M. KÖSSLER

~ SBÍRKA SPISŮ VYDÁVANÁ ~ JEDNOTOU ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

# ÚVOD DO POČTU DIFERENCIÁLNÍHO

KRUH

sv. 4

# K R U H

*SBÍRKA SPISŮ VYDÁVANÁ*

*JEDNOTOU ČS. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ*

za redakce B. Bydžovského, V. Posějpala a M. Valoucha

Svazek 4.

Miloš Kössler

# ÚVOD DO POČTU DIFERENCIÁLNÍHO

# ÚVOD DO POČTU DIFERENCIÁLNÍHO

Napsal

MILOŠ KÖSSLER

TISKEM A NÁKLADEM

*JEDNOTY ČS. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ*

V PRAZE 1926

# PŘEDMLUVA.

Tato knížka vznikla z úvodních přednášek pro posluchače matematiky na přírodovědecké fakultě university Karlovy. Při tom jest psána tak, aby ji mohl čísti každý, kdo zná počátky algebry, goniometrie a analytické geometrie.

Vynechány jsou téměř všechny aplikace počtu na geometrii, fysiku a jiné přírodní vědy, které nalezne čtenář v hojné míře jednak v knize V. Vojtěcha »Základy matematiky«, jednak v učebnicích oněch věd. Vyloženo jest jen několik hlavních myšlenek teorie a to tak, aby čtenář, který zná matematiku středoškolskou, si osvojil nejčastěji užívané způsoby matematického myšlení. Tím naučí se řešiti i úlohy, které přicházejí v aplikacích.

Avšak ani při tomto omezení látky nebylo možno, vzhledem k malému rozsahu knížky, postupovati všude s úplnou vědeckou přesností. To, jakož i propracování dalších problémů počtu diferenciálního jest úkolem velkých učebnic, a naše literatura má již vynikající knihy toho druhu z péra prof. dra K. Petra »Počet differenciální« a »Počet integrální«. Knížka tato splní zcela svůj úkol, jestliže podnítí čtenáře k studiu dalšímu.

Ve dvou dodatcích jest připojena látka, která při prvém studiu by čtenářův pokrok zpomalovala a tak brala mu chuť k pokračování.

Původních myšlenek knížka téměř neobsahuje. Jen teorii čísel reálných a posloupností pokusil jsem se vybudovati na základě nekonečných zlomků desetinných, které pro čtenáře, k nimž se obracím, jsou běžnou, ale poněkud nejasnou představou. Běželo o to, zdokonaliti tyto obrysy, aby se staly pojmy. Pokud a jak se to povedlo, posoudí odborníci.

*Ke konci děkuji p. prof. dru. Ed. Čechovi a p. asist. dru. K. Borůvkovi z university Masarykovy za opravu četných chyb v rukopisu a za mnohé nové podněty a p. doc. dru. Vojt. Jarníkovi z univ. Karlovy, mimo to také za pomoc při čtení korektur. Panu J. Bydžovskému, posluchači matematiky, náleží dík za narýsování obrazců a tiskárně J. Č. M. a F. za pečlivé provedení obtížné sazby a tisku.*

*V Praze v říjnu 1926.*

*M. Kössler.*

Kapitola I.

# ČÍSLA RACIONÁLNÍ A REÁLNÁ.

**1. Čísla racionální.** Matematika jedná o číslech. Z těchto čísel odvozujeme při počítání jiná čísla podle určitých nezměnitelných pravidel početních. S tohoto hlediska můžeme přirovnati matematiku ke hře šachové, která jest definována figurami, šachovnicí a přesnými pravidly hry. Pravidla tato jsou tak zvolena, aby žádné z nich neodporovalo druhému. Výsledkem operací jsou určité posice figur na šachovnici. Základem matematiky jest deset cifer (figur) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, potom řada operačních symbolů jako $+$, $-$, $=$, $:$, zlomková čára, desetinná tečka, závorky atd. a obecná čísla $a, b, c, \ldots p, q$, to jest zkratky, jimiž označujeme určitá seskupení cifer a jiných symbolů, jako na př. $a = 0{\cdot}357$, $b = 8/7$ atd. Z těchto symbolů tvoříme podle přesně předepsaných pravidel symboly nové. Ty jsou pak výsledkem počtu. Pravidla počtu jsou tak předepsána, aby žádné z nich nebylo ve sporu s jinými. Pravidla početní pro čísla celistvá kladná, záporná a nulu pokládejme za známá. Dvojice čísel celistvých $(p, q)$, kdež $q$ není rovno nule, definuje jednoznačně racionální číslo (zlomek) $a = p/q = p : q$. Jestliže dva znaky představují totéž číslo, píšeme $a = b$. Je-li $a$ různé od $b$, píšeme $a \neq b$. Symbol $>$ čteme »jest větší než«, symbol $<$ »jest menší než« a symbol $\geq$ »jest větší nebo rovno«. Počítání čísly racionálními pokládáme rovněž za známé. Řídí se pravidly, která splňují určité požadavky, jež jsou tak zvoleny, že při správném počítání podle nich nemůže dojíti ke sporům. Tyto požadavky jsou:

## A. Spořádanost čísel.

I. Jsou-li $a, b$ dvě čísla, jest splněn vždy jeden a jen jeden ze vztahů $a = b$, $a > b$ (čili $b < a$), $a < b$ (čili $b > a$).

II. Je-li $a > b$, $b > c$, jest také $a > c$. ve souvisl. na x (>3) úvl.

*Definice.* Číslo $a$ jest kladné, když $a > 0$, záporné, když $a < 0$, vymizí, když $a = 0$. Nula není ani kladná, ani záporná.

## B. Sčítání.

III. Jsou-li $a, b$ čísla, jest také $a + b$ číslo (jednoznačně určené).

IV. $a + b = b + a$. (Zákon komutatívní.)

V. $a + (b + c) = (a + b) + c$. (Zákon asociatívní.)

VI. Jediné číslo nula má vlastnost $a + 0 = a$.

VII. Je-li $a > b$, jest také $a + c > b + c$. (Zákon monotonie).

VIII. Rovnice $a + x = 0$ má vždy (jediné) řešení, které označujeme $x = -a$.

## C. Násobení.

IX. Jsou-li $a, b$ čísla, jest také $ab$ číslo (jednoznačně stanovené). Píšeme také $ab = a \,.\, b = a \times b$.

X. $ab = ba$. (Zákon komutatívní.)

XI. $a(bc) = (ab)c$. (Zákon asociatívní.)

XII. Jediné číslo *jedna* má vlastnost $a \,.\, 1 = a$, když $a \neq 0$.

XIII. Je-li $a > b$ a $c > 0$ jest $ac > bc$. Je-li $c < 0$, jest $ac < bc$ a je-li $c = 0$, jest $ac = bc = 0$. (Zákon monotonie.)

XIV. Rovnice $ax = 1$ má vždy (jediné) řešení, pokud $a \neq 0$. Řešení to označujeme $x = 1/a = 1 : a$. (Rovnice $0 \,.\, x = 1$ *nemá* řešení!)

XV. $a(b + c) = ab + ac$. (Zákon distributívní.)

## D. Odčítání a dělení.

definujeme vztahy

$$a - b = a + (-b), \qquad a : b = \frac{a}{b} = a \,.\, \frac{1}{b}, \quad (b \neq 0).$$

Děliti nulou nelze.

## E. Požadavek Archimedův.

XVI. Je-li $a$ číslo, pak lze nalézti celistvá kladná čísla $n$, pro která jest $n > a$.

Všechna další početní pravidla čísly racionálnými jsou pouhé logické důsledky předešlých. Tak na př. $b + (a - b) = a$, neboť

$$\begin{aligned} b + (a - b) &= b + (a + [-b]), \text{ (podle D)}, \\ &= b + ([-b] + a), \text{ (podle IV)}, \\ &= (b + [-b]) + a, \text{ (podle V)}, \\ &= 0 + a = a \text{ (podle VIII a VI)}. \end{aligned}$$

Důležité jest počítání nerovninami. Mimo pravidla sub I, II, VII, XIII, často se užívá těchto dalších, jež jsou z nich odvozena. Ve vztazích VII a XIII lze všechna znamení nerovnosti nahraditi opáčnými. Tak na př. z nerovnosti $a < b$ plyne $a + c < b + c$, neboť podle I jest $a < b$ ekvivalentní s $b > a$ a tedy podle VII jest $b + c > a + c$, čili opět podle I $a + c < b + c$. Z nerovnosti $ac > bc$ plyne při $c > 0$, $a > b$; při $c < 0$, $a < b$.

Zákony monotonie lze poněkud rozšířiti. Ze vztahů $a > b$, $c \geq d$, plyne $a + c > b + d$, neboť $a + c > b + c \geq b + d$. Je-li mimo to $d > 0$, bude také $ac > bd$ (neboť $ac > bc \geq bd$). Je-li $a > 1$, jest $\frac{1}{a} < 1$. Je-li $0 < b < 1$, jest $\frac{1}{b} > 1$.

Postuláty a definice, které jsme uvedli, stačí úplně k vybudování celé aritmetiky čísel racionálních, nemůžeme však tvrditi, že jsou na sobě nezávislé, to jest, že žádný z nich nelze odvoditi z ostatních.*)

Čísly racionálními nevystačíme při všech úlohách, ke kterým vede aritmetika. Tak na př. rovnice kvadratická $x^2 = 2$ (vypočísti úhlopříčku čtverce, jehož strana jest rovna jedné), není řešitelna, jak věděl již E u k l e i d e s, číslem racionálním. Úloh toho druhu jest mnoho. Proto jsme nuceni zavésti do matematiky n o v á č í s l a, tak zv. čísla *reálná*, která nám umožní řešiti i úlohy toho druhu. Tato nová čísla jsou čtenáři jistě známa ve tvaru nekonečných zlomků desetinných, jako na př. $1/3 = 0{\cdot}33333\ldots$, $\sqrt{2} = 1{\cdot}414\ldots$, $\pi = 3{\cdot}14159\ldots$ Na prvý pohled se může zdáti, že čísla ta nejsou nic nového, neboť na př. obvod kružnice každý ze čtenářů již mnohokráte počítal podle vzorce $O = 2\pi r$, což by mohlo vésti k domněnce, že pravidla početní pro taková čísla nijak se neliší od obvyklých pravidel pro čísla racionální. Zde však jest nutno si uvědomiti, že při tom užíváme čísla $\pi$ pouze zdánlivě, neboť ve sku-

*) Viz o tom podrobněji L o e w y A.: Lehrbuch der Algebra, Lipsko 1915, nebo P e r r o n O.: Irrationalzahlen, Berlín-Lipsko, 1921.

tečnosti počítáme přibližnou hodnotou 22/7 nebo 3·14159, která jest racionální. Takové přibližné počítání není uspokojivé se stanoviska teorie, která naopak žádá, abychom odvodili právě tak přesná pravidla početní pro čísla reálná, jako je známe pro čísla racionální. Abychom k tomu dospěli, musíme čísla reálná definovati a stanoviti pro ně pravidla početní, neobsahující sporu. Tak na př. musíme stanoviti, jak se počítá přesně součet $\sqrt{2}+\pi$ nebo součin $\sqrt{2}\,.\,\pi$. Že při tom nevystačíme s pravidly, která známe z aritmetiky pro desetinné zlomky o konečném počtu cifer, jest ihned patrno, neboť není na př. možno napsati pod sebe dvě čísla o nekonečném počtu cifer a pak prováděti sčítání nebo násobení jejich.

Proto látka, tvořící obsah odstavce následujícího (a dodatku I) jest základní důležitosti pro logické vybudování matematiky jako vědy. A jen v tomto vybudování spočívá oprávněnost matematiky, neboť o správnosti výsledku nemůžeme se přesvědčiti experimentem (jako na př. ve fysice), nýbrž jen tím, že dokážeme jeho souhlas s pravidly početními, která jsme přijali jako základ.

2. **Definice čísel reálných a počítání jimi.** Užíváme cifer a znamének vztahu + a — podobně jako při číslech desetinných o konečném počtu cifer. Definujeme číslo reálné takto:

*Číslo reálné jest symbol myšlený v podobě čísla desetinného kladného, záporného nebo rovného nule o nekonečném počtu cifer.*

Slovy »symbol o nekonečném počtu cifer« rozumíme takový symbol, v němž za *každou* cifrou na pravo od desetinné tečky následují cifry ležící ještě dále na pravo. Jest zřejmo, že takové číslo nemůžeme definovati tím, že bychom je vskutku napsali. Přes to jest možno číslo takové v myšlenkách sestrojiti na př. rčením: Na levo od desetinné tečky stojí plus a nula, na pravo od desetinné tečky stojí na $n$-tém místě cifra $1$, když $n$ jest mocnina dvojky ($n = 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$) a cifra $0$, když $n$ není mocnina dvojky. Čísla reálná, která v hořejší definici jsme postulovali, lze tedy vskutku sestrojiti určitým konstruktivním předpisem. Obecně to vyjádříme slovy:

*Číslo reálné, od nuly různé, jest dáno, když jest možno jednoznačně stanoviti jeho znamení vztahu a cifru stojící na libovolném místě před nebo za desetinnou tečkou.*

Znamení vztahu + a — musíme při tom rozeznávati od stejně psaných znamení úkonu (sčítání a odčítání). Znamení vztahu $+$ u čísel reálných obyčejně vynecháváme. Cifra, která stojí na $n$-tém místě na pravo od desetinné tečky, nazývá se cifra *řádu n-tého.* U čísel reálných budeme cifry až po řád $n$-tý nazývati *úsek řádu n-tého.* Tak na př. pro číslo $\pi = 3{\cdot}1415926\ldots$ jest úsek řádu nultého $\pi_0 = 3$, úsek řádu třetího $\pi_3 = 3{\cdot}141$ atd. Při čísle $\beta = -2{\cdot}718281\ldots$ jest úsek řádu prvého $\beta_1 = -2{\cdot}7$, úsek řádu čtvrtého $\beta_4 = -2{\cdot}7182$ atd.

Číslo reálné $\alpha$ s vynechaným znamením vztahu označujeme $|\alpha|$ a nazýváme symbol ten *prostá hodnota čísla $\alpha$.*

*Číslo nula, které pokládáme za rozhraní mezi čísly kladnými a zápornými, jest určeno jedním ze znaků ekvivalentních*

$$0 = +0{\cdot}0000\ldots = -0{\cdot}000000\ldots$$

Nula jest číslo, které není ani kladné, ani záporné. Dva ekvivalentní znaky zavedeme mimo pro nulu také pro čísla, která od některého místa počínajíce tvořena jsou samými nulami, jako na př.

$$56{\cdot}980400000\ldots = 56{\cdot}980399999\ldots \text{ nebo}$$
$$-0{\cdot}357000\ldots = -0{\cdot}3569999\ldots$$

Čísla ekvivalentní se mohou vzájemně zastupovati. Číslo takové mimo to prohlásíme za rovné číslu desetinnému o konečném počtu cifer, které vznikne vynecháním koncových nul (v našich příkladech $56{\cdot}9804$, po případě $-0{\cdot}357$).

Symbol $\alpha = \beta$ značí, že čísla $\alpha$ a $\beta$ jsou totožná nebo ekvivalentní. V každém jiném případě píšeme $\alpha \neq \beta$. Dvě čísla $\alpha$ a $\beta$, lišící se od sebe jen znamením vztahu, nazýváme čísly *souměrnými (symetrickými)* a píšeme $\alpha = -\beta$, $\beta = -\alpha$.

Čísla reálná lze uspořádati co do velikosti podle těchto definic: Číslo kladné jest větší než nula a než jakékoliv číslo záporné. Číslo kladné $\alpha$ jest větší než kladné číslo $\beta$, jestliže prvá cifra z leva u čísla $\alpha$, která se neshoduje se stejnolehlou cifrou čísla $\beta$, jest větší nežli tato a jestliže při tom $\alpha$ a $\beta$ nejsou ekvivalentní. Pak píšeme $\alpha > \beta$ a říkáme také, že $\beta$ jest menší než $\alpha$ ($\beta < \alpha$). Nula jest větší než kterékoliv číslo záporné. Dvě čísla záporná $\alpha \neq \beta$ nechť mají k sobě souměrná čísla kladná $\alpha_1 \neq \beta_1$. Pak říkáme, že $\alpha > \beta$ nebo $\alpha < \beta$ podle toho, zda $\alpha_1 < \beta_1$ či $\alpha_1 > \beta_1$. Z těchto definic jest zřejmo, že pro dvě daná čísla reálná platí vždy jeden a jen jeden ze tří vztahů $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$, $\alpha < \beta$.

Jestliže pro vesměs kladná nebo vesměs záporná čísla $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ platí $\alpha > \beta$, $\beta > \gamma$, jest také $\alpha > \gamma$, jak plyne přímo z definice. Je-li $\alpha$ rovno nule, jest $\beta$ i $\gamma$ záporné a věta jest také splněna. Je-li $\alpha$ kladné a $\gamma$ záporné, jest věta samozřejmá, právě tak, jako když $\gamma$ jest rovno nule a tedy $\beta$ i $\alpha$ kladné. Čísla reálná splňují tedy postuláty spořádanosti $A$, podobně jako čísla racionální. Dále říkáme, že čísla reálná tvoří množství všude husté. To znamená, že můžeme mezi kterákoliv dvě čísla $\alpha > \beta$ zařaditi nekonečně mnoho čísel $\gamma$ takových, že jest $\alpha > \gamma > \beta$. To vyplývá bezprostředně z definice.

Nyní můžeme definovati důležité pojmy: posloupnost čísel a limita posloupnosti, které nám umožní stanoviti pravidla pro sčítání, odčítání, násobení a dělení čísel reálných.

*Jestliže každému celistvému číslu z přirozené řady číselné* 1, 2, 3,... *jest přiřazeno určité číslo reálné* $a_1, a_2, a_3, \ldots$, *nazýváme všechna tato čísla hromadným názvem posloupnost čísel.*

Příklad 1. $a_1 = 0{\cdot}\dot{1}0\dot{2}$, $a_2 = 0{\cdot}\dot{2}$, $a_3 = 0{\cdot}\dot{1}0\dot{2}$, $a_4 = 0{\cdot}\dot{2}, \ldots$

2. $a_1 = 3{\cdot}2\dot{4}$, $a_2 = 3{\cdot}22\dot{4}$, $a_3 = 3{\cdot}222\dot{4}$, $a_5 = 3{\cdot}2222\dot{4}, \ldots$

3. $a_1 = -2{\cdot}680\dot{1}$, $a_2 = -2{\cdot}679\dot{2}$, $a_3 = -2{\cdot}6800\dot{1}$,
$a_4 = -2{\cdot}6799\dot{2}, \ldots$

Tečkou nad poslední cifrou, nebo dvěma tečkami nad první a poslední cifrou skupiny značíme, jak obvykle, že cifra nebo skupina se opakuje do nekonečna, na př. $0{\cdot}\dot{2} = 0{\cdot}2222\ldots$, $5{\cdot}30\dot{1}0\dot{2} = 5{\cdot}30102102\ldots$

Všimněme si zvláště posloupností 2 a 3. V posloupnosti 2 všechna čísla mají týž úsek prvého řádu (3·2), všechna čísla od druhého $a_2$ počínajíce mají týž úsek druhého řádu (3·22), všechna čísla od $n$-tého $a_n$ počínajíce mají týž úsek $n$-tého řádu (3·222...2, dvojka $n$-kráte opakovaná) atd. V posloupnosti 3 všechna čísla mají totožné úseky prvého řádu (—2·6), všechna mají téměř totožné úseky třetího řádu (—2·680, —2·679), od třetího $a_3$ počínajíce mají téměř totožné úseky čtvrtého řádu (—2·6800, —2·6799), od pátého $a_5$ počínajíce mají téměř totožné úseky pátého řádu (—2·68000, —2·67999) atd. Při tom nazýváme úseky téměř totožnými $n$-tého řádu takové dva úseky, jichž rozdíl jest roven jedné jednotce $n$-tého řádu.

O posloupnosti 2 můžeme říci: Ať zvolím jakkoliv vysoký řád $n$, vždy od $a_n$ počínajíce všechna čísla $a_n$, $a_{n+1}$, $a_{n+2}, \ldots$ mají totožné úseky řádu $n$-tého (3·222...2). Tento úsek nazveme *definitivní úsek n-tého řádu* dané posloupnosti Posloupnost 2 má tedy definitivní úseky všech řádů (3·2, 3·22, 3·222, 3·2222,...), které patrně můžeme považovati za úseky jednoho jediného reálného čísla $a = 3 \cdot \dot{2} = 3 \cdot 22222 \ldots$ Toto reálné číslo $a$ nazývá se *limita* posloupnosti 2.

U posloupnosti 3 zjistíme: Ať zvolím jakkoliv vysoký řád $n$, vždy lze nalézti takové $a_N$, že všechna čísla posloupnosti od něho počínajíce $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ mají totožné nebo téměř totožné úseky řádu $n$-tého ($-2 \cdot 6800 \ldots 0$, $-2 \cdot 6799 \ldots 9$). Tyto úseky můžeme považovati za úseky dvou ekvivalentních tvarů téhož čísla reálného $a = -2 \cdot 68\dot{0} = -2 \cdot 67\dot{9}$, které nazveme opět *limitou* posloupnosti 3.

Obecně označme úsek řádu $k$-tého čísla $a$ znakem $a^{(k)}$ Jestliže mezi členy posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ existuje takový $a_N$, že úseky řádu $k$-tého $a_n^{(k)}$ pro všechna $n > N$ jsou rovny témuž číslu $a$, budeme říkati: *Posloupnost má definitivní úseky řádu k-tého.* *Téhož* rčení užijeme i v tom případě, jestliže $a_n^{(k)}$ pro $n > N$ jsou všechna rovna buď jistému číslu $a$ nebo číslu $(a + 10^{-k})$ (úseky téměř totožné).

*Definujeme pak:*

***Posloupnost** $a_1, a_2, a_3, \ldots$ **má limitu, a to jednu jedinou, když v ní eksistují úseky definitivní každého řádu. Limita ta jest reálné číslo určené definitivními úseky.***

Píšeme symbolicky $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, což vyslovujeme větou: Limita $a_n$, když $n$ vzrůstá do nekonečna, jest $a$. O posloupnosti, která má limitu, budeme říkati, že *konverguje* (jest *konvergentní*). Jest zřejmo, že nikoliv každá posloupnost konverguje; tak na př. posloupnost 1 nemá limity, neboť nemá definitivních úseků ani prvého řádu a tedy ani řádů vyšších.

Abychom definice právě uvedené mohli užívati, musíme se ještě přesvědčiti, zda posloupnost s definitivními úseky každého řádu určuje vskutku jen jednu jedinou limitu. Jsou-li definitivní úseky každého řádu mezi sebou totožné, jest jimi limita jednoznačně stanovena. Zbývá dokázati, že posloupnost s definitivními úseky *téměř* totožnými má jedinou limitu. Jestliže mezi definitivními úseky řádu na př. $k$-tého se vyskytují stále (t. j. po každém indeksu) úseky dvojího typu (téměř totožné), pak definitivní úseky řádu $(k + 1)$-ho jsou také stále dvojího typu a můžeme o nich dokázati, že menší z nich končí devítkou a větší nulou. Dejme tomu, že menší z definitivních úseků řádu $k$-tého končí cifrou $a$ a tedy větší cifrou $(a+1)$, po případě 0, když $a=9$. Mezi definitivními úseky řádu $(k+1)$-ho budou tedy některé (menší) s cifrou $a$ na předposledním místě a jiné (větší) s cifrou $(a+1)$ na předposledním místě. Protože jsou to definitivní úseky nestejné, musí jejich rozdíl býti roven $10^{-k-1}$. To jest možné jen tak, že menší končí dvojskupinou $a9$ a větší dvojskupinou $(a+1)0$. Opakováním těchto úsudků pro řády $(k+1)$, $(k+2)$ atd. obdržíme větu, která vysvětluje, proč posloupnosti, které mají pouze t é m ě ř totožné definitivní úseky, se nazývají konvergentní.

*Posloupnost $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, ve které se vyskytují stále definitivní úseky každého řádu dvojího typu (téměř totožné), má limitu s periodou $\dot{9}$ (anebo, což jest totéž, číslo ekvivalentní s periodou $\dot{0}$).*

Můžeme tedy vysloviti větu: *Každá konvergentní posloupnost má jedinou limitu, která jest úplně stanovena definitivními úseky dané posloupnosti.*

Nyní již můžeme definovati sčítání a násobení čísel reálných. Učiníme to bez důkazů, pouhým výčtem vět. Důkazy jsou připojeny na konci této knihy v dodatku I.

Dvě čísla reálná $\alpha$, $\beta$ nechť mají úseky $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$; $\beta_1$ $\beta_2, \ldots \beta_n, \ldots$ Posloupnost $\sigma_1 = \alpha_1 + \beta_1$, $\sigma_2 = \alpha_2 + \beta_2, \ldots$ má limitu $\sigma$, kterou nazveme součet reálných čísel $\alpha$, $\beta$ a píšeme $\sigma = \alpha + \beta$. Posloupnost $\tau_1 = \alpha_1\beta_1$, $\tau_2 = \alpha_2\beta_2, \ldots \tau_n = \alpha_n\beta_n \ldots$ má limitu $\tau$, kterou nazýváme součin reálných čísel $\alpha$, $\beta$ a píšeme $\tau = \alpha\beta$.

O takto definovaném sčítání a násobení platí zákony komutativní, asociativní a distributivní, to jest

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha, \qquad \alpha\beta = \beta\alpha,$$
$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma, \qquad \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma.$$
$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Dále lze dokázati, že jediné nula a jednotka mají vlastnosti

$$\alpha + 0 = \alpha, \qquad \alpha \cdot 1 = \alpha\,(\alpha + 0).$$

Odčítání definujeme vztahem $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

Rovnice $\alpha + x = 0$ má jediné řešení $x = -\alpha$.

Je-li $\alpha > \beta$, jest $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$. Je-li $\gamma > 0$, jest také $\alpha\gamma > \beta\gamma$, Je-li $\gamma < 0$, jest $\alpha\gamma < \beta\gamma$, je-li $\gamma = 0$, jest $\alpha\gamma = \beta\gamma$.

Racionální čísla $p/q$, kdež $p, q$ jsou čísla celistvá, $q \neq 0$, jsou zvláštním případem čísel reálných, když $p/q$ položíme rovno konečnému nebo periodickému zlomku desetinnému, který vznikne, když provádíme dělení podle pravidel pro čísla desetinná o konečném počtu cifer.

Převrácenou hodnotu čísla reálného $a$, to jest řešení rovnice $x \, . \, a = 1$ stanovíme takto. Úseky čísla $a$ (při $a \neq 0$) nechť jsou $a_1, a_2, a_3 \ldots$; je-li mezi nimi několik prvních rovno nule, vypustíme je z úvahy. Utvořme posloupnost převrácených úseků racionálních čísel

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots \ldots \frac{1}{a_n}, \ldots \ldots$$

Každé z těchto čísel je podle předešlého rovno určitému reálnému číslu. Posloupnost tak vzniklá má limitu $x$, která jest jediným řešením rovnice $x \, . \, a = 1$ a označuje se znakem $x = \frac{1}{a}$ (nebo $1/a$).

Dělení $\frac{\beta}{a} = \beta : a$ definujeme jako násobení $\beta \cdot \frac{1}{a}$, když ovšem $a \neq 0$.

Každé číslo reálné $a$ jest menší než celistvé číslo $(a_0 + 2)$ (postulát Archimedův).

Ze všech těchto vět vyplývá, že čísla reálná splňují všechny skupiny postulátů $(A, B, C, D, E)$, nutné k přesnému vybudování aritmetiky, jak jsme je vytkli na začátku svých úvah při číslech racionálních. Z toho plyne, že reálnými čísly můžeme počítati právě takovým způsobem, jako čísly racionálními. Mimo to čísla racionální jsou pouze zvláštním případem čísel reálných.

Důkazy všech těchto tvrzení obsaženy jsou, jak již bylo řečeno, v dodatku na konci této knížky. Při prvém čtení není třeba, aby čtenář dychtící seznati co nejdříve metody počtu diferenciálního se jimi zdržoval. Avšak při studiu soustavném jest nezbytno dobře se s nimi seznámiti.

Všude v dalším budeme užívati k označování čísel reálných nebo racionálních bez rozdílu písmen latinské abecedy. Připomeňme ještě, že číslo reálné, které není racionální, nazývá se často *číslo iracionální*; podle našich definic jest to tedy číslo reálné o nekonečně velkém počtu cifer od nuly různých, neperiodické.

**3. Prosté hodnoty a nerovniny.** Jak v předešlém odstavci jsme stanovili, jest prostá hodnota reálného čísla kladného $a$ číslo samo a prostá hodnota čísla záporného $b$ jest $-b$. Prostá hodnota nuly jest nula. Užíváme znaku $|a|$, který čteme: prostá hodnota $a$. Tedy na př. $|7\cdot5| = 7\cdot5$, $|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$. Patrně jest

$$|a.b| = |a|.|b|, \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

Důležitá nerovnost, které v dalším mnohokrát použijeme, jest

$$|a+b| \leqq |a| + |b|.$$

Vztah ten — přesněji řečeno, jeden z obou naznačených vztahů — jest vždy splněn, ať $a$ a $b$ jsou jakákoliv dvě reálná čísla, kladná nebo záporná; důsledkem rovněž důležitým jest vztah $|x+y| \geqq |x| - |y|$, který plyne z předešlého dosazením $a = x+y$, $b = -y$.

Množství všech reálných čísel uspořádaných podle velikosti nazýváme *osa reálných čísel*. Jednotlivá reálná čísla nazýváme často *body* na ose číselné. V analytické geometrii říkáme jí obyčejně osa úseček (nebo pořadnic) a spojujeme s ní, abychom získali názornost, hrubou představu »přímky« narýsované na papíře nebo na tabuli. Z představy té nesmíme ovšem odvozovati žádných matematických důsledků pro čísla reálná.

Buďtež $a < b$ dvě reálná čísla. Jestliže r. číslo $x$ jest větší než $a$ a menší než $b$, nebo rovno jednomu z nich, říkáme, že $x$ patří k *uzavřenému intervalu* $a, b$. Slova »uzavřený interval $a, b$« nahrazujeme symbolem $\langle a, b \rangle$. Číslo $x$, které k němu patří, splňuje vztah $a \leq x \leq b$. Podobně definujeme interval *otevřený* $(a, b)$, jakožto všechna čísla $x$ splňující nerovnosti $a < x < b$. Interval otevřený tvoří na ose číselné *úsečku*, jejíž body koncové k intervalu *nepatří;* k intervalu uzavřenému počítáme i tyto body. *Okolí* bodu $x$ jest každý otevřený interval, který obsahuje $x$. Bod $x$ samotný k okolí nepřísluší.

**Cvičení.** 1. Dokažte větu $|a+b| \leq |a| + |b|$ tím, že uvážíte zvláště všechny možné kombinace znaménkové čísel $a, b$ $(++, +-, -+, --)$. Dokažte větu

$$|a+b+c+\cdots+k| \leqq |a| + |b| + |c| + \cdots + |k|.$$

2. a) Reálné číslo, jehož cifra řádu $n$-tého jest dána konečnou cifrou v součinu $2n$, $(5n)$ jest racionální. b) Reálné číslo, jehož cifra.

řádu $n$-tého jest 1, když $n$ jest prvočíslo, nebo nula, když $n$ není prvočíslo, jest iracionální. Totéž platí pro číslo, jehož cifra řádu $n$-tého jest 1 nebo 0, podle toho, zda $n$ jest či není mocninou čísla dvě. Dokažte tato tvrzení! (Důkazy opírají se o periodicitu čísla racionálního.)

## Kapitola II.

# POSLOUPNOSTI ČÍSELNÉ.

**4. O limitách posloupností.** V předešlé kapitole definovali jsme posloupnost čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots$; řekli jsme si, co rozumíme slovy *limita* posloupnosti a *konvergentní* posloupnost. Posloupnost má limitu $A$, když a jen když má*) definitívní úseky všech řádů, které definují reálné číslo $A$ (limitu). Všimněme si, v jakém vztahu jsou členy posloupnosti k její limitě $A$. *Zhruba můžeme říci, že členy $a_n$ s dosti vysokým indexem velmi málo se liší od limity $A$.* To vyplývá z té okolnosti, že všechny členy, které mají definitívní úseky řádu $k$-tého, liší se podle definice těchto úseků a limity od $A$ nanejvýše o jednu jednotku řádu $k$-tého $(10^{-k})$. Vlastnost tu budou míti všechny členy $a_n$ pro něž $n$ jest větší, než určité číslo celé, kladné $N(k)$, závislé na $k$. Zvolím-li nyní kladné číslo $\varepsilon$ libovolně malé, mohu vždy nalézti $k$ takové, že bude $10^{-k}$ ještě menší než $\varepsilon$.

Z toho plyne, že prostá hodnota rozdílu $|a_n - A|$ jest menší než $\varepsilon$ pro všechna $n$, která jsou větší než pevné číslo $N(k) = N(\varepsilon)$, závislé na $k$ a tedy na $\varepsilon$. Proto říkáme, že členy posloupnosti se vzrůstajícím $n$ blíží se ke své limitě. Také obráceně, platí-li nerovnina $|a_n - A| < \varepsilon$ pro *každé* $\varepsilon$, pokud $n > N(\varepsilon)$, můžeme tvrditi, že posloupnost má definitivní úseky každého řádu a že tedy má limitu. Neboť volím-li $\varepsilon = 10^{-k} (n > N(\varepsilon))$, jest $a_n$ větší nebo menší než pevné číslo $A$ nanejvýše o $10^{-k}$ a tedy má s číslem $A$ nutně totožný nebo

*) Budeme užívati rčení (viz též odst. 7.)

*B, když a jen když A*

místo dvou vět

1) *B, když A.* 2) *non B, když non A.*

Na př. věta: »Číslo jest dělitelno třemi, když a jen když ciferný součet je dělitelný třemi« zastupuje dvě věty: »Číslo jest dělitelno třemi, když ciferný součet jest dělitelný třemi« a »Číslo není dělitelno třemi, když ciferný součet není dělitelný třemi«.

téměř totožný úsek řádu $(k-1)$-ho. Jest zřejmo, že úseky ty budou totožné, má-li $A$ na $k$-tém místě cifru jinou než 0 nebo 9 a po případě téměř totožné, má-li tam $A$ jednu z obou jmenovaných cifer. Z toho plyne věta, která může sloužiti za druhou *definici* limity:

*Posloupnost má limitu A, když a jen když pro každé libovolně zvolené kladné $\varepsilon$ jest splněna nerovnina*

$$|a_n - A| < \varepsilon \quad \text{čili} \quad A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

*pro všechna $n > N(\varepsilon)$.*

Věty této užíváme k rozhodnutí, zda určité číslo $A$ jest či není limitou dané posloupnosti, hlavně tenkráte, když členy posloupnosti nejsou dány ve tvaru čísel desetinných a když tedy nemůžeme použíti původní definice limity. Tak na př. posloupnost $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$ má limitu 1, neboť rozdíl $a_n - 1 = (n+1)/n - 1 = 1/n$ jest menší než $\varepsilon$ pro všechna $n$, která jsou větší než $1/\varepsilon$.

Jako zvláštní případ jest třeba pamatovati, že posloupnost, jejíž členy od nějakého $a_n$ počínaje jsou všechny rovny témuž číslu $b$, má podle definice limitu rovnou $b$.

Limita jest číslo, které udává vlastnost posloupnosti jakožto celku. To jest nejlépe patrno z toho, že limita se nezmění, když několik libovolně zvolených členů posloupnosti nahradíme jinými, libovolnými čísly nebo je prostě vynecháme.

Názornou představu o posloupnosti s limitou $A$ získáme tímto fysikálním přirovnáním. Považujme členy posloupnosti $a_1, a_2, a_3 \ldots$ za posice za sebou jdoucí, které zaujímá bod $m$, pohybující se na ose $x$-ové. Bod ten blíží se k posici $A$. Toto »blížení se« k bodu $A$ může se díti velmi rozmanitými způsoby. Tak na př. v posloupnosti $1/1, 1/2, 1/3, \ldots 1/n \ldots$ blížíme se k limitě $A = 0$ stále víc a více a stále z prava, to jest čísly většími než $A$. V posloupnosti $3/1, 3/2, 7/3, 7/4 \ldots [2n + (-1)^{n+1}] : n, \ldots$ blížíme se k limitě $A = 2$ stále víc a více, avšak střídavě z prava a z leva. Jest to jakýsi oscilační pohyb kolem středu $A$ s největším výkyvem stále se zmenšujícím. Ve fysice nazývá se takový pohyb tlumený. Konečně v posloupnosti $(1 + 1/2^1)$, $(1 + 1/10^2)$, $(1 + 1/2^3)$, $(1 + 1/10^4)$, $(1 + 1/2^5)$ atd., blížíme se k limitě $A = 1$ opět oscilačním pohybem, jehož největší výkyvy nezmenšují se sice stále (1/2, 1/100, 1/8, 1/1000...), avšak pohyb má přes to charakter *tlumený,* který definujeme znakem: Po určité řadě výkyvů již žádný další výkyv nepřestoupí předem dané, libovolně malé kladné číslo $\varepsilon$.

Posloupnost $1^k, 2^k, 3^k, \ldots n^k, \ldots$ při celistvém kladném $k$ a posloupnost $-1, 7, 5, 21, 19, \ldots n^2 + (-1)^n (n+1), \ldots$ tvoří příklady posloupností, které nemají limity. Jsou však pozoruhodné pro tuto vlastnost:

*Ať zvolím kladné číslo M jakkoli veliké, vždy mohu nalézti člen posloupnosti, takže nejen on, ale i všechny další členy posloupnosti jsou větší než M.*

Místo tohoto souvětí říkáme stručně o každé posloupnosti toho druhu, že členy její vzrůstají do nekonečna kladnými čísly a označujeme vlastnost tu symbolem

$$a_n \to \infty, \text{ nebo také } a_n \to +\infty,$$

který čteme: $a_n$ se blíží k (plus) nekonečnu. Jest třeba zdůrazniti, že slovo nekonečno neznačí *číslo,* nýbrž pouhý symbol pro dosti komplikovaný fakt, týkající se posloupností. Dále jest dobře všimnouti si toho, že členy posloupnosti takového druhu musí sice konečně vzrůstati nad každé číslo $M$, že však není nutno, aby každý následující byl větší než předcházející. O tom svědčí příklad 2.

Obdobně užíváme symbolu $a_n \to -\infty$ při posloupnostech takového druhu, jako na př. $a_n = -n^3$.

Posloupnosti s limitou mají některé důležité vlastnosti, jichž si ihned povšimneme.

*a) Má-li posloupnost limitu A, jest oboustranně ohraničená, to znamená, že lze všechny její členy uzavříti do intervalu* $< A - d, A + d >$.

Volme $\varepsilon = 1$ a vyhledejme takové $N$, aby bylo $|a_n - A| < 1$ pro $n > N$. Nerovnost napsaná má ten význam, že všechna $a$ s indexem $n > N$ jsou uzavřena v intervalu $< A - 1, A + 1 >$. Mimo interval ten leží jen prvních $N$ členů posloupnosti, které vhodným rozšířením intervalu lze do něho také zahrnouti.

*b) Každá nová posloupnost, vybraná z členů dané posloupnosti mající limitu A, má rovněž limitu A.*

Seřaďme členy vybrané posloupnosti vzestupně podle indexů $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3} \ldots a_{n_q}, \ldots$ kdež tedy $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$ Původní posloupnost má limitu $A$, to jest ke každému $\varepsilon$ lze nalézti $N(\varepsilon)$ takže $|a_n - A| < \varepsilon$ pro všechna $n > N(\varepsilon)$. Jestliže tedy zvolím $q$ tak veliké, že $n_q > N(\varepsilon)$, což nastane jistě pro všechna $q$ větší než nějaké $Q(\varepsilon)$, bude $|a_{n_q} - A| < \varepsilon$ pro všechna $q > Q(\varepsilon)$ a tedy $\lim\limits_{q \to \infty} a_{n_q} = A$.

*c) Jestliže posloupnost $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n \dots$ má limitu rovnou nule a je-li $k$ číslo reálné, o němž víme, že jest menši než kterékoli $\varepsilon_n$*

$$k < \varepsilon_n \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots (c)$$

*pak jest nutně $k \leq 0$.*

Kdyby totiž $k$ bylo kladné, bylo by zřejmě možno nalézti mezi čísly $\varepsilon_n$ takové, které by bylo menší než $k$. To však by odporovalo předpokladu $(c)$ a nemůže tedy býti $k$ kladné.

d) Uveďeme ještě několik vět, týkajících se *dvou* posloupností. Nechť jest $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Utvoříme-li nové posloupnosti sčítáním, odčítáním, násobením nebo dělením stejnolehlých členů, daných posloupností, obdržíme posloupnosti, které rovněž mají limitu, a sice

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = a + b.$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \,.\, b_n) = \lim a_n \,.\, \lim b_n = a \,.\, b.$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{a}{b} \text{ pokud } b \neq 0.$$

Dokážeme poslední z napsaných vztahů. Zvolme číslo $\varepsilon$ menší než $|b| : 2$ a vyhledejme $N$ tak, aby $|a_n - a| < \varepsilon$, ale také $|b_n - b| < \varepsilon$, pokud jest $n > N$. Pak je

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{a_n\, b - b_n\, a}{b\, b_n} \right| = \left| \frac{(a_n - a)\, b - (b_n - b)\, a}{b\, b_n} \right|.$$

Protože však $|b_n - b| < \dfrac{|b|}{2}$ bude $|b_n| > \dfrac{|b|}{2}$ a tedy

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| < 2\, \frac{|a_n - a| \,.\, |b| + |b_n - b| \,.\, |a|}{|b|^2} \leq 2\varepsilon\, \frac{|b| + |a|}{|b|^2}$$

pokud $n > N$.

Zvolíme-li nyní libovolně malé $\eta$, je vždy $\left| \dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a}{b} \right| < \eta$, pokud je $\varepsilon$ voleno tak, že $2\varepsilon(|b| + |a|) : |b^2| < \eta$. a $\varepsilon < \left| \dfrac{b}{2} \right|$

Jest tedy podle definice $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$, když ovšem $b \neq 0$. Zcela stejně dokáží se věty, vztahující se k součtu nebo součinu limit.

*e) Nechť posloupnosti $a_1, a_2, a_3 \ldots, b_1, b_2, b_3 \ldots$ mají limity. Jestliže pro všechna n od určitého počínaje jest*

$$a_n \geqq b_n \text{ pak také } \lim a_n \geqq \lim b_n.$$

Abychom větu dokázali, položme

$$a_n = a + \varepsilon_n, \; b_n = b + \eta_n,$$

a uvažme, že podle věty předešlé jest $\lim \varepsilon_n = \lim (a_n - a) = \lim a_n - a = a - a = 0$ a podobně $\lim \eta_n = 0$. Podle předpokladu jest od určitého $n$ počínaje $a + \varepsilon_n \geqq b + \eta_n$ čili $a - b \geqq \eta_n - \varepsilon_n$. Klademe-li ve větě (c) $k = b - a$ a $\varepsilon_n - \eta_n$ místo $\varepsilon_n$ obdržíme $(b - a) \leqq 0$ čili $a \geqq b$.

**Cvičení.** 1. Jakou vlastnost má aritmetická posloupnost $a_1 = a$, $a_2 = a + d$, $a_3 = a + 2d, \ldots a_n = a + (n-1)d, \ldots$ pro *kladné* $d$, pro záporné $d$ a pro $d = 0$! ($a_n \to +\infty$, $a_n \to -\infty$, $\lim a_n = a$).

2. Jakou vlastnost má geometrická posloupnost $a_1 = a \,.\, q$, $a_2 = aq^2, \ldots a_n = aq^n \ldots$ pro $a > 0$, $0 \leqq q < 1$, pro $0 > q > -1$, pro $q = 1$, pro $q > 1$. ($\lim a_n = 0$, $\lim a_n = 0$, $\lim a_n = a$, $a_n \to +\infty$ nebo $a_n \to -\infty$).

3. Jsou-li $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ úseky iracionálního čísla $a$, jest $\lim a_n = a$!

4. Určete limity posloupností $(n \to \infty)$: $a_n = \dfrac{3n^2 + 2n + 5}{n^2}$, $a_n = \dfrac{an^2 + bn + c}{dn^2 + e}$ (dělte čitatele i jmenovatele $n^2$), $a_n = \dfrac{\sin n\alpha}{n}$, $a_n = q^n . \cos n\alpha$ ($|q| < 1$) (uvažte, že *sin* a *cos* mají prostou hodnotu menší než jedna nebo rovnou jedné).

5. Rozhodněte, pro které hodnoty čísla $x$ mají limitu posloupnosti

$a_n = x : n$, $a_n = x \,.\, n$, $a_n = 1 : nx$, $a_n = x^n (1 - x)^n$, $a_n = (x^n + 1) : (x^n - 1)$, $a_n = (\cos x)^n$, $a_n = \sin nx$, $a_n = x^n \,.\, \sin nx$.

6. Počet dní v roce $N$ po Kr. jest

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ 365 + \left|\cos \frac{2NR}{4}\right|^n - \left|\cos \frac{2NR}{100}\right|^n + \left|\cos \frac{2NR}{400}\right|^n \right\}; \; R = 90^\circ, \; N \geqq 1582.$$

**5. Posloupnosti monotonní.** Nikoliv každá posloupnost má limitu. V příkladech dosud uvažovaných mohli jsme vždy nějakým jednoduchým úsudkem zjistiti existenci i velikost, jindy zase neexistenci limity. To však není vždy možno, jak o tom svědčí na př. posloupnost $\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \ldots$ Jest tedy nutno vyhledati taková pravidla, která by umožnila zjistiti, zda daná posloupnost má limitu čili nic. Nejdříve odvodíme větu, týkající se zvláštního druhu posloupností:

*Každá shora ohraničená posloupnost čísel neklesajících má limitu.*

Vysvětleme nejdříve slova, jichž je v této větě užito. Posloupnost $a_1, a_2, a_3 \dots a_n, \dots$ nazývá se shora ohraničenou, je-li možno nalézti takové číslo $M$, že každý člen posloupnosti jest menší než $M$: tedy $a_n < M$ pro *každé n*. Posloupnost jest *neklesající*, to jest, členy posloupnosti jsou neklesající, jestliže každý její člen jest buď větší než člen předcházející nebo jest mu roven, tedy

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \dots \leqq a_n \leqq \dots$$

Dokážeme větu nejdříve za předpokladu, že všechny členy posloupnosti jsou *kladné*. Každý člen posloupnosti jest reálné číslo, které má určitý ciferný obraz. Čísla s periodou 9 nahraďme čísly ekvivalentními s periodou 0. Sledujme, jak se mohou měniti tyto ciferné obrazy, když postupujeme od $a_1$ k $a_2$, pak k $a_3$ atd. Tvrdíme: Existuje ke každému celistvému $s$ takové číslo celistvé $k_s$ že všechna čísla $a_n$ s indexem $n \geqq k_s$ shodují se ve všech cifrách řádu vyššího než $s$. Názorněji můžeme také říci: Od jistého $a_n$ počínaje, všechna další mají totožné úseky řádu $s$-tého.

