Matyáš Lerch

Příspěvky k theorii funkcí elliptických, nekonečných řad a integrálů omezených. [III.]

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 2 (1893), č. 23, 1–42

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501752

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK II. TŘÍDA II. ČÍSLO 23.

PŘÍSPĚVKY
K THEORII FUNKCÍ ELLIPTICKÝCH,
NEKONEČNÝCH ŘAD
A INTEGRÁLŮ OMEZENÝCH.

(POKRAČOVÁNÍ.)

NAPSAL

M. LERCH.

PŘEDLOŽENO DNE 6. ÚNORA 1893.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.

1893.

Tiskem J. Otty v Praze.

III.

1. Jeli $f(x)$ funkce konečná a spojitá v celém intervallu od $-\infty$ do ∞ a taková, že konverguje integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx\,,$$

bude rovnice

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{2nx\pi i}\, dx \tag{1}$$

správnou, jestliže obě strany existují.*)

Volme zde

$$f(x) = \frac{e^{(\tau x^2 + 2ux)\pi i}}{1 - e^{2\pi i(v - \tau x)}}\,,$$

kde $u, v, u+v$ jsou prozatím kladné pravé zlomky, $\frac{\tau}{i}$ pak veličina kladná, i obdržíme rovnici

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(n^2\tau + 2nu)\pi i}}{1 - e^{2\pi i(v - n\tau)}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\,, \tag{a}$$

kde položeno

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau x^2 \pi i + 2x\pi i(u+n)} \frac{dx}{1 - e^{2\pi i(v - \tau x)}}\,.$$

Substitucí

$$\sqrt{\frac{\tau}{i}}\, x - (u+n)\, i \sqrt{\frac{i}{\tau}} = z$$

*) Tato věta nejsnáze dokáže se methodou, jejíž formalná část pochází od Poissona (Journal de l'École Polytechnique, cahier 19, str. 404). Podrobnou analysu podáme svým časem na jiném místě.

přejde integrál tento v následující výraz

(b) $$J_n = \sqrt{\frac{i}{\tau}}\, e^{-(u+n)^2 \frac{\pi i}{\tau}} \int\limits_{-\infty-(u+n)i\sqrt{\frac{i}{\tau}}}^{\infty-(u+n)i\sqrt{\frac{i}{\tau}}} \frac{e^{-\pi\zeta^2}\, dz}{1 - e^{2\pi\zeta\sqrt{\frac{\tau}{i}} + 2\pi i(u+v)}},$$

kde odmocnina $\sqrt{\frac{i}{\tau}}$ je kladná. Integrační cesta je rovnoběžna s osou realnou a prochází bodem $z = -(u+n)\, i \sqrt{\frac{i}{\tau}}$.

Integrovaná funkce

$$\varphi(z) = \frac{e^{-\pi\zeta^2}}{1 - e^{2\pi\zeta\sqrt{\frac{\tau}{i}} + 2\pi i(u+v)}}$$

jest jednoznačná a nemá jiných míst zvláštních kromě pólů

$$z = (k - u - v)\, i \sqrt{\frac{i}{\tau}}, \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

z nichž za učiněné supposice žádný neleží na ose realné.

Integrál

$$\int \varphi(z)\, dz$$

vzatý podél obvodu obdélníka o vrcholech $-N - ci$, $N - ci$, N, $-N$ (kde N je realné a kladné) sestává z částí

$$\int\limits_{-N-ci}^{N-ci} \varphi(z)\, dz + \int\limits_{N-ci}^{N} \varphi(z)\, dz + \int\limits_{N}^{-N} \varphi(z)\, dz + \int\limits_{-N}^{-N-ci} \varphi(z)\, dz;$$

integrační cesta obíhá pak obdélník ve směru kladném, jeli c kladné, ale ve směru záporném v případě záporného c; hodnota integrálu bude dle známé věty Cauchyovy rovnati se součtu residuí funkce $\varphi(z)$ na polech obsažených uvnitř rovnoběžníka, násobenému $\pm 2\pi i$, při čemž hořejší znamení odpovídá kladné, dolejší pak záporné hodnotě c. Přejdemeli k limitě pro $N = \infty$, máme

$$\lim_{N=\infty} \int\limits_{N-ci}^{N} \varphi(z)\, dz = \lim_{N=\infty} \int\limits_{-N}^{-N-ci} \varphi(z)\, dz = 0,$$

a tudíž obdržíme

$$\int\limits_{-\infty-ci}^{\infty-ci} \varphi(z)\, dz - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(z)\, dz = \pm 2\pi i . \sum \text{resid.}$$

V našem případě veličina $c = (u + n)\sqrt{\frac{i}{\tau}}$ je téhož znamení jako n, a sice jsou zde póly, obsažené mezi osou realnou a cestou integrační, následující:

při $n = m > 0$ $\quad k = 0, -1, -2, \ldots -(m-1)$,

při $n = -m < 0$ $\quad k = 1, 2, 3, \ldots m$.

Jelikož residuum na pólu

$$z = (k - u - v)\, i \sqrt{\frac{i}{\tau}}$$

má hodnotu

$$\frac{e^{\frac{\pi i}{\tau}(k-u-v)^2}}{-2\pi\sqrt{\frac{\tau}{i}}},$$

máme vzhledem k stanovenému výše znamení činitele $\pm 2\pi i$ rovnice

$$J_m = \frac{1}{\tau} e^{-(u+m)^2 \frac{\pi i}{\tau}} \sum_{k=0}^{m-1} e^{(k+u+v)^2 \frac{\pi i}{\tau}} + \sqrt{\frac{i}{\tau}} e^{-(u+m)^2 \frac{\pi i}{\tau}} J,$$

$$J_{-m} = -\frac{1}{\tau} e^{-(u-m)^2 \frac{\pi i}{\tau}} \sum_{k=1}^{m} e^{(k-u-v)^2 \frac{\pi i}{\tau}} + \sqrt{\frac{i}{\tau}} e^{-(u-m)^2 \frac{\pi i}{\tau}} J,$$

kde psáno k vůli zjednodušení

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi \zeta^2} dz}{1 - e^{2\pi\zeta\sqrt{\frac{\tau}{i}} + 2\pi i(u+v)}};$$

zároveň patrno — poněvadž mezi cestou integrační u výrazu (b) a osou realnou v případě $n = 0$ neleží žádný pól — že bude

$$J_0 = \sqrt{\frac{i}{\tau}} e^{-u^2 \frac{\pi i}{\tau}} J,$$

a tudíž rovnice (a) obdrží tvar

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(n^2\tau + 2nu)\pi i}}{1 - e^{2\pi i(v - n\tau)}} = \sqrt{\frac{i}{\tau}} J \,.\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(u+n)^2 \frac{\pi i}{\tau}}$$

$$+ \frac{1}{\tau} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-(u+m)^2 \frac{\pi i}{\tau}} \sum_{k=0}^{m-1} e^{(u+v+k)^2 \frac{\pi i}{\tau}} - \frac{1}{\tau} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-(u-m)^2 \frac{\pi i}{\tau}} \sum_{k=1}^{m} e^{(u+v-k)^2 \frac{\pi i}{\tau}}.$$

Pravé straně lze uděliti tvar elegantnější způsobem následujícím. Především je známo, že

$$\sqrt{\frac{i}{\tau}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(u+n)^2 \frac{\pi i}{\tau}} = \vartheta_3(u|\tau),$$

a dále lze součet

$$S_1 = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-(u+m)^2 \frac{\pi i}{\tau}} \sum_{k=0}^{m-1} e^{(u+v+k)^2 \frac{\pi i}{\tau}}$$

psáti

$$S_1 = \sum_{k<m} e^{-\frac{\pi i}{\tau}(m^2-k^2) - \frac{2\pi i}{\tau}(mu-ku-kv) + \frac{\pi i}{\tau}(2uv+v^2)},$$

$$(k=0,1,2,\ldots;\quad m=1,2,3,\ldots).$$

Zavedemeli zde místo m summační literu $n=m-k$, jež bude tedy probíhati hodnoty $1,2,3,\ldots$, máme

$$S_1 = \sum_{k,n} e^{-\frac{\pi i}{\tau}n(n+2k) - \frac{2\pi i}{\tau}(nu-kv) + \frac{\pi i}{\tau}(2uv+v^2)},$$

$$(k=0,1,2,\ldots;\quad n=1,2,3,\ldots).$$

Provedemeli nyní sčítání vůči k, obdržíme

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi i}{\tau}(n+u)^2 + \frac{\pi i}{\tau}(u+v)^2}}{1-e^{-\frac{2\pi i}{\tau}(n-v)}}.$$

Podobně přetvoříme součet

$$S_2 = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-(u-m)^2\frac{\pi i}{\tau}} \sum_{k=1}^{m} e^{(u+v-k)^2\frac{\pi i}{\tau}}$$

zavedením indexu $n=m-k$, kde pak $k=1,2,3,\ldots$ ale $n=0,1,2,3,\ldots$ a obdržíme

$$S_2 = \sum_{n,k} e^{-\frac{\pi i}{\tau}\left[n(n+2k)-2nu+2kv+u^2-(u+v)^2\right]},$$

takže máme po provedeném sčítání vůči k

$$S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi i}{\tau}(n-u)^2 - \frac{2\pi i}{\tau}(v+n) + \frac{\pi i}{\tau}(u+v)^2}}{1-e^{-\frac{2\pi i}{\tau}(v+n)}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi i}{\tau}(n-u)^2 + \frac{\pi i}{\tau}(u+v)^2}}{1-e^{\frac{2\pi i}{\tau}(v+n)}}.$$

Z nalezených takto výrazů pro S_1 a S_2 vysvitá, že bude

$$S_1 - S_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi i}{\tau}(u+n)^2 + \frac{\pi i}{\tau}(u+v)^2}}{1-e^{\frac{2\pi i}{\tau}(v-n)}},$$

takže vztah náš bude zníti

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(n^2\tau+2nu)\pi i}}{1-e^{2\pi i(v-n\tau)}} - \frac{1}{\tau} e^{\frac{\pi i}{\tau}(u+v)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi i}{\tau}(u+n)^2}}{1-e^{\frac{2\pi i}{\tau}(v-n)}} = \vartheta_3(u|\tau)\, J.$$

Zde zbývá ještě zjednodušiti integrál

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi z^2}\,dz}{1-e^{2\pi z\sqrt{\frac{\tau}{i}}+2\pi i w}},\quad \text{kde } w=u+v;$$

tento obdrží substitucí $z\sqrt{\frac{\tau}{i}}+iw=y$ tvar

$$J=\sqrt{\frac{i}{\tau}}\int\limits_{-\infty+iw}^{\infty+iw} e^{-\frac{\pi i}{\tau}(y-iw)^2}\frac{dy}{1-e^{2\pi y}}\,;$$

integrační cesta je zde rovnoběžna s osou realnou a obsahuje bod $y=wi$; mezi touto cestou a přímkou $y=\frac{i}{2}+x$ vedenou bodem $\frac{i}{2}$ rovnoběžně s osou realnou neleží patrně žádný pól integrované funkce, a tedy bude dovoleno pošinouti cestu integrační do této přímky, takže máme

$$J=\sqrt{\frac{i}{\tau}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi i}{\tau}\left(x+\frac{i}{2}-iw\right)^2}\frac{dx}{1+e^{2\pi x}}\,.$$

Zavedemeli tedy celistvou funkci transcendentní proměnné w

(2) $$\Psi(w,\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi i}{\tau}\left(x+\frac{i}{2}-iw\right)^2}\frac{dx}{1+e^{2\pi x}}\,,$$

obdrží vztah náš konečně tvar

(3) $$\left\{\begin{aligned}&\sqrt{\frac{i}{\tau}}\,\vartheta_3(u\,|\,\tau)\,\Psi(u+v,\tau)\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{(n^2\tau+2nu)\pi i}}{1-e^{2\pi i(v-n\tau)}}-\frac{1}{\tau}e^{\frac{\pi i}{\tau}(u+v)^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\pi i}{\tau}(u+n)^2}}{1-e^{\frac{2\pi i}{\tau}(v-n)}}\,.\end{aligned}\right.$$

Obě strany jsou analytické funkce jednoznačné proměnných u, v a též komplexní proměnné τ, pokud Im. $\tau>0$, a tedy vztah (3) bude platným pro všecka u,v bez rozdílu a pro všecka τ, jichž pomyslná část je kladná. Při tom odmocnina $\sqrt{\frac{i}{\tau}}$ ve vzorci se vyskytující musí býti kladna v části realné.

Vzorec tento lze přehledněji vyjádřiti zavedením funkce

(4) $$R(u,v\,|\,\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{(n^2\tau+2nu)\pi i}}{1-e^{2\pi i(v+n\tau)}}\,,$$

kterou jsme uvažovali ve svých *Poznámkách k theorii funkcí elliptických.* Píšemeli totiž v prvé z řad (3) v součtu $-n$ za n, shledáme, že tato řada splývá s $R(-u,v\,|\,\tau)$, kdežto druhá řada zní $e^{-\frac{\pi i}{\tau}u^2}R\left(-\frac{u}{\tau},\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right)$; píšemeli tedy $-u$ za u, máme místo (3) vztah

(3*) $$\left\{\begin{aligned}&\sqrt{\frac{i}{\tau}}\,\vartheta_3(u\,|\,\tau)\,\Psi(v-u,\tau)\\&=R(u,v\,|\,\tau)-\frac{1}{\tau}e^{\frac{\pi i}{\tau}(v^2-2uv)}R\left(\frac{u}{\tau},\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right).\end{aligned}\right.$$

Tento zajímavý výsledek byl v citovaných *Poznámkách* odvozen přímo z theorie funkcí elliptických ve tvaru jen málo rozdílném. Pomocí vlastností funkce R tam vyvinutých lze funkci $\Psi'(v)$ uděliti rozmanité tvary, jež tkví vesměs u vztahu (3^*).

