Matyáš Lerch
Z počtu integrálního

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 2 (1893), 6. 9, 1–40

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/501776`

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK II. TŘÍDA II. ČÍSLO 9.

# Z POČTU INTEGRÁLNÍHO.

NAPSAL

M. LERCH

PŘEDLOŽENO DNE 21. ŘÍJNA 1892.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.

1893.

Tiskem J. Otty v Praze.

# I.

1. Integrál

$$\int_0^\infty e^{-x^2} x^{s-1} \cos ux \, dx = F(u, s) \tag{1}$$

existuje pro všechna konečná $u$, realná i komplexní, a pro všecka $s$, jichž realná část je kladna. Znamenejme $a$ kladnou veličinu a násobme po obou stranách $e^{-a^2u^2} du$ a integrujme v mezích 0 a $\infty$; i vznikne

$$J = \int_0^\infty F(u, s) \, e^{-a^2u^2} du = \int_0^\infty e^{-x^2} x^{s-1} dx \int_0^\infty e^{-a^2u^2} \cos ux \, du,$$

poněvadž pořádek integrační patrně dovoleno obrátiti. Avšak vnitřní integrál

$$\int_0^\infty e^{-a^2u^2} \cos ux \, du = \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-a^2u^2 + uix} \, dn$$

má hodnotu

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{x^2}{4a^2}},$$

a tedy bude

$$J = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \int_0^\infty e^{-x^2\left(1 + \frac{1}{4a^2}\right)} x^{s-1} dx = \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{4a\left(1 + \frac{1}{4a^2}\right)^{\frac{s}{2}}}.$$

Máme tak výsledek

$$\int_0^\infty F(u, s) \, e^{-a^2u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{4a} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\left(1 + \frac{1}{4a^2}\right)^{\frac{s}{2}}} \tag{2}$$

1*

čili

$$(2^*)\qquad \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{s}{2})}{4a\,(1+\frac{1}{4a^2})^{\frac{s}{2}}} = \int_0^\infty e^{-a^2u^2}\,du\int_0^\infty e^{-x^2}\cos ux\,x^{s-1}\,dx\,.$$

Buď $w$ kladná veličina, a násobme po obou stranách $e^{-a^2w^2}\,a\,da$ a integrujme dle $a$ v mezích $0$ a $\infty$; i vznikne tak vzorec

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4}\Gamma(\tfrac{s}{2})\int_0^\infty \frac{e^{-a^2w^2}\,da}{(1+\frac{1}{4a^2})^{\frac{s}{2}}} = \int_0^\infty e^{-a^2w^2}\,a\,da\int_0^\infty e^{-a^2u^2}\,du\int_0^\infty e^{-x^2}\cos ux\,x^{s-1}\,dx\,;$$

po změně pořádku integračního obdrží pravá strana tvar

$$\int_0^\infty e^{-x^2}x^{s-1}\,dx\int_0^\infty \cos ux\,du\int_0^\infty e^{-a^2(u^2+w^2)}\,a\,da$$

a poněvadž vnitřní integrál má hodnotu

$$\int_0^\infty e^{-a^2(u^2+w^2)}\,a\,da = \frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2+w^2}\,,$$

máme

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4}\Gamma(\tfrac{s}{2})\int_0^\infty \frac{e^{-a^2w^2}\,da}{(1+\frac{1}{4a^2})^{\frac{s}{2}}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}x^{s-1}\,dx\int_0^\infty \frac{\cos ux\,du}{u^2+w^2}\,.$$

Vnitřní integrál přetvořme substitucí $u=\frac{t}{x}$, a obdržíme pravou stranu ve tvaru

$$(\mathrm{a})\qquad \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}x^{s}\,dx\int_0^\infty \frac{\cos t\,dt}{t^2+w^2x^2}\,.$$

Integrál

$$\int_0^\infty \frac{\cos t\,dt}{t^2+w^2x^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ti}\,dt}{t^2+w^2x^2}$$

obdrží se pomocí věty Cauchyovy takto: Uvažuje se nejprvé integrál

$$\int_C \frac{e^{ti}\,dt}{t^2+w^2x^2}$$

vzatý podél cesty $C$, složené z úseku osy realné $(-R\ldots R)$ — kde $R$ je kladná velká veličina — a z polokruhu $|t|=R$ v severní polovici roviny $(t)$.

Znamenámeli $\Gamma$ tento půlkruh, bude jednak

$$\int_C \frac{e^{ti}\,dt}{t^2+w^2x^2} = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ti}\,dt}{t^2+w^2x^2} + \int_\Gamma \frac{e^{ti}\,dt}{t^2+w^2x^2},$$

a jednak dle věty Cauchyovy, ana funkce integrovaná má uvnitř čáry $C$ jediný pól $t = wxi$ o residuu $\frac{e^{-wx}}{2wxi}$,

$$\int_C \frac{e^{ti}\,dt}{t^2+w^2x^2} = \frac{\pi}{wx} e^{-wx};$$

přejdemeli v rovnici takto nabyté

$$\frac{\pi}{wx} e^{-wx} = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ti}\,dt}{t^2+w^2x^2} + \int_\Gamma \frac{e^{ti}\,dt}{t^2+w^2x^2}$$

k limitě pro $R = \infty$, odpadne poslední člen a zbude

$$\frac{\pi}{wx} e^{-wx} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ti}\,dt}{t^2+w^2x^2},$$

takže máme

$$\int_0^\infty \frac{\cos t\,dt}{t^2+w^2x^2} = \frac{\pi}{2wx} e^{-wx} \tag{b}$$

a tedy výraz (a) obdrží hodnotu

$$\frac{\pi}{4w} \int_0^\infty e^{-x^2-wx} x^{s-1}\,dx,$$

a máme tak rovnici:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4} \Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right) \int_0^\infty \frac{e^{-a^2w^2}\,da}{\left(1+\frac{1}{4a^2}\right)^{\frac{s}{2}}} = \frac{\pi}{4w} \int_0^\infty e^{-x^2-wx} x^{s-1}\,dx.$$

Píšemeli ještě v levo $aw = x$, obdržíme po krátké redukci:*)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}\,dx}{\left(1+\frac{w^2}{4x^2}\right)^{\frac{s}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-x^2-wx} x^{s-1}\,dx. \tag{3}$$

*) Vzorec (3) je zvláštním případem vzorce (13) Kummerova pojednání v Crelleově žurnálu, sv. 17, str. 230, tam ovšem jinou cestou odvozeného.

Pravá strana je celistvá funkce proměnné $w$, kdežto integrál v levo existuje pouze, pokud $w$ není ryze pomyslné, takže dlužno vésti řez podél celé osy pomyslné, a tím omeziti proměnnou $w$ na hodnoty s kladnou částí realnou.

Předpokládejme nyní, že realná část veličiny $s$ leží v mezích $0$ a $2$, položme $w = ui + \varepsilon$, kde $\varepsilon$ je malá kladná veličina, a přejděme k limitě pro $\varepsilon = 0$.

Tu bude

$$\left(1 + \frac{w^2}{4x^2}\right)^{\frac{s}{2}} = \left(1 + \frac{wi}{4x}\right)^{\frac{s}{2}} \left(1 - \frac{wi}{4x}\right)^{\frac{s}{2}}$$

$$= \left(1 - \frac{u}{2x} + \frac{\varepsilon i}{2x}\right)^{\frac{s}{2}} \cdot \left(1 + \frac{u}{2x} - \frac{\varepsilon i}{2x}\right)^{\frac{s}{2}},$$

kde mocnosti jsou dány jednoznačně dle vzorce

$$\left(v \pm \frac{\varepsilon i}{2x}\right)^{\frac{s}{2}} = e^{\frac{s}{2} \log \left(v \pm \frac{\varepsilon i}{2x}\right)}$$

při čemž pomyslná část logarithmů leží v mezích $-\pi$ a $\pi$

Jeli $u$ kladné, máme tedy

$$\lim_{\varepsilon = 0} \left(1 + \frac{u}{2x} - \frac{\varepsilon i}{2x}\right)^{\frac{s}{2}} = \left(1 + \frac{u}{2x}\right)^{\frac{s}{2}}$$

pro všecka $x$, ale

$$\lim_{\varepsilon = 0} \left(1 - \frac{u}{2x} + \frac{\varepsilon i}{2x}\right)^{\frac{s}{2}} = \left(1 - \frac{u}{2x}\right)^{\frac{s}{2}} \qquad \text{při } x > \frac{u}{2},$$

$$\lim_{\varepsilon = 0} \left(1 - \frac{u}{2x} + \frac{\varepsilon i}{2x}\right)^{\frac{s}{2}} = \left(\frac{u}{2x} - 1\right)^{\frac{s}{2}} \cdot e^{\frac{s\pi i}{2}} \qquad \text{při } x < \frac{u}{2},$$

a tudíž

$$\lim_{\varepsilon = 0} \left(1 + \frac{w^2}{4x^2}\right)^{\frac{s}{2}} = \begin{cases} \left(\frac{u^2}{4x^2} - 1\right)^{\frac{s}{2}} e^{\frac{1}{2} s\pi i} & \text{při } x < \frac{u}{2}, \\ \left(1 - \frac{u^2}{4x^2}\right)^{\frac{s}{2}} & \text{při } x > \frac{u}{2}. \end{cases}$$

Následkem toho bude (při $w = ui + \varepsilon$, $u > 0$)

$$\lim_{\varepsilon = 0} \int_0^\infty \frac{e^{-x^2}\, dx}{\left(1 + \frac{w^2}{4x^2}\right)^{\frac{s}{2}}} = \lim_{\varepsilon = 0} \int_0^{\frac{u}{2}} \frac{e^{-x^2}\, dx}{\left(1 + \frac{w^2}{4x^2}\right)^{\frac{s}{2}}} + \lim_{\varepsilon = 0} \int_{\frac{u}{2}}^\infty \frac{e^{-x^2}\, dx}{\left(1 + \frac{w^2}{4x^2}\right)^{\frac{s}{2}}}$$

$$= e^{-\frac{1}{2} s\pi i} \int_0^{\frac{u}{2}} \frac{e^{-x^2}\, dx}{\left(\frac{u^2}{4x^2} - 1\right)^{\frac{s}{2}}} + \int_{\frac{u}{2}}^\infty \frac{e^{-x^2}\, dx}{\left(1 - \frac{u^2}{4x^2}\right)^{\frac{s}{2}}}.$$

Podmínka Real. $\frac{s}{2} < 1$ je nutna k existenci obou těchto integrálů; máme tedy z (3) vztah:

$$(3^a) \qquad e^{-\frac{1}{2}s\pi i} \int_0^{\frac{u}{2}} \frac{e^{-x^2}\,dx}{\left(\frac{u^2}{4x^2}-1\right)^{\frac{s}{2}}} + \int_{\frac{u}{2}}^{\infty} \frac{e^{-x^2}\,dx}{\left(1-\frac{u^2}{4x^2}\right)^{\frac{s}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{s}{2})} \int_0^{\infty} e^{-x^2-uix}\, x^{s-1}\,dx\,.$$

Kdybychom byli kladli $w = -ui + \varepsilon$, předpokládajíce stále $u > 0$, byli bychom obdrželi

$$\lim_{\varepsilon=0} \left(1+\frac{w^2}{4x^2}\right)^{\frac{s}{2}} = \begin{cases} \left(\frac{u^2}{4x^2}-1\right)^{\frac{s}{2}} e^{-\frac{1}{2}s\pi i} & \text{při } x < \frac{u}{2} \\ \left(1-\frac{u^2}{4x^2}\right)^{\frac{s}{2}} & \text{při } x > \frac{u}{2}\,, \end{cases}$$

a tedy místo (3ᵃ) rovnici

$$(3^b) \qquad e^{\frac{1}{2}s\pi i} \int_0^{\frac{u}{2}} \frac{e^{-x^2}\,dx}{\left(\frac{u^2}{4x^2}-1\right)^{\frac{s}{2}}} + \int_{\frac{u}{2}}^{\infty} \frac{e^{-x^2}\,dx}{\left(1-\frac{u^2}{4x^2}\right)^{\frac{s}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{s}{2})} \int_0^{\infty} e^{-x^2+uix}\, x^{s-1}\,dx\,.$$