Důkaz provedeme nepřímo. Mysleme si ve všech číslech $a_1, a_2, a_3 \dots$ odděleny úseky řádu $s$-tého: $a_1{}^s, a_2{}^s, a_3{}^s \dots$ a přirovnávejme při přechodu od $a^s_{k-1}$ k $a^s_k$ velikost těchto úseků v jednotkách řádu $s$-tého. Počet jednotek těch buď zůstane při přechodu nezměněn, nebo se o jednu či více jednotek *zvětší*. Mezi těmi přechody, při nichž nastává zvětšení, musí býti jeden *poslední*. Kdyby totiž tomu tak nebylo, musily by za *každým* $a^s_k$ následovati úseky s větším počtem jednotek řádu $s$-tého, nežli má $a^s_k$. To by mělo ten následek, že při postupu k indexům vyšším a vyšším musili bychom konečně dojíti k úsekům $a^s_n$, které by byly větší než číslo $M$, což jest ve sporu s předpokladem, že číslo $M$ jest horní hranicí posloupnosti. Tedy *poslední* zvětšený člen existuje a jeho index jest pak hledané číslo $k_s$. Důkaz právě provedený platí pro každé celistvé číslo $s$. Výsledek dosavadní úvahy shrneme do této věty: Sledujeme-li členy posloupnosti $a_1, a_2, a_3 \dots a_n \dots$ shledáme, že má definitivní úseky každého řádu. Těmito definitivními úseky jest jednoznačně definována limita posloupnosti $A$.

Poznamenejme ještě, že žádné $a_n$ nemůže býti větší než $A$. Neboť kdyby na př. bylo $a_{1000} - A = 10^{-6}$, pak by *všechna*

$a_n$ s indexem větším než 1000 lišila se od $A$ nejméně o $10^{-6}$ a tedy by $A$ nemohlo býti limitou čísel $a_n$.

Při důkazu jsme předpokládali, že všechny členy posloupnosti jsou kladné. Jest zřejmo, že důkaz platí beze změny i tenkráte, když několik počátečních členů jest záporných, nebo rovno nule, další pak kladné. Jsou-li všechny členy posloupnosti záporné a je-li $(-M)$ jejich dolní hranice, bude míti nová posloupnost $b_n = M + a_n$ všechny členy kladné neklesající a tedy bude míti limitu $B$. Podle věty d) odst. 4, jest potom

$$\lim a_n = \lim (b_n - M) = \lim b_n - M = B - M.$$

Podobně dokážeme, že posloupnost *nestoupající* a ohraničená má limitu. V posloupnosti takové platí vztahy $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \dots$ Nová posloupnost $b_n = -1 \,.\, a_n$ jest neklesající a má tedy limitu na př. $B$. Z toho plyne, že také $a_n = b_n \,.\, (-1)$ má limitu $B \,.\, (-1) = -B$.

Posloupnosti nestoupající a posloupnosti neklesající nazýváme společným názvem *posloupnosti monotoní*. Výsledkem celé úvahy jest tedy věta základní důležitosti:

*Ohraničená posloupnost monotoní má vždy limitu.*

**6. Odmocnina a obecná mocnina čísla reálného kladného.** Abychom mohli počítati čísly reálnými, musíme ještě definovati odmocninu a obecnou mocninu čísla reálného. Nechť $a$ jest dané kladné číslo reálné, $n$ celistvé číslo kladné. Rovnice

$$x^n = a$$

jest jen někdy řešitelná racionálním číslem $x$. V tom případě nazýváme $x$ $n$-tou odmocninou z čísla $a$, a píšeme $x = \sqrt[n]{a}$ nebo $x = a^{\frac{1}{n}}$. Pro jiná $a$ nemá rovnice racionální kořen. Můžeme však nalézti posloupnost desetinných zlomků o konečném počtu cifer $x_0, x_1, x_2, \dots x_k \dots$ neklesajících, které mají následující vlastnosti: $x_k$ jest největší desetinné číslo o $k$ cifrách za desetinnou tečkou té vlastnosti, že rozdíl $x_k^n - a = -\varepsilon_k$ jest záporný (to jest, každé číslo o $k$ cifrách, které jest větší než $x_k$ dává rozdíl kladný). Takové číslo lze vždy nalézti ke každému indexu $k$. Neboť $a$ leží jistě mezi dvěma $n$-tými mocninami celistvých čísel, to jest $(r+1)^n > a > r^n$. Potom volíme $x_0 = r$. Dále jest jistě možno nalézti cifru $r_1$, takže

$(r \cdot r_1 + 1)^n > a > (r \cdot r_1)^n$, kdež $0 \leqq r_1 \leqq 9$*). Potom jest $x_1 = r \cdot r_1$ atd. Patrně jest $x_k \geqq x_{k-1}$. Při tom se $x_k$ shoduje s $x_{k-1}$ až po $(k-1)$vé desetinné místo inklusive. Mimo to jest $x_k^n < a < (r+1)^n$ a tedy $x_k < r+1$. Posloupnost má tedy limitu $\lim x_k = x$. Při tom shoduje se $x_k$ s číslem $x$ až po $k$-té desetinné místo inklusive. Číslo $x$ nazýváme $n$-tou odmocninou z čísla $a$ a píšeme

$$x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

Důvod pro toto označení spočívá v tom, že $a - x_k^n = \varepsilon_k$ má limitu rovnou nule, když $k \to \infty$, jak vyplývá z těchto vztahů

$$a - x_k^n = \varepsilon_k > 0 \quad , \quad (x_k + 10^{-k})^n - a > 0.$$

a tedy sečtením

$(x_k + 10^{-k})^n - x_k^n > \varepsilon_k$ čili $\varepsilon_k < 10^{-k}\{x_k^{n-1} + x_k^{n-2}(x_k + 10^{-k}) + \ldots + (x_k + 10^{-k})^{n-1}\}$. Dále víme, že $x_k < r+1 < r+2$ a také $x_k + 0{\cdot}1 < r+2$. Z toho plyne $0 < \varepsilon_k < 10^{-k} \,.\, n \,.\, (r+2)^{n-1}$ a protože $n$ a $r$ nezávisí na $k$, $\lim \varepsilon_k = 0$ a tedy $a - x^n = 0$.

Toto řešení jest jediné. Neboť kdyby nějaké jiné reálné číslo kladné $y$ hovělo rovnici $a = y^n$, bylo by také $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2} . y + \ldots + y^{n-1}) = 0$ a tedy, protože druhá závorka jest kladná, $x - y = 0$.

Z toho plyne ihned vztah

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{nm}},$$

neboť všechna tato čísla hovějí rovnici

$$x^{nm} = a.$$

Dále definujeme racionální mocninu vztahem

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m.$$

Z toho plyne

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = \left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m\right)^n = \left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n\right)^m = a^m \text{ a tedy } a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Mimo to je

$$a^{\frac{mk}{nk}} = \left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{mk} = \left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{k}}\right)^{km} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}.$$

*) Je-li $r_1 = 9$, rozumíme znakem $r \cdot r_1 + 1$ číslo $r+1$.

Užitím těchto vět dokáže se obecně, značí-li $r_1$ a $r_2$ dvě libovolná racionální čísla, že

$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}, \quad (a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}, \quad (a \cdot b)^{r_1} = a^{r_1} \cdot b^{r_1}.$$

Je-li číslo $a > 1$, jest také $x = a^{\frac{1}{n}} > 1$. Z toho plyne: Jestliže $r_1 > r_2$, $a > 1$, je také $a^{r_1} > a^{r_2}$.

Nyní můžeme definovati mocninu $y = a^x$ reálného čísla $a > 1$, jehož exponent $x$ jest číslo iracionálné. Úseky čísla $x$ jsou racionální čísla $x_0, x_1, x_2 \ldots$, která mají limitu $x$. Potom také posloupnost

$$y_0 = a^{x_0}, \; y_1 = a^{x_1}, \; y_2 = a^{x_2} \ldots$$

má limitu, neboť $a^{x_k} = a^{x_{k-1}} \cdot a^{x_k - x_{k-1}}$, $x_k - x_{k-1} \geqq 0$ a tedy $a^{x_k - x_{k-1}} \geqq 1$. Z toho $y_k \geqq y_{k-1}$. Mimo to jest $y_k < a^{x_0+1}$ a posloupnost čísel $y_0, y_1, y_2 \ldots$ má tedy limitu $y$, která právě definuje mocninu $a^x$.

Při záporném $x$ budeme, jako u racionálních exponentů, považovati výraz $a^x$ za číslo $1 : a^{-x}$. Je-li $a = 1$, klademe $1^x = 1$, je-li $a < 1$, definujeme

$$(1 : a^x) = (1 : a)^x \text{ a tedy } a^x = 1 : \left(\frac{1}{a}\right)^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}.$$

O těchto obecných mocninách platí opět věty

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad (ab)^x = a^x \cdot b^x.$$

Připomeňme ještě, že v rovnici $y = a^x$ přísluší k většímu $x$ vždy větší $y$, pokud ovšem $a > 1$.

**Příklad.** 1. Nechť $a > 1$. Dokážeme, že $\lim\limits_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$. Posloupnost $a^{\frac{1}{1}}, a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{3}} \ldots$ jest stále ubývající, zdola ohraničená ($a^{\frac{1}{n}} \geqq 1$). Má tedy limitu $A$. Posloupnost z původní vybraná $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{6}} \ldots$ má tedy touž limitu (odst. 4b) $\lim\limits_{n \to \infty} a^{\frac{1}{2n}} = A$. Z toho však plyne dále

$$\lim a^{\frac{1}{n}} = \lim a^{\frac{1}{2n}} \cdot a^{\frac{1}{2n}} = \lim a^{\frac{1}{2n}} \cdot \lim a^{\frac{1}{2n}}, \text{ čili } A = A^2.$$

Rovnici té hoví jen čísla $A = 0$, nebo $A = 1$. Prvá možnost odpadá, neboť $\left| a^{\frac{1}{n}} - 0 \right|$ jest stále větší než 1 a zbývá tedy jen možnost $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$. Důkaz lze provésti také jinak. Pro dvě reálná čísla $a, b$ platí vždy $(a^n - b^n) = (a-b)\,(a^{n-1}+a^{n-2}.b+ + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1})$ a tedy $(a-1) = \left\{\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n - 1^n\right\} = \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right)\left\{a^{\frac{n-1}{n}} + a^{\frac{n-2}{n}} + \ldots + 1\right\}$. Jest tedy $\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) = (a-1) : \{\}$; protože pak $a^{\frac{n-k}{n}} > 1$, bude i $0 < a^{\frac{1}{n}} - 1 < (a-1) : n$. Z toho plyne podle věty e) z odst. 4 jednak $\lim a^{\frac{1}{n}} - 1 \geqq 0$ a za druhé $\lim a^{\frac{1}{n}} - 1 \leqq 0$, což oboje může býti, jen když $\lim a^{\frac{1}{n}} - 1 = 0$.

*Příklad 2.* Posloupnost daná obecným členem $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest stoupající a má limitu touž, jako posloupnost s obecným členem $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, která jest *klesající.* | K důkazu toho důležitého poznatku užijeme nerovnosti *(Bernoulli-ho)* $(1+p)^k > 1+kp$, kdež $p$ jest reálné číslo větší než $-1$ různé od nuly a $k$ číslo celistvé $>1$. Nerovnost platí jistě pro $k=2$, neboť $(1+p)^2 = 1+2p+p^2 > 1+2p$ a to proto, že $p^2$ jest kladné. Násobíme-li poslední nerovnost na obou stranách kladným číslem $(1+p)$, obdržíme $(1+p)^3 > 1+3p+2p^2$ a protože $2p^2$ jest kladné, $(1+p)^3 > 1+3p$. Jest tedy velmi pravděpodobno, že dalším násobením nerovniny dostaneme hledaný vztah pro $k=4$ atd. Že jest tomu vskutku tak, vyplývá z následující úvahy (*obecná indukce*). Dejme tomu, že vztah $(1+p)^k > > 1+kp$ jest dokázán pro určité číslo $k$. Násobme obě strany nerovnosti kladným číslem $(1+p)$. Obdržíme $(1+p)^{k+1} > > 1+(k+1)\,p+kp^2$, a tedy $(1+p)^{k+1} > 1+(k+1)\,p$. Vztah jest tedy v platnosti i pro číslo $(k+1)$. Protože pak platí pro $k=2$, jest jeho platnost zaručena pro každé celistvé kladné $k$.| Podle $B$ nerovnosti pro $n \geqq 2$ jest $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{n}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$. Násobíme-li obě strany číslem kladným $\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$ obdržíme po jednoduché úpravě $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n > \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$ čili $a_n > a_{n-1}$

Podobně jest podle *B.* $\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{1}{n}$.

Násobíme-li nerovnost číslem $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ obdržíme $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n >$ $> \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ čili $b_{n-1} > b_n$.

Mimo to jest $b_n > 1$ a tedy posloupnost ta jest klesající a zdola ohraničená. Má tedy limitu, která od doby Euler-ovy označuje se znakem $e$. Dále jest $a_n < b_n < b_1$ a tedy posloupnost stoupající $a_1, a_2, a_3, \ldots$ jest shora ohraničená a tedy konvergentní. Její limita jest identická s číslem $e$, neboť $e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right).\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)$ $. \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 . \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Numerický odhad čísla $e$ můžeme nyní provésti s libovolnou přesností na základě vztahu $a_m < e < b_n$, kdež $m, n$ jsou libovolná celistvá a kladná čísla. Tak na př. pro $m = 1$, $n = 5$ jest $2 < e < (6:5)^6 < 3$; přesnější hodnotu pro číslo $e$ vypočteme později jinou metodou.

*Příklad 3.* Dokážeme, že $\lim n^{\frac{1}{n}} = 1$. Podle předešlého příkladu jest $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ a tedy tím spíše $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n$, když volím $n > 3$. Z toho plyne $n^{\frac{1}{n}} > 1+\frac{1}{n}$, $(n+1) < n^{1+\frac{1}{n}}$ a tedy $(n+1)^{\frac{1}{n+1}} < n^{\frac{1}{n}}$. To však znamená, že pro $n > 3$ poposloupnost jest monotoní a při tom ohraničená $(n^{\frac{1}{n}} > 1)$. Má tedy limitu $A$. Limita tato jest identická s limitou kterékoliv posloupnosti vybrané z původní. Vybeřme ji tak, že z členů $n^{\frac{1}{n}}$ podržíme jen ty, v nichž $n = 2^{2^k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Čtenář si snadno spočte, že členy této nové posloupnosti jsou $2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{4}}, 2^{\frac{1}{32}}, \ldots$. Avšak tato posloupnost jest obsažena mezi čísly $2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{4}}, 2^{\frac{1}{5}}, \ldots$, která podle prvního příkladu mají limitu rovnou *jedné*. Tedy také $\lim n^{\frac{1}{n}} = 1$.

**7. Podmínky nutné a postačující.** Dříve než budeme jednati o posloupnostech obecných, vysvětlíme logický význam některých vět, jichž se při důkazech matematických často užívá.

Budiž $A$ nějaké tvrzení a $B$ jiné tvrzení. Řeknu-li:

1*a*) *B jest platné, když* (*jestliže*) *platí A*

jest tím naznačeno, že *vždy* platí $B$, *kdykoliv* platí $A$, z čehož ovšem plyne důsledek, že neplatí $A$, kdykoliv neplatí $B$. Označme opak tvrzení $A$ znakem (*non A*). Větu 1*a*) mohu pak nahraditi větou:

1*b*) (*Non A*) *jest platné, když platí* (*non B*).

Místo věty 1*a*) říkáme také z důvodů již vytčených:

1*c*) *A jest postačující podmínka pro B,*

a místo věty 1*b* říkáme:

1*d*) *B jest nutná podmínka pro A.*

Všechna tato rčení 1*a*), 1*b*), 1*c*), 1*d*) jsou ekvivalentní, to jest, z jednoho z nich plynou všechna ostatní jako důsledky.

*Příklad 1.* Tvrzení $A$: Číslo celistvé jest dělitelno devíti. Tvrzení $B$: Ciferný součet jest dělitelný třemi. Věty ekvivalentní:

1*a*) Ciferný součet jest dělitelný třemi, když číslo jest dělitelno devíti.

1*b*) Číslo není dělitelno devíti, když cif. s. není dělitelný třemi.

1*c*) Dělitelnost čísla devíti jest postačující podmínka pro dělitelnost cif. součtu třemi.

1*d*) Dělitelnost cif. součtu třemi jest nutná podmínka pro dělitelnost čísla devíti.

*Příklad 2. A:* Trojúhelník jest rovnoúhlý. *B:* Trojúhelník jest rovnostranný.

1*a*) Trojúhelník jest rovnostranný, když jest rovnoúhlý.

1*b*) Trojúhelník není rovnoúhlý, když není rovnostranný.

1*c*) Rovnoúhlost trojúhelníka jest postačující podmínka pro rovnostrannost.

1*d*) Rovnostrannost jest nutná podmínka pro rovnoúhlost.

Příklad druhý má tu vlastnost, že mimo větu: »Trojúhelník jest rovnostranný, když jest rovnoúhlý«, platí také věta stejně tvořená s opačnými tvrzeními: »Trojúhelník není rovnostranný, když není rovnoúhlý«. Tato poslední věta jest *nové* tvrzení, které se v planimetrii dokazuje a které není pouhým logickým ekvivalentem věty prvé, jak zřejmě vyplývá z příkladu prvého, neboť *nelze* říci: »Ciferný součet není dělitelný třemi, když číslo není dělitelno devíti!« Příklad druhý můžeme obecně vyjádřiti následujícím schématem: Nechť jsou správné věty:

$$2a)\ \begin{cases} B \text{ jest, když jest } A, \\ (\text{non } B) \text{ jest, když jest } (\text{non } A). \end{cases}$$

Místo těchto dvou vět budeme psáti, jak již jsme to zavedli v odst. 4.,

2*b*) *B jest, když a jen když jest A.*

Jest zřejmo, že můžeme také místo vět 2*a*) říci:

2*c*) *A jest nutná a postačující podmínka pro B,*

při čemž se opíráme o terminologii zavedenou na počátku tohoto odst. Věty 2*a*, 2*b*, 2*c* jsou tedy úplně ekvivalentní a naznačují všechny, že tvrzení *A* a tvrzení *B* se mohou navzájem zastupovati.

Důkaz o tom, že *A* jest nutná a postačující podmínka pro *B*, provádí se pravidelně tím způsobem, že se dokáže: »*B* jest, když jest *A*«, ale také »*A* jest, když jest *B*«.

**Cvičení.** Odůvodněte blíže tato tvrzení a převeďte je na jiná ekvivalentní:

1. Nutná podmínka pro to, aby čtyrúhelník byl čtverec jest, aby úhly jeho byly pravé, postačující podmínka jest, aby úhly byly pravé a současně, aby všechny strany byly dlouhé 4 *cm*. Nutná i postačující podmínka jest, aby úhly byly pravé a strany byly sobě rovny.

2. Číslo celé jest dělitelno šesti, když a jen když jest sudé a ciferný součet jest dělitelný třemi. (Udejte jiné podmínky jenom nutné nebo jenom postačující pro dělitelnost čísla šesti.)

3. »Postačující podmínka pro to, aby posloupnost, jejíž všechny členy leží v daném intervalu, měla limitu, jest její monotonost«. »Nutná podmínka pro to, aby posloupnost měla limitu, jest její oboustranná ohraničenost (to jest všechny členy v nějakém intervalu)«. Tato podmínka není postačující. »Monotonní posloupnost má limitu, když a jen když jest z obou stran ohraničena«.

Sestrojte numerické příklady ke každé z těchto tří vět.

4. Nutná a postačující podmínka pro to, aby posloupnost $a_1$, $a_2$, $a_3, \ldots$ měla limitu, jest: Eksistuje reálné číslo $A$ takové, že pro každé kladné $\varepsilon$ jest splněna nerovnost $|a_n - A| < \varepsilon$ pro všechna $n > N(\varepsilon)$ (viz počátek odst. 4).

**8. Obecné posloupnosti. Limes superior a inferior.** V odstavci druhém jsme definovali, kdy posloupnost má limitu. Tato definice poslouží nám k skutečnému rozhodnutí, jen když známe členy posloupnosti ve tvaru zlomků desetinných.

Tomu není vždy tak. Proto odvodíme jiné podmínky pro posloupnosti konvergentní.

*Nutná a postačující podmínka pro to, aby posloupnost* $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$ *měla limitu, jest tato:*

*Lze definovati dvě monotoní posloupnosti*

$$b_1 \leqq b_2 \leqq \ldots\ldots b_n \leqq \ldots\ldots,$$
$$c_1 \geqq c_2 \geqq \ldots\ldots c_n \geqq \ldots\ldots,$$

*které mají touž limitu a to tak, že*

$$b_n \leqq a_n \leqq c_n \ldots\ldots \quad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots.$$

Tím, že podmínky jsou nutné, chceme říci toto: Kdykoliv nějaká posloupnost má limitu na př. $A$, pak vždy lze sestrojiti dvě posloupnosti $b_n$ a $c_n$ shora uvedených vlastností. Důkaz jest snadný. Nechť jest tedy $\lim a_n = A$. To znamená

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon \quad \text{pro} \quad n > N(\varepsilon),$$

ať $\varepsilon$ jest zvoleno jakkoliv malé. Dosazujme za $\varepsilon$ postupně čísla stále menší a menší, která mají limitu rovnou nule. Z příslušných čísel $A - \varepsilon$ mohu utvořiti posloupnost $b_n$ a z čísel $A + \varepsilon$ posloupnost $c$ žádaných vlastností.*)

Tím, že podmínky jsou postačující, chceme říci toto: Jestliže jsou známy posloupnosti $b_n$ a $c_n$, které mají vlastnosti shora vytčené, pak také posloupnost $a_n$ má limitu. Důkaz zní takto: Zvolím-li $\varepsilon$ libovolně, mohu nalézti $N(\varepsilon)$, takže platí současně

$$A - b_n < \varepsilon, \quad c_n - A < \varepsilon \quad \text{pro všechna } n > N(\varepsilon).$$

To však znamená, že $b_n$ jest obsaženo v intervalu $\langle A - \varepsilon, A \rangle$ a $c_n$ v intervalu $\langle A, A + \varepsilon \rangle$. Protože $a_n$ leží mezi $b_n$ a $c_n$, je nutně

$$|a_n - A| < \varepsilon \quad \text{pro } n > N(\varepsilon).$$

Protože vztah tento platí pro *každé* $\varepsilon$, má posloupnost $a_n$ limitu $A$. Větu právě dokázanou si snadno zapamatujeme ve tvaru geometrickém.

---

*) Nechť posloupnost čísel kladných $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \ldots$ má limitu rovnou nule. Příslušná čísla $N(\varepsilon_1), N(\varepsilon_2), \ldots$ lze zřejmě voliti tak, aby bylo $N(\varepsilon_{k+1}) > N(\varepsilon_k)$. Pak jest $A - \varepsilon_k < a_n < A + \varepsilon_k$ pro $N(\varepsilon_{k+1}) \geqq n > N(\varepsilon_k)$. Pro všechna $n$ toho druhu volíme $b_n = A - \varepsilon_k$. Tím jsou sestrojeny hledané posloupnosti pro všechna $n = N(\varepsilon_1)$. Pro $n = 1, 2, \ldots N(\varepsilon)$ volíme $b_n$ rovno nejmenšímu z čísel $a_1, a_2, \ldots a_{N(\varepsilon_1)}$, $b_{N(\varepsilon_1)+1}$ a $c_n$ rovno největšímu z čísel $a_1, a_2, \ldots a_{N(\varepsilon_1)}$, $c_{N(\varepsilon_1)+1}$.

Uzavřené intervaly $< b_1, c_1 >, < b_2, c_2 >, \ldots < b_n, c_n > \ldots$ mají tu vlastnost, že každý z nich leží celý v intervalu předcházejícím a při tom délka $< b_n, c_n >$ má limitu rovnou nule, když $n \to \infty$. Každou posloupnost intervalů takového druhu budeme nazývati *»posloupnost intervalů do sebe zařazených«*. Předcházející větu lze pak vysloviti takto:

*Posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$ má limitu, jestliže jest splněna tato nutná a postačující podmínka:*

*Lze nalézti posloupnost do sebe zařazených intervalů $J_1, J_2, J_3, \ldots J_n, \ldots$, takže bod $a_n$ jest v intervalu $J_n$.*

Jest třeba ještě připomenouti, že každá posloupnost intervalů do sebe zařazených definuje jediný bod společný všem těm intervalům. To plyne ihned z této úvahy. Kdyby takové body byly dva $a$ a $b$, pak by oba byly v intervalu $J_n$ ať $n$ volím jakkoliv veliké. Protože pak $\lim_{n \to \infty} J_n = 0$, je také vzdálenost bodů $a, b$ rovna nule, čili body ty splývají.

Užitek odvozené věty jest dvojí. Slouží jednak k numerickému výpočtu limit, jednak k různým teoretickým důkazům. Na obojí uvedeme příklad.

Počítejme limitu posloupnosti s obecným členem

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad \text{kdež } n! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n.$$

Tato posloupnost jest stále vzrůstající a shora ohraničená, neboť

$$a_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Limitu její označme $E$.

Abychom odhadli velikost čísla $E$, utvořme rozdíl

$$a_{n+k} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+k)!} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \left\{ 1 + \frac{1}{(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots(n+k)} \right\}.$$

Jest tedy

$$a_{n+k} - a_n < \frac{1}{(n+1)!} \left\{ 1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{k-1}} \right\} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \, \frac{1 - 1 : (n+2)^k}{1 - 1 : (n+2)}.$$

$$a_{n+k} - a_n < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - 1:(n+2)} = \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{n+2}{n+1}$$

a z toho přičleněním k rovnici $E = E$

$$E - a_n - \frac{1.(n+2)}{(n+1)!\,(n+1)} < E - a_{n+k}.$$

Tento vztah platí pro *každé* $k$. Levá strana nezávisí na $k$, pravá strana s rostoucím $k$ blíží se nule. Podle věty $c$) z odst. 4 je tedy

$$E - a_n - \frac{1.(n+2)}{(n+1)!\,(n+1)} \leqq 0.$$

Mimo to víme, že $E > a_n$ a píšeme-li pro stručnost místo zlomku v předešlé nerovnosti $b_n$, je celkem

$$a_n < E \leqq b_n + a_n.$$

O číslech $(a_n + b_n)$ se čtenář snadno přesvědčí, že tvoří posloupnost klesající. Proto v posledním vztahu rovnost nikdy nemůže nastati. Numerický výpočet probíhá takto ($n = 11$):

$$0{\cdot}5000000000 = \frac{1}{2!} = 0{\cdot}5000000000$$

$$0{\cdot}1666666666 < \frac{1}{3!} < 0{\cdot}1666666667$$

$$0{\cdot}0416666666 < \frac{1}{4!} < 0{\cdot}0416666667$$

$$0{\cdot}0083333333 < \frac{1}{5!} < 0{\cdot}0083333334$$

$$0{\cdot}0013888888 < \frac{1}{6!} < 0{\cdot}0013888889$$

$$0{\cdot}0001984126 < \frac{1}{7!} < 0{\cdot}0001984127$$

$$0{\cdot}0000248015 < \frac{1}{8!} < 0{\cdot}0000248016$$

$$0{\cdot}0000027557 < \frac{1}{9!} < 0{\cdot}0000027558$$

$$0{\cdot}0000002755 < \frac{1}{10!} < 0{\cdot}0000002756$$

$$0{\cdot}0000000250 < \frac{1}{11!} < 0{\cdot}0000000251$$

$$\frac{1}{12!}\,\frac{13}{12} < 0{\cdot}0000000023$$

$$\overline{0{\cdot}7182818234} \qquad \overline{0{\cdot}7182818288}$$

Jest tedy na osm míst přesně $E = 2{\cdot}71828182\ldots$ Snadno si lze zapamatovati ciferný obraz vícemístný

$$E = 2{\cdot}7\ 1828\ 1828\ 45\ 90\ 45\ldots.$$

Při té příležitosti dokážeme, že číslo vypočtené jest identické s limitou od dřívějška známou $e = \lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Binomická věta zní

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1}\cdot a^{n-1}.b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}.b^2 + \cdots + b^n.$$

Jest tedy

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1.2.3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{1.2.3\ldots k}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \cdots,$$

čili

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < E$$

a tedy podle věty *e*) odst. 4.

$$e \leqq E \tag{1}$$

Dále jest pro každé $k < n$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots +$$
$$+ \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Jestliže $k$ volíme pevně a $n$ vzrůstá, je podle téže věty

$$e \geqq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}.$$

Protože vztah ten platí pro každé $k$, lze rovnítko vypustiti. Jest tedy podle věty dvakráte již použité

$$e \geqq \lim_{k \to \infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}\right) = E \ldots\ldots\ldots \tag{2}$$

Pro čísla $e$ a $E$ platí tedy *současně* vztahy (1) a (2). To jest možno, jen když $E = e$.

Teoretický význam věty na počátku odstavce dokázané vysvitne na př. při důkazu věty:

*Každá posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ oboustranně ohraničená má aspoň jeden bod zhuštění. Bod zhuštění jest takový, v jehož každém sebe menším okolí leží nekonečně mnoho členů posloupnosti anebo který jest roven nekonečně mnoha členům posloupnosti.*

*Důkaz.* Všechny členy posloupnosti — protože jest ohraničená — lze uzavříti do intervalu $< a, b >$. Rozpolme tento interval $J_0$. Aspoň v jednom z nových intervalů leží nekonečně mnoho členů posloupnosti, neboť kdyby tomu tak nebylo, měla by posloupnost konečný počet členů, což odporuje definici. Interval ten, a jsou-li to oba, tedy levý z nich, označme $J_1$ a rozpolme jej opět. Získáme interval $J_2$, tvořící polovinu $J_1$ a obsahující nekonečně mnoho členů posloupnosti (jsou-li dva, volíme opět levý). Tak pokračujeme dále. Vzniklé intervaly $J_0, J_1, J_2, \ldots$ jsou do sebe zařazeny ve smyslu definovaném v předešlém odstavci, neboť $n$-tý má patrně délku $(b - a) : 2^n$, jejíž limita pro $n \to \infty$ jest nula. Každý z intervalů těch obsahuje nekonečně mnoho bodů posloupnosti dané a nalevo od každého z nich leží jen konečný počet členů posloupnosti. Jediný bod, který jest společný všem těmto intervalům, nazveme $\beta$. Bod tento jest bod zhuštění posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \ldots$, neboť, zvolíme-li libovolně malé číslo $\varepsilon$, je bod $\beta$ středem intervalu $< \beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon >$ a mimo to je i bodem intervalu $J_n$. Zvolíme-li $n$ tak veliké, že délka intervalu $J_n$ je menší než $\varepsilon$, padne $J_n$ do okolí uvažovaného $< \beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon >$ a obsahuje tedy toto okolí nekonečně mnoho členů posloupnosti. Z té okolnosti, že na levo od $J_n$ nemůže ležeti žádný bod zhuštění, vyplývá, že bod zhuštění $\beta$ jest nejmenší ze všech bodů zhuštění. Neboť bod zhuštění menší než $\beta$ ležel by nalevo od $\beta$ a tedy také nalevo od nějakého intervalu $J_n$. Nejmenšímu bodu zhuštění $\beta$ říkáme latinsky *limes inferior**) posloupnosti $a_1, a_2, \ldots$ a označujeme jej jedním ze znaků

$$\beta = \liminf_{n \to \infty} a_n = \varliminf_{n \to \infty} a_n.$$

Podobně definujeme největší z bodů zhuštění čili *limes superior**) *lim sup* $a_n = \overline{\lim}\, a_n$. Dospějeme k němu tím způsobem, že při půlení intervalů volíme za další interval onu po-

---

*) *Limes*, česky doslova *mez* jest latinský název pro bod zhuštění. *Inferior* značí *dolní*, *superior horní*. Zpravidla budeme užívati názvů latinských, protože značky *lim inf* $\equiv \underline{\lim}$ a *lim sup* $\equiv \overline{\lim}$ jsou mezinárodně užívány.

lovinu, která obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti a při tom leží co nejdále napravo.

*Příklad.* Posloupnost s obecným členem $a_n = 1 + (-1)^n + \frac{1}{n}$ má

$$\limsup a_n = 2, \qquad \liminf a_n = 0,$$

jak jest bezprostředně patrno.

*Cvičení.* 1. Utvořte sami posloupnosti o jednom nebo několika bodech zhuštění.

2. Dokažte, že posloupnost $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$, která má $\lim a_n = a$, má *jediný* bod zhuštění $\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n = a$, (Návod: Ať $\varepsilon$ jest jakkoli malé, vždy leží *vně* intervalu $< a - \varepsilon, a + \varepsilon >$ jen konečný počet členů posloupnosti a uvnitř nekonečný počet.)

3. Dokažte, že posloupnost, která má jediný bod zhuštění

$$\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n = a$$

má limitu $a$. (Posloupnost má jediný bod zhuštění $a$. V intervalu $< a - \varepsilon, a + \varepsilon >$ leží tedy všechny členy $a_n$ pokud $n > N(\varepsilon)$.)

4. Posloupnost $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ nechť má bod zhuštění $\gamma$. Z posloupnosti lze vždy vybrati jinou

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k} \ldots$$

která má vlastnost $\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = \gamma$.

(Sestrojíme posloupnost intervalů do sebe zařazených $J_1$, $J_2$, $J_3 \ldots$, jichž společným bodem jest $\gamma$. První člen posloupnosti $a_1, a_2 \ldots$, který padne do $J_1$ nazveme $a_{n_1}$, z dalších členů první, který padne do $J_2$ nazveme $a_{n_2}$ atd.)

**9. Bolzano-Cauchy-ovo všeobecné kriterium pro existenci limity.** Nutné a postačující podmínky pro konvergentní posloupnost, které jsme si sestrojili v předešlém odstavci, užívají dvou pomocných posloupností $b_n$ a $c_n$. Bývá obtížno, sestrojiti monotoní posloupnosti v daném případě. Proto vyslovíme nutné a postačující podmínky ještě v jiné formě, kterou v podstatě objevil již *Bolzano* a později nezávisle na něm *Cauchy.*

*Posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \ldots$ má limitu, když a jen když k libovolně zvolenému kladnému číslu $\varepsilon$ lze nalézti takové celistvé a kladné číslo $N(\varepsilon)$, že platí*

$$| a_{n'} - a_{n''} | < \varepsilon \text{ pro všechna } n' > N(\varepsilon),\ n'' > N(\varepsilon).$$

Především dokážeme, že existence limity jest postačující podmínka pro to, aby byla splněna nerovnost *Bolzano-Cauchy-ova* $(B - C)$. Když posloupnost má limitu, pak od jistého indexu $N(k)$ počínaje všechny členy posloupnosti mají totožné nebo téměř totožné úseky řádu $k$-tého, a tedy, jsou-li $n'$, $n''$ dva indexy větší než $N(k)$, jest, jak snadno nahlédneme, $|a_{n'} - a_{n''}| < 2 . 10^{-k}$ Při daném $\varepsilon$ lze vhodnou volbou čísla $k$ docíliti toho, aby $2 \quad 10^{-k} < \varepsilon$ a tedy také $|a_{n'} - a_{n''}| < \varepsilon$, q. e. d.

Jako druhý krok dokážeme: Jestliže posloupnost splňuje podmínku $B - C$, má limitu. Zvolme $\varepsilon = 10^{-k}$. Pak pro všechna $n > N(k)$ je $|a_N - a_n| < 10^{-k}$ a tedy úseky řádu $(k-1)$-ho pro všechna taková $a_n$ jsou totožné nebo téměř totožné. Jsou totiž tři možnosti. Buď číslo $a_N$ má na $k$-tém místě desetinném cifru *9* nebo cifru *0*, nebo konečně cifru jinou než *9* a *0*.

Je-li tam cifra jiná než 9 a 0, jsou patrně úseky řádu $(k-1)$-ho u všech čísel $a_n$ pro $n > N(k)$ totožné, neboť $a_n = a_N + \varepsilon_n$, kdež $|\varepsilon_n| < 10^{-k}$. Jsou to tedy úseky *definitivní.*

Je-li cifra ta devítka, jsou patrně úseky $a_n^{(k-1)}$ pro $n > N(k)$ rovny buď $a_N^{(k-1)}$ nebo $(a_N^{(k-1)} + 10^{-k+1})$ a jsou tedy *definitivní.*

Je-li cifra ta nula, jsou patrně $a_n^{(k-1)}$ pro $n > N(k)$ rovny buď $a_N^{(k-1)}$ nebo $(a_N^{(k-1)} - 10^{-k+1})$ a jsou tedy *definitivní.*

Posloupnost, která splňuje podmínky $B - C$, má tedy definitivní úseky každého řádu a má tedy také limitu.

## Kapitola III.

# ŘADY.

**10. Obecné kriterium konvergence.** Sčítání jsme definovali pouze pro *konečný* počet sčítanců. Nemůžeme tedy mluviti o »součtu všech členů« dané posloupnosti $u_1, u_2, u_3 \ldots$, aniž jsme přiřkli symbolickému rčení tomu novou definicí nějaký význam. Proto definujeme:

*Součet všech členů posloupnosti $u_1, u_2, u_3 \ldots$ jest roven $s$, jestliže nová posloupnost* **částečných součtů**

$$s_1 = u_1, \; s_2 = u_1 + u_2, \; s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \ldots \; s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

*má limitu rovnou $s$.*

Místo znaku $s = \lim\limits_{n \to \infty} s_n = \lim\limits_{n \to \infty} (u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n)$

píšeme pak

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

a vyslovujeme větu:

Součet nekonečné řady $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ jest roven $s$.

Nekonečná řada, která má součet, nazývá se *konvergentní.* Jestliže číslo $s$ neexistuje, to jest, jestliže posloupnost částečných součtů $s_1, s_2, s_3 \ldots$ nemá limity, nazývá se nekonečná řada *divergentní.* Tak na př. řada $q + q^2 + q^3 + \ldots$ při $|q| < 1$ jest konvergentní, neboť $s_n = q \cdot (1 - q^n) : (1 - q)$, a tedy $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = q : (1 - q)$. Řada $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ jest divergentní, neboť posloupnost $s_1, s_2, \ldots$ nemá limity. Z definice konvergence vyplývá ihned důležitý poznatek: Jestliže v nekonečné řadě vynecháme nebo přidáme konečný počet sčítanců, lze tím sice změniti součet řady, nikoliv však konvergenci její. Z kriteria Bolzano-Cauchy-ova pro posloupnost $s_1, s_2, s_3 \ldots$ vyplývá ihned toto *všeobecné kriterium konvergence:*

*Nutná a postačující podmínka pro konvergenci řady*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

*jest:*

*Ať zvolím kladné číslo $\varepsilon$ jakkoli, vždy dá se nalézti takové celistvé kladné $N(\varepsilon)$, že pro všechna $n \geqq N(\varepsilon)$ a pro všechna celistvá $k > 0$ platí*

$$| u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k} | < \varepsilon.$$

Toto kriterium má, jak uvidíme, velký význam při provádění důkazů různých vět. Pro praktické rozhodování o konvergenci odvodíme v příštím odstavci pravidla sice méně všeobecná, za to však pohodlnější.

Zde připojíme jen jednu poznámku. Nutná, nikoliv postačující podmínka pro konvergenci řady jest $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$. Pro konvergentní řadu jest totiž

$$\lim s_n = s, \ \lim s_{n-1} = s \qquad \text{a tedy nutně}$$

$$\lim u_n = \lim (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$$

Tak na př. v geometrické řadě

$$q : (1 - q) = q + q^2 + q^3 + \ldots \qquad | q | < 1$$

jest vskutku $\lim q^n = 0$. Byl by však omyl, domnívati se, že řada, v níž $\lim u_n = 0$, jest vždy konvergentní, čili, že podmínka ta jest postačující. Jednoduchým příkladem pro to jest řada *harmonická,* jejíž rozbor provedeme. Jest to řada

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Při tom jest

$$1+\frac{1}{2}>2\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}>8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^k+2^k}>2^k\cdot\frac{1}{2\cdot 2^k}=\frac{1}{2}$$

Sečtením těchto nerovnin dostaneme

$$s_{2^{k+1}}>1+\frac{k}{2}.$$

Z toho plyne, že částečné součty $s_2, s_4, s_8, s_{16}, \ldots$ vzrůstají nad všechny meze. Řada harmonická jest tedy divergentní, ačkoliv $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

**Cvičení.** Dokažte věty:

a) Jestliže $u_1+u_2+\ldots$ konverguje a má součet $s$, pak také $au_1+au_2+\ldots$ konverguje a má součet $as$.

b) Jestliže řady $u_1+u_2+\ldots$, $v_1+v_2+\ldots$ obě konvergují, konverguje také řada $(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\ldots$ a má součet rovný součtu prvých dvou řad.

**11. Řady s kladnými členy.** Řada s členy vesměs kladnými buď konverguje nebo diverguje tak, že částečné součty $s_1, s_2, s_3, \ldots s_n \ldots$ vzrůstají s rostoucím $n$ do nekonečna. To plyne okamžitě z toho, že posloupnost stále vzrůstající $s_1\leqq s_2\leqq s_3\leqq$ buď jest shora ohraničená a pak má limitu, nebo není shora ohraničená.

O konvergenci či divergenci řady s kladnými členy velmi často můžeme rozhodnouti podle tak zvaného *principu přirovnání řad.*

Přirovnejme dvě řady s kladnými členy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + \ldots$$

Znamení $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ čteme »součet $u_n$ od $n = 1$ do nekonečna«. Dejme tomu, že o řadě *druhé* víme, že konverguje a o členech řady prvé nechť platí $u_n \leq v_n$ pro všechna $n$. *Pak také prvá řada konverguje a její součet jest menší nebo roven součtu druhé řady.* Při důkazu označme částečné součty prvé řady $s_n$ a druhé řady $\sigma_n$. Tvrzení, že druhá řada konverguje, jest identické s větou, že eksistuje limita $\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \sigma$. Avšak víme, že $u_1 \leq v_1$, $u_2 \leq v_2$, ... $u_n \leq v_n$, ... a tedy

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = s_n \leq \sigma_n \leq \sigma.$$

Posloupnost $s_1 < s_2 < s_3 \ldots$ jest tedy shora ohraničená a má tudíž nějakou limitu $s$. Ze vztahu $s_n \leq \sigma$ plyne dále $s \leq \sigma$.

Doplňkem k větě dokázané jest věta: Jestliže druhá řada diverguje a je-li $u_n \geq v_n$, diverguje i řada první. Důkaz jest téměř samozřejmý.

Zvolme speciálně za druhou řadu konvergentní řadu geometrickou

$$\frac{q}{1-q} = q + q^2 + q^3 + \ldots, \quad 0 < q < 1.$$

Tak obdržíme tak zv. kriterium Cauchy-ovo:

*Jestliže řada s kladnými členy $\Sigma u_k$ má vlastnost vyjádřenou nerovnostmi $\sqrt[k]{u_k} \leq q < 1$, kdež $q$ jest konstanta na $k$ nezávislá, řada konverguje a její součet $s \leq q : (1 - q)$. Jestliže však $\sqrt[k]{u_k} \geq 1$ pak řada diverguje.*

Podmínka konvergence jest na př. vždy splněna, jestliže existuje limita $\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{u_k} = q_1 < 1$, neboť pak jest $\sqrt[k]{u_k} = q_1 + \varepsilon_k$, kdež $\lim \varepsilon_k = 0$. Zvolíme-li $k$ větší než jisté $K$, je $\varepsilon_k$ menší nežli na př. $(1 - q_1) : 2$ a tedy $\sqrt[k]{u_k} < q_1 + (1 - q_1) : 2 = (1 + q_1) : 2 < 1$ pro všechna $k > K$.

Odvoďme ihned další kriterium *d'Alembertovo:*

*Jestliže v řadě kladných členů $\Sigma u_k$ jest od nějakého k počínaje $(u_{k+1} : u_k) \leqq q < 1$, řada konverguje. Jestliže však $(u_{k+1} : u_k) \geqq 1$ řada diverguje.*

Je-li totiž první nerovnost splněna pro $k \geqq K$, je

$$u_{K+1} \leqq (u_K \cdot q),\ u_{K+2} \leqq (u_{K+1} \cdot q), \dots u_{K+p} \leqq (u_{K+p-1} \cdot q).$$

Násobením nerovnin obdržíme $u_{K+p} \leqq (u_K \cdot q^p)$. Řada

$$u_K\, q + u_K\, q^2 + u_K\, q^3 + \dots$$

konverguje a tedy podle principu přirovnání řad tím spíše konverguje i řada

$$u_{K+1} + u_{K+2} + u_{K+3} + \dots$$

a tedy i řada původní. Zcela podobně se dokáže i druhá část věty o divergenci.

Podmínka *d'Alembertova* jest na př. vždy splněna, jestliže existuje limita $\lim\limits_{k \to \infty} (u_{k+1} : u_k) = q < 1$. Důkaz jest zcela obdobný jako při kriteriu Cauchy-ovu.

Tak na př. řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^r\, x^k$ konverguje pokud $0 \leqq x < 1$ a diverguje pro $x > 1$, neboť $\lim\limits_{k \to \infty} (u_{k+1} : u_k) = \lim\limits_{k \to \infty} (k+1)^r\, x : k^r = x$. Řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ konverguje pro každé $x \geqq 0$, neboť

$$\lim (u_{k+1} : u_k) = \lim x : (k+1) = 0 < 1.$$

Kritérium *d'Alembertovo* selhává na př. při řadě

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots,$$

neboť podíl $(u_{k+1} : u_k)$ jest roven

$$\left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \frac{1}{3} \qquad \text{nebo} \left(\frac{3}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{2},$$

podle toho, zda $k$ jest liché či sudé. Jestliže $k$ vzrůstá sudými hodnotami, podíl vzrůstá nad všechny meze, vzrůstá-li $k$ lichými hodnotami, blíží se podíl nule. Proto nemůžeme souditi ani na konvergenci, ani na divergenci. Kriterium Cauchy-ovo však rozhodne pro konvergenci, neboť jest vždy $\sqrt[k]{u_k} \leqq \frac{1}{2}$.

