sigma\int_a^z \Big[F(x)-F(z)\Big](z-x)^{-\sigma-1}\,dx,$$

což jsme chtěli obdržeti.«

3. Obraťme se nyní k případu obecnému, kdy funkce $F(x)$ jest v intervallu $(\alpha \ldots \beta)$ toliko spojita, aniž chceme omeziti její povahu nějakou supposicí o povaze rozdílu $F(x)-F(x')$.

Tu obdržíme pro integrál

$$\varphi(z)=\int_a^z F(x)(z-x)^{-\sigma}\,dx$$

$$=\int_a^z \Big[F(x)-F(z)\Big](z-x)^{-\sigma}\,dx+\frac{F(z)(z-a)^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

jako výše

$$\frac{\Delta\varphi(z)}{(\Delta z)^{1-\sigma}}=\frac{F(z+h')-F(z+\Delta z)}{1-\sigma}$$

$$+\int_a^z \Big[F(x)-F(z)\Big]\frac{(z+\Delta z-x)^{-\sigma}-(z-x)^{-\sigma}}{(\Delta z)^{1-\sigma}}\,dx$$

$$+\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{1-\sigma}+\frac{F(z)}{1-\sigma}\cdot\frac{\Delta(z-a)^{1-\sigma}}{(\Delta z)^{1-\sigma}},$$

aneb

$$(c)\qquad \frac{\Delta\varphi(z)}{(\Delta z)^{1-\sigma}}=\frac{F(z+h')-F(z)}{1-\sigma}+\frac{F(z)}{1-\sigma}\frac{\Delta(z-a)^{1-\sigma}}{(\Delta z)^{1-\sigma}}$$

$$+\int_a^z\left[F(x)-F(z)\right]\frac{(z+\Delta z-x)^{-\sigma}-(z-x)^{-\sigma}}{(\Delta z)^{1-\sigma}}\,dx\,,$$

kde $0<h'<\Delta z$.

Z výsledku toho možno souditi, že platí

$$(c')\qquad \lim_{\Delta z=0}\frac{\Delta\varphi(z)}{(\Delta z)^{1-\sigma}}=0\,,\qquad (\alpha<z<\beta)\,,$$

jakmile $F(x)$ je funkce konečná a na mezeře $(\alpha\ldots\beta)$ spojitá. Neboť především jsou prvé dva členy pravé strany nekonečně malé zároveň s Δz, a zbývá jen vyšetřiti člen poslední; ten rozdělme ve dva

$$\int_a^z\left[F(x)-F(z)\right]\frac{(z+\Delta z-x)^{-\sigma}-(z-x)^{-\sigma}}{(\Delta z)^{1-\sigma}}\,dx$$

$$=\int_a^b\left[F(x)-F(z)\right]\frac{(z+\Delta z-x)^{-\sigma}-(z-x)^{-\sigma}}{(\Delta z)^{1-\sigma}}\,dx$$

$$+\int_b^z\left[F(x)-F(z)\right]\frac{(z+\Delta z-x)^{-\sigma}-(z-x)^{-\sigma}}{(\Delta z)^{1-\sigma}}\,dx\,,$$

při čemž $b<z$. Veličinu b volme tak blízko při z, aby pro všecka x mezery $(b\ldots z)$ platila nerovnosť $|F(x)-F(z)|<\delta$, při čemž δ je veličina předepsaná.

Po té možno voliti Δz tak malé, aby v celém intervallu $x=(a\ldots b)$ veličina $\dfrac{(z+\Delta z-x)^{-\sigma}-(z-x)^{-\sigma}}{(\Delta z)^{1-\sigma}}$ byla tak malá jak libo, a následkem toho bude integrál $\int_a^b$ pro nekonečně malá Δz nekonečně malým.

Zbývá jen vyšetřiti druhý integrál $\int_b^z$. Z nerovnosti $|F(x)-F(z)|<\delta$ plyne

$$\left|\int_b^z\left[F(x)-F(z)\right]\frac{(z+\Delta z-x)^{-\sigma}-(z-x)^{-\sigma}}{(\Delta z)^{1-\sigma}}\,dx\right|$$

$$<\frac{\delta}{(\Delta z)^{1-\sigma}}\int_b^z\left[(z+\Delta z-x)^{-\sigma}-(z-x)^{-\sigma}\right]dx$$