Odečtemeli rovnice (3ᵃ), (3ᵇ), obdržíme tedy, píšíce $2u$ za $u$:

$$\int_0^{u} \frac{e^{-x^2}\,dx}{\left(\frac{u^2}{x^2}-1\right)^{\frac{s}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sin\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(\frac{s}{2})} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin 2ux\,.\,x^{s-1}\,dx$$

aneb vzhledem k rovnici

$$\Gamma(\tfrac{s}{2})\,\Gamma(1-\tfrac{s}{2}) = \frac{\pi}{\sin\frac{s\pi}{2}}\,,$$

$$(4) \qquad \int_0^{u} \frac{e^{-x^2}\,dx}{\left(\frac{u^2}{x^2}-1\right)^{\frac{s}{2}}} = \frac{\Gamma(1-\frac{s}{2})}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin 2ux\, x^{s-1}\,dx\,.$$

Násobímeli pak rovnice (3ᵃ), (3ᵇ) veličinami $e^{\frac{s\pi i}{2}}$, resp. $e^{-\frac{s\pi i}{2}}$ a odečteme, vznikne

$$\sin\frac{s\pi}{2} \int_{\frac{u}{2}}^{\infty} \frac{e^{-x^2}\,dx}{\left(1-\frac{u^2}{4x^2}\right)^{\frac{s}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{s}{2})} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin\left(\frac{s\pi}{2}-ux\right) x^{s-1}\,dx$$

čili po dosazení $2u$ za $u$:

$$(5) \qquad \int_u^{\infty} \frac{e^{-x^2}\,dx}{\left(1-\frac{u^2}{x^2}\right)^{\frac{s}{2}}} = \frac{\Gamma(1-\frac{s}{2})}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin\left(\frac{s\pi}{2}-2ux\right) x^{s-1}\,dx$$

2. Vraťme se ku vzorci (3), píšíce v něm $2\sqrt{w}$ za $w$ a přetvořivše jej substitucí $\sqrt{w}\,x$ za $x$,

$$(3^*)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-wx^2}\,dx}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{s}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{w}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-x^2-2x\sqrt{w}}\,x^{s-1}\,dx\,.$$

Jeli Real. $s > 1$, bude lze přejíti k ryze pomyslným hodnotám $w = ui$, $-ui$, čímž vznikne rovnice

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ux^2 i}\,dx}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{s}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\sqrt{u}} \int_0^\infty e^{-x^2-x\sqrt{u}(1+i)-\frac{\pi i}{4}}\,x^{s-1}\,dx\,.$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{ux^2 i}\,dx}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{s}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\sqrt{u}} \int_0^\infty e^{-x^2-x\sqrt{u}(1-i)+\frac{\pi i}{4}}\,x^{s-1}\,dx\,,$$

poněvadž ve vzorci (3*) má $\sqrt{w}$ míti kladnou část realnou a tedy

$$\sqrt{ui} = \sqrt{u}\,.\,e^{\frac{\pi i}{4}} = \sqrt{u}\,.\,\frac{1+i}{2}\,,$$

$$\sqrt{-ui} = \sqrt{u}\,.\,e^{-\frac{\pi i}{4}} = \sqrt{u}\,.\,\frac{1-i}{2}$$

Píšemeli zde $u^2$ za $u$, obdržíme z těchto rovnic

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} u\int_0^\infty \frac{\cos u^2x^2\,dx}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{s}{2}}} &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-x^2-ux}\cos\left(ux+\frac{\pi}{4}\right)x^{s-1}\,dx \\ u\int_0^\infty \frac{\sin u^2x^2\,dx}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{s}{2}}} &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-x^2-ux}\sin\left(ux+\frac{\pi}{4}\right)x^{s-1}\,dx \end{aligned}\right.$$

kde veličina $u$ jest realná a kladná.

3. Píšemeli u vzorci (4) $x = u\sqrt{t}$, obdrží levá strana tvar

$$\frac{u}{2}\,.\int_0^1 \frac{e^{-u^2t}}{\left(\frac{1}{t}-1\right)^{\frac{s}{2}}}\,.\,\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{u}{2}\int_0^1 e^{-u^2t}\,t^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{s}{2}}\,dt\,.$$

a tedy máme vztah

$$(a)\qquad \int_0^1 e^{-u^2t}\,t^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{s}{2}}\,dt = \frac{2\,\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}{u\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2}\sin 2ux\;x^{s-1}\,dx\,;$$

vzorec ten jest dokázán pro kladná realná $u$, poněvadž ale obě strany jsou celistvé funkce $u$, platí pro všecka $u$ bez rozdílu.

IX.

Differencujme nyní obě strany rovnice vzniklé z (4)

$$u\int_0^1 \frac{e^{-u^2t}\,dt}{(\frac{1}{t^2}-1)^s} = \frac{\Gamma(1-s)}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}\sin 2ux\,.\,x^{2s-1}\,dx$$

dle $u$; tím vznikne

$$\int_0^1 \frac{e^{-u^2t^2}\,dt}{(\frac{1}{t^2}-1)^s} - 2u^2\int_0^1 \frac{e^{-u^2t^2}\,t^2\,dt}{(\frac{1}{t^2}-1)^s} = 2\,\frac{\Gamma(1-s)}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ux\,.\,x^{2s}\,dx\,.$$

Avšak

$$d\left(\frac{e^{-u^2t^2}\,t}{(\frac{1}{t^2}-1)^s}\right) = \frac{e^{-u^2t^2}\,dt}{(\frac{1}{t^2}-1)^s} - 2u^2\,\frac{e^{-t^2u^2}\,t^2\,dt}{(\frac{1}{t^2}-1)^s} + 2s\,\frac{e^{-u^2t^2}\,t^{-2}\,dt}{(\frac{1}{t^2}-1)^{s+1}}$$

a odtud plyne

$$\int_0^1 \frac{e^{-u^2t^2}\,dt}{(\frac{1}{t^2}-1)^s} - 2u^2\int_0^1 \frac{e^{-u^2t^2}\,t^2\,dt}{(\frac{1}{t^2}-1)^s} = \lim_{x=1}\left[\frac{e^{-u^2x^2}\,x}{(\frac{1}{x^2}-1)^s} - 2s\int_0^x \frac{e^{-u^2t^2}\,t^{-2}\,dt}{(\frac{1}{t^2}-1)^{s+1}}\right]$$

takže máme rovnici

$$\lim_{x=1}\left[\frac{e^{-u^2x^2}\,x}{(\frac{1}{x^2}-1)^s} - 2s\int_0^x e^{-u^2t^2}\,t^{2s}\,(1-t^2)^{-s-1}\,dt\right]$$

$$= \frac{2\Gamma(1-s)}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ux\,.\,x^{2s}\,dx\,.$$

Integrál v pravo existuje, jakmile Real. $2s > -1$, a jeli skutečně $0 >$ Real. $2s > -1$, máme odtud

$$-2s\int_0^1 e^{-u^2t^2}\,t^{2s}\,(1-t^2)^{-s-1}\,dt = \frac{2\Gamma(1-s)}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ux\,.\,x^{2s}\,dx\,.$$

Píšemeli zde $2s = \sigma - 1$, máme při $1 >$ Real. $\sigma > 0$, uživše vztahu

$$\Gamma(1-s) = -s\Gamma(-s) = -s\Gamma\left(\frac{1-\sigma}{2}\right),$$

rovnici:

$$\int_0^1 e^{-u^2t^2}\,t^{\sigma-1}\,(1-t^2)^{-\frac{1+\sigma}{2}}\,dt = \frac{\Gamma(\frac{1-\sigma}{2})}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ux\,.\,x^{\sigma-1}\,dx\,,$$

aneb píšemeli $\sqrt{t}$ za $t$

$$\text{(b)}\quad \int_0^1 e^{-u^2 t}\, t^{\frac{\sigma}{2}-1}(1-t)^{-\frac{1+\sigma}{2}}\, dt = \frac{2\,\Gamma\left(\frac{1-\sigma}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2ux\, x^{\sigma-1}\, dx\,.$$

Zavedemeli nyní označení

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} P(v\,;\alpha,\beta) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta-\alpha)} \int_0^1 e^{v z} z^{\alpha-1} (1-z)^{\beta-\alpha-1}\, dz\,, \\ \Psi_0(u,s) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2ux\,.\,x^{s-1}\, dx\,, \\ \Psi_1(u,s) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-x^2} \sin 2ux\,.\,x^{s-1}\, dx\,, \end{aligned}\right.$$

obdržíme rovnice (a) a (b) ve tvaru

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \Psi_0(u,s) &= \frac{1}{2} P\left(-u^2, \frac{s}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ \Psi_1(u,s) &= u\,.\,P\left(-u^2, \frac{1+s}{2}, \frac{3}{2}\right). \end{aligned}\right.$$

Užijemeli v prvé z rovnic (7) rozvoje

$$e^{vz} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{v^\nu z^\nu}{\nu!}\,,$$

obdržíme

$$P(v\,;\alpha,\beta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu v^\nu\,,$$

kde

$$\begin{aligned} A_\nu &= \frac{1}{\nu!}\cdot\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta-\alpha)} \int_0^1 z^{\alpha+\nu-1}(1-z)^{\beta-\alpha-1}\, dz \\ &= \frac{1}{\nu!}\,\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta-\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+\nu)\,\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta+\nu)}\,, \end{aligned}$$

tedy

$$A_\nu = \frac{(\alpha,\nu)}{\nu!\,(\beta,\nu)}\,,$$

při označení

$$(\alpha,\nu) = \alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)\ldots(\alpha+\nu-1)\,;\qquad (\alpha,0) = 1\,.$$

Následkem toho platí rozvoj

$$(9)\qquad P(v\,;\alpha,\beta)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\alpha,\nu)}{\nu!\,(\beta,\nu)}\,v^{\nu}\,,$$

z něhož plyne, že $P(v\,;\alpha,\beta)$ jest vůči veličinám $v$, $\alpha$ celistvou funkcí transcendentní, pokud $\beta$ není záporným číslem celistvým neb nullou. Z rovnic (8) plyne pak, že $\Psi_0(u,s)$, $\Psi_1(u,s)$ *jsou celistvé funkce transcendentní obou proměnných* $u$, $s$; a sice $\Psi_0$ sudou, $\Psi_1$ lichou vůči $u$.

4. Pokud jsou splněny podmínky Real. $\alpha > 0$, Real. $(\beta-\alpha) > 0$, existuje pravá strana prvé z rovnic (7); klademeli pak v integrálu $z=1-x$, obdržíme

$$\int_0^1 e^{vz} z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-\alpha-1}\,dz = e^{v}\int_0^1 e^{-vx} x^{\beta-\alpha-1}(1-x)^{\alpha-1}\,dx\,,$$

a tedy bude

$$(10)\qquad P(v\,;\alpha,\beta)=e^{v}\,P(-v\,,\beta-\alpha\,,\beta)\,.$$

Tato relace zde tak jednoduše odvozená poskytne ve zvláštních případech $\beta=\frac{1}{2}\,,\frac{3}{2}$ pomocí rovnic (8) vztahy

$$(11)\qquad \begin{cases} \Psi_0(u,s)=e^{-u^2}\,\Psi_0(ui\,,1-s)\,,\\ \Psi_1(u,s)=-\,i\,e^{-u^2}\,\Psi_1(ui\,,1-s)\,.\end{cases}$$

Vyjádřímeli tyto vztahy přímo pomocí integrálů, máme*)

$$\int_0^{\infty} e^{-z^2} z^{s-1}\cos\text{hyp}\,2uz\,dz=\frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{1-s}{2})}\,e^{u^2}\int_0^{\infty} e^{-z^2} z^{-s}\cos 2uz\,dz\,,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-z^2} z^{s-1}\sin\text{hyp}\,2uz\,dz=-\,\frac{\Gamma(\frac{s+1}{2})}{\Gamma(1-\frac{s}{2})}\,e^{u^2}\int_0^{\infty} e^{-z^2} z^{-s}\sin 2uz\,dz\,.$$

Poznamenejme ještě, že z rovnice (10) obdržíme rozvinutím obou stran dle mocností $v$ a porovnáním součinitelů následující vlastnosť binomialních součinitelů

$$(12)\qquad \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}\frac{\binom{n}{\nu}\binom{x}{\nu}}{\binom{y}{\nu}}=\frac{\binom{y-x}{n}}{\binom{y}{n}}\,,$$

tedy na př. pro $x=n$:

$$\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}\frac{\binom{n}{\nu}^2}{\binom{y}{\nu}}=\frac{\binom{y-n}{n}}{\binom{y}{n}}\,.$$

*) Prvý ze vzorců (11) obdrželi jsme ve své práci »O jistém integrálu omezeném« (Věstník král. čes. spol. nauk z r. 1886) na základě vlastností funkce $\vartheta_3(u\,|\,\tau)$. Vztah (10) přichází u *Kummera* (Journal f. d. reine u. angew. Math., sv. 17, str. 228), kde vyvozen z vlastností řady hypergeometrické.

