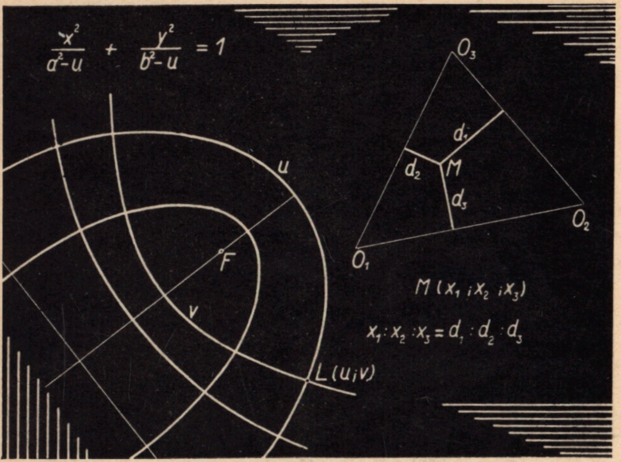
O souřadnicích v rovině

CESTA K VĚDĚNÍ SV. 15.



ZDENĚK PÍRKO

O SOUŘADNICÍCH V ROVINĚ

JEDNOTA ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE

K 19,20

Zd. Pírko:

O SOUŘADNICÍCH V ROVINĚ.

Souřadnice jsou matematickým prostředkem, pomocí něhož lze přejíti od geometrie k analysi. Způsob, jímž se takový přechod dá uskutečniti, dal průběhem doby vzniknouti četným souřadnicovým soustavám, které nejen že se ukázaly jako nejvhodnější pro řešení příslušného geometrického problému, ale také podstatně přispěly k obohacení geometrie.

Souřadnicové soustavy lze klasifikovati s několika hledisek. Buďto na základě prvků, které jsou soustavou určeny (souřadnice bodu, přímky, kulové plochy a pod.), nebo podle souřadnicového pole (souřadnice na přímce, v rovině, na ploše a pod.) podle počtu čísel, ji-

CESTA K VĚDĚNÍ

ZDENĚK PÍRKO

O SOUŘADNICÍCH V ROVINĚ

Se 14 obrazci

Vyšlo jako 15. svazek sbírky
CESTA K VĚDĚNÍ
vydávané Jednotou českých matematiků a fysiků v Praze za redakce
Dra R. BRDIČKY, Dra F. VYČICHLA a Dra L. ZACHOVALA

1942

NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE
TISKEM KNIHTISKÁRNY „PROMETHEUS“ V PRAZE VIII

PŘEDMLUVA

Látka, kterou probírám v této knížce, předpokládá jen znalost onoho učiva, které bývá absolvováno na reálkách nebo je aspoň obsaženo v učebnicích pro tyto školy. Některé partie z geometrie, jimž se někdy ve škole věnuje pozornost menší a jejichž znalost u čtenáře předpokládám, buďtež tu vytčeny zvlášť: z planimetrie nauka o dělicím poměru, věta Menelaova a Cevova, nauka o dvojpoměru a harmonické čtveřině, věta Apolloniova o kružnici, základy nauky o pólu a poláře, z analytické geometrie základy geometrie ve svazku přímek, definice a nejjednodušší vlastnosti některých algebraických křivek vyšších stupňů (kisoidy Dioklovy, křivek Cassiniho). Příslušné stati nalezne čtenář buďto ve Vojtěchových učebnicích,[1]) nebo v analytické geometrii, kterou napsali Sechovský a Šilháček.[2])

Z t. zv. vyšší matematiky pak potřebuje čtenář znáti aspoň nejjednodušší základy diferenciálního počtu v tom rozsahu, jak jsou podány v uvedených učebnicích. V knize Sechovského a Šilháčka nalezne také nejdůležitější poučení o determinantech, jichž jsem použil na několika málo místech této knížky. V míře více než postačující jej o diferenciálním počtu informuje kniha Kösslerova[3]) nebo Vojtěchova,[4]) o determinantech první odstavce knihy Bydžovského.[5]) Do

[1]) Prof. dr. Jan Vojtěch, Geometrie pro pátou třídu reálek, Praha, Jednota mat. fys., 1935, a Geometrie pro sedmou třídu reálek, Praha, Jednota mat. fys., 1934.

[2]) Dr. Karel Šilháček a dr. Hynek Sechovský, Geometrie pro sedmou třídu reálek, Praha, Unie, 1936.

[3]) Prof. dr. Miloš Kössler, Úvod do počtu diferenciálního, Praha, Jednota mat. fys., 1926.

[4]) Prof. dr. Jan Vojtěch, Základy matematiky ke studiu věd přírodních a technických, Část první, Praha, Jednota mat. fys., 1931.

[5]) Prof. dr. Bohumil Bydžovský, Základy teorie determinantů a matic a jich užití, Praha, Jednota mat. fys., 1930.

způsobu matematického myšlení posléze uvádí čtenáře učebnice Bydžovského a Vojtěcha.[6])

V malém rozsahu této knížky je soustředěno poměrně mnoho látky, mnoho vlastností probíraných souřadnicových soustav se kromě toho nachází ještě v úlohách, připojených ke každému odstavci. Bude-li čtenář chtít studovati knížku s užitkem, nemůže tak učiniti bez řešení aspoň některých z těchto úloh. Úlohy ty nejsou však jen pouhou aplikací vyložené látky, nýbrž v četných případech nutí jej k samostatnému přemýšlení.

Výklady rázu základního od výkladů o podrobnějších vlastnostech jsou odlišeny dvojím druhem sazby; petitové odstavce, jejichž podání je také mnohem stručnější než výklad v hlavním textu, může čtenář při první četbě přejíti beze škody. Petitové číslice v textu odkazují na seznam literatury vhodné pro další studium, který je uveden na konci knížky.

Obrázky rýsovala má žena prof. Věra Pírková. Knížka vznikla podstatným zkrácením obsáhlejšího rukopisu, které navrhl redaktor této sbírky, doc. dr. František Vyčichlo. Ten také pečlivě pročetl definitivní rukopis a mnohými pokyny přispěl k jeho zlepšení. Oběma srdečně děkuji. Můj dík náleží dále *Jednotě českých matematiků a fysiků* v Praze, která knížku vydala, a tiskárně *Prometheus* v Praze, která pečlivě provedla obtížnou sazbu.

Zdeněk Pírko.

V Praze v prosinci 1941.

[6]) Prof. dr. Bohumil Bydžovský a prof. dr. Jan Vojtěch, Mathematika pro nejvyšší třídu reálek, Praha, Jednota mat. fys., 1912.

I.

HISTORICKÝ NÁSTIN.

A. Podle způsobu, kterým řešíme geometrickou úlohu, rozlišujeme dvě základní metody: syntetickou a analytickou. První metoda studuje geometrický útvar sám o sobě a tímto studiem dospívá k novým poznatkům. Naproti tomu druhá metoda definuje sice útvar geometricky, jistým způsobem mu však přiřazuje čísla, aby mohla z něho vyvoditi početní vztahy. Na vztahy takto získané pak používá prostředků algebry a analysy a výsledky, které tímto způsobem získává, interpretuje opět geometricky. Jde tedy při použití analytické metody o tři zřetelně oddělená stadia, geometrické, početní (analytické) a znovu geometrické.[7]) Princip, který umožňuje přejíti od geometrie k algebře (analysi) a zpět, nazývá se princip souřadnic (koordinát).

I rozumíme nejobecněji souřadnicovou soustavou souhrn oněch pravidel, podle nichž přiřazujeme geometrickým prvkům čísla. Odtud také jiný často používaný název pro geometrii, pracující s analytickou metodou (analytickou geometrii): geometrie souřadnicová (koordinátní). Samozřejmě, že pravidla pro přiřazení mohou býti velmi rozmanitá, a to i tehdy, když požadujeme, aby byly splněny jisté základní předpoklady. O nich budeme mluvit podrobněji v dalším výkladu. A opravdu také průběhem doby vznikly velmi četné souřadnicové soustavy; v rámci této knížky chceme se omeziti jen na nejznámější soustavy rovinné.

Hned od počátku musíme však zdůrazniti, že by pouhým vynalézáním rozmanitých souřadnicových soustav geometrie

[7]) Skládají se tedy tato tři stadia z aritmetisace geometrického útvaru, z početního (analytického) zpracování aritmetických vztahů z útvaru vyvozených a konečně z geometrisace nabytých výsledků. Je však myslitelný ještě jiný postup, bez prvního pracovního úseku, způsob, který záleží v geometrisaci výsledků početních (analytických) úvah. Tímto stručnějším postupem se řídí na př. algebraická geometrie. Pro ni tedy představuje geometrický útvar spíše jakousi ilustraci. Pro elementární analytickou geometrii, která vychází z geometrického názoru — i když v geometriích vícerozměrných pozbývá tento konkretnosti — je však základem.

získala velmi málo. Souřadnice jsou jen prostředkem geometrického badání, nikoliv snad jeho účelem; setkáme-li se tudíž s nějakou souřadnicovou soustavou, měli bychom se nejprve ptáti, zda a v jaké míře se ukázala plodnou pro rozvoj geometrie. A jen takové soustavy, jejichž použitím byla geometrie obohacena, chceme uvésti v této knížce. Při jejím omezeném rozsahu bude se snad leckdy tato „vynalézací schopnost" zdát čtenáři skryta. Proto, bude-li se chtít seznámit s významem takové soustavy hlouběji, musí studovati další díla. Výběr z nich je uveden na konci knížky.

B. Původ souřadnic můžeme hledati v astronomii. U slavné dvojice starověkých astronomů, Hipparcha a Klaudia Ptolemaia (oba žili ve II. století př. Kr.), se shledáváme se způsobem, který umožňuje určiti polohu hvězdy na světové kouli pomocí dvou úhlů odměřovaných od dvou základních kružnic (obzorníkové souřadnice). Důsledné přenesení tohoto způsobu nejprve na zeměkouli (zeměpisné souřadnice) a poté jeho přizpůsobení pro rovinu dalo však na sebe čekati ještě velmi dlouho. Nezapomeňme při tom však, že již v III. století př. Kr. se setkáváme nejméně u dvou proslulých geometrů starověku, Archimeda a Apollonia, se zřejmými stopami souřadnicové soustavy, která je v podstatě totožná s dnešní kartézskou soustavou. Apollonios z Pergy napsal osm knih o kuželosečkách („Konika"), z nichž se nám dochoval řecký text první až čtvrté knihy, arabský text páté až sedmé knihy, kdežto obsah osmé knihy je známý jen z poznámek Pappových. Tam uvádí některé metrické vlastnosti kuželoseček, ovšem jen slovy, které souvisí s vlastnostmi těchto čar, vztažených ke sdruženým průměrům jako souřadnicovým osám kartézské soustavy.

Na základní myšlenku kartézské soustavy narážejí ve svých pracích dva francouzští matematikové, v XIV. století Nicole Oresme (latinis. Oresmes; zemřel 1382), v XVI. století François Viète (latinis. Vieta; zemřel 1603); první při grafickém znázorňování přírodních dějů (ve spise „Tractatus de latitudinibus formarum"), druhý při označování bodů a přímek čísly (ve spisech „Isagoge in artem analyticam" a „Ad logisticen speciosam notae priores"). Jinak však po celý středověk se ryze geometrický význam souřadnic ztrácí. Soustavné vybudování souřadnicové geometrie zůstává vyhrazeno teprve dvěma matematikům, žijícím na přelomu mezi středověkem a novověkem, Descartesovi a Fermatovi.

René Descartes (latinis. Renatus Cartesius, 1596—1650), francouzský filosof, aktivní účastník bitvy na Bílé hoře (ve vojsku Maximiliána Bavorského), je obecně považován za skutečného zakladatele analytické metody v geometrii. Stal se jím anonymním spiskem „Géométrie“, který vyšel roku 1637 v Leydenu jako dodatek k jeho slavnému dílu „Discours de la méthode“; dílko to rozšířilo se v tehdejším vzdělaném světě, když je roku 1649 přeložil Franciscus van Schooten do latiny („Geometria a Renato des Cartes anno MDCXXXVII Gallice edita etc.“). Po právu musíme uvésti, že myšlenku analytické geometrie v celé její šíři již před Descartesem pojal Pierre de Fermat (1602—1665), považovaný často za největšího matematika Francie, a máme-li být spravedliví, musíme přiznati, že tak v leckterém ohledu učinil dokonaleji a podrobněji než Descartes. Avšak výsledky jeho prací byly publikovány (ve spise „Ad locos planos et solidos isagoge“) teprve po jeho smrti (1679), kdy priorita vynálezu analytické metody byla již přiznána Descartesovi.

Souřadnice, které zavedl Descartes, nazýváme dnes kartézskými souřadnicemi bodu; byly obecně kosoúhlé. S počátku byly jmenovány různě; dnešní jejich názvy, úsečka (abscisa) a pořadnice (ordináta) zavedl roku 1692 v časopise „Acta Eruditorum“ slavný německý filosof a polyhistor Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716).

Descartesem a Fermatem počíná se tedy analytická geometrie. V XVIII. století vznikají pak nejméně tři klasická díla, která představují vyvrcholení analytické metody v tomto prvním období. „Enumeratio linearum tertii ordinis“ (1706) geniálního anglického matematika a fysika Isaaca Newtona (1643—1727) patří k nejstarším aplikacím kartézských souřadnic vůbec, „Introductio in analysin infinitorum“ (1748) německého matematika Leonharda Eulera (1707—1783), jednoho z nejslavnějších matematiků všech dob, obsahuje mimo jiné také dokonale utříděnou analytickou geometrii kuželoseček, a konečně „Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques“ (1750) švýcarského matematika Gabriela Cramera (1704—1752) přehledně shrnuje a doplňuje všechny posavadní poznatky.

C. Dvě stě let po Descartesovi a Fermatovi německý geometr Julius Plücker (1801—1868), považovaný právem za zakladatele moderní analytické geometrie, dává geometrii v kartézských souřadnicích dnešní podobu. Plückerův přínos je velmi rozsáhlý. Je původcem symbolického počítání v analytické geometrii, zavádí kartézské souřadnice přímky a uplatňuje tak princip duality, známý dosud jen v syntetické geometrii, také analyticky. Z jeho knižních prací o analytické geometrii v rovině sluší uvésti „Analytisch-geometrische Entwickelungen“ (2 svazky, 1828—1831), „System der analytischen Geometrie“ (1835) a „Theorie der algebraischen Kurven“ (1839). Plücker je také předním tvůrcem t. zv. trojúhelníkových souřadnic. Na tomto poli však nesmíme zapomenouti jeho předchůdce; je jím August Ferdinand Möbius (1790—1868), německý matematik a astronom, který ve spise „Der barycentrische Calcul, ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie“ (1827) ukázal na výhody použití zvláštního druhu trojúhelníkových souřadnic, jež nazývá barycentrickými.

Zavedením homogenních kartézských souřadnic a důsledným použitím teorie determinantů dodal analytické geometrii ráz zvláštní elegance jiný německý geometr, Otto Ludwig Hesse (1811—1874). Analytické geometrie v rovině týká se také jeho nejznámější spis „Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene“ (1868).

Mohutný impuls pro rozvoj analytické geometrie představuje od počátku XIX. století projektivní geometrie. Proslulým spisem „Traité des propriétés projectives des figures“ (1822) klade francouzský vojenský geometr Jean Victor Poncelet (1788—1867) její syntetické základy. O vybudování analytické teorie projektivní geometrie mají přední zásluhu dva němečtí geometrové, Karl Georg Christian von Staudt (1798—1867) a Otto Wilhelm Fiedler (1832—1912), který po jeden čas byl také profesorem na pražské polytechnice. Pojem trojúhelníkových souřadnic, v metrickém ohledu propracovaný Plückerem, přenesl v. Staudt do geometrie projektivní (ve spise „Beiträge zur Geometrie der Lage“, 1857); o podrobný výklad a propracování projektivních souřadnic zasloužil se Fiedler do té míry (pojednáním ve „Vierteljschr. d. Naturforsch. Ges. Zürich, *15*, 1870), že často bývají tyto souřadnice zvány Fiedlerovými.

Rozvoj grafického počtu v druhé polovině minulého století, především zásluhou francouzského matematika Maurice d'Ocagne (1862—1938), vedl k několikerému zobecnění kartézských souřadnic. Soustavy souřadnicové, které tímto způsobem vznikly, obvykle zahrnujeme do t. zv. skupiny souřadnic nomografických. Jejich zvláštním případem jsou souřadnice duální ke kartézským, k nimž nezávisle na sobě dospěli Unverzagt (v Progr. d. Realgymn. Wiesbaden, 1871), Schwering (ve spise „Theorie und Anwendung der Linienkoordinaten usw.“, 1884) a d'Ocagne (ve spise Coordonnées parallèles et axiales“, 1885, ale již předtím v časopiseckých pojednáních); po všech těchto autorech bývají také tyto speciální nomografické souřadnice nazývány. Jiné zobecnění kartézských souřadnic (středové souř. bodu), které uvádíme v dalším textu, pochází od českého geometra Vincence Jarolímka (1846—1921; v knize „Deskriptivní geometrie pro vyšší školy reálné“, 1876).

Také rozvoj jiných odvětví geometrie v druhé polovině minulého století, zejména geometrie diferenciální, vedl k vynalezení nových souřadnicových soustav. V této knize se zmiňujeme o dvou druzích přímkových souřadnic, odvozených v podstatě z přímkových souřadnic definovaných Plückerem. T. zv. normálních souřadnic přímky použil anglický matematik Hiern (v Quart. Journ. Math., *6*, 1864); rovnici křivky, v těchto souřadnicích vyjádřenou, však nazývá magickou rovnicí („the magical equation to the tangent of a curve“). Tento způsob vyjádření křivky vešel v širší známost teprve roku 1869, vydáním známé Serretovy učebnice („Cours de calcul différentiel et intégral“), která tyto úvahy rozšířila. T. zv. axiálních souřadnic přímky použil jako první francouzský matematik Aoust (v dosud plně nedoceněné knize „Analyse infinitésimale des courbes planes“, 1873). Použití obou těchto druhů souřadnic ukázalo se velmi plodným při řešení rozmanitých úloh diferenciální geometrie rovinných křivek.

D. Při řešení jisté geometrické úlohy, kterou v „Acta Eruditorum“ roku 1691 podal švýcarský matematik, fysik a teolog Jacques Bernoulli (v genealogii proslulého matematického rodu Bernoulliů označovaný jako Jacques I.; 1654—1705), se poznalo, že pravoúhlou kartézskou soustavu lze přesně nahraditi t. zv. souřadnicemi polárními. Tato soustava opravdu se objevila velmi vhodnou pro řešení četných úloh analytické a diferenciální geometrie a stala se prvním zástupcem rozsáhlé skupiny t. zv. křivočarých souřadnic. Za soustavné vybudování a použití nových souřadnic vděčíme pak vůdčímu duchu německých matematiků v první polovině XIX. století, Karlu Friedrichu Gaussovi (1777—1855; ve spise „Disquisitiones generales circa superficies curvas“, 1828).