Obě kriteria selhávají při řadách, v nichž limita podílu $(u_{k+1} : u_k)$ jest rovna právě *jedné*. Že v případě tom selhává také Cauchy-ovo kriterium, nebudeme zde dokazovati. Příklad takové řady jest $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha > 0$.

Jestliže řada taková má členy *nestoupající*, poslouží nám často tak zv. Cauchy-ovo *kondensační kriterium:*

*Jestliže v řadě kladných členů* $u(1) + u(2) + \ldots$ *jest* $u(1) \geq u(2) \geq u(3) \geq \ldots$, *pak řada konverguje (diverguje), když řada* $2 \,.\, u(2) + 2^2 \,.\, u(2^2) + 2^3 \,.\, u(2^3) + \ldots$ *konverguje (diverguje).*

Důkaz jest zcela obdobný důkazu při řadě harmonické. Jest totiž

$$u(2) + u(3) \leq 2\, u(2)$$
$$u(4) + u(5) + u(6) + u(7) \leq 4 \,.\, u(4)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u(2^n) + u(2^n + 1) + \ldots + u(2^{n+1} - 1) \leq 2^n \,.\, u(2^n)$$
$$u(2) + u(3) + \ldots + u(2^{n+1} - 1) \leq 2\, u(2) + 2^2\, u(2^2) + \ldots + 2^n\, u(2^n),$$

a tedy z ohraničenosti součtů na pravé straně při rostoucím $n$ vyplývá ohraničenost součtů na levé straně a tedy i konvergence řady. Druhá část kriteria o divergenci se dokáže obdobně z nerovnin

$$u(3) + u(4) \geq 2\, u(4)$$
$$u(5) + u(6) + u(7) + u(8) \geq 4 \,.\, u(8) \quad \text{atd.}$$

V řadě $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha > 0$ jest $u(k) = 1 : k^\alpha$ a tedy pomocná řada zní

$$2 \,.\, \frac{1}{2^\alpha} + \frac{2^2}{2^{2\alpha}} + \frac{2^3}{2^{3\alpha}} + \ldots \text{ čili } \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^3 + \ldots$$

To však jest geometrická řada s podílem $q = 1 : 2^{\alpha-1}$, která konverguje, když $2^{\alpha-1} > 1$ a diverguje, když $2^{\alpha-1} \leq 1$. Řada původní tedy konverguje, když $\alpha > 1$, a diverguje, když $\alpha \leq 1$.

**Cvičení.** 1. Prvá z řad $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^k}$, $\sum_{k=1}^{\infty} k^k \,.\, x^k$ konverguje a druhá diverguje pro každé $x > 0$.

2. Dokažte, že řady $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \lg^\alpha k}$, $\sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{k \lg k \lg^\alpha (\lg k)}$ konvergují či divergují podle toho, zda $\alpha < 1$ či $\alpha \geq 1$.

3. Dokažte podle Cauchy-ova kondensačního krit., že v konvergentní řadě s nestoupajícími kladnými členy $\Sigma u(k)$ musí býti $\lim n \,.\, u(n) = 0$ (A b e l ů v teorém. Při důkazu užijte okolnosti $\lim\limits_{k\to\infty} 2^k u(2^k) = 0$).

4. Pro která $s$ konverguje řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(ak+b)^s$?

Další důležitou vlastností řad s kladnými členy jest tak zv. teorém D i r i c h l e t-ů v:

*Jestliže z konvergentní řady s kladnými členy* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *utvoříme novou řadu* $\Sigma v_k$ *přemístěním členů, pak nová řada opět konverguje a má týž součet jako původní řada. Při přemisťování nesmíme ovšem žádný člen vynechati.*

Věc tato jest zobecnění komutativního zákona pro sčítání. Zdá se sice samozřejmou, ale uvidíme později, že neplatí pro některé řady s členy také negativními. Větu *D.* lze dokázati na př. takto.

Součet řady budiž $s$, částečné součty její $s_1, s_2, s_3, \ldots$, částečné součty řady $v_1 + v_2 + v_3 \ldots$ buďtež $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$. Protože $\sigma_n$ obsahuje jen $n$ sčítanců původní řady, je $\sigma_n \leqq s$. Tvoří tedy čísla $\sigma_n$ posloupnost stále stoupající shora ohraničenou. Druhá řada tedy konverguje, to jest má součet $\lim \sigma_n = \sigma$. Podle věty e) odst. 4 plyne z nerovnosti $\sigma_n \leqq s$ výsledek $\sigma \leqq s$. Obrátíme-li pořádek řad, to jest pokládáme-li druhou řadu za původní, dokážeme stejným postupem $s \leqq \sigma$. Jest tedy nutně $s = \sigma$.

*Teorému D. užijeme k odvození věty o násobení řad. Konvergentní řady o kladných členech* $u_0 + u_1 + \ldots$, $v_0 + v_1 + \ldots$ *nechť mají součty s a* $\sigma$*. Pak platí*

$$s \,.\, \sigma = u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0) + (u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0) + \ldots$$

Seřaďme všechny možné součiny $u_i \,.\, v_k$ do pravoúhlého schematu

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
u_0 v_0 & u_0 v_1 & u_0 v_2 & u_0 v_3 & \cdots\cdots \\
\hline
u_1 v_0 \quad u_1 v_1 & & u_1 v_2 & u_1 v_3 & \cdots\cdots \\
\hline
u_2 v_0 \quad u_2 v_1 \quad u_2 v_2 & & & u_2 v_3 & \cdots\cdots \\
\hline
u_3 v_0 \quad u_3 v_1 \quad u_3 v_2 \quad u_3 v_3 & & & & \cdots\cdots \\
\hline
\cdots\cdots\cdots\cdots & & & &
\end{array}$$

a utvořme řadu, jejíž vznik v obrazci jest naznačen silnými čarami $u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_1 + u_1v_0) + (u_0v_2 + u_1v_2 + u_2v_2 +$

$+ u_2 v_1 + u_2 v_0) + \ldots$ Každou závorku pokládejme za člen řady $c_0 + c_1 + c_2 \ldots$ Patrně jest $c_0 = u_0 . v_0$, $c_1 = (u_0 + u_1) . (v_0 + v_1) - u_0 v_0$, $c_2 = (u_0 + u_1 + u_2) . (v_0 + v_1 + v_2) - (u_0 + u_1) . (v_0 + v_1)$ atd. Jest tedy

$$c_0 + c_1 + \cdots + c_n = (u_0 + u_1 + \cdots + u_n) \cdot (v_0 + v_1 + \cdots + v_n).$$

Z toho plyne $\lim_{n \to \infty} (c_0 + c_1 + \ldots + c_n) = s . \sigma$. Jestliže v řadě $c_0 + c_1 + \ldots$ vynecháme závorky, obdržíme zřejmě řadu o kladných členech, která má opět součet $s . \sigma$. Neboť každý její částečný součet jest uzavřen mezi dvěma částečnými součty řady $c_0 + c_1 + \ldots$ Na př.

$$c_0 + c_1 \leqq u_0 v_0 + u_0 v_1 + u_1 v_1 + u_1 v_0 + u_0 v_2 + u_1 v_2 + u_2 v_2 \leqq c_0 + c_1 + c_2$$

Přemístíme-li členy této řady podle schématu

$$u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \ldots$$

obdržíme podle teorému *D.* týž součet.

**12. Absolutní konvergence.** Jednali jsme dosud o řadách s členy vesměs kladnými. Řady, které mimo členy kladné obsahují také členy rovné nule, převedeme vynecháním členů nulových na případ předešlý. Výsledky jsou beze změny platny pro řady, které mají jen konečný počet členů záporných, jak jest bezprostředně patrno z toho, že charakter řady se nezmění, když vynecháme konečný počet členů. Řady s členy vesměs zápornými nebo s pouze konečným počtem kladných členů, převedeme násobením $(-1)$nou na předešlý případ.

Jestliže však řada má nekonečný počet členů jak kladných tak záporných, nemůžeme ovšem předcházejících kriterií užíti, s výjimkou *Bolzano-Cauchy-ova* všeobecného kriteria. Proto odvodíme větu, která nám v mnohých případech umožní přenésti výsledky dosud odvozené na řady obecnějšího typu. Zní takto:

*Když řada prostých hodnot* $\sum_{k=1}^{\infty} | u_k |$ *konverguje, konverguje také řada* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

Říkáme v tom případě: Řada $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *konverguje absolutně.* K důkazu užijeme všeobecného kriteria B — C.

Řada $\sum^{\infty} |u_k|$ konverguje a ať tedy zvolíme kladné $\varepsilon$ jakkoli malé, vždy lze nalézti číslo $N(\varepsilon)$ tak, že

$$| u_{n+1} | + | u_{n+2} | + | u_{n+3} | + \cdots + | u_{n+k} | < \varepsilon$$

pro všechna $n \geqq N(\varepsilon)$, $k > 0$. Podle základní věty o počítání prostými hodnotami jest

$$| u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+k} | \leqq | u_{n+1} | + | u_{n+2} | + \cdots + | u_{n+k} |$$

a je tedy i levá strana této nerovnosti menší než $\varepsilon$ pro všechna $n \geqq N(\varepsilon)$, $k > 0$. Jinak řečeno: Řada $\sum u_k$ splňuje také kriterium B — C a tedy konverguje. Tak na př. řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, o níž víme, že konverguje pro $x \geqq 0$, jest podle hořejší věty jistě konvergentní i pro $x < 0$ a tedy konverguje pro všechna $x$ vůbec.

V absolutně konvergentní řadě $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ vynechejme členy záporné. Vznikne řada s kladnými členy $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ Vynecháme-li členy kladné, vznikne řada s členy $-b_1$ $-b_2$ $-b_3 \ldots$ Obě tyto řady jsou absolutně konvergentní. V částečném součtu $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ označme součet kladných členů $\alpha_n$ a záporných členů $-\beta_n$, takže jest $s_n = \alpha_n - \beta_n$. Dále jest patrně

$$(a_1 + a_2 + a_3 \ldots) = \lim_{n \to \infty} \alpha_n; \quad (-b_1 - b_2 - b_3 \ldots) = \lim_{n \to \infty} -\beta_n.$$

Jest tedy také

$$\lim s_n = \lim (\alpha_n - \beta_n) = \lim \alpha_n - \lim \beta_n.$$

Součet absolutně konvergentní řady lze tedy počítati tak, že se napřed sečtou členy kladné, pak záporné a výsledky se sečtou:

$$(u_1 + u_2 + \ldots) = (a_1 + a_2 + \ldots) - (b_1 + b_2 + \ldots)$$

Užitím tohoto výsledku rozšíříme platnost teorému *Dirichletova* na řady absolutně konvergentní.

Původní řada budiž $u_1 + u_2 + u_3 \ldots$, řada přeřazená $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ Řada $|v_1| + |v_2| + |v_3| + \cdots$ jest podle teorému *D.* pro řady s kladnými členy konvergentní a rovná řadě $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots$ Proveďme rozklad na kladné a záporné členy

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = a_1 + a_2 + \ldots - (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots)$$
$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots = c_1 + c_2 + \ldots - (d_1 + d_2 + d_3 + \ldots)$$

Řada $c_1 + c_2 + \ldots$ jest konvergentní a rovná $a_1 + a_2 + \ldots$, řada $d_1 + d_2 + \ldots$ jest konvergentní a rovná $b_1 + b_2 + \ldots$ Jest tedy $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$

**Cvičení.** 1. Dokažte, že v absolutně konvergentní řadě jest

$$|u_1 + u_2 + \cdots| \leqq |u_1| + |u_2| + \cdots$$

2. Dokažte, že pro dvě absolutně konv. řady $s = u_0 + u_1 + \ldots$ $\sigma = v_0 + v_1 + \ldots$ platí

$$s \cdot \sigma = u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + \ldots$$

(Pokyn: Dokažte nejdříve, že řada poslední, zbavená závorek, jest absolutně konvergentní.)

**13. Relativní konvergence.** Konvergentní řada $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ nazývá se *relativně konvergentní*, jestliže řada $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots$ diverguje. Uvidíme později, že takové řady vskutku existují. Při nich musí divergovati řada členů kladných $a_1 + a_2 + \ldots$ a rovněž řada členů záporných $-b_1 - b_2 - b_3 - \ldots$ Neboť, kdyby obě tyto řady konvergovaly, konvergovala by také řada $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \ldots$ a podle teorému *D.* také řada $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots$ by byla konvergentní, což odporuje předpokladu. Právě tak nemůže divergovati řada členů kladných a konvergovati řada členů záporných anebo obráceně, jak čtenář sám snadno dokáže.

Pro řady relativně konvergentní neplatí teorém Dirichletův. Vhodným přeřazením členů řady lze dokonce docíliti toho, aby řada měla libovolný součet $a$ předem zvolený (věta *Riemannova*). Postupujeme při tom takto: Sčítáme kladné členy v pořádku řadou určeném, žádný nevypouštějíce, až dospějeme po prvé k součtu rovnému $a$, nebo většímu než $a$, což jest jistě možno, protože řada kladných členů diverguje. Tyto členy nazveme prvá serie. Pak přičítáme členy negativní v pořádku řadou určeném, až součet opět po prvé klesne pod $a$ (druhá serie); pak opět přičítáme další členy kladné, až součet opět dosáhne $a$ nebo stoupne nad $a$ (třetí serie) atd. Nová řada, takto vzniklá, jest jistě konvergentní se součtem $a$, protože její částečné součty oscilují kolem čísla $a$ v mezích k nule se zúžujících. Neboť částečný součet končící kladným členem uchyluje se buď napravo od $a$ o číslo menší nežli jest tento kladný člen, nebo nalevo od $a$ o číslo menší nežli jest poslední záporný člen předcházející záporné serie. Obdobná věta platí pro částečný součet, který končí členem záporným.

**14. Řady alternující** jsou řady tvaru $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$, v nichž všechna $u_k$ jsou čísla kladná. Mimo to musí býti, jak víme, $\lim u_n = 0$. Omezíme se zde na řady, jichž členy nestoupají, to jest $u_{n+1} \leqq u_n$. Taková řada vždy konverguje. Neboť částečné součty se sudými indexy

$$s_2 = (u_1 - u_2),$$
$$s_4 = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) = u_1 - (u_2 - u_3) - u_4 \text{ atd.}$$

mají vlastnosti vyjádřené nerovnostmi:

$$s_2 \leqq s_4 \leqq s_6 \leqq \ldots, \qquad s_{2n} \leqq u_1.$$

Posloupnost jejich jest tedy neklesající a shora ohraničená. Má tedy limitu $\lim s_{2n} = s$. Touž limitu mají částečné součty s lichými indexy, neboť $s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1}$ a tedy $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n} + \lim u_{2n+1} = s + 0$. Tak na př. řada

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\cdots$$

konverguje a její součet jest v mezích $1 > s > 1 - \frac{1}{2}$ nebo přesněji

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} > s > 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \text{ atd.}$$

Konvergence jest relativní, neboť řada prostých hodnot jest řada harmonická, která diverguje. Jiný jednoduchý příklad dává řada

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \cdots\cdots,$$

která obsahuje členy tvaru $2^{-n}$ v počtu $2^n$ se střídavými znaménky. Součet její jest patrně roven nule. Řadu lze přeřaditi k součtu na př. $s = 1$ tímto postupem:

$$s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1; \quad s_4 = s_3 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$
$$s_8 = s_4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1;$$
$$s_9 = s_8 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}; \quad s_{13} = s_9 + \frac{4}{16} = 1; \quad s_{14} = s_{13} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4};$$
$$s_{18} = 1; \quad s_{19} = \frac{7}{8}; \quad s_{23} = 1 \quad \text{atd.}$$

**Cvičení.** 1. Určete několik prvých částečných součtů řady

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\cdots$$

přeřazené a) k součtu $(+1)$; b) k součtu $(-1)$.

2. Totéž pro řadu

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots$$

přeřazenou a) k součtu (1·5), b) k součtu (—1).

## Kapitola IV.

# FUNKCE.

**15. Definice a druhy funkcí.** Často označujeme týmž znakem, na př. $x$, různá čísla reálná nějakého množství $O$. V tom případě budeme znak $x$ nazývati *proměnná* a množství $O$ *obor* proměnné. Proměnná, jejíž obor jest jen jedno číslo, nazývá se konstanta.

*Jestliže $y$ tak závisí na proměnné $x$, že každé hodnotě $x$ odpovídá určitá jediná hodnota $y$, říkáme, že $y$ jest funkce proměnné $x$.*

Tuto závislost značíme symbolem

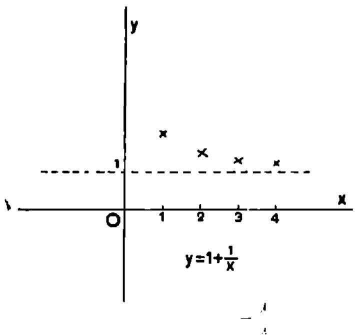
$$y = f(x),$$

který čteme: $y$ jest (rovná se) funkce (funkci) $x$. Číslu $x$ říkáme *nezávisle* proměnná, číslu $y$ *závisle* proměnná. Při různých závislostech užíváme různých písmen k označení funkčního vztahu, na př. $g(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$ atd. Geometricky znázorňujeme vztah $y = f(x)$ tak, že myslíme si v rovině, opatřené dvěma osami souřadnic, vyznačeny všechny body o souřadnicích $[x, f(x)]$. Názor, který s těmito názvy spojujeme, jest ovšem, jako všechno smyslové vnímání, nepřesný a proto podáme definice na názoru nezávislé, abychom terminologie té mohli užívati i při přesném myšlení. Rovina souřadnic jest množství všech dvojic reálných čísel $[x, y]$. Osa $x$ jest množství všech dvojic $[x, 0]$, uspořádaných podle velikosti čísel $x$, osa $y$ jest podobně uspořádané množství všech dvojic $[0, y]$. Přímka jest množství všech dvojic $[x, y]$, které vyhovují rovnici $ax+by+c=0$. Čára (křivka, graf) jest množství všech dvojic $[x, y]$, které vyhovují rovnici $y = f(x)$. Podobně definujeme paprsek, úhel (část roviny »mezi« dvěma paprsky, vycházejícími z téhož bodu) atd.

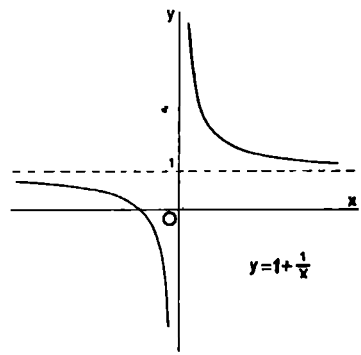
Předpis, který při definici funkce přiřazuje hodnotě čísla $x$ určitou hodnotu čísla $y$, může býti velmi rozmanitý. Často to bývá aritmetický nebo jiný počtářský vztah, na př. (obr. 1a) obor $x$: celistvá, kladná čísla: 1, 2, 3, 4, ...

$$y = 1 + \frac{1}{x} \ldots\ldots$$

Jest patrno, že hodnoty $y$ tvoří určitou posloupnost. Obráceně můžeme považovati členy každé posloupnosti za hodnoty nějaké funkce.



Obr. 1 a.



Obr. 1 b.

Týž funkční vztah definuje ovšem při změně oboru nezávislé proměnné jinou funkci. Tak na př., tvoří-li obor $x$ všechna reálná čísla s výjimkou nuly, představuje předešlý funkční vztah hyperbolu obrazce 1b. Jiný příklad: Obor $x$ interval $< -1, +1 >$, funkce $y = \sqrt{1 - x^2}$, obr. 2. Obor nezávisle proměnné $x$ bývá někdy rozdělen na podobory toho druhu, že v každém z nich jest $y$ definováno jiným vztahem počtářským. Tak na př. lomená čára v obr. 3 jest takto definována:

$$y = x \quad \text{pro} \quad 0 \leqq x < 1,$$

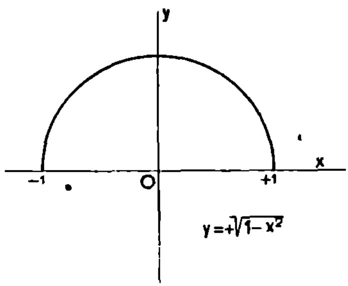
$$y = \frac{1}{2}(x + 1) \quad \text{pro} \quad 1 \leqq x < 2,$$

$$y = \frac{3}{2} \quad \text{pro} \quad 2 \leqq x \leqq 3,$$

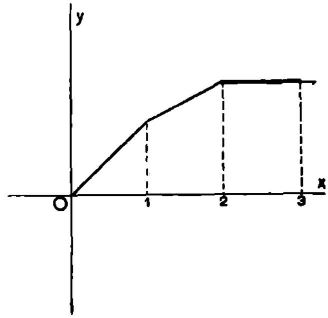
V odst. 6 jsme definovali funkci exponenciální, na př. $y = 5^x$ nebo obecněji $y = a^x$, $a > 0$, při níž obor $x$ jsou všechna reálná čísla. Z geometrie známe funkční vztahy

$$y = \sin x, \; y = \cos x, \; y = \operatorname{tg} x, \; y = \operatorname{cotg} x \text{ atd.}$$

Při této příležitosti připomeňme, že úhly budeme měřiti vždy v míře obloukové, to jest, podílem mezi délkou oblouku úhlu středového v kružnici a délkou poloměru. Jest to číslo nepojmenované, na př. úhel přímý jest $\pi = 3{\cdot}14159\ldots$, úhel pravý jest $\pi/2$ atd. Jak se měří délka oblouku, bude vyloženo v počtu integrálním. Přesná definice funkcí goniometrických, nezávislá od geometrického názoru, obsažena jest v II. dodatku.




Obr. 2.




Obr. 3.

Byl by však omyl, domnívati se, že každý funkční vztah lze vyjádřiti aritmetickou formulí. Tak na př. úřední závěrečný kurs koruny československé na burse v Novém Yorku jest funkcí data nebo výška domů v Praze v určitém okamžiku jest funkcí jejich popisného čísla atd.

Některé často se vyskytující skupiny funkcí mají zvláštní názvy.

*Celistvá funkce racionální n-tého stupně* (mnohočlen, polynom) má tvar

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n,\ a_0 \neq 0.$$

Obor $x$ jsou všechna reálná čísla, $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ jsou konstanty. V algebře nebo v teorii funkcí komplexní proměnné dokazuje se základní věta algebry: *Každá rovnice*

$$P(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n = 0,$$

*má n kořenů reálných nebo komplexních od sebe různých nebo stejných.**)

*) Důkaz nalezne čtenář na př. v knize: K. Petr, Počet diferenciální, Praha 1923, nákl. J. Č. M. a F., str. 405.

Nezávisle od předešlé základní věty dokážeme další rovněž důležité. Jestliže rovnice

$$P(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n = 0$$

má kořen $a$, platí pro *každé* $x$

$$P(x) = (x - a) \, . \, P_1(x), \text{ kdež } P_1(x) = x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} + \ldots + \beta_{n-1}.$$

Jest totiž

$$P(x) = P(x) - P(a) = x^n - a^n + b_1 (x^{n-1} - a^{n-1}) + \ldots + b_{n-1}(x - a),$$

a z toho obdržíme vytknutím kořenového činitele $x - a$ vztah žádaný.

Z toho plyne dále: Jestliže rovnice $P(x) = 0$ má dva navzájem různé kořeny $a \neq \beta$, platí pro každé $x$

$$P(x) = (x - a)(x - \beta) P_2(x), \text{ kdež } P_2(x) = x^{n-2} + \gamma_1 x^{n-3} + \ldots + \gamma_{n-2}.$$

Rovnice $P(x) = (x - a) P_1(x) = 0$ má totiž kořen $\beta$, a tedy $(\beta - a) \, . \, P_1(\beta) = 0$, čili $P_1(\beta) = 0$. Podle předešlé věty jest

$$P_1(x) = (x - \beta) P_2(x) \text{ čili } P(x) = (x - a)(x - \beta) \, . \, P_2(x).$$

Z toho obecnou indukcí: Jestliže rovnice $P(x) = 0$ má $k$ navzájem různých kořenů $a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$, jest její levá strana beze zbytku dělitelna mnohočlenem $(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_k)$ a tedy rovnice jest *nejméně* stupně $k$-tého.

Rovnice $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, v níž aspoň jeden z koeficientů $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ jest od nuly různý, může tedy míti *nanejvýše* $n$ navzájem různých kořenů. Z toho vyplývá, že jediná rovnice $n$-tého stupně, která má více než $n$ navzájem různých kořenů, jest

$$0 \, . \, x^n + 0 \, . \, x^{n-1} + \ldots + 0 = 0.$$

Rovnice ta jest pak ovšem splněna pro každé $x$.

*Lomená funkce racionální* jest podíl dvou mnohočlenů

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}.$$

Obor $x$ tvoří všechna reálná čísla s výjimkou těch, pro která jmenovatel jest rovný nule (neboť nulou nelze děliti). Tak na př. funkce

$$y = \frac{1}{x^2 - 2x}$$

jest definována pro všechna $x$ s výjimkou hodnot $x = 0$, $x = 2$; pro tyto hodnoty hořejší formule $y$ vůbec nedefinuje.

Obor proměnné $x$ jest tedy utvořen všemi reálnými čísly s výjimkou $0$ a $2$. Jest ovšem možno utvořiti *jinou* funkci $y = f(x)$, která jest definována pro všechna $x$ a při tom se shoduje s předešlou funkcí všude tam, kde tato jest definována. Tak na př.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x} \quad \text{pro} \quad x \neq 0, 2,$$
$$f(x) = 1 \quad \text{pro} \quad x = 0, 2.$$

Definice tato jest ve shodě s tím, jak jsme si definovali funkci na počátku tohoto odstavce. Proto nemůžeme na př. o funkcích

$$y = \frac{(x-a)^2}{(x-a)}, \quad y = (x-a)$$

tvrditi, že jsou identické, neboť první z nich není definována pro $x = a$.

Funkce $y = +\sqrt{x}$ hoví rovnici $y^2 - x = 0$. Každá funkce $y$, která hoví algebraické rovnici

$$p_0(x) \,.\, y^n + p_1(x) \,.\, y^{n-1} + \ldots + p_n(x) = 0, \tag{1}$$

kdež $p_0(x)$, $p_1(x), \ldots$ jsou mnohočleny v $x$, nazývá se *algebraická funkce n-tého stupně.* Je-li algebr. funkce definována rovnicí dosud nerozřešenou, říká se jí *implicitní* funkce algebraická (viz též odstavec 53) na rozdíl od *eksplicitní* funkce algebraické, jako na př.

$$y = +\sqrt{\frac{x^2 - 1}{x + 2}}.$$

O mnohých funkcích lze dokázati, že nejsou algebraické, jako na př. funkce goniometrické, funkce eksponenciální, funkce logaritmické atd. Důkazy toho zde prováděti nemůžeme.

Definujme ještě jednu velmi jednoduchou funkci. Ke každému reálnému číslu $x$ přiřadíme *celistvé* číslo $y$, které hoví nerovnostem

$$y \leqq x < y + 1.$$

Funkci tu budeme označovati

$$y = [x]$$

a čísti $y$ jest celé číslo v $x$. Tak na př. $[3{\cdot}14] = 3$, $[4] = 4$, $[-2{\cdot}3] = -3$. Obr. 4 znázorňuje graficky tuto funkci.

Jest však dobře uvědomiti si, že obrazec nevystihuje všech vlastností funkce, neboť pro $x = 1, 2, 3, \ldots$ má $y$ vždy jedinou hodnotu $1, 2, 3, \ldots$, což nikterak není patrno z obrazce.

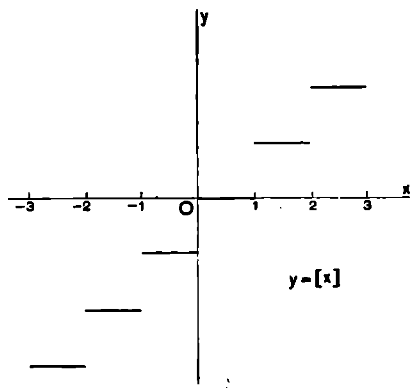
**Cvičení.** 1. Znázorněte graficky funkce celočíselné proměnné $n$:

$a)\quad y = 1 + \frac{(-1)^n}{n}, \qquad b)\quad y = 1 + (-1)^n + \frac{1}{n}.$

2. Znázorněte graficky funkce:
*a)* $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, atd.
*b)* $y = x - [x]$, $y = \{x - [x]\}^2$, $y = [x] + \{x - [x]\}^2$.

3. Nechť $y = x$, když $x$ jest racionální a $y$ vůbec není definováno, když $x$ jest iracionální. Liší se grafické znázornění této funkce od znázornění přímky $y = x$? (Uvažte, že čísla racionální tvoří množství všude husté!)

5. Pro která $x$ nejsou definovány funkce $sec\, x$, $cosec\, x$, $tg\, x$, $cotg\, x$?




Obr. 4.

**16. Limity funkcí.** Funkce $y = 1 + 1 : x$ (viz obr. 1*b*) má tu vlastnost, že s jakkoliv vzrůstajícím $x$ blíží se neomezeně číslu 1. Podobně jako při posloupnostech (viz odst. 4) říkáme, že $y$ má limitu 1, když $x$ vzrůstá do nekonečna. Přesná definice zní takto:

*Funkce $f(x)$ má limitu $A$, když $x$ vzrůstá do nekonečna, jestliže ke každému libovolně malému kladnému číslu $\varepsilon$ lze nalézti číslo $X(\varepsilon)$ tak, že*

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon \text{ čili } |f(x) - A| < \varepsilon$$

*pro všechna $x > X(\varepsilon)$.*

Jsou-li tyto podmínky splněny, píšeme stručně

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

Při tom jest $X(\varepsilon)$ konstanta nezávislá na $x$, ale závislá na $\varepsilon$. Tak na př. pro funkci $1 + 1 : x$ jest $X(\varepsilon) = 1 : \varepsilon$, neboť

$$1 - \varepsilon < 1 + 1 : x < 1 + \varepsilon, \text{ pokud } x > 1 : \varepsilon.$$

Funkce $y = x^3$ má tu vlastnost, že vzrůstá do $+\infty$, když $x$ vzrůstá do $+\infty$. To značíme zkratkou

$$f(x) \to +\infty, \text{ když } x \to +\infty.$$

Přesná definice zní:

*Funkce $f(x)$ vzrůstá do $+\infty$ spolu s $x$, jestliže ke každému, libovolně velkému číslu $M$ lze nalézti číslo $X(M)$ tak, že*

$$f(x) > M \textit{ pro všechna } x > X(M).$$

V předcházejícím příkladu jest zřejmě $X(M) = M^{\frac{1}{3}}$.

Jest patrno, že obě předcházející definice vztahují se k funkcím, jež jsou definovány pro všechna kladná čísla $x$ vůbec, anebo aspoň pro všechna čísla $x$ větší než určitá konstanta. Funkce toho druhu mohou splňovati buď podmínky prvé definice, nebo podmínky druhé definice, nebo konečně ani jedny ani druhé. Příklad funkce posledního druhu jest $y = \cos x$, která s rostoucím $x$ kolísá v mezích $-1$, $+1$. O takových funkcích říkáme, že *oscilují*, když $x \to +\infty$.

**Cvičení.** 1. Podle analogie předešlých vět definujte význam symbolů:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A, \quad \underset{x \to -\infty}{f(x) \to +\infty}, \quad \underset{x \to -\infty}{f(x) \to -\infty}, \quad \underset{x \to +\infty}{f(x) \to -\infty}$$

a uveďte příklady!

2. Jak se chovají funkce

$$3 + 1 : x, \ \sqrt{x}, \ [x], \ x - [x], \ \sin \pi x : x, \ \sin \pi x, \ x . \sin \pi x,$$

když $x \to +\infty$? (Grafické znázornění!)

3. Sestrojte jiné příklady funkcí, *a)* které mají limitu, když $x \to +\infty$, *b)* které vzrůstají do $+\infty$, když $x \to +\infty$, *c)* které oscilují, když $x \to +\infty$.

**17. Pokračování.** Všimněme si nyní funkce

$$y = \varphi(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a},$$

která jest výrazem tím definována pro každé $x$ s výjimkou hodnoty $x = a$. Pro každé $x \neq a$ jest však také

$$\varphi(x) = x + a.$$

Z toho soudíme, že pro $x$ velmi blízká číslu $a$ je $y$ velmi blízké číslu $2a$. Přesně řečeno, rozdíl $\varphi(x) - 2a$ jest roven právě rozdílu $(x-a)$ pro všechna $x \neq a$. Tento fakt můžeme také vystihnouti nerovninami: $|\varphi(x) - 2a| < \varepsilon$ pro všechna $x$ splňující nerovninu $|x-a| < \varepsilon$ ať $\varepsilon$ jest jakkoliv malé, kladné číslo, pokud při tom $x \neq a$. Místo předešlého souvětí říkáme stručně, že $\varphi(x)$ má limitu $2a$, kdy $x$ blíží se k $a$ a píšeme

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = 2a.$$

Při tom jest zvláště důležito všimnouti si, že limita $2a$ *není* hodnota $\varphi(x)$ pro $x = a$. Limita jest číslo, které charakterisuje určitou vlastnost funkce $\varphi(x)$ *v okolí bodu $x = a$ s výjimkou toho bodu samého.*

Mějme nyní obecnou funkci $f(x)$ definovanou pro všechna $x$ v intervalu $\langle a, b \rangle$. Jen v bodě $x = a$ tohoto intervalu $f(x)$ nemusí býti dáno. Jestliže číslo $f(x)$ blíží se k číslu $A$, když $x$ blíží se k $a$, píšeme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Tato vlastnost funkce není tím logicky přesně vystižena, protože není definováno, co to znamená: *blíži se.* Přesná definice jest obšírnější:

***Jestliže k libovolně malému, kladnému $\varepsilon$ lze nalézti takové kladné číslo $\delta(\varepsilon)$, že***

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon, \text{ čili } |f(x) - A| < \varepsilon$$

***pro všechna $x$ různá od $a$, náležející k $\langle a, b \rangle$ a splňující nerovniny*** $a - \delta(\varepsilon) < x < a + \delta(\varepsilon)$, čili $|x - a| < \delta(\varepsilon)$, **pak je**

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Jako příklad dokážeme vztah, který budeme později potřebovati, že totiž

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Při důkazu můžeme se omeziti na kladná $x$, neboť pro záporné $x = -\xi$ je $\sin x : x = \sin \xi : \xi$.

V obr. 5 jest $\widehat{BB_1} > BB_1$ čili $2x > 2\sin x$, $x > \sin x$. Dále jest výseč $OCB$ < trojúhelník $OCD$ a tedy $x \cdot 1 < 1 \cdot tg\, x$ čili $\sin x : x > \cos x$. Celkem jest tedy

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Z toho plyne dále

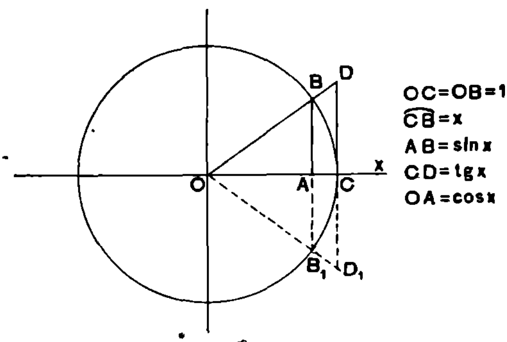
$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x,$$

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 . \left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

Je-li nyní $\varepsilon$ libovolně malé, kladné, mohu voliti číslo $x$ tak, že je $\frac{x^2}{2} < \varepsilon$ a tedy také

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \varepsilon \quad \text{pokud} \quad x < \sqrt{2\varepsilon} = \delta(\varepsilon).$$

Všechny podmínky pro existenci hledané limity jsou tedy splněny. Kdyby ovšem $x$ bylo měřeno v jiné nežli obloukové míře, byla by i limita jiná. Tak na př., je-li $x''$ míra úhlu




Obr. 5.

v sekundách a $x$ míra oblouková, je $\sin x'' = \sin x$ a tedy

$$\lim_{x'' \to 0} \frac{\sin x''}{x''} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{x''} = \frac{\pi}{648000} \cdot 1.$$

Při počítání limitami platí tytéž obecné věty, které jsme poznali při limitách posloupností:

$$\lim [f(x) + g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x),$$
$$\lim [f(x) . g(x)] = \lim f(x) . \lim g(x),$$
$$\lim [f(x) : g(x)] = \lim f(x) : \lim g(x), \text{ pokud } \lim g(x) \neq 0.$$

*Poznámka.* Funkce $f(x) = \sin x : x$ není v bodě $x = 0$ vůbec definována. To nám ovšem nemůže bránit, abychom sestrojili jinou funkci $F(x)$, která pro $x \neq 0$ jest rovna $f(x)$ a pro $x = 0$ jest rovna libovolně zvolenému číslu $b$. Patrně bude

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = 1,$$

neboť limita nezávisí na hodnotě funkce v bodě $x = 0$. Volím-li $b$ různé od jedné, na př. $b = 2$, je

$$F(0) = 2, \quad \lim_{x\to 0} F(x) = 1.$$

Z toho jest zřejmě patrno, že limita $F(x)$, když $x \to a$ a hodnota $F(a)$ mohou se navzájem lišiti.

Často se stává, že funkce vůbec nemá limity. Na př. $f(x) = [x]$ nemá limity, když $x \to 2$, neboť v každém sebe menším okolí čísla $x = 2$ nabývá $f(x)$ hodnoty $1$ pro $x < 2$ a také hodnoty $2$ pro $x > 2$, a tedy pro žádné $A$ nemůže platiti v *celém* takovém okolí

$$|\,[x] - A\,| < \varepsilon, \text{ jestliže } \varepsilon < \frac{1}{2}.$$

**Cvičení.** $\lim_{x\to 0} x^n = 0$, když $n$ jest celistvé kladné.
$\lim_{x\to\infty} 2x : (3x+5) = 2/3$. (Děl dělence i dělitele číslem $x$.)
$\lim_{x\to\infty} \dfrac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n}$ (Děl čitatele i jmenovatele číslem $x^n$.)
$\lim_{x\to a} x^n = a^n$. (Polož $x = (a+y)$ a užij věty binomické.)
$\lim_{x\to 0} (\operatorname{tg} x : x) = 1$. (Rozlož $(\operatorname{tg} x : x) = (\sin x : x) \,.\, (1 : \cos x)$.)
$\lim_{x\to 0} (\sin ax : x) = a$. (Polož $ax = y$.)
$\lim_{x\to a} \{(x^n - a^n) : (x - a)\} = n \,.\, a^{n-1}$, $n$ celistvé, kladné.

**18. Limita v rozšířeném smyslu.** Pojem limity funkce lze rozšířiti rozmanitým způsobem. Tak na př.:

Jestliže k libovolně malému, kladnému $\varepsilon$ dá se nalézti takové kladné $\delta(\varepsilon)$, že $|f(x) - A| < \varepsilon$ pro všechna $a - \delta(\varepsilon) < x < a$, pak říkáme, že $f(x)$ má limitu $A$ *z leva*, a píšeme symbolicky

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = A.$$

Podobně definujeme limitu *z prava*. Funkce může míti limitu z leva nebo z prava a při tom nemusí míti limitu v obyčejném smyslu. Tak na př. $\lim_{x\to 1-0} [x] = 0$, $\lim_{x\to 1+0} [x] = 1$, $\lim_{x\to 1} [x]$ neexistuje.

Další rozšíření pojmu limity jest limita *v širším smyslu.* Budiž $f(x)$ definováno v $\langle a + \delta, a - \delta \rangle$. Jestliže $M$ jest libovolně veliké číslo a $f(x) > M$ pro všechna $|x-a| < \varepsilon(M)$, pak říkáme, že $f(x)$ má limitu *v širším smyslu* a píšeme $\underset{x \to a}{f(x) \to +-\infty}$. Význam symbolů

$$\underset{x \to a-0}{f(x) \to +\infty}, \quad \underset{x \to a+0}{f(x) \to +\infty}, \quad \underset{x \to a}{f(x) \to -\infty} \quad \text{a p.}$$

jest nyní samozřejmý. Symbolu

$$\underset{x \to a}{f(x) \to \pm\infty}$$

budeme užívati, když

$$\underset{x \to a+0}{f(x) \to +\infty}, \quad \underset{x \to a-0}{f(x) \to -\infty} \quad \text{nebo} \quad \underset{x \to a-0}{f(x) \to +\infty}, \quad \underset{x \to a+0}{f(x) \to -\infty}.$$

**Cvičení.** 1. Jestliže $\lim_{x \to a+0} f(x) = A$, $\lim_{x \to a-0} f(x) = A$, je také $\lim_{x \to a} f(x) = A$.

2. Jestliže $\lim_{x \to a} f(x) = A$, je také $\lim_{x \to a-0} f(x) = A$, $\lim_{x \to a+0} f(x) = A$.

3. $\lim_{x \to 2-0} \{x - [x]\} = 1$, $\lim_{x \to 2+0} \{x - [x]\} = 0$.

4. $\lim_{x \to +0} [1 - x^2] = 0$, $\lim_{x \to -0} [1 - x^2] = 0$, $[1 - 0^2] = 1$.

5, $\underset{x \to a}{1 : (x-a)^2 \to +\infty}$, $\underset{x \to a+0}{1 : (x-a) \to +\infty}$, $\underset{x \to a}{1 : (x-a) \to \pm\infty}$.

$\underset{x \to \frac{\pi}{2}-0}{\operatorname{tg} x \to +\infty}$, $\underset{x \to \frac{\pi}{2}+0}{\operatorname{tg} x \to -\infty}$, $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\operatorname{tg} x \to \pm\infty}$, $\underset{x \to +0}{\log x \to -\infty}$, $\underset{x \to 0}{\log x}$

neeksistuje ani v širším smyslu.

**19. Kritéria pro limitu funkce.** Zbývá určiti kritéria, podle nichž se pozná, zdali $f(x)$ má limitu, když $x \to a$ čili nic. První takové kritérium týká se funkce $f(x)$, která v $\langle a, b \rangle$ jest definována a při tom jest *neklesající*. To znamená, že $f(x_1) \leqq f(x_2)$, kdykoliv $x_1 < x_2$. Věta o limitě zní:

*Jestliže $f(x)$ jest v intervalu $\langle a, b \rangle$ shora ohraničená a neklesající, pak eksistuje* $\lim_{x \to b-0} f(x)$.

Důkaz provedeme užitím posloupnosti

$$x_1 = b - \frac{1}{k+1}, \quad x_2 = b - \frac{1}{k+2}, \ldots x_n = b - \frac{1}{k+n}, \ldots,$$

kdež $k$ jest kladné číslo tak volené, že $b - 1 : (k+1) > a$. Příslušné hodnoty

$$y_1 = f(x_1), \; y_2 = f(x_2), \ldots y_n = f(x_n), \ldots$$

tvoří posloupnost neklesající a shora ohraničenou. Eksistuje tedy $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = A$, to znamená: Zvolíme-li $\varepsilon$ libovolně malé, kladné, lze nalézti vždy takové $N(\varepsilon)$, že

$$0 \leqq A - f(x_n) < \varepsilon \quad \text{pro všechna} \quad n \geqq N(\varepsilon).$$

Tvrdíme nyní, že tato nerovnost platí nejen pro členy posloupnosti $x_N, x_{N+1}, \ldots$, atd., nýbrž i pro všechna $x$ splňující nerovniny

$$b - \frac{1}{N+k} < x < b, \quad \text{čili} \quad 0 < b - x < \frac{1}{N(\varepsilon)+k} = \delta(\varepsilon)$$

a že tedy $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = A$.

Důkaz jest tento: Splňuje-li $x$ hořejší nerovnosti, padne mezi dva za sebe jdoucí členy posloupnosti:

$$x_{N+r} \leqq x < x_{N+r+1} \;.$$

Jest tedy, protože $f(x)$ jest neklesající funkce,

$$f(x_{N+r}) \leqq f(x) \leqq f(x_{N+r+1}),$$
$$\varepsilon > A - f(x_{N+r}) \geqq A - f(x) \geqq A - f(x_{N+r+1}) \geqq 0 \text{ s. e. d.}$$

Obdobná věta platí o druhém konci intervalu

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = B$$

a obě věty dokážou se snadno i pro funkce *nestoupající.*

Pro funkce, které nejsou monotoní, užívá se obecného kritéria Bolzano-Cauchy-ova, které zní:

***Jestliže ke každému libovolně malému, kladnému $\varepsilon$ lze nalézti $\delta(\varepsilon)$, takže***

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

***pro všechna $x_1$ a $x_2$ splňující nerovnosti***

$$0 < |x_1 - a| \leqq |x_2 - a| \leqq \delta(\varepsilon),$$

***pak $f(x)$ má limitu, když $x \to a$.***

Podmínka tato jest nutná, neboť, když $f(x)$ má limitu $A$, pak lze ke každému $\varepsilon/2$ nalézti $\delta(\varepsilon)$, takže

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro} \quad 0 < |x - a| < \delta(\varepsilon).$$

Volíme-li tedy $x_1$ a $x_2$ v tomto intervalu, je

$$|(f(x_1) - A) - (f(x_2) - A)| \leqq |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

a tedy
$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

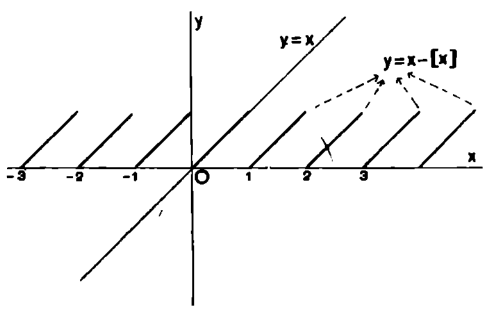
Podmínka jest však také postačující, neboť, když jest splněna, lze kolem $a$ nalézti interval $< a - \delta(10^{-1}), a + \delta(10^{-1}) >$, takže pro $x$ v něm ležící padnou příslušné hodnoty $f(x)$ do intervalu na ose $y$-ové délky $2 : 10$. Uvnitř předešlého intervalu na ose $x$ lze však nalézti druhý $< a - \delta(10^{-2}), a + \delta(10^{-2}) >$, takže příslušná $f(x)$ jsou v intervalu délky $2 : 100$ atd. Intervaly na ose $y$, do nichž padne $f(x)$, mají délky $2 . 10^{-1}, 2 . 10^{-2}, 2 . 10^{-3}, \ldots$ a leží vždy následující uvnitř předcházejícího. Definují tedy podle věty o zařazených intervalech z odst. 8. jeden jediný bod všem společný $A$, který jest hledanou limitou, neboť rozdíl

$$|f(x) - A| < 2 . 10^{-n}$$

pro všechna $x$, ležící v intervalu

$$< a - \delta(10^{-n}), \quad a + \delta(10^{-n}) >.$$

**Cvičení.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(1:x)}{\sin(1:x)}$ neexistuje. (Uvažujte posloupnost $x_1 = 1/\pi$ $x_2 = 1/2\pi$, $x_3 = 1/3\pi, \ldots . x_n = 1/n\pi \ldots .$)




Obr. 6.