## II.

1. Funkce

$$\Phi(u,s)=\int_0^\infty e^{-z^2+uz}z^{s-1}\,dz \tag{1}$$

hoví určité linearné differencialné rovnici druhého řádu, kterou chceme odvoditi Především plyne differencováním

$$\frac{d}{du}\Phi(u,s)=\Phi(u,s+1)\,, \tag{2^a}$$

tedy též

$$\frac{d^2}{du^2}\Phi(u,s)=\Phi(u,s+2)\,. \tag{2^b}$$

Integrací identity

$$d\left(e^{-z^2+uz}z^s\right)=-2e^{-z^2+uz}z^{s+1}dz+u\,e^{-z^2+uz}z^s dz+s\,e^{-z^2+uz}z^{s-1}dz$$

v mezích 0 a $\infty$ plyne

$$0=-2\Phi(u,s+2)+u\,\Phi(u,s+1)+s\,\Phi(u,s) \tag{3}$$

aneb dle ($2^a$), ($2^b$)

$$2\frac{d^2}{du^2}\Phi(u,s)=u\frac{d}{du}\Phi(u,s)+s\,\Phi(u,s)\,, \tag{3*}$$

takže $x=\Phi(u,s)$ jest integrálem differencialné rovnice

$$2\frac{d^2x}{du^2}=u\frac{dx}{du}+sx\,. \tag{3^a}$$

Rovnici té hoví taktéž funkce $x=\Phi(-u,s)$, a bude tedy

$$x=A\,\Phi(u,s)+B\,\Phi(-u,s)$$

jejím obecným řešením.

Z rovnic ($2^a$) plyne opakováním vztah

$$\frac{d^n}{du^n}\Phi(u,s)=\Phi^{(n)}(u,s)=\Phi(u,s+n)\,,$$

a tedy

$$\Phi^{(n)}(0,s)=\Phi(0,s+n)=\int_0^\infty e^{-z^2}z^{s+n-1}\,dz=\tfrac{1}{2}\Gamma\left(\frac{s+n}{2}\right),$$

takže Maclaurinovský rozvoj funkce $\Phi$ bude

$$\Phi(u,s) = \tfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{n+s}{2}\right) \frac{u^n}{n!}. \tag{4}$$

Řadu tu lze rozděliti ve dvě části, z nichž prvá obsahuje sudé, druhá liché mocnosti $u$; a sice bude pak

$$\Gamma\left(\frac{2\nu+s}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \left(\frac{s}{2}, \nu\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{2\nu+1+s}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right) \cdot \left(\frac{1+s}{2}, \nu\right),$$

takže máme

$$2\Phi(u,s) = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Phi_0(u,s) + \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \Phi_1(u,s), \tag{4$^a$}$$

kde položeno

$$\left\{\begin{aligned} \Phi_0(u,s) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{s}{2}, \nu\right) \frac{u^{2\nu}}{(2\nu)!}, \\ \Phi_1(u,s) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{s+1}{2}, \nu\right) \frac{u^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}. \end{aligned}\right. \tag{4$^b$}$$

Zároveň nacházíme

$$\Phi_0(u,s) = \frac{\Phi(u,s) + \Phi(-u,s)}{\Gamma(\frac{s}{2})},$$

$$\Phi_1(u,s) = \frac{\Phi(u,s) + \Phi(-u,s)}{\Gamma(\frac{1+s}{2})},$$

a v dřívější symbolice vyjádřeno [viz I. (7)]

$$\Phi_0(u,s) = 2\Psi_0\left(\frac{ui}{2}, s\right),$$

$$\Phi_1(u,s) = -2i\,\Psi_1\left(\frac{ui}{2}, s\right).$$

2. Hovíli funkce $x$ proměnné $u$ differencialné rovnici

$$\frac{d^2x}{du^2} + 2p\frac{dx}{du} + qx = 0, \tag{5$^a$}$$

kde $p$ a $q$ jsou funkce proměnné $u$, bude veličina

$$z = x\, e^{\int p\, du}$$

hověti differencialné rovnici

$$\frac{d^2 z}{du^2} = (p' + p^2 - q)\, z. \tag{5$^b$}$$

Při diff. rovnici (3ᵃ) jest $p=-\frac{u}{4}$, $q=-\frac{s}{2}$, tedy $\int p\,du=-\frac{u^2}{8}$,
a tudíž funkce

$$z=x\,e^{-\frac{u^2}{8}}$$

hoví differencialné rovnici

$$\frac{d^2z}{du^2}=\left(\frac{u^2}{16}-\frac{1}{4}+\frac{s}{2}\right)z, \tag{3^b}$$

jež tedy má řešení

$$z=e^{-\frac{1}{8}u^2}\Phi_0(u,s), \qquad z=e^{-\frac{1}{8}u^2}\Phi_1(u,s).$$

Rovnice ($3^b$) se nezmění, klademeli $ui$, $1-s$ za $u$, resp. $s$, a tedy má též řešení

$$z=e^{\frac{1}{8}u^2}\Phi_0(ui,1-s), \qquad z=e^{\frac{1}{8}u^2}\Phi_1(ui,1-s).$$

Tato musejí býti tvaru

$$A\,e^{-\frac{1}{8}u^2}\Phi_0(u,s)+B\,e^{-\frac{1}{8}u^2}\Phi_1(u,s),$$

a poněvadž funkce $\Phi_0$ jest sudá a $\Phi_1$ lichá vůči $u$, musí pro prvou býti $B=0$, pro druhou $A=0$, takže

$$e^{\frac{1}{8}u^2}\Phi_0(ui,1-s)=A\,e^{-\frac{1}{8}u^2}\Phi_0(u,s),$$

$$e^{\frac{1}{8}u^2}\Phi_1(ui,1-s)=B\,e^{-\frac{1}{8}u^2}\Phi_1(u,s),$$

a odtud pro $u=0$ nalezneme na základě definice ($4^b$):

$$A=1, \qquad B=i,$$

takže bude

$$\left\{\begin{aligned}\Phi_0(ui,1-s)&=e^{-\frac{1}{4}u^2}\Phi_0(u,s),\\ \Phi_1(ui,1-s)&=i\,e^{-\frac{1}{4}u^2}\Phi_1(u,s),\end{aligned}\right. \tag{6}$$

kteréžto vzorce se s rovnicemi (11) naprosto kryjí, takže rovnice ty zde na novo jsou odvozeny.

Poněvadž

$$(\sigma,\nu)=\binom{\sigma+\nu-1}{\nu}\nu!=(-1)^\nu\binom{-\sigma}{\nu}\nu!,$$

můžeme rovnice ($4^b$) psáti

$$\left\{\begin{aligned}\Phi_0(u,s)&=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{\nu!}{(2\nu)!}\binom{-\frac{s}{2}}{\nu}u^{2\nu},\\ \Phi_1(u,s)&=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{\nu!}{(2\nu+1)!}\binom{-\frac{s+1}{2}}{\nu}u^{2\nu+1}.\end{aligned}\right. \tag{4^c}$$

Jeli tedy $s$ záporné sudé číslo celistvé, zbude z řady $\Phi_0$ jen konečný počet členů, takže bude $\Phi_0(u, s)$ celistvou racionalnou funkcí $u$ stupně $-s$. Tedy pro $s = -2n$ máme z (6)

$$\Phi_0(ui, 1+2n) = e^{-\frac{1}{4}u^2} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{\nu!}{(2\nu)!} \binom{n}{\nu} u^{2\nu}$$

čili

$$2\int_0^\infty e^{-x^2} \cos ux \,.\, x^{2n}\, dx = \Gamma(n+\tfrac{1}{2}) \,.\, n!\, e^{-\frac{1}{4}u^2} \sum_{\nu=0}^{u} (-1)^\nu \frac{u^{2\nu}}{(2\nu)!\,(n-\nu)!}\,.$$

Avšak

$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}\,,$$

tedy

$$n!\,\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n}}\sqrt{\pi}\,,$$

a náš výsledek zní:

$$(7^a) \qquad \int_0^\infty e^{-x^2} \cos ux \,.\, x^{2n}\, dx = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}} e^{-\frac{1}{4}u^2} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{u^{2\nu}}{(2\nu)!\,(n-\nu)!}\,.$$

Funkce $\Phi_1$ redukuje se na celistvou racionalnou, jeli $s = -2n-1$ záporným lichým číslem, a sice bude

$$\Phi_1(u, -2n-1) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{\nu!}{(2\nu+1)!} \binom{n}{\nu} u^{2\nu+1}$$

$$= n! \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{u^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!\,(n-\nu)!}$$

a tedy plyne z (6)

$$\Phi_1(ui, 2n+2) = i\,e^{-\frac{1}{4}u^2} \,.\, n! \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{u^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!\,(n-\nu)!}$$

čili

$$2i\int_0^\infty e^{-x^2} \sin ux \,.\, x^{2n+1}\, dx = i\,.\,e^{-\frac{1}{4}u^2} \,.\, \Gamma(n+\tfrac{3}{2})\, n! \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{u^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!\,(n-\nu)!}$$

aneb konečně

$$(7^b) \qquad \int_0^\infty e^{-x^2} \sin ux \,.\, x^{2n+1}\, dx = \frac{(2n+1)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+2}} e^{-\frac{1}{4}u^2} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{u^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!\,(n-\nu)!}\,.$$

## IX.

Pro $s=0$ máme z (4[b]):

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}\frac{e^{ux}-e^{-ux}}{x}\,dx=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2},\nu\right)\frac{u^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{u^{2\nu+1}}{2^{2\nu}\,.\,\nu!\,(2\nu+1)}$$

čili, píšemeli $ui$ za $u$:

$$(7^c)\qquad \int_0^\infty e^{-x^2}\frac{\sin ux}{x}\,dx=\sqrt{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu!\,(2\nu+1)}\left(\frac{u}{2}\right)^{2\nu+1}=\sqrt{\pi}\int_0^{\frac{u}{2}}e^{-x^2}\,dx\,.$$

3. Jsouli $y_1$, $y_2$ dva integrály differencialné rovnice

$$\frac{d^2y}{du^2}+p\frac{dy}{du}+qy=0\,,$$

bude, jak známo,

$$y_1y'_2-y'_1y_2=Ce^{-\int p\,du}\,,$$

kde $C$ značí veličinu stálou, jež není nullou, pokud integrály $y_1$, $y_2$ se podstatně liší.