U dvou druhů křivočarých souřadnic můžeme hledati původ stejně ve fysice jako v geometrii. T. zv. souřadnice eliptické, jejichž stopy ostatně nacházíme již u Eulera, soustavně vybudoval a použil francouzský matematik a fysik Gabriel Lamé (1795—1870; v pojednání „Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température“, předloženém roku 1833 pařížské Akademii). S t. zv. bipolárními souřadnicemi se pak setkáváme u geometrů i fysiků již v polovině minulého století; určení skutečného tvůrce těchto souřadnic a jejich prvního použití je však obtížné.

Všechny druhy souřadnicových soustav, které jsme doposud uvedli — až na souřadnice projektivní — lze vyjádřiti jako funkce souřadnic kartézských. Kromě toho všechny tyto soustavy za základní geometrický prvek pokládají bod nebo přímku. Jsou ovšem myslitelné i jiné takové soustavy, jejichž základním prvkem bude složitější geometrický útvar. Tak na př. u tetracyklických souřadnic, které do geometrie zavedl francouzský matematik Jean Gaston Darboux (1842—1917; ve spise „Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques", 1873), je základním prvkem kružnice a bod se tu vyjadřuje jako kružnice s poloměrem rovným nule.

O všech soustavách, které jsme zatím uvedli jejich názvy v stručném historickém nástinu, budeme také podrobněji pojednávati v dalších odstavcích této knížky. Ale všechny speciální rovinné soustavy, které průběhem doby došly v geometrii významného uplatnění, jimi ani zdaleka nevyčerpáme. Nebudeme tu na př. jednati o rozsáhlé skupině t. zv. přirozených souřadnic, jejichž předním budovatelem je italský matematik Ernesto Cesàro (1859—1906; viz jeho spis „Lezioni di geometria intrinseca", 1895). S použitím přirozených souřadnic lze hledati a studovati vlastnosti geometrických útvarů, které se týkají na př. jen jejich tvaru a nezávisí na poloze útvaru (t. zv. geometrie přirozená).

A ještě jedno podstatné omezení si ukládáme v této knížce: budeme si tu všímati jen reálných geometrických útvarů, útvary nikoliv reálné ze svých úvah vyloučíme. Rozsah probírané látky se tak neobyčejně zúží.

E. Uváděti české pracovníky v nauce o souřadnicích znamenalo by psáti dějiny analytické geometrie u nás; tak úzce jsou tyto snahy spjaty spolu. Přestaneme proto na stručném výčtu těch matematiků, kteří se ve větší míře zabývali analytickou geometrií (a také diferenciální a kinematickou geometrií), a opomineme ty, kdož pěstovali převážně geometrii syntetickou (geometrii deskriptivní).

A tu snad na prvním místě třeba uvésti Gustava Skřivana (1831—1866), profesora na technice v Praze, který je autorem první české učebnice analytické geometrie („Základy analytické geometrie v rovině", 1864). Teprve za deset let druhým dílem doplnil tuto učebnici František Josef Studnička (1836—1903), profesor pražské university („Úvod do analytické geometrie v prostoru", 1874), který také později napsal samostatnou učebnici analytické geometrie v rovině („Úvod do analytické geometrie v rovině", 1902). Výběrem látky i metodou všechny tyto knihy již zastaraly.

V analytické i syntetické (projektivní) geometrii vysoko vynikli bratří Emil Weyr (1848—1894), profesor vídeňské university, a Eduard Weyr (1852—1903), profesor na universitě v Praze. Z nich první je autorem „Základů vyšší geometrie" (3 svazky, 1871—1878), druhý autorem „Projektivné geometrie základných útvarů prvního řádu" (první vydání 1898), učebnice to, která ještě dnes udržela si znamenitou úroveň. Jiná dvojice bratří, kteří pracovali v geometrii čar a ploch, jsou Josef Silvestr Vaněček (1848—1922), středoškolský profesor, autor první české učebnice kinematické geometrie („Pošinování geometrických útvarův", 1880) a prvního katalogu speciálních čar v světové matematické literatuře vůbec („Křivé čáry rovinné a prostorové", 1881), a Matěj Norbert Vaněček (1859—1922), profesor pražské techniky, častý spolupracovník předchozího. Nedokončená učebnice analytické geometrie, moderně založená, pochází od jiného vynikajícího geometra, Karla Zahradníka (1848—1916), profesora techniky v Brně („Analytická geometrie. I. Geometrie bodu, přímky a kuželoseček", 1907).

Ze středoškolských profesorů, kteří se uplatnili v analytické geometrii, sluší uvésti Aloise Strnada (1852—1911), Františka Machovce (1855—1892; syntetické geometrii věnoval knihu „Zobrazování tečen a středů křivosti křivek", 1883) a záhy zesnulého Theodora Monina (1858—1893), autora jediné snad knižně vydané české práce o souřadnicích („O některých druzích souřadnic projektivických", 1889).

Nejbližší generaci českých geometrů stál v čele Jan Sobotka (1862—1931), profesor pražské university, přední odborník v geometrii syntetické (deskriptivní), autor rozsáhlé učebnice diferenciální geometrie („Differenciální geometrie", 3 svazky, 1909—1914). Antonín Pleskot (1866—1939), středoškolský profesor, vynikl v analytické a diferenciální geometrii čar (speciálně kuželoseček) a ploch, Bohumil Machytka (1890—1928), docent university a techniky v Praze, uplatnil se zejména v teorii geometrických transformací.

Z generace žijících geometrů třeba jmenovati Bohumila Bydžovského (nar. 1880), profesora pražské české university, autora vynikajícího „Úvodu do analytické geometrie" (1923), Eduarda Čecha (nar. 1883), profesora brněnské české university, spoluzakladatele projektivní diferenciální geometrie (jeho český spis „Projektivní diferenciální geometrie" vyšel roku 1926), Václava Hlavatého (nar. 1894), profesora university v Praze, autora „Úvodu do neeuklidovské geometrie" (1926) a „Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorového počtu (1937), Bohuslava Hostinského (nar. 1884), profesora brněnské university, autora „Differenciální geometrie křivek a ploch“ (1915) a Jana Vojtěcha (nar. 1879), profesora techniky v Praze, autora rozsáhlé a významné „Geometrie projektivní“ (1932). A vedle nich je u nás ještě řada mladých a nejmladších pracovníků, kteří přispívají k rozvoji geometrie.[8])

---

[8]) Dokonalý přehled o vývoji geometrie u nás poskytují svazky „Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky“, vydávaného Jednotou českých matematiků a fysiků v Praze.

II.

KARTÉZSKÉ A NOMOGRAFICKÉ SOUŘADNICE.

Objasnění pojmu souřadnice na speciální soustavě. A. Pravoúhlé souřadnice bodu. Polohu bodu v rovině stanovíme nejjednodušeji, když zavedeme pravoúhlou soustavu souřadnic. Sestrojíme dvě přímky x, y k sobě kolmé (osy souřadnic) a počínaje od jejich průsečíku O (počátku) opatříme je stejným měřítkem.[9]) Obecný bod v rovině určuje pak jednoznačně dvojici čísel x, y, totiž vzdálenosti obou jeho kolmých průmětů do souřadnicových os od počátku (měřené uvedeným měřítkem). A obráceně, obecná dvojice reálných čísel (kladných nebo záporných) vede k jedinému bodu. I je patrno, že jsme již předem stanovili pořadí obou základních přímek (osa x první, osa y druhá) a že jsme je také orientovali (opatřili určitým smyslem). Základní vlastnosti těchto souřadnic, které přesněji nazýváme pravoúhlé kartézské souřadnice bodu (x úsečka, y pořadnice), jsou čtenáři známé. Připomeňme jen, že okolnost: bod B má souřadnice x, y píšeme: B (x; y), a dále že zvolené měřítko můžeme definovati také t. zv. jednotkovým bodem J (1; 1).

Určujeme-li polohu bodu v rovině nebo sestrojujeme-li bod právě popsaným způsobem, mluvíme stručně o pravoúhlé kartézské rovině. Zároveň je to jeden z nejjednodušších způsobů, jimiž si zjednáváme jednojednoznačnou korespondenci mezi nekonečně mnoha body v rovině a nekonečně mnoha dvojicemi reálných čísel, kladných i záporných.

Pojem „nekonečně mnoho bodů v rovině" je třeba objasniti. Jestliže jednoznačné určení nějakého geometrického prvku (bodu, přímky, kružnice a pod.) závisí na r vzájemně nezávislých číslech, tu pravíme, že všechny tyto prvky tvoří r-násobnou

[9]) Použití stejného měřítka na obou osách je sice v analytické geometrii obvyklé, nikoliv však nutné.

varietu nebo že je jich ∞^r. Poloha bodu na přímce, kterou jsme orientovali a opatřili počátkem a jednotkovým bodem, je jednoznačně určena jediným číslem (jak?): na přímce leží ∞^1 bodů. Poloha bodu v kartézské rovině je jednoznačně určena dvěma souřadnicemi: v rovině existuje ∞^2 bodů. Přímka je v kartézské rovině určena jednoznačně dvěma podmínkami (jak?): v rovině existuje ∞^2 přímek. V rovině je ∞^3 kružnic, ∞^5 kuželoseček a pod. Varietu bodů v rovině vystihuje velmi názorně termín používaný v analytické mechanice: bod v rovině (a obecněji bod na ploše) má dva „stupně volnosti“.

B. Definice souřadnic. Určení polohy bodu v rovině dvěma úsečkami, jeho pravoúhlými souřadnicemi, není jistě jediné. Snadno si dovedeme představiti, že polohu bodu lze určit i jinak, pomocí úhlů, poměrů délek a pod. Za těchto okolností jeví se nám pravoúhlé souřadnice jen jako velmi speciální případ velké skupiny souřadnicových soustav, které souborně jmenujeme „bodové souřadnice“. Opírajíce se o známé vlastnosti pravoúhlé soustavy, dovedeme již nyní vysloviti jejich základní vlastnost: souřadnicemi bodu rozumíme taková čísla, která jednoznačně určují jeho polohu, a obráceně.

Za základní geometrický prvek v rovině nemusíme pokaždé voliti bod. Může jím být přímka, kružnice a pod.; postačí pak, když ve vhodně definované souřadnicové soustavě stanovíme čísla, která jednoznačně určí jeho polohu, a obráceně. Tímto způsobem k bodovým souřadnicím přistupují „souřadnice přímky“, „souřadnice kružnice“ a pod.

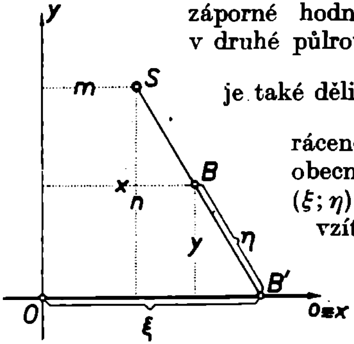
Můžeme tedy vysloviti tuto obecnou definici: Souřadnice geometrického prvku jsou čísla, která jednoznačně určují jeho polohu vzhledem k jiným pevně zvoleným geometrickým prvkům (jejichž konfiguraci nazýváme soustavou souřadnic), a obráceně.

C. Počet určujících čísel. V právě podané definici nebylo zmínky, kolik čísel je nutných a kolik stačí, aby byl jednoznačně určen prvek v rovině. Pravoúhlé souřadnice nám ukazují, že potřebujeme dvě nezávislá čísla, abychom určili polohu bodu v rovině; je to zároveň počet „stupňů volnosti“, který má bod v rovině. Uvažujme nyní přímku jako základní prvek! Všech přímek v rovině je ∞^2, i bude třeba k určení polohy přímky v rovině dvou nezávislých čísel. Podobně k určení polohy kružnice v kartézské rovině bude zapotřebí tří nezávislých čísel atd. Prostě potřebujeme tolik nezávislých čísel, kolik „stupňů volnosti" má příslušný prvek. Ale teď již musíme „stupně volnosti" pojímati v širším smyslu než v mechanice, neboť vedle polohy musíme přihlížet i k změnám, kterých je příslušný prvek schopný (na př. kružnici v rovině můžeme podrobiti posunutí, otočení, ale také homotetii vzhledem k pevnému středu homotetie a pod.). Úvahy tohoto druhu vedou nás k větě: K určení polohy geometrického prvku o r „stupních volnosti" stačí právě r nezávislých čísel (souřadnic).

Nechť geometrický prvek má r „stupňů volnosti". I stačí k jeho určení podle uvedené věty r nezávislých čísel. Je-li tedy jeho poloha jednoznačně určena s čísly, při čemž je $s > r$, tu z těchto s čísel jich musí býti $s - r$ závislých na ostatních, jinými slovy: mezi těmito s čísly musí platit $s - r$ vztahů. S příklady takových souřadnic se setkáme v dalším výkladu. Setkáme se však i s případy takových souřadnicových soustav, které jsou zdánlivě ve sporu s požadavkem jednojednoznačné korespondence. Tak obecnou dvojicí souřadnic budou určeny na př. dva body, ale souměrně položené podle pevné přímky. Jindy obecnou dvojicí čísel budou dokonce určeny čtyři body, ale souměrně položené vzhledem k průsečíku dvou přímek k sobě kolmých. V takových případech, zvlášť uvedených, kdy jediným bodem skupiny (složené z konečného počtu bodů) budou jednoznačně určeny i ostatní body této skupiny, budeme základní požadavek jednojednoznačné korespondence považovati za nedotčený.

D. Středové souřadnice bodu. Dovedeme-li zacházeti s pravoúhlými souřadnicemi, tu nejjednodušší způsob, kterým se můžeme orientovat o základních vlastnostech jiné soustavy, je ten, že nalezneme její vztah k vhodně zvolené pravoúhlé soustavě a vyvodíme její vlastnosti ze známých vlastností této soustavy.

Uvedeme příklad. Polohu obecného bodu B (obr. 1) můžeme určiti tak, že jej promítneme z pevného bodu S (středu) do pevné přímky o (osy), která neprochází středem S, na níž jsme zvolili jiný pevný bod O (počátek) a kladný smysl. Je-li B' tento průmět, tu vidíme, že obecný bod určuje (při zvoleném měřítku, pro všechny směry stejném) dvě čísla $\xi = \overline{OB'}$, $\eta = \overline{BB'}$. Při tom kladnou délku ξ nanášíme v kladném smyslu od O, zápornou opačně; délku η nanášíme na přímku SB' tak, že kladné hodnoty η dávají body v té půlrovině (určené osou o), kde leží střed S, záporné hodnoty pak přísluší bodům v druhé půlrovině (jinak: je-li η kladné, je také dělicí poměr $\frac{\overline{BB'}}{\overline{SB'}}$ kladný, a obráceně). Určuje tedy obráceně obecná dvojice reálných čísel $(\xi; \eta)$ jediný bod. I můžeme vzíti čísla ξ, η za souřadnice bodu v rovině; nazveme je **středové souřadnice** bodu.(1) Abychom nalezli jejich základní vlastnosti, zvolme pravoúhlou soustavu tak, jak naznačuje obrázek. Nechť v této soustavě má střed S souřadnice $(m; n)$, bod B souřadnice $(x; y)$. Pak platí



Obr. 1.

$$n : (\xi - m) = y : (\xi - x), \quad y : \eta = n : \underset{+}{\sqrt{(\xi - m)^2 + n^2}},$$

a z těchto rovnic plyne jednak

$$x = \xi - \frac{(\xi - m)\,\eta}{+\sqrt{(\xi - m)^2 + n^2}}, \quad y = \frac{n\eta}{+\sqrt{(\xi - m)^2 + n^2}}, \tag{1}$$

jednak

$$\xi = \frac{nx - my}{n - y}, \quad \eta = \frac{y}{n - y} \underset{+}{\sqrt{(x - m)^2 + (y - n)^2}}. \tag{2}$$

To jsou rovnice, pomocí nichž můžeme převésti pravoúhlé souřadnice na středové, a obráceně.

Píšeme-li rovnice (2) ve tvaru

$$\xi = \frac{x - \frac{m}{n} y}{1 - \frac{y}{n}}, \quad \eta = \frac{y}{1 - \frac{y}{n}} \underset{+}{\sqrt{\left(\frac{x - m}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n} - 1\right)^2}}, \tag{2'}$$

a necháme-li n vzrůstati nade všechny meze (m je pevné, konečné), tu nalezneme $\lim_{n\to\infty} \xi = x$, $\lim_{n\to\infty} \eta = y$, t. j. pravoúhlé souřadnice jsou zvláštním případem středových souřadnic (vysvětlete podrobněji!).

Počátek O má souřadnice $\xi = \eta = 0$. Pro body na ose o platí $\eta = 0$, i je to zároveň rovnice této osy; podobně $\xi = 0$ je rovnicí spojnice OS. Obecný vztah mezi souřadnicemi ξ, η vyjadřuje čáru[10]); její rovnici v souřadnicích x, y poskytují rovnice (2). Jako příklad uvažujme zvláštní případy lineárního vztahu $a\xi + b\eta + c = 0$ (a, b, c konstanty)! Je-li $b = 0$, zjednoduší se původní rovnice na $\xi = -c : a$ a vyjadřuje přímku, která prochází středem S a na ose o utíná úsek $-c : a$, a obráceně. Je-li $a = 0$, dospíváme k rovnici $\eta = -c : b$; čára jí vyjádřená sluje konchoida přímky čili Nikomedova (vyslovte na základě rovnice $\eta = \pm k$ její výtvarný zákon!). Je-li $c = 0$ a $a = \pm b$, máme rovnici $\xi = \pm \eta$; čára jí vyjádřená sluje šikmá strofoida (pro $m = 0$ nazývá se přímá strofoida; vyslovte výtvarné zákony obou těchto čar!).

Tento příklad měl nám stručně ukázati, proč používáme ještě jiných soustav vedle pravoúhlé. Viděli jsme právě, že rovnice některých čar objevují se zvlášť jednoduché v souřadnicích středových. A naopak; napište si v těchto souřadnicích na př. rovnici kružnice, která má střed v počátku a poloměr r! Používáme proto jiných souřadnicových soustav za tím účelem; abychom si usnadnili studium jistých geometrických vlastností, jejichž vyjádření má v takových soustavách zvlášť jednoduchý početní tvar. S jinými příklady se ještě setkáme v dalším textu.

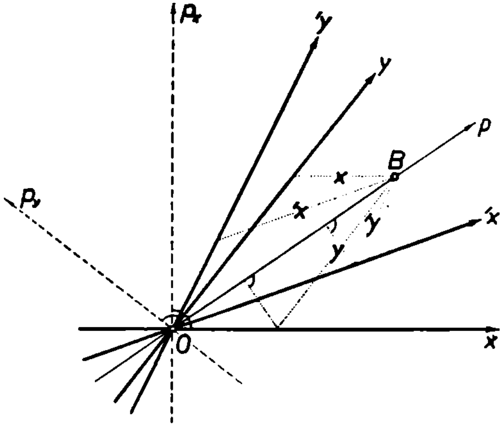
Úlohy k tomuto odstavci: 1—7.

Kartézské souřadnice bodu. A. Definice a transformace. Soustava pravoúhlých souřadnic je určena jedno-

---

[10]) Ovšem za jistých, ostatně dosti obecných podmínek, jejichž splnění ve všech případech, v této knize uvažovaných, můžeme předpokládati.

značně, jsou-li dány její osy (pořadím a orientací) a jednotkový bod $J(1; 1)$. Kolmost obou souřadnicových os však není podstatná; obecněji můžeme totiž zvoliti dvě přímky, které svírají ostrý úhel (označíme jej ω), stanoviti jejich pořadí, orientovati je a obě souřadnice x, y odměřovati ve směru těchto dvou přímek. Mluvíme v tomto případě o kosoúhlých kartézských souřadnicích bodu.[11])



Obr. 2.

