Igor V. Skrypnik

Нелинейные эллиптические граничные задачи в областях с мелкозернистой границей

In: Michal Greguš (ed.): Equadiff 5, Proceedings of the Fifth Czechoslovak Conference on Differential Equations and Their Applications held in Bratislava, August 24-28, 1981. BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1982. Teubner-Texte zur Mathematik, Bd. 47. pp. 301--309.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/702311

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ГРАНИЧНЫЕ
ЗАДАЧИ В ОБЛАСТЯХ С МЕЛКОЗЕРНИСТОЙ ГРАНИЦЕЙ

Игорь В.Скрыпник
Донецк, СССР

Работа посвящена изучению сходимости решений задач Дирихле для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка в последовательности областей с мелкозернистой границей.

Пусть Ω – произвольная ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве R^n и предположим, что при каждом натуральном значении s определено конечное число непересекающихся замкнутых множеств $F_i^{(s)}$ $(i=1,\ldots,J(s))$, содержащихся в Ω. Дальше будут сформулированы дополнительные условия на $F_i^{(s)}$, из которых, в частности, следует, что при $s\to\infty$ диаметры $F_i^{(s)}$ стремятся к нулю. Следуя [I], последовательностью областей с мелкозернистой границей называем последовательность $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{J(s)} F_i^{(s)}$.

В области $\Omega^{(s)}$ рассматривается квазилинейная эллиптическая задача

$$\text{(I)}\qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) - a\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0,\quad x\in\Omega^{(s)},$$

$$\text{(2)}\qquad u(x)=f(x),\quad x\in\partial\Omega^{(s)},$$

где $f(x)$ – некоторая известная, определенная в $\bar\Omega$, функция.

Сложная структура области $\Omega^{(s)}$ не вносит дополнительных затруднений в изучение разрешимости и единственности решения задачи (I)-(2). Для каждого s при определенных предположениях относительно данных задачи (I), (2) существование решения можно доказать известными методами (см. [I]). Однако для таких задач при больших s практически невозможно реализовать приближенные методы нахождения решений и в связи с этим актуальное значение приобретает вопрос о возможности приближенной замены задачи (I), (2) более простой задачей того же вида в фиксированной области, к решению которой стремятся решения задач (I), (2) при $s\to\infty$.

В связи с этим возникают вопросы: выяснить условия, при которых сходятся решения задачи (I), (2) при $s\to\infty$, и указать граничную задачу для предельной функции. Решению этих вопросов и посвящена настоящая работа.

Отметим, что указанные задачи описывают различные реальные процессы, протекающие в средах с инородными включениями. Эти вопросы возникают в задачах упруго-пластического равновесия, теории фильтрации и многих других разделах физики и механики.

Линейная задача Дирихле для областей с мелкозернистой границей подробно изучена (см., например, [2]). Отметим, также многочисленные работы по теории усреднения для линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Эти результаты изложены в обзорной статье [3] , монографии [4] .

I. Формулировка результата. Далее Ω_0 - область в R^n , такая, что $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset \Omega_0$ и обозначим через δ расстояние от $\bar{\Omega}$ до $\partial\Omega_0$ - границы области Ω_0. Будем предполагать выполнение следующих условий относительно функций $a_i(x,u,p)$, $a(x,u,p)$:

A_1) функции $a_i(x,u,p)$, $a(x,u,p)$ $i=1,\dots,n$ определены при $x \in \bar{\Omega}$, $u \in R^1$, $p \in R^n$, непрерывны по (u,p) при почти всех $x \in \bar{\Omega}$, измеримы по x при любых u, p; $a_i(x,u,0)=0$ при $x \in \Omega$, $u \in R^1$;

A_2) существуют положительные постоянные c_1 , c_2 , ε , $1<m<n$, $\mu = \frac{mn}{n-m}$ и функция $\varphi(x) \in L_2(\Omega)$, $r > \frac{n}{m}$, такие, что при всех значениях $x \in \bar{\Omega}$, $u, v \in R^1$, $p, q \in R^n$ выполнены неравенства:

$$|a_i(x,u,p)-a_i(x,v,q)| \le c_1\Big[(1+|u|^\mu+|v|^\mu+|p|^m+|q|^m)^{\frac{m-2}{m}}|p-q|+$$

$$+(1+|u|^\mu+|v|^\mu+|p|^m+|q|^m)^{1-\frac{1}{\mu}-\frac{1}{m}}|u-v|\Big],$$

$$|a(x,u,p)| \le c_1(|u|^\mu+|p|^m)^{\frac{\mu-1}{\mu}}+\varphi(x), \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\big[a_i(x,u,p)-a_i(x,u,q)\big](p_i-q_i) \ge c_2(1+|p-q|^{m-2})|p-q|^2,$$