čili

$$\left|\int_b^{\zeta}\left[F(x)-F(z)\right]\frac{(z+\Delta z-x)^{-\sigma}-(z-x)^{-\sigma}}{(\Delta z)^{1-\sigma}}\,dx\right|$$

$$<\delta\,.\,\frac{(z-b)^{1-\sigma}-(z+\Delta z-b)^{1-\sigma}+(\Delta z)^{1-\sigma}}{(1-\sigma)\,(\Delta z)^{1-\sigma}}\,.$$

Pro malá Δz je tento výraz tvaru

$$\frac{\delta}{1-\sigma}\left[1+\text{malá veličina}\right],$$

a tato veličina je tedy menší než δ' jakmile $\delta<\frac{1-\sigma}{2}\,\delta'$; z toho plyne, že pro malá Δz budou integrály

$$\int_a^b,\ \int_b^{\zeta}\ \text{a tedy též}\ \int_a^{\zeta}$$

libovolně malé, t. j. výraz $\frac{\Delta\varphi(z)}{(\Delta z)^{1-\sigma}}$ bude libovolně malý pro dosti malá Δz, jak právě tvrdí vzorec (c′), který tím dokázán.

Vzorec (c′) možno zobecniti následujícím způsobem: Jestliže spojitá funkce $F(x)$ v intervallu $(\alpha\ldots\beta)$ hoví podmínce

$$\lim_{x-x'=0}\frac{F(x)-F(x')}{(x-x')^{\tau}}=0,$$

kde τ značí kladnou konstantu menší než σ, pak bude

(c″) $$\lim_{\Delta z=0}\frac{\Delta\varphi(z)}{(\Delta z)^{1-\sigma+\tau}}=0\,.$$

Důkaz. Z rovnice (c) máme

$$\frac{\Delta\varphi(z)}{(\Delta z)^{1-\sigma+\tau}}=\frac{F(z+h')-F(z)}{(1-\sigma)\,(\Delta z)^{\tau}}+\frac{F(z)}{1-\sigma}\,\frac{\Delta(z-a)^{1-\sigma}}{(\Delta z)^{1-\sigma+\tau}}$$

$$+\int_a^{\zeta}\left[F(x)-F(z)\right]\frac{(z+\Delta z-x)^{-\sigma}-(z-x)^{-\sigma}}{(\Delta z)^{1-\sigma+\tau}}\,dx\,,$$

a tu je patrno, že (za učiněné supposice $0<\tau<\sigma$) prvé dva členy pravé strany jsou nekonečně malé zároveň s Δz; i zbývá jen vyšetřiti integrál

$$\int_a^{\zeta}\left[F(x)-F(z)\right]\frac{(z+\Delta z-x)^{-\sigma}-(z-x)^{-\sigma}}{(\Delta z)^{1-\sigma+\tau}}\,dx\,;$$

rozdělme jej opětně ve dva

$$A = \int_a^b \left[F(x) - F(z)\right] \frac{(z + \Delta z - x)^{-\sigma} - (z - x)^{-\sigma}}{(\Delta z)^{1-\sigma+\tau}}\, dx\,,$$

$$B = \int_b^z \left[F(x) - F(z)\right] \frac{(z + \Delta z - x)^{-\sigma} - (z - x)^{-\sigma}}{(\Delta z)^{1-\sigma+\tau}}\, dx\,;$$

volme b tak blízko při z, aby v mezeře $(b \ldots z)$ bylo $\left|\frac{F(x) - F(z)}{(z-x)^\tau}\right| < \delta$, kde δ je předepsaná veličina kladná. Pro dosti malá Δz bude integrál A libovolně malým a pro integrál B máme nerovnosť

$$|B| < \frac{\delta}{(\Delta z)^{1-\sigma+\tau}} \int_b^z (z-x)^\tau \left[(z-x)^{-\sigma} - (z + \Delta z - x)^{-\sigma}\right] dx\,.$$

Substitucí $z - x = t\Delta z$ obdrží pravá strana tvar

$$|B| < \delta . \int_0^{\frac{z-b}{\Delta z}} t^\tau \left[t^{-\sigma} - (1+t)^{-\sigma}\right] dt\,;$$

pokud $0 < \tau < \sigma$, existuje integrál

$$\int_0^\infty t^\tau \left[t^{-\sigma} - (1+t)^{-\sigma}\right] dt = K\,,$$

a pak bude

$$B < \delta . K\,,$$

čímž dokázáno, že integrál $A + B$ je pro dosti malá Δz libovolně malým, a že tedy platí vzorec (c'').

