Harry Poppe

Ein Kompaktheitskriterium für Abbildungsräume mit einer verallgemeinerten uniformen Struktur

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the second Prague topological symposium, 1966. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Praha, 1967. pp. 284--289.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700839

EIN KOMPAKTHEITSKRITERIUM FÜR ABBILDUNGSRÄUME MIT EINER VERALLGEMEINERTEN UNIFORMEN STRUKTUR

H. POPPE
Greifswald

1. Folgende beiden Ascoli-Arzelà-Sätze sind bekannt:

A) eine direkte (uniforme) Verallgemeinerung des klassischen Satzes:

(1) *X sei ein kompakter Hausdorff-Raum, $(Y, \mathfrak{B})$ sei ein separierter uniformer Raum; es sei $H \subset C(X, Y)$ $(= \{f \in Y^X : f$ stetig$\})$. Dann ist H genau dann bezüglich der uniformen Topologie τ_u kompakt, wenn H die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(a) $\overline{H(x)}$ $(= \overline{\{f(x) : f \in H\}})$ *ist für jedes $x \in X$ kompakt (bezüglich der $\mathfrak{B}$ unterliegenden Topologie)*
(b) *H ist bezüglich τ_u abgeschlossen*
(c) *H ist gleichgradig stetig.*

B) ein topologischer Satz von Kelley und A. P. Morse [3]:

(2) *X sei ein kompakter Hausdorff-Raum, Y sei ein Hausdorffscher regulärer Raum; es sei $H \subset C(X, Y)$. Dann ist H genau dann bezüglich der compact-open-Topologie τ_c kompakt, wenn H die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(a) *$\overline{H(x)}$ ist für jedes $x \in X$ kompakt*
(b) *H is bezüglich τ_c abgeschlossen*
(c) *H ist gleichstetig (evenly continuous).*

Sind X und Y topologische Räume, so heisst $H \subset Y^X$ gleichstetig, wenn für jedes $x \in X$, jedes $y \in Y$ und jede offene Menge V mit $y \in V$ Umgebungen U von x und W von y existieren mit der Eigenschaft: aus $f \in H$ und $f(x) \in W$ folgt $f(U) \subset V$. Wie Kelley und A. P. Morse gezeigt haben ist die Gleichstetigkeit eine Verallgemeinerung der gleichgradigen Stetigkeit.

(3) *Ist X ein topologischer Raum, $(Y, \mathfrak{B})$ ein uniformer Raum und ist $H \subset Y^X$ gleichgradig stetig, so ist H gleichstetig.*

Umgekehrt zeigten sie:

(4) *Ist H gleichstetig in $x \in X$ und ist $\overline{H(x)}$ kompakt, so ist H in x gleichgradig stetig.*

Damit folgt der Satz (1) aus dem Satz (2), aber man kann nicht umgekehrt (2) aus (1) ableiten. Man kann sich jedoch fragen, ob (2) vielleicht doch ein "uniformer" Satz ist (bzw. sich aus einem solchen ableiten lässt), nämlich ein uniformer Satz bezüglich einer verallgemeinerten ("abgeschwächten") uniformen Struktur für den Bildraum. Dies wird durch den Umstand nahegelegt, dass Morita [4] verallgemeinerte uniforme Strukturen definiert hat, so dass jeder reguläre Raum eine mit der Topologie verträgliche ("reguläre") verallgemeinerte uniforme Struktur besitzt[1]).

Wir zeigen im folgenden, dass sich dieser Gedanke wirklich durchführen lässt, d. h. wir geben einen uniformen Ascoli-Arzelà-Satz an, der beide Sätze (1) und (2) als Spezialfälle enthält. (Dabei wird der uniforme Charakter der Gleichstetigkeit noch deutlicher gemacht.)

2. Bei seinen Verallgemeinerungen geht Morita von der Tukeyschen Definition einer uniformen Struktur[2]) aus. Rinow [7] nimmt noch einen etwas allgemeineren Standpunkt ein.