$$a(x,u,p)u \ge -(c_2-\varepsilon)|p|^m-\varphi(x)(1+|u|).$$

Замечание I. При рассмотрении последовательности задач (I), (2) в случае $m=n$ понадобятся другие предположения относительно функций $a_i(x,u,p)$, $a(x,u,p)$ и также изменятся формулировки результатов. Поэтому далее для простоты изложения рассматривается только случай $m<n$. При $m>n$ нахождение предельной функции для последовательности решений задач (I), (2) упрощается благодаря компактности вложения $W^1_m(\Omega)$ в $C(\bar{\Omega})$.

Эти предположения обеспечивают существование обобщенного решения задачи (I), (2) при произвольной функции $f(x) \in W_m^1(\Omega)$.

Функцию $u(x) \in W_m^1(\Omega^{(s)})$ называем обобщенным решением задачи (I)-(2), если $u(x) - f(x) \in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega^{(s)})$ и для произвольной функции $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega^{(s)})$ выполняется интегральное тождество

$$(4) \qquad \int_{\Omega^{(s)}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \varphi \right\} dx = 0.$$

Существование обобщенного решения задачи (I), (2) можно доказать известными методами, основанными на теории монотонных операторов (см. [I],[5]). Сформулированные предположения относительно функций $a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$, $a\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$, не гарантируют единственность решения задачи (I), (2). Дополнительных условий для единственности не будем накладывать.

<u>Теорема I</u>. При выполнении условий A_I, A_2 при каждом s задача (I)-(2) имеет, по крайней мере, одно решение $u_s(x)$. Существует постоянная R, не зависящая от s, такая, что при всех s выполнена оценка

$$\|u_s\|_{W_m^1(\Omega^{(s)})} \le R.$$

Далее через $u_s(x)$ - обозначено одно из возможных решений задачи (I), (2), удовлетворяющее указанной оценке. Тем самым последовательность $\{u_s(x)\}$ будем считать фиксированной. Функции $u_s(x)$, определенные при $x \in \Omega^{(s)}$, продолжим на Ω, полагая $u_s(x) = f(x)$ при $x \in \bigcup_{i=1}^{J_s} F_i^{(s)}$. Так получающиеся функции $u_s(x)$, определенные при $x \in \Omega$, принадлежат $W_m^1(\Omega)$ и для них выполнена оценка

$$(5) \qquad \|u_s\|_{W_m^1(\Omega)} \le R_1$$

с независящей от s постоянной R_1. Из (5) следует, что последовательность $u_s(x)$ содержит слабо сходящиеся подпоследовательности.

Перейдем к формулировке условий на множества $F_i^{(s)}$. Обозначим через $d_i^{(s)}$ минимум радиусов шаров, содержащих $F_i^{(s)}$, и пусть $x_i^{(s)}$ - центр такого шара радиуса $d_i^{(s)}$, что $F_i^{(s)} \subset B_{d_i^{(s)}}(x_i^{(s)})$. Через $B_\rho(x_0)$ здесь и далее обозначается шар радиуса ρ с центром в точке x_0. Через $r_i^{(s)}$ обозначим расстояние от $B_i^{(s)} = B_{d_i^{(s)}}(x_i^{(s)})$ до $\bigcup_{j \ne i} B_j^{(s)} \cup \partial\Omega$.

Будем предполагать, что числа $d_i^{(s)}$, $r_i^{(s)}$ удовлетворяют условиям:

$B_I)$ $d_i^{(s)} \le c_3 r_i^{(s)}$, $\lim\limits_{s\to\infty} \max\limits_{1\le i\le J_s} r_i^{(s)} = 0$;

$B_2)$ $$\overline{\lim_{s\to\infty}} \sum_{i=1}^{J_s} \frac{(d_i^{(s)})^{\frac{n-m}{m-1}m}}{(r_i^{(s)})^{\frac{n}{m-1}}} < \infty,$$

где $c_3 > 1$.

Для формулировки еще одного условия на $F_i^{(s)}$ нам понадобятся дополнительные функции $v_i^{(s)}$, определяемые ниже и играющие фундаментальную роль в данной работе. Для произвольных вещественных чисел k_1 , k_2 обозначим через $v_i^{(s)}(x, k_1, k_2)$ функцию, принадлежащую $W_m^1(B_\delta(x_i^{(s)}) \setminus F_i^{(s)})$, и являющуюся обобщенным решением задачи

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x, k_1, \frac{\partial u}{\partial x}) = 0, \qquad x \in B_\delta(x_i^{(s)}) \setminus F_i^{(s)},$$

(6) $$u(x) = 0 \text{ при } |x - x_i^{(s)}| = \delta,$$
$$u(x) = k_2 \text{ при } x \in \partial F_i^{(s)}$$

Существование и единственность решения задачи (6) следует, например, из [I] .