Klademeli $u = 0$, plyne

$$(3^a)\qquad \sqrt{\frac{i}{\tau}}\,\vartheta_3\,\Psi'(v,\tau) = R(0,v\,|\,\tau) - \frac{1}{\tau}e^{\frac{v^2\pi i}{\tau}}\,R\left(0,\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right)$$

a odtud obdržíme hodnotu levé strany pro $v = 0$ způsobem následujícím. Prvé dva členy mocninového rozvoje funkce

$$R(0,v\,|\,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{1-q^{2n}e^{2v\pi i}}\,,\qquad q = e^{\tau\pi i}\,,$$

se obdrží ze vzorce

$$R(0,v) = \frac{1}{1-e^{2v\pi i}} + \sum{}'\frac{q^{n^2}}{1-q^{2n}} + \ldots$$

a sice bude

$$R(0,v) = -\frac{1}{2v\pi i} + \frac{1}{2} + \sum{}'\frac{q^{n^2}}{1-q^{2n}} + \ldots,$$

kde vynechané členy obsahují $v, v^2, v^3, \ldots$ a součet Σ' vztahuje se k hodnotám $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Píšemeli pak v součtu

$$s = \sum{}'\frac{q^{n^2}}{1-q^{2n}}$$

$-n$ za n, obdržíme

$$s = \sum{}'\frac{q^{n^2}}{1-q^{-2n}} = -\sum{}'\frac{q^{n^2+2n}}{1-q^{2n}}\,,$$

a tedy sečtením obou tvarů plyne

$$2s = \sum{}'\frac{q^{n^2}-q^{n^2+2n}}{1-q^{2n}} = \sum{}' q^{n^2} = \vartheta_3(0\,|\,\tau) - 1\,,$$

takže bude

$$R(0,v\,|\,\tau) = -\frac{1}{2v\pi i} + \frac{1}{2}\vartheta_3(0\,|\,\tau) + v\,\mathfrak{P}(v),$$

značíli $\mathfrak{P}(v)$ řadu kladných mocnin v.

Dle toho máme též

$$\frac{1}{\tau}e^{\frac{v^2\pi i}{\tau}}R\left(0,\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right) = -\frac{1}{2v\pi i} + \frac{1}{2\tau}\vartheta_3\left(0\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right) + v\,\mathfrak{P}_1(v),$$

a tedy

$$\sqrt{\frac{i}{\tau}}\,\vartheta_3\,\Psi'(v,\tau) = \frac{1}{2}\vartheta_3(0\,|\,\tau) - \frac{1}{2\tau}\vartheta_3\left(0\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right) + v\,\bar{\mathfrak{P}}(v),$$

takže

$$\sqrt{\frac{i}{\tau}}\,\vartheta_3\,\Psi(0,\tau)=\frac{1}{2}\,\vartheta_3(0\,|\,\tau)-\frac{1}{2\tau}\,\vartheta_3\left(0\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right),$$

což vzhledem k relaci

$$\vartheta_3(0\,|\,\tau)=\vartheta_3\left(0\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right)\sqrt{\frac{i}{\tau}}$$

obdrží tvar

(5) $$\Psi(0,\tau)=\frac{1}{2}\left(i+\sqrt{\frac{\tau}{i}}\right),$$

kterýžto výsledek vyjádřen v původní definici funkce Ψ poskytne zajímavý vzorec

(5*) $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a\pi\left(x+\frac{i}{2}\right)^2}\frac{dx}{1+e^{2\pi x}}=\frac{1}{2}\left(i+\sqrt{\frac{1}{a}}\right),$$

kde realná část veličin a, $\sqrt{\frac{1}{a}}$ musí býti kladnou.

Přímým způsobem možno vyčísliti integrál

$$A=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a\pi x^2}\frac{dx}{1+e^{2\pi x}};$$

píšemeli v něm $-x$ za x, máme

$$A=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a\pi x^2+2\pi x}\frac{dx}{1+e^{2\pi x}},$$

tedy sečtením

$$2A=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-a\pi x^2}+e^{-a\pi x^2+2\pi x}}{1+e^{2\pi x}}\,dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a\pi x^2}\,dx,$$

tedy

$$2A=\frac{1}{\sqrt{a}},$$

t. j. jinak vyjádřeno

(6) $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a\pi x^2}\frac{dx}{1+e^{2\pi x}}=\frac{1}{2\sqrt{a}},$$

aneb v naší symbolice

(6*) $$\Psi\left(\frac{1}{2},\tau\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau}{i}}.$$

Jeli obecně $\varphi(z)$ sudá funkce a existujeli integrál

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(z)\, dz}{1 + e^{2\pi z}},$$

obdržíme týmž postupem jako při posledním integrálu

$$J = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z)\, dz .$$

Dle toho bude

$$\Psi(w) + \Psi(1-w) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi i}{\tau}\left(x + \frac{i}{2} - iw\right)^2} + e^{-\frac{\pi i}{\tau}\left(x - \frac{i}{2} + iw\right)^2}}{1 + e^{2\pi x}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{\pi i}{\tau}\left(x + \frac{i}{2} - iw\right)^2} + e^{-\frac{\pi i}{\tau}\left(x - \frac{i}{2} + iw\right)^2} \right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi i}{\tau}\left(x + \frac{i}{2} - iw\right)^2} dx = \sqrt{\frac{\tau}{i}},$$

tudíž máme důležitý vztah

$$\Psi(v, \tau) + \Psi(1 - v, \tau) = \sqrt{\frac{\tau}{i}} \tag{7}$$

Z relace (3^a) obdržíme další vlastnosť funkce Ψ.

Dříve však bude potřebí znáti veličinu

$$R(0, -v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{1 - q^{2n} e^{-2v\pi i}};$$

píšemeli v řadě $-n$ za n, máme

$$R(0, -v) = \sum \frac{q^{n^2}}{1 - q^{-2n} e^{-2v\pi i}} = -\sum \frac{q^{n^2+2n} e^{2v\pi i}}{1 - q^{2n} e^{2v\pi i}};$$

jelikož

$$R(0, v) = \sum \frac{q^{n^2}}{1 - q^{2n} e^{2v\pi i}},$$

máme sečtením

$$R(0, -v) + R(0, v) = \Sigma q^{n^2} = \vartheta_3(0 \mid \tau),$$

t. j.

$$R(0, -v) = \vartheta_3 - R(0, v) . \tag{α}$$

Ze vzorce (3^*)

$$\sqrt{\frac{i}{\tau}}\,\vartheta_3\,\Psi(v,\tau)=R(0,v\,|\,\tau)-\frac{1}{\tau}\,e^{\frac{v^2\pi i}{\tau}}\,R\left(0,\frac{v}{\tau}\,\Big|-\frac{1}{\tau}\right)$$

plyne dosazením $-\dfrac{1}{\tau}$ za τ, $\dfrac{v}{\tau}$ za v:

$$\sqrt{\frac{\tau}{i}}\,\vartheta_3\left(0\,\Big|-\frac{1}{\tau}\right)\Psi\left(\frac{v}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right)$$
$$=R\left(0,\frac{v}{\tau}\,\Big|-\frac{1}{\tau}\right)+\tau\,e^{-\frac{v^2\pi i}{\tau}}\,R(0,-v\,|\,\tau)$$

čili dle dokázaného právě vzorce (α):

$$\sqrt{\frac{\tau}{i}}\,\vartheta_3\left(0\,\Big|-\frac{1}{\tau}\right)\Psi\left(\frac{v}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right)$$
$$=R\left(0,\frac{v}{\tau}\,\Big|-\frac{1}{\tau}\right)-\tau\,e^{-\frac{v^2\pi i}{\tau}}\,R(0,v)+\tau\,\vartheta_3\,e^{-\frac{v^2\pi i}{\tau}}.$$

Z obou těchto vzorců obdržíme pak

$$\sqrt{\frac{i}{\tau}}\,\vartheta_3\,\Psi(v,\tau)+\frac{1}{\tau}\,e^{\frac{v^2\pi i}{\tau}}\sqrt{\frac{\tau}{i}}\,\vartheta_3\left(0\,\Big|-\frac{1}{\tau}\right)\Psi\left(\frac{v}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right)=\vartheta_3$$

aneb vzhledem k relaci

$$\vartheta_3\left(0\,\Big|-\frac{1}{\tau}\right)=\sqrt{\frac{\tau}{i}}\,\vartheta_3,$$

konečně:

$$\Psi(v,\tau)-i\sqrt{\frac{\tau}{i}}\,e^{\frac{v^2\pi i}{\tau}}\,\Psi\left(\frac{v}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right)=\sqrt{\frac{\tau}{i}},\tag{8}$$

čímž hledaná vlastnosť funkce Ψ vyjádřena.

Vzorec (3^*) se poněkud zjednoduší, zavedemeli označení

$$F(u,v\,|\,\tau)=\frac{R(u,u+v\,|\,\tau)}{\vartheta_3(u\,|\,\tau)};$$

píšemeli v (3^*) $u+v$ za v a dělímeli obě strany $\vartheta_3\,(u\,|\,\tau)$, majíce zřetel k rovnici

$$\vartheta_3(u\,|\,\tau)=\sqrt{\frac{i}{\tau}}\,e^{-\frac{u^2\pi i}{\tau}}\,\vartheta_3\left(\frac{u}{\tau}\,\Big|-\frac{1}{\tau}\right),$$

obdržíme

$$\sqrt{\frac{i}{\tau}}\,\Psi(v,\tau)=F(u,v\,|\,\tau)+i\sqrt{\frac{i}{\tau}}\,e^{\frac{v^2\pi i}{\tau}}\,F\left(\frac{u}{\tau},\frac{v}{\tau}\,\Big|-\frac{1}{\tau}\right).\tag{9}$$

Odtud se obdrží velmi snadno další důležité vlastnosti funkce Ψ, užijemeli vzorce dokázaného v *Poznámkách*

$$R(u, w+\tau) = e^{\pi i(2w-2u+\tau)} R(u, w) + \vartheta_3(u),$$

z něhož máme vztahy

$$(\beta)\qquad \begin{cases} F(u, v+\tau) = e^{\pi i(2v+\tau)} F(u, v) + 1, \\ F(u, v-\tau) = e^{-\pi i(2v-\tau)} [F(u, v) - 1], \end{cases}$$

k nimž třeba připojiti rovnici samozřejmou:

$$F(u, v+1) = F(u, v).$$

Z (9) plyne patrně

$$(\gamma)\qquad \sqrt{\frac{i}{\tau}}\, \Psi(v+1, \tau) = F(u, v \mid \tau) + i\sqrt{\frac{i}{\tau}}\, e^{(v+1)^2 \frac{\pi i}{\tau}} F\left(\frac{u}{\tau}, \frac{v+1}{\tau} \,\middle|\, -\frac{1}{\tau}\right);$$

prvý člen v pravo má však dle (9) hodnotu

$$\sqrt{\frac{i}{\tau}}\, \Psi(v, \tau) - i\sqrt{\frac{i}{\tau}}\, e^{\frac{v^2\pi i}{\tau}} F\left(\frac{u}{\tau}, \frac{v}{\tau} \,\middle|\, -\frac{1}{\tau}\right),$$

z druhého ze vzorců (β) pak máme

$$F\left(\frac{u}{\tau}, \frac{v}{\tau} + \frac{1}{\tau} \,\middle|\, \frac{1}{\tau}\right) = e^{-\frac{\pi i}{\tau}(2v+1)} \left[F\left(\frac{u}{\tau}, \frac{v}{\tau} \,\middle|\, -\frac{1}{\tau}\right) - 1\right],$$

takže rovnice (γ) bude zníti po dosazení těchto hodnot

$$\sqrt{\frac{i}{\tau}}\, \Psi(v+1, \tau) = \sqrt{\frac{i}{\tau}}\, \Psi(v, \tau) - i\sqrt{\frac{i}{\tau}}\, e^{\frac{v^2\pi i}{\tau}}.$$

Dále máme z (9)

$$\sqrt{\frac{i}{\tau}}\, \Psi(v+\tau, \tau) = F(u, v+\tau \mid \tau) + i\sqrt{\frac{i}{\tau}}\, e^{(v+\tau)^2 \frac{\pi i}{\tau}} F\left(\frac{u}{\tau}, \frac{v}{\tau} \,\middle|\, -\frac{1}{\tau}\right);$$

prvý člen v pravo má dle (β) a (9) hodnotu

$$e^{\pi i(2v+\tau)} F(u, v \mid \tau) + 1$$

$$= 1 + e^{\pi i(2v+\tau)} \left[\sqrt{\frac{i}{\tau}}\, \Psi(v, \tau) - i\sqrt{\frac{i}{\tau}}\, e^{\frac{v^2\pi i}{\tau}} F\left(\frac{u}{\tau}, \frac{v}{\tau} \,\middle|\, -\frac{1}{\tau}\right)\right]$$

a tudíž máme

$$\sqrt{\frac{i}{\tau}}\, \Psi(v+\tau, \tau) = 1 + \sqrt{\frac{i}{\tau}}\, e^{\pi i(2v+\tau)}\, \Psi(v, \tau).$$

Celistvá funkce $\Psi(v, \tau)$ *hoví tedy rovnicím*

$$(10)\qquad \begin{cases} \Psi(v+1, \tau) = \Psi(v, \tau) - i\, e^{\frac{v^2\pi i}{\tau}}, \\ \Psi(v+\tau, \tau) = e^{\pi i(2v+\tau)}\, \Psi(v, \tau) + \sqrt{\frac{\tau}{i}}, \end{cases}$$

které ji úplně charakterisují.

Neb kdyby existovala druhá celistvá funkce $f(v)$ hovící těmto rovnicím, pak by rozdíl $\varphi(v) = f(v) - \Psi(v)$ hověl rovnicím

$$\varphi(v+1) = \varphi(v), \quad \varphi(v+\tau) = \varphi(v) e^{\pi i (2v+\tau)}$$

a součin $\vartheta_3(v)\,\varphi(v)$ měl by periody 1 a τ; jsa pak stále konečným, musil by býti konstantou a patrně nullou, poněvadž mizí pro $v = \frac{1+\tau}{2}$. Je tedy $\varphi(v) = 0$ a tedy $f(v) = \Psi(v)$, jak tvrzeno.

2. Užijme nyní rovnice (1) u funkce

$$f(x) = \frac{e^{n\pi i(\tau x^2 + 2ux)}}{1 - e^{2\pi i(v - x\tau)}},$$

kde n značí kladné číslo celistvé a ostatní veličiny hoví týmž podmínkám, jako v předešlé úvaze na počátku.