4. Obraťme se nyní k větě vyjádřené rovnicemi (2) a (2ª), t. j.

$$\int_a^x f(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\Gamma(1-s)} \int_a^x \Phi(\zeta)\,(x-\zeta)^{-s}\, d\zeta\,, \tag{2}$$

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_a^\zeta f(\xi)\,(\zeta - \xi)^{s-1}\, d\xi\,. \tag{2ª}$$

Předpokládámeli, že funkce $f(\xi)$ je spojitá v intervallu $(a \ldots x')$, kde $x' > x$, bude $\Phi(\zeta)$ dle věty (c') míti vlastnosť

$$\lim_{\zeta - \zeta' = 0} \frac{\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta')}{(\zeta - \zeta')^s} = 0\,,$$

a předpokládámeli mimo to, že funkce $f(\xi)$ má vlastnost

$$(\alpha) \qquad \lim_{\xi-\xi'=0} \frac{f(\xi)-f(\xi')}{(\xi-\xi')^{\tau}} = 0\,,$$

bude dle (c'') platit vzorec

$$\lim_{\zeta-\zeta'=0} \frac{\Phi(\zeta)-\Phi(\zeta')}{(\zeta-\zeta')^{s+\tau}} = 0\,,$$

jestliže ovšem $0 < \tau < 1 - s$; odtud ale plyne, že integrál

$$\int_a^x \left[\Phi(\zeta)-\Phi(x)\right](x-\zeta)^{-s-1}\,d\zeta$$

existuje; tím jsou všecky podmínky pro applikaci vzorce (3) u funkce $F(\xi) = \Phi(\zeta)$ nevyhnutelné splněny, a máme tedy differencováním vzorce (2):

$$(4) \qquad f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-s)}\,\Phi(x)\,.\,(x-a)^{-s}$$

$$-\frac{s}{\Gamma(1-s)}\int_a^x \left[\Phi(\zeta)-\Phi(x)\right](x-\zeta)^{-s-1}\,d\zeta\,,$$

kterýžto vzorec učí mimo jiné, že funkci $\Phi(\zeta)$ příslušeti může jediná jen funkce $f(x)$, která by hověla dané podmínce

$$\lim_{\xi-\xi'=0} \frac{f(\xi)-f(\xi')}{(\xi-\xi')^{\tau}} = 0\,.$$

Odtud soudíme na příklad: Jeli $f(\xi)$ funkce spojitá v intervallu $(a\ldots x')$ a má vlastnosť vyjádřenou rovnicí

$$\lim_{\xi-\xi'=0} \frac{f(\xi)-f(\xi')}{(\xi-\xi)^{\tau}} = 0\,, \qquad \tau > 0\,,$$

a jeli integrál

$$\int_a^\zeta f(\xi)\,(\zeta-\xi)^{s-1}\,d\xi$$

pro všecka ζ intervallu $(a\ldots x')$ nullou, pak bude také $f(\xi)$ nutně nullou.

Jiného druhu výsledek obdržíme, přetvořímeli integrál (2) částečnou integrací. K tomu bude ovšem nutnou existence derivace úkonu $\Phi(\zeta)$, a proto předpokládejme, že funkce $f(\xi)$ je spojitá v intervallu a má vlastnosť

$$\lim_{\xi-\xi'=0} \frac{f(\xi)-f(\xi')}{(\xi-\xi')^{1-s}} = 0\,,$$

a že mimo to integrál

$$\int_a^\zeta \left[f(\xi) - f(\zeta)\right](\zeta - \xi)^{s-2}\, d\xi$$

existuje. Pak máme dle věty (3)

$$(2^b)\qquad \Phi'(\zeta) = \frac{1}{\Gamma(s)} f(\zeta)(\zeta - a)^{s-1} + \frac{s-1}{\Gamma(s)} \int_a^\zeta \left[f(\xi) - f(\zeta)\right](\zeta - \xi)^{s-2}\, d\xi\,.$$

Ze vzorce (2) máme pak částečnou integrací se zřetelem k okolnosti $\Phi(a) = 0$

$$\int_a^x f(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\Gamma(1-s)} \cdot \frac{1}{1-s} \int_a^x \Phi'(\zeta)(x - \zeta)^{1-s}\, d\zeta\,,$$

a odtud differencováním

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-s)} \int_a^x \Phi'(\zeta)(x-\zeta)^{-s}\, d\zeta\,.$$