**20. Funkce spojité a nespojité.** Přirovnejme grafy funkcí $y = x$, $y = x - [x]$. Názor (obr. 6) nás poučuje o tom, že přímka $y = x$ probíhá nepřetržitě (spojitě), kdežto druhá čára v bodech $x = 1, 2, 3, \ldots$ se mění skokem, takže obraz křivky skládá se z různých spolů nesouvisejících tahů. Avšak slova »probíhá spojitě«, kterých jsme užili, jsou velmi neurčitá. Proto definujeme *spojitost* (continuité, Stetigkeit) funkce (křivky) v daném bodě takto:

*Funkce $f(x)$ jest spojitá v daném bodě $x = x_0$, jestliže*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

*Obšírněji řečeno:*

*Pro každé libovolně malé, kladné $\varepsilon$ lze nalézti $\delta(\varepsilon)$, takže*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{pokud} \quad 0 \leqq |x - x_0| < \delta(\varepsilon).$$

Limita $f(x)$, když $x \to x_0$ a $f(x_0)$ jsou tedy pro *spojité* funkce totožné. Není-li to splněno, jest $f(x)$ v bodě $x_0$ *nespojitá*.

Z toho jest patrno, že funkce $f(x)$, která není definována v bodě $x_0$, jest tam nespojitá. Tak na př.

$$\frac{1}{x}, \quad \frac{x}{x}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{1}{\sin x} \quad \text{a pod.}$$

jsou nespojité v bodě 0. Mnohočlen jest funkce spojitá v každém bodě, neboť

$$\lim_{x \to x_0} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n) = a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Racionální funkce lomená jest spojitá ve všech bodech s výjimkou těch, v nichž jmenovatel stává se roven nule. Součet, rozdíl, součin a podíl spojitých funkcí jest opět spojitá funkce. Při podílu ovšem jen tenkrát, když v uvažovaném bodě jest jmenovatel od nuly různý. Čtenář si sestrojí důkazy těchto tvrzení, užívaje vět o limitách z odst. 17.

Dokážeme spojitost funkce $\sin x$. Víme, že $|\sin x| < |x|$ pro všechna $x$ kladná nebo záporná. Je tedy

$$|\sin x - \sin 0| < \varepsilon \quad \text{pokud} \quad |x| < \varepsilon$$

ať $\varepsilon$ jest kladné, jakkoli malé. Tím jest dokázána spojitost $\sin x$ v bodě 0. Z toho plyne, že $(1 - \cos x) = 2 \sin^2 x/2$ jest také spojitá funkce v bodě 0 a tedy $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos x) = 0$ čili $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$. Z této okolnosti a ze známých vět goniometrických plyne

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \lim_{y \to 0} \{\sin (x_0 + y)\} = \lim_{y \to 0} \{\sin x_0 . \cos y + \cos x_0 . \sin y\} =$$
$$= \sin x_0, \text{ q. e. d.}$$

Funkce $\cos x = \sin (\pi/2 + x)$ jest tedy také spojitá v každém bodě.

**Cvičení.** 1. Ve kterých bodech jsou spojité a kde nespojité funkce $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$?

2. Je-li $f(y)$ spojitá funkce v bodě $\eta$ a $\varphi(x)$ spojitá v bodě $\xi$ a je-li mimo to $\varphi(\xi) = \eta$, pak $f(\varphi[x])$ jest spojitá funkce pro $x = \xi$.

(Polož $\varphi(x) = y$. Když $x \to \xi$, tedy $y \to \eta$. Z toho plyne, protože $f(y)$ jest spojitá

$$\lim_{x \to \xi} f(\varphi[x]) = \lim_{x \to \eta} f(y) = f(\eta) = f(\varphi[\xi]).$$

3. Funkce definovaná vztahy

$y = x \cdot \sin \dfrac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $y = 0$ pro $x = 0$, jest spojitá v bodě $x = 0$.

Funkce $y = [1 - x^2]$ jest nespojitá v bodě 0, ačkoliv tam má limitu.

Funkce $y = x$ pro racionální $x$, $y$ nedefinováno pro iracionální $x$, jest nespojitá v každém bodě, ačkoliv její graf jest nerozeznatelný od grafu přímky $y = x$.

4. Podobně jako v odst. 18 jsme definovali limity z leva a z prava, můžeme definovati spojitost z leva a z prava.

*Funkce $f(x)$ jest spojitá z leva v bodě $x = x_1$, jestliže jest $\lim_{x \to x_1 - 0} f(x) = f(x_1)$.*

Dokažte věty: a) Je-li $f(x)$ v bodě $x_1$ spojitá, jest tam spojitá z leva i z prava. b) Je-li $f(x)$ v bodě $x_1$ spojitá z leva i z prava, jest tam spojitá.

5. Funkce $y = [x]$, $y = x - [x]$ jsou spojité z prava v bodech $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Všude jinde jsou spojité.

6. Funkce $y = x$ pro racionální $x$, $y = 2x$ pro ostatní $x$, jest spojitá pro $x = 0$ a nespojitá všude jinde.

**21. Pokračování.** Dosud jsme mluvili o spojitosti funkce v daném bodě. Můžeme nyní definovati spojitost funkce v celém intervalu:

*a) Funkce jest spojitá v otevřeném intervalu $(a, b)$, je-li spojitá v každém bodě toho intervalu.*

*b) Funkce jest spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, je-li spojitá v $(a, b)$ a spojitá z prava v bodě $a$, z leva v bodě $b$.*

Místo slova funkce spojitá můžeme při geometrické interpretaci klásti slova *křivka spojitá.* Jest však velmi důležito uvědomiti si, že naše definice křivky spojité v $\langle a, b \rangle$ *není* vzata z názoru. Definice ta opírá se o vlastnosti křivky v jednotlivých bodech a nikoliv o vlastnosti křivky jako celku. Spojitá křivka v $\langle a, b \rangle$, *jako celek,* má vlastnosti, které jsou nám sice známy z názoru na některé jednoduché křivky (jako přímka, kružnice nebo parabola a j.), které však vyžadují důkazu, máme-li jim přiřknouti všeobecnou platnost. Jsou to zejména tyto tři vlastnosti:

*I. Je-li $f(x)$ spojitá a od nuly různá v bodě $x = x_1$, pak v určitém okolí bodu $x_1$ má $f(x)$ totéž znamení, jako $f(x_1)$.*

*II. Jestliže $f(x)$ jest v $\langle a, b \rangle$ spojitá a mají-li čísla $f(a)$, $f(b)$ různá znamení, má rovnice $f(x) = 0$ v $(a, b)$ aspoň jeden kořen, to jest křivka $y = f(x)$ protíná osu $x$ mezi $a$ a $b$.*

*III. Jestliže $f(x)$ jest v $\langle a, b \rangle$ spojitá, pak mezi hodnotami, kterých $f(x)$ tam nabývá, jest největší hodnota a nejmenší hodnota. (Věta Weierstrass-ova.)*

Důkazy těchto vět a některých jejich důsledků následují. Čtenář, který nepocítí ihned potřebu těchto důkazů, může odložiti studium následujících dvou odstavců na dobu pozdější.

**22. První a druhá věta o spojitých funkcích.** Funkce jest v bodě $x = x_1$ spojitá a od nuly různá. Dejme tomu, že $y_1 = f(x_1)$ jest kladné číslo. Protože $f(x)$ jest v bodě tom spojitá, jest možno splniti nerovninu

$$f(x) - f(x_1) < y_1/2, \text{ čili } f(x_1) - y_1/2 < f(x)$$

pro všechna $x$ splňující nerovnost

$$x_1 - \delta(y_1) < x < x_1 + \delta(y_1),$$

kdež $\delta(y_1)$ jest kladné číslo závislé na $y_1$. Protože však $f(x_1) = y_1$, tedy

$$f(x) > y_1 - y_1/2 = y_1/2.$$

To znamená, že $f(x)$ jest kladné, pokud $x$ jest v $\langle x_1 - \delta, x_1 + \delta \rangle$.

Je-li $f(x_1)$ záporné číslo, uvažujeme funkci $y = -f(x)$ a seznáme, že v určitém okolí bodu $x_1$ je $-f(x)$ kladné a tedy $f(x)$ záporné. Větu první lze rozšířiti i na jednostranně spojitou funkci, když opakujeme předešlou úvahu s tou změnou, že místo intervalu $\langle x_1 - \delta, x_1 + \delta \rangle$ uvažujeme příslušný interval jednostranný (na př. $\langle x_1, x_1 + \delta \rangle$ při spojitosti z prava.)

Abychom dokázali druhou větu o spojitých funkcích, předpokládejme, že $f(a)$ a $f(b)$ mají různá znamení. Rozpůlíme interval $\langle a, b \rangle$. V bodě půlicím $x_1$ je $f(x_1)$ buď rovno nule, nebo kladné, nebo záporné. Je-li $f(x_1)$ rovno nule, je věta dokázána. Je-li $f(x_1) \neq 0$, tedy buď $f(a)$ a $f(x_1)$ mají různá znamení, nebo $f(x_1)$ a $f(b)$ mají různá znamení. Zvolme k další úvaze ten poloviční interval, na jehož koncích má $f(x)$ různá znamení a označme interval ten $\langle a_1, b_1 \rangle$. Rozpůlíme tento interval a opakujeme předcházející pochod myšlenkový. Obdržíme tak buď bod $x_2$, v němž $f(x_2) = 0$, nebo nový čtvrtinový interval $\langle a_2, b_2 \rangle$, na jehož koncích má $f(x)$ různá znamení.

Tak pokračujeme dále. Jsou nyní jen dvě možnosti. Buď po konečném počtu $n$ kroků dojdeme k bodu půlícímu $x_n$, který má vlastnost $f(x_n) = 0$ a pak věta jest dokázána. Nebo žádný půlící bod $x_n$ nemá této vlastnosti. V tomto případě získáme nekonečnou posloupnost intervalů $< a, b >$, $< a_1, b_1 >$, $< a_2, b_2 >$..., do sebe zařazených, z nichž $(n+1)$-vý má délku $(b-a) : 2^n$. Tyto intervaly definují jediný bod $\xi$, který jest v každém z nich. Tvrdíme nyní, že $f(\xi) = 0$. Bod $\xi$ má totiž tu vlastnost, že v každém sebe menším jeho okolí nabývá $f(x)$ jak kladných, tak záporných hodnot, neboť každé jeho okolí obsahuje ve svém nitru nekonečně mnoho intervalů $< a_n, b_n >$. Tuto vlastnost nemůže míti podle věty I žádný bod, v němž funkce jest od nuly různa a tedy nutně $f(\xi) = 0$.

Věta dokázaná má důležitý důsledek:

*Jestliže $f(x)$ jest spojitá v $< a, b >$ a při tom $f(a) \neq f(b)$, pak $f(x)$ nabývá v $< a, b >$ všech hodnot obsažených mezi $f(a)$ a $f(b)$.*

Budiž na př. $f(a) > f(b)$ a $m$ hodnota mezi čísly těmi položená. Potom funkce $F(x) = f(x) - m$ jest spojitá v $< a, b >$ a má vlastnost $F(a) > 0$, $F(b) < 0$. Podle věty II jest tedy v $< a, b >$ obsažen bod $\xi$ té vlastnosti, že $F(\xi) = 0$, čili $f(\xi) = m$.

**Cvičení** 1. Každá algebraická rovnice $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ *lichého* stupně s reálnými koeficienty má aspoň jeden reálný kořen.

(Za předpokladu, že $a_0 > 0$, urči znamení funkce

$$y = P(x) = x^n \left( a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} \right)$$

pro tak veliká kladná $x$ a pro tak veliká záporná $x$, že znaménko závorky jest totožné se znaménkem $a_0$.)

2. Rovnice *Kepler*-ova $x - e . \sin x = M$, kdež $0 \leq e < 1$ a $M$ jsou daná čísla, má aspoň jeden kořen reálný. (Vyhledej znamení funkce $f(x) = x - e . \sin x - M$ pro dosti veliké kladné a dosti veliké záporné $x$. Uvidíme později, že rovnice má jen jediný kořen.)

3. Rovnice $\operatorname{tg} x - a . x = 0$ $(a > 0)$, má kořeny v intervalech $(\pi/2, 3\pi/2)$, $(3\pi/2, 5\pi/2)$, ...

**23. Třetí věta o spojitých funkcích.** Funkce nespojitá vlastnosti té míti nemusí. Tak na př. $y = x - [x]$ v intervalu $< 0, 2 >$ jest všude menší než 1 a při tom nabývá hodnot tak blízkých jedné, jak chceme. Nenabývá tedy nikde hodnoty maximální.

Uvažujme nyní o funkci $f(x)$ spojité v $< a, b >$. Rozpůlíme $< a, b >$ a přirovnáme čísla $f(a)$, $f([a+b] : 2)$, $f(b)$. Jedno z nich bude největší. Příslušnou úsečku označíme $x_1$. Rozdělíme $< a, b >$ dalšími dvěma dělícími body na čtyři stejné díly. Přirovnáme pět pořadnic příslušných k dělícím bodům. Úsečku největší pořadnice nazveme $x_2$. Tak pokračujeme stále. Jestliže při některém z těchto kroků vznikne několik »největších« (sobě rovných) pořadnic, volíme z nich tu, která má nejmenší úsečku. Tak vzniknou dvě posloupnosti

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, f(x_1) \leqq f(x_2) \leqq f(x_3) \leqq \ldots.$$

Posloupnost prvá má aspoň jeden bod zhuštění $\xi$, ležící v $< a, b >$. Tvrdíme nyní, že v bodě tom nabývá $f(x)$ svého maxima, to jest: Zvolím-li libovolně $x$ v $< a, b >$, bude vždy $f(x) \leqq f(\xi)$.

Z prvé posloupnosti můžeme vybrati novou posloupnost $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots x_{n_k}$ která má limitu $\xi$ (viz odst. 4, cvič. 4). Potom jest vzhledem ke spojitosti

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(\xi).$$

Zvolme libovolný bod $x$ v $< a, b >$. Bod ten leží mezi dvěma dělícími body dělení $n$-tého $x_n' \leqq x \leqq x_n''$. Protože jest $x_n'' - x_n' = (b - a) : 2^n$, je patrně $\lim\limits_{n \to \infty} x_n' = x$ a tedy podle věty b) z odst. 4 také $\lim\limits_{k \to \infty} x'_{n_k} = x$ a proto $\lim\limits_{k \to \infty} f(x'_{n_k}) = f(x)$. Avšak $x_{n_k}$ a $x'_{n_k}$ jsou úsečky patřící k témuž $n_k$-tému půlení. Jest tedy

$$f(x_{n_k}) \geqq f(x'_{n_k}) \text{ a tedy také } \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) \geqq \lim_{k \to \infty} f(x'_{n_k}),$$

to jest $f(\xi) \geqq f(x)$ q. e. d.

Podobně se dokáže, že existuje v $< a, b >$ bod $\eta$, v němž má $f(x)$ minimální hodnotu $f(\eta) \leqq f(x)$. Tím jest třetí věta dokázána.

Důsledek její jest:

*Funkce $f(x)$ spojitá v $< a, b >$ jest tam oboustranně ohraničená.* Jest totiž $f(\eta) \leqq f(x) \leqq f(\xi)$ pro každé $a \leqq x \leqq b$. Funkce $f(x)$ jest spojitá také v $< \xi, \eta >$ (nebo $< \eta, \xi >$) a podle důsledku ke druhé větě nabývá všech hodnot mezi $f(\eta)$ a $f(\xi)$.

**24. Inversní funkce.** Budiž $y = f(x)$ funkce spojitá v $< a, b >$ stále stoupající; tím míníme, že, kdykoli $x_1 > x_2$ je také $f(x_1) > f(x_2)$. Potom jest $B = f(b) > f(a) = A$ a funkce

$y=f(x)$ nabývá každé hodnoty mezi těmito dvěma mezemi a sice každé jen jednou. Z toho vyplývá, že ke každému $y$, ležícímu v int. $<A, B>$, přísluší jedno jediné $x$, splňující rovnici $y=f(x)$. Můžeme tedy podle obecné definice funkce z odst. 15 považovati $x$ za funkci nezávisle proměnné $y$ v $<A, B>$ a psáti

$$x=\varphi(y).$$

Jest to *inversní funkce* k funkci $y=f(x)$. Tato inversní funkce jest samozřejmě stále stoupající a jest také spojitá, jak ihned dokážeme.

Vybeřme si v int. $(A, B)$ libovolné číslo $y_0$ a volme $\varepsilon$ libovolně malé a kladné tak, aby $x_0+\varepsilon$ a $x_0-\varepsilon$ leželo v $<a, b>$, při čemž jest $x_0=\varphi(y_0)$. Pak jest

$$y_0=f(x_0)\,,\ x_0=\varphi(y_0)\,;\ y_0+\delta_1=f(x_0+\varepsilon),\ y_0-\delta_2=f(x_0-\varepsilon).$$

Čísla kladná $\delta_1$ a $\delta_2$ jsou tím přesně určena a závisí patrně na volbě čísla $\varepsilon$. Inversí předešlých rovnic získáme

$$x_0+\varepsilon=\varphi(y_0+\delta_1),\ x_0-\varepsilon=\varphi(y_0-\delta_2).$$

Označme menší z čísel $\delta_1$, $\delta_2$ znakem $\delta(\varepsilon)$. Zvolíme-li nyní $y$ v int. $<y_0-\delta, y_0+\delta>$, padne příslušné $x=\varphi(y)$ do $<x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon>$, neboť $\varphi(y)$ jest funkce stoupající. Tím jest však dokázáno, že

$$|x-x_0|=|\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon \quad \text{pokud} \quad |y-y_0|<\delta(\varepsilon), \quad \text{s. e. d.}$$

Podobným postupem se dokáže spojitost z prava v bodě $y=A$ a spojitost z leva pro $y=B$.

Rovněž funkce spojitá v $<a, b>$, stále *klesající*, má inversní funkci spojitou, což se dokáže obdobně jako nahoře.

**25. Funkce eksponenciální a logaritmus.** Funkce eksponenciální $y=a^x$, definovaná v odst. 6 pro každé reálné $x$, jest stále stoupající, jestliže $a>1$. Dokážeme její spojitost nejdříve v bodě 0. Užijeme k tomu vztahu $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$, dokázaného v citovaném odstavci, který má tento význam: Je-li $\varepsilon$ libovolně malé a kladné, jest

$$a^{\frac{1}{n}}-1<\varepsilon \text{ pro } n>N(\varepsilon).$$

Uvážíme-li, že $a^x$ jest stoupající, usoudíme, že také

$$a^x-1<\varepsilon \text{ pro } 0<x<1:[N(\varepsilon)+1].$$

Místo nerovnin těchto lze psáti symbol

$$\lim_{x \to +0} a^x = 1 = a^0.$$

Dále jest $\lim_{n \to \infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$ a tedy

$$1 - a^{-\frac{1}{n}} < \varepsilon \text{ pro } n > N_1(\varepsilon).$$

Z toho plyne, jako svrchu,

$$1 - a^x < \varepsilon \text{ pro } 0 > x > -1 : [N_1(\varepsilon) + 1], \text{ čili } \lim_{x \to -0} a^x = a^0.$$

Celkem můžeme psáti $\lim_{x \to 0} a^x = 1$, neboť limity z prava i z leva jsou obě rovny jedné. Spojitost v libovolném bodě $x_0$ jest pouhým důsledkem, neboť

$$\lim_{x \to x_0} a^x = \lim_{h \to 0} a^{x_0 + h} = a^{x_0} \,.\, \lim_{h \to 0} a^h = a^{x_0} \,.\, 1.$$

Celkem můžeme říci: Funkce $y = a^x$ $(a > 1)$ jest spojitá a stále vzrůstající v každém intervalu. Následkem toho má podle věty předešlého odst. spojitou a stále stoupající inversní funkci, kterou nazýváme *logaritmus y při základu a* a píšeme

$$x = \log_a y.$$

Obor proměnné $y$ jsou všechna reálná čísla, větší než nula, neboť $a^x$ nabývá všech hodnot větších než nula a jen těchto, když $x$ probíhá množství $(-\infty, +\infty)$. Základem $a$ logaritmů může býti kterékoliv číslo $> 1$. Při numerickém počítání užívá se nejčastěji logaritmů *desítkových* (dekadických, $a = 10$). Tak zvané logaritmy *přirozené* mají základem iracionální číslo $e = 2{\cdot}71828\ldots$ Důvod jejich názvu seznáme z odst. 29.

Souvislost dvou různých logaritmických soustav o základech $a$ a $b$ seznáme, když uvážíme, že ze vztahů

$$x_1 = \log_a y, \quad x_2 = \log_b y \text{ plyne}$$
$$y = a^{x_1} = b^{x_2} \quad \text{čili} \quad a^{\log_a y} = b^{\log_b y}.$$

Je tedy

$$\log_a [a^{\log_a y}] = \log_a [b^{\log_b y}] \quad \text{čili} \quad \log_a y = \log_a b \,.\, \log_b y.$$

Dosadíme-li sem $y = a$, obdržíme

$$1 = \log_a b \,.\, \log_b a$$

a tedy

$$\log_a y = \log_a b \,.\, \log_b y = \frac{1}{\log_b a} \log_b y.$$

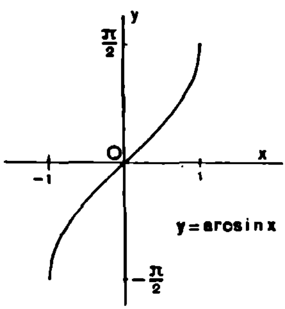
Vzorce toho užívá se při převodu soustav logaritmických. Tak na př., značíme-li dekadické logaritmy *log y* a přirozené *lg y*, bude

$$\log y = \log e \,.\, \lg y = \frac{1}{\lg 10} \,.\, \lg y, \qquad \left(\log e = \frac{1}{\lg 10} = 0{\cdot}4343 \ldots\right)$$

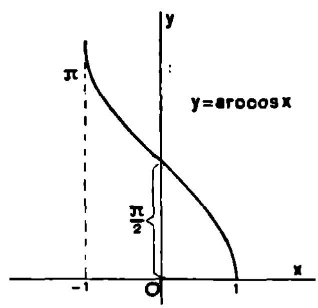
**26. Funkce cyklometrické.** Funkce $x = \sin y$ jest v oboru $\left< -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right>$ pro $y$ funkce spojitá a stále stoupající. Má tedy inversní funkci spojitou a stále stoupající, kterou nazýváme *arkus sinus x* a píšeme

$$y = \text{arc}\sin x, \quad -1 \leqq x \leqq 1. \quad \text{(Obr. } 7a.)$$

Význam této funkce nejlépe si zapamatujeme, když předešlý vztah čteme trochu obšírněji: $y$ jest arkus (oblouk),




Obr. 7a.




Obr. 7b.

který přísluší k danému sinu $x$. Tak na př. *arcsin* $0 = 0$, arcsin $1/2 = \pi/6$, arc sin $1 = \pi/2$, arc sin $-1/\sqrt{2} = -\pi/4$ atd.

O funkci *sinus* víme z geometrie, že

$$\sin y = \sin (y + 2k\pi) = \sin [(2k+1)\pi - y], \; (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

Následkem toho rovnice $x = \sin y$ má mimo už definované řešení $y = \text{arc}\sin x$ ještě nekonečně mnoho dalších

$$y = \arcsin x + 2k\pi, \quad y = (2k+1)\pi - \arcsin x,$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots.$$

Funkce $x = \cos y$ jest spojitá a monotonní v oboru $< 0, \pi >$ pro $y$. Její inversní funkce jest *arkus kosinus x*

$$y = \text{arc}\cos x, \quad -1 \leqq x \leqq 1. \quad \text{(Obr. 7b.)}$$

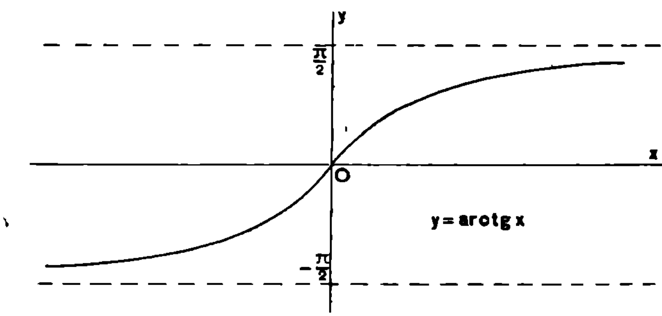
Protože $x = \cos y = \sin(\pi/2 - y)$, čili $y = \arccos x$, $\pi/2 - y = \arcsin x$, jest mezi funkcemi vztah

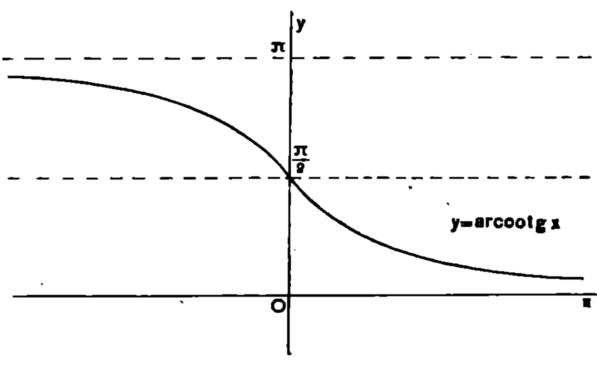
$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2.$$

Iversní funkce k $x = \operatorname{tg} y$, $-\pi/2 < y < \pi/2$, jest *arkus tangens x*

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad -\infty < x < +\infty, \quad \text{(Obr. 8}a\text{.)}$$

Obr. 8a.




Obr. 8b.

a inversní funkce k $x = \operatorname{cotg} y$, $0 < y < \pi$, jest *arkus kotangens x*

$$y = \operatorname{arc\,cotg} x, + \infty < x < + \infty, \quad \text{(Obr. 8}b\text{.)}$$

Ze stejného důvodu, jako dříve, jest

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,cotg} x = \frac{\pi}{2}.$$

**Cvičení.** Dokažte vztahy

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$, $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$,
$\operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,tg} x$, $\operatorname{arc\,cotg}(-x) = \pi - \operatorname{arc\,cotg} x$,

$$\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,cotg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

(pokud $0 < x < 1$),
$\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x : x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{arc\,tg} x : x) = 1$.

## Kapitola V.

# PRVÁ DERIVACE A DIFERENCIÁL.

**27. Definice derivace.** Budiž dána funkce $y = f(x)$, definovaná v okolí bodu $x$. Zvětšíme-li $x$ o kladné nebo záporné číslo $h = \Delta x$,*) zvětší se při tom $f(x)$ o kladné nebo záporné číslo $\Delta y = f(x+h) - f(x)$. Podíl

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

nazývá se podíl diferencí a závisí, jak patrno, na čísle $x$, na velikosti $h$ a na tvaru funkce $f(x)$. Jestliže pokládáme $f(x)$ za pevně zvolenou funkci, *$x$ za pevně zvolené číslo,* jest podíl ten funkcí jen proměnného čísla $h$. Jest tedy

$$\varphi(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Tato funkce jest definována pro všechna $h$, pro která jest definováno $f(x+h)$ s výjimkou jediné hodnoty $h = 0$, neboť nulou nelze děliti. Přes to však, jak víme, může eksistovati $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)$. Jestliže limita tato v daném případě eksistuje, nazýváme ji *derivace $f(x)$ v bodě $x$* a píšeme

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\varphi(h) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x).}$$

Limita závisí na $x$ a na tvaru funkce $f(x)$. Není ovšem již

*) $\Delta x$ čteme »delta $x$«. Jest to diference (rozdíl) dvou hodnot $(x+h)$ a $x$. Někdy říkáme, že $\Delta x$ jest přírůstek $x$, $\Delta y$ přírůstek $y$. $\Delta x$ není součin veličin $\Delta$ a $x$, nýbrž symbol, podobně jako $f(x)$.

závislá na $h$. Jest dobře si uvědomiti, co značí přesně předešlý limitní vztah:

*Funkce $f(x)$ má v bodě $x$ derivaci, jestliže eksistuje takové číslo $f'(x)$, že pro libovolně zvolené kladné $\varepsilon$ jest*

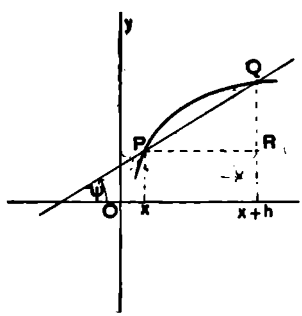
$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|<\varepsilon,$$

*když* $0<|h|<\delta(\varepsilon)$.

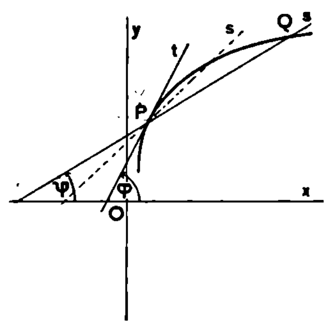
Vztah ten lze také psáti ve tvaru, který často upotřebíme,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\eta(h),$$

kdež $\lim\limits_{h\to 0}\eta(h)=0$.



Obr. 9a.



Obr. 9b.

Pojem derivace byl od Leibnize a Newtona definován na základě geometrickém a fysikálním. Vyložíme-li funkční vztah $y=f(x)$, jako rovnici křivky v pravoúhlých souřadnicích, pak

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

jest směrnice sečny $s$, to jest přímky, která prochází dvěma body křivky $P\equiv(x,\ y)$, $Q\equiv(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ (obr. 9*a*). Jestliže $P$ trvá na svém místě ($x$ se nemění) a bod $Q$ se blíží po křivce bodu $P$ (to jest $h\to 0$), potom $\operatorname{tg}\psi$ se mění. Může se státi a často se stává, že při tom $\operatorname{tg}\psi$ blíží se určité limitě, ať $h$ blíží se nule *jakýmkoliv* způsobem. V tom případě také sečna blíží se jisté mezné poloze $t$. Tuto limitní polohu sečny nazýváme *tečna* (tangenta) *křivky v bodě P*. (Obr. 9*b*.) Její směrnice jest

$$\operatorname{tg}\varphi = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Ve fysice souvisí derivace s pojmem rychlosti.

Nechť bod $M$ pohybuje se po přímce tak, že vzdálenost $M$ od pevného bodu $O$ na přímce jest známá funkce času. Značme čas $t$ ve vteřinách, vzdálenost $\overline{OM} = s$ v centimetrech. Čtenář nechť si laskavě nakreslí příslušný obrazec. Pišme $s = f(t)$. Nechme uplynouti od okamžiku $t$ další čas $h$ sek. Bod $M$ octne se v posici $M_1$, určené vztahem $\overline{OM_1} = f(t+h)$. Urazil tedy bod $M$ v čase $h$ vzdálenost $\overline{MM_1} = f(t+h) - f(t)$ a urazil průměrně za jednotku časovou vzdálenost

$$\varphi(h) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Podíl ten nazývá se *průměrná* (střední) *rychlost bodu M* v intervalu časovém $< t, t+h >$. Limita $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h)$, jestliže ovšem vůbec eksistuje, nazývá se *okamžitá rychlost v čase t,* nebo v bodě $M$. Jest známo z fysiky, že touto rychlostí, už se neměnící, pohyboval by se hmotný bod $M$ po přímce dále, kdyby v okamžiku $t$ přestaly účinkovati všechny síly. Okamžitá rychlost jest tedy *definována* rovnicí

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f'(t).$$

*Příklad* 1. Parabola má rovnici $y = a \cdot x^2$. Derivace v bodě $x$ jest $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a(x+h)^2 - ax^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (2ax + ah) = 2ax$. To jest tedy směrnice tečné.

*Příklad* 2. Harmonický pohyb na přímce dán jest rovnicí $s = \sin \omega \cdot t$ ($t$ čas, $\omega$ konstanta). Okamžitá rychlost v čase $t$ jest

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(\omega t + \omega h) - \sin \omega t}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 \sin(\omega h/2) \cdot \cos(\omega t + \omega h/2)}{h}.$$

Označme $\omega h/2 = \xi$, kteréžto $\xi \to 0$, když $h \to 0$.

$$v(t) = \lim_{\xi \to 0} \omega \frac{\sin \xi \cos(\omega t + \xi)}{\xi} = \lim_{\xi \to 0} \left(\omega \cdot \frac{\sin \xi}{\xi}\right) \cdot \lim \cos(\omega t + \xi) =$$
$$= \omega \cdot \cos \omega t.$$

Eksistence derivace funkce a spojitost funkce jsou ve vztahu vyjádřeném větou:

*Funkce $f(x)$, která má v bodě $x_1$ derivaci $f'(x_1)$, jest v tom bodě spojitá.*

Podle definice derivace jest totiž

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}=f'(x_1)+\eta(h), \lim_{h\to 0}\eta(h)=0$$

a tedy $$f(x_1+h)=f(x_1)+h\,.\,f'(x_1)+h\,.\,\eta(h),$$

čili $$\lim_{h\to 0}f(x_1+h)=f(x_1).$$

Označím-li $x=x_1+h$, dostanu

$$\lim_{x\to x_1}f(x)=f(x_1), \text{ q. e. d.}$$

*Spojitost v bodě $x$ jest tedy nutná podmínka pro existenci derivace v bodě $x$.* Není to však *postačující* podmínka, neboť na př. funkce $y=x\,.\sin(1:x)$ pro $x\neq 0$, $y=0$ pro $x=0$ jest všude spojitá. Přesto však v bodě $x=0$ nemá derivace, neboť

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{h\sin(1:h)-0}{h}=\sin\frac{1}{h}$$

nemá limitu, když $h\to 0$ (osciluje v mezích $-1$, 1). Křivka spojitá $y=x\,.\sin(1:x)$ nemá tedy v bodě $x=0$, $y=0$, tečnu. Bolzano ukázal po prvé, že lze dokonce sestrojiti funkce (křivky) spojité v celém $\langle a, b\rangle$, které tam *nikde* nemají derivaci.*)

**Cvičení.** 1. Funkce $f(x)$ má derivaci z *prava* v bodě $x$, jestliže existuje limita z prava

$$\lim_{h\to +0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x).$$

Podobně se definuje derivace z *leva*. Dokažte věty: *a)* Má-li $f(x)$ derivaci $f'(x)$, pak má *tutéž* derivaci z *prava* i z *leva*. *b)* Má-li funkce touž hodnotu za derivaci z prava i z leva, má touž hodnotu za derivaci.

2. Funkce spojitá $y=|x|$ má v bodě $x=0$ derivaci z prava $+1$ a derivaci z leva $-1$. Nemá tam tedy derivaci.

**28. Pravidla pro derivování.** Vypočteme nyní derivace nejčastěji se vyskytujících funkcí a odvodíme některá všeobecná pravidla týkající se derivací.

*) Viz na př. Petr: P. d. str. 16f.

Derivace konstanty $y = c$ jest rovna nule, neboť $f(x) = c$, $f(x+h) = c$ a tedy $[f(x+h) - f(x)] : h = 0$, bez ohledu na číslo $h$.

*Derivace mocniny* $y = x^n$, *(n celistvé kladné) jest*

$$y' = (x^n)' = n \, . \, x^{n-1} .$$

K důkazu užijeme známého rozkladu

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + \cdots + b^{n-1})$$

v němž položíme $a = x + h$, $b = x$ a tedy po dělení číslem $h$

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = (x+h)^{n-1} + x \, . \, (x+h)^{n-2} + \cdots + x^{n-1}.$$

Když $h \to 0$, všechny sčítance pravé strany v počtu $n$ mají limitu $x^{n-1}$ a tedy

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n \, . \, x^{n-1}$$

Uvidíme později, že toto pravidlo platí pro každého mocnitele $n$ (i lomeného nebo iracionálního, kladného i záporného).

*Derivace funkce* $y = \sin x$ *jest* $(\sin x)' = \cos x$, pokud $x$ jest měřeno v míře obloukové.

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin h \cos x + \cos h \sin x - \sin x}{h} = \cos x \frac{\sin h}{h} -$$

$$- \sin x \frac{1 - \cos h}{h} = \cos x \frac{\sin h}{h} - \sin x \, . \, \sin(h/2) \cdot \frac{\sin(h/2)}{(h/2)}$$

a tedy protože $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$ (viz odst. 17), $(\sin x)' = \cos x$.

Je-li úhel měřen v sekundách, jest derivace

$$(\sin x'')' = \cos x'' : (\pi : 648000).$$

neboť $\lim\limits_{h'' \to 0} (\sin h'' : h'') = \pi : 648000$.

*Derivace funkce* $y = \cos x$ *jest* $(\cos x)' = - \sin x$.

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = - \frac{\cos x \, . \, (1 - \cos h)}{h} - \sin x \, . \, \frac{\sin h}{h} =$$

$$- \sin x \frac{\sin h}{h} - \cos x \sin (h/2) \frac{\sin(h/2)}{(h/2)} \quad \text{a tedy} \quad (\cos x)' = - \sin x.$$

Další výpočty usnadní nám některá obecná pravidla o derivacích. Jsou-li $f(x)$ a $g(x)$ dvě funkce mající derivace $f'(x)$

a $g'(x)$, pak platí $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$,

$$[f(x) \, . \, g(x)]' = f'(x) \, . \, g(x) + f(x) \, . \, g'(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \, . \, g(x) - f(x) \, . \, g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0.$$

*Důkazy.* Označme $F(x) = f(x) \pm g(x)$. Jest

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

a tedy, když $h \to 0$, $F'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.

Ve druhém vzorci klademe $F(x) = f(x) \, . \, g(x)$:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} =$$

$$= \frac{f(x+h) \, . \, g(x+h) - f(x) \, g(x+h) + f(x) \, g(x+h) - f(x) \, g(x)}{h}$$

$$g(x+h) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \text{ a tedy, když } h \to 0$$

$$F'(x) = g(x) \, . \, f'(x) + f(x) \, . \, g'(x), \text{ neboť } g(x+h) \to g(x),$$

protože jest to spojitá funkce (má derivaci).

Označíme-li $f(x) = u$, $g(x) = v$, můžeme si pravidlo o derivaci součinu zapamatovati ve tvaru

$$(u \, . \, v)' = u' \, . \, v + u \, . \, v'.$$

Zvláště jest pro $g(x) = c$ (konstantě), $[c \, . \, f(x)]' = c \, . \, f'(x)$,

Při důkazu třetího vzorce klademe $F(x) = f(x) : g(x)$. Protože $g(x) \neq 0$ a jest spojité, jest pro dosti malé $h$ také $g(x+h) \neq 0$.

$$\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} = \frac{g(x) \, f(x+h) - f(x) \, g(x+h)}{g(x) \, . \, g(x+h) \, . \, h} =$$

$$= \frac{g(x) \, . \, f(x+h) - g(x) \, f(x) + g(x) \, f(x) - f(x) \, g(x+h)}{g(x) \, g(x+h) \, . \, h} =$$

$$= \frac{1}{g(x) \, . \, g(x+h)} \left\{ g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\}$$

a z toho, když $h \to 0$, hledaný výsledek, který si zapamatujeme ve tvaru

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \, . \, v - u \, . \, v'}{v^2}.$$

Zvláště jest pro $u = 1$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

*Příklady.*

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; \qquad y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}; \qquad y' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$y = \frac{1}{x^n} = x^{-n} \text{ (}n\text{ celistvé kladné)}; \quad y' = -\frac{n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n x^{-n-1}.$$

Platí tedy $(x^m)' = m x^{m-1}$ i pro *záporné celistvé m.*

Nechť $y = f(x)$ jest v $< a, b >$ spojitá a stále stoupající nebo klesající funkce, která má tam všude derivaci $f'(x)$. Její *inversní funkce* $x = \varphi(y)$ má pak, jak ihned dokážeme, také derivaci $\varphi'(y)$, o níž platí

$$\varphi'(y) = 1 : f'(x), \text{ pokud ovšem } f'(x) \neq 0.$$

Buďtež $y$, $y + k$ dvě různé hodnoty z int. $< f(a), f(b) >$. Příslušná čísla $x = \varphi(y)$, $x + h = \varphi(y + k)$ jsou pak také navzájem různá a při tom, když $k \to 0$, také $h \to 0$, což jest následek spojitosti. Dále jest $y = f(x)$, $y + k = f(x + h)$ a tedy

$$\frac{\varphi(y + k) - \varphi(y)}{k} = \frac{h}{f(x + h) - f(x)} = 1 : \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Když $k \to 0$, tedy také $h \to 0$. Pravá strana poslední rovnice má v tom případě limitu $1 : f'(x)$. Proto také levá strana má limitu a tedy

$$\varphi'(y) = 1 : f'(x).$$

Připojíme ihned důkaz dalšího vzorce pro *derivaci funkce složené* (viz odst. 20, cv. 2)

$$\{f(\varphi(x))\}' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Nechť $\varphi(x)$ a $f(u)$ mají derivace $\varphi'(x)$ a $f'(u)$ pro $u = \varphi(x)$. Jest tedy pro $k \neq 0$

$$\frac{f(u + k) - f(u)}{k} = f'(u) + \eta(k), \text{ kdež } \lim_{k \to a} \eta(k) = 0.$$

jinak psáno

$$f(u + k) - f(u) = k\{f'(u) + \eta(k)\}.$$

Tato rovnice platí i pro $k = 0$, když definujeme $\eta(0) = 0$. Při tom jest $k$ libovolné číslo, omezené jen tím požadavkem, aby $f(u+k)$ bylo definováno. Zvolme nyní $k$ speciálně

$$k=\varphi(x+h)-\varphi(x),\ u=\varphi(x),$$
$$f(\varphi(x+h))-f(\varphi(x))=\{\varphi(x+h)-\varphi(x)\}\,.\,\{f'(\varphi(x))+\eta(k)\}.$$

Při tom $h$ jest voliti tak malé, aby všechny funkce měly význam. Jestliže obě strany poslední rovnice dělíme $h$ a pak vyhledáme limitu pro $h \to 0$, obdržíme větu hledanou, neboť, když $h \to 0$, také $k \to 0$ a $\eta(k) \to 0$. Výsledný vzorec dá se snáze psáti i pamatovati ve tvaru

$$\{f(u)\}'=f'(u)\,.\,u', \qquad (u=\varphi(x)).$$

Derivace funkcí *cyklometrických* vypočteme podle věty o inversní funkci.

$$y=\operatorname{arc\,sin} x,\ x=\sin y,\ -1<x<1$$
$$(\operatorname{arc\,sin} x)'=1:\cos y=1:\sqrt{1-\sin^2 y}=1:\sqrt{1-x^2}.$$
$$y=\operatorname{arc\,cos} x,\ x=\cos y,\ -1<x<1$$
$$(\operatorname{arc\,cos} x)'=1:(-\sin y)=-1:\sqrt{1-x^2}.$$
$$y=\operatorname{arc\,tg} x,\ x=\operatorname{tg} y,$$
$$(\operatorname{arc\,tg} x)'=1:(1:\cos^2 y)=1:(1+\operatorname{tg}^2 y)=1:(1+x^2).$$
$$y=\operatorname{arc\,cotg} x,\ x=\operatorname{cotg} y,$$
$$(\operatorname{arc\,cotg} x)'=1:(-1:\sin^2 y)=-1:(1+x^2).$$

**29. Derivace funkce eksponenciální a logaritmické.** Budiž $y=e^x$. Derivace této funkce jest v bodě $x$

$$(e^x)'=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\,.\,\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}.$$

Limitu, která patrně nezávisí na $x$, vypočteme takto. Podle odst. 6, př. 2 jest

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

a tedy

$$\frac{1}{n}<e^{\frac{1}{n}}-1<\frac{1}{n-1}, \qquad 1<\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}<\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{n-1}$$

Z toho plyne

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=1.$$

Je-li $h$ libovolně malé kladné číslo, eksistuje vždy celistvé kladné $m$ tak, že $m \leq 1/h < m+1$ a tedy vzhledem k tomu, že $e^x$ jest vzrůstající funkce, $e^{\frac{1}{m+1}} < e^h \leq e^{\frac{1}{m}}$ a tedy také $(e^{\frac{1}{m+1}} - 1) < (e^h - 1) \leq (e^{\frac{1}{m}} - 1)$. Tuto nerovnost, obsahující samá kladná čísla, násobme předcházející nerovností pro $1/h$, čímž obdržíme

$$(e^{\frac{1}{m+1}} - 1)\, m < \frac{e^h - 1}{h} < (e^{\frac{1}{m}} - 1)(m+1),$$

$$\frac{e^{\frac{1}{m+1}} - 1}{1:(m+1)} \cdot \frac{m}{m+1} < \frac{e^h - 1}{h} < \frac{e^{\frac{1}{m}} - 1}{1:m} \cdot \frac{m+1}{m}.$$

Když $h \to +0$, pak $m \to +\infty$ a $\lim (m+1)/m = \lim m/(m+1) = 1$. Tedy $\lim\limits_{h \to +0} (e^h - 1):h = 1$. Dále jest $\lim\limits_{h \to -0} (e^h - 1):h = \lim\limits_{\delta \to +0} (e^{-\delta} - 1):(-\delta) = \lim\limits_{\delta \to +0} (e^\delta - 1):e^\delta \,.\, \delta = \lim\limits_{\delta \to +0} e^{-\delta} \,.\, \lim\limits_{\delta \to +0} (e^\delta - 1):\delta = 1$. Jest tedy celkem $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ a tedy $(e^x)' = e^x$.