Rovnice (1) pak poskytne vztah

$$(a) \qquad \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\nu^2 n\tau\pi i + 2\nu n u\pi i}}{1 - e^{2\pi i(v - \nu\tau)}} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} J_\nu,$$

kde psáno

$$J_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} e^{n\tau x^2\pi i + 2x\pi i(nu+\nu)} \frac{dx}{1 - e^{2\pi i(v - x\tau)}}.$$

Substitucí

$$\sqrt{\frac{\tau}{i}}\, x - \left(u + \frac{\nu}{n}\right) i \sqrt{\frac{i}{\tau}} = z$$

obdrží pak poslední integrál tvar

$$J_\nu = \sqrt{\frac{i}{\tau}}\, e^{-\frac{n\pi i}{\tau}\left(u+\frac{\nu}{n}\right)^2} \int_{-\infty-\left(u+\frac{\nu}{n}\right) i\sqrt{\frac{i}{\tau}}}^{\infty-\left(u+\frac{\nu}{n}\right) i\sqrt{\frac{i}{\tau}}} \frac{e^{-n\pi z^2}\, dz}{1 - e^{2\pi z\sqrt{\frac{\tau}{i}} + 2\pi i\left(v+u+\frac{\nu}{n}\right)}}.$$

Číslo ν lze uvésti na tvar $r + mn$, kde r jest jedno z čísel $0, 1, 2, \ldots n-1$, a m značí libovolné, kladné neb záporné, číslo celistvé (včetně nullu). Pak bude

$$J_{r+mn} = \sqrt{\frac{i}{\tau}}\, e^{-\frac{n\pi i}{\tau}\left(u+\frac{r}{n}+m\right)^2} \int_{-\infty-\left(u+\frac{r}{n}+m\right) i\sqrt{\frac{i}{\tau}}}^{\infty-\left(u+\frac{r}{n}+m\right) i\sqrt{\frac{i}{n}}} \frac{e^{-n\pi z^2}\, dz}{1 - e^{2\pi z\sqrt{\frac{\tau}{i}} + 2\pi i\left(u+v+\frac{r}{n}\right)}}.$$

Póly funkce integrované jsou zde

$$z = \left(k - u - v - \frac{r}{n}\right) i \sqrt{\frac{i}{\tau}};$$

předpokládejme k vůli pohodlí, že u, v jsou kladné veličiny hovící podmínce $u+v<\frac{1}{n}$; jeli pak m kladné, leží cesta integrační pod osou realnou a póly mezi ní a řečenou osou položené jsou

$$k=0\,,\,-1\,,\,-2\,,\ldots-(m-1)\,,$$

i obdržíme užitím věty Cauchy-ovy způsobem šíře vyloženým v odstavci předešlém výsledek následující

$$J_{r+mn}=\frac{1}{\tau}e^{-\frac{n\pi i}{\tau}\left(u+m+\frac{r}{n}\right)^2}\sum_{k=0}^{m-1}e^{\frac{n\pi i}{\tau}\left(k+u+v+\frac{r}{n}\right)^2}$$

$$+\sqrt{\frac{i}{\tau}}\,e^{-\frac{n\pi i}{\tau}\left(u+\frac{r}{n}+m\right)^2}J^*_r\,,$$

kde psáno

$$J^*_r=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-n\pi\zeta^2}\,dz}{1-e^{2\pi\zeta\sqrt{\frac{\tau}{i}}+2\pi i\left(u+v+\frac{r}{n}\right)}}\,.$$

Jeli však m záporné, běží cesta integrační nad osou realnou a póly mezi ní a touto osou ležící jsou

$$k=1\,,2\,,3\,,\ldots-m\,,$$

a tedy bude

$$J_{r-mn}=-\frac{1}{\tau}e^{-\frac{n\pi i}{\tau}\left(u+\frac{r}{n}-m\right)^2}\sum_{k=1}^{m}e^{\frac{n\pi i}{\tau}\left(k-u-v-\frac{r}{n}\right)^2}$$

$$+\sqrt{\frac{i}{\tau}}\,e^{-\frac{n\pi i}{\tau}\left(u+\frac{r}{n}-m\right)^2}J^*_r\,.$$

Tu bude nám stanoviti součet

$$S_r=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_{r+mn}\,,$$

jenž patrně má hodnotu

$$S_r=\sqrt{\frac{i}{\tau}}J^*_r\,.\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{n\pi i}{\tau}\left(u+\frac{r}{n}+m\right)^2}$$

$$+\frac{1}{\tau}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\frac{n\pi i}{\tau}\left(u+m+\frac{r}{n}\right)^2}\sum_{k=0}^{m-1}e^{\frac{n\pi i}{\tau}\left(k+u+v+\frac{r}{n}\right)^2}$$

$$-\frac{1}{\tau}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\frac{n\pi i}{\tau}\left(u-m+\frac{r}{n}\right)^2}\sum_{k=1}^{m}e^{\frac{n\pi i}{\tau}\left(k-u-v-\frac{r}{n}\right)^2}\,,$$

a tento výraz se způsobem v předešlém odstavci vyloženým přetvoří na

$$S_r = \frac{1}{\sqrt{n}} J^*_r \,.\, \vartheta_3\left(u + \frac{r}{n}\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right)$$

$$+ \frac{1}{\tau} e^{\frac{n\pi i}{\tau}\left(u+v+\frac{r}{n}\right)^2} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n\pi i}{\tau}\left(u+\frac{r}{n}+\nu\right)^2}}{1 - e^{\frac{2n\pi i}{\tau}(v-\nu)}},$$

takže zbývá nyní jen utvořiti součet

$$\sum_{r=0}^{n-1} S_r = \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{r+mn},$$

patrně totožný s uvažovanou řadou $\sum J_s$.

Integrál J^*_r se patrně rovná výrazu

$$\sqrt{\frac{i}{\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n\pi i}{\tau}\left(x+\frac{i}{2}-i\left(u+v+\frac{r}{n}\right)\right)^2} \frac{dx}{1+e^{2\pi x}},$$

t. j. bude dle našeho označení

$$J^*_r = \sqrt{\frac{i}{\tau}}\, \psi\left(u + v + \frac{r}{n}, \frac{\tau}{n}\right),$$

a vzorec (a) obdrží následkem toho tvar

$$(11) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\nu^2 n\tau\pi i + 2\nu n u \pi i}}{1 - e^{2\pi i(v-\nu\tau)}} - \frac{1}{\tau}\sum_{r=0}^{n-1} e^{\frac{n\pi i}{\tau}\left(u+v+\frac{r}{n}\right)^2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n\pi i}{\tau}\left(u+s+\frac{r}{n}\right)^2}}{1 - e^{\frac{2n\pi i}{\tau}(v-s)}} \\ \displaystyle = \sqrt{\frac{i}{n\tau}} \sum_{r=0}^{n-1} \psi\left(u + v + \frac{r}{n}, \frac{\tau}{n}\right) \vartheta_3\left(u + \frac{r}{n}\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right), \end{cases}$$

kterýžto vzorec zobecňuje vztah (3).

Zavedemeli označení

$$R_n(u, v \mid \tau) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{e^{s^2 n\tau\pi i + 2snu\pi i}}{1 - e^{2\pi i(v+s\tau)}},$$

takže R_1 splývá s dosavadním $R(u, v)$, bude lze levou stranu rovnice (11) psáti

$$R_n(-u, v \mid \tau) - \frac{1}{\tau}\sum_{r=0}^{n=1} e^{\frac{n\pi i}{\tau}\left(v+u+\frac{r}{n}\right)^2 - \frac{n\pi i}{\tau}\left(u+\frac{r}{n}\right)^2} R_1\left(-\frac{nu+r}{\tau}, \frac{nv}{\tau}\,\middle|\,-\frac{n}{\tau}\right)$$

a tedy máme vztah:

$$(11^*) \quad \begin{cases} \displaystyle R_n(u, v \mid \tau) - \frac{1}{\tau}\sum_{r=0}^{n-1} e^{\frac{n\pi i}{\tau}\left(v^2+\frac{2rv}{\tau}-2uv\right)} R_1\left(\frac{nu-r}{\tau}, \frac{nv}{\tau}\,\middle|\,-\frac{n}{\tau}\right) \\ \displaystyle = \sqrt{\frac{i}{n\tau}} \sum_{r=0}^{n-1} \psi\left(v - u + \frac{r}{n}; \frac{\tau}{n}\right) \vartheta_3\left(u - \frac{r}{n}\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right). \end{cases}$$

IV.

1. Znamenejme literami v_1, v_2, v_3 komplexní veličiny různých amplitud (úhlů), u_1, u_2, u_3 buďte tři kladné pravé zlomky, w_1, w_2, w_3 pak veličiny libovolné, a uvažujme integrál

$$J = \int\limits_C \frac{e^{2x\pi i(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)}\, dx}{(e^{2\pi i(v_1 x - w_1)} - 1)(e^{2\pi i(v_2 x - w_2)} - 1)(e^{2\pi i(v_3 x - w_3)} - 1)}$$

vzatý podél uzavřené cesty C, o níž podáme bližší ustanovení.

Póly integrované funkce tvoří tři řady

$$x = \frac{k_1 + w_1}{v_1}, \frac{k_2 + w_2}{v_2}, \frac{k_3 + w_3}{v_3},$$

kde k_1, k_2, k_3 značí libovolná čísla celistvá, kladná neb záporná, inclus. nullu. Body tyto jsou rozloženy po třech přímkách různých směrů a to na každé ve stejných vzdálenostech.

Za cestu integrační C volme kružnici $\overline{C}$ se středem $x = 0$ procházející bodem $x = \dfrac{N + \frac{1}{2} + w_1}{v_1}$, kde N je velmi veliké číslo celistvé.

Zbývá ještě pět průseků našich tří přímek s kružnicí $\overline{C}$; buď ϱ čtvrtina nejmenší z veličin $\dfrac{1}{|v_1|}, \dfrac{1}{|v_2|}, \dfrac{1}{|v_3|}$; pak bude třeba v okolí těchto průseků nahraditi část kružnice řečené obloukem kruhovým poloměru ϱ dovnitř neb zevně kruhu $\overline{C}$ zabíhajícím, a sice má střed tohoto oblouku ležeti na průseku uvažované přímky s kruhem $\overline{C}$. Touto modifikací obdržíme z kruhu $\overline{C}$ integrační cestu C, která má tu vlastnosť, že integrovaná funkce je na ní nekonečně malou, poněvadž vzdálenosť všech bodů jejích od pólů obnáší více než ϱ. Přijdeli totiž na cestě C proměnná k jednomu z pólů poměrně blízko (ale ne blíže než na ϱ), bude jeden ze tří činitelů ve jmenovateli sice nepříliš velikým, ale přec větším než určitá stálá mez, ale ostatní dva činitelé budou míti veliký obnos, a funkce bude tedy podél celé cesty integrační velmi malou a sice typu $e^{-|cx|}$. Provedemeli na integrálu přechod k limitě pro $N = \infty$, přejde tento v nullu, a porovnámeli tuto hodnotu s onou, jež plyne z věty Cauchy-ovy, obdržíme výsledek, že součet všech residuí integrované funkce jest nullou.

Znamenejme $s = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$, tak že integrovaná funkce bude zníti

$$\frac{e^{2sx\pi i}}{(e^{2\pi i(v_\alpha x - w_\alpha)} - 1)(e^{2\pi i(v_\beta x - w_\beta)} - 1)(e^{2\pi i(v_\gamma x - w_\gamma)} - 1)},$$

kde $\alpha\ \beta\ \gamma$ značí kteroukoli z permutac čísel $1, 2, 3$. Residuum na pólu $x=\dfrac{n+w_\alpha}{v_\alpha}$ má pak hodnotu

$$\frac{e^{\frac{2s\pi i}{v_\alpha}(w_\alpha+n)}}{2\pi i\, v_\alpha\left(e^{\frac{2\pi i}{v_\alpha}(w_\alpha v_\beta-v_\alpha w_\beta+n v_\beta)}-1\right)\left(e^{\frac{2\pi i}{v_\alpha}(w_\alpha v_\gamma-v_\alpha w_\gamma+n v_\gamma)}-1\right)}$$

a náš výsledek zní tedy

$$(1)\quad \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{1}{v_\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{\frac{2s\pi i}{v_\alpha}(w_\alpha+n)}}{\left(e^{\frac{2\pi i}{v_\alpha}(w_\alpha v_\beta-v_\alpha w_\beta+n v_\beta)}-1\right)\left(e^{\frac{2\pi i}{v_\alpha}(w_\alpha v_\gamma-v_\alpha w_\gamma+n v_\gamma)}-1\right)}=0$$

Přehledněji se vyjádří tento výsledek zavedením funkce

$$(2)\quad X(z',z''\,|\,\omega,\omega',\omega'';s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{\frac{2ns\pi i}{\omega}}}{\left(e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z'+n\omega')}-1\right)\left(e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z''+n\omega'')}-1\right)}$$

a sice obdrží rovnice (1) tvar

$$\begin{aligned}&\frac{1}{v_1}X(w_1v_2-v_1w_2\,,\,w_1v_3-v_1w_3\,|\,v_1,v_2,v_3)\,e^{\frac{2sw_1\pi i}{v_1}}\\+&\frac{1}{v_2}X(w_2v_3-v_2w_3\,,\,w_2v_1-v_2w_1\,|\,v_2,v_3,v_1)\,e^{\frac{2sw_2\pi i}{v_2}}\\+&\frac{1}{v_3}X(w_3v_1-v_3w_1\,,\,w_3v_2-v_3w_2\,|\,v_3,v_1,v_2)\,e^{\frac{2sw_3\pi i}{v_3}}=0\end{aligned}$$

Rovnice ta se valně zjednoduší, zavedemeli *proměnné* z_1, z_2, z_3 *podrobené podmínce*

$$v_1z_1+v_2z_2+v_3z_3=0\,,$$

a sice klademe

$$w_1=\frac{v_3z_3-v_2z_2}{3v_2v_3}\,,\qquad w_2=\frac{v_1z_1-v_3z_3}{3v_1v_3}\,,\qquad w_3=\frac{v_2z_2-v_1z_1}{3v_1v_2}\,;$$

tím obdržíme rovnici (1) ve tvaru

$$(1^*)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{v_1}X(z_1\,,-z_2\,|\,v_1,v_2,v_3)\,e^{\frac{2sw_1\pi i}{v_1}}\\+&\frac{1}{v_2}X(z_2\,,-z_3\,|\,v_2,v_3,v_1)\,e^{\frac{2sw_2\pi i}{v_2}}\\+&\frac{1}{v_3}X(z_3\,,-z_1\,|\,v_3,v_1,v_2)\,e^{\frac{2sw_3\pi i}{v_3}}=0\,,\end{aligned}\right.$$

kterýžto vztah vyjadřuje zajímavou vlastnosť naší funkce X.