V každé souřadnicové soustavě má zvláštní důležitost t. zv. transformace souřadnic. S obsahem tohoto pojmu je čtenář v podstatě obeznámen (transformace posunutím a otočením!). Na tom místě si ukážeme, jak se vyjadřuje transformace mezi dvěma kartězskými soustavami (obecně kosoúhlými), které mají společný počátek (obr. 2). Označme osy jedné soustavy x, y, druhé $'x$, $'y$. I vidíme, že pro každou

[11]) Oba druhy kartézských souřadnic, pravoúhlé a kosoúhlé, nazýváme někdy společným názvem souřadnice rovnoběžkové (paralelní).

přímku p, která prochází společným počátkem O, platí

$$x \cos (p, x) + y \cos (p, y) \equiv {}'x \cos (p, {}'x) + y' \cos (p, {}'y),$$

při čemž značí na př. (p, x) úhel, o který třeba otočiti přímku p kolem počátku O v kladném smyslu, aby splynula s osou x. Zvolme nyní $(p, y) = \frac{1}{2}\pi$; tím určíme jednoznačně přímku p_y, pro niž opět platí

$$x \cos (p_y, x) = {}'x \cos (p_y, {}'x) + {}'y \cos (p_y, {}'y). \qquad (*)$$

Podobně zvolme $(p, x) = \frac{1}{2}\pi$; tak určíme přímku p_x, pro niž platí

$$y \cos (p_x, y) = {}'x \cos (p_x, {}'x) + {}'y \cos (p_x, {}'y). \qquad (**)$$

Uvažme však, že lze psáti $\cos (p_y, {}'x) = \cos ({}'x, p_y) =$ $= \sin [\frac{1}{2}\pi + ({}'x, p_y)] = \sin [(p_y, y) + ({}'x, p_y)] = \sin ({}'x, y)$ atd. Po této úpravě obdržíme z rovnic (*) a (**)

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\sin ({}'x, y)}{\sin (x, y)}\, {}'x + \frac{\sin ({}'y, y)}{\sin (x, y)}\, {}'y, \\ y &= \frac{\sin ({}'x, x)}{\sin (y, x)}\, {}'x + \frac{\sin ({}'y, x)}{\sin (y, x)}\, {}'y; \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

těmito vztahy jsou tedy vyjádřeny souřadnice nečárkované soustavy souřadnicemi čárkovanými.

Abychom nalezli obrácené vyjádření, uvažujme nejprve determinant soustavy (3). Ten je

$$D \equiv -\frac{1}{\sin^2 (x, y)} [\sin ({}'x, y) \sin ({}'y, x) - \sin ({}'x, x) \sin ({}'y, y)].$$

Poněvadž je $({}'y, x) = ({}'y, {}'x) + ({}'x, x)$, $({}'y, y) = ({}'y, {}'x) +$ $+ ({}'x, y)$, lze také psáti

$$D \equiv -\frac{\sin ({}'y, {}'x)}{\sin^2 (x, y)} [\sin ({}'x, y) \cos ({}'x, x) - \\ - \sin ({}'x, x) \cos ({}'x, y)],$$

poněvadž je $({}'x, y) = ({}'x, x) + (x, y)$, zjednoduší se výraz v lomené závorce na $\sin(x, y)$, takže $D = \sin('x, 'y) : \sin(x, y)$. Užívajíce tohoto výsledku, můžeme řešení soustavy (3) podle čárkovaných souřadnic psáti ve tvaru

$$\left.\begin{aligned} 'x &= \frac{\sin(x, 'y)}{\sin('x, 'y)}\, x + \frac{\sin(y, 'y)}{\sin('x, 'y)}\, y, \\ 'y &= \frac{\sin(x, 'x)}{\sin('y, 'x)}\, x + \frac{\sin(y, 'x)}{\sin('y, 'x)}\, y; \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

rovnice ty mají tvar rovnic (3) až na to, že čárkované veličiny jsou zaměněny za nečárkované a obráceně.

Jestliže počátek čárkované soustavy má v nečárkované soustavě souřadnice $(x_0; y_0)$, tu v rovnicích (3) na levých stranách místo x resp. y nastoupí rozdíly $x - x_0$ resp. $y - y_0$, v rovnicích (4) na pravých stranách místo x resp. y rovněž rozdíly $x - x_0$ resp. $y - y_0$.

B. Základní vlastnosti kosoúhlých souřadnic. V tomto odstavci jen velmi stručně uvedeme základní vzorce analytické geometrie v kosoúhlých souřadnicích,[2] přenechávajíce jejich ověření — ostatně snadné — čtenáři. Vzdálenost dvou bodů $B_i\,(x_i; y_i)$, $i = 1,2$ je dána vzorcem

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2\,(x_2 - x_1)\,(y_2 - y_1)\cos\omega},$$

vzdálenost bodu $B\,(x; y)$ od počátku vzorcem

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega}.$$

Každá lineární rovnice $ax + by + c = 0$ (a, b, c konstanty) vyjadřuje přímku, jejíž úseky na souřadnicových osách jsou $-c : a$, $-c : b$ a nezávisí tedy na úhlu ω. Speciálně $x\cos\alpha + y\cos(\omega - \alpha) - d = 0$ vyjadřuje přímku v normálním tvaru (co značí α, d, jak převedete obecný tvar přímky na normální?). Rovnice přímky, která prochází dvěma body $B_i\,(x_i; y_i)$, $i = 1, 2$ zní

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Užívajíce předcházejících výsledků, můžeme napsati ihned rovnici kružnice, která má střed $(m; n)$ a poloměr r; zní

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + 2\,(x - m)\,(y - n)\cos\omega - r^2 = 0.$$

Obráceně každá rovnice tvaru

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega + 2m'x + 2n'y + p = 0$$

vyjadřuje kružnici; určete její střed a poloměr! Jednoduchý tvar má také rovnice hyperboly o poloosách a, b, jestliže ji vztáhneme k asymptotám jako souřadnicovým osám; zní $xy = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$ čili $xy = \frac{1}{4}e^2$. Poněvadž mezi poloosami a, b a úhlem asymptot ω platí $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\omega = b : a$ čili $\sin \omega = 2ab : (a^2+b^2)$, lze rovnici této křivky psáti také ve tvaru

$$xy \sin \omega = \tfrac{1}{2}ab.$$

Úlohy k tomuto odstavci: 8—15.

Kartézské souřadnice přímky. A. Definice. Rovnici obecné přímky v kartézských souřadnicích můžeme psáti ve tvaru

$$ux + vy + 1 = 0; \tag{5}$$

tato přímka utíná na souřadnicových osách úseky

$$p = -\frac{1}{u}, \quad q = -\frac{1}{v}. \tag{6}$$

I je každou dvojicí čísel u, v, z nichž aspoň jedno je od nuly rozdílné, určena jediná přímka, a obráceně. Můžeme tedy dvojici $[u; v]$ považovati za souřadnice přímky; souřadnice takto definované nazýváme přímkové souřadnice (nebo Plückerovy souřadnice). Jejich geometrický význam vyplývá z rovnic (6): jsou to záporně vzaté reciproké hodnoty úseků, které přímka tvoří na kartézských souřadnicových osách. Soustava přímkových souřadnic je určena jednoznačně oběma souřadnicovými osami a t. zv. jednotkovou přímkou $j\,[1; 1]$ (vyložte její význam!).

Je-li přímka rovnoběžná s osou x resp. y, má souřadnice $[0; v]$ resp. $[u; 0]$. Přímka, jejíž souřadnice jsou $[0; 0]$, je nekonečně vzdálená přímka roviny (nevlastní přímka; proč?). A pod.

B. Zákon duality. Rovnice (5) vyjadřuje t. zv. podmínku incidence: ukazuje, jaký vztah musí splňovati souřadnice $(x; y)$ a $[u; v]$, aby bod $(x; y)$ ležel na přímce $[u; v]$

(aby bod a přímka byly incidentní). Lze pak na tuto rovnici nahlížeti dvojím způsobem: buďto ji pokládati za *bodovou rovnici přímky*, jejíž úseky na osách jsou $-u^{-1}, -v^{-1}$, když u, v jsou konstanty a x, y proměnné, nebo za *přímkovou rovnici bodu* $(x; y)$, když u, v jsou proměnné a x, y konstanty. Na této dvojí interpretaci se zakládá pro geometrii důležitý *zákon duality*. Bodu, kolem něhož se přímka otáčí, odpovídá přímka, kterou bod popisuje. Všem bodům přímky (přímé řadě bodové) odpovídají všechny přímky jdoucí jedním bodem (svazek přímek). Bodu jakožto průsečíku dvou přímek odpovídá duálně přímka jako spojnice dvou bodů. Zejména pak křivce jako souhrnu jejích bodů odpovídá křivka jako souhrn (obálka) jejích tečen.[12])

Analytický význam zákona duality nám nejlépe objasní příklady. Rovnice

$au + bv + c = 0$	$ax + by + c = 0$
vyjadřuje bod $(a : c; b : c)$;	vyjadřuje přímku $[a : c; b : c]$;
$u = a, \; v = b$	$x = a, \; y = b$
vyjadřují přímku $[a; b]$;	vyjadřují bod $(a; b)$;
$u = 0, \; v = 0$	$x = 0, \; y = 0$
vyjadřují přímku nevlastní;	vyjadřují počátek;
$\frac{1}{u} = 0, \frac{1}{v} = 0$	$\frac{1}{x} = 0, \frac{1}{y} = 0$
vyjadřují přímku jdoucí počátkem;	vyjadřují nevlastní bod;
$u = a$, v libovolné resp. u libovolné, $v = b$	$x = a$, y libovolné resp. x libovolné, $y = b$
vyjadřují bod na ose úseček resp. pořadnic;	vyjadřují přímku rovnoběžnou s osou pořadnic resp. úseček;
$au + bv = 0$	$ax + by = 0$
vyjadřuje bod nevlastní přímky.	vyjadřuje přímku jdoucí počátkem.

[12]) Odtud také jiné pojmenování: *souřadnice tečnové* (*tangenciální*).

A dále výraz $\dfrac{ux + vy + 1}{\underset{+}{\sqrt{u^2 + v^2}}}$ vyjadřuje za předpokladu, že kartézská soustava je pravoúhlá, absolutně vzdálenost bodu $(x; y)$ od přímky $[u; v]$; výraz $\pm \dfrac{u_2 v_1 - u_1 v_2}{u_1 u_2 + v_1 v_2}$ vyjadřuje úhel dvou přímek $[u_i; v_i]$, $i = 1, 2$ (kdy jsou rovnoběžné, kolmé?). A pod. ([3])

C. Transformace bodových souřadnic na přímkové. Pro jednoduchost se omezíme na pravoúhlé souřadnice. Budiž dána křivka s bodovou rovnicí $F(x; y) = 0$. Její tečna v bodě $(x; y)$ a v souřadnicích X, Y zní

$$(X - x)\, F'_x + (Y - y)\, F'_y = 0$$

$$\left(F'_x = \frac{\partial F}{\partial x},\ F'_y = \frac{\partial F}{\partial y};\ y' = -\frac{F'_x}{F'_y}\right)$$

její přímkové souřadnice jsou

$$u = -\frac{F'_x}{xF'_x + yF'_y},\quad v = -\frac{F'_y}{xF'_x + yF'_y}. \qquad (*)$$

Vyloučíme-li z rovnic (*) a z rovnice dané křivky proměnné x, y, dostaneme přímkovou (tečnovou) rovnici této křivky. Na př. pro kružnici $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ nalezneme $u^2 + v^2 - r^{-2} = 0$.

Je-li obráceně dána křivka přímkovou (tečnovou) rovnicí $F(u, v) = 0$, tu rovnice její tečny je $ux + vy + 1 = 0$, rovnice blízké tečny je $(u + \mathrm{d}u)\, x + (v + \mathrm{d}v)\, y + 1 = 0$ a průsečík obou těchto přímek má souřadnice

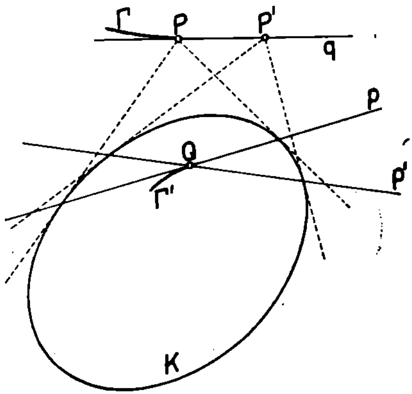
$$x = -\frac{\mathrm{d}v}{u\,\mathrm{d}v - v\,\mathrm{d}u},\quad y = \frac{\mathrm{d}u}{u\,\mathrm{d}v - v\,\mathrm{d}u}$$

čili

$$x = -\frac{F'_u}{uF'_u + vF'_v},\quad y = -\frac{F'_v}{uF'_u + vF'_v}. \qquad (**)$$

Vyloučíme-li z rovnic (**) a z rovnice dané křivky proměnné u, v, dostaneme bodovou rovnici této křivky. Hledáme-li na př. křivku s vlastností, že souřadnicové osy utínají na jejích tečnách úsek stálé délky r, tu její přímková (tečnová) rovnice je $u^{-2} + v^{-2} - r^2 = 0$ a bodová rovnice $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - r^{\frac{2}{3}} = 0$. Sestrojte tuto křivku jako obálku tečen (sluje **astroida**)!

D. **Polární reciprocita.** Studium čar s rovnicí $F(u, v) = 0$ lze jednoduše převésti na studium čar s rovnicí $F(x, y) = 0$. Uvažujme kuželosečku K a obecný bod P; jeho polára vzhledem ke K budiž p (viz obr. 3). Polára bodu P', blízkého k bodu P, budiž p'. Obě poláry p, p' nechť se protínají v bodě Q.



Obr. 3.

Jestliže body P vyplňují křivku Γ, tu poláry p obalují jinou křivku Γ' a vzájemná souvislost křivek Γ, Γ' je tato: tečnám q křivky Γ (t. j. mezným polohám spojnic bodů P, P') odpovídají body Q křivky Γ', a všem tečnám p křivky Γ' odpovídají body P křivky Γ (póly polár p vzhledem ke K). Dvě křivky Γ, Γ', které jsou v takovém vztahu, nazýváme **polárně reciprokými** vzhledem ke kuželosečce K (jinak: křivka Γ resp. Γ' je polarisována ke křivce Γ' resp. Γ vzhledem ke kuželosečce K).

Zvolme za základní kuželosečku K (imaginární) kružnici

$$X^2 + Y^2 + 1 = 0. \tag{7}$$

Poláry bodů $(x; y)$, $(x + \mathrm{d}x; y + \mathrm{d}y)$ jsou $xX + yY + 1 = 0$, $(x + \mathrm{d}x)\,X + (y + \mathrm{d}y)\,Y + 1 = 0$, a jejich průsečík má souřadnice

$$X = -\frac{dy}{x\,dy - y\,dx}, \quad Y = \frac{dx}{x\,dy - y\,dx}.$$

Jestliže body $(x; y)$ leží na křivce $F(x, y) = 0$, tu rovnice její tečny je $(X - x)\,dy - (Y - y)\,dx = 0$ a její souřadnice jsou dány vztahy

$$u = -\frac{dy}{x\,dy - y\,dx}, \quad v = \frac{dx}{x\,dy - y\,dx}.$$

Platí tedy $X = u$, $Y = v$. Došli jsme tak k větě: Rovnice křivky v pravoúhlých přímkových souřadnicích u, v je zároveň rovnicí její polárně reciproké křivky vzhledem ke kružnici, která v pravoúhlých bodových souřadnicích x, y je vyjádřena rovnicí $x^2 + y^2 + 1 = 0$, jestliže v rovnici dané křivky nahradíme souřadnice přímkové bodovými. A obráceně. Máme-li tedy studovati křivku s rovnicí $F(u, v) = 0$ v pravoúhlých přímkových souřadnicích, budeme studovati křivku s rovnicí $F(x, y) = 0$ v pravoúhlých bodových souřadnicích (což je úloha jednodušší) a odvodíme si její polární vlastnosti vzhledem ke kružnici (7). ([4])[13])

Úlohy k tomuto odstavci: 16—26.

Jiné druhy přímkových souřadnic. Předpokládáme-li pravoúhlou soustavu jako základní, tu normální rovnici obecné přímky můžeme psáti ve tvaru

$$x \cos t + y \sin t - f = 0 \quad \text{resp.} \quad x + y \operatorname{tg} t - p = 0, \qquad (8)$$

v němž značí tedy f délku kolmice s počátku na přímku spuštěné a t úhel této kolmice s osou $+x$, p je úsek přímky na ose x.

---

[13]) Na místo čísel u, v lze za souřadnice přímky vzíti přímo čísla p, q (souřadnice úsekové). ([5]) Je-li dána křivka bodovou kartézskou rovnicí $F(x, y) = 0$, tu její rovnice v úsekových souřadnicích je výsledkem eliminace x, y z dané rovnice a z rovnic

$$p = x - y\frac{dx}{dy}, \quad q = y - x\frac{dy}{dx};$$

je-li křivka dána úsekovou rovnicí $F(p, q) = 0$, tu její bodová kartézská rovnice je výsledkem eliminace p, q z dané rovnice a z rovnic

$$x = p^2 : \left(p - q\frac{dp}{dq}\right), \quad y = q^2 : \left(q - p\frac{dq}{dp}\right).$$

Dokažte!

Obráceně obecná dvojice $[f; t]$ $(f > 0,\ 0 < t < 2\pi)$ resp. $[p; t]$ určuje jedinou přímku. Můžeme tedy čísla f, t resp. p, t vzíti za souřadnice přímky; dospíváme tak k souřadnicím normálním resp. axiálním. Předpokládáme-li, že f resp. p jsou funkcemi úhlu t, t. j. $f = f(t)$, $p = p(t)$, a že úhel t nabývá všech možných hodnot, tu rovnice (8) představují ∞^1 přímek, které obecně jsou tečnami nějaké křivky Γ. I můžeme takové rovnice považovati za tečnové rovnice této čáry; mluvíme pak o normální (také magické) resp. axiální rovnici křivky.(*)

Další vlastnosti těchto souřadnic v úlohách: 27—30.