Будем предполагать выполнение условия

C) существует непрерывная функция $C(x, k_1, k_2)$ такая, что для произвольного шара $B \subset \Omega$ выполнено равенство

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{j\in J_s^{(B)}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_2} \int_\Omega a_i(x, k_1, \frac{\partial v_j^{(s)}}{\partial x}(x, k_1, k_2)) \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x, k_1, k_2)\, dx =$$

(7) $$= \int_B C(x, k_1, k_2)\, dx,$$

где $J_s^{(B)}$ – множество тех номеров $1 \le j \le J_s$, для которых $x_j^{(s)} \in B$.

Легко видеть, что в широких предположениях, например, в случае вариационных задач, правая часть (7) допускает инвариантную емкостную трактовку, не зависящую от специального определения функций $v_i^{(s)}$.

Теорема 2. Пусть выполнены предположения A_I, A_2, B_I, B_2, C, $f(x)$ – непрерывная функция из $W_m^1(\Omega)$ и $u_s(x)$ – последовательность решений задачи (I)-(2), удовлетворяющих условию (5). Существует подпоследовательность $\{u_{s_k}(x)\}$ последовательности $\{u_s(x)\}$, слабо сходящаяся к некоторой функции $u_0(x) \in W_m^1(\Omega)$, такая, что

I) подпоследовательность $u_{s_k}(x)$ сильно сходится в $W_p^1(\Omega)$ при любом $p<m$;

2) функция $u_0(x)$ является обобщенным решением задачи

$$(8)\qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) - a\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + c(x,u,f-u)=0,\ x\in\Omega,$$
$$u(x)=f(x),\quad x\in\partial\Omega.$$

Замечание 2.I. Если предельная задача (8) имеет единственное решение, то вся последовательность $u_s(x)$ сходится к $u_0(x)$.

2. Отметим, что характер условий B_I, B_2, С полностью согласуется с условиями монографии [2] , в которых рассматривается линейный случай. Так что в случае линейного уравнения (I) накладываемые нами условия полностью совпадают с условиями работы [2] .

3. Теорема 2 содержит более сильные утверждения, чем в [2] , относительно сходимости последовательности $\{u_{s_k}(x)\}$ даже для линейной задачи. А именно новой даже линейного случая является сильная сходимость последовательности в W_p^1 , т.е. сильная сходимость производных решений.

2. Оценки решений и функций $v_i^{(s)}(x)$. Последовательность $u_s(x)$ решений задачи(I), (2), удовлетворяющая неравенству (5), является равномерно ограниченной. Используя модификацию метода Мозера доказывается

Теорема 3. Пусть $u_s(x)$ - последовательность обобщенных решений задачи (I), (2), удовлетворяющих условию (5), пусть выполнены предположения A_I, A_2 и $f(x)$ - ограниченная функция из $W_m^1(\Omega)$. Тогда существует постоянная M , независящая от s , такая, что при всех s выполнена оценка

$$(9)\qquad \max_{x\in\Omega} |u_s(x)| \le M .$$

Основой для изучения поведения семейства решений задач (I), (2) служат интегральные и точные равномерные оценки вспомогательных функций $v_i^{(s)}$. Функцию $v_i^{(s)}$ считаем продолженной постоянной κ_2 на $F_i^{(s)}$.

Теорема 4. Существует постоянная c , зависящая лишь от κ_1 , известных параметров и независящая от s , такая, что при $1\le i\le J_s$, $s=1,2,\dots$ выполнены оценки:

$$\text{I)}\ \int_{B_\delta(x_i^{(s)})} \left(1+\left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|\right)^{m-2} \left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2 dx \le c\left\{\kappa_2^2 (d_i^{(s)})^{n-2} + \kappa_2^m (d_i^{(s)})^{n-m}\right\}$$

где $v_i^{(s)} = v_i^{(s)}(x, \kappa_1, \kappa_2)$.

$$2)\ \left\| \frac{\partial}{\partial x}\bar{v}_i^{(s)} - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{v}_i^{(s)} \right\|_{L_2}^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x}\bar{v}_i^{(s)} - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{v}_i^{(s)} \right\|_{L_m}^m \leq$$

$$\leq c\,|\bar{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_2|^2\, N^{\mu}\,(d_i^{(s)})^{n-m},$$