Pro seznání povahy této funkce X uvažujme výraz s řadou (2) v podstatě totožný

$$(2^*)\qquad X_0(w_1, w_2 \mid \tau_1, \tau_2; \sigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2n\sigma\pi i}}{(e^{2\pi i(w_1+n\tau_1)}-1)(e^{2\pi i(w_2+n\tau_2)}-1)},$$

předpokládajíce $\mathrm{Im}.\,\tau_1 > 0$, $\mathrm{Im}.\,\tau_2 > 0$, a dále

$$0 < \mathrm{Im}.\,\sigma < \mathrm{Im}.\,(\tau_1 + \tau_2).$$

Pak bude lze veličinu σ rozložiti ve dvě σ_1, σ_2 $(\sigma = \sigma_1 + \sigma_2)$, tak aby $0 < \mathrm{Im}.\,\sigma_1 < \mathrm{Im}.\,\tau_1$, $0 < \mathrm{Im}.\,\sigma_2 < \mathrm{Im}.\,\tau_2$, takže existují řady

$$F_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2n\pi i(\sigma_1+x)}}{e^{2\pi i(w_1+n\tau_1)}-1},$$

$$F_2(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2n\pi i(\sigma_2-x)}}{e^{2\pi i(w_2+n\tau_2)}-1}$$

pro realná x, a pak bude patrně

$$(\mathrm{a})\qquad \int_0^1 F_1(x)\,F_2(x)\,dx = X_0(w_1, w_2 \mid \tau_1, \tau_2; \sigma_1 + \sigma_2).$$

Dle známého vzorce

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nu\pi i}}{e^{2\pi i(w+n\tau)}-1} = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\vartheta'_1(0\mid\tau)\,\vartheta_1(w+u\mid\tau)}{\vartheta_1(w\mid\tau)\,\vartheta_1(u\mid\tau)}$$

bude však

$$F_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\vartheta'_1(0\mid\tau_1)\,\vartheta_1(w_1+\sigma_1+x\mid\tau_1)}{\vartheta_1(w_1\mid\tau_1)\,\vartheta_1(\sigma_1+x\mid\tau_1)},$$

$$F_2(x) = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\vartheta'_1(0\mid\tau_2)\,\vartheta_1(w_2+\sigma_2-x\mid\tau_2)}{\vartheta_1(w_2\mid\tau_2)\,\vartheta_1(\sigma_2-x\mid\tau_2)},$$

a tedy dle (a):

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\vartheta_1(w_1\mid\tau_1)\,\vartheta_1(w_2\mid\tau_2)\,X_0(w_1, w_2\mid\tau_1,\tau_2;\sigma_1+\sigma_2) \\ &= \frac{\vartheta'_1(0\mid\tau_1)\,\vartheta'_1(0\mid\tau_2)}{(2\pi i)^2}\int_0^1 \frac{\vartheta_1(w_1+\sigma_1+x\mid\tau_1)\,\vartheta_1(w_2+\sigma_2-x\mid\tau_2)}{\vartheta_1(\sigma_1+x\mid\tau_1)\,\vartheta_1(\sigma_2-x\mid\tau_2)}\,dx.\end{aligned}\right.$$

Tím ukázána souvislosť funkce X s elliptickými transcendentami.

Dále je z rovnic

$$X_0(w_1+1, w_2) = X_0(w_1, w_2+1) = X_0(w_1, w_2),$$

$$X_0(w_1+\tau_1, w_2+\tau_2) = e^{-2\sigma\pi i}\,X_0(w_1, w_2)$$

patrno, jak se chová funkce X_0 k periodám $(0, 1)$, $(1, 0)$, (τ_1, τ_2).

Chceme ještě prozkoumati povahu funkce $X_0(w_1, w_2\mid\tau_1,\tau_2;\sigma)$ vzhledem k proměnné σ; předpokládejme prozatím

$$\mathrm{Im}.\,\tau_1 > \mathrm{Im}.\,w_1 > 0,\qquad \mathrm{Im}.\,\tau_2 > \mathrm{Im}.\,w_2 > 0,$$

a pak máme dle (2^a)

$$X_0 = \sum_{n, m_1, m_2 = 0, 1, 2, \ldots} e^{2n\sigma\pi i + 2n\pi i(m_1\tau_1 + m_2\tau_2) + 2\pi i(m_1 w_1 + m_2 w_2)}$$

$$+ \sum_{n, m_1, m_2 = 1, 2, 3, \ldots} e^{-2n\sigma\pi i + 2n\pi i(m_1\tau_1 + m_2\tau_2) - 2\pi i(m_1 w_1 + m_2 w_2)},$$

a provedemeli sčítání vůči n:

$$(2^b) \qquad X_0(w_1, w_2 \mid \tau_1, \tau_2; \sigma) = \sum_{m_1, m_2 = 0, 1, 2, \ldots} \frac{e^{2\pi i(m_1 w_1 + m_2 w_2)}}{1 - e^{2\sigma\pi i + 2\pi i(m_1\tau_1 + m_2\tau_2)}}$$

$$+ \sum_{m_1, m_2 = 1, 2, 3, \ldots} \frac{e^{-2\sigma\pi i + 2\pi i(m_1\tau_1 + m_2\tau_2) - 2\pi i(m_1 w_1 + m_2 w_2)}}{1 - e^{-2\sigma\pi i + 2\pi i(m_1\tau_1 + m_2\tau_2)}}.$$

Za učiněných podmínek $\mathrm{Im.}\,\tau_1 > \mathrm{Im.}\,w_1 > 0$, $\mathrm{Im.}\,\tau_2 > \mathrm{Im.}\,w_2 > 0$ je tedy $X_0(w_1, w_2 \mid \tau_1, \tau_2; \sigma)$ jednoznačná funkce komplexní proměnné σ, existující v celé rovině, jež nemá jiných singularit kromě pólů stupně prvního

$$\sigma = k - (m_1\tau_1 + m_2\tau_2), \quad \begin{pmatrix} k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ m_1, m_2 = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

a pak

$$\sigma = k + (m_1\tau_1 + m_2\tau_2), \quad \begin{pmatrix} k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ m_1, m_2 = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}.$$

Totéž tedy platí o funkci (3) vzhledem k proměnné $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$. Rovnice (3) však dokázána byla za supposice $0 < \mathrm{Im.}\,\sigma_1 < \mathrm{Im.}\,\tau_1$, $0 < \mathrm{Im.}\,\sigma_2 < \mathrm{Im.}\,\tau_2$ a postrádá smyslu jak pro realná σ_1, σ_2, tak pro hodnoty těchto proměnných, jichž pomyslná část rovná se pomyslné části veličiny τ_1, resp. τ_2. Integrál (3) má totiž za řezy vůči proměnné σ_1 rovnoběžky vedené s osou realnou skrze body

$$\sigma_1 = 0, \pm \tau_1, \pm 2\tau_1, \pm 3\tau_1, \ldots$$

a vůči proměnné σ_2 rovnoběžky vedené skrze body

$$\sigma_2 = 0, \pm \tau_2, \pm 2\tau_2, \pm 3\tau_2, \ldots$$

Těmito rovnoběžkami jsou roviny σ_1, σ_2 rozloženy v nekonečně mnoho pásů, jež spolu nesouvisejí, rovnice (3) je platna pouze v pásech mezi rovnoběžkami skrze body $\sigma_1 = 0$, $\sigma_1 = \tau_1$, resp. $\sigma_2 = 0$, $\sigma_2 = \tau_2$.

Považujme na př. σ_2 za konstantu, jež hoví podmínkám $0 < \mathrm{Im.}\,\sigma_2 < \mathrm{Im.}\,\tau_2$, načež pravá strana (3) bude funkcí jediné proměnné σ_1, kteréžto funkce rovná se levé straně, pokud $0 < \mathrm{Im.}\,\sigma_1 < \mathrm{Im.}\,\tau_1$. Nazveme *základním pásem* onen, který leží mezi osou realnou a rovnoběžkou vedenou bodem $\sigma_1 = \tau_1$; proměnná σ_1 musí tedy obsažena býti v pásu základním. Znamenejme $\varphi(\sigma_1)$ hodnotu pravé strany rovnice (3).

Buď nyní σ_1 určitý bod osy realné, σ'_1, σ''_1 buďte dva body jemu nekonečně blízké, σ'_1 na severní, σ''_1 na jižní straně osy realné. V integrálu

$\varphi(\sigma'_1)$ stane se integrovaná funkce nekonečnou na místě $x = x'_0 = m - \sigma'_1$ (kde m je celistvé číslo tak volené, aby realná část této veličiny byla mezi 0 a 1), kdežto integrovaná funkce v integrálu $\varphi(\sigma''_1)$ stane se nekonečnou na místě $x = x''_0 = m - \sigma''_1$. Obě tato místa x'_0, x''_0 jsou nekonečně blízka místu x_0 osy realné, a sice leží x'_0 na jihu, x''_0 na severu této osy.

Při stanovení integrálu $\varphi(\sigma'_1)$ je pak dovoleno nahraditi cestu integrační $(0\ldots 1)$ cestou křivočarou, jež na severní polovici roviny x probíhá od 0 do 1, a sice volíme ji tak, aby bod x''_0 ležel mezi ní a osou; podobně lze při stanovení integrálu $\varphi(x''_1)$ odchýliti se s cestou na jih, tak aby bod x'_0 padl mezi cestu a osu. Rozdíl $\varphi(\sigma''_1) - \varphi(\sigma'_1)$ je pak rozdílem dvou křivočarých integrálů, které existují také v bodě σ_1 osy realné a jsou v něm spojité; značíli $\bar{\bar{\varphi}}(\sigma_1)$ a $\bar{\varphi}(\sigma_1)$ tyto křivočaré integrály pro σ_1, máme tedy

$$\lim_{\substack{\sigma'_1 = \sigma_1 \\ \sigma''_1 = \sigma_1}} [\varphi(\sigma'_1) - \varphi(\sigma_1)] = \bar{\bar{\varphi}}(\sigma_1) - \bar{\varphi}(\sigma_1),$$

a tento rozdíl poslední dle věty Cauchyovy nic jiného není než integrál vzatý podél uzavřené cesty obíhající bod σ_1 v kladném směru.*) Bude tedy dle známé věty

$$\bar{\bar{\varphi}}(\sigma_1) - \bar{\varphi}(\sigma_1) = \frac{\vartheta'_1(0|\tau_1)\,\vartheta'_1(0|\tau_2)}{(2\pi i)^2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{\vartheta_1(w_1|\tau_1)\,\vartheta_1(w_2+\sigma_1+\sigma_2|\tau_2)}{\vartheta'_1(0|\tau_1)\,\vartheta_1(\sigma_1+\sigma_2|\tau_2)},$$

a tedy máme s chybou nekonečně malou

$$(\alpha)\qquad \varphi(\sigma''_1) - \varphi(\sigma'_1) = \frac{\vartheta'_1(0|\tau_2)}{2\pi i}\,\frac{\vartheta_1(w_1|\tau_1)\,\vartheta_1(w_2+\sigma_1+\sigma_2|\tau_2)}{\vartheta_1(\sigma_1+\sigma_2|\tau_2)}.$$

Dále jest dle (3)

$$\varphi(\sigma''_1+\tau_1) = e^{-2\pi i w_1}\,\varphi(\sigma''_1),$$

a tedy dle (α)

$$(\beta)\qquad \varphi(\sigma''_1+\tau_1)\,.\,e^{2w_1\pi i} = \varphi(\sigma'_1) + \frac{\vartheta'_1(0|\tau_2)}{2\pi i}\,\frac{\vartheta_1(w_1|\tau_1)\,\vartheta_1(w_2+\sigma_1+\sigma_2|\tau_2)}{\vartheta_1(\sigma_1+\sigma_2|\tau_2)}$$

s chybou nekonečně malou.

Avšak body $\sigma'_1, \sigma''_1+\tau_1$ náležejí oba základnímu pásu, takže zde bude platnou rovnice (3), tedy

$$\varphi(\sigma'_1) = \vartheta_1(w_1|\tau_1)\,\vartheta_1(w_2|\tau_2)\,X_0(w_1, w_2|\tau_1, \tau_2, \sigma'_1+\sigma_2),$$
$$\varphi(\sigma''_1+\tau_1) = \vartheta_1(w_1|\tau_1)\,\vartheta_1(w_2|\tau_2)\,X_0(w_1, w_2|\tau_1, \tau_2; \sigma''_1+\sigma_2+\tau_1),$$

při čemž X_0 značí analytickou funkci danou elementem (3) v hlavním pásu. Dle (β) máme tedy, píšíce $\sigma_1+\sigma_2 = \sigma$

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &e^{2w_1\pi i}\,X_0(w_1, w_2|\tau_1, \tau_2; \sigma+\tau_1) \\ &\quad = X_0(w_1, w_2|\tau_1, \tau_2; \sigma) + \frac{\vartheta'_1(0|\tau_2)}{2\pi i}\,\frac{\vartheta_1(w_2+\sigma|\tau_2)}{\vartheta_1(w_2|\tau_2)\,\vartheta_1(\sigma|\tau_2)}, \end{aligned}\right.$$

*) Uvedená zde methoda pochází od Hermitea a Goursata.

a zcela podobným způsobem bychom obdrželi rovnici:

$$
(4') \quad \left\{ \begin{aligned} & e^{2w_2\pi i} X_0 (w_1, w_2 \mid \tau_1, \tau_2; \sigma + \tau_2) \\ & = X_0 (w_1, w_2 \mid \tau_1, \tau_2; \sigma) + \frac{\vartheta'_1 (0 \mid \tau_1)}{2\pi i} \frac{\vartheta_1 (w_1 + \sigma \mid \tau_1)}{\vartheta_1 (w_1 \mid \tau_1) \vartheta_1 (\sigma \mid \tau_1)} . \end{aligned} \right.
$$

Připojíli se, že funkce ta má vůči σ periodu 1, jest nutným důsledkem rovnice (4), že $X_0 (w_1, w_2 \mid \tau_1, \tau_2; \sigma)$ existuje v celé rovině σ a jest jednoznačna.

Funkce $X_0 (w_1, w_2 \mid \tau_1, \tau_2; \sigma)$ *proměnné* σ *jest jednoznačná, připouští periodu* 1, *a hoví rovnicím* (4), (4'). *Těmito vlastnostmi jest úplně charakterisována.*

Neboť kdyby ještě jedna funkce $f(\sigma)$ měla tyto vlastnosti, pak by funkce $\psi(\sigma) = f(\sigma) - X_0$ hověla rovnicím

$$
(\gamma) \quad \psi(\sigma + 1) = \psi(\sigma), \quad \psi(\sigma + \tau_1) = e^{-2w_1\pi i} \psi(\sigma), \quad \psi(\sigma + \tau_2) = e^{-2w_2\pi i} \psi(\sigma),
$$

a funkce $\frac{\psi'(\sigma)}{\psi(\sigma)}$ by byla jednoznačnou a měla by tři periody $1, \tau_1, \tau_2$, takže by nutně byla konstantou, $\frac{\psi'(\sigma)}{\psi(\sigma)} = a$, tedy $\psi(\sigma) = A e^{a\sigma}$.