Homogenní souřadnice bodu a přímky. A. Definice. Za předpokladu, že základní soustava je obecně kosoúhlá, položme

$$\left.\begin{array}{l} x : z \text{ místo } x,\ y : z \text{ místo } y \text{ resp.} \\ u : w \text{ místo } u,\ v : w \text{ místo } v, \end{array}\right\} \tag{9}$$

při čemž předpokládáme, že aspoň jedno z čísel x, y, z resp. u, v, w je rozdílné od nuly. I určuje obecná trojice čísel $(x; y; z)$ resp. $[u; v; w]$ jediný bod resp. přímku, jehož (jejíž) kartézské souřadnice jsou $\left(\dfrac{x}{z}; \dfrac{y}{z}\right)$ resp. $\left[\dfrac{u}{w}; \dfrac{v}{w}\right]$. To však již neplatí obráceně. Dovedeme totiž udati vždy nekonečně mnoho trojic x, y, z resp. u, v, w, jejichž poměr má dané hodnoty $\dfrac{x}{z}, \dfrac{y}{z}$ resp. $\dfrac{u}{w}, \dfrac{v}{w}$ a které tedy vedou na týž bod resp. přímku. Bod (přímka), který je určen trojicí x, y, z (u, v, w), je určen také každou trojicí $\varrho x, \varrho y, \varrho z$ $(\varrho u, \varrho v, \varrho w)$, kde $\varrho \neq 0$; obráceně, jsou-li x, y, z (u, v, w) „souřadnice“ bodu (přímky), má týž bod (přímka) také „souřadnice“ $\sigma x, \sigma y, \sigma z$ $(\sigma u, \sigma v, \sigma w)$, kde $\sigma \neq 0$. Záleží tedy jen na poměru těchto tří hodnot, a to jsou dvě nezávislá čísla, tedy tolik čísel, kolik má bod (přímka) v rovině „stupňů volnosti“.

Proto nazýváme tato čísla poměrné nebo Hesseovy souřadnice bodu (přímky). Poněvadž každá algebraická rovnice $F(x, y) = 0$ resp. $F(u, v) = 0$ stane se po zavedení těchto nových proměnných podle pokynů (9) homogenní, nazývají se tyto souřadnice častěji homogenní souřadnice bodu (přímky). Obráceně z homogenní rovnice vznikne nehomogenní (kartézská) rovnice, když prostě položíme $z = 1$ ($w = 1$). V homogennosti těchto souřadnic záleží také největší jejich význam.

B. Základní vlastnosti homogenních souřadnic. Homogenní souřadnice počátku jsou patrně $(0; 0; z)$, kde $z \neq 0$, tedy nejjednodušeji $(0; 0; 1)$. Bod o souřadnicích $(x; 0; z)$ resp. $(0; y; z)$, kde $x, z \neq 0$ resp. $y, z \neq 0$, leží na ose x resp. y. Je tedy $(x; 0; 0)$ resp. $(0; y; 0)$ nebo nejjednodušeji $(1; 0; 0)$ resp. $(0; 1; 0)$ nevlastní bod osy x resp. y. Bod, jehož všechny homogenní souřadnice by byly rovny nule, neexistuje. Přímka jdoucí počátkem má homogenní souřadnice $[u; v; 0]$; souřadnice osy x resp. y jsou $[0; v; 0]$ resp. $[u; 0; 0]$, nejjednodušeji $[0; 1; 0]$ resp. $[1; 0; 0]$. Přímka, jejíž všechny homogenní souřadnice by byly rovny nule, neexistuje.

Homogenní rovnice přímky má tvar

$$ax + by + cz = 0, \tag{10}$$

a obráceně. Obsahuje-li přímka nevlastní body os, je v tomto případě $p = -c : a = \infty$, $q = -c : b = \infty$ čili $a = b = 0$, a rovnice (10) za předpokladu, že $c \neq 0$ (kdyby bylo $c = 0$, procházela by přímka počátkem a nemohla by obsahovat nevlastní body souřadnicových os), má tvar

$$z = 0. \tag{11}$$

Tato rovnice však vyjadřuje všechny nevlastní body roviny (proč?), je tedy rovnicí nevlastní přímky roviny. Její souřadnice jsou $[0; 0; w]$ nebo nejjednodušeji $[0; 0; 1]$. V homogenních souřadnicích lze tedy s nevlastními útvary (s útvary v nekonečnu) zacházeti jako s útvary v konečnu. V této vlastnosti záleží další význam těchto souřadnic.

Podmínka incidence bodu $(x; y; z)$ a přímky $[u; v; w]$ je vyjádřena rovnicí

$$ux + vy + wz = 0. \tag{12}$$

Dvojí interpretace této rovnice (která?) umožňuje nám opět přenášeti vlastnosti odvozené pro body na přímky, a obráceně (zákon duality). Na př. z kartézské rovnice přímky, jdoucí dvěma body, obdržíme ihned homogenní rovnici takové přímky; zní

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Duálně rovnice

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0$$

vyjadřuje tedy bod, v němž se protínají dvě přímky. Uveďte jiné příklady!

Protneme-li kružnici

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega + 2m'xz + 2n'yz + pz^2 = 0$$

nevlastní přímkou, obdržíme

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega = 0 \quad \text{čili} \quad \frac{y}{x} = -\cos\omega \pm i\sin\omega. \quad (13)$$

Protíná tedy nevlastní přímka každou kružnici v týchž dvou komplexně sdružených bodech $(1; -\cos\omega \pm i\sin\omega; 0)$; průsečíky tyto se nazývají body kruhové, jejich spojnice s počátkem mají rovnici (13) a nazývají se přímky isotropické. V homogenních pravoúhlých souřadnicích jsou kruhové body $(1; \pm i; 0)$, isotropické přímky $x^2 + y^2 = 0$ čili $x \pm \pm iy = 0$. Snadno dokážeme tyto tři vlastnosti isotropických přímek: 1. Jsou samy k sobě kolmé (rozšíříme-li ovšem obvyklou definici úhlu i na elementy imaginární). 2. Úhel isotropické přímky s obecnou přímkou je konstantní. 3. Průvodiče měřené na isotropických přímkách mají nulovou délku (odtud jiný název: minimální přímky).

S hlediska duality odpovídá počátku $(0; 0; z)$ nevlastní přímka $[0; 0; w]$, kruhovým bodům $(1; \pm i; 0)$ isotropické přímky $[1; \pm i; 0]$. Vyložte podrobněji![7]

C. Tečna v homogenních souřadnicích. Budiž $F(x, y, z) = 0$ algebraická křivka n-ho stupně. Označíme-li na okamžik nehomogenní souřadnice pruhy, tu platí $x = \bar{x}z$, $y = \bar{y}z$ a tedy

$$dx = \bar{x}\,dz + z\,d\bar{x}, \quad dy = \bar{y}\,dz + z\,d\bar{y}.$$

Z rovnice čáry však plyne

$$\mathrm{d}F \equiv \frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial F}{\partial z}\,\mathrm{d}z = 0;$$

tedy po dosazení podle předcházejících vztahů

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\,\bar{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\,\bar{y} + \frac{\partial F}{\partial z}\right)\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}\bar{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}\bar{y}\right) z = 0,$$

po zavedení homogenních souřadnic

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\,x + \frac{\partial F}{\partial y}\,y + \frac{\partial F}{\partial z}\,z\right)\frac{\mathrm{d}z}{z} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}\bar{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}\bar{y}\right) z = 0.$$

Podle Eulerovy věty o homogenních funkcích[14]) je výraz v první závorce rovný nule, takže pro body v konečnu ($z \neq 0$) platí

$$\bar{y}' = \frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}\bar{x}} = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Rovnice tečny v bodě $(\bar{x}; \bar{y})$ zní

$$\bar{Y} - \bar{y} = \bar{y}'\,(\bar{X} - \bar{x}),$$

nebo — zavedeme-li homogenní souřadnice —

$$\frac{X}{Z}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{Y}{Z}\frac{\partial F}{\partial y} - \left(\frac{x}{z}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{y}{z}\frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0.$$

Použitím Eulerovy věty se tento výraz zjednoduší na

$$X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} + Z\frac{\partial F}{\partial z} = 0; \tag{14}$$

touto rovnicí je tedy vyjádřena tečna dané křivky v homogenních souřadnicích. O souřadnicích této tečny platí

$$u : v : w = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z},$$

v nehomogenních souřadnicích

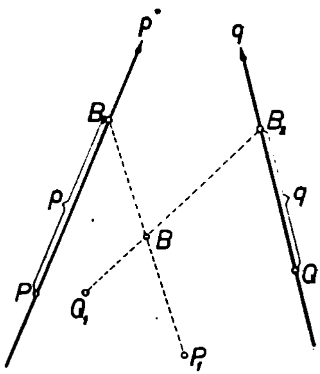
$$\bar{u} = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial z},\ \bar{v} = \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}.\,(^8)$$

Úlohy k tomuto odstavci: 31—36.

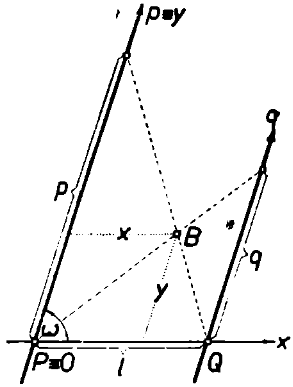
[14]) Věta Eulerova o homogenní funkci $F(x, y, z)$ stupně n:

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = nF.$$

Nomografické souřadnice. Polohu bodu v rovině velmi obecně můžeme určiti takto: Zvolíme dvě obecné přímky p, q (souřadnicové nebo nomografické osy; obr. 4), které orientujeme, na nich body P, Q (počátky) a mimo osy další dva body P_1, Q_1 (středy). Polohu obecného bodu B určíme čísly p, q, jak naznačuje obrázek. A obráceně. Souřadnice takto definované nazýváme (obecné) nomografické souřadnice bodu.(9)



Obr. 4.



Obr. 5.

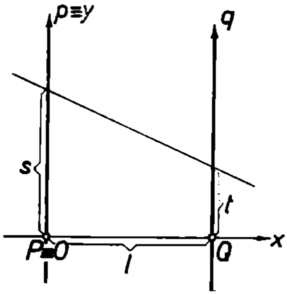
A. Nomografické souřadnice bodu. Zvolme osy tak, aby $p \uparrow\uparrow q$, počátky a středy tak, aby $P \equiv P_1$, $Q \equiv Q_1$. Souřadnice bodu takto definované slují (obyčejné) nomografické souřadnice bodu. Zvolíme-li kartézskou soustavu, jak ukazuje obr. 5, platí zřejmě

$$x = lp : (p + q), \quad y = pq : (p + q) \tag{15}$$

a obráceně

$$p = ly : (l - x), \quad q = ly : x. \tag{16}$$

B. Nomografické souřadnice přímky. V soustavě nomografických souřadnic takto definovaných je obecná přímka jednoznačně určena úseky s, t, které utíná na nomografických osách. A obráceně. (Vyložte podrobněji!) Zvláštní pozornosti si zaslouží pravoúhlé nomografické souřadnice přímky ($\omega = \frac{1}{2}\pi$). Základními prvky této soustavy jsou dva body (počátky P, Q) a jejich spojnice (osa PQ), což jsou duální prvky k prvkům pravoúhlé soustavy, dvěma přímkám (osám x, y) a jejich průsečíku (počátku O). Tímto duálním způsobem zavedli tyto souřadnice Unverzagt a Schwering, slují proto také souřadnice Unverzagtovy-Schweringovy (také souřadnice duální k pravoúhlým). Zvolíme-li pravoúhlou soustavu, jak ukazuje obr. 6, platí zřejmě



Obr. 6.

$$u = (t - s) : ls, \quad v = -1 : s \tag{17}$$

a obráceně

$$s = -1 : v, \quad t = -(1 + lu) : v. \text{(}^{10}\text{)} \tag{18}$$

Další vlastnosti nomografických souřadnic v úlohách: 37—48.

Úlohy ke cvičení.

1. Prozkoumejte středové souřadnice v případě, že střed S se nachází na kolmici vztyčené k ose v počátku!

[V rovnicích (1), (2) položte $m = 0$.]

2. Napište rovnici Nikomedovy konchoidy $\eta = \pm k$ v pravoúhlých souřadnicích! Sestrojte tuto křivku, rozeznávajíce případy, kdy $k \gtreqless n$! Ukažte, že vhodnou volbou počátku pravoúhlé soustavy lze rovnici čáry v této soustavě ještě zjednodušit!

[$(x - m)^2 y^2 + (y - n)^2 (y^2 - k^2) = 0$; pro $k > n$ má křivka střed S za dvojnásobný bod, pro $k = n$ má tu hrot, pro $k < n$ je střed t. zv. isolovaný bod, osa o je asymptota křivky; transformací $'x = x - m$, $'y = y - n$.]

3. Napište rovnice kosé a kolmé strofoidy v pravoúhlých souřadnicích a sestrojte tyto křivky!

[Rovnice kosé strofoidy zní $(x^2 + y^2)\,y + n\,(x^2 - y^2) - 2mxy = 0$; počátek O je dvojnásobný bod, osa o je asymptota.]

4. Jak zní rovnice křivky $a\xi + b\eta + c = 0$ $(a, b, c \neq 0)$ v pravoúhlých souřadnicích?

[Křivka 4. stupně, kterou transformací z 2. úlohy lze uvésti na tvar $(x^2 + y^2)\,(y + n)^2 - (Ax + By)^2 = 0$; křivku tu sestrojíme nejsnadněji s pomocí polárních souřadnic, o nichž bude pojednáno ve čtvrté kapitole.]

5. Za souřadnicovou čáru na místě osy o lze zvolit i jinou křivku. Zvolte na př. kružnici a v případě, že $O \equiv S$ sestrojte křivku s rovnicí $\eta = \pm k$ pro $k \gtreqless 2r$, kde r značí poloměr zvolené kružnice (sluje Pascalova závitnice, spec. pro $k = 2r$ kardioida)!

[Jestliže je $k > 2r$, je bod $O \equiv S$ dvojnásobný, jestliže je $k = 2r$, je hrotem, pro $k < 2r$ je to bod isolovaný. Křivky jsou 4. stupně; napište ve vhodně zvolené pravoúhlé soustavě jejich rovnice!]

6. Jak se specialisuje souřadnicová soustava, uvedená v 5. úloze, zvolíme-li její střed ve středu souřadnicové kružnice? Jak je v této soustavě vyjádřena kružnice se středem v bodě S a s poloměrem a?

[Soustava ta je ve velmi jednoduchém vztahu k polární soustavě (tyto souřadnice budou vyloženy ve čtvrté kapitole); $\eta = a - r$.]

7. Vyšetřete souřadnicovou soustavu, v níž poloha bodu je určena jeho vzdálenostmi od pevného bodu (počátku) a pevné přímky (osy)!

[Jsou-li $(0; n)$ pravoúhlé souřadnice počátku a $y = 0$ rovnice osy, platí $x = \sqrt{\xi^2 - (\eta - n)^2}$, $y = \eta$ a obráceně $\xi = \sqrt{x^2 + (y - n)^2}$, $\eta = y$; obecné dvojici $(\xi; \eta)$ odpovídají čtyři body. Co vyjadřují rovnice $\xi = k$, $\eta = k$, $\xi = \eta$, $\xi - k\eta = 0$ $(k = \text{konst.})$?]

8. Dokažte početně, že středové souřadnice přejdou v kosoúhlé, jestliže střed S se vzdálí do nekonečna po přímce OS!

[V rovnicích (2′) položte nejprve $n : m = \operatorname{tg} \omega$ a poté $\lim n \to \infty$; obdržíte rovnice, které platí pro přechod kosoúhlých souřadnic na pravoúhlé. Viz také 9. úlohu.]

9. Napište transformační rovnice, které platí mezi a) dvěma pravoúhlými soustavami, je-li čárkovaná k nečárkované na-

točena o úhel α, b) pravoúhlou soustavou a kosoúhlou, jestliže osa úseček kosoúhlé (čárkované) soustavy svírá úhel α s osou úseček pravoúhlé (nečárkované) soustavy, speciálně pro $\alpha = 0$!

[Za předpokladu, že počátky obou soustav splývají, obdržíme specialisací rovnic (3) a (4): a) $x = {}'x \cos \alpha - {}'y \sin \alpha$, $y = {}'x \sin \alpha + {}'y \cos \alpha$ a obráceně ${}'x = x \cos \alpha + y \sin \alpha$, ${}'y = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$, b) $x = {}'x \cos \alpha + {}'y \cos (\alpha + \omega)$, $y = {}'x \sin \alpha + {}'y \sin (\alpha + \omega)$ a obráceně ${}'x \sin \omega = x \sin (\alpha + \omega) - y \cos (\alpha + \omega)$, ${}'y \sin \omega = - x \sin \alpha + y \cos \alpha$, spec. $x = {}'x + {}'y \cos \omega$, $y = {}'y \sin \omega$ a obráceně ${}'x \sin \omega = x \sin \omega - y \cos \omega$, ${}'y \sin \omega = y$. Jak zní rovnice a), b) v případě, že počátky obou soustav jsou různé?]

10. V kosoúhlých souřadnicích vyjádřete obsah trojúhelníka s vrcholy $B_i\,(x_i; y_i)$, $i = 1, 2, 3$!

$$\left[\tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \sin \omega\right]$$

11. V kosoúhlých souřadnicích vyjádřete a) tangentu úhlu, který svírá spojnice dvou bodů s osou $+x$, b) vzdálenost přímky $ax + by + c = 0$ od počátku!

$$\left[\text{a)}\ \frac{(y_2 - y_1) \sin \omega}{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) \cos \omega},\ \text{b)}\ \frac{c \sin \omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \omega}}\right]$$

12. V kosoúhlých souřadnicích napište rovnici kružnice, která a) prochází počátkem, b) dotýká se v počátku osy pořadnic, c) dotýká se obou souřadnicových os, d) prochází body $(0; 0)$, $(b; 0)$, $(0; a)$!

[a) $x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega + 2m'x + 2n'y = 0$; určete její střed a poloměr! b) $x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega \pm 2rx \sin \omega = 0$, c) $x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega \pm 2x\sqrt{p} \pm 2y\sqrt{p} + p = 0$ (čtyři kružnice), d) $x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega - bx - ay = 0$.]

13. Jak zní rovnice strofoidy v kosoúhlých souřadnicích?

[Vyjděme z výtvarného zákona této křivky, daného v středových souřadnicích rovnicí $\xi = \pm \eta$! Obdržíme tedy rovnici křivky, jestliže vyloučíme parametr λ z rovnice $\frac{x}{a} + \frac{y}{\lambda} - 1 = 0$, která vyjadřuje svazek přímek o středu $(a; 0)$, a z rovnice $x^2 + (y - \lambda)^2 + 2x\,(y - \lambda) \cos \omega - \lambda^2 = 0$, která vyjadřuje kružnice se středem $(0; \lambda)$ a s poloměrem λ. Výsledek je $(x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega)\, x - a\,(x^2 - y^2) = 0$. Přímky $x \pm y = 0$ jsou tečny křivky v počátku (dvojnásobném bodě), přímka $x + a = 0$ je její asymptota. Jak se tyto výsledky specialisují pro kolmou strofoidu?]

14. Budiž dána kružnice a na ní dva pevné body O a T; v bodě T sestrojme tečnu. Obecná přímka svazku o středu O protne kružnici v dalším bodě M, tečnu v bodě M'. Naneseme-li na tuto přímku úsečku $\overline{MM'}$ od bodu O i co do smyslu, vytvoří geometrické místo bodů B takto získaných ($\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{MM'}$) t. zv. kosou kisoidu. Jaká je její rovnice v kosoúhlých souřadnicích?