X sei eine Menge und $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma \ldots\}$ sei ein System von Überdeckungen von X. Die Topologie τ_Σ für X, die durch die Subbasis der offenen Mengen $\bigcup\{\{A : A \in \alpha\} : : \alpha \in \Sigma\}$ definiert wird, nennen wir die Σ unterliegende Topologie. Σ heisst gefiltert, wenn je zwei Elemente aus Σ eine gemeinsame Verfeinerung haben. Σ heisst a) schwach regulär [4], b) regulär [4], c) Hausdorffsch oder separiert, wenn Σ die entsprechende der folgenden Bedingungen besitzt:

a) für jedes $x \in X$ und je endlich viele $A_i \in \alpha_i \in \Sigma$, $i = 1, \ldots, n$ mit $x \in \bigcap_i A_i$ existiert ein $\beta \in \Sigma$ mit $\mathrm{St}(x, \beta) \subset \bigcap_i A_i$ [3]).

b) es gilt die Bedingung a) und zu jedem $\alpha \in \Sigma$ existiert ein $\beta \in \Sigma$ $(\beta = \beta_\alpha)$ mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $B \in \beta$ ein $\gamma_B \in \Sigma$ und ein $A_B \in \alpha$ mit $\mathrm{St}(B, \gamma_B) \subset \subset A_B$ gibt[4]).

c) zu $x, y \in X$, $x \neq y$ existieren $\alpha, \beta \in \Sigma$ mit $\mathrm{St}(x, \alpha) \cap \mathrm{St}(y, \beta) = \emptyset$.

Σ (bzw. (X, Σ)) bezeichnen wir im folgenden als uniforme Struktur (bzw. als uniformen Raum), wenn Σ gefiltert ist. (X, Σ) heisst entsprechend ein schwach regulärer, regulärer oder Hausdorffscher uniformer Raum, wenn Σ eine uniforme Struktur mit a), b) oder c) ist.

Eine uniforme Struktur Σ nach dem üblichen Sprachgebrauch (also eine Tukey-Struktur) nennen wir vollständig regulär. Ist X ein schwach regulärer Raum (für jedes $x \in X$ und jedes offene Menge G mit $x \in G$ gilt $\overline{\{x\}} \subset G$), ein regulärer Raum (jedes $x \in X$ besitzt eine Umgebungsbasis aus abgeschlossenen Umgebungen) oder ein Hausdorffscher Raum, so ist das System Σ aller offenen Überdeckungen von X eine schwach reguläre, reguläre oder Hausdorffsche uniforme Struktur.

Wir wollen nun uniforme Strukturen (in unserem Sinne) in Mengen von Abbil-

[1]) Morita verwendet diese Strukturen in der Erweiterungstheorie topologischer Räume.

[2]) Tukey definiert bekanntlich eine uniforme Struktur für eine Menge X durch ein System Σ von Überdeckungen von X, das bestimmte Axiome erfüllt (man vgl. hierzu [2]).

[3]) Für $P \subset X$ und $\alpha \in \Sigma$ heisst $\mathrm{St}(P, \alpha) = \bigcup\{A \in \alpha : A \cap P \neq \emptyset\}$ der Stern von A bezüglich α, für $\mathrm{St}(\{x\}, \alpha)$ schreiben wir $\mathrm{St}(x, \alpha)$.

[4]) Man erkennt, dass diese Bedingung eine unmittelbare Abschwächung der „Dreiecksungleichung" (Sternverfeinerungsbedingung) ist.

dungen erklären: X und Y seien Mengen und Σ sei ein System von Überdeckungen von Y. Σ kann man dann auf die übliche Weise[5]) ein System $\langle X, \Sigma\rangle$ von Überdeckungen von Y^X zuordnen: für $\alpha \in \Sigma$ und $f \in Y^X$ setzen wir $M_f^\alpha = \{g \in Y^X$: zu jedem $x \in X$ existiert ein $A_x \in \alpha$ mit $(f(x), g(x)) \in A_x \times A_x\}$.[6]) Ferner sei $\langle X, \alpha\rangle = \{M_f^\alpha : f \in Y^X\}$ und $\langle X, \Sigma\rangle = \{\langle X, \alpha\rangle : \alpha \in \Sigma\}$. $\langle X, \alpha\rangle$ ist für jedes α eine Überdeckung von Y^X und $\langle X, \Sigma\rangle$ das zu Σ gehörige System von Überdeckungen. Man bemerkt sofort, dass mit Σ auch $\langle X, \Sigma\rangle$ eine uniforme Struktur ist. Wir führen im folgenden nur das an, was wir zum Beweis des Kompaktheitskriteriums und zur Ableitung der Sätze (1) und (2) aus diesem Kriterium benötigen.[7]) Zunächst vergleichen wir die $\langle X, \Sigma\rangle$ unterliegende Topologie $\tau_{\langle X, \Sigma\rangle}$ mit der simplen Topologie (Produkttopologie) τ_s und der compact-open-Topologie τ_c für Y^X (wobei τ_s und τ_c bezüglich der Topologie τ_Σ für Y gebildet werden).