где $\bar{v}_i^{(s)} = v_i^{(s)}(x, \kappa_1, \bar{\kappa}_2)$, $\tilde{v}_i^{(s)} = \tilde{v}_i^{(s)}(x, \kappa_1, \tilde{\kappa}_2)$, κ_1 , $\bar{\kappa}_2$, $\tilde{\kappa}_2$ – произвольные числа, по абсолютной величине не превосходящие N . Нормы в L_2 и L_m берутся по $B_\delta(x_i^{(s)})$.

$$3)\ |v_i^{(s)}(x)| \leq c\kappa_2 \left(\frac{d_i^{(s)}}{|x - x_i^{(s)}|} \right)^{\frac{n-m}{m-1}} \qquad x \in B_\delta(x_i^{(s)}) \setminus B_i^{(s)}.$$

Наиболее важной и трудно устанавливаемой из этих оценок является третья. Отметим, что показатель $\frac{n-m}{m-1}$ в этой оценке является точным, в чем легко убедиться на модельных уравнениях, в частности, в линейном случае на примере уравнения Лапласа.

Оценка 3) получена некоторой модификацией метода Мозера [5] , причем понадобились тонкие рассуждения, связанные с преодолением трудностей, вызванных отличием m от двух и нелинейностью уравнения.

Кроме приведенных в теореме 2 оценок для $v_i^{(s)}$, используются при доказательстве теоремы 2 еще другие оценки, в частности, интегральные оценки градиентов по множествам $B_\delta(x_i^{(s)}) \setminus B_\rho(x_i^{(s)})$ при $\rho > d_i^{(s)}$ и $B_\delta(x_i^{(s)}) \cap E_\kappa$, где $E_\kappa = \{x \in B_\delta(x_i^{(s)}) \setminus B_i^{(s)} : 0 \leq v_i^{(s)}(x) \leq \kappa\}$ при $\kappa < \kappa_2$. Эти оценки являются уточнениями оценки I) для указанных множеств и мы их не приводим.

3. <u>Асимптотическое разложение для последовательности решений.</u> Дадим сейчас для последовательности $u_s(x)$ асимптотическое разложение, которое позволит доказать сходимость некоторой подпоследовательности $u_s(x)$ к решению задачи (6).

Зафиксируем бесконечно дифференцируемую невозрастающую функцию $\chi: R^1 \to R^1$, равную нулю при $t > \frac{2+4c_3}{3+4c_3}$, единице при $t < \frac{1+4c_3}{2+4c_3}$, где c_3 – число из условия B_I. И пусть

$$\psi_i^{(s)}(x) = \chi\left(\frac{|x - x_i^{(s)}|}{\rho_i^{(s)}} \right),$$

где $\rho_i^{(s)} = max\left\{ d_i^{(s)} + \frac{d_i^{(s)}}{2c_3},\ \frac{(r_i^{(s)})^{\frac{n}{n-m}}\ \ln^2\frac{1}{r_i^{(s)}}}{2\lambda} \right\},$

$$\lambda = \max_{0<t\le d}\left\{ t^{\frac{m}{n-m}} \ln^2 \frac{1}{t} \right\}, \quad d \text{ - диаметр множества } \Omega .$$

Выберем из последовательности $u_s(x)$ подпоследовательность, слабо сходящуюся к $u_0(x)$ в $W_m^1(\Omega)$. Для кратности записи выбранную подпоследовательность будем обозначать так же, как и основную последовательность, без дополнительных индексов.

Обозначим

$$D_i^{(s)} = \left\{ x : \frac{1+4c_3}{2+4c_3}\rho_i^{(s)} \le |x - x_i^{(s)}| \le \frac{2+4c_3}{3+4c_3}\rho_i^{(s)} \right\},$$

и пусть

$$(10)\qquad f_i^{(s)} = \frac{1}{\operatorname{mes} D_i^{(s)}} \int_{D_i^{(s)}} f(x)\,dx, \quad u_i^{(s)} = \frac{1}{\operatorname{mes} D_i^{(s)}} \int_{D_i^{(s)}} u_0(x)\,dx .$$

Определим при $s = 1,2\ldots$

$$r_1^{(s)}(x) = \sum_{i=1}^{J_s} \left[u_i^{(s)} - u_0(x) \right] \psi_i^{(s)}(x),$$

$$(11)\qquad r_2^{(s)}(x) = \sum_{i=1}^{J_s} \left[f(x) - f_i^{(s)} \right] \psi_i^{(s)}(x),$$

$$r_3^{(s)}(x) = \sum_{i=1}^{J_s} v_i^{(s)}(x, u_i^{(s)}, f_i^{(s)} - u_i^{(s)})\, \psi_i^{(s)}(x)$$