[Bod O zvolme za počátek, přímku $\overrightarrow{OT}$ za osu $+x$, rovnoběžku k tečně v bodě T za osu y. Daná kružnice má pak rovnici

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega - a(x + 2y \cos \omega) = 0, \quad (a = \overline{OT}),$$

přímka svazku budiž $y = \lambda x$ (λ parametr). Jestliže z této rovnice a z rovnice $x = a\left(1 - \dfrac{1 + 2\lambda \cos \omega}{1 + 2\lambda \cos \omega + \lambda^2}\right)$, která platí podle sestrojení bodu B, vyloučíme parametr λ, nalezneme rovnici křivky ve tvaru $(x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega)\, x - ay^2 = 0$. Leží-li body O, T na jednom průměru, je $\omega = \frac{1}{2}\pi$ a kosá kisoida přejde v kolmou (Dioklovu) kisoidu $(x^2 + y^2)\, x - ay^2 = 0$.]

15. V kosoúhlých souřadnicích napište výraz pro a) směrnici tečny $y' = \mathrm{d}y : \mathrm{d}x$, b) úhel τ, který svírá tečna s osou úseček, c) kosoúhlou subtangentu, d) kosoúhlou tečnu (délku tečny)!

[a) $y' = \sin \tau : \sin(\omega - \tau)$, b) $\operatorname{tg} \tau = y' \sin \omega : (1 + y' \cos \omega)$, c) $y : y'$, d) $y\sqrt{1 + 2y' \cos \omega + y'^2} : y'$.]

16. Interpretujte duálně větu: Dělicí poměr λ bodu $B\,(x; y)$ vzhledem k bodům $B_i\,(x_i; y_i)$, $i = 1, 2$ je $\lambda = \overrightarrow{BB_1} : \overrightarrow{BB_2}$, jeho pravoúhlé souřadnice jsou $x = (x_1 - \lambda x_2) : (1 - \lambda)$, $y = (y_1 - \lambda y_2) : (1 - \lambda)$!

[Dělicí poměr λ přímky $p\,[u; v]$ vzhledem k přímkám $p_i\,[u_i; v_i]$, $i = 1, 2$ je $\lambda = \sin(p, p_1) : \sin(p, p_2)$, její souřadnice jsou $u = (u_1 - \lambda u_2) : (1 - \lambda)$, $v = (v_1 - \lambda v_2) : (1 - \lambda)$.]

17. Totéž učiňte pro věty: a) spojnice bodů $(x_i; y_i)$, $i = 1, 2$ má rovnici $(y - y_1)(x_2 - x_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1) = 0$, b) otáčí-li se přímka $y = kx + q$ kolem bodu $(x_0; y_0)$, je její rovnice $y - y_0 = k(x - x_0)$, c) dvě přímky $a_i x + b_i y + c_i = 0$, $i = 1, 2$ protínají se v bodě s kartézskými souřadnicemi $x = (b_1 c_2 - b_2 c_1) : (a_1 b_2 - a_2 b_1)$, $y = (a_2 c_1 - a_1 c_2) : (a_1 b_2 - a_2 b_1)$;

nutná a postačující podmínka, aby byly rovnoběžné, zní $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, d) aby tři přímky $a_ix + b_iy + c_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ se protínaly v jediném bodě, je nutné a stačí, když

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

[a) průsečík dvou přímek $[u_i; v_i]$ má rovnici $(v - v_1)(u_2 - u_1) - (u - u_1)(v_2 - v_1) = 0$, b) probíhá-li bod $v = ku + q$ přímkou $[u_0; v_0]$, je jeho rovnice $v - v_0 = k(u - u_0)$, c) dva body $a_iu + b_iv + c_i = 0$ určují přímku o souřadnicích $u = (b_1c_2 - b_2c_1) : (a_1b_2 - a_2b_1)$ atd., d) napsaný vztah je nutná a postačující podmínka, aby tři body $a_iu + b_iv + c = 0$ ležely v přímce.]

18. Jak se transformují přímkové souřadnice v případě, že obě soustavy jsou pravoúhlé a počátky splývají?

[Transformací přímky $ux + vy + 1 = 0$ podle úlohy 9a) nalezneme: $'u = u\cos\alpha + v\sin\alpha$, $'v = -u\sin\alpha + v\cos\alpha$ a obráceně $u = {}'u\cos\alpha - {}'v\sin\alpha$, $v = {}'u\sin\alpha + {}'v\cos\alpha$. Jaký tvar mají tyto rovnice v případě, že počátky obou soustav jsou různé? Jak je vyjádřena nejobecnější transformace přímkových souřadnic?]

19. Tečnovou rovnici kružnice se středem v počátku odvoďte přímo na základě vlastnosti, že její tečny mají od počátku touž vzdálenost!

$\left[\text{Vzdálenost přímky od počátku je } \dfrac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}!\right].$

20. Jak zní tečnová rovnice kružnice o středu $(m; n)$ a poloměru r?

$[(mu + nv + 1)^2 - r^2(u^2 + v^2) = 0]$

21. Odvoďte tečnové rovnice elipsy, hyperboly a paraboly v základních polohách!

$[a^2u^2 \pm b^2v^2 - 1 = 0,\ pv^2 - 2u = 0.]$

22. Dokažte, že přímková (tečnová) rovnice čar

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n - 1 = 0 \ (a, b, n \text{ konstanty})$$

(slují křivky Laméovy) zní

$$(-au)^{\frac{n}{n-1}} + (-bv)^{\frac{n}{n-1}} - 1 = 0!$$

Co vyjadřuje tato rovnice pro $n = 1, -1, 2, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ (také pro $a = b$)? Jak zní rovnice polárně reciproké křivky vzhledem ke kružnici (7)? Vyslovte výsledek větou!

[Pro $n = 1, -1, 2, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ obdržíme přímku, hyperbolu (jakou?), elipsu (hyperbolu, jestliže místo b položíme ib, $i = +\sqrt{-1}$; kružnici pro $a = b$), parabolu (jakou?), evolutu elipsy (hyperboly; speciálně pro $a = b$ astroidu). Polárně reciproká křivka je opět Laméova křivka, ale s jinými konstantami.]

23. Jak zní přímková (tečnová) rovnice kuželosečky

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0\,?$$

[$A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + 2A_{12}uv + 2A_{13}u + 2A_{23}v + A_{33} = 0$, při čemž $A_{ik} = A_{ki}$ ($i, k = 1, 2, 3$) jsou doplňky diskriminantu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.]$$

24. Jak zní přímková rovnice křivky, jejíž tečny a) omezují se souřadnicovými osami trojúhelník stálého obsahu, b) vytínají na souřadnicových osách úsečky o konstantním α) součtu, β) rozdílu, γ) součinu, δ) podílu!

[a) $kuv - 1 = 0$ čili $4xy - k = 0$, kde k je dvojnásobný obsah (hyperbola), b) $v + \varepsilon u + kuv = 0$ čili $\varepsilon(k - x - \varepsilon y)^2 = 4xy$, kde k je daný součet ($\varepsilon = +1$) nebo rozdíl ($\varepsilon = -1$); viz úlohu a); $v - ku = 0$ (co to znamená?). Vyšetřete kuželosečky sub α), β)!]

25. Kdy jsou křivky a) $b^2x^2 \pm a^2y^2 - 1 = 0$, b) $y^2 - 2px = 0$, c) $xy - k = 0$ autopolární vzhledem ke kružnici (7), t. j. kdy základní křivka splyne s křivkou polárně reciprokou?

[a) $a = b = \sqrt[4]{1}$, kružnice $x^2 + y^2 = \pm 1$, b) $p = \pm 1$, c) $k = \pm \frac{1}{2}$. Vyložte podrobněji!]

26. Co vyjadřuje v úsekových souřadnicích rovnice $apq + bp + cq + d = 0$ (a, b, c, d konstanty)?

[Kuželosečku $(bx + cy + d)^2 - 4(bc - ad)\,xy = 0$, která se dotýká souřadnicových os. Vyšetřete případy $a = 0$ resp. $bc - ad = 0$!]

27. Jak souvisí normální resp. axiální souřadnice s Plückerovými?

[$u = -\cos t : f$, $v = -\sin t : f$ a obráceně $f = 1 : \overset{+}{\sqrt{u^2 + v^2}}$, $t = \operatorname{arctg} \dfrac{v}{u}$ resp. $u = -1 : p$, $v = -\operatorname{tg} t : p$ a obráceně $p = -1 : u$, $t = \operatorname{arctg} \dfrac{v}{u}$.]

28. Jak zní pravoúhlé rovnice křivky, vyjádřené rovnicemi (8), jestliže f resp. p jsou funkcemi parametru t?

[Na základě rovnic, podle nichž se transformují přímkové souřadnice na bodové, nalezneme parametrické vyjádření $x = f(t) \cos t - f'(t) \sin t$, $y = f(t) \sin t + f'(t) \cos t$ resp. $x = p(t) - p'(t) \sin t \cos t$, $y = p'(t) \cos^2 t$, kde $f'(t) = \mathrm{d}f : \mathrm{d}t$, $p'(t) = \mathrm{d}p : \mathrm{d}t$.]

29. Jak zní normální resp. axiální rovnice a) kružnice, b) astroidy, c) geometrického místa pat kolmic spuštěných s počátku na tečny dané křivky (t. zv. úpatnice dané křivky vzhledem k počátku), d) křivky, jejíž tečny mají stále touž vzdálenost h od tečen dané křivky (t. zv. křivka paralelní k dané)?

[a) Střed $(m; n)$, poloměr r, $f = m \cos t + n \sin t + r$ resp. $p = m + n \operatorname{tg} t + r \sec t$, b) $p^2 + q^2 = a^2$, tedy $f = \frac{1}{2} a \sin 2t$ resp. $p = a \sin t$, c) $x = f \cos t$, $y = f \sin t$ resp. $x = p \cos^2 t$, $y = p \sin t \cos t$; proveďte výpočet pro astroidu (výsledkem je t. zv. čtyřlistá růžice, sestrojte ji!), d) $f_1 = f \pm h$ resp. $p_1 = p \pm h \sec t$.]

30. Jak zní rovnice normály křivky v souřadnicích normálních resp. axiálních?

[Souřadnice normály jsou $f'(t)$, $\frac{1}{2}\pi + t$ resp. $p(t) - p'(t) \operatorname{cotg} t$, $\frac{1}{2}\pi + t$.]

31. Určete nevlastní body hyperboly $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2z^2 = 0$!

[Leží na asymptotách $bx \pm ay = 0$ dané křivky.]

32. Jak zní rovnice tečny kuželosečky v obecné poloze?

[Kuželosečka má rovnici $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0$; tečna je dána rovnicí (14).]

33. Užívajíce výsledku předchozí úlohy, udejte podmínku, aby obecná přímka byla tečnou obecné kuželosečky!

[Srovnáním koeficientů v rovnicích $(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) X + (a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z) Y + (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z) Z = 0$ a $aX + bY + cZ = 0$ nalezneme podmínku

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = 0.]$$

34. Na základě výsledku předchozí úlohy napište rovnici kuželosečky v homogenních přímkových souřadnicích:

$$[\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & v \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0]$$

35. Kdy je obecná kuželosečka parabolou?

[Dotýká-li se nevlastní přímky; je tedy nutné a stačí, když $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$.]

36. Jsou-li $P = 0$, $Q = 0$ rovnice dvou přímek, co vyjadřuje rovnice $P^2 + \lambda Q = 0$, kde λ je proměnný parametr?

[Určete vztah k nevlastní přímce! Je to soustava parabol se společnou osou $P = 0$.]

37. Kartézská souřadnicová soustava je zvláštním případem obecné nomografické soustavy. Dokažte!

[$P \equiv Q \equiv O$, Q_1 resp. P_1 jsou nevlastní body os p resp. q.]

38. Které jsou obyčejné nomografické souřadnice a) počátků, b) os?

[a) $P\,(0; q)$, $Q\,(p; 0)$, kde p, q jsou libovolná čísla, b) $\dfrac{1}{q} = 0$ resp. $\dfrac{1}{p} = 0$.]

39. Kterou rovnicí je v obyčejných nomografických souřadnicích vyjádřena obecná přímka? Jakou rovnici má přímka nevlastní?

[$apq + bp + cq = 0$ (a, b, c konstanty). Které přímky jsou vyjádřeny touto rovnicí pro $b = 0$, $c = 0$, $a = 0$, $b = c = 0$, $a = c = 0$, $a = b = 0$? $p + q = 0$.]

40. Co vyjadřuje v obyčejných nomografických souřadnicích rovnice

$$apq + bp + cq + d = 0 \quad (a, b, c, d \text{ konstanty})?$$

[Kuželosečku, jdoucí body P, Q; její rovnice v kosoúhlých souřadnicích je $dx^2 - (b - c)\,lxy - al^2y^2 - dlx - cl^2y = 0$.]

41. Co vyjadřuje předchozí rovnice pro a) $b = c = 0$, b) $b = c$, $a = 0$?

[a) $pq = k$; kuželosečku dotýkající se nomografických os v počátcích. Vyšetřete ji podrobněji! Vyslovte větou geometrickou vlastnost, vyjádřenou nomografickou rovnicí této kuželosečky! b) $p + q = k$; parabolu, jdoucí nomografickými počátky P, Q! Vyšetřete ji podrobněji!]

42. Co vyjadřuje rovnice v 40. úloze pro $d = 0$? Udejte nutné a postačující podmínky, aby rovnice v 40. úloze vyjadřovala kružnici!

[Složenou kuželosečku; za předpokladu, že $d \neq 0$, dostaneme složenou kuželosečku také pro $bc - ad = 0$. $al^2 = -d$, $(c - b)l = 2d \cos \omega$.]

43. Prozkoumejte pravoúhlé nomografické souřadnice bodu! Které čáry jsou vyjádřeny rovnicemi a) $apq + bp + cq + d = 0$, b) $pq + m(p + q) - l^2 = 0$, c) $pq = \pm k^2$ a speciálně pro $k = l$, d) $p + q = k$?

[a) kuželosečka; vyšetřete ji podrobněji! b) kružnice, c) středová kuželosečka, speciálně kružnice a rovnoosá hyperbola, d) parabola.]

44. Jak se transformují obyčejné nomografické souřadnice přímky na a) kosoúhlé, b) pravoúhlé souřadnice přímky?

[a) $-1 : v = s$, $-1 : u = ls : (s - t)$, b) $-1 : u = ls : (s - t)$, $-1 : v = ls \sin \omega : [l + (t - s) \cos \omega]$. Jak zní tyto rovnice obráceně?]

45. Napište podmínku incidence v obyčejných nomografických souřadnicích!

$$\left[\frac{s}{p} + \frac{t}{q} - 1 = 0\right]$$

46. Které jsou nomografické souřadnice spojnice bodů (p_i, q_i), $i = 1, 2$? Odvoďte odtud nomografické souřadnice tečny křivky $F(p, q) = 0$ a nomografické souřadnice dotykového bodu tečny ke křivce $F(s, t) = 0$!

$$\left[\left[-\frac{p_1p_2(q_1 - q_2)}{p_1q_2 - p_2q_1}; -\frac{q_1q_2(p_1 - p_2)}{p_1q_2 - p_2q_1}\right],\right.$$
$$\left.\left[\frac{p^2\,\mathrm{d}q}{p\,\mathrm{d}q - q\,\mathrm{d}p}; -\frac{q^2\,\mathrm{d}p}{p\,\mathrm{d}q - q\,\mathrm{d}p}\right], \left(s - t\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}; t - s\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right).\right]$$

47. Co vyjadřuje v obyčejných nomografických souřadnicích rovnice

$$ast + bs + ct + d = 0 \ (a, b, c, d \text{ konstanty})?$$

[Kuželosečku; vyšetřete ji podrobněji!]

48. Křivku z 47. úlohy vyšetřete podrobněji v případě, že nomografická soustava je pravoúhlá. Jak zní rovnice této křivky v souřadnicích Plückerových?

[$dv^2 - cluv - (b + c)v + alu + a = 0$; vyšetřete některé zvláštní případy!]

III.

TRIMETRICKÉ A TETRACYKLICKÉ SOUŘADNICE.

Vyjádření bodu (přímky) pomocí tří bodů (přímek). A. Souřadnice bodu. V základní soustavě pravoúhlé buďtež dány tři body rovnicemi

$$B_i \equiv a_i u + b_i v + c_i = 0,\ i = 1, 2, 3; \tag{1}$$

jsou tedy jejich souřadnice $(a_i : c_i;\ b_i : c_i)$. Předpokládáme-li, že tyto body jsou v obecné poloze, pak determinant D soustavy (1) je různý od nuly (odůvodněte!) a rovnici každého dalšího bodu $B \equiv au + bv + c = 0$ lze vyjádřiti jako lineární kombinaci daných tří bodů, t. j. ve tvaru

$$B \equiv \sum_{k=1}^{3} l_k B_k = 0. \tag{2}$$

Jsou-li dána čísla l_i, je B bodem roviny; obráceně, jsou-li dány body B_i, pak po rozepsání této rovnice a po srovnání odpovídajících si členů obdržíme soustavu

$$\Sigma l_k a_k = \varrho a,\ \Sigma l_k b_k = \varrho b,\ \Sigma l_k c_k = \varrho c, \tag{3}$$

kde $\varrho \neq 0$ je koeficient úměrnosti, z níž lze vypočísti trojici l_1, l_2, l_3. Učiňte tak!

I určuje každá trojice l_i (s výjimkou trojice 0, 0, 0) a každá trojice s ní úměrná ϱl_i ($\varrho \neq 0$) jediný bod; obráceně, obecný bod určuje nekonečně mnoho trojic ϱl_i, navzájem úměrných [jsou to řešení soustavy (3), násobená libovolným koeficientem $\varrho \neq 0$]. Mají tedy čísla l_i vlastnosti homogenních bodových souřadnic; slují trojbodové souřadnice bodu.

Z rovnic (2) plyne

$$Dl_1 = \varrho \begin{vmatrix} a & a_2 & a_3 \\ b & b_2 & b_3 \\ c & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ a dva vztahy další,}$$

dále, označíme-li obsah trojúhelníka $B_1B_2B_3$ symbolem $(B_1B_2B_3)$ atd., je

$$2\,(B_1B_2B_3) = \frac{1}{c_1c_2c_3}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Platí tedy

$$l_1 = \varrho\,\frac{c}{c_1}\,\frac{(BB_2B_3)}{(B_1B_2B_3)} \text{ a dva vztahy další,}$$

a poněvadž $(BB_2B_3) = \frac{1}{2}\overline{B_2B_3}\,.\,d_1$, kde d_1 je délka kolmice, spuštěné s bodu B na stranu B_2B_3 atd., je posléze

$$l_1 = \varrho\,\frac{c}{c_1}\,\frac{\overline{B_2B_3}}{2\,(B_1B_2B_3)}\,.\,d_1 \text{ a dva další vztahy,}$$

$$l_2 = \varrho\,\frac{c}{c_2}\,\frac{\overline{B_3B_1}}{2\,(B_1B_2B_3)}\,.\,d_2,$$

$$l_3 = \varrho\,\frac{c}{c_3}\,\frac{\overline{B_1B_2}}{2\,(B_1B_2B_3)}\,.\,d_3.$$

I jsou trojbodové souřadnice čísla úměrná vzdálenostem bodu od stran trojúhelníka, který tvoří základní body.