Rovnice

$$(3^a)\qquad 2\frac{d^2x}{du^2}-u\frac{dx}{du}-sx=0$$

má neodvislé integrály $\Phi(u,s)$, $\Phi(-u,s)$; zde jest

$$p=-\frac{u}{2}\,,\qquad q=-\frac{s}{2}\,,$$

tedy

$$-\int p\,du=\frac{u^2}{4}\,,$$

takže máme vzhledem k (2[a])

$$\Phi(u,s)\,\Phi(-u,s+1)+\Phi(-u,s)\,\Phi(u,s+1)=Ce^{\frac{u^2}{4}}\,;$$

veličina $C$ se ustanoví volbou $u=0$, a sice bude

$$C=2\Phi(0,s)\,\Phi(0,s+1)=\tfrac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right),$$

takže máme vztah

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned}&\Phi(u,s)\,\Phi(-u,s+1)+\Phi(-u,s)\,\Phi(u,s+1)\\&\quad=\tfrac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)e^{\frac{1}{4}u^2}\,;\end{aligned}\right.$$

tento byl již dán *Abelem*, naším úkolem bude jen dále stopovati jeho obsah.

## IX.

Jelikož

$$\Phi(u, s) = \int_0^\infty e^{-x^2+ux} x^{s-1} dx,$$

zní levá strana rovnice (8) takto:

$$\int_0^\infty e^{-x^2+ux} x^{s-1} dx \int_0^\infty e^{-y^2-uy} y^s dy + \int_0^\infty e^{-x^2-ux} x^{s-1} dx \int_0^\infty e^{-y^2+uy} y^s dy$$

aneb ve tvaru dvojnásobných integrálů

$$J = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)+u(x-y)} (xy)^{s-1} y \, dx \, dy$$

$$+ \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)-u(x-y)} (xy)^{s-1} y \, dx \, dy .$$

Tyto integrály převeďme na polární souřadnice pomocí rovnic $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, a bude

$$J = \int_0^\infty dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \, . \, e^{-r^2+ru(\cos\varphi - \sin\varphi)} r^{2s} \cos^{s-1} \varphi \sin^s \varphi$$

$$+ \int_0^\infty dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \, . \, e^{-r^2-ru(\cos\varphi - \sin\varphi)} r^{2s} \cos^{s-1} \varphi \sin^s \varphi .$$

Druhý integrál přetvořme substitucí $\varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi'$, a obdržíme

$$J = \int_0^\infty dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \, e^{-r^2+ru(\cos\varphi - \sin\varphi)} r^{2s} (\cos\varphi \sin\varphi)^{s-1} (\cos\varphi + \sin\varphi) .$$

Tento výraz obdrží po substituci

$$\sin\varphi - \cos\varphi = t$$

tvar

$$J = \frac{1}{2^{s-1}} \int_0^\infty dr \int_{-1}^1 e^{-r^2-urt} r^{2s} (1 - t^2)^{s-1} dt ,$$

takže vztah (8) nic jiného nevyjadřuje než rovnici

$$(9) \quad \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2s} dr \int_{-1}^1 e^{-urt} (1 - t^2)^{s-1} dt = 2^{s-2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) e^{\frac{1}{4}u^2} .$$

Volímeli zde $u = 0$, obdržíme v levo

$$\tfrac{1}{2}\Gamma(s+\tfrac{1}{2}) \cdot \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{s-1}\,dt$$

$$= \tfrac{1}{2}\Gamma(s+\tfrac{1}{2}) \int_{0}^{1} (1-t)^{s-1} t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \tfrac{1}{2}\Gamma(s+\tfrac{1}{2}) \cdot \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(s+\frac{1}{2})},$$

což jest $= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\Gamma(s)$, a tedy máme známý vzorec

$$\Gamma(s) = 2^{s-1}\pi^{-\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right),$$

takže (9) lze psáti

$$(9^*) \qquad \int_{0}^{\infty} e^{-r^2} r^{2s}\,dr \int_{-1}^{1} e^{urt}(1-t^2)^{s-1}\,dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\Gamma(s)\,e^{\frac{1}{4}u^2},$$

při čemž jsme vyměnili $u$ za $-u$.

Znamenámeli jako v naší práci o řadách Malmsténovských

$$E(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!\,\Gamma(s+n+1)},$$

obdržíme

$$(\alpha) \qquad \int_{-1}^{1} e^{xt}(1-t^2)^{s-1}\,dt = \sqrt{\pi}\,\Gamma(s)\,E\left(\frac{x^2}{4}, s-\frac{1}{2}\right),$$

a tedy bude lze rovnici (9*) psáti, vyměnímeli $s$ za $s+\frac{1}{2}$, $u$ za $2u$ takto:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-r^2} r^{2s+1} E(r^2u^2, s)\,dr = \frac{1}{2}e^{u^2},$$

aneb po substituci $\sqrt{x}$ za $r$:

$$(10) \qquad \int_{0}^{\infty} e^{-x} x^s E(xu, s)\,dx = e^u.$$

Rovnici tuto, jež se vzorcem Abelovým (8) úplně jest rovnomocnou, lze přímo verifikovati dosazením uvedené právě řady za $E(xu, s)$ a integrací po členech.

Ze vzorce ($\alpha$) plyne substitucí $t = -1 + 2z$ vztah

$$2^{2s-1} e^{-x} \int_{0}^{1} e^{2xz} z^{s-1}(1-z)^{s-1}\,dz = \sqrt{\pi}\,\Gamma(s)\,E\left(\frac{x^2}{4}, s-\frac{1}{2}\right);$$

levou stranu lze psáti dle I. (7) takto:

$$2^{2s-1} . e^{-x} . \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(s)}{\Gamma(2s)}\,P(2x\,;s\,,2s)\,;$$

užijemeli tedy vzorce

$$\Gamma(2s) = 2^{2s-1}\,\pi^{-\frac{1}{2}}\,\Gamma(s)\,\Gamma(s+\tfrac{1}{2})\,,$$

obdržíme

(11) $$E\left(\frac{x^2}{4}\,,s-\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{-x}}{\Gamma(s+\frac{1}{2})}\,P(2x\,;s\,,2s)$$

tedy dle I. (9)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n\,n!\,\Gamma(s+n+\frac{1}{2})} = \frac{e^{-x}}{\Gamma(s+\frac{1}{2})}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(s\,,n)}{n!\,(2s\,,n)}\,2^n x^n\,.$$

čili

(11*) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n\,n!\,(s+\frac{1}{2}\,,n)} = e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(s\,,n)}{n!\,(2s\,,n)}\,2^n x^n\,,$$

vzorec, jejž Kummer podal ve své práci De integralibus quibusdam definitis.*)

4. Vzorec (10) lze též psáti

(10a) $$\int_0^{\infty} e^{-ax}\,x^s\,E(x\,,s)\,dx = \frac{e^{\frac{1}{a}}}{a^{s+1}}\,,$$

a jest užitečným v mnohém ohledu. Abychom uvedli jednu applikaci, pokusme se ustanoviti koefficienty $A_\nu$ tak, aby

$$e^{-ux} = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu\,E(x\,,s+\nu)\,x^\nu\,.$$

Násobme obě strany $e^{-ax}\,x^s\,dx$ a integrujme v mezích 0 a $\infty$ ; i obdržíme se zřetelem k rovnici (10a)

$$\frac{\Gamma(s+1)}{(a+u)^{s+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{A_\nu\,e^{\frac{1}{a}}}{a^{s+\nu+1}}\,,$$

aneb

($\beta$) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{a^{s+n+1}} = \frac{\Gamma(s+1)\,e^{-\frac{1}{a}}}{(a+u)^{s+1}}\,.$$

Z rovnice té lze ustanoviti $A_n$ dvojím způsobem. Především lze pravou stranu rozvinouti dle mocností veličiny $\frac{1}{a}$, a sice bude rozvoj ten roven součinu řad

$$\Gamma(s+1)\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\mu}{\mu!\,a^\mu}\,.\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{-s-1}{\nu}\frac{u^\nu}{a^{s+\nu+1}}\,;$$

*) Crelleův žurnál, sv. 17., str. 228. Je to vzorec (5), ale u Kummera jest chyba ve znamení; exponent má u něho zníti $\mp 2\sqrt{x}$ na místo $\pm 2\sqrt{x}$.

součinitel při $\frac{1}{a^{s+n+1}}$ bude patrně součet

$$\Gamma(s+1)\sum_{\mu+\nu=n}(-1)^{\mu}\binom{-s-1}{\nu}\frac{u^{\nu}}{\mu!}$$

$$=\Gamma(s+1)\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^{\mu}\binom{-s-1}{n-\mu}\frac{u^{n-\mu}}{\mu!},$$

a tudíž bude

$$A_n=(-1)^n\sum_{\mu=0}^{n}\frac{\Gamma(s+1+n-\mu)}{\mu!\,(n-\mu)!}u^{n-\mu}$$

čili

$$(\beta')\qquad A_n=(-1)^n\sum_{\mu=0}^{n}\frac{\Gamma(s+1+\mu)}{\mu!\,(n-\mu)!}u^{\mu}.$$

Druhý způsob vyjádření jest následující:

$$A_n=\frac{\Gamma(s+1)}{2\pi i}\int\limits_{(0)}\frac{a^{s+n}e^{-\frac{1}{a}}}{(a+u)^{s+1}}da,$$

kde integrace se děje podél uzavřené čáry obsahující uvnitř body $a=0,-u$. Pišme nyní $a=\frac{1}{x}$, pak bude

$$A_n=\frac{\Gamma(s+1)}{2\pi i}\int\frac{e^{-x}\,dx}{x^{n+1}(1+ux)^{s+1}},$$

kde integrační cesta obsahuje uvnitř bod 0, nikoli však bod $-\frac{1}{u}$. Odtud máme též

$$(\beta'')\qquad A_n=\frac{\Gamma(s+1)}{n!}\,\underset{x=0}{D^n}\,\frac{e^{-x}}{(1+ux)^{s+1}}.$$

Znamenejme na okamžik

$$(12^{a})\qquad f_n(u,s)=\sum_{\mu=0}^{n}\binom{n}{\mu}\Gamma(s+1+\mu)\,u^{\mu}=\int\limits_0^{\infty}e^{-x}x^{s}(1+ux)^n\,dx,$$

pak bude

$$A_n=\frac{(-1)^n}{n!}f_n(u,s),$$

a tedy náš výsledek obdrží tvar

$$(12^{b})\qquad e^{-ux}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}f_n(u,s)\,E(x,s+n)\,x^n.$$

IX.

Násobme nyní obě strany $e^{-uy}du$, a integrujme v mezích 0 a $\infty$; tím obdržíme

(13) $$\frac{1}{x+y}=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(y,s)\,E(x,s+n)\,x^n,$$

kde položeno

(13ª) $$\varphi_n(y,s)=\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{\infty}e^{-uy}f_n(u,s)\,du,$$

čili

(13ᵇ) $$\varphi_n(y,s)=(-1)^n\sum_{\mu=0}^{n}\frac{\Gamma(s+\mu+1)}{(n-\mu)!\,y^{\mu+1}};$$

při tom se předpokládalo, že Real. $y>0$, Real. $(x+y)>0$.

Tyto podmínky však nestačí.

Řady (12ᵇ) a (13) jsou typu

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,E(x,s+n)\,x^n;$$

dokážeme, že obor konvergenční každé řady tohoto typu jest určitá kružnice o středu $x=0$.

Je totiž

$$E(x,s+n)\,x^n=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^{n+\nu}}{\nu!\,\Gamma(s+n+\nu+1)}$$

pro veliká $n$ tvaru

$$\frac{x^n}{\Gamma(s+n+1)}(1+\varepsilon_n),\qquad \lim_{n=\infty}\varepsilon_n=0.$$

Konvergujeli tedy řada $S$, bude

$$\lim\frac{a_n\,x^n}{\Gamma(s+n+1)}=0.$$

Jsouli tedy pro určité $x=r$ členové řady $S$ pod stálou mezí, bude řada ta konvergovati absolutně pro všecka $x$ absolutně menší než $r$.

Neb buď $r$ řečená (kladná) veličina; pak z nerovnosti

$$|a_n\,E(r,s+n)\,r^n|<g$$

plyne pro dosti veliká $n$

$$\left|\frac{a_n\,r^n}{\Gamma(s+n+1)}\right|<2g,$$

a odtud plyne, že řada

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n\,x^n}{\Gamma(s+n+1)}$$

bude konvergentní, pokud $|x|<r$. Z toho ale opět plyne absolutní konvergence řady $S$.