Z rovnic (γ) bychom pak měli v případě $A \gtrless 0$:

$$
e^a = 1, \; e^{a\tau_1} = e^{-2w_1\pi i}, \; e^{a\tau_2} = e^{-2w_2\pi i},
$$

tedy

$$
a = 2n\pi i, \; n\tau_1 = -w_1 + m_1, \quad n\tau_2 = -w_2 + m_2,
$$

kde m_1, m_2, n jsou čísla celistvá. Rovnice ty jsou však nemožny, poněvadž pro takováto w_1, w_2 funkce X_0 je nekonečnou.

Musí tedy býti $A = 0$, t. j. $f(\sigma) - X_0 = 0$, jak tvrzeno.

Rovnice (4) a (4') lze též odvoditi přímo pomocí vzorce (2^b) v případě, kdy konvergenční podmínky $\mathrm{Im.}\, \tau_1 > \mathrm{Im.}\, w_1 > 0$, $\mathrm{Im.}\, \tau_2 > \mathrm{Im.}\, w_2 > 0$ jsou splněny.

Ve funkci $X_0 (w_1, w_2 \mid \tau_1, \tau_2; \sigma)$ nemusí však býti pomyslné části veličin τ_1, τ_2 kladné. Jsouli obě záporné, stačí psáti v řadě (1^a) $-n$ za n, aby se vidělo, že $X_0(w_1, w_2 \mid \tau_1, \tau_2; \sigma) = X_0(w_1, w_2 \mid -\tau_1, -\tau_2; -\sigma)$, kde pak argumenty $-\tau_1, -\tau_2$ jsou kladné v části pomyslné. Jeli však na příklad $\mathrm{Im.}\, \tau_1 > 0$, ale $\mathrm{Im.}\, \tau_2 < 2$, bude dlužno při odvození vzorce (3) vyčísliti řadu F_2 vzorcem

$$
\begin{aligned} F_2 (x) = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2n\pi i (\sigma_2 - x)}}{e^{2\pi i (w_2 - n\tau_2)} - 1} \\ & = \frac{\vartheta'_1 (0 \mid -\tau_2)}{2\pi i} \frac{\vartheta_1 (w_2 - \sigma_2 + x \mid -\tau_2)}{\vartheta_1 (w_2 \mid -\tau_2) \vartheta_1 (-\sigma_2 + x \mid -\tau_2)} , \end{aligned}
$$

z čehož patrno, jak se modifikuje vzorec (3) v tomto případě.

2. Značíli v_1, v_2 komplexní veličiny, jichž poměr není realným, u_1, u_2 dva pravé kladné zlomky, w_1, w_2, a pak komplexní proměnné, má funkce

pod znamením integračním u výrazu

$$\int\limits_{C} \frac{e^{2x\pi i(u_1 v_1 + u_2 v_2)}}{\left(e^{2\pi i(v_1 x - w_1)} - 1\right)\left(e^{2\pi i(v_2 x - w_2)} - 1\right)} \frac{dx}{x+a}$$

na cestě integrační C hodnotu nekonečně malou, jeli tato cesta čarou (uzavřenou) nekonečných rozměrů a vyhybá se pólům integrované funkce. Tyto póly jsou $x = -a$, $\frac{n+w_1}{v_1}$, $\frac{n+w_2}{v_2}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Při tom buďte w_1, w_2 tak voleny, aby tyto póly se lišily, takže jsou stupně prvního.

Hodnota integrálu bude pak nekonečně malou a tedy bude součet residuí integrované funkce roven nulle, t. j.

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{w_1 + a v_1 + n} \frac{e^{\frac{2s\pi i}{v_1}(w_1+n)}}{e^{\frac{2\pi i}{v_1}(w_1 v_2 - v_1 w_2 + n v_2)} - 1} \\ & + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{w_2 + a v_2 + n} \frac{e^{\frac{2s\pi i}{v_1}(w_1+n)}}{e^{\frac{2\pi i}{v_2}(w_2 v_1 - v_2 w_1 + n v_1)} - 1} \\ & + \frac{2\pi i\, e^{-2sa\pi i}}{\left(e^{-2\pi i(w_1 + a v_1)} - 1\right)\left(e^{-2\pi i(w_2 + a v_2)} - 1\right)} = 0, \end{aligned} \right.$$

při čemž psáno $s = u_1 v_1 + u_2 v_2$. Možno zde však považovati s za libovolnou konstantu, jež splňuje konvergenční podmínku, která zní, aby bod s byl uvnitř rovnoběžníka o vrcholech $(0, v_1, v_1 + v_2, v_2)$.

Zajímavou jest konsekvence, jež odtud plyne pro $v_1 = \infty$. Předpokládejme, že a není realné, že dále $\mathrm{Im.}\, v_2 > 0$, a pak že w_2 jest realné a v mezích $(0 \ldots 1)$. První řadu v levo lze pak psáti

$$\frac{\frac{1}{v_1}}{a + \frac{w_1+n}{v_1}} \frac{e^{2s\pi i . \frac{w_1+n}{v_1}}}{e^{2\pi i\left(-w_2 + v_2 . \frac{w_1+n}{v_1}\right)} - 1},$$

a klademeli zde $\frac{w_1+n}{v_1} = x$, $\frac{1}{v_1} = dx$, bude limita tohoto výrazu pro $v_1 = \infty$ patrně rovna integrálu

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a+x} \frac{e^{2sx\pi i}}{e^{2\pi i(v_2 x - w_2)} - 1}.$$

Poněvadž pak (dle podmínky $\mathrm{Im.}\, v_2 > 0, 0 < w_2 < 1$)

$$\lim_{v_1 = \infty} e^{\frac{2\pi i}{v_1}(w_2 v_1 - v_2 w_1 + n v_1)} = \begin{cases} 0 \text{ pro } n < 0 \\ \infty \text{ pro } n \geq 0, \end{cases}$$

bude limita druhé řady patrně

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{w_2 + a v_2 - n}\, e^{\frac{2s\pi i}{v_2}(w_2 - n)} .$$

Limita posledního členu rovnice (5) bude pak nullou při Im. $a > 0$, ale bude míti hodnotu

$$-\frac{2\pi i\, e^{-2as\pi i}}{e^{-2\pi i(w_2 + a v_2)} - 1}, \quad \text{jeli Im. } a < 0 .$$

Máme tudíž — píšemeli v, w místo v_2, w_2 — vzorec

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2sx\pi i}}{e^{2\pi i(vx - w)} - 1}\, \frac{dx}{x+a} \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{2s\pi i}{v}(w-n)}}{w + av - n} + \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{pro Im. } a > 0 \\ \dfrac{2\pi i\, e^{-2as\pi i}}{e^{-2\pi i(w+av)} - 1} & \text{pro Im. } a < 0, \end{array} \right. \end{aligned} \right.$$

v němž dlužno předpokládati

$$0 < w < 1, \quad \text{Im. } v > \text{Im. } s > 0, \quad \text{Real. } v < \text{Real. } s .$$

Výsledek ten lze ovšem taktéž přímo obdržeti pomocí věty Cauchyovy. Píšemeli zde $1 - w$ za w, máme

$$(6^a)\quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2sx\pi i}}{e^{2\pi i(w + vx)} - 1}\, \frac{dx}{x+a} \\ & = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2s\pi i}{v}(w+n)}}{w + n - av} + \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{při Im. } a > 0 \\ \dfrac{2\pi i\, e^{-2as\pi i}}{e^{2\pi i(w-av)} - 1} & \text{při Im. } a < 0 . \end{array} \right. \end{aligned} \right.$$

Předpokládejme nyní a, v ryze pomyslné a kladné, a znamenejme pravou stranu $-f(w)$. Veličinu tu bude lze rozvinouti v řadu trigonometrickou

$$f(w) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m\, e^{2mw\pi i},$$

konvergentní v oboru $w = (0 \ldots 1)$. Tu pak bude

$$A_m = \int_0^1 f(w)\, e^{-2mw\pi i}\, dw = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 e^{-\frac{2s\pi i}{v}(w+n) - 2mw\pi i}\, \frac{dw}{w + n - av}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-\frac{2s\pi i}{v} w - 2mw\pi i}\, \frac{dw}{w - av}$$

t. j.

$$A_m = \int_0^\infty e^{-w\left(\frac{2s\pi i}{v} + 2m\pi i\right)} \frac{dw}{w - av}.$$

Tento výraz přetvoří se pomocí vzorce

$$\frac{1}{w - av} = \int_0^\infty e^{-t(w - av)}\, dt$$

takto:

$$A_m = \int_0^\infty e^{-cw}\, dw \int_0^\infty e^{-t(w-av)}\, dt = \int_0^\infty e^{tav}\, dt \int_0^\infty e^{-(c+t)w}\, dw,$$

tedy

$$A_m = \int_0^\infty \frac{e^{avt}\, dt}{c + t},$$

kde psáno $c = \frac{2s\pi i}{v} + 2m\pi i$; máme tedy

$$A_m = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{e^{avt}\, dt}{\frac{s}{v} + m + t},$$

a integrál (6^a) bude míti hodnotu

$$-\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{2m\pi wi} = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{avt}\, dt \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2mw\pi i}}{\frac{s}{v} + m + t}.$$

Pravá strana vyčíslí se dle vzorce

$$\frac{2\pi i \,.\, e^{2xy\pi i}}{e^{2x\pi i} - 1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ky\pi i}}{x - k}, \quad (0 < y < 1),$$

volíli se $y = 1 - w$, $x = t + \frac{s}{v}$, a píšeli se v řadě $-m$ za m; tím obdrží uvažovaná pravá strana tvar

$$-\int_0^\infty e^{avt} \,.\, \frac{e^{2\pi i(1-w)\left(\frac{s}{v} + t\right)}}{e^{2\pi i\left(\frac{s}{v} + t\right)} - 1}\, dt,$$

t. j. máme

$$(7) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2sw\pi i}}{e^{2\pi i(w + vx)} - 1} \frac{dx}{x + a} = \int_0^\infty \frac{e^{\frac{2s\pi i}{v}(1-w) + \left(2\pi i(1-w) + av\right)t}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{v}(s + vt)}}\, dt,$$

kde a, v jsou ryze pomyslné a kladné veličiny, a mimo to platí podmínka $0 < w < 1$.

Integrál v pravo u (7) rozložme dle vzorce

$$\int_0^\infty \varphi(t)\,dt = \sum_0^\infty \int_n^{n+1} \varphi(t)\,dt = \int_0^1 dt \sum_0^\infty \varphi(t+n)$$

a obdržíme tak výraz

$$e^{\frac{2s\pi i}{v}(1-w)} \int_0^1 dt \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{[av+2\pi i(1-w)](t+n)}}{1-e^{\frac{2\pi i}{v}(s+vt)}},$$

jenž po sečtení řady zní:

$$e^{\frac{2s\pi i}{v}(1-w)} \int_0^1 \frac{e^{[av+2\pi i(1-w)]t}\,dt}{\left[1-e^{\frac{2\pi i}{v}(s+vt)}\right].\left[1-e^{av-2w\pi i}\right]}.$$

Máme tudíž pro veličinu (7) nový tvar

(7*) $$\frac{e^{\frac{2s\pi i}{v}(1-w)}}{e^{av-2w\pi i}-1} \int_0^1 \frac{e^{[av+2\pi i(1-w)]t}\,dt}{e^{\frac{2\pi i}{v}(s+vt)}-1}.$$

Vraťme se nyní ku vzorci (5). Zavedemeli veličiny x a z rovnicemi

$$2z = w_1 v_2 - v_1 w_2, \quad 2x = w_1 v_2 + v_1 w_2,$$

takže

$$w_1 = \frac{x+z}{v_2}, \quad w_2 = \frac{x-z}{v_1},$$

a píšemeli $u = a v_1 v_2 + x$, obdrží rovnice (5) tvar

(5*) $$\begin{cases} v_2 \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{u+z+nv_2} \dfrac{e^{\frac{2s\pi i}{v_1 v_2}(u+z+nv_2)}}{e^{\frac{2\pi i}{v_1}(2z+nv_2)}-1} \\ + v_1 \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{u-z+nv_1} \dfrac{e^{\frac{2s\pi i}{v_1 v_2}(u-z+nv_1)}}{e^{\frac{2\pi i}{v_2}(-2z+nv_1)}-1} \\ = \dfrac{-2\pi i}{\left(e^{-\frac{2\pi i}{v_2}(u+z)}-1\right)\left(e^{-\frac{2\pi i}{v_1}(u-z)}-1\right)}. \end{cases}$$

Ještě elegantnější tvar je následující, jenž vznikne substitucí $u+z=x_2$, $u-z=x_1$:

(5**) $$\begin{cases} v_1 \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{x_1+nv_1} \dfrac{e^{\frac{2s\pi i}{v_1 v_2}(x_1+nv_1)}}{e^{\frac{2\pi i}{v_2}(x_1-x_2+nv_1)}-1} \\ + v_2 \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{x_2+nv_2} \dfrac{e^{\frac{2s\pi i}{v_1 v_2}(x_2+nv_2)}}{e^{\frac{2\pi i}{v_1}(x_2-x_1+nv_2)}-1} = \dfrac{-2\pi i}{\left(e^{-\frac{2x_1\pi i}{v_1}}-1\right)\left(e^{-\frac{2x_2\pi i}{v_2}}-1\right)}. \end{cases}$$

Rozvinemeli obě strany dle mocností veličiny x_1, a porovnámeli stálé členy, obdržíme, píšemeli hned x za x_2,

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{n} \frac{e^{\frac{2ns\pi i}{v_2}}}{e^{\frac{2\pi i}{v_2}(nv_1 - x)} - 1} \\
&= \frac{\pi i}{e^{-\frac{2x\pi i}{v_2}} - 1} - v_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x + nv_2} \frac{e^{\frac{2s\pi i}{v_1 v_2}(x + nv_2)}}{e^{\frac{2\pi i}{v_1}(x + nv_2)} - 1}.
\end{aligned}
\right.
$$

Levou stranu lze uvésti na tvar

$$
(8^a)\quad \left\{
\begin{aligned}
&-\sum_{m=1}^{\infty} e^{\frac{2mx\pi i}{v_2}} \log\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{v_2}(s - mv_1)}\right) \\
&-\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{2mx\pi i}{v_2}} \log\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{v_2}(-s - mv_1)}\right),
\end{aligned}
\right.
$$

předpokládáli se Im. $\frac{v_1}{v_2} < 0$, Im. $\frac{v_1 - x}{v_2} < 0$, ale Im. $\frac{v_1 + x}{v_2} > 0$, čili což totéž jest

$$
-\mathrm{Im.}\ \frac{x}{v_2} < \mathrm{Im.}\ \frac{v_1}{v_2} < 0 < \mathrm{Im.}\ \frac{x}{v_2};
$$

zároveň musí bod s ležeti uvnitř rovnoběžníka $(0, v_1, v_1 + v_2, v_2)$.