B. Souřadnice přímky. Jsou-li dány tři přímky v obecné poloze

$$p_i \equiv a_ix + b_iy + c_i = 0,\ i = 1, 2, 3,\ (D \neq 0), \qquad (1')$$

lze rovnici každé další přímky vyjádřiti jako lineární kombinaci

$$p \equiv \sum_{k=1}^{3} \lambda_k p_k = 0, \qquad (2')$$

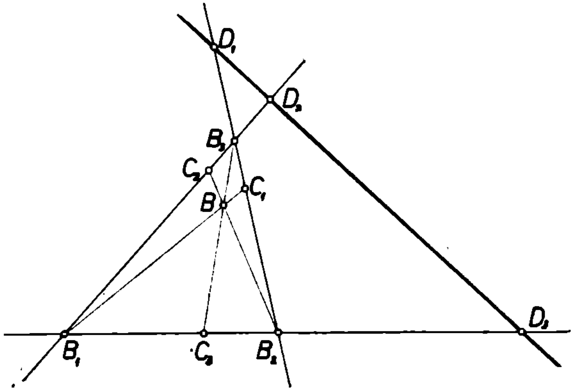
při čemž čísla λ_k jsou určena rovnicemi

$$\Sigma\lambda_k a_k = \varrho a,\ \Sigma\lambda_k b_k = \varrho b,\ \Sigma\lambda_k c_k = \varrho c,\ (\varrho \neq 0). \qquad (3')$$

Čísla λ_i slují **trojpřímkové souřadnice přímky.**

C. Harmonická polára a harmonický pól. Ukážeme si na příkladě, jak používáme trojbodových a trojpřímkových souřadnic.

Promítněme obecný bod $B\,(l_1 ; l_2 : l_3)$ ze základních bodů B_i na přímky B_jB_k; vzniknou tak body C_i, $i, j, k = 1, 2, 3$ (viz obr. 7). Ke každému průmětu C_i stanovme na přímce B_jB_k harmonicky sdružený bod D_i vzhledem k bodům B_j, B_k. Poněvadž



Obr. 7.

bod C_1 leží na spojnici B_2B_3, je jeho rovnice tvaru $C_1 \equiv \equiv m_2B_2 + m_3B_3 = 0$, poněvadž leží na spojnici BB_1, je také tvaru $C_1 \equiv nB + n_1B_1 = 0$ čili $C_1 \equiv (nl_1 + n_1)\,B_1 + nl_2B_2 + + nl_3B_3 = 0$. Musí tedy býti $nl_1 + n_1 = 0$ a dále $l_2 : l_3 = = m_2 : m_3$, takže rovnice bodu C_1 je $C_1 \equiv l_2B_2 + l_3B_3 = 0$. Má tudíž bod D_1 rovnici[15])

$$D_1 \equiv l_2B_2 - l_3B_3 \equiv (l_2a_2 - l_3a_3)\,u + (l_2b_2 - l_3b_3)\,v + \\ + (l_2c_2 - l_3c_3) = 0;$$

podobné výrazy nalezneme i pro body D_2 a D_3. Snadno se přesvědčíme, že determinant těchto tří rovnic je identicky

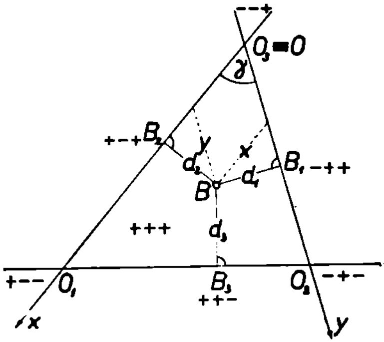
[15]) Bod, který je v přímé řadě bodové o základních bodech $B_1 = 0$, $B_2 = 0$ harmonicky sdružen s obecným bodem řady $l_1B_1 + l_2B_2 = 0$ vzhledem k oběma základním, má rovnici $l_1B_1 - l_2B_2 = 0$. A duálně.

rovný nule; leží proto tři body D_i v jedné přímce, která sluje **harmonická polára** nebo stručně **harmonikála** bodu B vzhledem k trojúhelníku (třírohu) $B_1B_2B_3$. Vyslovte větou vlastnost této přímky; napište její rovnici!

Duální úvahou k úvaze právě provedené, kterou přenecháváme čtenáři, dospíváme k pojmu **harmonického pólu** poláry p vzhledem k trojstranu $p_1p_2p_3$.(11)

Úlohy k tomuto odstavci: 1—5.

Normální souřadnice. A. **Absolutní souřadnice bodu.** Geometrická interpretace trojbodových souřadnic vede nás k tomuto určení polohy bodu: Zvolíme tři body O_1, O_2, O_3, které neleží v jedné přímce (symboly $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ atd. označíme příslušné veličiny trojúhelníka $O_1O_2O_3$, tedy $a = \overline{O_2O_3}$, $\alpha = O_2\widehat{O}_1O_3$ atd.). Pak obecný bod B určuje tři čísla $d_1 = \overline{BB_1}$, $d_2 = \overline{BB_2}$, $d_3 = \overline{BB_3}$ (viz obr. 8). Jednojednoznačná korespondence mezi bodem B a trojicí čísel d_i vyžaduje ovšem, abychom vzdálenosti d_i orientovali. To činíme takto: Trojúhelník $O_1O_2O_3$ dělí rovinu v sedm polí; bodům ve vnitřním poli přisuzujeme čísla d_i vesměs kladná, v ostatních polích jsou čísla d_i kladná a záporná podle toho, zda bod B leží vzhledem k odpovídající straně trojúhelníka $O_1O_2O_3$ na téže straně jako protilehlý vrchol nebo na straně opačné. Je však ihned patrno, že obráceně je poloha obecného bodu již určena, známe-li jen dvě z tří čísel d_i. I musí platit mezi čísly d_i nějaký vztah; ten vyplývá z rovnice [symboly $(O_1O_2O_3)$ atd. mají týž význam,



Obr. 8.

jako v předcházejícím odstavc

$$(O_1O_2O_3) = (BO_2O_3) + (O_1BO_3) + (O_1O_2B),$$

která platí pro každý bod B (odůvodněte!), a zní tedy

$$ad_1 + bd_2 + cd_3 = 2\Delta.\text{[16]} \qquad (4)$$

Čísla d_i, která splňují vztah (4), nazývají se **absolutní normální souřadnice bodu**; trojúhelník $O_1O_2O_3$ sluje základní (nebo souřadnicový), jeho strany základní přímky (nebo souřadnicové osy), O_1, O_2, O_3 jsou souřadnicové vrcholy. Kde leží body, jejichž jedna nebo dvě souřadnice d_i jsou rovny nule? Existuje bod (0; 0; 0)?

Základní vztah (4) umožňuje nám, abychom každou algebraickou rovnici mezi proměnnými d_i uvedli na homogenní tvar. Neboť každou takovou rovnici lze především psáti ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{n} u_k\,(d_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

když symbolem $u_k(d_i)$ jsme označili členy, v nichž se vyskytuje d_i v mocnině k. Násobíme-li nyní tuto rovnici výrazem $(ad_1 + bd_2 + cd_3)^n$, obdržíme po úpravě vzhledem k rovnici (4) **homogenní** rovnici

$$u_0(d_i)\,(ad_1+bd_2+cd_3)^n + 2\Delta u_1(d_i)\,(ad_1+bd_2+cd_3)^{n-1} + \dots$$
$$\dots + 2^n\Delta^n u_n(d_i) = 0.$$

Můžeme tedy předpokládati, že každá rovnice, která obsahuje proměnné d_i, je již homogenní.

B. **Relativní souřadnice bodu.** Snadno nahlédneme, že za souřadnice bodu B můžeme vzíti také čísla x_i, úměrná číslům d_i, t. j. čísla, o nichž platí

$$\varrho x_i = d_i,\ i = 1, 2, 3,\ \varrho \neq 0. \qquad (5)$$

---

[16]) Nebo jinak

$$d_1 \sin\alpha + d_2 \sin\beta + d_3 \sin\gamma = \frac{\Delta}{r} = 2r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$$

$$\frac{d_1}{v_a} + \frac{d_2}{v_b} + \frac{d_3}{v_c} = 1; \text{ dokažte!}$$

Čísla x_i, definovaná těmito rovnicemi, nazývají se **relativní normální souřadnice bodu**. Jejich vztah k absolutním souřadnicím udávají rovnice (4) a (5), z nich plyne

$$d_i = \frac{2\Delta x_i}{ax_1 + bx_2 + cx_3}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{6}$$

Podrobnější vyšetření těchto souřadnic necháváme čtenáři.

C. **Transformace na kartézské souřadnice.** Zvolme kartézskou soustavu tak, jak ukazuje obr. 8. I platí

$$d_1 = x \sin\gamma, \quad d_2 = y \sin\gamma.$$

K tomu přistupuje rovnice (4), která dává

$$d_3 = \frac{2\Delta}{c} - x \sin\alpha - y \sin\beta. \tag{7}$$

Obrácení těchto rovnic píšeme ve tvaru

$$x = \frac{d_1}{\sin\gamma}\,\frac{2\Delta}{ad_1 + bd_2 + cd_3}, \quad y = \frac{d_2}{\sin\gamma}\,\frac{2\Delta}{ad_1 + bd_2 + cd_3}. \tag{7'}$$

Rovnice (7), (7′) jsou lineární, nemění tedy stupeň transformované rovnice. Speciálně lineární homogenní rovnice v d_i (nebo obecněji v x_i) vyjadřuje přímku. Kružnice, která je opsána souřadnicovému trojúhelníku, má rovnici

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\gamma - bx - ay = 0,$$

[viz také 12. úlohu d) v předcházející kapitole]; transformací na normální souřadnice podle rovnic (7′) obdržíme po malé úpravě rovnici

$$ad_2d_3 + bd_1d_3 + cd_1d_2 = 0.$$

A pod. Napište rovnice přímky a uvedené kružnice také v relativních souřadnicích!

D. **Přímkové souřadnice.** Nahlédneme snadno, že rovnice přímky, která prochází body (d'), (d'') resp. (x'), (x''), [pro stručnost píšeme (d') atd. místo $(d'_1; d'_2, d'_3)$ atd.] je

$$\begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ d'_1 & d'_2 & d'_3 \\ d''_1 & d''_2 & d''_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ resp. } \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \end{vmatrix} = 0,$$

po rozepsání

$$\Sigma\delta_k d_k = 0 \text{ resp. } \Sigma\xi_k x_k = 0,\text{[17]} \tag{8}$$

při čemž značí $\delta_1 = d'_2 d''_3 - d'_3 d''_2$ atd., $\xi_1 = x'_2 x''_3 - x'_3 x''_2$ atd. Podobně, jak jsme to učinili v případě kartézských souřadnic, i zde nazýváme koeficienty δ_i resp. ξ_i normálními souřadnicemi přímky (vyložte podrobněji!). Rovnice (8) vyjadřují současně i incidenční podmínky pro normální souřadnice. Tak na př. duální vztahy

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ resp. } \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi'_1 & \xi'_2 & \xi'_3 \\ \xi''_1 & \xi''_2 & \xi''_3 \end{vmatrix} = 0$$

vyjadřují nutné a postačující podmínky, aby tři body (x), (x'), (x'') ležely v přímce resp. tři přímky $[\xi]$, $[\xi']$, $[\xi'']$ procházely bodem. Utvořte další příklady!

Poněvadž některé základní úlohy jeví se v souřadnicích normálních dosti složité, používáme této soustavy jen v případech, kdy takové úlohy nemusíme řešit. Uvedeme tu přece jen aspoň dvě z těchto základních úloh.

a) Transformujeme-li výraz pro vzdálenost dvou bodů B', B'' v kosoúhlých souřadnicích

$$\overline{B'B''}^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + 2(x' - x'')(y' - y'')\cos\gamma$$

na absolutní souřadnice podle rovnic (7), nalezneme výraz

$$\overline{B'B''}^2 = \frac{1}{\sin^2\gamma}\left[(d'_1 - d''_1)^2 + (d'_2 - d''_2)^2 + 2(d'_1 - d''_1)(d'_2 - d''_2)\cos\gamma\right].$$

Podle rovnic (4) je však

$$d'_1 - d''_1 = \frac{2\Delta}{\Sigma ax'_1\, \Sigma ax''_1}(b\xi_3 - c\xi_2) \text{ a další dva vztahy,}$$

takže v relativních souřadnicích máme (po malé úpravě)

$$\overline{B'B''}^2 = \frac{16\Delta^2 r^2}{(\Sigma ax'_1)^2\,(\Sigma ax''_1)^2}\,\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

při čemž značí

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \equiv \Sigma\xi_k^2 - 2\Sigma\xi_2\xi_3\cos\alpha. \tag{*}$$

b) Jsou-li rovnice souřadnicových os vztaženy k pravoúhlé soustavě a ve tvaru $x\cos\eta_i + y\sin\eta_i - p_i = 0$, $i = 1, 2, 3$,

[17]) Pokud nebude uvedeno jinak, značí k sumační index a sčítáme od $k = 1$ až po $k = 3$.

pak je zřejmě $d_i = -(x \cos \eta_i + y \sin \eta_i - p_i)$ a tedy

$$\Sigma\delta_k d_k \equiv -x\,\Sigma\delta_k \cos \eta_k - y\,\Sigma\delta_k \sin \eta_k + \Sigma\delta_k p_k.$$

Vzdálenost bodu $(x; y)$ od přímky $lx + my + n = 0$ je však (bez ohledu na znaménko) dána známým výrazem $(lx + my + n) : \underset{+}{\sqrt{l^2 + m^2}}$. Poněvadž je $l^2 + m^2 = \psi(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, nacházíme posléze pro vzdálenost bodu (d) od přímky $[\delta]$ (bez ohledu na znaménko) výraz

$$\frac{\Sigma\delta_k d_k}{\underset{+}{\sqrt{\psi(\delta_1, \delta_2, \delta_3)}}}. \quad (12)$$

Úlohy k tomuto odstavci: 6—18.

Trimetrické souřadnice. A. Definice. Trimetrické (trojúhelníkové) souřadnice bodu definujeme nejobecněji takto: Jsou to tři čísla x_i, uměrná vzdálenostem uvažovaného bodu od tří stran základního trojúhelníka, znásobená libovolně zvolenými koeficienty, t. j.

$$\varrho x_i = \varkappa_i d_i; \quad i = 1, 2, 3; \; \varrho, \varkappa_i \neq 0.^{18)} \qquad (9)$$

Za předpokladu, že základní kartézská soustava je pravoúhlá, jsou totiž rovnice stran základního trojúhelníka

$$a_i x + b_i y + c_i z = 0, \; i = 1, 2, 3,$$

vzdálenosti d_i jsou

$$d_i = \frac{a_i x + b_i y + c_i z}{\underset{+}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}},$$

takže podle rovnic (9) platí

$$\varrho x_i = \frac{\varkappa_i}{\underset{+}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}} (a_i x + b_i y + c_i z). \qquad (10)$$

---

[18]) Podobně trimetrické souřadnice přímky jsou definovány rovnicemi $\varrho \xi_i = \varkappa_i \delta_i$, kde δ_i jsou vzdálenosti uvažované přímky od vrcholů souřadnicového trojúhelníka.

A obráceně z těchto rovnic plyne

$$\frac{D}{\varrho}x = \sum \frac{A_k}{\lambda_k} x_k, \quad \frac{D}{\varrho}y = \sum \frac{B_k}{\lambda_k} x_k, \quad \frac{D}{\varrho}z = \sum \frac{C_k}{\lambda_k} x_k, \tag{10'}$$

při čemž značí — jako obvykle —

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

A_i, B_i, C_i jsou doplňky stejnolehlého prvku v determinantu D a $\lambda_i = \dfrac{\varkappa_i}{\overset{+}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}}$. V souřadnicích nehomogenních jsou rovnice (10) resp. (10′)

$$\left.\begin{aligned} \varrho x_i &= \lambda_i (a_i x + b_i y + c_i) \text{ resp.} \\ x = \sum \frac{A_k}{\lambda_k} x_k : \sum \frac{C_k}{\lambda_k} x_k, &\quad y = \sum \frac{B_k}{\lambda_k} x_k : \sum \frac{C_k}{\lambda_k} x_k. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Je-li tedy dán bod kartézskými pravoúhlými souřadnicemi (x; y; z), jsou jeho trimetrické souřadnice dány rovnicemi (10); obráceně, známe-li trimetrické souřadnice bodu, jsou jeho kartézské pravoúhlé souřadnice dány rovnicemi (10′). Podobně pro rovnice (11).[19])

B. Základní vlastnosti. Z rovnic (4) a (9) odvodíme ihned základní vztah, který platí mezi trimetrickými souřadnicemi bodu; zní

$$\frac{a}{\varkappa_1} x_1 + \frac{b}{\varkappa_2} x_2 + \frac{c}{\varkappa_3} x_3 = \frac{2\Delta}{\varrho}$$

(ϱ koeficient úměrnosti; napište tento vztah ještě v jiných tvarech!).

Je ihned patrno, že trimetrická soustava bodových souřadnic je určena, známe-li rovnice stran základního trojúhelníka a absolutní normální souřadnice d_i a trimetrické

---

[19]) Proveďte obdobnou úvahu pro souřadnice přímkové!

souřadnice x_i jednoho a téhož bodu B, který ovšem neleží na žádné základní přímce. Potom totiž rovnice (9) určují poměr čísel $\varkappa_i$ a tudíž i trimetrické souřadnice obecného bodu. — Zpravidla však trimetrickou soustavu bodovou určujeme jinak: Jistý bod roviny zvolíme za jednotkový $J\,(1; 1; 1)$. Jsou-li d_i jeho absolutní normální souřadnice, platí $\varrho = \varkappa_i d_i$, čímž je určen poměr čísel $\varkappa_i$ a tedy i trimetrická soustava.[20])

Ze známých vlastností absolutních normálních souřadnic a na podkladě rovnic (9) snadno nahlédneme, že anulovaná lineární forma

$$\Sigma \xi_k x_k = 0 \tag{12}$$

vyjadřuje v trimetrických souřadnicích přímku. Nejjednodušší rovnice $x_i = 0$ příslušejí souřadnicovým osám (jak?); rovnice $x_i - \lambda x_k = 0$ ($i \neq k$, λ proměnný parametr) vyjadřují přímky, jdoucí souřadnicovými vrcholy (vyložte podrobněji!). Poslední rovnice ze soustavy (10′) pak ukazuje, že vztah

$$\sum \frac{C_k}{\lambda_k} x_k = 0$$

vyjadřuje přímku nevlastní.