Derivaci obecné funkce exponenciální $y = a^x$, $(a > 0)$, obdržíme ve vztahu $a^x = e^{\lg a \,.\, x}$ a tedy, klademe-li $x \,.\, \lg a = u$, je podle pravidla pro funkci složenou

$$(a^x)' = e^u \,.\, u' = e^{x \lg a} \,.\, \lg a = a^x \,.\, \lg a.$$

Derivaci funkce *logaritmické* obdržíme z identity platné pro *kladné x*

$$a^{\log_a x} = x, \quad \text{čili } x = a^y, \text{ kdež } y = \log_a x.$$

Jest tedy $(x)' = 1 = a^y \,.\, \lg a \,.\, y'$, čili

$$y' = (\log_a x)' = \frac{1}{a^y \lg a} = \frac{1}{\lg a} \cdot \frac{1}{x}.$$

Pro *záporné x* je podobně

$$a^{\log_a (-x)} = -x, \quad \text{čili } -x = a^y, \text{ kdež } y = \log_a (-x)$$

a tedy

$$(-x)' = -1 = a^y \,.\, \lg a \,.\, y',$$

čili

$$(\log_a (-x))' = \frac{-1}{\lg a \,.\, a^y} = \frac{1}{\lg a} \cdot \frac{1}{x}.$$

Pro *jakékoli* od nuly různé *reálné* $x$ jest tedy

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\lg a}.$$

Zvláště jednoduchá jest tedy derivace funkce logaritmické při základu $e$

$$(\lg |x|)' = \frac{1}{x}.$$

To jest jeden z důvodů, proč se logaritmům těmto říká »přirozené« a proč se jim v analysi dává pravidelně přednost před každou jinou soustavou logaritmickou.

Z derivace pro funkci exponenciální lze vypočísti derivaci obecné mocniny $y = x^n$ kdež $n$ jest libovolné reálné číslo a $x > 0$. Jest totiž $y = e^{n \lg x}$ a tedy $y' = e^{n \lg x} \cdot n \cdot \frac{1}{x} = n \cdot x^{n-1}$.

Někdy bývá snazší vypočísti derivaci logaritmu nějaké funkce, nežli derivaci funkce samé. V tom případě užijeme tak zv. *logaritmické derivace,* to jest formule

$\{\lg f(x)\}' = f'(x) : f(x)$, a tedy označíme-li $y = f(x)$, $y' = y \cdot (\lg y)'$.

*Příklad 1.*

$$y = (x - a_1)^{p_1} (x - a_2)^{p_2} \dots (x - a_n)^{p_n},\ x > \text{Maximum}\,(a_1, a_2, \dots a_n)$$

$$\lg y = p_1 \cdot \lg(x - a_1) + p_2 \cdot \lg(x - a_2) + \dots + p_n \cdot \lg(x - a_n)$$

$$y' = y \cdot \left\{\frac{p_1}{x - a_1} + \frac{p_2}{x - a_2} + \dots + \frac{p_n}{x - a_n}\right\}.$$

*Příklad 2.*

$$y = \{f(x)\}^{\varphi(x)} = (v)^u \qquad \lg y = u \cdot \lg v, \qquad v = f(x) > 0$$

$y' : y = u' \cdot \lg v + u \cdot v' : v$ a tedy

$$y' = (v)^u \{u' \lg v + u \cdot v' : v\}.$$

**Cvičení.** Uvádíme jen několik příkladů, podle nichž lze sestrojiti jiné podobné. Výsledky jsou připojeny v závorkách. Užívání pravidel derivačních jest možno osvojiti si jen propočtením velkého počtu příkladů.

1. Pomocí obecného vztahu $y' = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ vypočtěte derivace funkcí $4x$, $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{-1}$, $x^{-3}$, $2x^{-\frac{1}{2}}$, $x^5 - x^3$, $(1-x)^2$ ! $\left\{4,\ \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},\ -x^{-2},\ -3x^{-4},\ -x^{-\frac{3}{2}},\ 5x^4 - 3x^2,\ -2(1-x)\right\}$.

2. $x^5 + 3$, $x^5 - 7$, $x^5 + a$, $(5x^4)$; $2^x$, $(2^x \cdot \lg 2)$; $10^x$, $(10^x \lg 10)$.

3. $y = \frac{x^4}{3} - \frac{6x^3}{7} + x^2 - \frac{3x}{5} + 2$, $\left(y' = \frac{4x^3}{3} - \frac{18x^2}{7} + 2x - \frac{3}{5}\right)$.

4. $y = 2\frac{1}{2}x^4 - \pi . x^2 + \sqrt{3}$, $(y' = 10x^3 - 2\pi x)$.

5. $s = v_0 . t - 0{,}5\, at^2$, $(s' = v_0 - a . t)$.

6. $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$,
$(y' = na_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1})$.

7. Podle pravidla $(u . v)' = u'v + uv'$ derivujte funkce

a) $x^2\, 3^x$, $(2x\, 3^x + x^2 \lg 3 . 3^x)$; b) $x^a . a^x$, $(ax^{a-1} . a^x + x^a a^x \lg a)$;

c) $x^{10} . \sin x$; d) $x^{-4} . e^x$;

e) $\sqrt{x} \lg x$; f) $x^{\frac{3}{2}} \arcsin x$;

g) $5e^x \sin x$; h) $a \lg |x|\, e^x$;

$\pi . \arccos x$; k) $(x^3 + e^x) . \lg |x|$;

$(\sin x + \operatorname{tg} x)(\cos x + \operatorname{cotg} x)$ atd.

8. Je-li $P(x)$ mnohočlen stupně $n$-tého a má-li algebr. rovnice $P(x) = 0$, $k$ násobný kořen $\alpha$, má rovnice $P'(x) = 0$, $(k-1)$ násobný kořen $\alpha$! (Položte $P(x) = (x - \alpha)^k . Q(x)$, kdež $Q(x)$ jest mnohočlen stupně $(n-k)$tého).

9. Podle pravidla $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ vypočtěte derivace funkcí

a) $\frac{x}{1-x^2}$, $\left\{\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\right\}$; b) $\frac{1}{1+x^2}$, $\left\{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right\}$;

c) $\frac{1-t}{1+t}$, $\left\{\frac{-2}{(1+t)^2}\right\}$; d) $\frac{z^2+a}{z+a}$, $\left\{\frac{z^2+2az-a}{z^2+2az+a^2}\right\}$;

e) $\frac{2ay}{a^2-y^2}$; f) $\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$;

g) $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\left\{\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right\}$; h) $\operatorname{cosec} x$, $\left\{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right\}$;

i) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, $\left\{-e^{-x}\right\}$ k) $\frac{x^n}{n^x}$, $\left\{\frac{nx^{n-1} - \lg n . x^n}{n^x}\right\}$.

10. Podle pravidla o funkci složené $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$; $y' = f'(u) . u' = f'(\varphi(x)) . \varphi'(x)$

a) $(3x+5)^7$, $\{7(3x+5)^6 . 3\}$; b) $(ax+b)^n$, $\{n(ax+b)^{n-1} . a\}$;

c) $\sin nx$, $\{n \cos nx\}$; d) $\cos(nx+b)$, $\{-n \sin(nx+b)\}$;

e) $\lg |3x^2+2|$, $\left\{\frac{1}{3x^2+2} . 6x\right\}$; f) $\lg |\sin x|$, $\left\{\frac{1}{\sin x} . \cos x\right\}$;

$\lg |\cos x|$, $\{-\operatorname{tg} x\}$;

g) $[f(x)]^n$, $\{n [f(x)]^{n-1} . f'(x)\}$; h) $f(x^n)$, $\{n f'(x^n) . x^{n-1}\}$.

11. Dokažte, že

$$(u \,.\, v \,.\, w)' = u'vw + uv'w + uvw',$$

když $u$, $v$, $w$ jsou funkce $x$ mající derivace!

12. Dokažte, že derivace složené funkce

$F\{f[g(x)]\}$ jest $F'\{f[g(x)]\} \,.\, f'[g(x)] \,.\, g'(x)$! Na př.: $y = \lg |\sin a^x|$.

**30. Derivace funkce algebraické.** Algebraická funkce implicitní určena jest rovnicí

$$a_0(x) \,.\, y^n + a_1(x)\, y^{n-1} + \ldots + a_n(x) = 0,$$

kdež $a_k(x)$ jsou mnohočleny v $x$. Víme, že rovnice má vždy aspoň jeden kořen pro každé $x$, pro které aspoň jeden z koeficientů $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ jest od nuly různý. Dokážeme v posledním odstavci, že tyto kořeny definují za určitých předpokladů funkci $y = u(x)$, která jest spojitá, má derivaci a vyhovuje identicky rovnici algebraické, to jest: rovnice

$$a_0(x) \,.\, u^n(x) + a_1(x) \,.\, u^{n-1}(x) + \ldots + a_n(x) \equiv 0$$

jest splněna pro všechna $x$ nějakého intervalu. V tomto intervalu derivace levé strany rovnice musí býti rovna derivaci pravé strany a to jest nula. Tedy

$$(a'_0 u^n + a_0 \,.\, nu^{n-1} \,.\, u') + (a'_1 \,.\, u^{n-1} + a_1 \,.\, (n-1)\, u^{n-2} \,.\, u') + \ldots + a'_n = 0$$

čili

$$u'(x) = -\frac{a'_0 \,.\, u^n + a'_1 u^{n-1} + \ldots + a'_n}{n a_0 u^{n-1} + (n-1)\, a_1 u^{n-2} + \ldots + a_{n-1}}\,.$$

**Cvičení.** 1. Vypočtěte směrnice tečen pro křivky

$$b^2 x^2 \pm a^2 y^2 = a^2 b^2, \qquad (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2,$$

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

$$\left(\mp \frac{b^2 x}{a^2 y}, \; -\frac{x-p}{y-q}, \; -\frac{2ax + by + d}{2cy + bx + e}\right).$$

2. Vypočtěte směrnice křivek algebraických

$x^3 - 2xy + y^5 = 0$ v bodě $(1, 1)$, $\left(y' = -\dfrac{1}{3}\right)$,

$2x^3 - 3x^2 y + 4xy + 6y^3 = 0$, $\left(y' = \dfrac{6x^2 - 6xy + 4y}{3x^2 - 4x - 18y^2}\right)$.

3. Dokažte, že křivka $x^4 - 2xy^2 + y^3 + 3x - 3y = 0$ protíná osu $x$ v počátku pod úhlem $45^0$.

4. Derivujte $y$ dvojím způsobem (jako implicitní a jako explicitní funkci) *a)* $xy + 4y = 3x$; *b)* $y^2 = 2px$!

5. Dokažte, že křivky $3y = 2x + x^4y^3$, $2y + 3x + y^5 = x^3y$ protínají se v počátku pod pravým úhlem!

6. Parabola $y^2 = 2px$ protíná křivku $x^3 - 3pxy + y^3 = 0$ v počátku a ještě v dalším bodě. Jak zní rovnice tečen sestrojených k oběma křivkám v tomto bodě? Dokažte, že tečny svírají úhel $32^0\,12'$!

**31. Rozšíření pojmu derivace.** Derivace jest určitá limita. Protože jsme v odst. 18 definovali limitu v širším smyslu, můžeme také definovati derivaci v širším smyslu.

Jestliže jest

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \to +\infty, \text{ nebo } \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \to -\infty, \qquad (h \to 0)$$

říkáme, že $f(x)$ má v bodě $x$ *derivaci v širším smyslu* a píšeme místo předešlého vztahu *symbolickou* rovnici

$$f'(x) = +\infty \text{ nebo } f'(x) = -\infty.$$

Geometrický význam derivace ve smyslu širším jest prostě ten, že tečna v příslušném bodě jest rovnoběžná s osou $y$.

Význam podobných symbolů, jako

$$f'(x) = \pm\infty, \quad f'^{+}(x) = -\infty, \quad f'^{-}(x) = +\infty \text{ a p.}$$

jest nyní podle definic v odst. 18 zcela zřejmý.*)

**Cvičení.** V bodě $x = 0$ vypočtěte derivaci v širším smyslu funkcí $y = \sqrt[3]{x}$, $y = -\sqrt[3]{x}$ a derivaci z prava a z leva v širším smyslu u funkcí $y = -\sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[3]{x^2}$, $y = -\sqrt[3]{x^2}$.

Znázorněte funkce ty graficky!

**32. Věta o rostoucí funkci a věta Rolle-ova.** Funkce $y = f(x)$ nechť jest definována v nějakém okolí pevného bodu $x_0$.

J e s t l i ž e jsou mimo to v tomto okolí splněny nerovniny

$$f(x) < f(x_0), \text{ když } x < x_0,$$
$$f(x) > f(x_0), \text{ když } x > x_0,$$

říkáme, že funkce jest *v bodě $x_0$ rostoucí* (obr. 10a). Podobně jest definována funkce klesající v bodě $x_0$ (obr. 10b).

Jest nutno dobře rozeznávati funkci rostoucí v bodě $x_0$ od funkce *stále rostoucí* v daném intervalu (odst. 28).

Má-li nějaká funkce derivaci od nuly různou v daném bodě, lze vždy rozhodnouti, zda-li jest rostoucí či klesající pomocí následující věty:

---

*) Symbolem $f'^{+}(x)$ značíme derivaci z prava a symbolem $f'^{-}(x)$ derivaci z leva.

*Jestliže $y = f(x)$ má v bodě $x_0$ kladnou (zápornou) derivaci $f'(x_0)$, pak jest $f(x)$ v tom bodě rostoucí (klesající).*

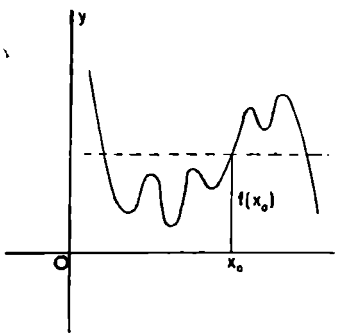
Podle str. 60 jest totiž

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a + \eta(h), \quad \lim_{h\to 0} \eta(h) = 0, \quad a = f'(x_0)$$

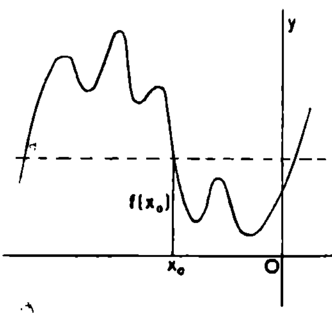
a tedy $f(x_0 + h) - f(x_0) = h \, . \, \{a + \eta(h)\}$.

Omezíme-li se na tak malé prosté hodnoty $|h|$, že pro ně je $|\eta(h)|$ menší než $|a|$ má závorka na pravé straně totéž znamení jako číslo $a$. O znamení pravé strany tedy rozhodne znaménko součinu $h \, . \, a$. Jestliže na př. $a = f'(x_0) > 0$, je pro kladné $h$ znamení to kladné a pro záporné $h$ znamení to záporné, čili

$$f(x) - f(x_0) > 0, \text{ když } x > x_0,$$
$$f(x) - f(x_0) < 0, \text{ když } x < x_0.$$




Obr. 10a.




Obr. 10b.

Analogicky se dokáže věta při záporném $a$.

Důležitý důsledek předešlé věty jest *věta Rolle-ova:*

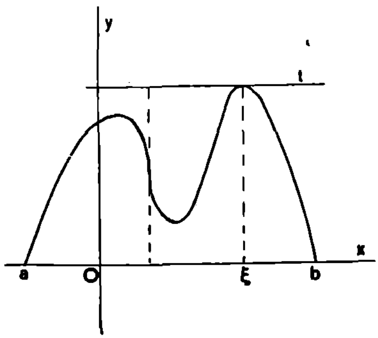
*Jestliže $y = f(x)$ jest spojitá v $< a, b >$ a má ve všech vnitřních bodech derivaci a je-li mimo to $f(a) = f(b) = 0$, pak lze nalézti aspoň jeden vnitřní bod $\xi$ v $< a, b >$, v němž $f'(\xi) = 0$.*

Protože $f(x)$ jest v $< a, b >$ spojitá, musí tam v určitém bodě nabýti své maximální hodnoty $M$ a v jiném bodě své minimální hodnoty $m$ (viz odst. 23), to jest

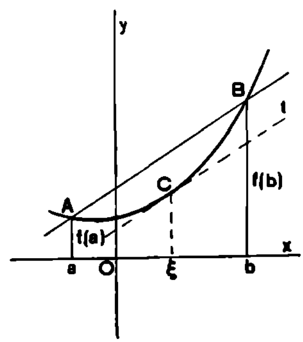
$$M \geqq f(x) \geqq m \text{ pro každé } x \text{ v } < a, b >.$$

Dále jest $M \geqq m$. Když $M = m$, pak jest i $f(x) = M$ pro všechna $x$ intervalu a tedy také $f'(x) = 0$, a věta $R$. jest splněna.

Zbývá tedy uvážiti jen případ $M > m$, v němž aspoň jedno z čísel těch musí býti od nuly různo. Dejme tomu, že jest to $M$ a že tedy $M > 0$ (neboť $M \geqq f(a) = 0$). Pak v určitém vnitřním bodě $\xi$ jest $f(\xi) = M$. V bodě tom existuje derivace $f'(\xi)$. Tvrdíme, že musí býti $f'(\xi) = 0$. Kdyby totiž $f'(\xi) \neq 0$, bylo by možno podle předešlé věty o rostoucí nebo klesající funkci nalézti takové okolí čísla $\xi$, že by v něm $f(x)$ nabývalo hodnot větších než $f(\xi) = M$. To však jest vyloučeno, neboť $M$ jest maximum. Je-li $M = 0$ a tedy $m < 0$, nabývá $f(x)$ hodnoty $m$ pro nějaké vnitřní $x = \eta$. Dokáže se jako shora, že $f'(\eta) = 0$.



Obr. 11a.



Obr. 11b.

Větu Rolle-ovu lze si vštípiti v paměť tímto heslem: Mezi dvěma kořeny rovnice $f(x) = 0$ leží aspoň jeden kořen rovnice $f'(x) = 0$. Heslo to ovšem nevystihuje všechny podmínky, nutné ke splnění věty!

Tečna křivky $y = f(x)$ jest rovnoběžná s osou $x$ v bodě, v němž $f'(\xi) = 0$. Tím jest věta $R$. geometricky interpretována (obr. 11a).

Větu $R$. lze poněkud zobecniti tím, že místo předpokladu $f(a) = f(b) = 0$, stačí předpokládati pouze $f(a) = f(b)$. Nová funkce $F(x) = f(x) - f(a)$ splňuje totiž podmínku $F(a) = F(b) = 0$ a také ostatní podmínky věty $R$. a tedy $F'(\xi) = f'(\xi) = 0$.

**Cvičení.** 1.* Přesvědčte se přímým řešením rovnice $f'(x) = 0$, že věta $R$. platí pro funkce

$$y = A \cdot \sin x \quad \text{v} \quad \langle 0, \pi \rangle; \quad y = (x-a)^m \cdot (x-b)^n, \; (m > 0, \; n > 0).$$

2. Proč neplatí věta $R$. pro funkce

$y=x-[x]$ v $<0,1>$; $y=1-|x|$ v $<-1,+1>$,
$y=(1-x^2):x^2$ v $<-1,+1>$?

(Znázorněte graficky!)

**33. Věta o střední hodnotě** jest základní důležitosti pro počet diferenciální. Zní takto:

*Jestliže $f(x)$ jest spojitá v $<a,b>$ a má derivaci ve všech vnitřních bodech, pak existuje aspoň jeden vnitřní bod $\xi$, pro který jest*

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

*čili jinak psáno*

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi).$$

Čtenář jistě postřehl, že podmínky téťo věty jsou velmi podobny podmínkám věty $R$. Dokonce ve zvláštním případě $f(a)=f(b)$ věta o stř. h. přechází přímo ve větu $R$. V obecném případě nebude ovšem $f(x)$ splňovati podmínky $f(a)=f(b)$. Lze však velmi snadno sestrojiti novou funkci $F(x)=f(x)-c\,.\,x$, kdež $c$ jest dosud neurčená konstanta a pokusiti se o takové její určení, aby $F(a)=F(b)$, to jest

$$f(a)-c\,.\,a=f(b)-c\,.\,b.$$

Rovnici té hoví vskutku číslo

$$c=\{\,f(b)-f(a)\,\}:(b-a).$$

Nyní již $F(x)$ splňuje všechny podmínky věty $R$, a tedy existuje číslo $\xi$, pro něž

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \quad \text{s. e. d.}$$

Věta o střední hodnotě bývá psána v různých tvarech. Tak na př. místo $\xi$ mohu klásti

$$\xi=a+\Theta\,.\,(b-a),\ \text{kdež}\ 0<\Theta<1.$$

Věta zní pak $f(b)=f(a)+(b-a)\,.\,f'[a+\Theta\,(b-a)]$. Označíme-li délku intervalu $(b-a)=h$, obdržíme tvar, kterého bývá nejčastěji užíváno:

$$f(a+h)=f(a)+h\,.\,f'(a+\Theta\,.\,h)$$

nebo $\quad f(b-h)=f(b)-hf'(b-\Theta_1\,.\,h),\quad \Theta_1=1-\Theta.$

Geometrický výklad věty vyplývá z obrazce 11b. Tětiva $\overline{AB}$ má směrnici $\{\,f(b)-f(a)\,\}:(b-a)$. Věta tvrdí, že lze nalézti na oblouku $AB$ bod $C$, v němž tečna $t$ jest rovnoběžna s tětivou $\overline{AB}$.

Užijeme věty o střední hodnotě k důkazu jedné ze základních vět počtu integrálního:

*Jestliže $f'(x) = 0$ v celém intervalu $< a, b >$,*) jest $f(x)$ rovno konstantě v témž intervalu.*

Budiž $\alpha = (a + b) : 2$ půlící bod intervalu a číslo kladné $h \leqq (b - a) : 2$. Pak jest $f(x)$ spojitá funkce v $< \alpha - h, \alpha + h >$, protože tam má všude derivaci. Podle věty o střední hodnotě je tedy $f(\alpha \pm h) - f(\alpha) = \pm h \,.\, f'(\xi) = 0$, čili

$$f(\alpha \pm h) = f(\alpha) \text{ pro } \textit{každé } h \leqq (b - a) : 2, \quad \text{q. e. d.}$$

Důsledkem jest věta další:

*Jestliže $f(x)$ a $g(x)$ mají v $< a, b >$ všude stejné derivace $f'(x) = g'(x)$, liší se od sebe nejvýše o aditivní konstantu $g(x) = f(x) + c$.*

Označíme-li totiž jako novou funkci $F(x) = g(x) - f(x)$, jest $F'(x) = 0$ v $< a, b >$ a tedy $F(x) = c$. Tak na př. funkce $y = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$ má derivaci $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{1 - (1 - x^2)} \,.\, \sqrt{1 - x^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. Touž derivaci má $\arccos x$ a tedy $\arccos x = \arcsin \sqrt{1 - x^2} + c$. Konstantu určíme na př. tak, že položíme $x = 0$, z čehož plyne $c = 0$.

Věta o funkci *monotonní* jest dalším důsledkem věty o střední hodnotě.

*Jestliže $f'(x) \geqq 0$ v $< a, b >$ a víme-li aspoň o jednom bodě tohoto intervalu, že v něm $f'(x) > 0$, pak $f(b) > f(a)$.*

Zvolme $x$ v $(a, b)$. Pak jest podle věty o střední hodnotě

$$f(b) - f(x) = (b - x)\, f'(\xi_1) \geqq 0,$$
$$f(x) - f(a) = (x - a)\, f'(\xi_2) \geqq 0,$$

a tedy
$$f(b) \geqq f(x) \geqq f(a).$$

Z toho plyne, že jest buď $f(b) = f(a)$, nebo $f(b) > f(a)$. Kdyby platila prvá možnost, bylo by nutně $f(x) = f(a) = f(b)$ pro všechna $x$ intervalu a tedy by bylo $f'(x) = 0$ v celém $< a, b >$, což odporuje předpokladu. Zbývá tedy jen druhá možnost.

Můžeme nyní tvrditi, že za předpokladů předešlé věty jest $f(x)$ v int. $< a, b >$ *neklesající* funkce, to jest

---

*) V bodech $a$, $b$ míníme tím derivaci z prava nebo z leva.

$$f(x_1) \geqq f(x_2), \text{ pokud } x_1 > x_2,$$

neboť v int. $< x_2, x_1 >$ buď platí předešlá věta, anebo jest v něm všude $f'(x) = 0$ a tedy $f(x_1) = f(x_2)$.

Dále jest patrno: Jestliže v $< a, b >$ jest $f'(x) \geqq 0$ a jestliže body, v nichž $f'(x) = 0$, nevyplňují zcela žádný interval obsažený v $< a, b >$, jest $f(x)$ *stále rostoucí* funkce, to jest

$$f(x_1) > f(x_2), \text{ jestliže } x_1 > x_2.$$

Obdobně se dokážou věty vyplývající z předpokladu $f'(x) \leqq 0$ a týkající se funkce nerostoucí, po případě stále klesající.

*Příklad.* Rovnice Keplerova $x - e \sin x = M$ (odst. 22, cv. 2) má aspoň jeden reálný kořen. Můžeme nyní dokázati, že má jediný reálný kořen. Funkce $f(x) = (x - e \sin x - M)$ má totiž derivaci $f'(x) = 1 - e \cos x > 0$, neboť $0 \leqq e < 1$ a $\cos x \leqq 1$. Jest tedy $f(x)$ stále rostoucí funkce, která může býti rovna nule jen pro jediné $x$.

**Cvičení.** 1. Vyložte geometrický význam předešlých vět!

2. Pro které hodnoty konstanty $a$ jest funkce $f(x) = ax - \sin x$ stále rostoucí nebo stále klesající?

3. Dokažte, že rovnice $\operatorname{tg} x = x$ má v každém z intervalů $(\pi/2, 3\pi/2)$, $(3\pi/2, 5\pi/2)$, atd. jediný kořen!

**34. Cauchy-ho věta o střední hodnotě.** Větu o stř. hodnotě lze zobecniti. Buďtež $f(x)$ a $\varphi(x)$ dvě funkce, které v $< a, b >$ jsou spojité a mají derivace ve všech vnitřních bodech. Učiňme další dva předpoklady: 1) $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, 2) $f'(x)$ a $\varphi'(x)$ nechť nejsou nikdy *současně* rovny nule v $(a, b)$. Pak jest

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \quad (a < \xi < b).$$

Důkaz jest založen na téže myšlence, jako při větě o stř. hodnotě. Utvořme novou funkci $F(x) = f(x) - c \,.\, \varphi(x)$ a hleďme konstantu $c$ tak určiti, aby bylo $F(a) = F(b)$, to jest

$$f(a) - c \,.\, \varphi(a) = f(b) - c \,.\, \varphi(b).$$

Tomu vyhoví

$$c = \{f(b) - f(a)\} : \{\varphi(b) - \varphi(a)\},$$

neboť podle předpokladu 1) rozdílem $\varphi(b) - \varphi(a)$ jest možno děliti.

Protože $F'(x)$ všude v $< a, b >$ eksistuje, je podle věty *R*. pro nějaké $\xi$ v $(a, b)$

$$F'(\xi) = f'(\xi) - c \,.\, \varphi'(\xi) = 0.$$

Z rovnice této soudíme, že $\varphi'(\xi) \neq 0$, neboť kdyby bylo rovno nule, anulovalo by se také $f'(\xi)$, což odporuje předpokladu 2). Můžeme tedy poslední rovnici děliti číslem $\varphi'(\xi)$ a obdržíme větu Cauchy-ovu.

*Poznámka.* Oba předpoklady 1) a 2) budou jistě splněny, bude-li $\varphi'(x) \neq 0$ v celém $(a, b)$.

**Cvičení.** 1. Co obdržíme volbou $\varphi(x) = x$?

2. Jestliže spojíme dva body v rovině $A, B$ dvěma oblouky $y = f(x)$ a $y = \varphi(x)$, které mají všude derivace, pak existuje bod $\xi$ mezi $A, B$, v němž tečny obou oblouků jsou rovnoběžné.

— **35. Diferenciál a podíl diferenciální.** Nechť $f(x)$ má v bodě $x$ derivaci $f'(x) > 0$. Podle odst. 27 jest

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \eta(h), \quad \lim_{h \to 0} \eta(h) = 0.$$

Užijeme-li označení zavedené v odst. citovaném, můžeme psáti

$$\Delta y = f'(x) \,.\, \Delta x + \eta(\Delta x) \,.\, \Delta x.$$

Zvolíme-li $|\Delta x|$ tak malé, že $|\eta(\Delta x)|$ je menší než $f'(x)$, převládá na pravé straně rovnice první sčítanec $f'(x)\,\Delta x$ nad sčítancem druhým, to jest, rozhoduje o znaménku celé pravé strany. Tento sčítanec nazývá se proto *převládající částí* pravé strany a obdržel zvláštní název *diferenciál y*, psáno zkratkou $dy$ (Leibnic). Název ten nevážeme však už na velikost $\Delta x$, ani na okolnost $f'(x) > 0$ a užíváme jej pro *každé* $\Delta x$ a pro *každé* $f'(x)$. Naše definice tedy zní:

*diferenciál* $y = dy = f'(x) \,.\, \Delta x$,

kdež $\Delta x$ jest *libovolné* číslo. Z tohoto důvodu říkáme o funkci $f(x)$, která má derivaci v bodě $x$, že jest tam *schopna diferenciace.*

Když jsme přijali tuto definici, musíme ji důsledně užíti také při zvláštní funkci $y = x$, a tedy

$$dy = 1 \,.\, \Delta x, \text{ čili protože } y = x,\ dx = \Delta x.$$

Diferenciál nezávisle proměnné $x$ jest tedy pro tuto zvláštní funkci roven $\Delta x$ a to jest libovolné číslo. Proto jest zvykem i při obecné funkci $y = f(x)$ místo $\Delta x$ psáti $dx$ a tedy

$$dy = f'(x) \,.\, dx, \text{ čili } \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

***Podíl diferenciálů (diferenciální kvocient) funkce a nezávisle proměnné jest roven derivaci funkce.***

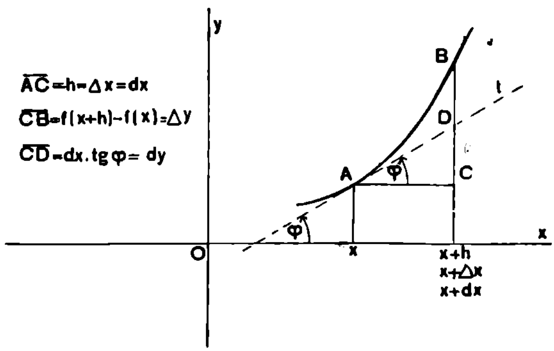
Zvláště důrazně vytknouti jest dvě okolnosti:

1. $dx = \Delta x = h$ jest libovolné číslo.

2. $dy$ *není* rovno $\Delta y$ a proto také podíl diferencí $\Delta y/\Delta x$ jest něco jiného, než podíl diferenciálů $dy/dx$.

Geometricky jest rozdíl mezi $\Delta y$ a $dy$ zřetelně vytčen na obr. 12.

$$\overline{AC} = h = \Delta x = dx, \quad \overline{CB} = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y,$$
$$\overline{CD} = \overline{AC} \,.\, \mathrm{tg}\varphi = \Delta x \,.\, f'(x) = dy.$$




Obr. 12.

$\Delta y$ jest přírůstek pořadnice *křivky,* když $x$ zvětšilo se o $\Delta x$. $dy$ jest přírůstek pořadnice *tečny,* když $x$ zvětšilo se o totéž $\Delta x$.

*Poznámka.* Při této příležitosti připomeňme si, že pro derivaci funkce $y = f(x)$ užívá se těchto různých označení:

$$y' = (f(x))' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = Dy = Df(x).$$

**Cvičení.** Přepište pravidla derivační do formy diferenciální, jako na př.

$$d(x^n) = n \,.\, x^{n-1} \,.\, dx, \quad d(\sin x) = \cos x \,.\, dx, \quad d(c \,.\, f(x)) = c \,.\, d(f(x)),$$

$$d(u \,.\, v) = u \,.\, dv + v \,.\, du, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \,.\, du - u \,.\, dv}{v^2} \text{ atd.}$$

Kapitola VI.

# VYŠŠÍ DERIVACE A JEJICH UŽITÍ.

**36. Definice vyšších derivací a diferenciálů.** Nechť funkce $y = f(x)$ má v nějakém intervalu derivaci $y' = f'(x)$. Často se stává, že tato nová funkce má opět derivaci; tu pak označujeme $y'' = f''(x)$ anebo také $D^2y$ a nazýváme ji *druhá derivace funkce* $f(x)$. Právě tak *třetí* derivace $y''' = f'''(x)$ jest derivace druhé derivace atd. Obecně $n$-tá derivace $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = D^n y$ jest derivace $(n$-1)-vé derivace.

Pomocí derivací sestrojujeme vyšší diferenciály. V prvém diferenciálu $dy = f'(x) \, . \, dx$ jest $dx$ libovolné číslo. Volme je pevně a měňme $x$. Bude se měniti $f'(x)$ a tedy i $dy$. Jest tedy $dy$ funkcí veličiny $x$. Utvořme diferenciál této nové funkce

$$d(dy) = d(f'(x) \, . \, dx) = d(f'(x)) \, . \, dx,$$

to jest

$$d(dy) = (f''(x) \, . \, d_1x) \, . \, dx.$$

Znakem $d_1x$ rozumíme opět *libovolné* číslo, které tedy může býti různé od $dx$. Jest však již od doby Leibnicovy zvykem voliti $d_1x = dx$. Pak dostaneme *druhý diferenciál* funkce $y = f(x)$

$$d(dy) = f''(x) \, . \, (dx)^2.$$

Místo toho píše se bez závorek

$$d^2y = f''(x) \, . \, dx^2$$

a tedy

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x).$$

*Druhý diferenciální kvocient* jest roven *druhé derivaci*. Podobně utvoří se další diferenciály a diferenciální kvocienty

$$d^3y = f'''(x) \, . \, dx^3, \quad \text{obecně} \quad d^ny = f^{(n)}(x) \, . \, dx^n,$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x), \quad \text{obecně} \quad y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x),$$

ovšem za předpokladu, že vyšší derivace existují.

*Příklady.*

$$y = x^n, \quad y' = nx^{n-1}, \quad y'' = n(n-1)x^{n-2} \, . \, . \, . \, . \, .$$

$$y^{(k)} = n(n-1)(n-2) \, . \, . \, . \, . \, (n-k+1)\, x^{n-k}.$$

Z toho jest patrno, že pro $n$ celistvé a kladné $n$-tá derivace jest rovna konstantě $1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots n = n!$ a všechny vyšší derivace jsou rovny nule. Pro $n$ jiného druhu má $x^n$ všechny derivace od nuly různé.

$y = e^x$, $y' = e^x$, . . . . $y^{(n)} = e^x$.

$y = \sin x$, $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, $y^{IV} = \sin x$ atd.

Obecné formule pro vyšší derivace jsou zpravidla velmi komplikované. Jednoduchý jest vzorec pro $n$-tou derivaci součinu dvou funkcí (vzorec Leibnicův). Jest totiž

$$D(u \,.\, v) = u'v + uv', \quad D^2(u \,.\, v) = u''v + 2u'v' + uv'' \text{ atd.}$$

$$D^n(u \,.\, v) = u^{(n)}v + A_1 u^{(n-1)} \,.\, v' + A_2 u^{(n-2)} \,.\, v'' + \dots + u \,.\, v^{(n)}.$$

Konstanty $A_1, A_2, A_3 \dots$ jsou nezávislé na tvaru funkcí $u$ a $v$. Abychom je určili, volme $u = e^x$, $v = e^{\alpha x}$. Pak je $u^{(k)} = e^x$, $v^{(k)} = \alpha^k \,.\, e^{\alpha x}$, $(u \,.\, v) = e^{(\alpha+1)x}$ a tedy $D^n(u \,.\, v) = (1+\alpha)^n \,.\, e^{x(1+\alpha)}$.

Dosažením obdržíme

$$e^{(\alpha+1)x} \,.\, (1+\alpha)^n = e^{(\alpha+1)x} \,.\, \{1 + A_1\alpha + A_2\alpha^2 + \dots + \alpha^n\}.$$

Rovnici krátíme činitelem $e^{(\alpha+1)x}$ a obdržíme na obou stranách rovnice mnohočleny v *proměnné* $\alpha$, neboť $\alpha$ jest libovolné číslo. Koeficienty stejných mocnin $\alpha$ na obou stranách musí si býti rovny, neboť jinak by rovnice byla splněna pro nejvýše $n$ hodnot $\alpha$ a tedy nikoliv pro *všechna* $\alpha$.

$$A_1 = \binom{n}{1}, \quad A_2 = \binom{n}{2}, \quad \dots A_k = \binom{n}{k} \dots$$

Formuli výslednou jest možno si zapamatovati v *symbolickém* tvaru věty binomické

$$D^n(u \,.\, v) = (u + v)^n = u^n \,.\, v^0 + \binom{n}{1} u^{n-1} \,.\, v^1 + \dots + u^0 \,.\, v^n,$$

kdež ovšem mocniny $u^k$, $v^l$ nahradíme derivacemi $u^{(k)}$, $v^{(l)}$ a mocniny $u^0$, $v^0$ nahradíme funkcemi $u$, $v$.

Vyšší derivace *algebraické funkce implicitní* jest možno počítati stejným postupem, jako jsme počítali prvou derivaci v odst. 30. Uvedeme zde jen příklad, z něhož i obecný postup jest patrný:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + fy + g = 0.$$

Derivujme, pokládajíce $y$ za funkci $x$, danou předešlou rovnicí:

$$2ax + 2by + 2bxy' + 2cyy' + d + f \,.\, y' = 0.$$

V této rovnici jsou $y$ a $y'$ opět funkce $x$, neboť $y$ lze vypočísti z prvé rovnice a pak $y'$ z druhé rovnice. Lze tedy derivovati dále

$$2a + 2by' + 2by' + 2bxy'' + 2cy'y' + 2cyy'' + fy'' = 0.$$

Z této rovnice vypočteme $y''$ jako funkci $x$, $y$ a $y'$ a tedy jako funkci $x$. Tak lze pokračovati.

Geometrický význam vyšších derivací jest mnohostranný a tvoří obsah diferenciální geometrie, která nemůže býti pojata do této malé knížky. Nepatrná zmínka o tomto významu učiněna bude v odst. 38 a 39.

Fysikální (kinematický) význam druhé derivace jest spojen s pojmem urychlení. Jestliže hmotný bod pohybuje se tak, že jeho okamžitá rychlost v čase $t$ jest rovna $v(t)$, pak průměrný přírůstek rychlosti mezi časovými okamžiky $t$ a $t + \Delta t$ jest patrně

$$\frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

To jest tak zv. *průměrné* (střední) *urychlení*. Limita tohoto urychlení, když $\Delta t \to 0$, nazývá se, jestliže ovšem existuje, *okamžité urychlení* v čase $t$ a označuje se $a(t)$. Jest tedy

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

protože, jak víme, $v(t) = f'(t) = ds/dt$.

**Cvičení.**

$$D^n\, lx = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}, \quad D^n \sin x = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right),$$

$$D^n \cos x = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right), \quad D^n \frac{1}{1+x} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}},$$

$$D^n \frac{1}{1-x} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}, \quad D^n \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left\{D^n \frac{1}{1+x} + D^n \frac{1}{1-x}\right\}.$$

**37. Věta Taylorova a Maclaurinova.** Mnohočlen $(n-1)$-vého stupně

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1}\, x^{n-1}$$

má tu vlastnost, že $P(a + x)$ jest opět mnohočlen téhož stupně v $x$. Jak závisí koeficienty nového mnohočlenu na původním? To rozhodneme nejsnáze postupným derivováním. Položíme

$$P(a + x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{n-1}\, x^{n-1}.$$

Pro $x = 0$ obdržíme první koeficient $A_0 = P(a)$. Derivujeme obě strany rovnice $k$-kráte za sebou podle $x$:

$$P^{(k)}(a + x) = A_k \,.\, k!\,.\, 1 + A_{k+1}(k+1)\, k\,(k-1) \ldots 2 \,.\, x + \cdots$$

a položme $x=0$, čímž vyjde

$$A_k = P^k(a) : k!$$

Výsledek jest tedy*)

$$P(a+x) = P(a) + \frac{x}{1!} P'(a) + \frac{x^2}{2!} \cdot P''(a) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} P^{(n-1)}(a).$$

Dosaďme $(a+x) = b$ a tedy $x = b - a$.

$$P(b) = P(a) + \frac{b-a}{1!} P'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} P''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} P^{(n-1)}(a).$$

To jest *Taylorův* vzorec pro mnohočlen $(n-1)$-ho stupně. Připomeňme, že $a$ jest zcela libovolné číslo.

Podobný vzorec lze odvoditi i pro obecnější funkce. Nechť $f(x)$ jest definováno v $< a, b >$ a má tam všechny derivace až po řád $n$-tý. Utvořme výraz podobný, jako při mnohočlenu, avšak místo $a$ položme $x$, ležící v int. $< a, b >$. Dostaneme nějakou funkci $x$:

$$F(x) = f(x) + \frac{b-x}{1!} f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x)$$

Patrně jest

$$F(b) - F(a) = f(b) - \{ f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots +$$

$$+ \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) \}.$$

Kdyby bylo $F(b) = F(a)$, dostali bychom týž výsledek jako při mnohočlenu, což ovšem při obecné funkci nemůže býti. Přes to však dospějeme k velmi užitečné formuli, jestliže se nám podaří rozdíl $F(b) - F(a)$ vyjádřiti v nějaké stručné formě. K tomu nám poslouží Cauchyova věta z odst. 34:

$$F(b) - F(a) = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \{\varphi(b) - \varphi(a)\}.$$

Abychom výraz ten vypočetli, určíme

$$F'(x) = f'(x) + \{-f'(x) + \frac{b-x}{1} f''(x)\} + \{-\frac{(b-x)}{1!} f''(x) +$$

$$+ \frac{(b-x)^2}{2!} f'''(x)\} + \ldots,$$

$$F'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x).$$

---

*) Volbou $P(x) = x^{n-1}$ obdržíme binomickou větu.

To dosadíme do Cauchyho formule a položíme ještě $b = a + h$, $\xi = a + \Theta h$, $0 < \Theta < 1$. Tak získáme nejčastěji užívaný tvar věty *Taylorovy n-tého stupně:*

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n,$$

kdež

$$R_n = F(a+h) - F(a) =$$

$$= \frac{h^{n-1}(1-\Theta)^{n-1}}{(n-1!)} \cdot \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{\varphi'(a+\Theta h)} \cdot f^{(n)}(a + \Theta h).$$

Výraz $R_n$ nazývá se *zbytek n-tého řádu.* Funkce $\varphi(x)$, v něm obsažená, jest libovolná, musí však vyhovovati podmínkám věty Cauchyovy.' Nejčastěji volívá se buď $\varphi(x) = (a + h - x)^n$ nebo $\varphi(x) = x$. Tak obdržíme tak zv. *Lagrange*-ův a *Cauchy*-ův tvar zbytku

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \Theta h), \qquad R_n = \frac{h^n (1-\Theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a + \Theta h).$$

V každém z těchto zbytků znak $\Theta$ zastupuje po případě jinou numerickou hodnotu.

Zvolíme-li speciálně $a = 0$, $h = x$, obdržíme tak zv. větu *Maclaurin*-ovu $n$-tého stupně

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_n$$

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\Theta x), \qquad R_n = \frac{x^n (1-\Theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\Theta x).$$

Podmínky její platnosti jsou patrně, aby $f(x)$ měla v nějakém okolí bodu $x = 0$ všechny derivace až po $n$-tou. Formule Maclaurinova a Taylorova jsou proto důležité, že nahražují funkci $f(x)$ funkcí mnohem jednodušší, totiž mnohočlenem, a zbytkem $R_n$. Zbytek ten zpravidla nedovedeme přesně vypočísti, protože neznáme přesnou velikost čísla $\Theta$, ve zbytku taom obsaženého. Přes to bývá možno odhadnouti maksimum, které $|R_n|$ nemůže přestoupiti a tak zjistiti maksimální velikost chyby, které se dopouštíme, když funkci $f(x)$ nahradíme příslušným mnohočlenem. V následujících odstavcích ukážeme, jak se vzorce Taylorova užívá.

**Cvičení.** 1. Jaký tvar nabude věta Taylorova i její zbytky, když klademe $h = x - a$?

2. Proč nelze užíti věty Maclaurinovy na funkce $y = 1 : x$, $y = \lg x$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^{1-\alpha}$, $(\alpha > 0)$?

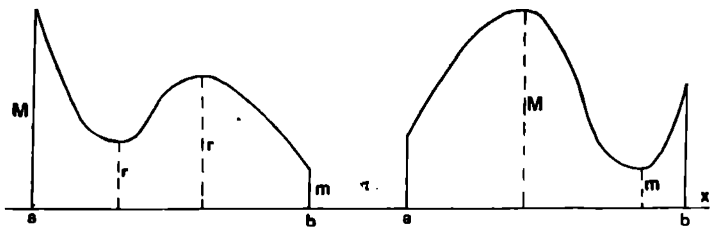
3. Jaká $n$ smíme a jaká nesmíme voliti v Maclaurinově větě pro $y = x^{\frac{2}{3}}$. (Smíme voliti $n = 1, 2, 3, \ldots 7$.)

**38. Maksima a minima funkcí.** Funkce spojitá v $\langle a, b \rangle$ nabývá tam své maksimální i minimální hodnoty (odst. 21). Tomuto maksimu říkáme *absolutní.* Jinak jest definováno *relativní maksimum (minimum).*

*Jestliže vnitřní bod* $\xi$ *v* $\langle a, b \rangle$ *má tu vlastnost, že v nějakém jeho okolí jest*

$$f(x) < f(\xi), \quad (f(x) > f(\xi)),$$

*nazýváme* $f(\xi)$ *relativní maksimum (minimum).*




Obr. 13a, b.

Společný název pro tyto dvě vlastnosti jest *relativní ekstrém.* Relativní ekstrém může splývati s absolutním, avšak nemusí, jak jest patrno z obr. 13a, b. V dalším budeme pro stručnost užívati slov ekstrém, maksimum, minimum, vynechávajíce přívlastek relativní.

Učiňme o funkci $f(x)$ další předpoklad, že má v $\langle a, b \rangle$ derivaci. Z geometrického názoru soudíme, že, když $f(x)$ má v bodě $\xi$ ekstrém, tečna jest tam rovnoběžna s osou $x$ a že tedy $f'(\xi) = 0$. To jest ovšem pouhý dohad, který musíme dokázati.

Nechť v bodě $\xi$ jest ekstrém. Derivace $f'(\xi)$ eksistuje a tvrdíme, že musí býti rovna nule. Kdyby byla od nuly různa, tedy by podle první věty odst. 32 v každém okolí bodu $\xi$ nabývalo $f(x)$ hodnot jednak větších a jednak menších než $f(\xi)$ a tedy by tato hodnota nebyla ekstrémní.

*Nutná podmínka pro ekstrém jest tedy* $f'(\xi) = 0$.