Rovnice (5^*) vyjadřuje vlastnosť funkce

$$
(9)\qquad J(x, y, s \mid v_1, v_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x + nv_1} \frac{e^{\frac{2ns\pi i}{v_2}}}{e^{\frac{2\pi i}{v_2}(y + nv_1)} - 1},
$$

již považovati dlužno za zobecnění funkce $\Phi(\sigma, \tau, w)$ uvažované v §. 9. naší rozpravy *Základové theorie Malmsténovských řad.* Také tuto funkci možno vyjádřiti integrálem sestrojeným z elliptických transcendent.

Položme za tím účelem

$$
\varphi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2ns\pi i}{v_2}}}{e^{\frac{2\pi i}{v_2}(y + nv_1)} - 1} e^{2n\zeta\pi i},
$$

předpokládajíce Im. $\frac{v}{v_2} > 0$, (což obecnosti nikterak újmy nečiní), i shledáme velmi snadno, že bude

$$
J = \frac{2\pi i}{v_1\left(e^{\frac{2x\pi i}{v_1}} - 1\right)} \int_0^1 \varphi(z) e^{\frac{2x\zeta\pi i}{v_1}} dz;
$$

řadu $\varphi(z)$ sečteme dle vzorce

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2n\sigma\pi i}}{e^{2\pi i(u+n\tau)}-1} = \frac{\vartheta'_1(0\,|\,\tau)\,\vartheta_1(u+\sigma\,|\,\tau)}{2\pi i\,\vartheta_1(u\,|\,\tau)\,\vartheta_1(\sigma\,|\,\tau)},$$

a sice nalezneme tak

$$\varphi(z) = \frac{\vartheta'_1\left(0\,\middle|\,\frac{v_1}{v_2}\right)}{2\pi i}\;\frac{\vartheta_1\left(\frac{y+s+v_2 z}{v_2}\,\middle|\,\frac{v_1}{v_2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{y}{v_2}\,\middle|\,\frac{v_1}{v_2}\right)\vartheta_1\left(\frac{s+v_2 z}{v_2}\,\middle|\,\frac{v_1}{v_2}\right)}.$$

Hledaný výraz pro funkci J bude tedy

$$(10)\quad J(x,y,s\,|\,v_1,v_2) = \frac{\vartheta'_1\left(0\,\middle|\,\frac{v_1}{v_2}\right)}{v_1\left(e^{\frac{2x\pi i}{v_1}}-1\right)}\int_0^1 \frac{\vartheta_1\left(\frac{y+s+v_2 z}{v_2}\,\middle|\,\frac{v_1}{v_2}\right)e^{\frac{2xz\pi i}{v_1}}\,dz}{\vartheta_1\left(\frac{y}{v_2}\,\middle|\,\frac{v_1}{v_2}\right)\vartheta_1\left(\frac{s+v_2 z}{v_2}\,\middle|\,\frac{v_1}{v_2}\right)}$$

Jak bude vypadati tento výraz v případě Im. $\frac{v_1}{v_2} < 0$, plyne z identity

$$J(x,y,s\,|\,v_1,v_2) = J(x,y,-s\,|\,-v_1,v_2).$$

Při našem označení lze rovnici (5*) psáti

$$v_1\,J(x_1,x_1-x_2,s\,|\,v_1,v_2)\,e^{\frac{2sx_1\pi i}{v_1 v_2}} + v_2\,J(x_2,x_2-x_1,s\,|\,v_2,v_1)\,e^{\frac{2sx_2\pi i}{v_1 v_2}}$$
$$= \frac{-2\pi i}{\left(e^{-\frac{2x_1\pi i}{v_1}}-1\right)\left(e^{-\frac{2x_2\pi i}{v_2}}-1\right)}.$$

Klademeli v (10) $x\,v_1$ za x a přejdemeli, násobivše v_1, k limitě pro $\frac{v_1}{v_2} = \infty\, i$, máme

$$\frac{1}{x}\,\frac{1}{e^{\frac{2y\pi i}{v_2}}-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{2ns\pi i}{v_2}}}{x+n}$$

$$= \frac{\pi}{(e^{2x\pi i}-1)\sin\frac{y\pi}{v_2}}\int_0^1 \frac{\sin\frac{\pi(y+s+v_2 z)}{v_2}\,e^{2xz\pi i}\,dz}{\sin\frac{\pi(s+v_2 z)}{v_2}},$$

aneb po změně označení $\frac{s}{v_2} = \tau$, $\frac{y}{v_2} = u$,

$$(11)\quad \frac{1}{x}\,\frac{1}{e^{2u\pi i}-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n\tau\pi i}}{x+n}$$

$$= \frac{\pi}{\sin u\pi\,.\,(e^{2x\pi i}-1)}\int_0^1 \frac{\sin\pi(u+\tau+z)\,e^{2xz\pi i}\,dz}{\sin\pi(\tau+z)},$$

kde musí býti Im. $\tau > 0$.

Vratme se ještě ku vzorci (3*), a volme v něm $\tau_2 = i\,\infty$; i obdržíme tak

$$(12)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{(e^{2\pi i w_1}-1)(e^{2\pi i w_2}-1)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n\sigma\pi i}}{e^{2\pi i(w_1+n\tau_1)}-1}\\&=\frac{\pi}{(2\pi i)^2\sin w_2\pi}\cdot\frac{\vartheta'_1(0\,|\,\tau_1)}{\vartheta_1(w_1\,|\,\tau_1)}\int_0^1\frac{\sin\pi(w_2+\sigma_2-x)}{\sin\pi(\sigma_2-x)}\,\frac{\vartheta_1(w_1+\sigma_1+x\,|\,\tau_1)}{\vartheta_1(\sigma_1+x\,|\,\tau_1)}\,dx\end{aligned}\right.$$

kde $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$. Rozvinemeli obě strany dle mocností w_2 a porovnámeli členy stálé, máme

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-e^{2\pi i w_1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n\sigma\pi i}}{1-e^{2\pi i(w_1+n\tau_1)}}$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\,\frac{\vartheta'_1(0\,|\,\tau_1)}{\vartheta_1(w_1\,|\,\tau_1)}\int_0^1\cot\pi(\sigma_2-x)\,\frac{\vartheta_1(w_1+\sigma_1+x\,|\,\tau_1)}{\vartheta_1(\sigma_1+x\,|\,\tau_1)}\,dx\,.$$

Klademeli zde $\tau_1 = \infty\, i$, máme

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-e^{2\pi i w}}+\frac{e^{2\sigma\pi i}}{1-e^{2\sigma\pi i}}$$

$$=-\frac{1}{4\sin w\pi}\int_0^1\cot\pi(\sigma_2-x)\,\frac{\sin\pi(w+\sigma_1+x)}{\sin\pi(\sigma_1+x)}\,dx\,.$$

Rozvinemeli zde dle mocností w a porovnáme stálé členy, máme

$$\frac{1}{4}+\frac{e^{2\sigma\pi i}}{1-e^{2\sigma\pi i}}=-\frac{1}{4}\int_0^1\cot\pi(\sigma_1+x)\,.\cot\pi(\sigma_2-x)\,dx\,,$$

kde jako ve všech vzorcích těchto $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$, a ovšem se předpokládá $\text{Im.}\ \sigma_1 > 0$, $\text{Im.}\ \sigma_2 > 0$.

Z rovnice (1) obdržíme přechodem k limitě pro $v_3 = \infty$, předpokládajíce $\text{Im.}\ v_1 < 0$, $\text{Im.}\ v_2 < 0$, $0 < w_1 < 1$, $0 < w_2 < 1$, vzorec následující:

$$(13)\quad\left\{\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2s\sigma\pi i}\,dx}{(e^{2\pi i(v_1 s-w_1)}-1)(e^{2\pi i(v_2 s-w_2)}-1)}\\&=\frac{1}{v_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{2\sigma\pi i}{v_1}(w_1+n)}}{e^{\frac{2\pi i}{v_1}(w_1v_2-v_1w_2+nv_2)}-1}+\frac{1}{v_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{2\sigma\pi i}{v_2}(w_2+n)}}{e^{\frac{2\pi i}{v_2}(w_2v_1-v_2w_1+nv_1)}-1}\end{aligned}\right.$$

při čemž s značí veličinu tvaru

$$\xi_0+\xi_1 v_1+\xi_2 v_2,\quad \xi_0>0,\quad 0<\xi_1<1,\quad 0<\xi_2<1\,.$$

Píšemeli $\frac{v_2}{v_1} = \tau$, $\frac{s}{v_1} = \sigma$, obdrží vzorec (13) tvar

$$(13^{a}) \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\sigma\pi i(w_1+n)}}{e^{2\pi i(w_1\tau - w_2 + n\tau)} - 1} + \frac{1}{\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{2\sigma\pi i}{\tau}(w_2+n)}}{e^{\frac{2\pi i}{\tau}(w_2 - \tau w_1 + n)} - 1} \\ & = v_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\sigma v_1 x\pi i}\, dx}{(e^{2\pi i(v_1 x - w_1)} - 1)(e^{2\pi i(v_1 \tau x - w_2)} - 1)}, \end{aligned} \right.$$

kde v_1 značí libovolnou veličinu podrobenou podmínkám

$$\mathrm{Im.}\, v_1 < 0, \quad \mathrm{Im.}\, v_1 \tau < 0.$$

3. Účelem tohoto paragrafu jest vyložiti methodu, pomocí níž možno začasté určiti trigonometrický rozvoj daných funkcí.

Jeli $f(x)$ jednoznačná funkce mající periodu 1, bude existovati rozvoj tvaru

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu e^{2\nu x\pi i},$$

i jedná se o stanovení jeho součinitelů. Za tím účelem uvažme, že platí pro $v > 0$ rozvoj

$$\frac{1}{e^{v+2x\pi i} - 1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu v - 2\nu x\pi i},$$

a tedy

$$\int_0^1 f(x) \frac{dx}{e^{v+2x\pi i} - 1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu e^{-\nu v}.$$

Umímeli stanoviti integrál v levo, aneb aspoň jeho rozvoj dle mocností veličiny e^{-v}, obdržíme tím koefficienty A_ν bezprostředně. Okolnosť ta nastane často u funkcí tvaru

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(x+n),$$

kde $F(x)$ je funkce jednoznačná. Pak bude

$$\int_0^1 f(x) \frac{dx}{e^{v+2x\pi i} - 1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 F(x+n) \frac{dx}{e^{v+2x\pi i} - 1},$$

což po substituci x za $x+n$ obdrží tvar

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} F(x) \frac{dx}{e^{v+2x\pi i} - 1},$$

t. j.

$$\int_0^1 f(x) \frac{dx}{e^{v+2x\pi i} - 1} = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \frac{dx}{e^{v+2x\pi i} - 1}.$$

Jakmile dovedeme tento integrál rozvinouti dle mocností e^{-v}, bude úkol stanoviti součinitele trigonometrického rozvoje funkce $f(x)$ řešen. Součinitele $A_0, A_{-1}, A_{-2}, \ldots$ obdržíme totiž cestou analogickou z integrálu

$$\int_0^1 f(x) \frac{dx}{1-e^{-v+2x\pi i}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{-\nu} e^{-\nu v}.$$

Hledejme na př. trigonometrický rozvoj funkce

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{a(x+n)}}{1-e^{2x\pi i+2b\pi(x+n)}},$$

kde a, b jsou realné veličiny hovící podmínce $0 < a < 2b\pi$.

Tu bude nám především stanoviti integrál

$$\text{(a)} \qquad J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}\,dx}{(1-e^{2x\pi i+2b\pi x})(e^{v+2x\pi i}-1)}, \quad v > 0,$$

což se podaří pomocí věty Cauchyovy.

V jižní polovici roviny (x) leží pouze tyto póly integrované funkce:

$$x = \frac{n-u}{b}\, i,$$

a jeli u pravý zlomek — jak chceme předpokládati — dlužno voliti

$$n = 0, -1, -2, \ldots.$$

Uvažujme nyní integrál téhož funkce, jako v integrálu (a), ale vzatý po uzavřené cestě složené z přímočarých úseků $(-N \ldots N)$, $(N \ldots N - Mi)$, $(N - Mi \ldots -N - Mi)$, $(-N - Mi \ldots -N)$, jež jest obdélníkem o vrcholech $\pm N$, $\pm N - Mi$; při tom volíme $M = \frac{k+\frac{1}{2}+u}{b}$, kde k značí kladné číslo celistvé. Pak bude na vzdálených částech integrační cesty integrovaná funkce nekonečně malou při nekonečně velikých M, N, a integrál tento bude se od J lišiti jen o veličinu nekonečně malou. Hodnota našeho integrálu bude však dle Cauchya rovnati se součinu $-2\pi i$ se součtem residuí integrované funkce, a poněvadž residuum na pólu $x = -\frac{n+u}{b}\, i$ zní

$$\frac{e^{-\frac{a(n+u)i}{b}}}{-2b\pi\left(e^{v+\frac{2\pi}{b}(n+u)}-1\right)},$$

máme rovnici

$$J = \frac{i}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{ai}{b}(n+u)}}{e^{v+\frac{2\pi}{b}(n+u)}-1}.$$

Odtud plyne

$$J=\frac{i}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}e^{-\frac{ai}{b}(n+u)-\nu v-\frac{2\nu\pi}{b}(n+u)}$$

a provedemeli sčítání vůči n,

$$J=\frac{i}{b}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{ai}{b}u-\frac{2\nu\pi u}{b}}}{1-e^{-\frac{ai}{b}-\frac{2\nu\pi}{b}}}e^{-\nu v},$$

takže bude v našem případě

$$A_\nu=\frac{i}{b}\frac{e^{\frac{ai}{b}u-\frac{2\nu\pi u}{b}}}{1-e^{-\frac{ai}{b}-\frac{2\nu\pi}{b}}},\ (\nu>0).$$

Pro stanovení koefficientů A_0, A_{-1}, A_{-2}, ... dlužno vyšetřiti integrál

$$J'=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}\,dx}{(1-e^{2u\pi i+2b\pi x})(1-e^{-v+2a\pi i})};$$

v severní polovici roviny (x) má integrovaná funkce póly

$$x=\frac{n-u}{b}i \qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

Uvažujemeli integrál tété funkce vzatý podél obvodu rovnoběžníka $\pm N$, $\pm N+Mi$, obdržíme podobně jako předešle

$$J'=-\frac{i}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{ai}{b}(u-n)}}{1-e^{-v+\frac{2\pi}{b}(u-n)}},$$

tudíž

$$J'=-\frac{i}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}e^{-\frac{ai}{b}(u-n)+\frac{2\nu\pi}{b}(u-n)-\nu v}$$

$$=-\frac{i}{b}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{2\nu\pi-ai}{b}(u-1)-\nu v}}{1-e^{\frac{ai-2\nu\pi}{b}}},$$

takže máme

$$A_{-\nu}=\frac{i}{b}\frac{e^{\frac{2\nu\pi-ai}{b}u}}{1-e^{\frac{2\nu\pi-ai}{b}}},\quad (\nu=0,1,2\ldots)$$

vzorec téhož tvaru jako pro A_ν. Bude tudíž obecně

$$A_\nu=\frac{i}{b}\frac{e^{-\frac{2\nu\pi+ai}{b}u}}{1-e^{-\frac{2\nu\pi+ai}{b}}},$$

XXIII.