(5) *X sei eine Menge, (Y, Σ) sei ein schwach regulärer uniformer Raum. Dann gilt für Y^X $\tau_s \subset \tau_{\langle X, \Sigma\rangle}$.*

Beweis. Wir betrachten ein Subbasiselement $(x, G) = \{f \in Y^X : f(x) \in G\}$, $x \in X$, $G \in \tau_\Sigma$ von τ_s und es sei $f \in (x, G)$, also $f(x) \in G$; da Σ schwach regulär ist, existiert ein $\alpha \in \Sigma$ mit $\mathrm{St}\,(f(x), \alpha) \subset G$; dann gilt aber $\tau_{\langle X, \Sigma\rangle} \ni M_f^\alpha \subset (x, G)$: ist $g \in M_f^\alpha$, so gibt es ein $V \in \alpha$ mit $(f(x), g(x)) \in V \times V$; es ist also $g(x) \in V \subset \mathrm{St}\,(f(x), \alpha) \subset G$.

(6) *X sei ein beliebiger, Y ein Hausdorffscher topologischer Raum; Σ sei eine verträgliche[8]) uniforme Struktur für Y, die aus offenen Überdeckungen von Y besteht, wo bei Σ alle endlichen offenen Überdeckungen enthält. Dann gilt für $C(X, Y)$ $\tau_c \subset \tau_{\langle X, \Sigma\rangle}$.*

Beweis. Sei $f \in (K, W) = \{f \in C(X, Y) : f(K) \subset W\} \in \tau_c$, $K \subset X$ kompakt, $W \subset Y$ offen; es ist dann $f(K) \subset W$ und $f(K)$ ist kompakt und damit abgeschlossen; folglich ist $\alpha_0 = \{W, Y - f(K)\}$ eine offene Überdeckung von Y; es ist $\alpha_0 \in \Sigma$ und wir zeigen, dass $M_f^{\alpha_0} \cap C(X, Y) \subset (K, W)$ gilt: ist $g \in M_f^{\alpha_0} \cap C(X, Y)$ und $x \in K$, so gibt es ein $V \in \alpha_0$ mit $(f(x), g(x)) \in V \times V$; wegen $f(x) \in f(K)$ ist $V \neq Y - f(K)$ und folglich ist $g(x) \in W$, d. h. es gilt $g(K) \subset W$.

(7) *X sei kompakt und Hausdorffsch und (Y, Σ) sei ein beliebiger uniformer Raum. Dann gilt für $C(X, Y)$ $\tau_{\langle X, \Sigma\rangle} \subset \tau_c$.*

Beweis. Sei $\alpha \in \Sigma$, $f \in C(X, Y)$; wir zeigen, dass $M_f^\alpha \cap C(X, Y) \in \tau_c$ gilt: es sei $g \in M_f^\alpha \cap C(X, Y)$; dann existiert zu $x \in X$ ein $A_x \in \alpha$ mit $(f(x), g(x)) \in A_x \times A_x$; da X regulär ist und f, g stetig sind, gibt es eine offene Umgebung U_x von x mit $f(\bar{U}_x) \subset$

[5]) Man vergleiche [2], S. 36 und S. 12 und [1].

[6]) $V = \bigcup\{A \times A : A \in \alpha\}$ ist eine „entourage" für Y (im Sinne von Bourbaki) und $\langle X, V\rangle = \{(f, g) \in Y^X \times Y^X : (f(x), g(x)) \in V$ für jedes $x \in X\}$ ist eine entourage für Y^X und es gilt gerade $\langle X, V\rangle(f) = M_f^\alpha$.

[7]) Eine systematische Untersuchung der Abbildungsräume, die mit einer verallgemeinerten uniformen Struktur ausgestattet sind, soll an anderer Stelle publiziert werden.

[8]) Σ heisst verträglich mit der Topologie τ von Y, wenn $\tau_\Sigma = \tau$ gilt.

