UNTERE SCHRANKEN FÜR DIE EIGENWERTE STEKLOFFSCHER EIGENWERTAUFGABEN

Friedrich Goerisch und Julius Albrecht
Institut für Mathematik der TU Clausthal
D 3392 Clausthal-Zellerfeld, BRD

Am Beispiel der Eigenwertaufgabe $\Delta^2\phi = 0$ in Ω, $\phi = 0$, $\Delta\phi = \lambda\frac{\partial\phi}{\partial\nu}$ auf $\partial\Omega$ wird gezeigt, daß ein neuer, für Eigenwertaufgaben mit symmetrischen Operatoren formulierter Einschließungssatz [2] auch auf Stekloffsche Eigenwertaufgaben angewendet werden kann. Er ermöglicht, in einfacher Weise untere Schranken für die Eigenwerte zu berechnen; die für rechteckige Gebiete Ω erhaltenen numerischen Ergebnisse sind besser als die mit einem größeren Aufwand nach einem Verfahren von Kuttler [4] berechneten.

§ 1. Eines der wichtigsten Verfahren zur Berechnung von Eigenwertschranken ist das Lehmann-Maehly-Verfahren [5]. Wenn man es auf Eigenwertaufgaben der Form $M\phi = \lambda N\phi$ anwenden will, so benötigt man Paare (v,w), die der Gleichung $Mw = Nv$ genügen. Solche Paare zu bestimmen ist manchmal sehr schwierig, insbesondere dann, wenn M und N partielle Differentialoperatoren sind. Diese Schwierigkeit konnte mit Hilfe des folgenden neuen Einschließungssatzes [2], der eine Verallgemeinerung des dem Lehmann-Maehly-Verfahren zugrunde liegenden Satzes darstellt, weitgehend überwunden werden:

<u>EINSCHLIESSUNGSSATZ</u>

<u>Voraussetzungen</u>

V1. H sei ein komplexer Prähilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Es sei $D \subset H$; $M : D \to H$ und $N : D \to H$ seien symmetrische lineare Operatoren in H. Für alle $u \in D$ mit $u \neq 0$ gelte $\langle u,Mu\rangle > 0$.

V2. Es gebe Folgen $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Eigenwerten und Eigenelementen der Eigenwertaufgabe $M\phi = \lambda N\phi$ derart, daß

$M\phi_i = \lambda_i N\phi_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$,

$\langle\phi_i,M\phi_k\rangle = \delta_{ik}$ für alle $i,k \in \mathbb{N}$ (δ_{ik} Kroneckersymbol) und

$\langle u,Nu\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i|\langle u,N\phi_i\rangle|^2$ für alle $u \in D$ gilt.

V3. X sei ein komplexer Vektorraum; b sei eine hermitesche Sesquilinearform auf X; $T : D \to X$ sei ein linearer Operator. Für alle $u \in X$ gelte $b(u,u) \geq 0$; für alle $f,g \in D$ gelte $b(Tf,Tg) = \langle f,Mg\rangle$.

V4. Es seien $v_i \in D$ und $w_i \in X$ für $i=1,\dots,n$. $v_1,\dots,v_n$ seien linear unabhängig. Es gelte $b(Tu,w_i) = \langle u,Nv_i\rangle$ für alle $u \in D$, $i=1,\dots,n$.

V5. Es sei $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$. Es werden Matrizen A und B erklärt durch

$$A := (\langle v_i,Mv_k\rangle - \rho\langle v_i,Nv_k\rangle)_{i,k=1,\dots,n} \,,$$

$$B := (\langle v_i,Mv_k\rangle - 2\rho\langle v_i,Nv_k\rangle + \rho^2 b(w_i,w_k))_{i,k=1,\dots,n} \,.$$

B sei positiv definit. m sei die Anzahl der negativen Eigenwerte der Eigenwertaufgabe $Az = \mu Bz$; der i-te Eigenwert dieser Aufgabe werde mit μ_i bezeichnet ($\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$).

Behauptung

Für $i = 1,\dots,m$ enthält das Intervall $[\rho - \frac{\rho}{1-\mu_i}, \rho)$ mindestens i Eigenwerte der Eigenwertaufgabe $M\phi = \lambda N\phi$.

Dieser Satz wurde bereits mit gutem Erfolg auf verschiedene Eigenwertaufgaben angewendet [1], [2], [3], z. B. auf die Aufgabe

$$\Delta^2\phi = \lambda(-\Delta\phi + c\,\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}) \text{ in } \Omega, \quad \phi = 0, \ \operatorname{grad}\phi = 0 \text{ auf } \partial\Omega,$$

die bei der Berechnung von Beulwerten von Platten unter Druck und Schub auftritt, und auf die Aufgabe

$$\Delta^2\phi = \lambda\frac{\partial\psi}{\partial x}, \ \Delta\psi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \text{ in } \Omega, \quad \phi = 0, \ \operatorname{grad}\phi = 0, \ \psi = 0 \text{ auf } \partial\Omega,$$

die von Velte [6] im Zusammenhang mit einem Problem aus der Hydrodynamik untersucht worden ist.