Dosadímeli sem za $\Phi'(\zeta)$ hodnotu (2^b), máme

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(s)\,\Gamma(1-s)} \int_a^x f(\zeta)(x-\zeta)^{-s}(\zeta - a)^{s-1}\, d\zeta$$

$$+ \frac{s-1}{\Gamma(s)\,\Gamma(1-s)} \int_a^x \chi(\zeta)(x-\zeta)^{1-s}\, d\zeta\,,$$

kde položeno

$$(5)\qquad \chi(\zeta) = \int_a^\zeta \left[f(\xi) - f(\zeta)\right](\zeta - \xi)^{s-2}\, d\xi\,.$$

Se zřetelem k relaci

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin s\pi}$$

můžeme výsledek tento psáti

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin s\pi}{\pi} \int_a^x f(z)(x-z)^{-s}(z-a)^{s-1}\, dz \\ &+ \frac{(s-1)\sin s\pi}{\pi} \int_a^x \chi(z)(x-z)^{-s}\, dz\,. \end{aligned}\right.$$

5. Budiž opětně $0 < s < 1$ a definujme derivaci stupně s vzorcem

$$\Gamma(1-s) \,.\, D^s_x f(x) = D_x \int\limits_a^x f(\xi)\,(x-\xi)^{-s}\, d\xi\,; \tag{7}$$

znamenejme A libovolnou konstantu a pokusme se integrovati »differencialnou rovnici řádu s «

$$D^s_x f(x) = A f(x)\,, \tag{8}$$

tedy rovnici

$$D_x \int\limits_a^x f(\xi)\,(x-\xi)^{-s}\, d\xi = \Gamma(1-s)\, A f(x)\,.$$

Položme

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu\,(x-a)^{\alpha_\nu}\,,$$

kde A_ν, α_ν jsou konstanty; rovnice naše bude zníti

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu D_x \int\limits_a^x (x-\xi)^{-s}\,(\xi-a)^{\alpha_\nu}\, dx = \Gamma(1-s)\, A \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu\,(x-a)^{\alpha_\nu}\,.$$

Substitucí $\xi = a + t\,(x-a)$ obdrží levá strana tvar

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu\, D_x\,(x-a)^{\alpha_\nu - s + 1} \int\limits_0^1 t^{\alpha_\nu}\,(1-t)^{-s}\, dt\,,$$

takže náš požadavek zní

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha_\nu+1)}{\Gamma(\alpha_\nu+1-s)}\, A_\nu\,(x-a)^{\alpha_\nu - s} = A \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu\,(x-a)^{\alpha_\nu}\,.$$

Jeli α_1 nejnižší exponent, nepřichází v pravo exponent $\alpha_1 - s$, a tedy musí součinitel při $(x-a)^{\alpha_1 - s}$ v levo odpadnouti, což nastane pro $\alpha_1 + 1 - s = 0$, t. j. bude $\alpha_1 = s - 1$.

Porovnáním součinitelů při stejných mocnostech $x - a$ máme pak postupně

$$\alpha_1 = s - 1\,,\ \alpha_2 - s = \alpha_1\,,\ \alpha_3 - s = \alpha_2\,, \ldots$$

z čehož soudíme $\alpha_\varkappa = \varkappa s - 1$, a mimo to

$$\frac{\Gamma(\varkappa s)}{\Gamma(\varkappa s - s)}\, A_\varkappa = A\, A_{\varkappa - 1}\,;$$

odtud plyne

$$\frac{\Gamma(n s)}{\Gamma(s)}\, A_n = A^{n-1}\, A_1\,,$$

a píšemeli $A_1 \Gamma(s) = C$, konečně

$$A_n = \frac{C A^{n-1}}{\Gamma(ns)}, \quad \alpha_n = ns - 1,$$

takže hledaná funkce bude

$$f(x) = C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{n-1} (x-a)^{ns-1}}{\Gamma(ns)}, \tag{8*}$$

řešení to differencialné rovnice (8), v němž C značí libovolnou konstantu.

Naše řada jest analytickou funkcí proměnné s a má pro $s = 1$ hodnotu $C \Sigma \frac{A^{n-1} (x-a)^{n-1}}{(n-1)!} = C e^{A(x-a)}$, kterážto veličina hoví differencialné rovnici

$$D_x f(x) = A f(x);$$

pro $s = 2$ máme

$$f(x) = C \Sigma \frac{A^{n-1} (x-a)^{2n-1}}{(2n-1)!} = \frac{C}{\sqrt{A}} \frac{e^{\sqrt{A}(x-a)} - e^{-\sqrt{A}(x-a)}}{2},$$

kterážto funkce skutečně hoví differencialné rovnici

$$D^2 f(x) = A f(x),$$

a jest při libovolném a její obecným řešením.