čímž nacházíme známý vztah

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{a(u+n)}}{1-e^{2u\pi i+2b(u+n)}} = \frac{i}{b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2n\pi+ai}{b}u+2nu\pi i}}{1-e^{-\frac{2n\pi+ai}{b}}},$$

4. Jednoznačná funkce komplexní proměnné s

$$f(s) = \Gamma(s)\,\Gamma(a-s)\,\Gamma(b+vsi)\,\Gamma(c-vsi),$$

v níž konstanty a, b, c, v jsou tak voleny, aby póly byly vesměs jednoduchy, a v je buď realné aneb aspoň není ryze pomyslné, je pro nekonečně veliká s, ležící mimo určitá okolí pólů, nekonečně malou asi jako $e^{-k|s|}$.

Okolnosť ta vyplývá z analogické vlastnosti funkce

$$\varphi(s) = \Gamma(s)\,\Gamma(a-s).$$

Klademeli $a = \alpha + i\beta$, $s = \xi + i\eta$, a předpokládámeli na př. $\xi > 0$, ustanovme celistvá čísla n, n' tak, aby rozdíly $\xi - n = \xi_0$, $\alpha - \xi + n' = 1 - \xi'_0$ byly pravé kladné zlomky; pak bude dle známé vlastnosti funkce $\Gamma(s)$ patrně

$$\varphi(s) = \frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)}{(a-s)(a-s+1)\ldots(a-s+n'-1)}\,\Gamma(s-n)\,\Gamma(a-s+n')$$

čili

$$\varphi(s) = (-1)^n \frac{(1+\xi_0+i\eta)(2+\xi_0+i\eta)(3+\xi_0+i\eta)\ldots(n+\xi_0+i\eta)}{(\xi'_0+i\eta)(\xi'_0+i\eta+1)(\xi'_0+i\eta+2)\ldots(\xi'_0+i\eta+n'-1)}$$
$$\Gamma(\xi^0+i\eta)\,\Gamma(1-\xi'_0-i\eta).$$

Součin $\Gamma(\xi+i\eta)\,\Gamma(1-\xi'_0-i\eta)$ jest pro veliká η úměrný s výrazem tvaru $\dfrac{\eta\pi i}{\sin\eta\pi i}$, kdežto lomený výraz tvořící jeho činitele na pravé straně jest nanejvýš nekonečný jako s^h, kde h značí určitou konstantu.

Funkce $f(s)$ je pak součinem dvou součinitelů tvaru $\varphi(s)$, $\varphi_1(vsi+b)$, z nichž aspoň jeden je v nekonečnu typu $e^{-k|s|}$, a věta tím dokázána.

Z vlastnosti té plyne, že integrál

$$\int f(s)\,ds$$

vzatý podél uzavřené cesty »nekonečně vzdálené«, jež nezabíhá v okolí pólů, jest nekonečně malý, a že tedy součet všech residuí funkce $f(s)$ rovná se nulle.

Póly funkce $f(s)$ jsou pak následující

$$s = -n,\ a+n,\ \frac{b+n}{v}i,\ -\frac{c+n}{v}i, \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

a residua příslušná znějí

$$\frac{(-1)^n}{n!}\,\Gamma(a+n)\,\Gamma(b-niv)\,\Gamma(c+niv)\,,$$

$$-\frac{(-1)^n}{n!}\,\Gamma(a+n)\,\Gamma(b+aiv+niv)\,\Gamma(c-aiv-niv)\,,$$

$$-\frac{i}{v}\,\frac{(-1)^n}{n!}\,\Gamma\left(\frac{b+n}{v}\,i\right)\Gamma\left(a-\frac{b+n}{v}\,i\right)\Gamma(b+c+n)\,,$$

$$\frac{i}{v}\,\frac{(-1)^n}{n!}\,\Gamma\left(-\frac{c+n}{v}\,i\right)\Gamma\left(a+\frac{c+n}{v}\,i\right)\Gamma(b+c+n)\,.$$

Položímeli tedy součet těchto residuí na roveň nulle, máme vztah

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\,\Gamma(a+n)\left[\Gamma(b-niv)\,\Gamma(c+niv)\right.$$
$$\left.-\,\Gamma(b+aiv+niv)\,\Gamma(c-aiv-niv)\right]$$
$$=\frac{i}{v}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\,\Gamma(b+c+n)\left[\Gamma\left(\frac{b+n}{v}\,i\right)\Gamma\left(a-\frac{b+n}{v}\,i\right)\right.$$
$$\left.-\,\Gamma\left(-\frac{c+n}{v}\,i\right)\Gamma\left(a+\frac{c+n}{v}\,i\right)\right].$$

Píšemeli zde $c-b$ za c a klademeli

$$(14)\quad\left\{\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\,\Gamma(a+n)\left[\Gamma(b-niv)\,\Gamma(c-b+niv)\right.\\&\qquad\left.-\,\Gamma(b+aiv+niv)\,\Gamma(c-b-aiv-niv)\right]\\&=F(a,b,c;iv)\,,\end{aligned}\right.$$

obdrží vztah náš tvar

$$(15)\qquad F(a,b,c;iv)=\frac{i}{v}\,F\left(c\,,a-\frac{bi}{v}\,,a\,;\,\frac{i}{v}\right).$$

K vůli eleganci doporučuje se psáti $iv=\tau$, kde pak τ není realné, a pak máme

$$(14^*)\qquad F(a,b,c;\tau)=\sum\frac{(-1)^n}{n!}\,\Gamma(a+n)\left[\Gamma(b-n\tau)\,\Gamma(c-b+n\tau)\right.$$
$$\left.-\,\Gamma(b+a\tau+n\tau)\,\Gamma(c-b-a\tau-n\tau)\right],$$

$$(15^*)\qquad F(a,b,c;\tau)=-\frac{1}{\tau}\,F\left(c\,,a+\frac{b}{\tau}\,,a\,;-\frac{1}{\tau}\right).$$

Pro $a=1$ zní výraz (14*)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\Gamma(b-n\tau)\,\Gamma(c-b+n\tau)-\Gamma(b+\overline{n+1}\,\tau)\,\Gamma(c-b-\overline{n+1}\,\tau)\right],$$

což jest identické s řadou

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \Gamma(b-n\tau)\,\Gamma(c-b+n\tau),$$

kdežto pravá strana bude

$$-\frac{1}{\tau}\sum \frac{(-1)^n}{n!}\Gamma(c+n)\left[\Gamma\left(1+\frac{b}{\tau}+\frac{n}{\tau}\right)\Gamma\left(-\frac{b}{\tau}-\frac{n}{\tau}\right)\right.$$
$$\left.-\Gamma\left(1-\frac{c-b+n}{\tau}\right)\Gamma\left(\frac{c-b+n}{\tau}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{\tau}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\Gamma(c+n)\left[\frac{\pi}{\sin\frac{(b+n)\pi}{\tau}}+\frac{\pi}{\sin\frac{(c-b+n)\pi}{\tau}}\right],$$

a tedy máme vztah

$$(16)\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \Gamma(b-n\tau)\,\Gamma(c-b+n\tau)$$
$$=\frac{\pi}{\tau}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\Gamma(c+n)\left(\frac{1}{\sin\frac{(b+n)\pi}{\tau}}+\frac{1}{\sin\frac{(c-b+n)\pi}{\tau}}\right).$$

Je zajímavo poznamenati, že tento výsledek je zvláštním případem vztahu (4) §. 1 hlavy I., a sice vznikne z něho volbou $u=\frac{1}{2}$. Vzorec onen zní totiž

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(s+nti)\,\Gamma(a-s-nti)}{\Gamma(a)}e^{2nu\pi i}$$
$$=\frac{2\pi}{t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u)}}{\left(1+e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}\right)^a},$$

kde t je realné a kladné, a mimo to $0<\text{Real.}\,s<\text{Real.}\,a$, u pak značí ryz zlomek kladný.

Jelikož tu pro $n>0$ platí rozvoj

$$\frac{e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u)}}{\left(1+e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}\right)^a}=e^{\frac{2\pi}{t}(s-a)(n-u)}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-a}{m}e^{-\frac{2m\pi}{t}(n-u)},$$

bude

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u)}}{\left(1-e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}\right)^a}=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-a}{m}\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{2\pi}{t}(s-a-m)(n-u)}$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-a}{m}\frac{e^{\frac{2\pi}{t}(s-a-m)(1-u)}}{1-e^{\frac{2\pi}{t}(s-a+m)}};$$

pro $n \leqq 0$ je naproti tomu

$$\frac{e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u)}}{\left(1+e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}\right)^a} = e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u)} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-a}{m} e^{\frac{2m\pi}{t}(n-u)},$$

tedy

$$\sum_{n=-\infty}^{0} \frac{e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u)}}{\left(1+e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}\right)^a} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-a}{m} \sum_{n=-\infty}^{0} e^{\frac{2\pi}{t}(s+m)(n-u)}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-a}{m} \frac{e^{-\frac{2\pi}{t}u(s+m)}}{1-e^{-\frac{2\pi}{t}(s+m)}};$$

uvážímeli kromě toho, že

$$\Gamma(a)\binom{-a}{m} = (-1)^m \frac{\Gamma(a+m)}{m!},$$

nacházíme pro citovaný vztah tvar následující:

$$(17)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma(s+nti)\,\Gamma(a-s-nti)\,e^{2nu\pi i} \\ \displaystyle = \frac{2\pi}{t} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{\Gamma(a+m)}{m!} \left\{ \frac{e^{-\frac{2u\pi}{t}(s+m)}}{1-e^{-\frac{2\pi}{t}(s+m)}} + \frac{e^{-\frac{2(u-1)\pi}{t}(s-a-m)}}{1-e^{\frac{2\pi}{t}(s-a-m)}} \right\}, \end{cases}$$

a odtud plyne pro $u = \frac{1}{2}$ vztah (16).

V.

Některé vzorce, jež jsme obdrželi průběhem úvah dosavadních, možno považovati za zvláštní případy vzorců, jež chceme nyní odvoditi.

1. Budiž především $\varphi(x)$ funkce, jež se v jižní polovici roviny x chová pravidelně a má periodu 1, takže $\varphi(x+1) = \varphi(x)$. Znamenejme literou u veličinu zatím neurčitou, literou v pak veličinu o kladné části pomyslné a znamenejme

$$f(x) = \frac{\vartheta_1(x-v+u\,|\,\tau)}{\vartheta_1(x-v\,|\,\tau)}\,\varphi(x-v).$$

Utvořme integrál

$$\int f(x)\,dx$$

vzatý podél obvodu rovnoběžníka o vrcholech $(0, 1, -n\tau+1, -n\tau)$, kde n je kladné číslo celistvé; uvnitř oboru integračního má funkce integrovaná póly

$$x = v - k\tau$$

a příslušná residua

$$\varphi(-k\tau)\, e^{2ku\pi i}\, \frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta'_1},$$

kde celistvé číslo k probíhá hodnoty hovící nerovnostem

$$0 > \mathrm{Im.}(v - k\tau) > -\mathrm{Im.}\, n\tau\,.$$

Volímeli zvláště $0 < \mathrm{Im.}\, v < \mathrm{Im.}\, \tau$, bude

$$k = 1, 2, 3, \ldots n\,.$$

Dle věty Cauchyovy bude pak

$$\int f(x)\, dx = -2\pi i\,.\, \frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta'_1(0)} \sum_k e^{2ku\pi i}\, \varphi(-k\tau)\,.$$

Integrál tento sestává ze čtyř částí, a sice

$$\int f(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^{1-n\tau} f(x)\, dx + \int_{1-n\tau}^{-n\tau} f(x)\, dx + \int_{-n\tau}^{0} f(x)\, dx\,;$$

z těch se druhá a čtvrtá ruší, poněvadž $f(x+1) = f(x)$ a směry integrační jsou opačné; zbývající část třetí má hodnotu

$$\int_{1-n\tau}^{-n\tau} f(x)\, dx = -\int_0^1 f(x - n\tau)\, dx\,.$$

Avšak

$$f(x - n\tau) = e^{2nu\pi i}\, \varphi(x - v - n\tau)\, \frac{\vartheta_1(x - v + u)}{\vartheta_1(x - v)}\,,$$

takže patrně bude

$$\lim_{n=\infty} f(x - n\tau) = 0\,,$$

jakmile splněna bude podmínka

(1) $$\lim_{n=\infty} e^{2nu\pi i}\, \varphi(x - v - n\tau) = 0 \text{ v oboru } x = (0 \ldots 1)\,.$$

Za podmínky (1) bude tedy

$$\lim_{n=\infty} \int_{1-n\tau}^{-n\tau} f(x)\, dx = 0\,,$$

a my obdržíme vztah

(2) $$\int_0^1 \frac{\vartheta_1(x - v + u)}{\vartheta_1(x - v)}\, \varphi(x - v)\, dx = -2\pi i\, \frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta'_1} \sum_k e^{2ku\pi i}\, \varphi(-k\tau)\,,$$

při čemž summační index k probíhá všecky hodnoty, pro něž $\mathrm{Im.}\,(k\tau - v) > 0$, a mimo to má býti splněna konvergenční podmínka (1).