$\subset A_x$ und $g(\overline{U}_x) \subset A_x$; $(U_x)_{x \varepsilon X}$ ist eine offene Überdeckung von X und folglich existieren $x_1, \ldots, x_n \in X$ mit $\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} = X$; die $\overline{U}_{x_i}$ sind kompakt und es gilt $g \in \bigcap_{i=1}^{n} (\overline{U}_{x_i}, A_{x_i}) \cap$ $\cap\, C(X, Y) \in \tau_c$; sei $h \in \bigcap_{i=1}^{n} (\overline{U}_{x_i}, A_{x_i}) \cap C(X, Y)$ und $x \in X$; es sei $x \in \overline{U}_{x_{i_0}}$ und folglich ist $f(x) \in A_{x_{i_0}}$; da auch $h(x) \in A_{x_{i_0}}$ ist, gilt also $h \in M_f^\alpha \cap C(X, Y)$ d. h. insgesamt gilt $g \in \bigcap_{i=1}^{n} (\overline{U}_{x_i}, A_{x_i}) \cap C(X, Y) \subset M_f^\alpha \cap C(X, Y)$.

Wir können nun die Aussagen (3) und (4) über den Zusammenhang zwischen gleichgradiger Stetigkeit und Gleichstetigkeit verallgemeinern. Zunächst kann man ohne Schwierigkeiten den Begriff der gleichgradigen Stetigkeit einer Menge von Abbildungen für den Fall aussprechen, dass der Bildraum mit einer beliebigen uniformen Struktur ausgestattet ist.

Definition. X sei ein topologischer Raum, (Y, Σ) sei ein uniformer Raum; es sei $H \subset Y^X$. H heisst *gleichgradig stetig*, wenn zu jedem $x \in X$ und jedem $\alpha \in \Sigma$ eine Umgebung U von x existiert mit der Eigenschaft: ist $f \in H$, so gibt es ein $A_f \in \alpha$ mit $f(U) \subset A_f$ [9]).

8) *X sei ein topologischer Raum, (Y, Σ) sei ein regulärer uniformer Raum; es sei $H \subset Y^X$; H sei gleichgradig stetig. Dann ist H gleichstetig.*

Beweis. Es sei $x \in X$, $y \in Y$ und $A_1 \cap \ldots \cap A_n$, $A_i \in \alpha_i \in \Sigma$, sei ein Basiselement von τ_Σ mit $y \in \bigcap A_i$; da Σ insbesondere schwach regulär ist, existiert zu α_i, $1, \ldots, n$ ein $\alpha \in \Sigma$ mit $\mathrm{St}\,(y, \alpha) \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i$; da Σ regulär ist, existiert ferner zu α ein $\beta \in \Sigma$ $(\beta = \beta_\alpha)$ mit der Eigenschaft: zu jedem $B \in \beta$ existiert ein $\gamma_B \in \Sigma$ und ein $A_B \in \alpha$ mit $\mathrm{St}\,(B, \gamma_B) \subset$ $\subset A_B$; es gibt ein $B_0 \in \beta$ mit $y \in B_0$; da H gleichgradig stetig ist, existiert zu γ_{B_0} eine Umgebung U von x, so dass zu jedem $f \in H$ ein $C_f \in \gamma_{B_0}$ mit $f(U) \subset C_f$ existiert; B_0 ist eine offene Umgebung von y und es sei $g \in H$ und $g(x) \in B_0$; dann gilt $g(U) \subset$ $\subset C_g \subset \mathrm{St}\,(B_0, \gamma_{B_0}) \subset A_{B_0} \in \alpha$; wegen $y \in \mathrm{St}\,(B_0, \gamma_{B_0})$ folgt $y \in A_{B_0}$, also ist $g(U) \subset$ $\subset A_{B_0} \subset \mathrm{St}\,(y, \alpha) \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i$; das bedeutet, H ist gleichstetig.

(9) *X sei ein topologischer Raum, (Y, Σ) sei ein uniformer Raum; es sei $H \subset$ $\subset Y^X$, $x \in X$ und $\overline{H(x)}$ sei kompakt. Ist dann H gleichstetig in x, so ist H gleichgradig stetig in x.*

Beweis. Sei $\alpha \in \Sigma$; zu $y \in \overline{H(x)}$ gibt es ein $V_y \in \alpha$ mit $y \in V_y$; es ist $V_y \in \tau_\Sigma$ und folglich gibt es nach Voraussetzung zu x, y, V_y Umgebungen U^y von x und W_y von y, so dass für jedes $f \in H$ mit $f(x) \in W_y$ $f(U^y) \subset V_y$ gilt; es gibt $y_1, \ldots, y_n \in \overline{H(x)}$ mit $\overline{H(x)} \subset \bigcup_i W_{y_i}$; es sei $U = \bigcap_i U^{y_i}$; ist dann $f \in H$, so gilt $f(x) \in H(x)$, also $f(x) \in W_{y_{i_0}}$

[9]) Ist (Y, Σ) ein vollständig regulärer uniformer Raum (also eine Tukey-Struktur), so ist das gerade der übliche Begriff (siehe [2]).