Pomocí vzorce $(\beta'')$ obdržíme nyní

$$e^{-ux} = \Gamma(s+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D_{t=0}^{n} \left( \frac{e^{-t}}{(1+tu)^{s+1}} \right) . E(x, s+n) x^n ;$$

tato řada dle předešlého konverguje neb diverguje zároveň s řadou

$$S' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D_{t=0}^{n} \left( \frac{e^{-t}}{(1+tu)^{s+1}} \right) \frac{x^n}{\Gamma(s+n+1)} .$$

Jeli $z$ kladná veličina sebe menší, bude vždy od určitého $n$ počínaje

$$\left| \frac{x^n}{\Gamma(s+n+1)} \right| < z^n ,$$

a tedy bude řada $S'$ kovergentní, jeli jí řada

$$S'' = \sum \frac{1}{n!} D_{t=0}^{n} \left( \frac{e^{-t}}{(1+tu)^{s+1}} \right) z^n ;$$

tato řada jest však patrně Maclaurinovským rozvojem funkce

$$\frac{e^{-z}}{(1+zu)^{s+1}} ,$$

jenž konverguje, pokud $|z| < \left| \frac{1}{u} \right|$.

Z toho následuje, že řada $S'$ konverguje pro všecka $x$, $u$, a tedy *rovnice* ($12^b$) *platí při libovolných* $x$, $u$.

Abychom rozhodli o konvergenci řady (13), potřebujeme asymptotickou hodnotu funkce $\varphi_n$ pro veliká $n$. Za tím účelem uvažme, že

$$\frac{\Gamma(s+\mu+1)}{\Gamma(s+n+1)} = \frac{1}{(n-\mu)! \binom{n+s}{n-\mu}} ,$$

takže bude dle ($13^b$)

$$\frac{\varphi_n(y, s)}{\Gamma(s+n+1)} = \frac{(-1)^n}{y^{n+1}} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{y^\nu}{\nu! \, \nu! \binom{n+s}{\nu}} ;$$

asymptotická hodnota pravé strany je patrně dána vzorcem

$$\frac{\varphi_n(y, s)}{\Gamma(s+n+1)} \backsim \frac{(-1)^n}{y^{n+1}} . \tag{14}$$

Konvergujeli tedy řada (13), bude též konvergentní řada

$$\sum_n \frac{(-1)^n x^n}{y^{n+1}} ,$$

a tato konverguje za podmínky $|x| < |y|$.

*Řada* (13) *tedy konverguje, jeli* $|x| < |y|$, v opačném případě ($|x| > |y|$) diverguje.

Tohoto fakta budeme potřebovati k přesnému důkazu vzorce (13).

IX.

Předpokládejme $y$ realné, kladné a větší než $|x|$; jedná se pak o důkaz identity

$$\int_0^\infty e^{-uy}\,du \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} f_n(u,s)\,E(x,s+n)\,x^n$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty e^{-uy} f_n(u,s)\,E(x,s+n)\,x^n\,du.$$

Pravá strana konverguje na základě supposice $y > |x|$; poněvadž

$$\int_0^N e^{-uy}\,du \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} f_n(u,s)\,E(x,s+n)\,x^n$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty e^{-uy} f_n(u,s)\,E(x,s+n)\,x^n\,du,$$

třeba pouze dokázati, že veličiny

$$\int_N^\infty e^{-uy}\,du \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} f_n(u,s)\,E(x,s+n)\,x^n,$$

$$(N) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \int_N^\infty e^{-uy} f_n(u,s)\,E(x,s+n)\,x^n\,du$$

jsou nekonečně malé pro nekonečně veliká $N$; o první je to patrno, a zbývá to dokázati jen o druhé.

Řadu $(N)$ rozložme ve dvě

$$(N) = \sum_{n=0}^{n'-1} \frac{(-1)^n}{n!} E(x,s+n)\,x^n \int_N^\infty e^{-uy} f_n(u,s)\,du$$

$$+ \sum_{n=n'}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} E(x,s+n)\,x^n \int_N^\infty e^{-uy} f_n(u,s)\,du.$$

Zde $u$ je realné a kladné jakožto proměnná integrační a tedy veličina

$$f_n(u,s) = \int_0^\infty e^{-\alpha}\,\alpha^s\,(1+u\alpha)^n\,d\alpha$$

bude číselně menší než

$$\int_0^\infty e^{-\alpha}\,\alpha^\sigma\,(1+u\alpha)^n\,d\alpha = f_n(u,\sigma),$$

kde $\sigma$ značí realnou část veličiny $s$; máme tedy

$$|f_n(u,s)| \leq f_n(u,\sigma),$$

tedy

$$\left|\int_N^\infty e^{-uy} f_n(u,s)\,du\right| \leq \int_N^\infty e^{-uy} f_n(u,\sigma)\,du$$

a poněvadž v posledním integrálu je funkce kladnou,

$$\left|\int_N^\infty e^{-uy} f_n(u,s)\,du\right| < \int_0^\infty e^{-uy} f_n(u,\sigma)\,du,$$

t. j.

$$\left|\frac{(-1)^n}{n!}\int_N^\infty e^{-uy} f_n(u,s)\,du\right| < |\varphi_n(y,\sigma)|;$$

můžeme tudíž psáti

$$\frac{(-1)^n}{n!}\int_N^\infty e^{-uy} f_n(u,s)\,du = \varepsilon_n \varphi_n(y,\sigma),$$

kde $|\varepsilon_n| < 1$; pak obdrží řada $(N)$ tvar

$$(N) = \sum_{n=0}^{n'-1} \frac{(-1)^n}{n!} E(x, s+n) x^n \int_N^\infty e^{-uy} f_n(u,s)\,du$$
$$+ \sum_{n=n'}^{\infty} \varepsilon_n \varphi_n(y,\sigma) E(x, s+n) x^n.$$

Řada

$$\sum_{n=n'}^{\infty} \varepsilon_n \varphi_n(y,\sigma) E(x, \sigma+n) x^n$$

konverguje, ano $y > |x|$, a odtud snadno odvodíme též konvergenci řady

$$\sum_{n=n'}^{\infty} \varepsilon_n \varphi_n(y,\sigma) E(x, s+n) x^n,$$

a volímeli $n'$ dosti veliké, bude hodnota této řady menší než předepsaná veličina $\frac{\delta}{2}$. Pak lze voliti $N$ tak veliké, aby každý z výrazů

$$\frac{(-1)^n}{n!} E(x, s+n) x^n \int_N^\infty e^{-uy} f_n(u,s)\,du, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots n'-1)$$

byl menší než $\frac{\delta}{2n'}$ a tedy jich součet menší než $\frac{\delta}{2}$.

## IX.

Pro tato $N$ bude řada $(N)$ absolutně menší než $\delta$, t. j. bude $\lim (N) = 0$ pro $N = \infty$, jak bylo dokázati.

Rovnice (13) dokázána takto přesně pro kladná realná $y$, jež jsou větší než $|x|$. Obě strany rovnice té jsou však při $|y| > |x|$ jednoznačné funkce analytické proměnné $y$ a tedy vzorec (13) je platným pro všecka komplexní $y$ hovící podmínce $|y| > |x|$.

Pišme v něm $-y$ za $y$, a obdržíme

$$\text{(13*)} \qquad \frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(y,s)\, E(x, s+n)\, x^n,$$

kde položeno

$$\text{(15)} \qquad D_n(y,s) = (-1)^n \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^{\mu} \frac{\Gamma(s+\mu+1)}{(n-\mu)!\, y^{\mu+1}}.$$

Rozvoj (13*) je platný pro všecky hodnoty $x, y$ hovící konvergenční podmínce $|x| < |y|$.

Budiž nyní $f(z)$ funkce mající uvnitř kruhu $|z| = r$ povahu funkce celistvé; znamenejme $x$ libovolné místo uvnitř tohoto kruhu a volme $r'$ tak, aby

$$|x| < r' < r;$$

pak bude dle známé věty základní

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r'} \frac{f(z)}{z-x}\, dz,$$

kde integrace se děje v kladném směru podél kružnice $|z| = r'$; tu jest tedy $|z| > |x|$ a tedy bude dle (13*)

$$\frac{1}{z-x} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(z,s)\, E_n(x, s+n)\, x^n,$$

takže obdržíme, provedše integraci,

$$\text{(16)} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, E(x, s+n)\, x^n,$$

kde

$$\text{(16}^{a}\text{)} \qquad A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(0)} f(z)\, D_n(z,s)\, dz,$$

a integrál vzat kol počátku $z = 0$. Tím dokázána věta: *Každou analytickou funkci $f(x)$ mající uvnitř kruhu $|x| = r$ povahu funkce celistvé lze rozvinouti v řadu tvaru* (16), *při čemž koefficienty jsou dány vzorcem* ($16^a$), *a řada ta konverguje uvnitř uvedeného kruhu absolutně.*

Klademeli zvláště $f(x) = E(x, s+n)\,x^n$, obdržíme vzorec

$$(17)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(0)} E(z, s+n)\,z^n \,.\, D_m(z, s)\,dz = \begin{cases} 0 & \text{při} \quad m \gtrless n, \\ 1 & \text{při} \quad m = n. \end{cases}$$

Znamenej nyní $f(z)$ funkci jednoznačnou a pravidelnou uvnitř mezikruží $r_0 < |z| < r_1$, a buď $x$ libovolné místo uvnitř tohoto; pak bude lze určiti dvě kladné veličiny $r'_0$, $r'_1$ tak, aby

$$r_0 < r'_0 < |x| < r'_1 < r_1,$$

načež bude

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

kde integrace se děje podél obvodu mezikruží $r'_0 \leqq |z| \leqq r'_1$, takže

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r'_1} \frac{f(z)\,dz}{z-x} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r'_0} \frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$

V prvém integrálu je $|z| > x$ a tedy bude

$$\frac{1}{z-x} = \sum D_n(z, s)\,E(x, s+n)\,x^n,$$

v druhém však $|z| < |x|$, a tedy

$$\frac{1}{z-x} = -\sum D_n(x, s)\,E(z, s+n)\,z^n;$$

po dosazení těchto rozvojů do našich integrálů obdržíme

$$(18)\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\,E(x, s+n)\,x^n + \sum_{n=0}^{\infty} B_n\,D_n(x, s),$$

při čemž

$$(18^a)\qquad A_n = \frac{1}{2\pi i}\int f(z)\,D_n(z, s)\,dz, \quad B_n = \frac{1}{2\pi i}\int f(z)\,E(z, s+n)\,z^n\,dz,$$

Při tom měl by prvý integrál býti vzat podél kružnice $|z| = r'_1$, druhý podél $|z| = r'_0$, avšak hodnota jich se nemění, jsouli vzaty po téže cestě společné $|z| = r'$, kde $r'$ je libovolná veličina mezi $r_0$ a $r_1$.

Věta vyjádřená vzorcem (18) odpovídá rozvoji Laurentovu právě tak jako věta (16) rozvoji Taylorovu.

Kdybychom u vzorci (13*) psali $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{x}$ za $x, y$, obdrželi bychom

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n(\frac{1}{x}, s)}{x}\,.\,E(\tfrac{1}{y}, s+n)\,y^{-n-1}, \qquad |x| < |y|,$$

a odtud bychom odvodili následující věty:

IX.