Není to však postačující podmínka, jak patrno z příkladu $y = x^3$, v němž $y' = 3 \cdot x^2$ má nulový bod $x = 0$, avšak $y = 0$

není ekstrém, neboť na levo od $x=0$ jest $y<0$ a na pravo $y>0$.

Abychom našli postačující podmínky, učiňme další předpoklad, že $f(x)$ má v $<a, b>$ nejen první, ale i další derivace. Užijme věty o střední hodnotě

$$f(\xi+h)-f(\xi)=h \,.\, f'(\xi+\Theta h)=h^2 \,.\, \Theta \, \frac{f'(\xi+\Theta h)-f'(\xi)}{\Theta h},$$

neboť $f'(\xi)=0$. Když $h \to 0$, pak také $\Theta \,.\, h \to 0$ a zlomek na pravé straně má limitu $f''(\xi)$. Jestliže tato derivace jest od nuly různa, má pro dosti malá $|h|$ zlomek totéž znamení, jako $f''(\xi)$ a tedy znaménko celé pravé strany bude dáno znaménkem $f''(\xi)$. Z toho plyne, že $f(\xi)$ jest maksimum nebo minimum podle toho, zda $f''(\xi)$ jest záporné či kladné.

$f'(\xi)=0$, $f''(\xi) \neq 0$ *jsou postačující podmínky pro ekstrém.*

Stává se však, že $f''(\xi)=0$ (na př. u funkce $y=x^4$). Zde rozhodnou vyšší derivace. Předpokládejme hned obecněji, že nejen první a druhá, ale i několik dalších derivací jest rovno nule, to jest $f'(\xi)=0$, $f''(\xi)=0$, $f'''(\xi)=0, \ldots f^{(n-1)}(\xi)=0$, avšak $f^{(n)}(\xi) \neq 0$. Užijme věty Taylorovy ($n$—1)-ho stupně.

$$f(\xi+h)-f(\xi)=\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(\xi+\Theta h)=$$

$$\frac{h^n \Theta}{(n-1)!} \,.\, \frac{f^{(n-1)}(\xi+\Theta h)-f^{(n-1)}(\xi)}{\Theta \,.\, h}.$$

Druhý zlomek na pravé straně má limitu od nuly různou $f^{(n)}(\xi)$, když $h \to 0$. Pro dosti malá $|h|$ jest tedy znaménko tohoto zlomku identické se znamením $f^{(n)}(\xi)$. Má tedy rozdíl $f(\xi+h)-f(\xi)$ totéž znamení, jako součin $h^n \,.\, f^{(n)}(\xi)$. Toto znamení se *mění* se znamením $h$, je-li $n$ liché (a tedy nenastává ekstrém) a nemění se znamením $h$, je-li $n$ sudé (minimum pro plus, maksimum pro minus). Z toho plyne toto pravidlo:

*Vypočteme kořeny rovnice $f'(x)=0$. Budiž $\xi$ jeden z nich. Dosazujeme tento kořen postupně do vyšších a vyšších derivací $f(x)$ až dojdeme k té z nich, která prvá jest od nuly různa. Je-li tato derivace lichého stupně, není v bodě $\xi$ ekstrém. Je-li stupeň ten sudý a derivace sama záporná, nastává maksimum, je-li kladná, minimum.*

V případě liché derivace jest v bodě $\xi$ *infleksní bod,* to jest křivka probíhá po jedné straně bodu $\xi$ nad tečnou, po druhé straně pod tečnou.

Místo předešlého pravidla, které užívá vyšších derivací, lze užíti také jiného, které vystačí s prvou derivací.

*Budiž $f'(\xi) = 0$. Jestliže nalevo od $\xi$, to jest v jistém int. $(\xi - \delta, \xi)$ má $f'(x)$ stále totéž znamení a napravo, to jest v $(\xi, \xi + \delta)$ stále opačné znamení, pak v bodě $\xi$ jest ekstrém. Přechází-li při postupu z leva napravo $f'(x)$ z hodnot kladných k záporným, nastane maksimum, při opačných znameních nastane minimum. Jestliže na obou stranách má $f'(x)$ totéž znamení, nenastává ekstrém.*

Funkce $f(x)$ totiž vzrůstá nebo ubývá podle znamení $f'(x)$. V prvém případě $f(x)$ nejdříve vzrůstá až do $f(\xi)$ a pak ubývá. V druhém nejdříve ubývá až k mezi $f(\xi)$ a pak vzrůstá. V třetím stále vzrůstá, nebo stále ubývá.

Rozdíl mezi prvým a druhým pravidlem jest ten, že v prvém vystačíme s hodnotami derivací v *jediném* bodě $\xi$. Ve druhém vystačíme s prvou derivací, avšak musíme znáti její hodnoty v nějakém okolí bodu $\xi$. V praxi většinou jest pohodlnější druhé pravidlo.

Ekstrémy mohou ovšem nastati i u funkcí, které nemají všude derivaci. Na př. $y = 1 + |x|$ má minimum v bodě $x = 0$.

**Cvičení.** 1. Vyšetřte ekstrémy funkce $y = (x - a)^m \ (x - b)^n$ pro $m$ a $n$ obě sudá, obě lichá, jedno sudé a jedno liché! Znázorněte graficky!

2. Pro která $a$ mají funkce $y = ax - \sin x$, $ax - \cos x$, $ax - \operatorname{tg} x$ ekstrémy a jaké?

3. Nejmenší hodnota $a^2\sec^2 x + b^2\operatorname{cosec}^2 x$ jest $(a + b)^2$.

4. Součet přepony a odvěsny pravoúhlého trojúhelníka jest dán. Plocha jeho jest maksimální, když strany ty svírají $60^0$!

5. Bodem o souřadnicích $[a, b]$ vedena jest přímka, která protíná osy $OX$ a $OY$ v bodech $P$ a $Q$. Dokažte, že minima čísel $\overline{PQ}$, $\overline{OP} + \overline{OQ}$ a $\overline{OP} \,.\, \overline{OO}$ jsou $(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$, $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ a $4ab$.

6. Tečna elipsy protíná prodloužené osy její v bodech $P$ a $Q$. Dokažte, že délka $\overline{PQ}$ nemůže klesnouti pod součet obou poloos!

7. Nalézti na dané přímce $OX$ bod $P$ tak, aby součet jeho vzdáleností ode dvou daných bodů $A$, $B$ byl co nejmenší. ($\sphericalangle APX + \sphericalangle BPX = 180^0$.)

8. Ve kterých systémech logaritmických mohou býti nalezena čísla rovná svému logaritmu? (Rozdíl $f(x) = x - \log_a x$ musí se anulovati a tedy jeho minimum musí býti negativní nebo rovné nule. Z toho $a < e^{1/e}$).

9. Přímý kužel kruhový má krychlový obsah $V$. Který z těchto kuželů má nejmenší plášť, který nejmenší povrch?

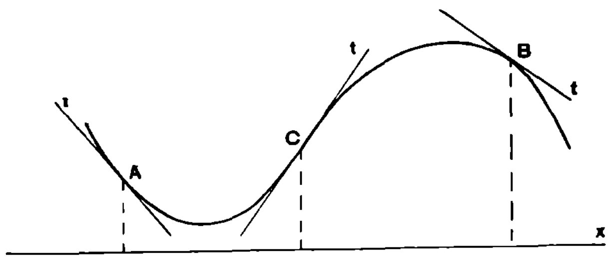
10. Má funkce $y = x \sin^2(\pi : x)$ pro $x \neq 0$, $y = 0$ pro $x = 0$ minimum v bodě $x = 0$? (Uvažte, že $y = 0$ pro $x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ Jest to tak zv. *nevlastní* minimum.)

11. Funkce $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$ má v bodě $x = 0$ minimum, ačkoli tam vymizí všechny derivace.

**39. Poloha křivky vůči tečně.** Pokládejme vztah $y = f(x)$ za rovnici křivky v souřadnicích pravoúhlých a předpokládejme existenci funkce a derivací v $\langle a, b \rangle$. Tam volme bod vnitřní $x$ a sestrojme v něm tečnu $T$ ke křivce. Výraz

$$\varphi(h) = f(x+h) - f(x) - h \, . \, f'(x)$$

jest funkce proměnné $h$ a představuje rozdíl mezi pořadnicí křivky v bodě $(x+h)$ a pořadnicí tečny $t$ v témž bodě, jak čtenář še snadno přesvědčí (viz obr. 12). Jestliže $\varphi(h)$ jest kladné (záporné), pokud $0 < |h| < \delta$, říkáme, že křivka probíhá




Obr. 14.

nad (pod) tečnou, je-li v $(-\delta, 0)$ a v $(0, \delta)$ $\varphi(h)$ různého znamení, říkáme, že křivka má v bodě $\xi$ infleksní bod (obr. 14, bod $C$). Křivce probíhající nad tečnou říká se *konveksní* v tom bodě, opak jest křivka *konkávní*. Případ kladného $\varphi(h)$ jest analogický relativnímu minimu, případ záporného $\varphi(h)$ maksimu. Docela stejně jako při ekstrémech dokáže se pravidlo:

Dosazujme $x = \xi$ postupně do $f''(x)$, $f'''(x)$, atd., až dojdeme k té derivaci, která prvá jest od nuly různá. Je-li tato derivace lichého stupně, nastává inflekse. Je-li stupeň ten sudý a derivace sama záporná, probíhá křivka pod tečnou (jest konkávní), je-li derivace kladná, probíhá křivka nad tečnou (jest konveksní) v bodě $\xi$.

**Cvičení.** 1. Nechť v bodě $\xi$ jest $f''(\xi) = 0$. Rozhodněte o jakosti bodu $\xi$ podle toho, jaké znamení má $f''(x)$ nalevo a napravo od bodu $\xi$. Co nastane, je-li $f''(x) = 0$ v nějakém okolí bodu $\xi$? ($y = f(x)$ jest v okolí tom přímkou.)

2. Dokažte, že kuželosečky nemají infleksních bodů! [Užijte rovnice vrcholové $y^2 - 2px + qx^2 = 0$ a počítejte druhou derivaci impli-

citní funkce algebraické, rovnicí tou definované pro $x \neq 0$. Pak položte $y'' = 0$ a odvoďte důsledky! Bod $x = 0$, $y = 0$ vyšetřte zvláště otočením os souřadných o 90°!]

3. Určete infleksní body křivek $y = \sin x$, $\operatorname{tg} x$, $(x - a)^n (x - b)^m$ a dokažte, že křivky $y = x \cdot \sin x$, $y = \sin x/x$ mají nekonečně mnoho infleksních bodů!

4. Dokažte, že křivka $y = x : (x^2 + 2px + q)$ má buď jeden nebo tři reálné body inflexní. Jsou-li tři, dokažte, že leží na přímce! (Rovnice $x^3 - 3qx - 2pq = 0$ má buď jen jeden nebo tři reálné kořeny. Rovnici tu jest možno psáti ve tvaru $(x^2 + 2px + q) \cdot (x - 2p) + 4(q - p^2)x = 0$, čili $(x - 2p) + 4(q - p^2) \cdot y = 0$).

**40. Řada Taylorova a Maclaurinova.** Jestliže funkce $f(x)$ má v int. $\langle a - \delta, a + \delta \rangle$ všechny derivace, můžeme pro ni napsati Taylorovu větu libovolně vysokého stupně $n$

$$f(a + h) = \left\{ f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) \right\} + R_n.$$

Označme závorku na pravé straně $S_n$ a učiňme předpoklad $\lim\limits_{n \to \infty} R_n = 0$. Potom je $f(a + h) = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ aneb, užijeme-li způsobu psaní, který jsme zavedli při nekonečných řadách

$$f(a + h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots$$

Jiný tvar tohoto vzorce obdržíme, píšeme-li $(a + h) = x$

$$f(x) = f(a) + \frac{(x - a)}{1!} f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} f''(a) + \ldots$$

Oba tyto vzorce jsou různé tvary *nekonečné řady Taylorovy.*

*Nutná a postačující podmínka pro konvergenci řady Taylorovy k součtu $f(a + h)$ jest tedy $\lim\limits_{n \to \infty} R_n = 0$.*

Klademe-li $a = 0$, obdržíme z druhého tvaru řadu Maclaurinovu

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots,$$

která konverguje, když $\lim\limits_{n \to \infty} R_n = 0$.

*Příklady.* Funkce exponenciální $f(x) = e^x$ má derivaci $k$-tou $f^{(k)}(x) = e^x$ a tedy $f^{(k)}(0) = 1$. Užijeme-li zbytku Lagrange-ova,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^{\vartheta x}, \qquad 0 < \vartheta < 1.$$

Abychom odhadli zbytek, spojme ve výrazu $n!$ první faktor s posledním, druhý s předposledním atd. (pro $n > 2$)

$$n! = 1 \,.\, n \,.\, 2 \,.\, (n-1) \,.\, 3 \,.\, (n-2) \ldots$$

Při sudém $n$ obdržíme $n/2$ dvojic tvaru

$$(k+1) \,.\, (n-k) \geqq n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \left(\frac{n}{2} - 1\right),$$

při lichém $n$ pak $(n-1)/2$ takových dvojic a člen poslední $(n+1)/2 > \sqrt{n}$. Jest tedy vždy $n! > n^{\frac{n}{2}}$ a proto

$$e^{\vartheta x} \,.\, \frac{x^n}{n!} < e^{\vartheta x} \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n \to 0, \text{ když } n \to +\infty,$$

ať $x$ jest jakékoli kladné nebo záporné číslo. Při numerickém výpočtu na př. $e^{4 \cdot 5}$ užíváme té okolnosti, že známe $e = 2{\cdot}718281828459045\ldots$ a tedy násobením vypočteme $e^4$, takže řady užijeme pouze k výpočtu $e^{0 \cdot 5}$. Při tom bude zbytek $R_n < 1 : 2^{n-1} \,.\, n!$

Obecná funkce exponenciální $a^x$ převede se na předešlý případ *)

$$a^x = e^{x\, la} = 1 + \frac{x\, la}{1!} + \frac{(x\, la)^2}{2!} + \ldots, R_n = a^{\vartheta x} \frac{(x\, la)^n}{n!}.$$

Užitím řady pro $e^x$ odvodíme několik limitních vztahů často používaných. Při celistvém kladném $n$ jest

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{1!} \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{2!} \frac{1}{x^{n-2}} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{x}{(n+1)!} + \ldots$$

Pravá strana jest tedy pro kladné $x$ větší než $x : (n+1)!$ Vzrůstá-li $x$ do plus nekonečna, vzrůstá pravá strana rovnice (a tedy i levá) do plus nekonečna, to jest

$$\frac{e^x}{x^n} \to \infty, \qquad \text{čili} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \to \infty} x^n \,.\, e^{-x} = 0.$$

Proto se říká, že $e^x$ vzrůstá rychleji než jakkoli vysoká mocnina čísla $x$. Tím jsou určeny ještě další důležité limity

$$\lim_{y \to \infty} \frac{l y}{y} = 0, \qquad \lim_{y \to +0} y \,.\, l y = 0,$$

které obdržíme z předešlé zavedením nové proměnné $x = l y$ po případě $x = l(1 : y)$, když $n = 1$. Podobně se dokáže

$$\lim_{x \to \infty} (l x : x^\alpha) = 0, \qquad \lim_{x \to +0} x^\alpha \,.\, l x = 0 \qquad \text{pokud } \alpha > 0.$$

*) Přirozený logaritmus čísla $a$ značíme zde $la$.

Proto se říká, že logaritmus vzrůstá pomaleji než libovolně vysoká odmocnina čísla $x$.

Funkce $f(x) = \sin x$ má $k$-tou derivaci $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$ a tedy $f^{(k)}(0)$ jest rovno nule pro sudé $k$ a $(-1)^{\frac{k-1}{2}}$ pro liché $k$.

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} +$$
$$+ (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} \cos \Theta x.$$

Podobně $f(x) = \cos x$ má $k$-tou derivaci $f^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$ a tedy

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} +$$
$$+ (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \cos \Theta x.$$

Zbytky v obou těchto řadách mají limitu 0, když $k \to \infty$ z téhož důvodu, jako při $e^x$. Při numerickém počítání jest nutno pamatovati na to, že $x$ musí býti vyjádřeno v míře *obloukové* $1^0 \equiv \pi/180 = 0{\cdot}017453\ldots$ protože jsme užívali vztahu $(\sin x)' = \cos x$.

Na těchto řadách založena jest přesná definice funkcí goniometrických. (Dodatek II.)

**41. Výpočet logaritmů.** Funkce $y = lx$ nemá v bodě $x = 0$ derivací a proto nelze ji rozvinouti v řadu Maclaurinovu. Za to funkce $y = l(1 + x)$ má v bodě tom všechny derivace

$$y^{(k)} = (-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$$

a tedy

$$l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} +$$
$$+ (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \cdot \frac{1}{(1+\Theta x)^n}.$$

Pro kladná $x$ v mezích $\langle 0, 1 \rangle$ jest

$$0 \leq \frac{x}{1+\Theta x} < 1 \quad \text{a proto} \quad |R_n| < \frac{1}{n}, \ \lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

Řada tedy konverguje jistě pro $0 \leqq x \leqq 1$. Formule se zbytkem platí ovšem také pro $x > 1$. Nekonečná řada však v tom případě diverguje, neboť prosté hodnoty členů vzrůstají od jistého $n$ počínaje. Pro záporná $x$ zbytek Lagrange-ův jest neužitečný. Za to vede k výsledku zbytek Cauchyův $(x > 0)$

$$l(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^{n-1}}{n-1} - x^n \frac{(1-\Theta)^{n-1}}{(1-\Theta x)^n}$$

Pro $x < 1$ jest $\frac{1-\Theta}{1-\Theta x} < 1$ a tedy $|R_n| < \frac{x^n}{1-x} \to 0$, když $n \to \infty$.

Pro $x \geqq 1$ to ovšem už neplatí. Kriterium d'Alembertovo, když $x > 1$, prozrazuje divergenci řady. Pro $x = 1$ pak obdržíme divergentní řadu harmonickou. Výsledek jest tedy následující:

*Řada* $l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$ *konverguje pokud* $-1 < x \leqq 1$, a jen pro tato $x$.

Pro numerický výpočet řada tato hodí se jen při malých $x$, kdežto při větších $x$ užíváme různých řad odvozených. Tak na př. odečtením řad pro $l(1+x)$ a $l(1-x)$ dostaneme

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2\left\{\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2k-1}}{2k-1}\right\} +$$

$$+ \frac{2x^{2k+1}}{2k+1}\left\{1 + x^2\frac{2k+1}{2k+3} + x^4\frac{2k+1}{2k+5} + \ldots\right\} \tag{1}$$

Druhá závorka má součet menší než $1 + x^2 + x^4 \ldots = 1 : (1-x^2)$ a tedy zbytek jest menší než $2x^{2k+1} : (2k+1)$ . $(1-x^2)$. Tak na př. pro $(1+x) : (1-x) = 2$, čili pro $x = 1/3$ dostaneme při $k = 7$ zbytek menší než $1 : 2 . 10 . 3^{14} < 2 . 10^{-8}$. Přesně na 6 míst jest pak $l2 = 0{\cdot}693147\ldots$ Podobně pro $x = 1/9$ se vypočte $l5 = 2 . l2 + 2\left\{\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \ldots\right\} = 1{\cdot}6094379\ldots$

Řady lze užíti k výpočtu $la$, pokud $a > 1$, neboť substituce $(1+x) : (1-x) = a$ dává $x < 1$. Ještě výhodnější jest položiti $x = 1 : (2a+1)$, čili

$$l\frac{1+x}{1-x} = l\frac{a+1}{a} = 2\left\{\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{3.(2a+1)^3} + \ldots\right\}$$

a tedy

$$l(a+1) = l\,a + 2\left\{\frac{1}{2a+1} + \ldots\right\}$$

kterýžto vzorec umožňuje postupný výpočet logaritmů všech celých čísel. Téhož cíle lze dosíci výpočtem logaritmů prvočísel, neboť pak logaritmy ostatních čísel vypočteme pouhým sčítáním. K tomu se hodí řada, kterou obdržíme z předešlé, klademe-li $a = z^2 - 1$

$$l\,z = \frac{1}{2}\,l\,(z+1) + \frac{1}{2}\,l\,(z-1) + \left\{\frac{1}{2z^2-1} + \frac{1}{3\,(2\,z^2-1)^3} + \ldots\right\}.$$

Je-li $z$ prvočíslo, jsou $(z+1)$ a $(z-1)$ rozložitelny v prvočísla menší. Tak na př.

$$l\,3 = \frac{3}{2}\,l\,2 + \left\{\frac{1}{17} + \frac{1}{3\,.\,17^3} + \ldots\right\}.$$

K výpočtu *dekadických* logaritmů užíváme vztahu (odst. 25)

$$\log_{10} a = \frac{1}{l\,10}\,.\,l\,a = M\,.\,l\,a,\quad M = \frac{1}{l\,10} = 0{\cdot}43429\ldots$$

**Cvičení.** 1. Dokažte, že pro $0 \leqq x < 1$ jest v rovnici (1) druhý sčítanec na pravé straně $(R_k)$ omezen nerovninami

$$\frac{2\,x^{2k+1}}{(2\,k+1)\,(1-x^2)} > R_k > \frac{2\,x^{2k+1}}{(2\,k+1)\,(1-x^2)} -$$
$$- \frac{4\,x^{2k+3}}{(2k+1)\,(2k+3)\,(1-x^2)}.$$

2. Vypočtěte přesně na 8 míst $l2$, $l5$, $1 : l10$. $\{0{\cdot}6931\ 4718\ldots$ $1{\cdot}6094\ 3791\ldots 0{\cdot}4342\ 9448\ldots\}$

**42. Řada binomická.** Pro celistvá a kladná $m$ platí binomická věta:

$$(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1}\,a^{m-1}\,.\,b + \ldots + b^m.$$

Jestliže $m$ není celistvé a kladné, věta ovšem neplatí. Můžeme však užíti Taylorovy věty na výraz $a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$, kdež položíme $b/a = x$. Tedy $f(x) \doteq (1+x)^m, f^{(k)}(x) = m(m-1)\ldots$ $\ldots(m-k+1).\ (1+x)^{m-k}$..

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}\,x + \binom{m}{2}\,x^2 + \ldots + \binom{m}{n-1}\,x^{n-1} + R_n.$$

Lagrangeův a Cauchy-ův zbytek mají tvar

$$R_n = \begin{array}{l}\binom{m}{n} x^n (1+\Theta x)^{m-n}.\\ \binom{m}{n} n \,.\, x^n (1+\Theta x)^{m-1} \,.\, \left(\dfrac{1-\Theta}{1+\Theta x}\right)^{n-1}.\end{array}$$

Ve výrazu pro $f^{(k)}(x)$ má poslední závorka záporný exponent pro $k > m$ a tedy Maclaurinova formule jest upotřebitelna jen v takovém intervalu, v němž není obsažen bod $x = -1$. Chceme-li tedy vyšetřiti okolí bodu $x = 0$, musíme předpokládati $x > -1$. Při vyšetřování zbytku uvažujme nejdříve případ $x > 0$. V Lagrangeově zbytku bude $(1 + \Theta x)^{m-n}$ pro záporné $m - n$, to jest, pro dosti veliká $n$, menší než jedna. Zbývá tedy vyšetřiti, jak se chová $\binom{m}{n} x^n$, když $n \to \infty$. To však jest právě $(n+1)$-vý člen řady binomické. Jestliže řada ta konverguje, pak $u_{n+1} \to 0$, když $n \to \infty$ a tedy také $R_n \to 0$. Kriterium Alembertovo praví $|u_{n+1} : u_n| = \left|\dfrac{m-n+1}{n} x\right| = \left|1 - \dfrac{m+1}{n}\right| x \to x$. Jestliže tedy $x < 1$, řada konverguje a zbytek má limitu rovnou nule. Pro $x > 1$ řada diverguje a nemá tedy význam.

Obraťme se k záporným hodnotám $x = -y$, $0 < y < 1$. Ve zbytku Cauchyově součin $(1 - \Theta y)^{m-1} \left(\dfrac{1-\Theta}{1-\Theta y}\right)^{n-1}$ jest shora ohraničený, když $n \to \infty$, neboť druhý faktor jest vždy menší než jedna a první faktor pro $m > 1$ jest menší než jedna a pro $m < 1$ jest faktor ten menší než $1 : (1-y)^{1-m}$, což nezávisí na $n$. Zbývá tedy vyšetřiti, jak se chová $\binom{m}{n} n y^n$, když $n \to \infty$. Označíme-li člen tento $v_{n+1}$, je $|v_{n+1} : v_n| = \left|\dfrac{m-n+1}{n}\right| \cdot \dfrac{ny}{n-1}$. Výraz ten konverguje k $y$, když $n \to \infty$. Pro $y < 1$ jest tedy $R_n \to 0$ a řada binomická konverguje k součtu $(1-y)^m$. Výsledek celé úvahy shrneme do věty: *Řada binomická*

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \ldots$$

*konverguje, když* $-1 < x < 1$ *a* $m$ *jest libovolná konstanta.*

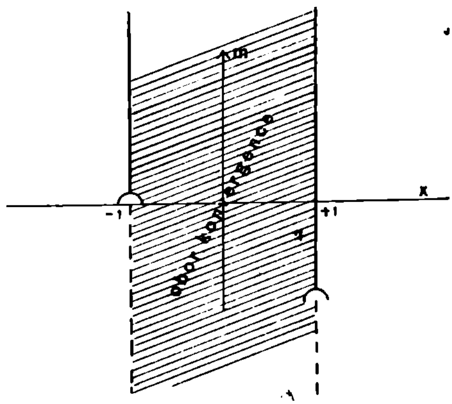
*Poznámka.* 1. Případy $x = 1$ a $x = -1$ vyžadují zvláštního vyšetřování. Lze dokázati, že řada zůstává platná pro $x = 1$, když $m > -1$, a pro $x = -1$, když $m > 0$.*)

*) Jako pomůcka paměti poslouží diagram 15.

*Poznámka.* 2. Napíšeme-li v binomické řadě $x = b/a$, kdež $a > 0$, $|b| < a$ a násobíme-li pak obě strany rovnice výrazem $a^m$, obdržíme řadu nekonečnou

$$(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1} a^{m-1} \cdot b + \binom{m}{2} a^{m-2} \cdot b^2 + \ldots$$

**43. Neurčité výrazy.** Jestliže jest $f(a) = 0$, $g(a) = 0$, není výraz $y = f(x) : g(x)$ definován v bodě $x = a$. Místo toho říkáme také, že výraz ten jest v bodě $x = a$ *neurčitý*. Přes to však, jak již často jsme pozorovali, může eksistovati




Obr. 15.

$\lim\limits_{x \to a} (f(x) : g(x))$. Mají-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ v okolí bodu $x = a$ derivace, jest často možno pomocí derivací těch zmíněnou limitu vypočísti; tak na př., je-li $g'(a) \neq 0$, je

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)} = \frac{(f(a+h) - f(a)) : h}{(g(a+h) - g(a)) : h}$$

a tedy

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} .$$

Stává se však někdy, že také $f'(a) = 0$, $g'(a) = 0$, po případě i další některé derivace jsou rovny nule. Učiňme tedy předpoklad, že funkce mají derivace takových řádů, jaké právě potřebujeme, a že jest

$$f'(a)=0,\ f''(a)=0,\dots\ f^{(n-1)}(a)=0,$$
$$g'(a)=0,\ g''(a)=0,\dots\ g^{(n-1)}(a)=0,\ g^{(n)}(a)\neq 0.$$

Pak je podle Taylorovy formule $n$-tého stupně

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\frac{h^n f^{(n)}(a+\Theta_1 h)}{h^n g^{(n)}(a+\Theta_2 h)}$$

a tedy učiníme-li předpoklad, že $n$-té derivace jsou spojité,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Tak na př. v neurčitém výrazu $\lim(x-\sin x):x^3$ jsou prvé tři derivace jmenovatele $3x^2$, $6x$, 6, z nichž poslední jest od nuly různa. Z toho jest patrno, že také v čitateli vystačíme s třemi derivacemi $(1-\cos x)$, $\sin x$, $\cos x$ a tedy hledaná limita jest 1/6.

Pravidlo toto (první pravidlo *l'Hospitalovo)* selhává, jestliže prvá z derivací čitatele, která nevymizí v bodě $a$, jest stupně nižšího, nežli derivace stejné vlastnosti ve jmenovateli. Nelze ho užíti také v případě $x\to\infty$ a mimo to tenkráte, jestliže vyšší derivace neexistují. V případech těch často poslouží nám tak zv. druhé pravidlo *l'Hospitalovo:*

*Jest* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *za předpokladu, že druhá limita eksistuje.*

Pravidlo to platí také, když místo $x\to a$ jest předepsáno $x\to a+0$ nebo $x\to a-0$, dále i v případě $x\to+\infty$ nebo $x\to-\infty$, jakož i tenkráte, když eksistují jen limity v širším smyslu ($+\infty$ nebo $-\infty$).

Důkaz plyne z Cauchy-ovy věty o střední hodnotě:

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)}=\frac{f'(a+\Theta h)}{g'(a+\Theta h)}.$$

Když $h\to 0$, pak $\Theta\,.\,h\to 0$ a tedy

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

jestliže ovšem tato druhá limita eksistuje. Při tom však nutno pamatovati, že v určitém okolí bodu $a$ (s výjimkou bodu $a$ samotného) musí býti $g(x)\neq 0$ a že obě derivace musí tam eksistovati a nesmí se současně anulovati.

Je-li výraz $f'(a) : g'(a)$ opět neurčitý, můžeme, jsou-li opět příslušné podmínky splněny, pochod opakovati, to jest

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} \quad \text{atd. Na př.}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

Často se stává, že má býti určena limita, když $x \to +\infty$. Zavedeme-li novou proměnnou $y = 1/x$, převede se úloha na hledání limity pro $y \to +0$ a tedy

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \to +0} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y \to +0} \frac{-\frac{1}{y^2} f'\left(\frac{1}{y}\right)}{-\frac{1}{y^2} g'\left(\frac{1}{y}\right)}.$$

Vrátíme-li se k původní proměnné $x = 1/y$, obdržíme

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Limity jiných tvarů $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty - \infty$, $0^0$, $1^\infty$, $\infty^0$ —, to jest, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, jestliže $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$; $\lim\limits_{x \to a} f(x) . g(x)$, jestliže $f(x) \to 0$, $g(x) \to \infty$ atd. hledíme převésti na počítání limity $0/0$, anebo na některou jinou známou limitu, jako na př. $\lim\limits_{x \to \infty} (x^a : e^x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (lx : x^a) = 0$, $a > 0$.

Postup počtu objasníme jen na příkladech.

$$\frac{\infty}{\infty} : \lim_{x \to 0} \left(\operatorname{cotg} x : \frac{1}{x}\right) = \lim (x \cos x : \sin x) = 1,$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{l^4 (a + x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{l^4 (a + x)}{a + x} . \frac{a + x}{x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{l(a+x)}{(a+x)^{\frac{1}{4}}}\right)^4 . \lim_{x \to \infty} \frac{a + x}{x} = 0.$$

$$0 . \infty : \lim_{x \to 1} l\,(2 - x) . \operatorname{cotg} \pi x = \lim_{x \to 1} \frac{l(2 - x) . \cos \pi x}{\sin \pi x} = -\frac{1}{\pi}.$$

$$\infty - \infty : \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{cotg} x}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x} = \frac{1}{3}.$$

Ostatní neurčité výrazy převádíme na předešlé identitou $\{f(x)\}^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)\, l f(x)}$, užívajíce věty o spojité funkci

$$\lim e^{\varphi(x) l f(x)} = e^{\lim \varphi(x) l f(x)}.$$

$$0^0 : \lim_{x \to 0} x^x = \lim_{x \to 0} e^{x l x} = e^0 = 1.$$

$$1^\infty : \lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{l \cos x}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\infty^0 : \lim_{x \to \infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} e^{\frac{l(1+x)}{x}} = e^0 = 1.$$

Velmi jednoduše lze limity počítati, známe-li pro funkce uvažované Taylorovy řady, platné v okolí bodu $x = a$. Na př.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots}{x^3} = \frac{1}{3!}.$$

*Poznámka.* Funkce $F(x) = f(x) : g(x)$, jejíž limitu v bodě $a$ jsme vyhledávali, byla vždy spojitá v okolí toho bodu, neboť měla tam derivace. V bodě $a$ samotném není $F(x)$ definováno a tedy jest tam nespojité. Jestliže však eksistuje limita $\lim_{x \to a} F(x) = A$ a přiřkneme-li funkci $F(x)$ v bodě $a$ právě tuto hodnotu $A$, stane se tím $F(x)$ spojitou i v bodě $a$. Proto se říkává číslu $A$ někdy *pravá hodnota* neurčitého výrazu.

**Cvičení 1.** $x \to 0 : \frac{\arcsin x}{x} \to 1,\ \frac{e^x - 1}{x} \to 1,\ \frac{a^x - 1}{x} \to la,$

$$\frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \to \frac{1}{2},\ \frac{\sin x - x \cos x}{x - \sin x} \to 2,\ \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} \to \frac{1}{3},\ \frac{a^x - 1 - x la}{x^2} \to \frac{1}{2} l^2 a$$

$$2.\ x \to \frac{\pi}{4} : (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} \to e^{-1};\ x \to 0 : \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \to e^{-\frac{1}{6}}.$$

## Kapitola VII.

# FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH.

**44. Základní pojmy. Funkce spojité.** Funkce $z$ dvou nezávisle proměnných $x, y$ $z = f(x, y)$ jest definována, když dán jest předpis, jak k dvojici čísel $[x, y]$ se přiřadí číslo $z$. Ke grafickému znázornění užívá se obyčejně tří os v prostoru na sobě kolmých, jako v analytické geometrii v prostoru. Každé trojici čísel $(x, y, z)$, která splňuje funkční vztah, odpovídá určitý *bod v prostoru*, mající čísla ta za souřadnice. Rovina položená osami $x, y$ jest rovina nezávisle proměnných. Dvojici čísel $[x, y]$ budeme nazývati *bod (nezávisle proměnný)*. Tuto dvojici budeme někdy označovati jediným symbolem $o$ a místo $f(x, y)$ budeme pak psáti stručně $f(o)$. Všechny body $[x, y]$, vyhovující nerovninám $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, kdež $a, b, c, d$ jsou konstanty, nazýváme *(uzavřený) interval* v rovině $x, y$. Body ty vyplňují obdélník o délce stran $(b - a)$, $(d - c)$; strany ty patří k intervalu. Interval *otevřený* liší se od předešlého tím, že hranice k němu nepočítáme. *Okolí* daného bodu $[a, b]$ jest libovolný interval, který obsahuje $[a, b]$ jako bod vnitřní s výjimkou bodu toho samotného. Často bývá určen čísly kladnými $\delta$, $\varepsilon$ a nerovninami

$$|x - a| \leq \delta, \qquad |y - b| \leq \varepsilon, \qquad |x - a| + |y - b| > 0.$$

Jestliže ke každému číslu z přirozené řady čísel $1, 2, 3, \ldots n \ldots$ přiřazen jest bod $o_1, o_2, o_3, \ldots$, mluvíme o posloupnosti bodů. Posloupnost $o_1, o_2, o_3, \ldots$ má limitu $[a, b]$, jestliže při označení $o_n \equiv [x_n, y_n]$ jsou splněny vztahy: $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$. Posloupnost do sebe zařazených intervalů (v rovině $x, y$) $I_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ definujeme nerovninami $a_n \leq x \leq b_n$, $c_n \leq y \leq d_n$, toho druhu, že $< a_1, b_1 >$, $< a_2, b_2 > \ldots$ jsou do sebe zařazeny a tedy definují určité číslo $\xi$ (odst. 9) a také $< c_1, d_1 >$, $< c_2, d_2 > \ldots$ jsou do sebe zařazeny a tedy definují určité číslo $\eta$. Bod $[\xi, \eta]$ jest pak jediným bodem, který leží v každém intervalu $I_1, I_2, I_3, \ldots$ Proto říkáme obdobně jako v odstavci 9, že posloupnost do sebe zařazených intervalů v rovině $I_1, I_2, I_3, \ldots$ definuje jeden jediný bod $[\xi, \eta]$.

Posloupnost bodů jest ohraničená, jestliže všechny body její leží v jistém intervalu $I$. O posloupnosti takové platí věty:

***Každá ohraničená posloupnost má aspoň jeden bod zhuštění, to jest takový bod, že v každém otevřeném intervalu, bod ten obsahujícím, leží nekonečně mnoho bodů posloupnosti.***

***Je-li $\omega$ bod zhuštění dané posloupnosti, jest možno z ní vybrati jistou posloupnost $o_{\nu_1}, o_{\nu_2}, o_{\nu_3}, \ldots$, která má limitu $\omega$.***

Obě tyto věty jsou rozšířením vět z odst. 9 a dokáží se stejně jako tam s tím jediným rozdílem, že intervaly v rovině $I_1, I_2, I_3, \ldots$ rozdělují se při tom nikoliv na dva, nýbrž na čtyři shodné díly pomocí rovnoběžek s osami $x, y$.

Budeme se v dalším zabývati hlavně funkcemi *spojitými*. K jejich definici jest nutno nejdříve definovati *limitu funkce dvou proměnných:*

*Funkce $f(x, y)$ má limitu $A$, když $x \to a$, $y \to b$, jestliže k libovolně malému číslu kladnému $\varepsilon$ lze nalézti takové okolí bodu $[a, b]$, že pro všechny jeho body $[x, y]$ jest*

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Fakt ten značíme symbolem

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A, \quad \text{nebo také} \quad \lim_{o \to [a, b]} f(o) = A.$$

Z definice této plyne ihned důsledek téměř samozřejmý: Jestliže $\underset{o \to [a,b]}{f(o) \to A}$, pak každá posloupnost $o_1, o_2, o_3, \ldots o_n, \ldots$ mající limitu $[a, b]$, má vlastnost: $\lim\limits_{n \to \infty} f(o_n) = A$. Důkaz provede si čtenář jako cvičení. Nyní již můžeme definovati funkci spojitou:

*Funkce jest spojitá v bodě* $o_0 = [a, b]$, jestliže $\lim\limits_{o \to o_0} f(o) = f(o_0)$. *Funkce jest spojitá v otevřeném intervalu $I$, jestliže jest spojitá v každém bodě toho intervalu.*

V dalším budeme mluviti také o funkci spojité v u z a v ř e n é m intervalu $J$. To bude funkce, která jest spojitá v určitém intervalu otevřeném, v němž $J$ jest zcela obsažen.

Spojitá funkce dvou nezávisle proměnných má obdobné vlastnosti, jako spojitá funkce jedné proměnné. Jsou to zejména tyto dvě základní vlastnosti:

I. *Jestliže funkce spojitá v bodě $o_0$ jest tam od nuly různá, lze vždy nalézti takové okolí bodu $o_0$, že v něm $f(o)$ má totéž znamení jako $f(o_0)$.*

Důkaz se nijak neliší od důkazu provedeného v odst. 22. Druhá věta zní:

II. *Jestliže $f(x, y)$ jest spojitá v uzavřeném intervalu $I$, nabývá tam své největší i nejmenší hodnoty a jest tedy z obou stran ohraničená.*

Důkaz této věty provedeme podrobně, hlavně z toho důvodu, že lze jej rozšířiti na jakýkoliv počet nezávisle proměnných. Rozdělme interval na čtyři menší tím, že spojíme úsečkami středy protilehlých stran. Ty nazveme intervaly *prvého dělení*. Každý z nich dělíme podobně znovu. Obdržíme $4^2$ intervalů *druhého* dělení a obecně $4^n$ intervalů *n-tého* dělení. Jest patrno, že každá nekonečná posloupnost takových intervalů do sebe zařazených definuje jediný bod $[x, y]$, který jest všem společný. Také obráceně lze vždy nalézti posloupnost intervalů do sebe zařazených, vybraných z předešlého dělení, tak, aby bod $[x, y]$ v původním intervalu libovolně zvolený byl všem jim společný.

Sledujme funkci $f[x, y]$ na jedné straně některého intervalu. Tam jest na př. $y$ neproměnné; jest tam tedy $f(x, y)$ funkcí spojitou *jediné* proměnné $x$ a tedy nabývá svého maksima v určitém bodě oné strany. Totéž platí pro ostatní tři strany intervalu. Na obvodu intervalu nabývá tedy $f(x, y)$ v určitém bodě svého maksima pro obvodové hodnoty (toto maksimum musíme dobře rozlišovati od maksimální hodnoty $f(x, y)$ v *celém* intervalu). Sledujeme-li obvody všech intervalů $n$-tého dělení, můžeme zajisté na jednom z nich nalézti bod $o_n$, který má tu vlastnost, že $f(o_n) \geqq f(o)$ pro všechna $o$ ležící na těchto obvodech. Dále jest patrně $f(o_n) \geqq f(o_{n-1})$, neboť bod $o_{n-1}$ příslušný k dělení $(n-1)$-vému leží na obvodě tohoto dělení a tedy také na obvodě dělení $n$-tého. Posloupnost bodů $o_1, o_2, o_3, \ldots o_n, \ldots$ leží v původním intervalu a má tam tedy aspoň jeden bod zhuštění $\omega$. O bodu tom tvrdíme, že v něm $f(o)$ nabývá svého maksima, to jest $f(\omega) \geqq f(o)$, když $o$ jest libovolný bod původního intervalu. Vyberme z posloupnosti novou, $o_{n_1}, o_{n_2}, o_{n_3}, \ldots$, která má limitu $\omega$ a sestrojme další posloupnost

$$f(o_{n_1}) \leqq f(o_{n_2}) \leqq f(o_{n_3}) \leqq \ldots$$

Vzhledem k předpokládané spojitosti funkce je $\lim\limits_{k \to \infty} f(o_{n_k}) =$
$= f(\omega)$.

Vyvolme nyní v $I$ libovolný bod $o$. Podle předešlého lze nalézti posloupnost intervalů do sebe zařazených a patřících postupně k $(n_1)$-mu, $(n_2)$-mu atd. dělení, takže definují právě bod $o$. Na obvodech těchto intervalů zvolme body, třeba levé hořejší vrcholy obdélníků, $p_{n_1}, p_{n_2}, p_{n_3}, \ldots$ Pak bude $\lim\limits_{k \to \infty} p_{n_k} = o$ a tedy vzhledem k spojitosti $\lim\limits_{k \to \infty} f(p_{n_k}) = f(o)$. Avšak víme, že $f(p_{n_k}) \leqq f(o_{n_k})$ a tedy také $f(o) \leqq f(\omega)$ s. e. d.

Podobně se dokáže eksistence absolutního minima. Další vlastnosti spojitých funkcí jsou: Součet, rozdíl, součin a podíl spojitých funkcí jest opět spojitá funkce; při podílu musí ovšem jmenovatel býti od nuly různý. Obecněji platí: Spojitá funkce jiných spojitých funkcí jest opět spojitá. To znamená přesně: Je-li $f(u, v)$ spojitá v bodě $[u_0, v_0]$ a jsou-li $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ spojité funkce v bodě $[x_0, y_0]$, mající tam hodnoty $u_0, v_0$, pak jest také $f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ spojitá v bodě $[x_0, y_0]$. Věta tato vyplývá z následujících vztahů

$$\lim_{\substack{u \to u_0 \\ v \to v_0}} f(u, v) = f(u_0, v_0) = f(\varphi(x_0, y_0), \psi(x_0, y_0)),$$

$$\lim_{\substack{u \to u_0 \\ v \to v_0}} f(u, v) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(\varphi(x, y), \psi(x, y)).$$

*Poznámka.* Pojem limity $\lim\limits_{o \to o_0} f(o)$, který jsme v předešlém definovali a užívali, musíme přísně rozeznávati od t. zv. dvojité limity

$$\lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y) = B,$$

kterou rozumíme tento pochod:

Pokládáme $y$ za pevně zvolené a určíme $\lim\limits_{x \to a} f(x, y) = \varphi(y)$, jestliže vůbec eksistuje. Tato limita je ovšem již nezávislá na $x$. Po dokonání tohoto kroku provedeme nový: $\lim\limits_{y \to b} \varphi(y) = B$. Při tom jest pamatovati, že limitní přechody často nelze zaměniti beze změny výsledku $B$.

*Příklad* 1. $z = ax^2 + by^3$ jest funkce spojitá v bodě $[0, 0]$, neboť $|ax^2 + by^3| \leqq |ax^2| + |by^3| < \varepsilon$, pokud $|x| < \sqrt{\varepsilon/2|a|}$, $|y| < \sqrt[3]{\varepsilon/2|b|}$.

2. Rovněž $z = x \, . \, y \, . \sin(y/x)$ jest spojitá v bodě $[0, 0]$, když jí tam přiřkneme hodnotu 0, neboť

$$|z| \leqq |x| \, . \, |y| < \varepsilon, \quad \text{pokud} \quad |x| < \sqrt{\varepsilon}, \quad |y| < \sqrt{\varepsilon}.$$

3. Funkce $z = 4y^2x : (y^2 + x)^2$, v bodě $[0, 0]$ rovná nule, není tam spojitá. Jest sice $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y) = 0$ a právě tak $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y) = 0$, avšak přesto $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ neeksistuje, neboť v každém sebe menším okolí bodu $[0, 0]$ jsou body, v nichž $f(x, y) = 1$, a jiné body, v nichž $f(x, y) = 0$. Jsou to body jednak na parabole $x = y^2$, jednak na přímce $y = 0$.

**Cvičení.** 1. Jak se chová funkce posledního příkladu, když $o \to 0$ *a)* po přímce $y = kx$, *b)* po parabole $y^2 = kx$?

2. Funkce definovaná vztahem $z = y \, . \sin(1/x) + x \, . \sin(1/y)$, pokud $x \neq 0$, $y \neq 0$, a rovná nule, kdykoliv $x$ nebo $y$ nebo obě tato

čísla jsou rovna nule, jest spojitá v bodě $[0, 0]$! Dokažte, že žádná z dvojitých limit neeksistuje!

3. Dokažte větu: Jestliže obě dvojité limity funkce $f(x, y)$ v bodě $[0, 0]$ eksistují a jsou od sebe různy, není $f(x, y)$ spojitá v bodě tom! [Na př. $z = y : (y + x^2)$.]