§ 2. Auch für Stekloffsche Eigenwertaufgaben kann man mit Hilfe des Einschließungssatzes aus § 1 Eigenwertschranken berechnen. Dies soll an Hand der Aufgabe

$$\Delta^2\phi = 0 \text{ in } \Omega, \quad \phi = 0, \ \Delta\phi = \lambda\frac{\partial\phi}{\partial\nu} \text{ auf } \partial\Omega \tag{1}$$

erläutert werden; hierbei ist Ω ein beschränktes, konvexes Gebiet im $\mathbb{R}^2$ mit C^2-Randstücken, $\partial\Omega$ der Rand von Ω und $\frac{\partial}{\partial\nu}$ die Richtungsableitung nach der äußeren Normalen von $\partial\Omega$. Untere Schranken für den kleinsten Eigenwert von (1) werden bei verschiedenen Fehlerabschätzungen von Näherungen für Lösungen von Randwertaufgaben benötigt (vgl. z. B. [4]).

Zur Anwendung des Einschließungssatzes aus § 1 wird zunächst

$$H := \{f \in W_2^{(2)}(\Omega) \ : \ f = 0 \text{ auf } \partial\Omega\} \tag{2}$$

und $D := H$ gesetzt; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ wird mit dem Skalarprodukt des Sobolev-Raumes $W_2^{(2)}(\Omega)$ identifiziert; die Operatoren $M : H \to H$ und $N : H \to H$ werden durch die Forderung, daß für alle $f,g \in H$

$$\langle f,Mg\rangle = \int_\Omega \Delta f \Delta\overline{g}\, dxdy \text{ und } \langle f,Ng\rangle = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \nu}\frac{\partial \overline{g}}{\partial \nu}\, ds$$

gilt, festgelegt. Zur Verifizierung der Voraussetzung V2 kann man Ergebnisse aus [7] heranziehen. Nun werden X, T und b durch

$X := H \times L^2(\Omega) \times L^2(\partial\Omega)$,

$Tu := (u, u, \frac{\partial u}{\partial \nu})$ für alle $u \in D$,

$$b(f,g) := \int_\Omega \Delta f_1 \Delta\overline{g}_1\, dxdy + \frac{\tau}{2}\int_\Omega (f_2\overline{g}_2 - f_1\overline{g}_1)dxdy + \frac{q}{2}\int_{\partial\Omega}(f_3\overline{g}_3 - \frac{\partial f_1}{\partial\nu}\frac{\partial\overline{g}_1}{\partial\nu})ds$$

für alle $f = (f_1,f_2,f_3) \in X$, $g = (g_1,g_2,g_3) \in X$

definiert, wobei $q > 0$ eine grobe untere Schranke für den kleinsten Eigenwert von (1) ist und $\tau > 0$ für alle $u \in D$ der Ungleichung $\langle u,Mu\rangle \geq \tau \int_\Omega |u|^2 dxdy$ genügt. Die in Voraussetzung V4 auftretenden Funktionen v_i können beliebig aus H gewählt werden; die Funktionentripel w_i lassen sich dann in elementarer Weise bestimmen.

Wenn man nun ρ als untere Schranke für den p-ten Eigenwert von (1) wählt und nach dem Satz aus § 1 ein Intervall der Form $[\gamma,\rho)$ berechnet, das p-1 Eigenwerte von (1) enthält, so ist γ eine - im allgemeinen recht genaue - untere Schranke für den kleinsten Eigenwert von (1).

Falls man nur an Eigenwerten zu Eigenfunktionen von (1), die zu einer bestimmten Symmetrieklasse gehören, interessiert ist, muß man die Definition von H entsprechend ändern.

Zur Berechnung von Eigenwertschranken für (1) sind verschiedene Verfahren vorgeschlagen worden; die bisher wohl besten numerischen Resultate hat Kuttler [4] durch a posteriori - a priori - Abschätzungen erhalten. Auf alle Aufgaben der Form (1), die sich nach seiner Methode behandeln lassen, kann auch das hier vorgeschlagene Verfahren angewandt werden; ein Beispiel mit einem Vergleich der numerischen Ergebnisse bringt § 3. Im Gegensatz zu diesen beiden Verfahren ist das Lehmann-Maehly-Verfahren nur dann durchführbar, wenn man (wie bei der in § 3 behandelten Aufgabe) biharmonische Funktionen angeben kann, die auf $\partial\Omega$ verschwinden.