Konečně vztah (12) ukazuje, že obecná trojice čísel $[\xi_i]$ určuje jedinou přímku (jak je tomu obráceně?); i lze čísla ξ_i považovati za **trimetrické souřadnice přímky**. Za těchto okolností rovnice (12) vyjadřuje incidenci přímky $[\xi_i]$ a bodu (x_i). Podrobnější úvahy přenecháváme čtenáři; nečiní žádných obtíží. ([13])

C. **Specialisace trimetrických souřadnic bodu.** Definice trimetrických souřadnic bodu rovnicemi (9) je velmi obecná a lze ji specialisovati několikerým způsobem. Na tomto místě chceme uvésti velmi stručně aspoň nejčastější případy.

a) V rovnicích (9) položme $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3$; dojdeme tak k souřadnicím, definovaným rovnicemi

[20]) Obdobnou úvahu proveďte pro přímkové souřadnice!

$$\varrho x_i = d_i,$$

tedy rovnicemi (5): relativní normální souřadnice jsou zvláštním případem trimetrických souřadnic. Bod je určen, známe-li dva nezávislé poměry těchto tří souřadnic (vyložte!); odtud jiný název pro ně: poměrné souřadnice bodu.

b) V rovnicích (9) položme $\varkappa_1 = \varkappa a$, $\varkappa_2 = \varkappa b$, $\varkappa_3 = \varkappa c$! Obdržíme $\varrho x_1 = a d_1$ atd. čili $\varrho x_1 = (BO_2O_3)$ (ovšem s jiným koeficientem ϱ!). Odtud také pojmenování pro ně: homogenní plošné souřadnice bodu. Nalezněte vztah takto specialisovaných trimetrických souřadnic k trojbodovým souřadnicím l_i!

Plošné souřadnice lze interpretovati také fysikálně: Mysleme si, že souřadnicové vrcholy jsou zatíženy vahami x_i a že v obecném bodě B je soustředěna váha Σx_k. Momentová věta nám dává podmínky rovnováhy této hmotné soustavy:

$$-d_1\,\Sigma x_k + v_1 x_1 = 0 \text{ a dvě rovnice další.}$$

Z nich však plyne

$$x_1 = \frac{d_1}{v_1}\,\Sigma x_k \text{ čili } \varrho x_1 = a d_1 \text{ a dvě rovnice další,}$$

což jsou rovnice, které definují homogenní plošné souřadnice. I jeví se tyto souřadnice bodu jako taková zatížení vrcholů souřadnicového trojúhelníka, aby tento bod byl jeho těžištěm; odtud jiné pojmenování pro ně: barycentrické (také Möbiusovy) souřadnice bodu.

c) Položme $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1 : \sin\gamma$, $\varkappa_3 = 1 : d_3$! Obdržíme tak $\varrho x_1 = d_1 : \sin\gamma$, $\varrho x_2 = d_2 : \sin\gamma$, $\varrho x_3 = 1$, a tedy vzhledem k rovnicím (7)

$$\varrho x_1 = x,\ \varrho x_2 = y,\ \varrho x_3 = 1 \text{ čili } x_1 = \frac{x}{x_3},\ x_2 = \frac{y}{x_3}.$$

Kartézské souřadnice jsou tedy zvláštním případem trimetrických souřadnic (osa $x_3 = 0$ se stane přímkou nevlastní!).

d) K jiným specialisacím vede způsob, kterým je trimetrická soustava určena. Zvolíme-li na př. střed kružnice vepsané souřadnicovému trojúhelníku za bod jednotkový, dospějeme k soustavě a), zvolíme-li za tento bod těžiště souřadnicového trojúhelníka, dospějeme k soustavě b). Vyložte podrobněji a utvořte jiné soustavy!

e) Konečně i vyjádření trimetrických souřadnic rovnicemi (10), v nichž disponujeme devíti nehomogenními konstantami (kterými?), dává nám mnoho možností pro specialisace těchto souřadnic. Tak na př. souřadnice, definované rovnicemi

$$\varrho x_i = a_i x + b_i y + c_i z, \quad i = 1, 2, 3, \quad \varrho \neq 0$$

nazývají se **lineární souřadnice** bodu. A pod.[14]

Úlohy k tomuto odstavci: 19—26.

Tetracyklické souřadnice. A. Definice. Kružnici, jejíž rovnice v pravoúhlých souřadnicích zní

$$(a) \equiv a_0 (x^2 + y^2) + 2a_1 x + 2a_2 y + a_3 = 0,$$

nazveme stručně „kružnice (a)". Zvolíme-li v rovině čtyři nezávislé kružnice (b), (c), (d), (e), t. j. takové čtyři kružnice, že nenáleží všechny témuž svazku nebo téže síti kružnic, tu každou další kružnici lze vyjádřiti jako lineární kombinaci těchto čtyř kružnic, t. j. lze psáti

$$(a) \equiv \lambda_1(b) + \lambda_2(c) + \lambda_3(d) + \lambda_4(e). \tag{13}$$

Rozepíšeme-li totiž tuto symbolickou rovnici a srovnáme-li sobě odpovídající koeficienty, nalezneme rovnice

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = \lambda_1 b_0 + \lambda_2 c_0 + \lambda_3 d_0 + \lambda_4 e_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_3 = \lambda_1 b_3 + \lambda_2 c_3 + \lambda_3 d_3 + \lambda_4 e_3, \end{array}\right\} \tag{14}$$

z nichž lze vypočísti koeficienty λ_i (proč?). Výsledek je

$$\left.\begin{array}{l} D\lambda_1 = a_0 B_0 + a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D\lambda_4 = a_0 E_0 + a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3, \end{array}\right\} \tag{15}$$

při čemž velkými písmeny jsme označili doplňky stejnolehlého prvku v determinantu

$$D \equiv \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Snadno se přesvědčíme, že podmínka $a_1^2 + a_2^2 - a_0 a_3 = 0$ je nutná i stačí, aby rovnice kružnice (a) vyjadřovala bod (který?). Je-li tato podmínka splněna, pak nazýváme čísla λ_i

tetracyklické souřadnice bodu, který je touto kružnicí vyjádřen.

Uvažujme nyní kružnici s rovnicí

$$B_3(x^2 + y^2) - B_1x - B_2y + B_0 = 0! \qquad (*)$$

Určeme mocnost M_1 bodu $(x_0;\ y_0)$, vyjádřeného rovnicemi

$$(a) = 0,\ a_1^2 + a_2^2 - a_0a_3 = 0, \qquad (**)$$

vzhledem k této kružnici; nalezneme

$$M_1 = x_0^2 + y_0^2 - \frac{B_1}{B_3}x_0 - \frac{B_2}{B_3}y_0 + \frac{B_0}{B_3},$$

a poněvadž $x_0 = -a_1 : a_0$, $y_0 = -a_2 : a_0$, $x_0^2 + y_0^2 = a_3 : a_0$ (odůvodněte!), také jinak

$$M_1 = \frac{1}{a_0B_3}(a_0B_0 + a_1B_1 + a_2B_2 + a_3B_3).$$

Srovnáme-li však tento vztah s první rovnicí (15), poznáváme, že $M_1 = D\lambda_1 : a_0B_3$. Provedeme-li obdobnou úvahu i pro ostatní kružnice typu (*), docházíme k této větě: Tetracyklické souřadnice λ_i bodu $(x_0;\ y_0)$ jsou čtyři čísla úměrná mocnostem tohoto bodu vzhledem k určitým čtyřem kružnicím (nikoliv však k oněm, které jsme zvolili za základní!):

$$\lambda_1 = \frac{a_0}{D}B_3M_1 \text{ a tři rovnice další.} \qquad (16)$$

B. Základní vlastnosti. Rovnice (13) ukazuje, že tetracyklické souřadnice jsou homogenní. Násobíme-li totiž všechny týmž koeficientem $\varrho \neq 0$, tu poskytuje uvedená rovnice opět touž kružnici $\varrho(a) = 0$ (po případě týž bod, je-li kružnicí bod vyjádřen). Poněvadž bod v rovině je určen již poměrem tří čísel (na př. třemi homogenními souřadnicemi), musí mezi souřadnicemi λ_i existovat ještě nějaký vztah. A ten je v podmínce, že kružnice, kterou určují, má poloměr rovný nule. Dosadíme-li proto z rovnic (14) do druhé rovnice (**), nalezneme pro tento vztah výraz

$$\Sigma (b_1^2 + b_2^2 - b_0 b_3) \lambda_1^2 -$$
$$- \Sigma (2b_1 c_1 + 2b_2 c_2 - b_0 c_3 - b_3 c_0) \lambda_1 \lambda_2 = 0.$$ [21])

Tento složitý vztah se podstatně zjednoduší, předpokládáme-li, že kružnice (b), (c), (d), (e) jsou vzájemně ortogonální. Pak vymizí všechny koeficienty u členů s $\lambda_i \lambda_k$ (vyložte podrobněji!). Povšimneme-li si ještě, že poloměr R_b kružnice (b) je $R_b^2 = (b_1^2 + b_2^2 - b_0 b_3) : b_0^2$ atd., můžeme uvedený vztah psáti daleko jednodušeji:

$$b_0^2 R_b^2 \lambda_1^2 + \ldots + e_0^2 R_e^2 \lambda_4^2 = 0.$$

T. zv. normované tetracyklické souřadnice x_i jsou definovány rovnicemi

$$x_1 = \pm\, b_0 R_b \lambda_1, \ldots,\; x_4 = \pm\, e_0 R_e \lambda_4;$$

základní vztah mezi těmito souřadnicemi má tedy tvar zvlášť jednoduchý, totiž $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$. ([18])

Úlohy k tomuto odstavci: 27—31.

Úlohy ke cvičení.

1. Jak sestrojíte bod B z dané trojice $(l_1; l_2; l_3)$, přímku p z dané trojice $[\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3]$?

[Sestrojí se body C_1, C_2, pro něž je $\dfrac{\overline{B_2C_1}}{\overline{B_3C_1}} = -\dfrac{l_3}{l_2}\dfrac{k_3}{k_2}$, $\dfrac{\overline{B_3C_2}}{\overline{B_1C_2}} = -\dfrac{l_1}{l_3}\dfrac{k_1}{k_3}$; hledaný bod B je průsečík přímek B_1C_1, B_2C_2. Tímto bodem prochází také spojnice B_3C_3; důkaz podává věta Cevova. Duálně sestrojí se přímky q_1, q_2, pro něž je $\dfrac{\sin(p_2, q_1)}{\sin(p_3, q_1)} = -\dfrac{\lambda_3}{\lambda_2}\dfrac{k_3}{k_2}$ atd., hledaná přímka p jde průsečíky p_1, q_1 a p_2, q_2 (a také p_3, q_3; důkaz podává věta Menelaova). Přitom značí $k_i = \underset{+}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}$.]

---

[21]) V tomto případě značí

$$\Sigma (b_1^2 + b_2^2 - b_0 b_3) \lambda_1^2 = (b_1^2 + b_2^2 - b_0 b_3) \lambda_1^2 +$$
$$+ (c_1^2 + c_2^2 - c_0 c_3) \lambda_2^2 + \ldots + (e_1^2 + e_2^2 - e_0 e_3) \lambda_4^2.$$

Podobně pro další součet.

2. Dokažte, že rovnici bodu B resp. přímky p lze vyjádřiti tvarem

$$\begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \\ b_1 & b_2 & b_3 & b \\ c_1 & c_2 & c_3 & c \end{vmatrix} = 0 \quad \text{resp.} \quad \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \\ b_1 & b_2 & b_3 & b \\ c_1 & c_2 & c_3 & c \end{vmatrix} = 0!$$

[Vylučte l_i resp. λ_i z rovnic (3) resp. (3′) a z rovnice (2) resp. (2′)!]

3. Které body resp. přímky jsou vyjádřeny trojicemi l_i resp. λ_i s jedním nebo s dvěma nulovými členy?

[Je-li $l_j = 0$, máme body na spojnicích B_iB_k, je-li $l_i = l_k = 0$, máme body B_j. A duálně. Přitom je $i, j, k, = 1, 2, 3, i \neq j \neq k$.]

4. Jak zní trojpřímková rovnice přímky, jestliže pro rovnice základních přímek zvolíme tvary normální?

[Základní přímky buďtež $n_i \equiv x \cos \delta_i + y \sin \delta_i - p_i = 0$; $p \equiv x\, \Sigma\lambda_k \cos \delta_k + y\, \Sigma\lambda_k \sin \delta_k - \Sigma\lambda_k p_k = 0$. Napište směrnici této přímky, přepište její rovnici na normální tvar! Proveďte duální úvahu!]

5. Napište podmínku a) rovnoběžnosti, b) kolmosti dvou přímek $[\lambda]$ a $[\lambda']$!

[a) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda'_1 & \lambda'_2 & \lambda'_3 \end{vmatrix} = 0$ nebo $\begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda'_1 & \lambda'_2 & \lambda'_3 \end{vmatrix} = 0$,

kde α, β, γ resp. a, b, c jsou úhly resp. délky stran trojstranu $p_1p_2p_3$, b) $\Sigma\lambda_k\lambda'_k = (\lambda_2\lambda'_3 + \lambda_3\lambda'_2)\cos\alpha + (\lambda_3\lambda'_1 + \lambda_1\lambda'_3)\cos\beta + (\lambda_1\lambda'_2 + \lambda_2\lambda'_1)\cos\gamma$. Určete úhel dvou přímek!]

6. Napište absolutní resp. relativní normální souřadnice a) těžiště, b) středu opsané kružnice, c) průsečíku výšek, d) středu vepsané kružnice, e) středů vně vepsaných kružnic do základního trojúhelníka!

[a) $\left(\frac{1}{3} v_1; \frac{1}{3} v_2; \frac{1}{3} v_3\right)$ resp. $(v_1; v_2; v_3)$ nebo $\left(\frac{1}{\sin\alpha}; \frac{1}{\sin\beta}; \frac{1}{\sin\gamma}\right)$, b) $(r\cos\alpha; r\cos\beta; r\cos\gamma)$ resp. $(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$, c) $(2r\cos\beta\cos\gamma; 2r\cos\alpha\cos\gamma; 2r\cos\alpha\cos\beta)$, d) $(\varrho; \varrho; \varrho)$ resp. $(1; 1; 1)$, e) $(-\varrho_2; \varrho_2; \varrho_2)$ atd. resp. $(-1; 1; 1)$ atd.]

7. Jak zní rovnice přímky, která utíná na osách $\overrightarrow{O_3O_1}$ resp. $\overrightarrow{O_3O_2}$ úseky p resp. q?

[Transformací rovnice $qx + py - pq = 0$ podle rovnic (7) obdržíme $a\dfrac{b-p}{p}d_1 + b\dfrac{a-q}{q}d_2 - cd_3 = 0$. Proveďte úvahu obrácenou!]

8. Jak zní rovnice přímky nevlastní?

[Rovnice (6) ukazují, že pro body v nekonečnu je $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ $(ad_1 + bd_2 + cd_3 = 0)$.]

9. Jak zní rovnice a) přímky, jdoucí souřadnicovým vrcholem, b) osy úhlu $O_2\widehat{O_1}O_3$ (vnitřní i vnější), c) výšek trojúhelníka $O_1O_2O_3$?

[a) $d_2 = \varkappa_1 d_3$ atd. $(x_2 = \varkappa_1 x_3)$; jaký je význam koeficientů $\varkappa_i$, kdy se tyto tři přímky protínají v jediném bodě? $(\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 = -1)$, b) $d_2 \mp d_3 = 0$ atd. $(x_2 \mp x_3 = 0,)$, c) $d_2 \cos\beta - d_3\cos\gamma = 0$ atd. $(x_2\cos\beta - x_3\cos\gamma = 0)$.]

10. Kterým vzorcem je dán obsah trojúhelníka $B_1B_2B_3$ z pat kolmic, spuštěných z bodu B na strany trojúhelníka $O_1O_2O_3$? Dokažte na základě tohoto vztahu větu: Geometrickým místem bodů, z nichž kolmice spuštěné na strany daného trojúhelníka mají paty ležící v přímce, je kružnice opsaná tomuto trojúhelníku. A obráceně. (Přímka ta sluje Simsonova přímka uvažovaného bodu vzhledem k danému trojúhelníku.)

[$2\Delta' = d_2d_3\sin\alpha + d_1d_3\sin\beta + d_1d_2\sin\gamma$ čili $4r\Delta' = ad_2d_3 + bd_1d_3 + cd_1d_2$. Pro $\Delta' = 0$ obdržíme kružnici opsanou trojúhelníku $O_1O_2O_3$.]

11. Vzorec pro vzdálenost dvou bodů v absolutních normálních souřadnicích upravte na tvary

$$\overline{B'B''}^2 = \frac{r}{\Delta}\,\Sigma\, a\,(d'_1 - d''_1)^2\cos\alpha = \frac{r^2}{\Delta}\,\Sigma\,(d'_1 - d''_1)^2\sin 2\alpha =$$
$$= -\frac{r}{\Delta}\,\Sigma a\,(d'_2 - d''_2)(d'_3 - d''_3) =$$
$$= -\frac{2r^2}{\Delta}\,\Sigma\,(d'_2 - d''_2)(d'_3 - d''_3)\sin\alpha!^{*)}$$

[Užijte vztahu $a(d'_1 - d''_1) + b(d'_2 - d''_2) + c(d'_3 - d''_3) = 0$!]

---

*) Přitom značí:

$\Sigma\, a\,(d'_1 - d''_1)^2\cos\alpha =$
$= a\,(d'_1 - d''_1)^2\cos\alpha + b\,(d'_2 - d''_2)^2\cos\beta + c\,(d'_3 - d''_3)^2\cos\gamma$
atd., podobně

$\Sigma\,(d'_2 - d''_2)(d'_3 - d''_3)\sin\alpha =$
$= (d'_2 - d''_2)(d'_3 - d''_3)\sin\alpha + \dots + (d'_1 - d''_1)(d'_2 - d''_2)\sin\gamma$
atd.

12. Který úhel svírají přímky $\Sigma\delta'_k d_k = 0$, $\Sigma\delta''_k d_k = 0$?
[Transformací příslušného výrazu v pravoúhlých souřadnicích nalezneme

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\Sigma(\delta'_1\delta''_2 - \delta'_2\delta''_1)\sin\gamma}{\Sigma\delta'_k\delta''_k - \Sigma(\delta'_2\delta''_3 + \delta'_3\delta''_2)\cos\alpha}.\Bigg]$$

13. Dokažte, že pro úhel dvou přímek platí vzorec

$$\cos\omega = \frac{1}{2}\,\frac{\xi''_1\frac{\partial\psi}{\partial\xi'_1} + \xi''_2\frac{\partial\psi}{\partial\xi'_2} + \xi''_3\frac{\partial\psi}{\partial\xi'_3}}{\sqrt{\psi(\xi')}\sqrt{\psi(\xi'')}}!$$

[Úpravou výsledku 12. úlohy a zavedením relativních souřadnic. Jak velké jsou úhly, které svírá přímka [ξ] se souřadnicovými osami?]

14. Určete obsah trojúhelníka s vrcholy (d'), (d''), (d''')!

$$[2P = \frac{r}{\Delta}\begin{vmatrix} d'_1 & d'_2 & d'_3 \\ d''_1 & d''_2 & d''_3 \\ d'''_1 & d'''_2 & d'''_3 \end{vmatrix}]$$

15. Ukažte, že přímku lze parametricky vyjádřiti rovnicemi $d_i = \lambda d'_i + \mu d''_i$ $(\varrho x_i = \lambda x'_i + \mu x''_i)$, $i = 1, 2, 3$!

[Z rovnice přímky, jdoucí dvěma body.]

16. Ukažte, že kuželosečka je vyjádřena rovnicí

$$\sum_{i,k} a_{ik}x_i x_k = 0,\ i, k = 1, 2, 3;\ a_{ik} = a_{ki}!$$

[Transformací kartézské rovnice.]