(für ein i_0); folglich gilt $f(U) \subset f(U^{y_{i_0}}) \subset V_{y_{i_0}} \in \alpha$. Damit ist H gleichgradig stetig in x.

Bemerkung. In der Arbeit [6] haben wir durch ein Gegenbeispiel gezeigt, dass man in der Aussage (9) auf die Voraussetzung „$\overline{H(x)}$ ist kompakt" nicht verzichten kann (in diesem Beispiel ist Σ sogar eine vollständig reguläre uniforme Struktur und $H(x)$ ist bezüglich Σ präkompakt). Dies zeigt, dass die Gleichstetigkeit kein rein uniformer Begriff ist[10]). Andererseits zeigt (8), dass dieser Begriff bereits eine Verallgemeinerung der gleichgradigen Stetigkeit bezüglich einer regulären uniformen Struktur für den Bildraum ist.

Nun können wir das Kompaktheitskriterium formulieren.

(10) **Satz.** *X sei ein kompakter Hausdorff-Raum, (Y, Σ) sei ein Hausdorffscher und regulärer uniformer Raum; es sei $H \subset C(X, Y)$. Dann ist H genau dann bezüglich $\tau_{\langle X,\Sigma\rangle}$ kompakt, wenn H die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(a) *Für jedes $x \in X$ ist $\overline{H(x)}$ kompakt*
(b) *H ist bezüglich $\tau_{\langle X,\Sigma\rangle}$ abgeschlossen*
(c) *H ist gleichgradig stetig.*

Beweis. Wir schicken folgende Aussage voraus, deren Beweis man in [3] oder in [5] finden kann.

(10a) *X sei ein beliebiger topologischer Raum, Y sei ein regulärer Raum: es sei $H \subset Y^X$ und (f_i) sei eine Moore-Smith-Folge aus H mit $f_i \xrightarrow{\tau_s} f \in Y^X$; H sei gleichstetig. Dann gilt $f_i \xrightarrow{\tau_c} f$ und es ist $f \in C(X, Y)$.*

Weiterhin ist mit Σ auch τ_Σ Hausdorffsch, ferner ist $\tau_{\langle X,\Sigma\rangle}$ Hausdorffsch: gilt $f \neq g$, also $f(x) \neq g(x)$ für ein $x \in X$, so existieren α, $\beta \in \Sigma$ mit $\mathrm{St}\,(f(x), \alpha) \cap \cap\, \mathrm{St}\,(g(x), \beta) = \emptyset$; dann gilt aber $M_f^\alpha \cap M_g^\beta = \emptyset$.

1. H erfülle die Bedingungen (a), (b), (c). Es ist $H \subset \prod\{\overline{H(x)} : x \in X\}$ und $\prod\overline{H(x)}$ ist nach (a) τ_s-kompakt in Y^X; da (Y, τ_Σ) Hausdorffsch ist, so ist (Y^X, τ_s) Hausdorffsch und $\prod\overline{H(x)}$ somit τ_s-abgeschlossen in Y^X und folglich gilt $\overline{H}^{\tau_s} \subset \subset \prod\overline{H(x)}$, d. h. $\overline{H}^{\tau_s}$ ist τ_s-kompakt. (f_i) sei eine beliebige Moore-Smith-Folge aus H; dann existiert eine Moore-Smith-Teilfolge (f_k) von (f_i) mit $f_k \xrightarrow{\tau_s} f \in \overline{H}^{\tau_s}$; nach (c) und (8) folgt, dass H gleichstetig ist; wie man leicht zeigt, ist mit Σ auch τ_Σ regulär; dann konvergiert aber nach (10a) und (7) f_k bezüglich $\tau_{\langle X,\Sigma\rangle}$ gegen f; nach (b) folgt $f \in H$ und damit ist gezeigt, dass H bezüglich $\tau_{\langle X,\Sigma\rangle}$ kompakt ist.