§ 3. Das in § 2 geschilderte Vorgehen soll nun an einem numerischen Beispiel erläutert werden. Es wird

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < \tfrac{1}{2},\ |y| < \tfrac{d}{2}\} \quad \text{mit } d \geq 1$$

gewählt. Zu den Gleichungen (1) wird noch die Symmetriebedingung

$\phi(x,y) = \phi(-x,y) = \phi(x,-y)$ für alle $(x,y) \in \Omega$

hinzugefügt; die so erhaltene Eigenwertaufgabe sei mit (1^*) bezeichnet. An die Stelle von (2) tritt nun (2^*):

$$H := \{f \in W_2^{(2)}(\Omega):\ f=0 \text{ auf } \partial\Omega,\ f(x,y)=f(-x,y)=f(x,-y) \text{ für } (x,y) \in \Omega\}. \quad (2^*)$$

Um einen Vergleich mit den Ergebnissen von Kuttler zu ermöglichen, werden die in § 2 auftretenden Größen p,q,ρ,τ und $v_1,\dots,v_n$ (mit n als Quadratzahl) wie die entsprechenden Größen in [4] (vgl. dort (15), (16)) definiert:

$$p := 2, \quad q := \frac{\pi}{2d}(1+d^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \rho := \frac{\pi}{2d}(9+d^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \tau := \left(\frac{\pi}{d}\right)^4 (1+d^2)^2,$$

$$v_i(x,y) := [(2x)^{2s-2} - (2x)^{2s}]\left[\left(\frac{2y}{d}\right)^{2t-2} - \left(\frac{2y}{d}\right)^{2t}\right] \qquad (3)$$

mit $i = (s-1)\sqrt{n} + t$ für $s=1,\dots,\sqrt{n}$; $t=1,\dots,\sqrt{n}$.

Für $w_1,\dots,w_n$ wird der Ansatz

$$w_i = \frac{2}{q}\left(0,0,\frac{\partial v_i}{\partial \nu}\right) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\left(v_j, v_j - \frac{2}{\tau}\Delta^2 v_j, \frac{\partial v_j}{\partial \nu} - \frac{2}{q}\Delta v_j\right) \qquad (i=1,\dots,n)$$

gemacht; die Koeffizienten α_{ij} $(i,j=1,\dots,n)$ werden so bestimmt, daß sich Einschließungsintervalle minimaler Länge ergeben (vgl. [2]).

Die auf diese Weise erhaltenen unteren Schranken für den kleinsten Eigenwert von (1^*) sind für einige Werte von d und n in Tabelle 1 eingetragen. (Die dort angegebenen oberen Schranken wurden nach dem Verfahren von Rayleigh und Ritz mit den Ansatzfunktionen $v_1,\dots,v_n$ (s. (3)) berechnet.)

Tabelle 1: Untere und obere Schranken für den kleinsten Eigenwert

d	n	Untere Schranke	Obere Schranke
	9	3, 432 071	3, 475 728
	16	3, 469 297	3, 475 699
1	25	3, 474 674	3, 475 698
	36	3, 475 449	3, 475 697
	49	3, 475 624	3, 475 697
	9	2, 239 843	2, 567 649
	16	2, 547 204	2, 567 539
2	25	2, 561 998	2, 567 536
	36	2, 566 527	2, 567 536
	49	2, 567 211	2, 567 536

Die mit n = 49 erhaltenen unteren Schranken weichen für d = 1 bzw. d = 2 höchstens um $8\cdot 10^{-5}$ bzw. $4\cdot 10^{-4}$ vom exakten Eigenwert ab, die von Kuttler [4] mit n = 100, also mit weitaus größerem Rechenaufwand bestimmten unteren Schranken dagegen mindestens um $1\cdot 10^{-3}$ bzw. $2\cdot 10^{-3}$.

Andere Stekloffsche Eigenwertaufgaben lassen sich analog zu Aufgabe (1) behandeln.

Die vorliegende Untersuchung wurde im Rahmen des Forschungsvorhabens "Weiterentwicklung von Verfahren zur Berechnung von Eigenwertschranken" durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft gefördert. Die Verfasser sind der DFG hierfür zu Dank verpflichtet. Gedankt sei auch Herrn Dipl.-Math. H. Haunhorst für die Beteiligung an der Bearbeitung von Beispielen.

Literatur

[1] Goerisch, F.: Über die Anwendung einer Verallgemeinerung des Lehmann-Maehly-Verfahrens zur Berechnung von Eigenwertschranken. In: J. Albrecht u. L. Collatz (Hrsg.): Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, Bd.3. ISNM 56, Birkhäuser Verlag Basel - Boston - Stuttgart 1981, 58-72.

[2] Goerisch, F.: Eine Verallgemeinerung des Lehmann-Maehly-Verfahrens zur Berechnung von Eigenwertschranken. Noch nicht veröffentlicht.

[3] Haunhorst, H.: Diplomarbeit TU Clausthal 1981.

[4] Kuttler, J.R.: Dirichlet eigenvalues. SIAM J. Numer. Anal. 16 (1979), 332 - 338.

[5] Lehmann, N.J.: Optimale Eigenwerteinschließungen. Numer. Math. 5 (1963), 246 - 272.

[6] Velte, W.: Stabilitätsverhalten und Verzweigung stationärer Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen. Arch. Rat. Mech. Anal. 16 (1964), 97 - 125.

[7] Velte, W.: Zur Eigenwerttheorie Steklovscher Probleme. Mitt. Math. Sem. Gießen 121 (1976), 125 - 137.