**45. Parciální (částečné) derivace.** Funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ budiž dána v nějakém intervalu, jehož jeden vnitřní bod jest $[x, y]$. Pokládejme $x, y$ za pevně zvolené veličiny a utvořme výraz

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Eksistuje-li tato limita, nazýváme ji *parciální derivace* $f(x, y)$ *podle* $x$ *v bodě* $[x, y]$ a značíme ji jedním že symbolů

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = D_x z = D_x f = f'_x(x, y) = z'_x.$$

Parciální derivace $f(x, y)$ podle $x$ v bodě $[x, y]$ jest tedy obyčejná derivace, počítaná za předpokladu, že $y$ jest konstantní, kdežto $x$ jest proměnné. Podobně jest parciální derivace podle $y$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y} = D_y f = \text{atd.}$$

Analogicky definujeme vyšší parciální derivace. Tak na př. druhé derivace jsou čtyři

$$D_x(D_x f(x, y)) = D^2_{xx} f(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad D_y(D_x z) = D^2_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}.$$

$$D_x(D_y z) = D^2_{yx} z = \frac{\partial^2 z}{\partial y \, \partial x}; \quad D_y(D_y z) = D^2_{yy} z = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Všimněme si zvláště symbolu $D^2_{xy} z$ neboli $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}$. Podle definice jest nutno $f(x, y)$ derivovati nejdříve parciálně podle $x$ a výsledek pak parciálně podle $y$. Čtenář vyloží si nyní již sám význam symbolů

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y}, \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-k} \partial y^k} \quad \text{atd.}$$

*Příklady.* 1. $z = ax + by$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = a$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = b$; všechny vyšší derivace jsou rovny nule.

2. $z = x^y \; (x > 0)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y \,.\, x^{y-1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y \,.\, lx$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y \,.\, (y-1) \,.\, x^{y-2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \, \partial x} = x^{y-1} + y \,.\, x^{y-1} \, l x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^y \, l^2 x \quad \text{atd.}$$

**Cvičení.** 1. Vypočtěte parciální derivace prvního a druhého stupně pro funkce: $(x \cos y + y \,.\, e^x)$, $e^{ax+by}$, $e^{ax^2+by^2}$, $(x+y) \,.\, \sin(xy)$ atd.

2. $z = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{y}$, $z = l \sqrt{x^2 + y^2}$. Dokažte, že tyto dvě funkce vyhovují rovnici

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

3. Vypočtěte $\dfrac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \, \partial y^n}$ pro funkci $z = f(ax + by + c)$ za předpokladu, že $f(u)$ má všechny derivace. $[a^m \,.\, b^n \,.\, f^{(m+n)}(ax + by + c)]$

**46. Pokračování o funkcích spojitých.** V odst. 44 definovali jsme funkci spojitou v bodě $[x, y]$. Zjišťování spojitosti podle kritéria tam uvedeného jest často obtížné. Proto odvodíme si *postačující* podmínku, která ve většině případů stačí k zjištění spojitosti.

*Funkce $f(x, y)$ jest spojitá v bodě $[x, y]$, jestliže jest tam spojitá v jedné proměnné (na př. $x$) a má-li mimo to v okolí $[x, y]$ ohraničenou parciální derivaci podle druhé proměnné (na př. $|f'_y| < M$).*

Jest totiž

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) + f(x+h, y) - f(x, y)$$

a tedy podle věty o střední hodnotě

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = \{ f(x+h, y) - f(x, y) \} + k f'_y(x+h, y+\Theta k).$$

Když $h \to 0$ a $k \to 0$, má závorka limitu 0, protože $f(x, y)$ jest spojitá v proměnné $x$ a druhý sčítanec blíží se nule, protože $|f'_y|$ jest tam menší než $M$. Tak na př. $e^{\sin(x+y)} : (x^2 + y^2)$ jest spojitá v každém bodě $o \neq [0, 0]$.

Dále jest dobře uvědomiti si, že *ke spojitosti v bodě $[x, y]$ nestačí, jestliže v bodě tom eksistují obě parcielní derivace.* Tím liší se funkce dvou proměnných podstatně od funkce jedné proměnné. Tak na př. $f(x,y)=xy:(x^2+y^2)$, $f(0,0)=0$ má v bodě $[0,0]$ obě parciální derivace podle $x$ i podle $y$

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{h\,.\,0}{h^2+0}-0\right):h=0;\quad f'_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\left(\frac{0\,.\,k}{0+k^2}-0\right):k=0,$$

přes to však není spojitá, neboť na přímce $y=x$, $(x\neq 0)$ má funkce hodnotu $1/2$ v libovolné blízkosti bodu $[0,0]$ a není tedy spojitá.

*Právě tak nestačí ke spojitosti v bodě $[x_0, y_0]$, jestliže jest tam $f(x, y_0)$ spojitá vzhledem k proměnné $x$ a také $f(x_0, y)$ spojitá vzhledem k proměnné $y$.* Tak na př. při funkci z předešlého příkladu jest pro $[x_0, y_0]\equiv[0,0]$

$$f(x,y_0)=0,\ f(x_0,y)=0,$$

ať $x$ a $y$ jsou jakákoli čísla. Jest tedy $f(x,y_0)$ i $f(x_0,y)$ spojitá, neboť jest konstantní, avšak přes to $f(x,y)$ není, jak již víme, v bodě $[0, 0]$ spojitá.

**47. Funkce schopná diferenciace.** V odst. 35 definovali jsme funkci jedné proměnné, schopnou diferenciace vztahem

$$f(x+h)-f(x)=A\,.\,h+h\,.\,\eta(h),$$

kdež $A=f'(x)$ bylo číslo nezávislé na $h$, a $\eta(h)$ mělo vlastnost $\lim\limits_{h\to 0}\eta(h)=0$.

Mějme funkci dvou proměnných $f(x,y)$ definovanou v okolí $[x,y]$. Analogicky jako při jedné proměnné definujeme:

*$f(x,y)$ jest schopna diferenciace v bodě $[x,y]$, jestliže*

$$f(x+h,\ y+k)-f(x,y)=A\,.\,h+B\,.\,k+\{|h|+|k|\}\,.\,\varepsilon,\qquad (1)$$

*kdež $h$, $k$ jsou libovolná čísla, $A$, $B$ jsou čísla nezávislá na $h$, $k$ a $\varepsilon$ jest funkcí čísel $h$, $k$ takovou, že $\varepsilon\to 0$, když $\{|h|+|k|\}\to 0$, (to jest, když $h\to 0$ a $k\to 0$).*

*Příklad.* Označme $|h|+|k|=\varrho$. Funkce $z=x^2\,.\,y$ jest schopna diferenciace v každém bodě, neboť

$$(x+h)^2\,.\,(y+k)-x^2\,.\,y=2xy\,.\,h+x^2\,.\,k+\varrho\,.\left\{\frac{h^2(y+k)}{\varrho}+2x\frac{h\,.\,k}{\varrho}\right\}.$$

Zde jest $A=2xy$, $B=x^2$, $\varepsilon=\dfrac{h^2(y+k)}{\varrho}+2x\dfrac{h\,.\,k}{\varrho}$.

Patrně jest $|\varepsilon|\leq|h|\,.\,|y+k|+2|x|\,.\,|h|$ a má tedy žádanou vlastnost.

Po tomto příkladu vraťme se k obecné úvaze. Čísla $A$, $B$ jsou funkce proměnných $x$, $y$, které můžeme určiti blíže. Ježto

$h, k$ jsou libovolná, zvolme $k=0$, $h \neq 0$ a dělme rovnici (1) číslem $h$

$$\frac{f(x+h, y)-f(x, y)}{h}=A+\varepsilon \cdot \frac{|h|}{h}.$$

Jestliže $h \to 0$, má pravá strana limitu $A$, neboť $\varepsilon \to 0$. Levá strana má tedy rovněž limitu $A$ a podle předešlého odstavce jest

$$\frac{\partial f}{\partial x}=A.$$

Volbou $k \neq 0$, $h=0$ dokážeme podobně $\dfrac{\partial f}{\partial y}=B$. Výsledek tento můžeme shrnouti ve větu: *Eksistence prvních parciálních derivací jest nutná podmínka, aby funkce byla schopna diferenciace.* Uvidíme v příštím odstavci, že to není podmínka postačující.

V rovnici (1) zaveďme pro libovolná čísla $h, k$ označení $h=\Delta x$, $k=\Delta y$ a definujme $\Delta z$ vztahem

$$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)=\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x+\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y+ \{|\Delta x|+|\Delta y|\} \cdot \varepsilon.$$

Výraz

$$d z=\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x+\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

nazývá se *úplný diferenciál* funkce, $\dfrac{\partial f}{\partial x} \Delta x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} \Delta y$ jsou *částečné* diferenciály. Toto označení má svůj důsledek, pro speciální funkci $z=x$. Podle hořejší definice je $dz=1 \cdot \Delta z$ a tedy protože $z=x$, $dx=\Delta x$. Podobně volba funkce $z=y$ vede ke vztahu $dy=\Delta y$. Těchto speciálních výsledků jest zvykem užívati i při obecné funkci schopné diferenciace, takže

$$d z=\frac{\partial z}{\partial x} \cdot d x+\frac{\partial z}{\partial y} \cdot d y.$$

Při tom jsou $dx, dy$ libovolná čísla. Tak na př. funkce $z=x^2 \cdot y$ má úplný diferenciál $dz=2xy \cdot dx+x^2 \cdot dy$.

Pokládáme-li $x, y$ za pevně zvolená čísla, jako dosud jsme stále činili, jest $dz$ lineární funkcí dvou *proměnných veličin* $dx$ a $dy$. Jinak jest tomu, když $f(x, y)$ jest schopno diferenciace nejen v bodě $[x, y]$, nýbrž v nějakém jeho okolí. Potom přirozeně $dz$ jest v každém bodě toho intervalu jiné číslo, neboť

$D_x f$ a $D_y f$ jsou funkce obou proměnných $[x, y]$. Pak ovšem jest $dz$ funkcí *čtyř proměnných* $x, y, dx, dy$. Vzhledem k těmto možnostem jest nutno při každém užívání diferenciálu předem definovati, co rozumíme čísly $x, y, dx, dy$.

**48. Vlastnosti funkce schopné diferenciace.** Funkce schopné diferenciace mají několik jednoduchých vlastností, které právě jsou příčinou toho, že funkcemi těmi se zvláště zabýváme.

*Funkce* $f(x, y)$ *v bodě* $[x, y]$ *schopná diferenciace jest tam spojitá.* Jest totiž podle předešlého odstavce

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \{f(x + \Delta x, y + \Delta y)\} = f(x, y),$$

což právě jest definice spojité funkce.

Dále víme z předešlého odstavce, že funkce schopná diferenciace v bodě $[x, y]$ má tam obě první parciální derivace. Opak však neplatí, neboť na př. funkce $z = xy : (x^2 + y^2)$, rovná nule v bodě $[0, 0]$, má v bodě tom obě derivace $D_x f = 0$, $D_y f = 0$, přes to však není tam schopna diferenciace. To plyne z té okolnosti, že v bodě tom jest nespojitá, jak víme z odstavce 46. Eksistence obou prvních derivací jest tedy nutnou, nikoliv však postačující podmínkou pro schopnost diferenciace funkce. Takové nutné a postačující podmínky zde odvozovati nebudeme a spokojíme se pouze konstatováním jednoduchého postačujícího kriteria, které ve většině případů nám dobře poslouží:

*Jestliže* $f(x, y)$ *má v určitém otevřeném intervalu obě první parciální derivace spojité, jest v tom intervalu schopna diferenciace.*

K důkazu užijeme vět o střední hodnotě:

$$f(x + h, y + k) - f(x, y) = \{f(x + h, y + k) - f(x, y + k)\} + \\ + \{f(x, y + k) - f(x, y)\},$$

$$f(x, y + k) - f(x, y) = k \cdot f'_y(x, y + \Theta_1 k).$$

$$f(x + h, y + k) - f(x, y + k) = h \cdot f'_x(x + \Theta_2 h, y + k).$$

Vzhledem ke spojitosti derivací jest však

$$f'_y(x, y + \Theta_1 k) = f'_y(x, y) + \varepsilon_1,$$

$$f'_x(x + \Theta_2 h, y + k) = f'_x(x, y) + \varepsilon_2,$$

kdež $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$, když $h \to 0$ a $k \to 0$, a tedy $f(x + h, y +$

$$+k)-f(x,y)=hf'_x+kf'_y+\{|h|+|k|\}\left\{\frac{h}{|h|+|k|}\varepsilon_2+\frac{k}{|h|+|k|}\varepsilon_1\right\}$$

s. e. d.

**49. Derivace funkce složené.** Budiž $z=f(u,v)$ funkce schopná dif. v bodě $[u,v]$. Dosadíme-li za $u, v$ funkce schopné dif. jediné proměnné (parametru) $u(t)$, $v(t)$, je také $z$ funkcí jediné proměnné $t$. Jest úkolem vypočísti derivaci $\frac{dz}{dt}$. Zvětšíme-li $t$ o $\Delta t$, zvětší se $u$ o $\Delta u$, $v$ o $\Delta v$ a $z$ o $\Delta z$. Je tedy podle odstavce 47

$$\Delta z=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\Delta u+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\Delta v+\varepsilon\{|\Delta u|+|\Delta v|\}.$$

Je-li $\Delta u=\Delta v=0$, definujeme $\varepsilon=0$. Dělíme-li obě strany $\Delta t$, obdržíme

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta t}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\Delta v}{\Delta t}+\varepsilon\left\{\frac{|\Delta u|}{\Delta t}+\frac{|\Delta v|}{\Delta t}\right\}.$$

Jestliže $\Delta t\to 0$, pak také $\Delta u\to 0$, $\Delta v\to 0$, $\varepsilon\to 0$. Mimo to je

$$\lim\frac{\Delta u}{\Delta t}=u'(t)=\frac{du}{dt},\qquad \lim\frac{\Delta v}{\Delta t}=v'(t)=\frac{dv}{dt},$$

a tedy $\lim\left|\frac{|\Delta u|+|\Delta v|}{\Delta t}\right|=\lim\left|\frac{\Delta u}{\Delta t}\right|+\lim\left|\frac{\Delta v}{\Delta t}\right|=|u'(t)|+|v'(t)|.$

I jest celkem

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt},\qquad \text{čili } df=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv.$$

*Máme tedy pro diferenciál funkce složené touž formuli, jako pro diferenciál funkce $f(u,v)$, v níž $u, v$ jsou nezávisle proměnné.*

Jsou-li $u, v$ funkce dvou proměnných $u(x,y)$, $v(x,y)$ schopné diferenciace, je analogicky

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Z pravidla o diferenciaci funkce složené vyplývají jako zvláštní případy vzorce, které známe již z dřívějška:

$$d\frac{u}{v}=\frac{1}{v}du-\frac{u}{v^2}dv=\frac{vdu-udv}{v^2},$$

$$d(u^v)=v\,.\,u^{v-1}\,.\,du+u^v\,.\,lu\,.\,dv,\qquad df(u)=f'(u)\,.\,du+0\,.\,dv.$$

Avšak také obráceně, předpokládajíce znalost těchto formulí, můžeme velmi často vypočísti úplný diferenciál, aniž počítáme derivace parciální. Tak na př.

$$d \arcsin \frac{y^2}{x^2} = \frac{d\frac{y^2}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{y^4}{x^4}}} = \frac{-2y^2\,dx + 2xy\,dy}{x\sqrt{x^4-y^4}}.$$

Z výsledku jest pak možno zjistiti parciálné derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2y^2}{x\sqrt{x^4-y^4}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{\sqrt{x^4-y^4}},$$

neboť z rovnosti

$$A\,dx + B\,dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

plyne $A = f'_x$, $B = f'_y$, když položím $dx = 0$, nebo $dy = 0$.

**50. Vztah** $D^2_{xy}z = D^2_{yx}z$. Při počítání různých příkladů setkáváme se téměř pravidelně s rovností v nadpise uvedenou (viz na př. odstavec 45, př. 1 a 2). Byl by však omyl domnívati se, že jest tomu tak vždy. Funkce $z = xy^2(x-y):(x^2 + y^2)$, rovná nule v bodě $[0, 0]$, má derivace

$$f'_x(0,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} y^2\frac{h-y}{h^2+y^2} = -y.$$

$$f'_y(x,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(x,k)-f(x,0)}{k} = \lim_{k\to 0} xk\frac{x-k}{x^2+k^2} = 0$$

a tedy jest

$$f''_{xy}(0,y) = -1, \qquad f''_{xy}(0,0) = -1,$$
$$f''_{yx}(x,0) = 0, \qquad f''_{yx}(0,0) = 0.$$

Kdy tedy jsou obě derivace sobě rovny? Odvodíme zde opět jen zcela speciální podmínku postačitelnou, která ve většině případů nám dobře poslouží:

*Jestliže obě druhé derivace $f''_{xy}$ a $f''_{yx}$ eksistují v nějakém okolí bodu $[x, y]$ a jsou-li v bodě tom spojité, jsou si tam také rovny.*

Abychom větu dokázali, vypočteme tak zv. druhou diferenci

$$A = \frac{f(x+h, y+h) - f(x+h, y) - f(x, y+h) + f(x, y)}{h^2}$$

dvojím způsobem. Po prvé položíme

$$\varphi(x)=\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} \text{ a uvážíme, že } A=\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h};$$

po druhé položíme

$$\psi(y)=\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \text{ a uvážíme, že } A=\frac{\psi(y+h)-\psi(y)}{h}.$$

Podle věty o střední hodnotě jest poprvé $A=\varphi'(\xi_1)$, $\xi_1=x+\vartheta_1 h$ a tedy

$$A=\frac{f'_x(\xi_1,y+h)-f'_x(\xi_1,y)}{h}=f''_{xy}(\xi_1,\eta_1), \quad \eta_1=y+\Theta_1 h.$$

Po druhé je $A=\psi'(\eta_2)$, $\eta_2=y+\Theta_2 h$,

a tedy $A=f''_{yx}(\xi_2,\eta_2)$, $\xi_2=x+\vartheta_2 h$.

Z toho plyne $f''_{yx}(\xi_2,\eta_2)=f''_{xy}(\xi_1,\eta_1)$ a jestliže $h\to 0$, je $\xi_1\to x$, $\xi_2\to x$, $\eta_1\to y$, $\eta_2\to y$, což vzhledem ke spojitosti funkcí dá výsledek hledaný.

Tuto zaměnitelnost derivací můžeme za obdobných podmínek spojitosti rozšířiti i na vyšší derivace jako

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}=\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}; \quad \frac{\partial^{m+n}z}{\partial x^m\partial y^n}=\frac{\partial^{m+n}z}{\partial y^n\partial x^m} \text{ a pod.}$$

Jest totiž na př.

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2} \text{ atd.}$$

**51. Vyšší diferenciály.** Nechť $f(x,y)$ jest v bodě $[x,y]$ schopna diferenciace a nechť také její derivace $f'_x$ a $f'_y$ mají touž vlastnost, z čehož plyne, že jsou definovány v nějakém okolí bodu $[x, y]$. Úplný diferenciál $dz=f'_x(x,y)\,.\,dx+$ $+f'_y(x,y)\,.\,dy$ lze v tom případě pokládati za funkci proměnných $x$, $y$ v onom intervalu; při tom předpokládáme, že $dx$ a $dy$ jsou *konstanty* na $x$, $y$ nezávislé. Samo $dz$ jest tedy funkce $x$, $y$ schopná diferenciace. Její diferenciál označíme znakem $\delta$ a právě tak nové libovolné přírůstky nezávisle proměnných označíme $\delta x$, $\delta y$. Je pak

$$\delta(dz)=(f''_{xx}\,.\,\delta x+f''_{xy}\,.\,\delta y)\,.\,dx+(f''_{yx}\,.\,\delta x+f''_{yy}\,.\,\delta y)\,.\,dy\ldots(1)$$

Učiníme-li předpoklad $f''_{xy}=f''_{yx}$ a zvolíme-li speciálně $\delta x=dx$, $\delta y=dy$, obdržíme tak zv. druhý diferenciál $f(x,y)$

v bodě $[x, y]$

$$d(dz) = d^2 z = f''_{xx} \cdot dx^2 + 2 \cdot f''_{xy} \cdot dx \cdot dy + f''_{yy} \cdot dy^2.$$

Podobně definujeme třetí diferenciál

$$d^3 z = f'''_{xxx} \cdot dx^3 + 3 \cdot f'''_{xxy} dx^2 \cdot dy + 3 \cdot f'''_{xyy} \cdot dx \cdot dy^2 + f'''_{yyy} \cdot dy^3,$$

obecně pak $n$-tý diferenciál

$$d^n z = \frac{\partial^n z}{\partial x^n} dx^n + c_1 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y} \cdot dx^{n-1} \cdot dy + \cdots + c_n \cdot \frac{\partial^n z}{\partial y^n} dy^n.$$

Konstanty $c_1, c_2 \ldots$ jsou nezávislé na tvaru funkce $z$ a můžeme je tedy určiti nějakou speciální volbou funkce na př. $z = e^{x+y}$. I je

$$dz = e^{x+y} \cdot (dx + dy),\ d^2 z = e^{x+y} \cdot (dx + dy)^2,\ d^n z = e^{x+y} \cdot (dx + dy)^n$$

a dále $\dfrac{\partial^n z}{\partial x^{n-k} \partial y^k} = e^{x+y}$.

Dosazením do předešlé rovnice obdržíme

$$(dx + dy)^n = dx^n + c_1 dx^{n-1} \cdot dy + \cdots + c_n \cdot dy^n.$$

Protože $dx$, $dy$ jsou libovolná čísla, musí býti

$$c_1 = \binom{n}{1},\quad c_2 = \binom{n}{2}, \ldots \ c_k = \binom{n}{k} \ldots$$

K označení prvého diferenciálu užívá se často symbolického násobení

$$dz = \left( dx \frac{\partial \cdot}{\partial x} + dy \frac{\partial \cdot}{\partial x} \right) \cdot z,$$

kdež »faktor« $z$ přijde do míst v čitateli označených tečkami. Právě tak značíme, již bez teček,

$$d^2 z = \left( dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \cdot z \quad \text{a obecně} \quad d^n z = \left( dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \cdot z.$$

**Cvičení.** 1. Vypočtěte vyšší diferenciály funkcí uvedených v odst. 45.

2. Dokažte, že za předpokladů, které jsme učinili na počátku odstavce o $z = f(x, y)$, jest $\delta(dz) = d(\delta z)$ jen tenkráte, když $f''_{xy} = f''_{yx}$! [Užijte rovnice (1)!]

**52. Věta Taylorova pro dvě proměnné.** O funkci $f(x, y)$ učiňme předpoklad, že ona a všechny její parciální derivace až po stupeň $(n - 1)$-vý inkl. jsou schopny diferenciace v intervalu

$$a - h \leq x \leq a + h\ ,\ b - k \leq y \leq b + k.$$

Funkce
$$\varphi(t) = f(a+ht,\ b+kt),\quad 0 \leqq t \leqq 1$$
závisí potom na jediné proměnné $t$ a má všechny derivace podle $t$ až po $n$-tou. Položíme-li $a + ht = x$, $b + kt = y$, je podle odst. 49
$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot k\right).$$
Při tom jsou $h$, $k$ konstanty na $t$ nezávislé. Druhá derivace jest
$$\varphi''(t) = \left\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dt}\right)h + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dt}\right)k\right\},$$
$$\varphi''(t) = \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}h\cdot k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot k^2\right\} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\cdot f$$
a tedy obecně
$$\varphi^{(m)}(t) = \left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x} + k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^m\cdot f(x,y).$$
Pro $t = 0$, čili $x = a$, $y = b$, je tedy
$$\varphi^{(m)}(0) = \left(h\cdot\frac{\partial}{\partial a} + k\cdot\frac{\partial}{\partial b}\right)^m\cdot f(a,b),$$
což nám umožňuje, abychom užili formule Maclaurinovy
$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{t}{1!}\varphi'(0) + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0) + \frac{t^n}{n!}\varphi^{(n)}(\Theta t),$$
$$0 < \Theta < 1.$$
Dosadíme-li sem $t = 1$, získáme *vzorec* Taylorův
$$f(a+h,\ b+k) = f(a,b) + \left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)\cdot f(a,b) +$$
$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^2\cdot f(a,b) + \dots + \frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{n-1}\cdot f(a,b) + R_n$$
$$R_n = \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^n f(a+\Theta h,\ b+\Theta k).$$
Nahradíme-li zde znaky $a, b, h, k$ novými $x, y, dx, dy$ a užijeme-li označení z dřívějška známého
$$f(x+dx,\ y+dy) - f(x,y) = \Delta f(x,y)$$

$$\left(dx \,.\, \frac{\partial}{\partial x} + dy \,.\, \frac{\partial}{\partial y}\right)^m . f(x, y) = d^m f,$$

můžeme Taylorovu formuli psáti ve velmi stručném tvaru

$$\Delta f(x, y) = df + \frac{d^2 f}{2!} + \frac{d^3 f}{3!} + \cdots + \frac{d^{n-1} f}{(n-1)!} + \left(\frac{d^n f}{n!}\right)_{x+\Theta dx,\ y+\Theta dy}.$$

Indeksy u posledního členu značí, že v derivacích obsažených v $d^n f$ jest klásti všude $x + \Theta dx$ místo $x$ a $y + \Theta dy$ místo $y$.

*Vzorec* Maclaurinův obdržíme z Taylorova, nahradíme-li znaky $a, b, h, k$ novými $0, 0, x, y$. Napíšeme zde explicitně první tři členy:

$$f(x, y) = f(0, 0) + \{x \,.\, f'_x(0, 0) + y \,.\, f'_y(0, 0)\} +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left\{x^2 \,.\, f''_{xx}(0, 0) + 2xy \,.\, f''_{xy}(0, 0) + y^2 \,.\, f''_{yy}(0, 0)\right\} + \cdots + R_n.$$

Jako při jedné proměnné, můžeme i zde definovati nekonečnou řadu Taylorovu nebo Maclaurinovu, jestliže $\lim\limits_{n \to \infty} R_n = 0$.

*Poznámka.* Věta Taylorova prvého stupně

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = hf'_a(a+\Theta h, b+\Theta k) + kf'_b(a+\Theta h, b+\Theta k)$$

bývá často nazývána *věta o střední hodnotě pro dvě proměnné.*

**53. Ekstrémy funkcí dvou proměnných.** Nechť funkce $z = f(x, y)$ jest definována v intervalu, jehož vnitřní bod jest $[a, b]$. Jestliže lze nalézti okolí bodu $[a, b]$, v němž $f(a, b) > f(x, y)$, říkáme, že $f(x, y)$ má v bodě $[a, b]$ *relativní maksimum.* Obrácená nerovnina definuje *relativní minimum.* V dalším vyšetřování budeme předpokládati, že $f(x, y)$, $f'_x(x, y)$ a $f'_y(x, y)$ jsou schopny diferenciace v bodě $[a, b]$, a že tedy eksistují v nějakém okolí toho bodu. Mimo to nechť $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Má-li nastati maksimum v bodě $[a, b]$, musí býti také $f(a, b) > f(x, b)$; $f(a, b) > f(a, y)$ a tedy funkce jedné proměnné $f(x, b)$ musí míti v bodě $x = a$ maksimum a podobně $f(a, y)$ v bodě $y = b$. Podle odst. 38 musí tedy býti

$$f'_x(x, b) = 0 \text{ pro } x = a, \quad f'_y(a, y) = 0 \text{ pro } y = b,$$

Tytéž rovnice obdržíme, když předpokládáme, že $f(x, y)$ má v bodě $[a, b]$ minimum. *Nutná podmínka pro ekstrém v bodě $[a, b]$ jest tedy*

$$f'_x(a, b) = 0, \qquad f'_y(a, b) = 0.$$

Řešením těchto rovnic o dvou neznámých získáme ony body

$[a, b]$, $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ atd., v nichž ekstrém *může* (avšak nemusí) nastati. Zbývá tedy rozhodnouti, zda v takovém bodě ekstrém vskutku nastává. K tomu cíli utvoříme rozdíl

$$\Delta f = f(a+h,\ b+k) - f(a,b) = hf'_x(a+\Theta h,\ b+\Theta k) + \\ + kf'_y(a+\Theta h,\ b+\Theta k).$$

Je-li rozdíl ten *kladný* pro všechny body $[a+h,\ b+k]$ nějakého okolí bodu $[a, b]$, jest v bodě tom *minimum*, je-li *záporný*, jest tam *maksimum*, nabývá-li různých znamení, ať $|h|$, $|k|$ jsou jakkoliv malá, není tam ekstrému. Abychom rozhodli, užijeme toho, že derivace jsou schopny diferenciace:

$$f'_x(a+\Theta h,\ b+\Theta k) = f''_{xx}(a,b)\,\Theta h + f''_{xy}(a,b)\,\Theta k + \varepsilon'_1\{|h| + |k|\}\Theta$$
$$f'_y(a+\Theta h,\ b+\Theta k) = f''_{xy}(a,b)\,\Theta h + f''_{yy}(a,b)\,\Theta k + \varepsilon'_2\{|h| + |k|\}\Theta$$

Při tom víme, že $\varepsilon'_1 \to 0$, $\varepsilon'_2 \to 0$, když $|h| + |k| \to 0$. Užijeme-li ještě zkratek $A = f''_{xx}(a,b)$. $B = f''_{xy}(a,b)$, $C = f''_{yy}(a,b)$ a substituce $h = r\,.\cos\varphi$, $k = r\,.\sin\varphi$, která určuje jednoznačně $r > 0$ a $\varphi$ v mezích $0 \leqq \varphi < 2\pi$, obdržíme

$$f'_x(a+\Theta h,\ b+\Theta k) = r\,.\,\Theta\{A\,.\cos\varphi + B\,.\sin\varphi + \varepsilon_1\},$$
$$f'_y(a+\Theta h,\ b+\Theta k) = r\,.\,\Theta\{B\,.\cos\varphi + C\,.\sin\varphi + \varepsilon_2\},$$

$\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$, když $r \to 0$. Tedy dále

$$\Delta f = \Theta r^2\,.\,\{A\cos^2\varphi + 2B\,.\cos\varphi\sin\varphi + C\,.\sin^2\varphi + \varepsilon\},$$

kdež $\Theta\,.\,r^2$ jest kladné, $\varepsilon = \varepsilon_1\cos\varphi + \varepsilon_2\sin\varphi \to 0$, když $r \to 0$. Z výrazu toho soudíme:

1. Jestliže trojčlen $(A\,.\cos^2\varphi + 2B\,.\sin\varphi\,.\cos\varphi + C\,.\sin^2\varphi)$ jest větší než nějaká *kladná* konstanta*) $m > 0$, ať $\varphi$ jest jakýkoliv úhel, pak $\Delta f$ jest kladné pro všechna dosti malá $r$. Za daných předpokladů lze totiž vždy nalézti takové číslo $\varrho$, že $|\varepsilon| < m/2$ pro všechna $r \leqq \varrho$. Pak ovšem ta okolnost, zda $\varepsilon$ jest kladné či záporné, nemá vlivu na znamení $\Delta f$. *Funkce má minimum.*

2. Jestliže trojčlen jest menší než určitá záporná konstanta $-m$, funkce má z týchž důvodů *maksimum.*

3. Jestliže trojčlen pro různá $\varphi$ má různá znaménka, nemá funkce vůbec ekstrému.

4. Jestliže trojčlen má sice stále totéž znamení, avšak anuluje se pro některá $\varphi$, nemůžeme rozhodnouti, neboť pro ona $\varphi$ jest znaménko $\Delta f$ určováno znamením $\varepsilon$, o němž nic nevíme.

---

*) To nastává vždy, je-li trojčlen ten v intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ stále kladný, podle III. věty o funkcích spojitých.

Provedeme nyní úvahu určující, který z těchto případů nastává. Jestliže všechna tři čísla $A, B, C$ jsou rovna nule, nastává zřejmě případ 4-tý, kdy k rozhodnutí jest třeba přihlédnouti k dalším členům Taylorova rozvoje. Tím však se zde zabývati nebudeme. Učiňme tedy nejdříve předpoklad, že $A \neq 0$. Trojčlen uvedeme na tvar

$$\frac{(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + (AC - B^2)\,.\,\sin^2\varphi}{A}.$$

Jestliže $(AC - B^2)$ jest kladné číslo, je čitatel zlomku kladný pro každé $\varphi$. Protože čitatel ten jest *spojitá* funkce proměnné $\varphi$ s periodou $2\pi$, nabývá v intervalu $<0, \pi>$ kdesi svého absolutního minima $m$, které podle předpokladů musí býti také kladné. Znaménko celého zlomku jest tedy určováno znaménkem čísla $A$. Pro kladné $A$ nastává tudíž minimum, pro záporné maksimum. Jestliže $A \neq 0$, $(AC - B^2) < 0$, má zlomek různá znamení pro $\varphi = 0$ a pro $\varphi$, určené vztahem $\operatorname{cotg}\varphi = -\frac{B}{A}$. Není tedy ekstrému. Jestliže $A \neq 0$, $(AC - B^2) = 0$, nemůžeme rozhodnouti, neboť nastává případ čtvrtý.

Předpokládejme dále, že $A = 0$. Trojčlen se redukuje na výraz

$$\sin\varphi\,.\,\{2B\,.\cos\varphi + C\,.\sin\varphi\}$$

Jestliže $B \neq 0$, určíme úhel $0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$, tak, aby

$$|C\,.\sin\varphi_1| < |2B\,.\cos\varphi_1| \quad \text{čili} \quad |C\,.\operatorname{tg}\varphi_1| < |2B|.$$

Takový úhel lze vždy nalézti a potom má uvažovaný součin různá znamení pro $\varphi = \varphi_1$ a pro $\varphi = -\varphi_1$. Není ekstrému.

Jestliže $A = 0$, $B = 0$, redukuje se trojčlen na $C\,.\sin^2\varphi$, a máme opět případ čtvrtý, neboť výraz ten nemění sice znaménka, ale anuluje se pro $\varphi = 0, \pi$.

Celé vyšetřování shrneme do schematu

$$f'_x(a, b) = 0,\ f'_y(a, b) = 0$$

(rovnice určující $a, b$).

$$A = f''_{xx}(a, b), \qquad B = f''_{xy}(a, b), \qquad C = f''_{yy}(a, b).$$

| $AC - B^2 > 0$ | $AC - B^2 < 0$ | $AC - B^2 = 0$ |
|---|---|---|
| **$A < 0$, maksimum,** | **není ekstrému.** | **případ nerozhodný** |
| **$A > 0$, minimum,** | | **(semidefinitní).** |

**Cvičení.** 1. $z = x^3 + y^3 - 3xy + 1$. (Minimum $[1, 1]$.)

2. $z = x^4 + y^4 - x^2 + 2xy - y^2$. (Minimum $[1, -1]$ a $[-1, 1]$).

3. V pravoúhlých souřadnicích v prostoru vedena jest přímka

$$p \equiv y = a + Ax; \quad z = b + Bx, \quad (a \neq 0).$$

Jest určiti nejmenší vzdálenost přímky té od osy $z$. [Úsečka ta spojuje bod na přímce $p$ o souřadnicích $x_1, y_1, z_1$ a bod na ose $z$ o souřadnicích $0, 0, z_2$. Má býti minimem výraz $x^2_1 + y^2_1 + (z_1 - z_2)^2$, čili $f(x_1, z_2) = x^2_1 + (a + Ax_1)^2 + (b + Bx_1 - z_2)^2$.

Řešení jest kolmice na osu $z$, vedená z bodu o souřadnicích

$$\left(-\frac{aA}{1+A^2}, \frac{a}{1+A^2}, b - \frac{aAB}{1+A^2}\right)\Bigg].$$

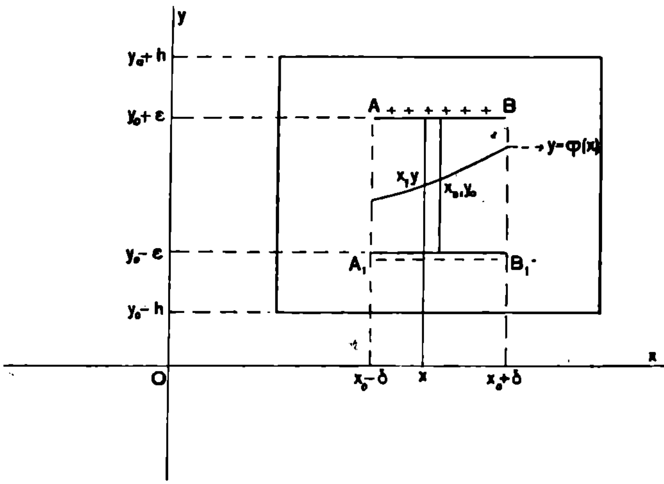
Dokažte logickou úvahou (bez počítání), že úsečka ta jest kolmá i k přímce $p$!

4. Trojúhelník jest dán v pravoúhlých souřadnicích svými vrcholy $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, $[x_3, y_3]$. Určiti bod tak, aby součet čtverců jeho vzdáleností od vrcholů trojúhelníka byl co nejmenší! (Těžiště trojúhelníka.) Totéž pro $n$-úhelník!

5. Dvě křivky v rovině $y = f(x)$, $y = g(x)$ nemají společného bodu. Spojíme-li bod $P_1$ na prvé křivce s bodem $P_2$ druhé křivky, může míti úsečka $P_1P_2$ ekstrém jen tam, kde spojnice ta jest společnou normálou obou křivek! Proveďte důkaz! Vyšetřte ekstrémy blíže za předpokladu, že $P_1P_2$ jest osou $y$ a tečna v bodě $P_1$ osou $x$! (Ekstrém nastává, jestliže $g''(0) - f''(0) > g(0) \,.\, g''(0) \,.\, f''(0)$, když $g(0) > 0$).

**54. Funkce implicitní a její derivace.** Budiž $z = f(x, y)$ funkce spojitá v nějakém intervalu roviny $x, y$. Klademe si otázku, kdy jest možno rozřešiti rovnici $f(x, y) = 0$ podle $y$ při libovolném $x$ v daném intervalu, to jest, nalézti takovou funkci $y = \varphi(x)$, která by aspoň v části intervalu splňovala identicky rovnici $f(x, \varphi(x)) = 0$. V některých případech takové řešení lze snadno nalézti, jako na př., když $x^2 + y^2 - 1 = 0$, jest řešení $y = +\sqrt{1 - x^2}$, nebo $y = -\sqrt{1 - x^2}$, pokud $-1 \leq x \leq 1$. Jindy zase jest řešení nemožné, jako na př. při $x^2 + y^2 = 0$. Zde jest možno namítnouti, že rovnice sice nemá reálného řešení, že však má řešení kompleksní $y = ix$. Jsou však známy rovnice, které nemají ani takového řešení, jako na př. $e^{y+x} = 0$. Obecně platnou odpověď na hořejší otázku nelze podati. Spokojíme se zde vytknutím některých postačujících znaků funkce $f(x, y)$, které zaručují eksistenci řešení. Zhruba jest možno pamatovati si heslo: Jestliže $f(x, y)$ jest rovno nule v *jednom* bodě $[x_0, y_0]$, pak lze očekávati, že rovnice $f(x, y) = 0$ má řešení $y = \varphi(x)$ definované v určitém okolí bodu $x_0$. Přesné podmínky, za nichž to nastane, jsou shrnuty ve větě:

*Nechť $f(x, y)$ jest spojitá v intervalu $x_0 - k \leqq x \leqq x_0 + k$, $y_0 - h \leqq y \leqq y_0 + h$. Ve středním bodě jeho $[x_0, y_0]$ nechť jest $f(x_0, y_0) = 0$ a mimo to $f(x_0, y_0 + \eta) > 0$, $f(x_0, y_0 - \eta) < 0$, pokud $0 < \eta \leqq h$.) Pak lze nalézti aspoň jednu funkci $y = \varphi(x)$, definovanou v určitém okolí bodu $x_0$ a spojitou v bodě $x_0$, která má vlastnosti $\varphi(x_0) = y_0$, $f(x, \varphi(x)) = 0$.*




Obr. 16.

Při důkazu užijeme obr. 16, který nám poslouží jako pomůcka paměti, nikoliv jako pomůcka věcná! Zvolme *pevně* číslo kladné $\varepsilon \leqq h$. Pak podle předpokladů $f(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0$, $f(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0$ a vzhledem k spojitosti funkce je $f(x, y)$ kladné na určité úsečce $\overline{AB}$, jdoucí bodem $[x_0, y_0 + \varepsilon]$ rovnoběžně k ose $x$ a záporné na jiné s ní rovnoběžné úsečce $\overline{A_1B_1}$, jdoucí bodem $[x_0, y_0 - \varepsilon]$. To jest pouhý důsledek prvé věty o spojitých funkcích v odst. *22*. Jest zřejmo, že obě tyto úsečky lze voliti stejně dlouhé se středem v bodech svrchu vytčených, a dále, že poloviční délku $\delta(\varepsilon)$ úseček těch lze považovati za funkci čísla $\varepsilon$.

Zvolme nyní $x$ *pevně* v int. $< x_0 - \delta, x_0 + \delta >$; funkce spojitá $f(x, y)$ *jedné* proměnné $y$ je záporná pro $y = y_0 - \varepsilon$ a kladná pro $y = y_0 + \varepsilon$. Podle druhé věty o spojitých funkcích (odst. 22) musí tedy eksistovati aspoň jedno číslo $y$, ležící mezi $y_0 - \varepsilon$ a $y_0 + \varepsilon$, pro které $f(x, y) = 0$. Jestliže takových $y$ jest více, volme při konečném jejich počtu to z nich, které má co nejmenší $| y - y_0 |$ a jsou-li dvě taková, volme to, pro které $y - y_0 > 0$ a označme je $y = \varphi(x)$.*) Funkční označení je oprávněné, neboť ke každému $x$ v intervalu $< x - \delta, x + \delta >$ přísluší zcela určité $y$. Jestliže zvolíme nyní jiné $\varepsilon$, obdržíme jiné $\delta(\varepsilon)$ a tedy také jiný definiční interval $< x - \delta, x + \delta >$ pro funkci $\varphi(x)$. Avšak ve společné části obou definičních intervalů je $\varphi(x)$ v prvém i druhém případě totožné, neboť čísla $y_1, y_2$ v předešlém důkazu se vyskytující jsou závislá pouze na $x$, nikoliv však na $\varepsilon$. Běží nyní o to, určiti nějaký obor, v němž funkce $\varphi(x)$ jest definována. Jestliže jest $d$ menší z čísel $k$ a $\delta(h)$, jest $\varphi(x)$ definováno aspoň v intervalu $< x_0 - d, x_0 + d >$.

Eksistence funkce $y = \varphi(x)$ v oboru $(x - d, x + d)$ jest tedy prokázána a zbývá jen se přesvědčiti, že funkce ta jest spojitá v bodě $x_0$. Důkaz toho jest již v předešlém obsažen, neboť, když $\varepsilon$ tam volené jest jakkoliv malé, vždy přísluší k němu takové $\delta(\varepsilon)$, že jest $| y - y_0 | < \varepsilon$, čili $| \varphi(x) - \varphi(x_0) | < \varepsilon$, pokud $| x - x_0 | < \delta(\varepsilon)$ a to jest definice spojitosti v bodě $x_0$. Není snad zbytečné připomenouti, že jest

*) Při nekonečném počtu takových $y$ dokážeme, že jedno z nich má nejmenší prostou hodnotu takto: Bez újmy všeobecnosti můžeme klásti na chvíli $y_0 = 0$. To značí jen posunutí počátku souřadnic. V intervalu $< -\varepsilon, 0 >$ nebo v intervalu $< 0, +\varepsilon >$ anebo v obou z nich leží aspoň jeden nulový bod funkce $f(x, y)$. Dejme tomu, že jest tomu tak v intervalu $< 0, +\varepsilon >$. Rozpůlíme interval ten a volíme k další úvaze onu polovinu, v níž leží aspoň jeden nulový bod. Mají-li obě poloviny tuto vlastnost, volíme »dolní« polovinu (s menšími $y$). Tuto polovinu opět rozpůlíme a opakujeme předešlou úvahu. Pokračujíce takto, získáme posloupnost intervalů do sebe zařazených, které definují číslo nikoliv záporné $y_1$. Tvrdíme nyní, že jest $f(x, y_1) = 0$. Bod $[x, y_1]$ jest totiž bodem zhuštění takových bodů $[x, y]$, které mají vlastnost $f(x, y) = 0$ a tedy vzhledem k spojitosti funkce musí býti také $f(x, y_1) = 0$. Z důkazu vyplývá, že žádné nikoliv záporné $y$ menší než $y_1$ nemůže hověti předešlé rovnici. Jestliže také v intervalu $< -\varepsilon, 0 >$ leží aspoň jeden nulový bod funkce $f(x, y)$, opakujeme předešlou úvahu s tím rozdílem, že při možnosti volby mezi polovinami volíme vždy horní polovinu. Získáme tak nikoliv kladné číslo $y_2$, hovící rovnici a mající tu vlastnost, že žádné $y \leqq 0$, které jest větší než $y_2$, nesplňuje rovnici $f(x, y) = 0$. Ono z čísel $y_1$ a $y_2$, které má menší prostou hodnotu, definuje $\varphi(x)$. Jestliže jest $| y_1 | = | y_2 |$, volíme $\varphi(x) = y_1$.

tím dokázána pouze spojitost v bodě $x_0$, nikoliv v bodech jiných!

Mimo právě sestrojenou funkci $y = \varphi(x)$, která vyhovuje rovnici $f(x, y) = 0$, mohou ovšem eksistovati ještě jiná řešení, jdoucí bodem $[x_0, y_0]$, jak jest patrno z příkladu prvého. Někdy však $y = \varphi(x)$ jest jediné řešení rovnice.