1° *Každou funkci $f(x)$ pravidelnou uvnitř kruhu $|x| = r$ lze v tomto kruhu rozvinouti v řadu tvaru*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A'_n \frac{D_n(\frac{1}{x}, s)}{x}.$$

2° *Každou funkci $f(x)$, jednoznačnou a pravidelnou uvnitř mezikruží $r_0 < |x| < r_1$, lze rozvinouti v řadu*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A'_n \frac{D_n(\frac{1}{x}, s)}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} B'_n E(\tfrac{1}{x}, s+n) x^{-n-1}.$$

Volme nyní $s$ realné, aby součinitelé řad $E$, $D_n$ byli realní, položme $x = e^{i\varphi}$, kde $\varphi$ je realné, a znamenejme

$$\text{(19)} \qquad \begin{cases} E(e^{i\varphi}, s+n) e^{n i\varphi} = \Phi^0_n(\varphi) + i\,\Phi^1_n(\varphi), \\ D_n(e^{i\varphi}, s) e^{i\varphi} = \Psi^0_n(\varphi) - i\,\Psi^1_n(\varphi), \end{cases}$$

takže

$$\text{(19}^{a}\text{)} \qquad \begin{cases} \Phi^0_n(\varphi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{\cos(n+\nu)\varphi}{\nu!\,\Gamma(s+n+\nu+1)}, \\ \Phi^1_n(\varphi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{\sin(n+\nu)\varphi}{\nu!\,\Gamma(s+n+\nu+1)}, \\ \Psi^0_n(\varphi) = (-1)^n \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^{\mu} \dfrac{\Gamma(s+\mu+1)}{(n-\mu)!} \cos\mu\varphi, \\ \Psi^1_n(\varphi) = (-1)^n \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^{\mu} \dfrac{\Gamma(s+\mu+1)}{(n-\mu)!} \sin\mu\varphi. \end{cases}$$

Pak bude patrně

$$\int_0^{2\pi} \Phi^0_m(\varphi)\, \Psi^1_n(\varphi)\, d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \Phi^1_m(\varphi)\, \Psi^0_n(\varphi)\, d\varphi = 0,$$

poněvadž při celistvých $\alpha$, $\beta$

$$\int_0^{2\pi} \sin\alpha\varphi \,.\, \cos\beta\varphi\, d\varphi = 0.$$

Rovnici (17) lze pak psáti po substituci $x = e^{i\varphi}$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E(e^{i\varphi}, s+m) e^{mi\varphi} D_n(e^{i\varphi}, s) e^{i\varphi}\, d\varphi = \begin{cases} 0 \text{ při } m \gtrless n \\ 1 \text{ při } m = n. \end{cases}$$

Vložímeli sem hodnoty (19), obdržíme

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\Phi^0_m(\varphi)\,\Psi^0_n(\varphi)+\Phi^1_m(\varphi)\,\Psi^1_n]\,d\varphi=\begin{cases}0 \text{ při } m \gtrless n,\\ 1 \text{ při } m=n.\end{cases}$$

Poněvadž

$$\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi,$$

bude

$$\int_0^{2\pi}\Phi^0_m(\varphi)\,\Psi^0_n(\varphi)\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\Phi^1_m(\varphi)\,\Psi^1_n(\varphi)\,d\varphi,$$

a tedy náš výsledek zní

$$(20)\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi^0_m(\varphi)\,\Psi^0_n(\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi^1_m(\varphi)\,\Psi^1_n(\varphi)\,d\varphi=\begin{cases}0 \text{ při } m\gtrless n\\ 1 \text{ při } m=n\end{cases}$$

Zvláště jest

$$D_0(y,s)=\frac{\Gamma(s+1)}{n!\,y},$$

tedy

$$\Psi_0^0(\varphi)=\frac{\Gamma(s+1)}{n!},\quad \Psi^1_0(\varphi)=0.$$

Ze vzorce (20) tedy dlužno vyloučiti případ $m=n=0$; v tom případě má prvý výraz hodnotu 1, druhý jest 0.

Vzorce (20) lze užiti k rozvinování funkcí *realné* proměnné v řady tvaru

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,\Phi^0_n(x)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\,\Phi^1_n(x),$$

a v řady tvaru

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,\Psi^0_n(x)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\,\Psi^1_n(x).$$

Přesný důkaz *možnosti* takovýchto rozvojů do jisté míry libovolné funkce $f(x)$ vyžaduje však úvah mnohem hlubších a ponecháváme si na jinou příležitost o něm pojednati.

Vyložené zde výsledky jsou velmi podobny oněm, jež p. C. Neumann objevil o rozvinování funkcí analytických v řady tvaru

$$\sum_0^{\infty}a_n\,E\left(-\frac{x^2}{4},n\right)x^n.$$

## IX.

## III.

1. Na základní větě theorie funkcí vytvořujících dokázané v naší rozpravě č. 33 spočívá zvláštní methoda neurčitých součinitelů. Vyložme ji na příkladě následujícím. Buď dán integrál

$$(1) \qquad \Phi(x) = \int_1^\infty \frac{\sin \alpha x \, d\alpha}{(\alpha^2 - 1)^s},$$

kde $x$ musí býti realné — volme je kladné — a realná veličina $s$ musí býti pravý kladný zlomek. Jedná se o seznání analytické povahy této funkce.

Funkce $\Phi(x)$ je konečná a spojitá na všech místech kladných, a zbývá vyšetřiti její povahu pouze v okolí míst 0 a $\infty$.

Především máme po substituci $\frac{\alpha}{x}$ za $\alpha$

$$(1^a) \qquad \Phi(x) = \frac{1}{x} \int_x^\infty \frac{\sin \alpha \, d\alpha}{(\frac{\alpha^2}{x^2} - 1)^s},$$

a poněvadž

$$\int_{n\pi}^\infty \frac{\sin \alpha \, d\alpha}{(\frac{\alpha^2}{x^2} - 1)^s}$$

je kladný neb záporný, jak kladné celistvé číslo $n > \frac{x}{\pi}$ je sudé neb liché, bude patrně

$$(\alpha) \qquad \int_x^{k\pi} \frac{\sin \alpha \, d\alpha}{(\frac{\alpha^2}{x^2} - 1)^s} < x\Phi(x) < \int_x^{(k+1)\pi} \frac{\sin \alpha \, d\alpha}{(\frac{\alpha^2}{x^2} - 1)^s},$$

kde $k$ jest libovolné sudé číslo celistvé, ovšem větší než $\frac{x}{\pi}$.

Nejmenší číslo $k$ je jedno z čísel $\left[\frac{x}{\pi}\right] + 1$, $\left[\frac{x}{\pi}\right] + 2$, a tedy oba krajní integrály $(\alpha)$ jsou číselně menší než

$$\int_x^{x+3\pi} \frac{d\alpha}{(\frac{\alpha^2}{x^2} - 1)^s} = x \int_1^{1+\frac{3\pi}{x}} \frac{d\alpha}{(\alpha^2 - 1)^s},$$

takže bude též

$$|\Phi(x)| < \int_1^{1+\frac{3\pi}{x}} \frac{d\alpha}{(\alpha^2 - 1)^s},$$

a tedy

$$\lim_{x=\infty} \Phi(x) = 0;$$

funkce $\Phi(x)$ tedy je nekonečně malou pro nekonečně veliká $x$.

Pro malá $x$ však plyne z (1*)

$$0 < x\Phi(x) < \int_x^\pi \frac{\sin\alpha\, d\alpha}{\left(\frac{\alpha^2}{x^2}-1\right)^s},$$

a poněvadž $\sin\alpha < \alpha$. plyne odtud

$$0 < x\Phi(x) < \int_x^\pi \frac{\alpha\, d\alpha}{\left(\frac{\alpha^2}{x^2}-1\right)^s} = \frac{x^{2s}(\pi^2-x^2)^{1-s}}{2(1-s)},$$

čili

$$0 < \Phi(x) < x^{2s-1}\frac{(\pi^2-x^2)^{1-s}}{2-2s},$$

z čehož následuje, že funkce $\Phi(x)$ se v okolí bodu $x=0$ chová jako funkce $x^{2s-1}$, a tedy jest integrace schopna.

Z nalezených vlastností funkce $\Phi(x)$ plyne, že integrál

$$J = \int_0^\infty \Phi(x)\, e^{-cx}\, dx$$

existuje, značíli $c$ kladnou konstantu. My však dříve ustanovíme integrál

$$J_\varepsilon = \int_\varepsilon^\infty e^{-cx} dx \int_1^\infty \frac{\sin\alpha x\, d\alpha}{(\alpha^2-1)^s}, \qquad \varepsilon > 0,$$

o němž nejprve dokážeme, že se rovná limitě

$$(\beta) \qquad J_\varepsilon = \lim_{N=\infty} \int_\varepsilon^\infty e^{-cx}\, dx \int_1^N \frac{\sin\alpha x\, d\alpha}{(\alpha^2-1)^s},$$

čili, což totéž jest, že platí

$$(\beta') \qquad \lim_{N=\infty} \int_\varepsilon^\infty e^{-cx}\, dx \int_N^\infty \frac{\sin\alpha x\, dx}{(\alpha^2-1)^s} = 0.$$

Abychom provedli důkaz rovnice ($\beta'$), proveďme částečnou integraci

$$\int_N^\infty \frac{\sin\alpha x\, d\alpha}{(\alpha^2-1)^s} = \frac{1}{x}\left[\frac{\cos Nx}{(N^2-1)^s} - 2s\int_N^\infty \frac{\alpha\cos\alpha x\, d\alpha}{(\alpha^2-1)^{s+1}}\right],$$

a tato veličina je číselně menší než

$$\frac{1}{x}\left[\frac{1}{(N^2-1)^s} + 2s\int_N^\infty \frac{\alpha\, d\alpha}{(\alpha^2-1)^{s+1}}\right],$$

a tedy se integrál

$$\int_N^\infty \frac{\sin \alpha x \, d\alpha}{(\alpha^2 - 1)^s}$$

s rostoucím $N$ blíží nulle, a sice stejnoměrně vůči $x$, pokud $x \geqq \varepsilon$. Z toho plyne správnosť vzorce $(\beta')$, a tedy též vzorce $(\beta)$. Poněvadž dvojnásobný integrál $(\beta)$ jest absolutně konvergentním, smíme obrátiti pořádek integrační, čímž vznikne

$$J_\varepsilon = \lim_{N=\infty} \int_1^N \frac{d\alpha}{(\alpha^2 - 1)^s} \int_\varepsilon^\infty e^{-cx} \sin \alpha x \, dx = \int_1^\infty \frac{d\alpha}{(\alpha^2 - 1)^s} \int_\varepsilon^\infty e^{-cx} \sin \alpha x \, dx \, .$$

Avšak

$$\int_\varepsilon^\infty e^{-cx} \sin \alpha x \, dx = e^{-c\varepsilon} \frac{\alpha \cos \alpha\varepsilon + c \sin \alpha\varepsilon}{c^2 + \alpha^2} \, ,$$

a tedy máme

$$e^{c\varepsilon} J_\varepsilon = \int_1^\infty \frac{\cos \alpha\varepsilon \, . \, \alpha \, d\alpha}{(\alpha^2 - 1)^s (c^2 + \alpha^2)} + c \int_1^\infty \frac{\sin \alpha\varepsilon \, . \, d\alpha}{(\alpha^2 - 1)^s (c^2 + \alpha^2)} \, .$$

Dokáže se nyní velmi snadno, že oba integrály v pravo jsou spojité funkce proměnné $\varepsilon$ i na místě $\varepsilon = 0$, z čehož plyne

$$\lim_{\varepsilon=0} J_\varepsilon = \int_1^\infty \frac{\alpha \, d\alpha}{(\alpha^2 - 1)^s (c^2 + \alpha^2)} \, ;$$

transformujemeli pravou stranu substitucí $\alpha^2 - 1 = \beta (c^2 + 1)$, a uvážímeli, že $\lim\limits_{\varepsilon=0} J_\varepsilon = J$, máme

$$J = \frac{1}{2 (c^2 + 1)^s} \int_0^\infty \frac{\beta^{-s} \, d\beta}{1 + \beta} = \frac{\pi}{2 (c^2 + 1)^s . \sin s\pi} \, ,$$

t. j.

$$\int_0^\infty e^{-cx} \Phi(x) \, dx = \frac{\pi}{2 \sin s\pi} (c^2 + 1)^{-s} \, . \tag{2}$$

Tato vlastnosť funkci $\Phi(x)$ zúplna charakterisuje; neboť dle základní naší věty theorie funkcí vytvořujících nemůže žádná jiná funkce $\Phi(x)$ míti tuto vlastnosť.