и пусть $W_s(x)$ определяется равенством

$$(12)\qquad u_s(x) = u_0(x) + r_1^{(s)}(x) + r_2^{(s)}(x) + r_3^{(s)}(x) + W_s(x) .$$

Теорема 5. При $s \to \infty$ последовательности $r_1^{(s)}(x)$, $r_2^{(s)}(x)$, $W_s(x)$ сильно сходятся к нулю в $W_m^1(\Omega)$, последовательность $r_3^{(s)}(x)$ слабо сходится к нулю в $W_m^1(\Omega)$ и сильно сходится к нулю в $W_p^1(\Omega)$ при каждом $p < m$.

Доказательство сильной сходимости последовательностей $r_1^{(s)}(x)$, $r_2^{(s)}(x)$ не вызывает затруднений. Сходимость последовательности $r_3^{(s)}(x)$ также проверяется путем непосредственных оценок ее норм в $L_m(\Omega)$ и $W_p^1(\Omega)$. Доказательство сходимости $W_s(x)$ к нулю непросто. Замечая, что $W_s(x) \in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega^{(s)})$, можем подставить $W_s(s)$ вместо $\varphi(x)$ в интегральное тождество (4). Далее требуется провести детальное изучение поведения членов возникающего равенства при $s \to \infty$. И основные затруднения возникают за счет нелинейности задачи и отличая m от 2.

4. Получение предельного уравнения. Пусть $\varphi(x)$ - произвольная функция из $C_0^\infty(\Omega)$ и определим

$$\varphi_i^{(s)} = \frac{1}{\operatorname{mes} D_i^{(s)}} \int_{D_i^{(s)}} \varphi(x)\,dx,$$

$$\rho_1^{(s)}(x) = \sum_{i=1}^{J_s} \left[\varphi_i^{(s)}(x) - \varphi(x)\right] \psi_i^{(s)}(x),$$

(13)

$$\rho_2^{(s)}(x) = \sum_i{}' v^{(s)}(x, u_i^{(s)}, f_i^{(s)} - u_i^{(s)}) \frac{\varphi_i^{(s)} \psi_i^{(s)}(x)}{f_i^{(s)} - u_i^{(s)}},$$

$$\rho_3^{(s)}(x) = \sum_i{}'' v_i^{(s)}(x, u_i^{(s)}, 1)\, \varphi_i^{(s)} \psi_i^{(s)}(x),$$

где сохранены все обозначения предыдущего пункта и $\sum'$ - обозначает суммирование по всем тем индексам $i = 1, \dots, J_s$, для которых $|f_i^{(s)} - u_i^{(s)}| \geq d_i^{(s)}$. $\sum''$ обозначает суммирование по оставшимся индексам i.

Определим

$$\varphi_s(x) = \varphi(x) + \rho_1^{(s)}(x) - \rho_2^{(s)}(x) - \rho_3^{(s)}(x).$$

Тогда функция $\varphi_s(x)$ принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega^{(s)})$ и ее можно подставить вместо φ в интегральное тождество (4).

Изучение предельного перехода в получающемся равенстве основано на сильной сходимости к нулю $\rho_1^{(s)}(x)$ в $W_m^1(\Omega)$ и $\rho_2^{(s)}(x)$, $\rho_3^{(s)}(x)$ в $W_p^1(\Omega)$ при $p < m$. Устанавливая возможность предельного перехода, доказывается теорема 2. Дополнительное слагаемое $C(x, u, f-u)$ в левой части уравнения (8) возникает при переходе к пределу в выражении

$$\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_i\left(x, u, \frac{\partial r_3^{(s)}(x)}{\partial x}\right) \frac{\partial \rho_2^{(s)}}{\partial x_i}\,dx.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] О.А.Ладыженская, Н.Н.Уральцева, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, "Наука", М., 1973.

[2] В.А.Марченко, Е.Я.Хруслов, Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей, "Наукова думка", К., 1974.

[3] В.В.Жиков, С.М.Козлов, О.А.Олейник, Ха Тьен Нгоан, Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов, УМН, 34:5, (1979), 135-210.

[4] A.Bensoussan, I.L.Lions, G.Papanicolaou, Asymptotic analysis for periodic structures, North-Holland Publ. Comp., 1978.

[5] И.В.Скрыпник, Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка, "Наукова думка", К., 1973.