V praksi nejčastěji se vyskytující rovnice $f(x, y) = 0$, které mají jediné spojité řešení, jsou blíže určeny větou:

*Budiž $z = f(x, y)$ rovno nule v bodě $[x_0, y_0]$ a buďtež $f(x, y), f'_y(x, y)$ funkce spojité v nějakém okolí bodu toho. Dále nechť jest $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Pak eksistuje interval $< x_0 - \eta, x_0 + \eta >$, v němž má rovnice $f(x, y) = 0$ spojité řešení $y = \varphi(x)$, kdež $y_0 = \varphi(x_0)$ a to jediné řešení těchto vlastností.*

*Jestliže mimo to v okolí bodu $[x_0, y_0]$ eksistuje derivace $f'_x(x, y)$, má funkce $y = \varphi(x)$ derivaci $y' = -f'_x(x, y) : f'_y(x, y)$.*

Při důkazu můžeme předpokládati, že $f'_y(x_0, y_0) > 0$, neboť, kdyby bylo záporné, stačí uvažovati místo $f(x, y)$ funkci $-f(x, y)$. Pak jest vzhledem k spojitosti $f'_y(x, y) > 0$ v nějakém okolí bodu $[x_0, y_0]$. Při pevném $x$ tedy v tomto okolí $f(x, y)$ vzrůstá stále se vzrůstajícím $y$. To však znamená, že v okolí tom $f(x_0, y) > 0$ pro $y > y_0$ a $f(x_0, y) < 0$ pro $y < y_0$ a mimo to na každé rovnoběžce s osou $y$ může ležeti jen jediný nulový bod funkce $f(x, y)$. Podle předešlé věty eksistuje tedy jedno jediné spojité řešení $y = \varphi(x)$ v určitém okolí bodu $x_0$. Zbývá dokázati, že má derivaci a vypočísti ji. Je-li $\Delta x$ menší než nějaká konstanta, je

$$f(x_0 + \Delta x, \varphi(x_0 + \Delta x)) = 0, \quad f(x_0, \varphi(x_0)) = 0$$

a tedy také

$$\{f(x_0 + \Delta x, \varphi(x_0 + \Delta x)) - f(x_0, \varphi(x_0))\} : \Delta x = 0.$$

Zavedeme-li označení $\varphi(x_0 + \Delta x) = y_0 + \Delta y$ ($\Delta y \to 0$, když $\Delta x \to 0$), lze předešlou rovnici psáti ve tvaru

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} + \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)}{\Delta x} = 0.$$

Podle věty o střední hodnotě jest čitatel druhého sčítance roven $f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \Theta \Delta y) \,.\, \Delta y$ a je tedy

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} : f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \Theta \Delta y).$$

Když nyní $\Delta x \to 0$, pak také $\Delta y \to 0$; dělenec pravé strany má pak limitu $f'_x(x_0, y_0)$ a dělitel má limitu $f'_y(x_0, y_0) > 0$. Má tedy také levá strana poslední rovnice touž limitu, jinak řečeno, funkce $\varphi(x)$ má v bodě $x_0$ derivaci $\varphi'(x_0)$. Úvaha právě vykonaná platí nejen v bodě $[x_0, y_0]$, nýbrž i v každém jiném bodě křivky $y = \varphi(x)$. Jest tedy pro všechny body této křivky

$$y' = \varphi'(x) = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)},$$

pokud ovšem $f'_y(x, y) \neq 0$. Při tom na pravé straně jest klásti $y = \varphi(x)$.

*Příklad 1.* $f(x, y) = y^3 - y^2x - yx^2 + x^3$. Funkce se anuluje v bodě $[0, 0]$ a mimo to jest $f(0, y) \gtrless 0$, pokud $y \gtrless 0$. Bodem $[0, 0]$ procházejí zřejmě tato dvě spojitá řešení $y = +x$, $y = -x$. Mimo ně jsou tu ještě další dvě spojitá řešení $y = |x|$ a $y = -|x|$. Prvé z nich jest řešením $y = \varphi(x)$ z obecné věty. Dále eksistuje nekonečně mnoho jiných řešení spojitých v bodě $[0, 0]$ na př. $y = x$ pro racionální $x$ a $y = -x$ pro iracionální $x$. Řešení to jest ovšem v každém jiném bodě nespojité.

*Příklad 2.* Algebraická funkce (křivka) jest definována rovnicí

$$f(x, y) = a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_n(x) = 0,$$

kdež $a_k(x)$ jsou polynomy v proměnné $x$. Jestliže rovnici té vyhovují dvě reálná čísla $x_0, y_0$, a je-li při tom $f'_y(x_0, y_0) = ny_0^{n-1} \,.\, a_0(x_0) + (n-1)y_0^{n-2} \,.\, a_1(x_0) + \ldots + a_{n-1}(x_0) \neq 0$, p[illegible] bodem $[x_0, y_0]$ jediné řešení $y = \varphi(x)$ a bodu tomu [illegible] *regulární* bod křivky. Derivace funkce $\varphi(x)$ (směrnice tečny) jest určena obecným vztahem $y' = -f'_x : f'_y$ (viz též odst. 30). Bod je regulární, když sice $f'_y(x_0, y_0) = 0$, avšak $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, neboť pak stačí vyměniti označení os souřadných, abychom došli k předešlému případu. Bod $[x_0, y_0]$ není regulární, když v něm jest současně $f'_x = 0$, a $f'_y = 0$; bodu takovému říkáme *singulární*.

**Cvičení.** 1. Dokažte, že rovnice $y - x \,.\, \sin y - M = 0$ má jediné a spojité řešení procházející bodem $[0, M]$! Vypočtěte jeho derivaci!

2. Jestliže rovnice $f(x, y) = 0$ má singulární bod $[x_0, y_0]$ a je-li v bodě tom $AC - B^2 > 0$ (viz odst. 52), jest bod ten isolovaným bodem nulovým (jako na př. $[0, 0]$ v rovnici $x^2 + y^2 = 0$), je-li však $AC - B^2 < 0$, má rovnice aspoň jedno řešení jdoucí bodem tím. Dokažte tato tvrzení, opírajíce se o úvahy odstavce 53!

Dodatek I.

# NÁSTIN TEORIE ČÍSEL REÁLNÝCH.

**55. Spořádanost čísel reálných a věty o limitě.** Nebude zde podána do všech podrobností vypracovaná teorie čísel reálných. V tom ohledu odkazuji na př. na knihu Loewyho nebo Perronovu, které jsou citovány v odst. prvém. Zde doplníme pouze důkazy, že čísla reálná, jak jsme je definovali v odst. prvém a druhém, splňují tytéž postuláty $(A, B, C, D, E)$, jako čísla racionální.

Své úvahy navážeme na odst. první a druhý až po definici limity včetně. Čtenář učiní dobře, když si tuto část znovu přečte. Čísla reálná tedy splňují postuláty spořádanosti $(A)$ a definice limity založená pouze na těchto postulátech (tedy nikoliv na odčítání čísel) zní: Posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots$ má limitu a to jednu jedinou, jen když v ní eksistují totožné nebo téměř totožné úseky definitivní každého řádu. Limita ta jest reálné číslo určené definitivními úseky. Z této definice plynou ihned věty:

*I. Jestliže jest* $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, *jest* $\lim(-a_n) = -a$.

*II. Jestliže jest* $\lim a_n = a$ *a je-li* $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k \ldots$ *libovolná posloupnost celistvých kladných čísel, jest* $\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = a$. *Stručně říkáme, že posloupnost vybraná z členů posloupnosti konvergentní má tutéž limitu.*

Obě tyto věty jsou pouhé důsledky definice. Dokážeme ještě další dvě věty o limitách, které s předešlými tvoří základ všech úvah dalších.

*III. Jestliže dvě posloupnosti* $a_1, a_2, a_3, \ldots$; $b_1, b_2, b_3 \ldots$ *mají členy o konečném počtu cifer a jestliže jest* $\lim a_n = a$, $\lim (b_n - a_n) = 0$, *pak i druhá posloupnost jest konvergentní a jest* $\lim b_n = a$. *Také obráceně, je-li* $\lim a_n = \lim b_n$, *jest* $\lim (b_n - a_n) = 0$.

*IV. Každá posloupnost monotoní a ohraničená má limitu.*

Při důkazu věty III nesmíme se odvolati na odst. 4, větu d, neboť tam jsme užívali již sčítání a odčítání čísel *reálných,* které zde chceme teprve definovati, a to právě na základě věty III. Proto musíme provésti důkaz nový, opřený pouze o počítání čísly s konečným počtem cifer (a tedy racionálních) a o definici limity.

Definitivní úseky posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ všech řádů mohou býti od nějakého indeksu počínaje buď *totožné* nebo jen téměř totožné. Důkaz rozdělíme na čtyři případy, týkající se prvé možnosti a na případ pátý, týkající se možnosti druhé.

*Případ 1.* Definitivní úseky posloupnosti $a_1, a_2, \ldots$ nechť jsou totožné a od jistého řádu počínaje končí samými devítkami. (Na př. $35{\cdot}69 = a_7^2 = a_8^2 = a_9^2 = \ldots, 35{\cdot}699 = a_{11}^3 = a_{12}^3 = a_{13}^3 = \ldots, 35{\cdot}6999 = a_{20}^4 = a_{21}^4 = a_{22}^4 = \ldots$ atd. Při tom značíme symbolem $a_n^k$ úsek řádu $k$-tého *čísla* $a_n$). Zvolme řád $k$ tak veliký, že definitivní úseky toho řádu končí již devítkou pro všechna $n$ větší než nějaké číslo $N(k)$. Toto číslo $N(k)$ volme tak veliké, aby bylo pro taková $n$ zároveň $b_n - a_n = \varepsilon_n < 10^{-k}$. Potom obsahují také čísla $a_n$ na $k$-tém desetinném místě devítku a číslo $b_n = a_n + \varepsilon_n$ má zřejmě úsek řádu $(k-1)$-ho buď $b_n^{k-1} = a_n^{k-1}$ nebo $b_n^{k-1} = a_n^{k-1} + 10^{-k+1}$ pro $n > N(k)$. Posloupnost $b_1, b_2 \ldots$ má tedy definitivní úseky totožné nebo téměř totožné jako posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ Jest tedy $\lim b_n = a$.

*Případ 2.* Definitivní úseky posloupnosti $a_1, a_2, \ldots$ nechť jsou totožné a končí od určitého řádu samými nulami. Zcela stejným postupem, jako v případě 1. vyjde zde $b_n^{k-1} = a_n^{k-1}$ nebo $b_n^{k-1} = a_n^{k-1} - 10^{-k+1}$, a tedy opět $\lim b_n = a$.

*Případ 3.* Mezi definitivními úseky posloupnosti $a_1, a_2, \ldots$ nechť jest nekonečný počet čísel končících cifrou jinou než 9 nebo 0. Budiž na př. $a_n^k$ takový úsek pro $n > N(k)$. Pak také příslušná čísla $a_n$ mají na $k$-tém místě onu cifru různou od 9 a 0. Je-li mimo to $N(k)$ tak voleno, aby $\varepsilon_n < 10^{-k}$ pro $n > N(k)$, shoduje se číslo $b_n = a_n + \varepsilon_n$ s $a_n$ v úseku řádu $(k-1)$-ho, to jest $b_n^{k-1} = a_n^{k-1}$ pro $n > N(k)$. Protože $k$ mohu voliti libovolně veliké, má posloupnost $b_1, b_2, \ldots$ tytéž definitivní úseky všech řádů jako posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ a tedy jest $\lim b_n = a$.

*Případ 4.* Definitivní úseky posloupnosti $a_1, a_2, \ldots$ nechť od určitého řádu počínaje končí buď devítkou nebo nulou a to tak, že po každé devítce (třeba několikrát opakované) objeví se opět nula a po každé nule zase devítka. (Na př. $3{\cdot}40 = a_6^2 = a_7^2 = \ldots; 3{\cdot}409 = a_{10}^3 = a_{11}^3 = a_{12}^3 = \ldots; 3{\cdot}4099 = a_{15}^4 = a_{16}^4 = a_{17}^4 = \ldots; 3{\cdot}40990 = a_{21}^5 = a_{22}^5 = a_{23}^5 = \ldots$) Vybéřeme definitivní úsek $a_n^k$ končící *devítkami* a to tak, že cifra na místě $K < k$ jest nula a cifry na místech $K + 1$,

$K+2, \ldots k$ jsou *devítky*. Zvolíme $N(k)$ tak veliké, že jednak $\varepsilon_n < 10^{-k}$ a za druhé $a_n^k$ jest definitivní pro $n > N(k)$. Pak čísla $a_n$ mají až po řád $k$-tý týž ciferný obraz jako $a_n^k$ a čísla $b_n = a_n + \varepsilon_n$ mají nutně vlastnost $b_n^{K-1} = a_n^{K-1}$. Protože $K$ lze zvoliti libovolně veliké, jest opět $\lim b_n = a$.

*Případ 5.* Nechť má posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ úseky jen téměř totožné (a tedy její limita $a$ jest číslo s periodou 9 od určitého řádu počínaje). Vybéřeme mezi členy posloupnosti ty, jimž přísluší definitivní úseky končící samými devítkami. Tato vybraná posloupnost jest typu projednaného v případě 1. Zbývající členy jsou pak typu 2. Jest tedy opět $\lim b_n = a$

Pět probraných případů vyčerpává všechny možnosti a tedy věta III jest dokázána, neboť její obrácení jest samozřejmé.

Při důkazu věty IV nemůžeme zase v celém rozsahu odvolati se na odst. 5, a to z důvodů již vytčených. Z důkazů tam uvedených převezmeme beze změny jen větu: Každá shora ohraničená posloupnost čísel kladných a neklesajících má limitu. To můžeme udělati, protože důkaz ten jest tam proveden pouze pomocí spořádanosti čísel reálných (to jest pojmů »větší než« a »menší než«) a pomocí definice limity. Důkaz platí také tenkráte, když několik počátečních členů posloupnosti jest záporných a další nezáporné. Zcela stejně provede se důkaz, že posloupnost čísel kladných nestoupajících a zdola ohraničených má limitu. Celý rozdíl proti předešlému jest pouze ten, že místo úseků přibývajících vystoupí úseky ubývající. Mějme dále posloupnost čísel neklesajících vesměs záporných a shora ohraničených. Posloupnost čísel k nim souměrných je tedy nestoupající vesměs kladná a zdola ohraničená; má tedy limitu. Podle věty I má tedy limitu také posloupnost původní. Podobně dokážeme, že také posloupnost čísel záporných nestoupajících a zdola ohraničených má limitu, neboť čísla s opačnými znaménky tvoří posloupnost čísel kladných neklesajících a shora ohraničených. Konečně jest zřejmo, že posloupnost monotoní nemůže míti současně nekonečně mnoho členů záporných i kladných. Kdyby tomu tak bylo, musily by *všechny* členy jednoho znaménka v pořadí předcházeti členům s druhým znamením a tedy indeksy všech těchto členů by musily býti větší než libovolné číslo, což není možné. Věta IV jest tedy dokázána.

Po této přípravě můžeme přikročiti k teorii základních početních úkonů.

**56. Sčítání a odčítání čísel reálných.** Reálná čísla $a$, $b$ nechť mají úseky $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \ldots$; $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n \ldots$ Definujme zvětšené úseky vztahem $a_n^+ = a_n + 2 . 10^{-n}$, $b_n^+ = b_n + + 2 . 10^{-n}$. Ať číslo $a$ jest kladné, záporné nebo nula, vždy posloupnost $a_1^+, a_2^+, a_3^+, \ldots$ jest stále klesající a zdola ohraničená, neboť $a_{n+1}^+ - a_n^+ = (a_{n+1} - a_n) - 2 . (10^{-n} - 10^{-n-1}) = = (a_{n+1} - a_n) - 18 . 10^{-n-1}$. Je-li $a$ kladné, jest $(a_{n+1} - a_n) \leq \leq 9 . 10^{-n-1}$, je-li $a$ záporné, jest dokonce $(a_{n+1} - a_n) \leqq 0$; vždy jest tedy $(a_{n+1}^+ - a_n^+) < 0$, čili posloupnost jest klesající. Jest také zdola ohraničená, neboť $a_n^+ > a_n > a_0 - 1$. Její limita podle věty III. jest rovna $a$.

Utvořme posloupnost $s_1 = a_1^+ + b_1^+$, $s_2 = a_2^+ + b_2^+$, $s_3 = a_3^+ + + b_3^+, \ldots$ která podle předešlého jest klesající a zdola ohraničená. Podle věty IV má tedy určitou limitu $s$. Posloupnost $(a_1 + b_1), (a_2 + b_2), (a_3 + b_3), \ldots$ má pak touž limitu $s$, neboť $(a_n^+ + b_n^+) - (a_n + b_n) = 4 . 10^{-n}$, což odpovídá podmínkám věty III.

Definice sčítání:

*Součet dvou reálných čísel $a$, $b$ jest limita $s$ posloupnosti $(a_1 + b_1), (a_2 + b_2), (a_3 + b_3), \ldots$ Píšeme $s = a + b$.*

Při této definici platí zákon *komutativní*, neboť $\lim (a_n + + b_n) = \lim (b_n + a_n)$ a tedy $a + b = b + a$.

Zákon *asociativní* jest rovněž splněn. Jsou-li totiž $a$, $b$, $c$ reálná čísla, jest $a + (b + c) = (a + b) + c$, jak plyne z této úvahy. Označme $b + c = d$. Podle definice sčítání jest $a + d = \lim (a_n^+ + d_n^+)$. Dále posloupnost $(a_n^+ + b_n^+ + c_n^+)$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ jest klesající zdola ohraničená a má tedy limitu, která podle věty III jest rovna $a + d$, neboť $\lim \{(a_n^+ + b_n^+ + c_n^+) - (a_n^+ + + d_n^+)\} = \lim (b_n^+ + c_n^+ - d_n^+) = 0$. Stejným postupem dokážeme při označení $a + b = e$, že také posloupnosti $(a_n^+ + b_n^+ + c_n^+)$ a $(e_n^+ + c_n^+)$ mají identickou limitu a tedy i posloupnosti $(a_n^+ + + d_n^+)$ a $(e_n^+ + c_n^+)$ mají touž limitu, s. e. d.

Číslo nula $+ 0{\cdot}000 \ldots = - 0{\cdot}000 \ldots$ jest *neutrální element* při sčítání, neboť $a + 0 = a$. Žádné jiné číslo nemá této vlastnosti, neboť obsahuje-li číslo $b$ aspoň jednu cifru od nuly různou, změní se v definitivních cifrách součtu $(a + b)$ aspoň jedna cifra v porovnání s $a$.

Rovnice $a + x = 0$ má řešení $x = (-a)$ a toto řešení jest jediné. Neboť je-li $b$ nějaké řešení rovnice, to jest $a + b = 0$, pak také $(-a) + (a + b) = (-a) + 0$. Podle postulátů (V) a (VI) jest tedy $((-a) + a) + b = -a$, čili $0 + b = -a$ a tedy $b = -a$.

Odčítání dvou čísel reálných definujeme vztahem $(a - b) = a + (-b)$.

Zákon monotonie (VII) jest rovněž splněn, neboť z nerovnosti $a > b$ plyne $a - b = \varepsilon > 0$, a tedy, je-li $c$ reálné číslo $(a + c) - (b + c) = \varepsilon$, čili $(a + c) > (b + c)$.

Všechny postuláty skupiny $B$ jsou tedy pro čísla reálná splněny.

**57. Násobení čísel reálných.** Z úseků $n$-tého řádu $a_n$ a $b_n$ dvou reálných čísel $a$ a $b$ utvořme násobením posloupnost $a_n b_n$ ($n = 1, 2, \ldots$). Tato posloupnost jest při stejných znameních čísel $a$ a $b$ neklesající, při různých znameních nestoupající a v obou případech ohraničená; má tedy vždy limitu.

*Definice násobení. Součin dvou reálných čísel $a$, $b$ jest limita $s$ posloupnosti $a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \ldots$* Píšeme $s = ab$.

Zákon komutativní jest splněn, protože $a_n b_n = b_n a_n$ a tedy také $\lim a_n b_n = \lim b_n a_n$. Zákon asociativní $a(bc) = (ab)c$ se dokáže obdobně jako při sčítání. Označíme $bc = d$, $ab = e$. Posloupnosti $a_n b_n c_n$ a $a_n d_n$ mají obě limitu, posloupnost rozdílů $a_n b_n c_n - a_n d_n = a_n (b_n c_n - d_n)$ má limitu rovnou nule, jak vyplývá z úvahy, opřené o to, že $b_n c_n$ a $d_n$ mají touž limitu. Číslo $|a_n|$ jest menší než $|a_0| + 1$ a to jest menší než nějaká mocnina desíti $10^r$. Dále jest podle věty III pro všechna $n$ větší než nějaké $N(k)$: $|b_n c_n - d_n| < 10^{-k-r}$, ať $k$ jest jakkoli zvolené kladné číslo celistvé. Celkem jest tedy číslo o konečném počtu cifer $|a_n (b_n c_n - d_n)| < 10^{-k}$ pro $n > N(k)$ a tedy $\lim a_n (b_n c_n - d_n) = 0$. Podle věty III jest tedy $\lim a_n b_n c_n = a d$. Podobně dokážeme, že také $\lim a_n b_n c_n = ec$ a tedy $ad = ec$, q. e. d. Zákon distributivní $a(b + c) = ab + ac$ dokážeme takto. Označme $b + c = d$, $ab = e$, $ac = g$. Posloupnosti $a_n d_n$ a $a_n b_n + a_n c_n$ mají touž limitu, neboť $\lim \{a_n d_n - (a_n b_n + a_n c_n)\} = \lim a_n \{d_n - (b_n + c_n)\} = 0$. Jest tedy $ad = \lim (a_n b_n + a_n c_n)$. Dále jest podle definice sčítání $e + g = \lim (e_n + g_n)$. Avšak $\lim \{a_n b_n + a_n c_n - (e_n + g_n)\} = \lim \{(a_n b_n - e_n) + (a_n c_n - g_n)\} = 0$*) a tedy podle věty III $e + g = ad$ s. e. d.

---

*) Pro libovolné $k$ a pro $n > N(k)$ bude $|a_n b_n - e_n| < 10^{-k}$, $|a_n c_n - g_n| < 10^{-k}$, a tedy, protože se jedná o čísla s konečným počtem cifer, $|(a_n b_n - e_n) + (a_n c_n - g_n)| < 2 \cdot 10^{-k}$.

Celkem jsme dokázali platnost postulátů skupiny $C$ označených čísly IX, X, XI, XV. Abychom mohli dokázati i zbývající, musíme napřed definovati vztah mezi čísly racionálními a reálnými.

**58. Čísla racionální a reálná.** Ke každému racionálnímu číslu kladnému $p/q$ přiřadíme určité číslo reálné takto. Zvolíme-li libovolné celistvé kladné $n$, lze vždy určiti celistvé kladné $A_n$ tak, že jest $A_n/10^n \leq p/q < (A_n + 1)/10^n$. Číslo racionální $10^n p/q$ jest totiž obsaženo mezi dvěma za sebou jdoucími kladnými čísly celistvými $A_n$ a $(A_n + 1)$, takže $A_n \leq \leq 10^n p/q < (A_n + 1)$, z čehož dělením $10^n$ plyne hledaná nerovnina. Číslo $A_n$ vypočteme tím, že zjistíme, kolikrát až na kladný (nebo nulový) zbytek menší než $q$ jest číslo $q$ obsaženo v čísle $10^n\,p$. To provedeme podle obyčejných pravidel pro dělení čísel celých. Z toho vyplývá okamžitě, že číslo $A_{n+1}$ vznikne z čísla $A_n$ tím, že k tomuto připojíme napravo další cifru. Desetinná čísla $A_1 : 10$, $A_2 : 10^2$, $A_3 : 10^3 \ldots$ tvoří tedy úseky nějakého *reálného* čísla $a$, které budeme považovati za *rovné* číslu racionálnímu $p/q$. Při výpočtu čísla $A_{n+1}$ závisí patrně poslední cifra jeho na velikosti zbytku při dělení $10^n p : q$, na velikosti čísla $q$ a na ničem jiném. Protože pak zbytků menších než $q$ jest pouze $q$ na počet — totiž $0, 1, 2, 3, \ldots q - 1$ — nastane při výpočtu čísel $A_1, A_2, A_3, \ldots$ jedna ze dvou možností. Buď po určitém počtu kroků dojdeme ke zbytku 0 a pak reálné číslo $a$ má jen konečný počet cifer od nuly různých. Nebo zbytek 0 se nikdy nevyskytne a potom ovšem jeden ze zbytků *první* musí se objeviti při pokračujícím dělení *po druhé*. Z toho plyne, že v tomto případě číslo reálné $a$ rovné číslu racionálnímu $p/q$ jest buď ryze periodické nebo periodické s předčíslím (na př. $234 : 999 = 0\cdot\dot{2}3\dot{4}$ nebo $55 : 30 = 1\cdot8\dot{3}$). Obráceně také každé reálné číslo s periodou jest rovno číslu racionálnímu; neboť jestliže reálné číslo $a$ má předčíslí o $k$ cifrách (za desetinnou tečkou) a periodu o $n$ cifrách, pak rozdíl $a \,.\, 10^{n+k} - a \,.\, 10^k = B$ jest číslo celistvé, kteréžto rovnici pro $a$ hoví číslo racionální $B : 10^k(10^n - 1)$; a to, jak snadno nahlédneme, jest rovné s reálným číslem $a$. Podobně se definuje rovnost racionálních čísel záporných a příslušných čísel reálných.

Z rovnosti mezi čísly racionálními a určitými reálnými, kterou jsme právě definovali, plyne, že každý výpočet, vztahující se k číslům racionálním, lze provésti dvojím způsobem:

Buď podle obyčejných pravidel pro čísla racionální, nebo tak, že je nahradíme nejdříve příslušnými čísly reálnými a pak použijeme pravidel pro tato čísla platných. Jenom v tom případě, že výsledek při obou způsobech počtu je totožný, lze tvrditi, že čísla reálná tvoří účelné rozšíření pojmu čísel racionálních. Totožnost obou výsledků bude zaručena, jestliže dokážeme, že součet, součin a podíl dvou kladných čísel racionálních jest roven součtu, součinu a podílu příslušných čísel reálných, neboť každý jiný výpočet lze redukovati na úkony vytčené.

Nechť jsou $p_1 : q_1$ a $p_2 : q_2$ dvě racionální čísla, k nimž přísluší čísla reálná $a$, $b$. Celistvá čísla $A_n, B_n, C_n, D_{2n}$, definovaná vztahy

$$\frac{A_n}{10^n} \leq \frac{p_1}{q_1} < \frac{A_n+1}{10^n}, \quad \frac{B_n}{10^n} \leq \frac{p_2}{q_2} < \frac{B_n+1}{10^n},$$

$$\frac{C_n}{10^n} \leq \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} < \frac{C_n+1}{10^n}, \quad \frac{D_{2n}}{10^{2n}} \leq \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2} < \frac{D_{2n}+1}{10^{2n}},$$

jsou jednoznačně stanovena, je-li $n$ známo. Z prvých dvou vztahů plyne

$$\frac{A_n+B_n}{10^n} \leq \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} < \frac{A_n+B_n+2}{10^n}$$

a tedy vzhledem k třetímu vztahu $C_n$ jest rovno buď $(A_n+B_n)$ nebo $(A_n+B_n+1)$. Protože posloupnosti $(A_n+B_n):10^n$ a $(A_n+B_n+1):10^n$ mají touž limitu $(a+b)$, má touž limitu také posloupnost $C_n : 10^n$. To znamená: Reálné číslo příslušné k součtu dvou čísel racionálních jest rovno součtu reálných čísel příslušných k jednotlivým racionálním sčítancům. Z toho plyne mimo jiné, že také postuláty $(A)$ jsou zachovány, neboť nerovnost $p_1 : q_1 > p_2 : q_2$ jest provázena nerovností $a > b$.

Analogické relace obdržíme i pro součin čísel racionálních a k nim příslušných čísel reálných, neboť

$$\frac{A_n B_n}{10^{2n}} \leq \frac{p_1 q_1}{p_2 q_2} < \frac{A_n B_n + A_n + B_n + 1}{10^{2n}}$$

a tedy

$$A_n B_n \leq D_{2n} < A_n B_n + A_n + B_n + 1.$$

Protože

$$A_n B_n : 10^{2n} \quad \text{a} \quad (A_n B_n + A_n + B_n + 1) : 10^{2n}$$

mají touž limitu $a \,.\, b$, má touž limitu i posloupnost $D_{2n} : 10^{2n}$.

Důkaz pro dělení číslem racionálním a příslušným reálným provedeme až v odstavci příštím.

**59. Dělení číslem reálným.** Nyní již můžeme dokázati, že rovnice $a \, . \, x = 1$ má reálný kořen, jestliže $a$ jest číslo reálné, od nuly různé. Úseky jeho $a_1, a_2, a_3 \ldots$ jsou čísla racionální. Je-li mezi nimi několik prvních rovno nule, vypusťme je z úvahy a značme tedy symbolem $a_1$ první, od nuly různý úsek. Utvořme posloupnost převratných hodnot $1 : a_1$, $1 : a_2$, $1 : a_3, \ldots$ Jsou to opět čísla racionální, kterým podle předešlého jsou rovna určitá čísla reálná buď periodická nebo o konečném počtu cifer. Tato posloupnost má limitu, neboť při kladném $a$ jest nestoupající, při záporném $a$ jest neklesající a v obou případech ohraničená. Tuto limitu nazveme $b$ a tvrdíme, že jest $a \, . \, b = 1$. Posloupnost reálných čísel $1 : a_1$, $1 : a_2, \ldots$ má od určitého indeksu $n(k)$ počínaje úseky řádu $k$-tého totožné anebo téměř totožné s úsekem téhož řádu při čísle $b$. Jest tedy

$$\left| \frac{1}{a_n} - b_n \right| < \frac{2}{10^k} \text{ a z toho } |1 - a_n b_n| < 2 \, . \, 10^{-k} \, . \, |a_n| .$$

Pravá strana nerovnosti může býti učiněna menší než libovolně malé číslo kladné vhodnou volbou čísla $k$. Podle věty III mají tedy posloupnosti $1, 1, 1, \ldots$ a $a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \ldots$ totožnou limitu, to jest $\lim a_n b_n = ab = 1$. Podle analogie čísel racionálních píšeme $b = 1/a$. Toto číslo jest jediným řešením rovnice $a \, . \, x = 1$, neboť z ní plyne $ax \, . \, b = 1 \, . \, b$, $(ab)x = b$, $1 \, . \, x = b$.

Dělení $a : b = a/b$ definujeme jako součin $a \, . \, 1/b$.

Podle definice násobení číslo 1 vyhovuje rovnici $a \, . \, 1 = a$, ať již je volíme ve tvaru $1 = 1{\cdot}\dot{0}$ či ve tvaru ekvivalentním $1 = 0{\cdot}\dot{9}$. Jest to jediné číslo té vlastnosti, neboť, když $x$ hoví rovnici $a \, . \, x = a$, jest také $ax \, . \, \frac{1}{a} = a \, . \, \frac{1}{a}$ a tedy $x = 1$, pokud ovšem $a \neq 0$.

Je-li $a > b$, $c > 0$, jest $a - b = e$, $e > 0$ a tedy $a \, . \, c = (b + e) \, . \, c = b \, . \, c + e \, . \, c > b \, . \, c$.

Postulát Archimedův jest rovněž splněn, neboť $a$ jest menší než celistvé číslo $(a_0 + 2)$.

Postuláty XII, XIII, XIV a XVI ze skupiny $C$ a $E$ jsou tedy splněny.

Zbývá doplniti důkaz z odstavce předešlého, že při dělení číslem racionálním vyjde týž výsledek jako při dělení jeho reálným ekvivalentem. K racionálním číslům $r : s$, $p : q$, $q : p$

nechť příslušejí čísla reálná $c, a, b$. Podle předešlého odst. jest

$$\frac{r}{s} : \frac{p}{q} = \frac{r}{s} \cdot \frac{q}{p} = c \cdot b.$$

Máme dokázati, že tento výsledek jest totožný s výrazem $c : a = c \cdot \frac{1}{a}$. Celkem tedy máme dokázati, že $c \cdot \frac{1}{a} = c \cdot b$, čili $1/a = b$.

Budiž

$$\frac{A_n}{10^n} \leqq \frac{p}{q} < \frac{A_n + 1}{10^n}, \quad \frac{B_n}{10^n} \leqq \frac{q}{p} < \frac{B_n + 1}{10^n},$$

a tedy

$$\frac{A_n B_n}{10^{2n}} \leqq 1 < \frac{A_n B_n + A_n + B_n + 1}{10^{2n}},$$

čili

$$0 \leqq 1 - \frac{A_n B_n}{10^{2n}} < \frac{A_n + B_n + 1}{10^{2n}} = \varepsilon_n.$$

Zvolím-li $n$ dosti veliké, je $\varepsilon_n$ menší než libovolně malé kladné číslo a tedy $\lim (A_n B_n / 10^{2n}) = \lim (a_n \cdot b_n) = a \cdot b = 1$, čili $b = 1/a$.

Čísla reálná splňují tedy všechny postuláty nutné k vybudování aritmetiky a jsou zároveň účelným rozšířením pojmu čísel racionálních.

## Dodatek II.

# FUNKCE GONIOMETRICKÉ.

**60. Definice a nástin postupu.** Užívali jsme při svých úvahách funkcí goniometrických $\sin x$, $\cos x$ atd., opírajíce se při tom o definice jejich, založené na geometrickém názoru. Protože jsme tohoto nepřesného způsobu definice nikde jinde neužili, jest nutno, abychom se oprostili i od tohoto zbytku závislosti na názoru.

Budeme postupovati takto. Funkce definované mocninými řadami, konvergentními pro každé reálné $x$ (1)

$$s(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

$$c(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \qquad (1)$$

splňují čtyři základní vztahy

$$
\begin{aligned}
&\text{I.} && s(0)=0, \quad c(0)=1,\\
&\text{II.} && \lim_{x\to 0}\frac{s(x)}{x}=1,\\
&\text{III.} && s(-x)=-s(x), \quad c(-x)=c(x),\\
&\text{IV.} && s(x+y)=s(x)c(y)+s(y)c(x),\\
& && c(x+y)=c(x)c(y)-s(x)s(y).
\end{aligned}
$$

Až provedeme důkaz, že tomu tak vskutku jest, dokážeme dále, že vztahům (I—IV) hoví pro každé reálné $x$ *jenom* funkce (1) a *žádné* jiné. Protože pak víme, že vztahům (I—IV) hoví také geometricky definované funkce $\sin x$ a $\cos x$, prohlásíme vztahy (1) za aritmetickou definici základních funkcí goniometrických.

**61. Vztahy (I—III) a derivace funkcí** $s(x)$, $c(x)$. Řady pro $s(x)$ a $c(x)$ jsou absolutně konvergentní a splňují zřejmě vztahy I. a III. Mimo to jest

$$\frac{s(x)}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\dots$$

a tedy podle věty o řadách se střídavými znaménky (odst. 14) pro $0<|x|<1$ jest jistě

$$1-\frac{x^2}{6}<\frac{s(x)}{x}<1$$

a tedy $\lim\limits_{x\to 0} s(x):x=1$, což jest vztah II.

Dále dokážeme, že $s(x)$ i $c(x)$ mají pro každé reálné $x$ derivaci a že tedy jsou všude spojité.

Protože všechny uvažované řady jsou absolutně konvergentní, jest ($n$ značí liché číslo)

$$\frac{s(x+h)-s(x)}{h}-c(x)=\left(\frac{(x+h)-x}{h}-1\right)-\frac{1}{3!}\left\{\frac{(x+h)^3-x^3}{h}-\right.$$
$$\left.-3x^2\right\}+\frac{1}{5!}\left\{\frac{(x+h)^5-x^5}{h}-5x^4\right\}-\dots\pm\frac{1}{n!}\left\{\frac{(x+h)^n-x^n}{h}-\right.$$
$$\left.-nx^{n-1}\right\}\pm\dots$$

Na obecný člen užijme věty o střední hodnotě

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=n\,.\,\xi^{n-1},\quad \xi=x+\Theta_1 h,\quad 0<\Theta_1<1$$

a tedy znovu podle věty o střední hodnotě pro $n > 1$

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - n x^{n-1} = n(\xi^{n-1} - x^{n-1}) = n(n-1)(\xi - x)\eta^{n-2},$$

$$= \Theta_1 h n(n-1) . \eta^{n-2},$$

$$\eta = x + \Theta . \Theta_1 h = x + \Theta_2 h, \qquad 0 < \Theta_2 < 1.$$

Z toho plyne, že

$$\left| \frac{(x+h)^n - x^n}{h} - n x^{n-1} \right| < \Theta_1 |h| n(n-1) . x_0^{n-2},$$

kdež $x_0$ jest *kladné* číslo volené tak, že $x_0 > |\eta|$, na př. $x_0 = |x| + 1$, když se omezíme na hodnoty $|h| < 1$. Jest tedy

$$\left| \frac{s(x+h) - s(x)}{h} - c(x) \right| < |h| \left\{ x_0 + \frac{x_0^3}{3!} + \frac{x_0^5}{5!} + \ldots \right\} < |h| . e^{x_0},$$

čili

$$\lim_{h \to 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} = c(x), \quad \text{to jest} \quad s'(x) = c(x).$$

Způsobem zcela obdobným dokáže se $c'(x) = -s(x)$. Z toho plyne dále, že obě funkce mají všechny derivace a že jest

$$s''(x) = c'(x) = -s(x), \; s'''(x) = -s'(x) = -c(x), \; s^{IV}(x) = s(x), \ldots$$
$$c''(x) = -s'(x) = -c(x), \; c'''(x) = -c'(x) = s(x), \; c^{IV}(x) = c(x), \ldots$$

**62. Adiční teorémy funkcí $s(x)$ a $c(x)$.** Utvořme funkci složenou

$$\varphi(x) = \{c(a+x) - c(a)c(x) + s(a)s(x)\}^2 + \\ + \{s(a+x) - s(a)c(x) - s(x)c(a)\}^2,$$

kdež $a$ jest libovolná reálná konstanta. Tato funkce má patrně všude derivaci a jest

$$\frac{1}{2}\varphi'(x) = \{c(a+x) - c(a)c(x) + s(a)s(x)\}\{-s(a+x) + c(a)s(x) + s(a) . c(x)\} + \{s(a+x) - s(a)c(x) - s(x)c(a)\}\{c(a+x) + s(a)s(x) - c(a)c(x)\} = 0,$$

neboť první a čtvrtá závorka $\{\}$ jsou identické, kdežto druhá a třetí liší se pouze znamením! O funkci $\varphi(x)$ mohu tedy tvrditi $\varphi(x) \equiv 0$*) a tedy také, protože součet dvou čtverců reálných čísel může býti roven nule jen, když každé z obou

---

*) Jest totiž $\varphi(x) =$ konstantě. Avšak $\varphi(0) = 0$ a tedy konstanta ona jest rovna nule.

čísel jest rovno nule,

$$c(a+x) = c(a)c(x) - s(a)s(x),$$
$$s(a+x) = s(a)c(x) + s(x)c(a),$$

což jsou tak zv. součtové vzorce, čili adiční teorémy IV pro naše funkce. Z nich plynou následující vztahy, kterých v dalším upotřebíme:

$$s^2(x) + c^2(x) = 1, \text{ když položíme } a = -x;$$

$$c(h) = c^2\left(\frac{h}{2}\right) - s^2\left(\frac{h}{2}\right), \text{ když položíme } a = x = \frac{h}{2}$$

a tedy

$$1 - c(h) = 2s^2\left(\frac{h}{2}\right).$$

První z těchto vztahů má za následek $|s(x)| \leqq 1$, $|c(x)| \leqq 1$.

**63. Důkaz unicity.** V předcházejících odstavcích provedli jsme prvou část důkazu, neboť jsme zjistili, že řady (1) hoví základním rovnicím (I—IV). Zbývá dokázati, že každé dvě funkce, na př. $f(x)$ a $g(x)$, které hoví vztahům (I—IV) pro každé reálné $x$ a $y$, jsou identické s funkcemi $s(x)$ a $c(x)$. Učiňme tedy vskutku předpoklad, že dvě funkce $f(x)$ a $g(x)$ hoví vztahům (I—IV) a nic jiného o těchto funkcích nepředpokládejme. Jest tedy $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) : x = 1$ a klademe-li $f(x) : x = \varphi(x)$, je $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = 1$. Jest tedy $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = = \lim\limits_{x \to 0} x \,.\, \varphi(x) = \lim\limits_{x \to 0} x \,.\, \lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = 0 \,.\, 1 = 0$, čili $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$. To znamená, že funkce $f(x)$ jest spojitá v bodě $x = 0$. Ze vztahu $\lim \varphi(x) = 1$ plyne mimo to, že lze nalézti okolí bodu $x = 0$, na př. $0 < |x| < \delta$, které má tu vlastnost, že v něm jest $\varphi(x) > 0$ a tedy také $|f(x)| > 0$.

Klaďme-li v adičním teorému

$$f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x), \; x = y = h,$$

obdržíme $f(2h) = 2f(h)g(h)$ a tedy, volím-li $0 < h < \delta$, je

$$g(h) = \frac{f(2h)}{2f(h)} = \frac{f(2h)}{2h} : \frac{f(h)}{h}.$$

Z toho plyne

$$\lim_{h \to 0} g(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2h)}{2h} : \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 1 = g(0),$$

což značí, že $g(x)$ jest spojitá funkce v bodě 0. Z adičního teorému pro funkci $g(x)$ vyplývá dále podobně jako na konci předešlého odstavce

$$1-g(h)=2f^2\left(\frac{h}{2}\right) \text{ a tedy } \frac{1-g(h)}{h}=\frac{f\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\cdot f\left(\frac{h}{2}\right),$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-g(h)}{h}=1\,.\,0=0.$$

Nyní již můžeme dokázati, že funkce mají derivace. Podle adičního teorému pro $f(x+h)$ jest

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(h)}{h}\cdot g(x)-f(x)\frac{1-g(h)}{h} \text{ a tedy}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=g(x), \quad \text{čili} \quad f'(x)=g(x).$$

Podobně

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g(x)\frac{g(h)-1}{h}-f(x)\,.\frac{f(h)}{h}$$

a tedy

$$g'(x)=-f(x).$$

Z toho plyne dále docela stejně jako při funkcích $s(x)$ a $c(x)$

$$f''(x)=-f(x),\ f'''(x)=-g(x),\ f^{IV}(x)=f(x), \text{ atd.}$$

$$g''(x)=-g(x),\ g'''(x)=f(x),\ g^{IV}(x)=g(x), \text{ atd.}$$

Můžeme tedy užíti formule *Maclaurinovy* libovolného stupně pro kteroukoli z obou funkcí, čímž vypočteme, jako v odst. 37

$$f(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+R_n^{(1)},$$

$$g(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+R_n^{(2)}.$$

Zbytky mají pro každé $x$ vlastnost $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(1)}(x)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(2)}(x)=0$, což odůvodníme zcela stejně, jako v citovaném odstavci, když uvážíme, že $|f(x)|\leq 1$, $|g(x)|\leq 1$, jak plyne ze vztahu $f^2(x)+g^2(x)=1$. Jest tedy $f(x)=s(x)$, $g(x)=c(x)$ s. e. d. Rovnice (I—IV) mají za daných předpokladů jedno jediné řešení (1) a proto píšeme

$$\text{sinus } x=\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots$$

$$\text{cosinus } x=\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots$$

**64. Funkce sin $x$ a cos $x$ jsou periodické.** Spojitá funkce $\cos x$ má hodnotu kladnou pro $x=0$ a zápornou pro $x=2$, neboť

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!}\left(1 - \frac{2^2}{3\,.\,4}\right) - \frac{2^6}{6!}\left(1 - \frac{2^2}{7\,.\,8}\right) - \ldots$$

a tedy

$$\cos 2 < 1 - \frac{2^2}{2!}\left(1 - \frac{2^2}{3\,.\,4}\right) = -\frac{1}{3}\,.$$

Proto musí míti rovnice $\cos\xi = 0$ aspoň jeden kořen $0 < \xi < 2$. Tento kořen jest jediný, neboť, kdyby dvě čísla splňovala vztahy $0 < \xi < \xi_1 < 2$, $\cos\xi = 0$, $\cos\xi_1 = 0$, bylo by podle věty *Rolle-ovy* možno nalézti číslo třetí $\eta$ tak, že by bylo $(\cos\eta)' = -\sin\eta = 0$, $0 < \xi < \eta < \xi_1 < 2$. Avšak pro takové $\eta$ výraz

$$\sin\eta = \frac{\eta}{1!}\left(1 - \frac{\eta^2}{2\,.\,3}\right) + \frac{\eta^5}{5!}\left(1 - \frac{\eta^2}{6\,.\,7}\right) + \ldots$$

jest jistě kladný, neboť všichni sčítanci jsou čísla kladná. Rovnice $\cos\xi = 0$ má tedy v intervalu $(0, 2)$ jediný kořen, který označíme $\frac{\pi}{2}$. Podle předešlého jest jednak $\sin\frac{\pi}{2} > 0$, jednak

$\sin^2\frac{\pi}{2} + \cos^2\frac{\pi}{2} = 1$ **a tedy** $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Z adičních teorémů plyne dále

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \qquad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x,$$

$$\sin(x + \pi) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x,$$

$$\cos(x + \pi) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x,$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

Funkce $\sin x$ a $\cos x$ jsou tedy periodické s periodou $2\pi$. Ostatní funkce goniometrické definují se pak vztahy $tg\,x = \sin x : \cos x$, $\operatorname{cotg} x = \cos x : \sin x$, $\sec x = 1 : \cos x$, $\operatorname{cosec} x = 1 : \sin x$. Pro tyto přesně definované funkce platí všechny vzorce známé z goniometrie, jak čtenář se sám přesvědčí.

# SEZNAM VĚCNÝ.

(Čísla značí stránky.)

# OBSAH.

## I. KAPITOLA: ČÍSLA RACIONÁLNÍ A REÁLNÁ.



## II. KAPITOLA: POSLOUPNOSTI.



## III. KAPITOLA: ŘADY.



## IV. KAPITOLA: FUNKCE.

## V. KAPITOLA: PRVÁ DERIVACE A DIFERENCIÁL.



## VI. KAPITOLA: VYŠŠÍ DERIVACE A JEJICH UŽITÍ.



## VII. KAPITOLA: FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH.



## I. DODATEK: NÁSTIN TEORIE ČÍSEL REÁLNÝCH.



## II. DODATEK: FUNKCE GONIOMETRICKÉ.

# KRUH

## SBÍRKA SPISŮ VYDÁVANÁ JEDNOTOU ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

Svazek 1.

*Dr. František ZÁVIŠKA,* profesor university Karlovy:

**Einsteinův princip relativnosti a teorie gravitační.**

168 stran, 10 obrazců. Cena 16 Kč.

Svazek 2.

*Dr. Bohuslav HOSTINSKÝ,* profesor university Masarykovy:

**Geometrické pravděpodobnosti.**

88 stran, 3 obrazce. Cena 11 Kč.

Svazek 3.

*Dr. Václav HLAVATÝ,* docent university Karlovy:

**Neeuklidovská geometrie.**

V tisku. Vyjde v prosinci 1926.

Svazek 4.

*Dr. Miloš KÖSSLER,* profesor university Karlovy:

**Úvod do počtu diferenciálního.**

148 stran, 16 obrazců. Cena 18'70 Kč.

Svazek 5.

*Sir William BRAGG*:

**O podstatě věcí.**

Z angl. přeložili dr. *Antonín Šimek,* profesor university Masarykovy a *Hannah Šimková-Kadlcová.*

V tisku. Vyjde v lednu 1927.

**Ve vydávání se pokračuje.**

**Jednota československých matematiků a fysiků v Praze-II, Hopfenštokova 9.**