Pokusme se ustanoviti konstanty $A$, $a$ v počtu konečném neb nekonečném, tak aby

$$\Phi(x) = \sum A x^a \, .$$

Tu bude

$$(\gamma)\qquad \int_0^\infty e^{-cx}\,\Phi(x)\,dx = \sum A\,\frac{\Gamma(a+1)}{c^{a+1}}\,;$$

dle (2) má však levá strana hodnotu

$$\frac{\pi}{2\sin s\pi}\,(c^2+1)^{-s} = \sum_{n=0}^\infty \frac{\pi}{2\sin s\pi}\binom{-s}{n}\frac{1}{c^{2s+2n}}\,,$$

a tedy musí býti obecný člen hledané řady dán rovnicemi

$$a+1 = 2s+2n\,,\qquad \Gamma(a+1)\,A = \frac{\pi}{2\sin s\pi}\binom{-s}{n}\,,$$

takže obdržíme

$$(3)\qquad \Phi(x) = \frac{\pi}{2\sin s\pi}\sum_{n=0}^\infty \binom{-s}{n}\frac{x^{2s+2n-1}}{\Gamma(2s+2n)}$$

jakožto hledaný rozvoj funkce $\Phi(x)$.

Co se tkne přesnosti dedukce, nelze zamlčeti, že rovnice ($\gamma$) není nutným následkem předpokládané rozvinutelnosti, a proto dlužno důkaz doplniti úvahou následující: Znamenejme nejprve $\varphi(x)$ hodnotu řady (3); to jest položme

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{2\sin s\pi}\sum_{n=0}^\infty \binom{-s}{n}\frac{x^{2s+2n-1}}{\Gamma(2s+2n)}$$

čili

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{2\sin s\pi\,.\,\Gamma(2s)}\sum_{n=0}^\infty (-1)^n\,\frac{(s\,,n)\,x^{2s+2n-1}}{n!\,(2s\,,2n)}\,,$$

což po krátké redukci obdrží tvar

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{2\,\Gamma(2s)\,.\sin s\pi}\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n\,x^{2s+2n-1}}{4^n\,.\,n!\,(s+\frac{1}{2}\,,n)}$$

$$= \frac{\pi\,\Gamma(s+\frac{1}{2})}{2\,\Gamma(2s)\,.\sin s\pi}\,E\left(-\frac{x^2}{4}\,,s-\frac{1}{2}\right).\,x^{2s-1}\,.$$

Tato funkce však jest pro $s > \frac{1}{2}$ konečnou a spojitou v mezeře $(0\ldots\infty)$, aspoň po násobení určitým činitelem $e^{-ax}$, a jak se snadno ukáže, bude

$$\int_0^\infty e^{-cx}\,\varphi(x)\,dx = \frac{\pi}{2\sin s\pi}\,(c^2+1)^{-s}\,,$$

a tudíž musí dle (2) býti $\Phi(x) = \varphi(x)$. Tím tedy dokázán vzorec (3), čili

$$(3^*)\qquad \int_1^\infty \frac{\sin\alpha x\,d\alpha}{(\alpha^2-1)^s} = \sqrt{\pi}\,.\,2^{-2s}\,\Gamma(1-s)\,E\left(-\frac{x^2}{4}\,,s-\frac{1}{2}\right)x^{2s-1}\,,$$

ovšem za supposice $s > \frac{1}{2}$. Abychom jej dokázali též pro $s < \frac{1}{2}$, musili bychom ukázati, že rozdíl obou stran je konečný pro $x = 0$. To by však byl úkol obtížný, a proto zobecníme poněkud svůj theorém o funkcích vytvořujících. Dokážeme totiž větu:

*Jeli $\chi(x)$ funkce schopná integrace v* **každém** *konečném oboru, jehož dolní mez je nulla a horní mez kladná veličina, a platíli pro všecka $c$ převyšující jistou mez*

$$\int_0^\infty \chi(x)\, e^{-cx}\, dx = 0\,,$$

*bude nutně $\chi(x) = 0$*, předpokládaje, že existuje konstanta $c_0$, tak aby $\lim_{x=\infty} e^{-c_0 x}\chi(x) = 0$; tuto lze voliti tak, aby integrál $\int_0^\infty e^{-c_0 x}\chi(x)\, dx$ existoval.

*Důkaz.* Pišme $c + c_0$ za $c$, a znamenejme $e^{-c_0 x}\chi(x) = \chi_0(x)$; tím obdržíme funkci $\chi_0(x)$ v každém z uvedených intervallů integrace schopnou a mizející v nekonečnu. Kladme

$$\int_0^x \chi_0(x)\, dx = \psi(x)\,,$$

a pak obdržíme částečnou integrací

$$0 = \int_0^\infty \chi_0(x)\, e^{-cx}\, dx = c\int_0^\infty \psi(x)\, e^{-cx}\, dx\,;$$

avšak $\psi(x)$ je funkce konečná a spojitá v celém intervallu $(0\,..\,\infty)$ i na koncích jeho, a tedy z rovnice

$$\int_0^\infty \psi(x)\, e^{-cx}\, dx = 0\,,$$

platné pro všecka $c$ převyšující jistou mez, plyne dle dosud dokázané základní věty, že $\psi(x) = 0$; odtud plyne, že též $\chi(x) = e^{c_0 x}\dfrac{d\psi}{dx} = 0$, čímž věta obecnější dokázána.

2. Murphy nalezl větu, pomocí které lze v některých případech ustanoviti funkci vytvořující, příslušnou k dané funkci určující. Tuto větu možno poněkud zobecniti.

Nechť funkce vytvořující $f(x)$ příslušná k funkci určující $\varphi(a)$ má rozvoj

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r\, x^{s+r}\,,$$

a nechť existuje rovnice

$$\varphi(a) = \int_0^\infty e^{-ax} f(x)\, dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu \frac{\Gamma(s+\nu+1)}{a^{s+\nu+1}},$$

t. j. nechť funkce $a^s \varphi(a)$ připouští rozvoj dle záporných celistvých mocností proměnné $a$. Pak bude

$$A_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(a)\, a^{s+\nu}}{\Gamma(s+\nu+1)}\, da$$

a tedy

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int \varphi(a)\, G(ax, s)\, x^s a^s\, da\,,$$

kde položeno

$$G(z, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(s+n+1)},$$

a integrace se děje podél kruhu velikého poloměru.

Jinak vyjádřeno, vytvořující funkce $f(x)$ se rovná součiniteli při $\frac{1}{a}$ v rozvinutém součinu

$$a^s \varphi(a)\,.\, x^s\, G(ax, s)\,,$$

což se psává

$$f(x) = [\, a^s \varphi(a)\,.\, x^s\, G(ax, s)\,]_{a^{-1}}$$

Věta Marphyova vznikne odtud pro $s = 0$; pak ale $G(z, s) = e^z$, takže bude v tomto zvláštním případě

$$f(x) = [\,\varphi(a)\, e^{ax}\,]_{a^{-1}}$$

Připomeňme, že platí rovnice

$$G(z, s) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} P(z, 1, s+1) = \frac{e^z}{\Gamma(s)} \int_0^1 e^{-z\alpha} \alpha^{s-1}\, d\alpha$$

a že tedy bude v případě obecnějším

$$f(x) = \frac{x^s}{\Gamma(s)} \int_0^1 \alpha^{s-1}\, d\alpha\, [\, a^s \varphi(a)\, e^{(1-\alpha)ax}\,]_{a^{-1}}$$

# IV.

1. Jeli realná část veličiny $\sigma$ pravý kladný zlomek, bude integrál

$$(1) \qquad \Phi(u\,;s\,,\sigma)=\int\limits_0^\infty e^{-z+uz^\sigma}\,z^{s-1}\,dz$$

při Real. $s>0$ celistvou funkcí proměnné $u$, a její Maclaurinovský rozvoj se obdrží velmi jednoduše pomocí vzorce

$$\frac{d}{du}\,\Phi(u\,;s\,,\sigma)=\Phi(u\,;s+\sigma\,,\sigma)\,,$$

z něhož plyne iterací

$$\frac{d^n}{du^n}\,\Phi(u\,;s\,,\sigma)=\Phi(u\,;s+n\sigma\,,\sigma)\,.$$

Jelikož

$$\Phi(0\,;s\,,\sigma)=\int\limits_0^\infty e^{-z}\,z^{s-1}\,dz=\Gamma(s)\,,$$

máme

$$\left[\frac{d^n}{du^n}\,\Phi(u\,;s\,,\sigma)\right]_{u=0}=\Gamma(s+n\sigma)$$

a tudíž

$$(2) \qquad \Phi(u\,;s\,,\sigma)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(s+n\sigma)}{n!}\,u^n\,,$$

kterážto řada skutečně konverguje pro všecka $u$, jeli Real. $\sigma<1$. K důkazu slouží vzorec

$$\log\Gamma(a)=(a-\tfrac{1}{2})\log a-a+\tfrac{1}{2}\log 2\pi+\varphi(a)\,,$$

kde $\varphi(a)$ je nekonečně malé pro nekonečně veliká $a$; vzorec ten obyčejně se dokazuje pro $a$, jichž realná část je kladná a velmi veliká; pan Stieltjes však ve své práci plné elegance*) dokázal správnosť jeho ve všech případech.

Pomocí tohoto vzorce vypočteme

$$\log\frac{\Gamma(s+n\sigma)}{n!}=\log\Gamma(s+n\sigma)-\log\Gamma(n+1)$$

$$=(s+n\sigma-\tfrac{1}{2})(\log n+\log\sigma)-(n+\tfrac{1}{2})\log n+n-n\sigma+\log A\,,$$

kde $\log A$ je konečné pro $n=\infty$. Tedy

$$\frac{\Gamma(s+n^\sigma)}{n!}=A'\,n^{n(\sigma-1)+s-1}\,e^{n(1-\sigma+\sigma\log\sigma)}\,,$$

při čemž $A'$ značí veličinu, jež pro $n=\infty$ je konečnou a od nully různou.

---

*) Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4. série, t. V, 1889.

Odtud plyne, že řada (2) konverguje,

$1^0$ jeli Real. $\sigma < 1$ pro všecka $u$,

$2^0$ jeli Real. $\sigma = 1$ pro $|u| < |e^{-\sigma \log \sigma}|$.

Při Real. $\sigma > 1$ řada diverguje.

2. Předpokládejme nyní, že konvergenční podmínka Real. $\sigma < 1$ je splněna, a ustanovme pomocí řady (2) integrál

$$\int\limits_{(-\infty, 0, -\infty)} e^z z^{-s} \Phi\left(\frac{u}{z^\sigma}; s, \sigma\right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s+n\sigma)}{n!} u^n \int\limits_{(-\infty, 0, -\infty)} e^z z^{-s-n\sigma} dz,$$

v němž integrační cesta obíhá *v kladném směru* zápornou polovici osy realné. Veličiny $z^\sigma, z^s$ jsou dány jednoznačně hodnotami $e^{\sigma \log z}, e^{s \log z}$, při čemž logarithmus na severním břehu osy má pomyslnou část rovnu $\pi i$, a v rovině opatřené řezem $(0 \ldots . -\infty)$ je spojitý, takže na jižním břehu jeho pomyslná část má hodnotu $-\pi i$.