XXIII.

Jeli zvláště $0 < \text{Im}.\, v < \text{Im}.\, \tau$, máme odtud

$$(2^*) \quad \sum_{k=1}^{\infty} e^{2kun i} \varphi(-k\tau) = \frac{i\vartheta'_1}{2\pi\, \vartheta_1(u)} \int_0^1 \frac{\vartheta_1(x-v+u)}{\vartheta_1(x-v)} \varphi(x-v)\, dx\,,$$

vzorec, pomocí něhož lze celou řadu výrazů uvésti na tvar integrálů omezených.

Pravou stranu lze přetvořiti v integrál sestrojený z funkcí elementarných způsobem následujícím.

Při podmínce $0 < \text{Real}.\, \frac{si}{\tau} < \text{Real}.\, \frac{i}{\tau}$ platí rozvoj

$$(3) \quad \frac{\vartheta'_1}{2\pi} \frac{\vartheta_1(s+t)}{\vartheta_1(s)\, \vartheta_1(t)} = \frac{i}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2s\pi i}{\tau}(n-t)}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{\tau}(n-t)}}\,,$$

a tedy pravá strana vzorce (2*) obdrží tvar

$$-\frac{1}{\tau} \int_0^1 dx \,.\, \varphi(x-v) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2u\pi i}{\tau}(n+v-x)}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{\tau}(n+v-x)}}\,;$$

zde podmínka konvergenční $0 < \text{Real}.\, \frac{ui}{\tau} < \text{Real}.\, \frac{i}{\tau}$ je splněna, jakmile na př. u je ryzí zlomek. Integrací po členech máme uvažovanou veličinu ve tvaru

$$-\frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \frac{e^{\frac{2u\pi i}{\tau}(n+v-x)}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{\tau}(n+v-x)}} \varphi(x-v)\, dx\,;$$

transformujemeli obecný člen v pravo substitucí x za $n-x$, obdrží integrál meze n a $n-1$, takže po jich obrácení obdržíme součet typu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n-1}^{n} = \int_{-\infty}^{\infty},$$

t. j. náš výraz bude

$$-\frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2u\pi i}{\tau}(x+v)} \varphi(-v-x)\, dx}{1 - e^{\frac{2\pi i}{\tau}(x+v)}}\,.$$

Máme tudíž za supposice

$$0 < \text{Real}.\, \frac{ui}{\tau} < \text{Real}.\, \frac{i}{\tau}\,, \qquad 0 < \text{Im}.\, v < \text{Im}.\, \tau$$

a za konvergenční podmínky (1) vzorec

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{2nun i} \varphi(-n\tau) = -\frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2u\pi i}{\tau}(x+v)} \varphi(-v-x)\, dx}{1 - e^{\frac{2\pi i}{\tau}(x+v)}}\,.$$

XXIII.

Volme na příklad

$$\varphi(x) = (a + b e^{-2x\pi i} + c e^{-4x\pi i})^\sigma ,$$

kde musí býti splněna podmínka

$$\left| \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} \right| > 1$$

při obou znameních $\pm$, aby funkce se chovala pravidelně pod osou realnou. Tu obdržíme při označení $q = e^{\tau\pi i}$ vzorec

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} e^{2ku\pi i} (a + b q^{2k} + c q^{4k})^\sigma \\ & = \frac{i \vartheta'_1}{2\pi \vartheta_1(u)} \int_0^1 \frac{\vartheta_1(x - v + u)}{\vartheta_1(x - v)} (a + b e^{2\pi i(v-x)} + c e^{4\pi i(v-x)})^\sigma \, dx . \end{aligned} \right.$$

Podmínka (1) vyžaduje, aby $\mathrm{Im.}\, u > 0$. Vzorec tento zobecňuje výsledek (2) vyvinutý v kapitole II., kde užito litery a místo v a voleno $u = \frac{\tau}{2}$. Tam zároveň vloudila se chyba, ano má pod integračním znamením místo *činitele* $e^{2\pi i(a-x)}$ státi $e^{\pi i\, a-x)}$; kromě toho má býti opravena chyba tisková, totiž má státi v závorce $c e^{4\pi i(a-x)}$ na místě chybného $c e^{4\pi\sigma i(a-x)}$. Výsledek ten obdrží se skutečně z (5) pomocí rovnic

$$\vartheta_1\left(w + \frac{\tau}{2}\right) = i e^{-(w + \frac{1}{4}\tau)\pi i} \vartheta_0(w) , \qquad \vartheta_1\left(\frac{\tau}{2}\right) = i e^{-\frac{1}{4}\tau\pi i} \vartheta_0 ,$$

$$\vartheta'_1 = \pi \vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3$$

ve tvaru:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n (a + b q^{2n} + c q^{4n})^\sigma$$

$$= \frac{i}{2} \vartheta_2 \vartheta_3 \int_0^1 \frac{\vartheta_0(x - v)}{\vartheta_1(x - v)} e^{\pi i(v-x)} (a + b e^{2\pi i(v-x)} + c e^{4\pi i(v-x)})^\sigma \, dx .$$

Vzorec (4) poskytne pak dále

$$(5^a) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} e^{2nu\pi i} (a + b q^{2n} + c q^{4n})^\sigma \\ & = -\frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2u\pi i}{\tau}(x+v)} (a + b e^{2\pi i(x+v)} + c e^{4\pi i(x+v)})^\sigma \, dx}{1 - e^{\frac{2\pi i}{\tau}(x+v)}} , \end{aligned} \right.$$

při čemž u podrobeno podmínkám

$$\mathrm{Im.}\, u > 0 , \qquad 0 < \mathrm{Real.} \frac{ui}{\tau} < \mathrm{Real.} \frac{i}{\tau} ,$$

a veličina v podmínkám $0 < \mathrm{Im.}\, v < \mathrm{Im.}\, \tau$.

Hledejme jako další applikaci integrál pro řadu

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + e^{2\pi t(n-w)}}, \qquad 0 < w < 1,$$

kterou jsme uvažovali v hlavě I. (str. 20). Uveďme ji především geometrickým rozvinutím obecného členu na tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} e^{-2m\pi t(n-w)}$$

a proveďme sčítání vůči n; i obdržíme tak výraz

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{e^{-2m\pi t(1-w)}}{1 - e^{-2m\pi t}}$$

čili

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} e^{2m\pi t w}}{e^{2m\pi t} - 1}.$$

Aby se tato řada vpravila do tvaru (2*), stačí voliti

$$\varphi(x) = \frac{1}{e^{2x\pi i} - 1}, \qquad \tau = ti, \qquad u = \tfrac{1}{2} - twi,$$

načež bude

$$S = -\sum_{n=1}^{\infty} e^{2nu\pi i} \varphi(-n\tau),$$

a tedy dle (2)

$$S = -\frac{i\vartheta'_1}{2\pi\vartheta_1(\frac{1}{2} - wti)} \int_0^1 \frac{\vartheta_1(x - v + \frac{1}{2} - wti)\,dx}{\vartheta_1(x-v)\,(e^{2\pi i(x-v)} - 1)}$$

$$= \frac{\vartheta'_1}{2\pi i\,\vartheta_2(wti)} \cdot \int_0^1 \frac{\vartheta_2(x - v - wti)\,dx}{\vartheta_1(x-v)\,(e^{2\pi i(x-v)} - 1)},$$

a tedy

$$(6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + e^{2\pi t(n-w)}} = \frac{\vartheta'_1}{2\pi i\,\vartheta_2(wti)} \int_0^1 \frac{\vartheta_2(x - v - wti)\,dx}{\vartheta_1(x-v)\,(e^{2\pi i(x-v)} - 1)}.$$

Vzorec (10ª) hlavy I. plyne odtud pro $v = \dfrac{\tau}{2} = \dfrac{ti}{2}$; neboť pak bude

$$\vartheta_1(x - v) = -i\,e^{\pi i(x - \frac{1}{4}\tau)}\,\vartheta_0(x),$$

$$\vartheta_2(x - v - wti) = e^{\pi i(x - wti - \frac{1}{4}\tau)}\,\vartheta_3(x - wti),$$

takže pravá strana vzorce (6) obdrží tvar

$$\frac{\vartheta'_1\,e^{wt\pi}}{2\pi\,\vartheta_2(wti)} \int_0^1 \frac{\vartheta_3(x - wti)\,dx}{\vartheta_0(x)\,(e^{t\pi + 2x\pi i} - 1)}.$$

Vzorec (4) pak poskytne v našem případě, poněvadž

$$\text{Real.}\,\frac{ui}{\tau}=\text{Real.}\,\frac{u}{t}=\frac{1}{2t}$$

skutečně leží mezi 0 a $\frac{1}{t}$,

$$S=\frac{1}{ti}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi\left(\frac{1}{2t}-wi\right)(x+v)}\,dx}{\left(1-e^{\frac{2\pi}{t}(x+v)}\right)\left(e^{-2\pi i(v+x)}-1\right)},$$

aneb pro $v=\frac{ti}{2}$ po krátké redukci:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+e^{2\pi t(n-w)}}=\frac{e^{wt\pi}}{t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-2wx\pi i}\,dx}{\left(e^{\frac{x\pi}{t}}+e^{-\frac{x\pi}{t}}\right)\left(e^{t\pi-2x\pi i}-1\right)};$$

substitucí $-x$ za x obdrží se odtud vzorec (10) hlavy I.

2. Chováli se naopak funkce $\varphi(x)$ pravidelně *nad* osou realnou, obdržíme při označení

$$f(x)=\frac{\vartheta_1(x+v+u)}{\vartheta_1(x+v)}\,\varphi(x+v)$$

pomocí integrálu

$$\int f(x)\,dx$$

vzatého podél rovnoběžníka $(0\,,1\,,1+n\tau\,,n\tau)$, kde n je kladné celistvé číslo, vztah

$$\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 f(x+n\tau)\,dx=2ni\sum_k\varphi(k\tau)\,e^{-2ku\pi i}\,\frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta'_1}.$$

Jeli splněna podmínka

(7) $$\lim_{n=\infty}e^{-2nu\pi i}\varphi(x+v+n\tau)=0\quad\text{pro}\quad x=(0\ldots1),$$

bude

$$\lim_{n=\infty}\int_0^1 f(x+n\tau)\,dx=0,$$

a tedy

(8) $$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(k\tau)\, e^{-2ku\pi i} = \frac{\vartheta'_1}{2\pi i\, \vartheta_1(u)} \int_0^1 \frac{\vartheta_1(x+v+u)\, \varphi(x+v)\, dx}{\vartheta_1(x+v)},$$

jestliže se předpokládá $0 < \text{Im.}\, v < \text{Im.}\, \tau$.

Pomocí vzorce (3) možno pravou stranu uvésti na tvar

(8ᵃ) $$\frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2u\pi i}{\tau}(x+v)}\, \varphi(x+v)\, dx}{1 - e^{-\frac{2\pi i}{\tau}(x+v)}},$$

jestliže se předpokládá $0 < \text{Real.}\, \frac{ui}{\tau} < \text{Real.}\, \frac{i}{\tau}$

3. Budiž $\psi(x)$ funkce hovící rovnici $\psi(x+1) = -\psi(x)$ a chovající se pravidelně *pod* osou realnou; pak se v integrálu

$$\int \frac{\psi(z-v)\, dz}{\vartheta_1(z-v)}$$

vzatém podél rovnoběžníka $(0, 1, 1 - n\tau, -n\tau)$ ruší složky vzaté dle cest $(1 \ldots 1 - n\tau)$, $(-n\tau \ldots 0)$ a zbývá mimo integrál

$$\int_0^1 \frac{\psi(z-v)\, dz}{\vartheta_1(z-v)}$$

ještě složka

$$\int_{1-n\tau}^{-n\tau} \frac{\psi(z-v)\, dz}{\vartheta_1(z-v)} = (-1)^{n+1} q^{n^2} \int_0^1 \frac{e^{2n\pi i(v-x)}\, \psi(x - v - n\tau)}{\vartheta_1(x-v)}\, dx,$$

jež mizí pro $n = \infty$, platíli podmínka

(9) $$\lim_{n=\infty} q^{n^2}\, \psi(x - v - n\tau)\, e^{2nv\pi i} = 0.$$

Předpokládámeli $0 < \text{Im.}\, v < \text{Im}\, \tau$, jsou póly integrované funkce obsažené v oboru integračním tvaru $z = v - k\tau$, $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ a příslušná residua znějí

$$(-1)^k \frac{1}{\vartheta'_1} q^{k^2} \psi(-k\tau),$$

takže obdržíme

(10) $$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k q^{k^2} \psi(-k\tau) = -\frac{\vartheta'_1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\psi(z-v)\, dz}{\vartheta_1(z-v)}.$$

Při tom značí, jako vůbec v této práci, litera q veličinu $e^{\tau\pi i}$.

Kdybychom předpokládali, že funkce $\psi(z)$ chová se pravidelně *nad* osou realnou, obdrželi bychom pomocí integrační cesty $(0, 1, 1 + n\tau, n\tau)$ vzorec

$$(10^a) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k q^{k^2} \psi(k\tau) = \frac{\vartheta'_1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\psi(z+v)}{\vartheta_1(z+v)} dz,$$

jestliže splněna podmínka

$$(9^a) \qquad \lim q^{n^2} \psi(x + v + n\tau) e^{2nv\pi i} = 0.$$

OPRAVY.

Str. 15. Ve vzorci (11) má za znamením součtu $\sum_{s=-\infty}^{\infty}$ v čitateli exponent zníti $-\frac{n\pi i}{\tau}\left(u + s + \frac{r}{n}\right)^2$.

Str. 22. Ve druhém řádku vzorce (5) má v čitateli exponent zníti $\frac{2s\pi i}{v_2}(w_2 + n)$ místo $\frac{2s\pi i}{v_1}(w_1 + n)$.

Dále připoj v řádku 6. z dola znamení součtu $\sum_{s=-\infty}^{\infty}$ před napsaný výraz.

Str. 28. Ve vzorci (12) má ve jmenovateli státi $(e^{2\pi i w_1} - 1)$ místo $(^{2\pi i w_1} - 1)$.