2. H sei bezüglich $\tau_{\langle X,\Sigma\rangle}$ kompakt. Nach (5) ist H dann auch bezüglich τ_s kompakt und damit bezüglich τ_s abgeschlossen, denn mit τ_Σ Hausdorffsch ist auch $(C(X, Y), \tau_s)$ Hausdorffsch. Daraus folgt, dass $\overline{H(x)}$ für jedes $x \in X$ kompakt ist[11]). Wir zeigen nun noch, dass H gleichgradig stetig ist: sei $\alpha \in \Sigma$ und $x \in X$; da Σ regulär

[10]) In [5] haben wir die Gleichstetigkeit für beliebige Limesräume definiert.

[11]) Man vergleiche etwa [3].

ist, gibt es zu α ein $\beta \in \Sigma$, so dass zu jedem $B \in \beta$ ein $\gamma_B \in \Sigma$ und ein $A_B \in \alpha$ mit $\mathrm{St}(B, \gamma_B) \subset A_B$ existiert; für $f \in H$ sei B_f ein Element aus β mit $f(x) \in B_f$; wir setzen abkürzend $\gamma_f = \gamma_{B_f}$ und $A_f = A_{B_f}$; es gilt dann $H \subset \bigcup\{M_f^{\gamma_f} : f \in H\}$ und die $M_f^{\gamma_f}$ liegen in $\tau_{\langle X,\Sigma\rangle}$; es gibt folglich $f_1, \ldots, f_n \in H$ mit $H \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} M_{f_i}^{\gamma_{f_i}}$; die f_i sind stetig und es gilt $f_i(x) \in B_{f_i}$; folglich gibt es eine Umgebung U von x mit $f_i(U) \subset B_{f_i}$ für $i = 1, \ldots, n$; sei nun $g \in H$ und $y \in U$ und es sei $g \in M_{f_{i_0}}^{\gamma_{f_{i_0}}}$; folglich gibt es ein $\Gamma \in \gamma_{f_{i_0}}$ mit $(g(y), f_{i_0}(y)) \in \Gamma \times \Gamma$; aus $y \in U$ und $f_{i_0}(U) \subset B_{f_{i_0}}$ folgt $f_{i_0}(y) \in B_{f_{i_0}}$, d. h. es gilt $g(y) \in \Gamma \subset \mathrm{St}(B_{f_{i_0}}, \gamma_{f_{i_0}}) \subset A_{f_{i_0}}$, also insgesamt gilt $g(U) \subset A_{f_{i_0}} \in \alpha$.

Wir wollen zum Schluss noch die Sätze (1) und (2) aus (10) ableiten.

Wir betrachten die Voraussetzungen des Satzes (10):

a) Σ sei speziell eine Hausdorffsche vollständig reguläre uniforme Struktur. Dann ist $\tau_{\langle X,\Sigma\rangle}$ gerade die uniforme Topologie τ_u und (1) folgt unmittelbar aus (10).

b) Y sei ein Hausdorffscher und regulärer topologischer Raum und Σ sei das System aller offenen Überdeckungen von Y. Dann ist Σ eine (verträgliche) Hausdorffsche reguläre uniforme Struktur. Nach (6) und (7) gilt $\tau_{\langle X,\Sigma\rangle} = \tau_c$ und nach (8) und (9) fällt die gleichgradige Stetigkeit mit der Gleichstetigkeit zusammen. Damit erhält man auch (2) aus (10).

Literatur

[1] *N. Bourbaki:* Livre III Topologie générale, Chapitre 10. Paris 1961.

[2] *J. R. Isbell:* Uniform spaces. American Mathematical Society, Mathematical Surveys Nr. 12, 1964.

[3] *J. L. Kelley:* General topology. Princeton, New Jersey, 1957.

[4] *K. Morita:* On the simple extension of a space with respect to a uniformity I. Proc. Japan Acad. *27* (1951), 65—72.

[5] *H. Poppe:* Stetige Konvergenz und der Satz von Ascoli und Arzelà. Math. Nachr. *30* (1965), 87—122.

[6] *H. Poppe:* Stetige Konvergenz und der Satz von Ascoli und Arzelà II. Monatsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin *8*, 4 (1966), 259—264.

[7] *W. Rinow:* Über die Verallgemeinerten Uniformen Strukturen von Morita und ihre Vervollständigung. General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra II, Proceedings of the Second Prague Symposium, 1966, Praha 1967, 297—305.

DEUTSCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN
FORSCHUNGSGEMEINSCHAFT
INSTITUT FÜR REINE MATHEMATIK