Užijemeli pak zde známého vzorce

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(-\infty, 0, -\infty)} e^z z^{-s} dz,$$

obdržíme

$$\int\limits_{(-\infty, 0, -\infty)} e^z z^{-s-n\sigma} dz = \frac{2\pi i}{\Gamma(s+n\sigma)},$$

a tudíž

$$\int\limits_{(-\infty, 0, -\infty)} e^z z^{-s} \Phi\left(\frac{u}{z^\sigma}; s, \sigma\right) dz = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!},$$

čili

$$(3) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(-\infty, 0, -\infty)} e^z z^{-s} \Phi\left(\frac{u}{z^\sigma}; s, \sigma\right) dz = e^u,$$

Volme cestu integrační tak, aby skládala se z úseku $(-\infty \ldots -\omega)$ na jižním břehu osy realné, pak z kruhu $|z| = \omega$ a z úseku $(-\omega \ldots . -\infty)$ na břehu severním. Tím vznikne

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{ e^{s\pi i} \int_\omega^\infty e^{-z} z^{-s} \Phi\left(\frac{u}{z^\sigma} e^{\sigma\pi i}; s, \sigma\right) dz \right.$$

$$- e^{-s\pi i} \int_\omega^\infty e^{-z} z^{-s} \Phi\left(\frac{u}{z^\sigma} e^{-\sigma\pi i}; s, \sigma\right) dz$$

$$\left. + \int\limits_{|z| = \omega} e^z z^{-s} \Phi\left(\frac{u}{z^\sigma}; s, \sigma\right) dz \right\} = e^u.$$

Předpokládámeli $0 < \text{Real.}\, \sigma < 1$, můžeme zde výrazy $\Phi$ nahraditi integrály pomocí vzorce (1), čímž obdržíme

$$(3^*)\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_{\omega}^{\infty} e^{-z} z^{-s}\, dz \int_0^{\infty} e^{-x+u\left(\frac{x}{z}\right)^{\sigma}\cos\sigma\pi} \sin\left(s\pi + u\left(\tfrac{x}{z}\right)^{\sigma}\sin\sigma\pi\right) x^{s-1}\, dx\\ &+\frac{\omega^{1-s}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\omega(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)+(1-s)i\vartheta}\, d\vartheta \int_0^{\infty} e^{-x+u\left(\frac{x}{\omega}\right)^{\sigma}(\cos\sigma\vartheta - i\sin\sigma\vartheta)} x^{s-1}\, dx = e^{u},\end{aligned}\right.$$

při čemž jsme zároveň v posledním integrálu psali $z = \omega e^{i\vartheta}$, kterážto veličina probíhá kruh $|z| = \omega$, měnili se $\vartheta$ od $-\pi$ do $\pi$.

Poslední integrál obdrží po substituci $\omega x$ za $x$ tvar

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\omega(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)+(1-s)i\vartheta}\, d\vartheta \int_0^{\infty} e^{-\omega x + u x^{\sigma}(\cos\sigma\vartheta - i\sin\sigma\vartheta)} x^{s-1}\, dx$$

a zmizí pro $\omega = 0$, jeli $u(\cos\sigma\vartheta - i\sin\sigma\vartheta)$ ve své realné části záporným pro všecka $\vartheta$ mezery $(-\pi \ldots\ldots \pi)$; to vyžaduje, aby pomyslná část veličiny $\log u - i\sigma\vartheta$ byla v mezeře $\vartheta = (-\pi \ldots \pi)$ stále absolutně větší než $\frac{\pi}{2}$, tedy mezi $\frac{\pi}{2}$ a $\pi$ aneb mezi $-\frac{\pi}{2}$ a $-\pi$. K tomu stačí, jsouli $\sigma$, $u$ realné a při tom $0 < \sigma < \frac{1}{2}$, a $u$ záporné.

Předpokládejme tedy že $\sigma$ je pravý kladný zlomek menší než $\frac{1}{2}$, a pišme $-u$ za $u$; i obdržíme tak vzorec

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-z} z^{-s}\, dz \int_0^{\infty} e^{-x-\left(\frac{x}{z}\right)^{\sigma} u\cos\sigma\pi} \sin\left(s\pi - \left(\tfrac{x}{z}\right)^{\sigma} u \sin\sigma\pi\right) x^{s-1}\, dx = e^{-u},$$

kde nyní $u$ jest realné a kladné.

Zaměňme pořádek integrační a kladme po té $z = xt$; i bude

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-(1+t)x - t^{-\sigma} u\cos\sigma\pi}\, t^{-s} \sin(s\pi - t^{-\sigma} u\sin\sigma\pi)\, dt = \pi e^{-u};$$

obrátímeli opět pořádek integrační a provedemeli integraci dle $x$, obdržíme

$$(4)\qquad \int_0^{\infty} e^{-t^{-\sigma} u\cos\sigma\pi}\, t^{-s} \sin(s\pi - t^{-\sigma} u\sin\sigma\pi)\, \frac{dt}{1+t} = \pi e^{-u}$$

## IX.

Vzorec ten přetvořme substitucí $t = x^{-\frac{1}{\sigma}}$, i obdržíme píšíce $s\sigma$ za $s$,

$$(4^a)\qquad \int_0^\infty e^{-ux\cos\sigma\pi} \sin(s\sigma\pi - ux\sin\sigma\pi) \frac{x^{s-1}\,dx}{1 + x^{\frac{1}{\sigma}}} = \pi\sigma e^{-u},$$

kde ovšem $0 < \sigma < \frac{1}{2}$, $u > 0$.

Pěknější tvar obdrží tento výsledek substitucí $x$ za $xu\cos\sigma\pi$, totiž

$$(4^*)\qquad \int_0^\infty e^{-x} \sin(s\sigma\pi - x\tan\sigma\pi) \frac{x^{s-1}\,dx}{x^{\frac{1}{\sigma}} + (u\cos\sigma\pi)^{\frac{1}{\sigma}}} = \pi\sigma (u\cos\sigma\pi)^{s-\frac{1}{\sigma}} e^{-u}.$$

Vytkněme některé zvláštní případy: V krajním případě $\sigma = \frac{1}{2}$ obdržíme ze (4ª) vzorec

$$(5)\qquad \int_0^\infty \sin\left(\frac{s\pi}{2} - ux\right) \frac{x^{s-1}\,dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-u},$$

dále máme ze (4*) pro $\sigma = \frac{1}{4}$ vzorec

$$(6)\qquad \int_0^\infty e^{-x} \sin\left(\frac{s\pi}{4} - x\right) \frac{x^{s-1}\,dx}{4x^4 + u^4} = \frac{\pi}{4} 2^{-\frac{s}{2}} u^{s-4} e^{-u}.$$

Že vzorec (5) není platný též pro záporná $u$, dokáže se takto.

Klademeli $s = 1$, máme

$$\int_0^\infty \frac{\cos ux\,dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-u};$$

kdyby vzorec byl správným též pro záporné $u$, uplynula by odtud nemožná rovnice $e^{-u} = e^{u}$.

Není nikterak potřebí poznamenávati, že integrály (5) a (6) obdrží se přímo pomocí věty Cauchyovy o integraci v oboru komplexním, o čemž zde nikterak nehodláme se šířiti.

Integrál

$$\int_0^\infty \sin\left(\frac{s\pi}{2} + ux\right) \frac{x^{s-1}\,dx}{1 + x^2} = \Phi(u)$$

nelze vyjádřiti pomocí elementarných funkcí. Vypočtěme především

$$\int_0^\infty \Phi(u)\, e^{-cu}\, du = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{1 + x^2} \int_0^\infty e^{-cu} \sin\left(\frac{s\pi}{2} + ux\right) du\,;$$

jelikož

$$\int_0^\infty e^{-cu}\sin\left(\frac{s\pi}{2}+ux\right)du=\frac{x\cos\frac{s\pi}{2}+c\sin\frac{s\pi}{2}}{c^2+x^2},$$

máme

$$\int_0^\infty \Phi(u)\,e^{-cu}\,du=\cos\frac{s\pi}{2}\int_0^\infty\frac{x^s\,dx}{(1+x^2)(c^2+x^2)}+c\sin\frac{s\pi}{2}\int_0^\infty\frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x^2)(c^2+x^2)}.$$

Při $c^2>1$ máme

$$\frac{1}{(1+x^2)(c^2+x^2)}=\frac{1}{c^2-1}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{c^2+x^2}\right)$$

a tedy

$$\int_0^\infty \Phi(u)\,e^{-cu}\,du=\frac{\cos\frac{s\pi}{2}}{c^2-1}\left\{\int_0^\infty\frac{x^s\,dx}{1+x^2}-\int_0^\infty\frac{x^s\,dx}{c^2+x^2}\right\}$$

$$+\frac{c\sin\frac{s\pi}{2}}{c^2-1}\left\{\int_0^\infty\frac{x^{s-1}\,dx}{1+x^2}-\int_0^\infty\frac{x^{s-1}\,dx}{c^2+x^2}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}\,\frac{1-c^{s-1}}{c^2-1}-c\,\frac{\pi}{2}\,\frac{1-c^{s-2}}{c^2-1},$$

tedy posléze

$$\int_0^\infty e^{-cu}\,\Phi(u)\,du=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{c-1}-\pi\,\frac{c^{s-1}}{c^2-1};$$

bude tedy $\Phi(u)=\frac{\pi}{2}\,e^u-\pi$ vytvoř. funkce $\frac{c^{s-1}}{c^2-1}$, tedy dle zobecněného pravidla Murphyova

$$\Phi(u)=\frac{\pi}{2}\,e^u-\pi\left[\frac{1}{c^2-1}\,G(cu,1-s)\right]_{c=1}.\,u^{1-s},$$

kde

$$G(cu,1-s)=\sum_{n=0}^\infty\frac{c^n u^n}{\Gamma(2-s+n)},$$

tedy

$$\left[\frac{1}{c^2-1}\,G(cu,1-s)\right]_{c=1}=\sum_{n=1}^\infty\frac{u^{2n-1}}{\Gamma(2n+1-s)},$$

takže

$$\Phi(u)=\frac{\pi}{2}\,e^u-\pi\sum_{n=1}^\infty\frac{u^{2n-s}}{\Gamma(2n+1-s)},$$

IX.

čímž odvozena rovnice

$$(7)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \sin\left(\frac{s\pi}{2}+ux\right)\frac{x^{s-1}\,dx}{1+x^2} \\ \displaystyle\qquad = \frac{\pi}{2}e^u - \pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^{2n-s}}{\Gamma(2n+1-s)}\,, \qquad u>0\,, \end{cases}$$

a poněvadž řadu

$$(8)\qquad x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^{2n-s}}{\Gamma(2n+1-s)}$$

nelze vyjádřiti obecně v zakončeném tvaru, platí totéž o integrálu (7). Pro $s=0$, $s=1$, $s=2$ shodují se výsledky (5) a (7), poněvadž tu lze řadu vyčísliti. Obdržíme na př. ze vzorce (5) i (7) vztah

$$\int_0^\infty \frac{\sin ux}{x}\,\frac{dx}{1+x^2} = -\,\frac{\pi}{2}\,e^{-u}\,, \qquad u>0\,.$$

Funkce (8) hoví differencialné rovnici

$$\frac{d^2x}{du^2} - x = \frac{u^{-s}}{\Gamma(1-s)}\,,$$

kterou lze velmi jednoduše integrovati pomocí methody variace konstant.

Jakožto důsledek vztahu ($4^a$) uveďme ještě následující. Násobímeli po obou stranách $e^{-wu}\,du$ a integrujeme v mezích 0 a $\infty$, obdržíme, berouce zřetel k rovnici

$$\int_0^\infty e^{-(w+x\cos\sigma\pi)u}\sin(s\sigma\pi - ux\sin\sigma\pi)\,du = \frac{w\sin s\sigma\pi + x\sin(s-1)\sigma\pi}{w^2+2wx\cos\sigma\pi + x^2}$$

výsledek

$$\int_0^\infty \frac{w\sin s\sigma\pi + x\sin(s-1)\sigma\pi}{w^2+2wx\cos\sigma\pi+x^2}\,\frac{x^{s-1}\,dx}{1+x^{\frac{1}{\sigma}}} = \frac{\pi\sigma}{1+w}\,;$$

píšemeli tedy na okamžik

$$(9)\qquad L(w,s,\sigma) = \int_0^\infty \frac{x^s\,dx}{(w^2+2wx\cos\sigma\pi+x^2)\left(1+x^{\frac{1}{\sigma}}\right)}\,,$$

máme vztah

$$(10)\quad w\sin s\sigma\pi\,.\,\overline{L}(w,s-1,\sigma) + \sin(s-1)\sigma\pi\,.\,\overline{L}(w,s,\sigma) = \frac{\pi\sigma}{1+w}\,,$$

k němuž se vrátíme v jedné z příštích studií, v níž ukážeme, jak souvisí funkce $L$ s úkony elliptickými.

---