17. Určete vzdálenost přímky [δ] od souřadnicových vrcholů!
[$v_1\delta_1 : \sqrt{\psi}$ atd. Ukažte, že na základě těchto vztahů lze normální souřadnice přímky definovati také geometricky!]

18. Jaký vztah platí mezi třemi vzdálenostmi, o nichž je řeč v 17. úloze?

[Z výrazu pro ψ plyne $\sum\left(\frac{\bar\delta_k}{v_k}\right)^2 - 2\sum\frac{\bar\delta_1\bar\delta_2}{v_1v_2}\cos\gamma = 1$, kdež $\bar\delta_i$ značí uvažované vzdálenosti.]

19. Dokažte: Trimetrické souřadnice bodu jsou čísla úměrná a) daným násobkům kolmých vzdáleností, b) daným násobkům vzdáleností, měřeným v daných směrech, c) daným násobkům

vzdáleností, měřeným v témže směru, d) vzdálenostem, měřeným v daných směrech — od tří daných přímek!

[Z rovnic (9).]

20. Vyšetřete trimetrické souřadnice bodu v případě, že rovnice základních přímek jsou dány ve tvarech normálních!

[Základní přímky jako ve 4. úloze. $C_1 = -\sin\alpha$, $C_2 = -\sin\beta$, $C_3 = -\sin\gamma$; rovnice nevlastní přímky

$$\sum \frac{\sin\alpha}{\varkappa_k} x_k = 0 \text{ nebo } \sum \frac{a}{\varkappa_k} x_k = 0.]$$

21. Jaký je vzájemný vztah bodu (1; 1; 1) k přímce [1; 1; 1]?

[(1; 1; 1) je harmonický pól přímky [1; 1; 1] vzhledem k základnímu trojúhelníku.]

22. Vyšetřete trimetrické souřadnice, pro něž platí

$$\varkappa_i = \underset{+}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}!$$

[Předpoklad vede na lineární souřadnice.]

23. Který bod je v barycentrických souřadnicích vyjádřen souřadnicemi (1; 1; 1)? Napište rovnici nevlastní přímky v těchto souřadnicích!

[Těžiště základního trojúhelníka; $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ čili [1; 1; 1] (uveďte rovnice základních přímek na normální tvary!).]

24. Je-li souřadnicový trojúhelník rovnostranný a $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3$, dokažte, že a) bod (1; 1; 1) je střed trojúhelníka a přímka [1; 1; 1] přímka nevlastní, b) pro $\varrho = \varkappa$ a výšku rovnou 1 je bod $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ střed trojúhelníka a mezi souřadnicemi platí vztah $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, c) $(1; \omega; \omega^2)$ a $(1; \omega^2; \omega)$, kde ω je komplexní třetí odmocnina jedné, jsou souřadnice kruhových bodů!

[a) Viz také 23. úlohu! b) V rovnici $ad_1 + bd_2 + cd_3 = 2\Delta$ položte $a = b = c$, $d_i = \varrho x_i : \varkappa_i$, $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3 = \varkappa$, $2\Delta = a$, $\varrho = \varkappa$! c) Určete průsečíky $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0$ s $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ (proč?)!]

25. Vyšetřete t. zv. **isotropické souřadnice** bodu, definované rovnicemi $x_1 = x + iy$, $x_2 = x - iy$, $x_3 = z$, $i = +\sqrt{-1}$!

[Základní trojúhelník má za vrcholy počátek a oba body kruhové.]

26. Jak zní základní vztah, který platí mezi trimetrickými souřadnicemi přímky, definovanými rovnicemi $\varrho\xi_i = \varkappa_i\delta_i$?

$$\left[\sum\left(\frac{\xi_k}{\varkappa_k v_k}\right)^2 - 2\sum\frac{\xi_1\ \xi_2}{\varkappa_1\varkappa_2 v_1 v_2}\cos\gamma = \frac{1}{\varrho^2}.\ \text{Viz 18. úlohu!}\right]$$

27. Co to znamená, když jedna nebo dvě z tetracyklických souřadnic jsou rovny nule?

[Vztah $\lambda_1 = 0$ značí kružnici (*) atd. Vztahy $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ vyjadřují průsečíky kružnic (*) a $C_3(x^2 + y^2) - C_1x - C_2y + C_0 = 0$ atd.; jaký vztah splňují tetracyklické souřadnice těchto průsečíků?]

28. Dokažte, že čtyři kružnice typu (*) neprocházejí společným bodem!

[Uvažte, co znamená $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$!]

29. Dokažte, že čtyři kružnice (*) jsou ortogonální k základním kružnicím!

[Zvolme na př. kružnice (c) a (*). Podmínka ortogonality těchto dvou kružnic zní $\Sigma B_i c_i = 0$ a je splněna identicky. Podobně i pro ostatní dvojice kružnic.]

30. Dokažte, že jsou-li základní kružnice ortogonální, splývají s kružnicemi (*)!

[Použijte výsledku 29. úlohy!]

31. Rovnicemi tvaru (16) vyjádřete také normované tetracyklické souřadnice!

[Použijte výsledku 30. úlohy; výsledek je $\varrho x_1 = \dfrac{M_1}{R_k}$ atd.]

IV.

KŘIVOČARÉ SOUŘADNICE.

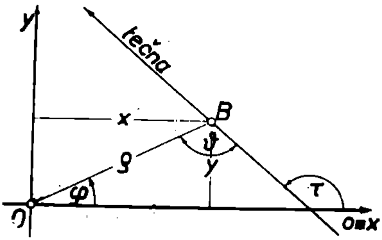
Polární souřadnice. Polohu bodu v rovině nejobecněji stanovíme, když tu zvolíme dvě různé soustavy čar Σ_1, Σ_2 tak, aby každým bodem B procházela právě jedna čára každé soustavy.[22]) Každé čáře pak přiřadíme jisté číslo (kótu); i určuje obecný bod dvě čísla, totiž kóty čar, které jím procházejí. Přitom kótu první čáry (ze soustavy Σ_1) píšeme jako první číslo, kótu druhé čáry (ze soustavy Σ_2) jako druhé číslo. Obráceně však dvě daná čísla, vzatá v určitém pořadí, mohla by určovati více bodů. Tak by tomu bylo, kdyby se obě příslušné čáry Σ_1, Σ_2 protínaly ve více než jednom bodě. V obecném případě tuto víceznačnost odstraníme tím, že se omezíme jen na studium určité oblasti bodů v rovině, takové, kde dvojice kót vede k jedinému průsečíku. Obě čísla, definovaná tímto způsobem, nazýváme křivočarými souřadnicemi uvažovaného bodu. V tomto pojetí jeví se kartézské souřadnice jen jako zvláštní případ křivočarých souřadnic: Σ_1, Σ_2 jsou soustavy rovnoběžek, obě dotčená čísla jsou vzdálenosti uvažovaného bodu, měřené ve směru přímek obou soustav, od dvou základních přímek těchto soustav. Jak je tomu v případě souřadnic nomografických?

A. Definice a transformace. Jestliže soustavu Σ_1 tvoří soustředné kružnice se středem v bodě O, soustavu Σ_2 svazek přímek jdoucích bodem O, a přiřadíme-li obecnému bodu B tato dvě čísla: poloměr ϱ kružnice soustavy Σ_1

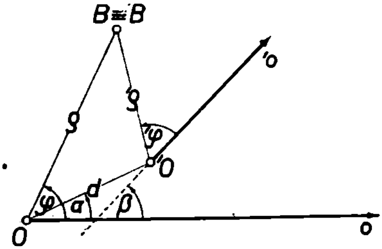
---

[22]) Čáry Σ_1, Σ_2 musí býti spojité (a bez vícenásobných bodů). V případech, které jsou uvedeny v dalším textu, kdy soustavy Σ_1, Σ_2 jsou tvořeny čarami prvního a druhého stupně (přímkami a kuželosečkami), je těmto požadavkům vyhověno.

jdoucí tímto bodem a úhel φ, který svírá přímka $\overrightarrow{OB}$ soustavy Σ_2 s jinou orientovanou přímkou o této soustavy, kterou jsme zvolili za základní, definovali jsme v rovině **polární souřadnice.** Kladné číslo ϱ se nazývá průvodič, úhel φ, měřený kladně v obvyklém smyslu (t. j. proti směru ručiček hodinových), nazývá se polární úhel. O je pól soustavy, o polární osa. Obecný bod určuje jednoznačně dvojici $(\varrho; \varphi)$ (výjimkou je pól O; jakou?); obráceně obecnou dvojicí $(\varrho; \varphi)$, $\varrho > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$, je určen jediný bod.



Obr. 9.



Obr. 10.

Souvislost polárních souřadnic s pravoúhlými je patrná z obr. 9. Platí

$$x = \varrho \cos \varphi,\ y = \varrho \sin \varphi;\ \varrho = \underset{+}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.^{23)} \qquad (1)$$

Složitější je transformace polárních souřadnic ϱ, φ na jiné polární souřadnice $'\varrho, '\varphi$ (viz obr. 10). Je zřejmě určena rovnicemi

$$\varrho^2 = '\varrho^2 + d^2 + 2'\varrho d \cos('\varphi + \beta - \alpha) \qquad [1]$$

nebo

$$'\varrho^2 = \varrho^2 + d^2 - 2\varrho d \cos(\varphi - \alpha), \qquad [2]$$

$$'\varrho \sin('\varphi + \beta - \alpha) = \varrho \sin(\varphi - \alpha) \qquad [3]$$

[23]) Vztahem $\operatorname{tg} \varphi = y:x$ je polární úhel určen dvojznačně; kterou z obou hodnot máme vzíti, to nám ukazují rovnice $\sin \varphi = y:\varrho$, $\cos \varphi = x:\varrho$.

(odůvodněte!). Je-li dáno $'\varrho, '\varphi, \alpha, \beta, d$, je ϱ určeno rovnicí [1] a poté φ rovnicí [2] nebo [3]; výpočet necháváme čtenáři. Jednoduché jsou zvláštní případy těchto rovnic: $\beta = 0$ nebo $d = 0$, $\alpha = 0$; v druhém případě dostáváme výsledek, zřejmý i geometricky,

$$'\varrho = \varrho,\ '\varphi = \varphi - \beta \text{ (vyložte!).} \tag{2}$$

B. Čáry v polárních souřadnicích. Vztah mezi souřadnicemi ϱ a φ je rovnicí čáry v polárních souřadnicích. Tak na př. je $\varphi = \varphi_0$ ($\varphi_0 =$ konst.) rovnicí přímky jdoucí pólem,

$$\varrho \cos (\varphi - \alpha) = d$$

rovnicí přímky, v níž d, α jsou polární souřadnice paty kolmice z pólu na přímku spuštěné (odůvodněte!); obráceně každá rovnice tvaru $\varrho^{-1} = a \cos \varphi + b \sin \varphi$ vyjadřuje přímku (které jsou její Plückerovy souřadnice?). Co vyjadřují rovnice $\varrho \sin \varphi =$ konst., $\varrho \cos \varphi =$ konst.? Přímka, jdoucí dvěma body $(\varrho_i; \varphi_i)$, $i = 1, 2$ je určena rovnicemi

$$\varrho^{-1} = a \cos \varphi + b \sin \varphi,\quad \varrho_i^{-1} = a \cos \varphi_i + b \sin \varphi_i,\quad i = 1, 2;$$

z nich plyne její rovnice ve tvaru

$$\begin{vmatrix} \varrho^{-1} & \cos \varphi & \sin \varphi \\ \varrho_1^{-1} & \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ \varrho_2^{-1} & \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

(proveďte podrobněji!). A pod.

Rovnice kružnice, jejíž střed S má polární souřadnice $(d; \alpha)$ a jejíž poloměr je r, zní $(\overline{SB}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OS}^2 - 2\overline{OB}\,.\,\overline{OS} \cos S\hat{O}B)$

$$\varrho^2 - 2d\varrho \cos (\varphi - \alpha) + d^2 - r^2 = 0.$$

Obráceně každá rovnice tvaru $\varrho^2 - 2 (m \cos \varphi + n \sin \varphi)\, \varrho + b^2 = 0$ vyjadřuje kružnici (určete její střed a poloměr!). Jak zní rovnice kružnice, která prochází pólem? Co vyjadřují rovnice $\varrho = 2a \cos \varphi$, $\varrho = 2b \sin \varphi$, $\varrho = \varrho_0$ ($\varrho_0 =$ konst.)?

Ohnisko kuželosečky zvolme za pól, hlavní osu za polární osu! Je-li d vzdálenost řídicí přímky kuželosečky od ohniska, platí podle definice těchto křivek $\varrho : (d + \varrho \cos \varphi) = \varepsilon$; pro $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ plyne odtud $p = \varepsilon d$ (ε numerická výstřednost, p parametr kuželosečky). I je rovnice kuželosečky (t. zv. ohnisková)

$$\varrho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}. \tag{4}$$

Co vyjadřuje pro $\varepsilon \lesseqqgtr 1$? Která křivka je obráceně vyjádřena rovnicí $\varrho = a : (b + c \cos \varphi)$? Obecnější vztah $\varrho = p : [1 - \varepsilon \cos (\varphi - \alpha)]$ vyjadřuje kuželosečku, jejíž (hlavní) osa svírá s polární osou úhel α [užijte transformace (2)!]. A obráceně snadno se přesvědčíme, že kuželosečka v této poloze je vyjádřena rovnicí $\varrho = a : (b + c \cos \varphi + d \sin \varphi)$.[16]

C. Podrobnější vlastnosti polárních souřadnic. Používajíce první skupiny rovnic (1), mohli bychom soustavně vybudovati analytickou geometrii v polárních souřadnicích. Tak na př. plyne z obr. 9, že $\tau = \varphi + \vartheta$. Poněvadž

$$\operatorname{tg} \tau = y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(\varrho \sin \varphi)}{\mathrm{d}(\varrho \cos \varphi)} = \frac{\varrho \cos \varphi + \varrho' \sin \varphi}{-\varrho \sin \varphi + \varrho' \cos \varphi},$$

při čemž $\varrho' = \mathrm{d}\varrho : \mathrm{d}\varphi$, docházíme ke vztahu

$$\operatorname{tg} \vartheta = \varrho : \varrho', \quad (\varrho' = \mathrm{d}\varrho : \mathrm{d}\varphi), \tag{5}$$

který nám umožňuje sestrojení tečny ke křivce $\varrho = f(\varphi)$ v daném jejím bodě.

Rovnici tečny ke křivce $\varrho = f(\varphi)$ v bodě $(\varrho_0; \varphi_0)$ $[\varrho_0 = f(\varphi_0)]$ nalezneme jako rovnici mezné polohy přímky, která spojuje dva její body $(\varrho_0; \varphi_0)$ a $(\varrho_0 + \Delta\varrho_0; \varphi_0 + \Delta\varphi_0)$ pro $\lim \Delta\varrho_0 = 0$, $\lim \Delta\varphi_0 = 0$. Po malé úpravě obdržíme z rovnice (3)

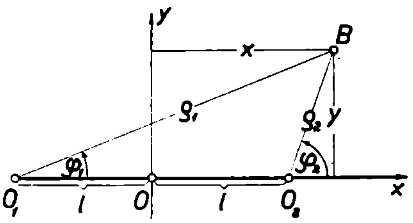
$$\begin{vmatrix} \varrho^{-1} & \cos \varphi & \sin \varphi \\ \varrho_0^{-1} & \cos \varphi_0 & \sin \varphi_0 \\ (\varrho^{-1})'_0, & -\sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 \end{vmatrix} = 0,$$

při čemž $(\varrho^{-1})'_0$ je hodnota $\left(\frac{1}{\varrho}\right)'$ v bodě $\varrho = \varrho_0$. Atd.[17]

Úlohy k tomuto odstavci: 1—16.

Bipolární souřadnice. Tvoří-li soustavu Σ_1 soustředné kružnice o středu O_1, soustavu Σ_2 soustředné kružnice o středu O_2, můžeme obecnému bodu B přiřaditi tato dvě čísla: poloměry ϱ_1, ϱ_2 kružnic soustav Σ_1, Σ_2, bodem tím procházejících (biradiální nebo bivektoriální souřadnice). Zvolíme-li však za soustavy Σ_1, Σ_2 svazky přímek se středy v bodech O_1, O_2, můžeme pak obecnému bodu B přiřaditi jiná dvě čísla: úhly φ_1, φ_2, které svírají přímky soustav Σ_1, Σ_2, bodem tím jdoucí, s přímkou $\overrightarrow{O_1O_2}$ (biangulární souřadnice). Souborný název pro obě tyto soustavy je souřadnice bipolární. Délky ϱ_1, ϱ_2 považujeme za kladné, úhly φ_1, φ_2 měříme kladně v obvyklém smyslu. Viz obr. 11.

Obecný bod B určuje jednoznačně dvojici $(\varrho_1; \varrho_2)$ resp. $(\varphi_1; \varphi_2)$; výjimkou jsou póly O_i (jak?). Obráceně každou uspořádanou dvojicí kladných čísel $(\varrho_1; \varrho_2)$ resp. uspořádanou dvojicí $(\varphi_1; \varphi_2)$ $(0 < \varphi_i < 2\pi)$ jsou určeny dva body (jaká je jejich vzájemná poloha?) resp. jediný bod. Souvislost bipolárních souřadnic s pravoúhlými je patrná z obr. 11.



Obr. 11.

Platí (proveďte podrobněji!)

$$4lx = \varrho_1^2 - \varrho_2^2,\ 4ly = \pm\sqrt{16l^2\varrho_1^2 - (\varrho_1^2 - \varrho_2^2 + 4l^2)^2} \qquad (6)$$

a obráceně

$$\varrho_1 = \underset{+}{\sqrt{(x+l)^2 + y^2}},\ \varrho_2 = \underset{+}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}} \qquad (6')$$

resp.

$$x = l\,\frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)},\ y = 2l\,\frac{\sin\varphi_1 \sin\varphi_2}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} \qquad (7)$$

a obráceně

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{y}{x+l},\ \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{y}{x-l}.^{24)} \qquad (7')$$

---

[24]) Kterou z obou hodnot pro φ_1 resp. φ_2 vezmeme, o tom opět rozhodují výrazy pro $\sin\varphi_i$ a $\cos\varphi_i$.

Mezi oběma druhy bipolárních souřadnic pak platí vztahy

$$\varrho_1 : \varrho_2 : 2l = \sin \varphi_2 : \sin \varphi_1 : \sin (\varphi_2 - \varphi_1).\text{[18]} \tag{8}$$

Další vlastnosti těchto souřadnic v úlohách: 17—22.

Eliptické souřadnice. Každé dvě (středové) kuželosečky, které mají společná ohniska (a tudíž i středy a osy), nazýváme konfokální. Při vhodné volbě pravoúhlé souřadnicové soustavy můžeme tyto křivky vyjádřiti rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1 \ (\lambda \text{ parametr}) \tag{9}$$

(odůvodněte!) Aniž by bylo na újmu obecnosti, můžeme předpokládati, že $a^2 > b^2$. Pro λ rostoucí od velkých záporných hodnot je kuželosečka (9) zprvu elipsa, jejíž poloosy stále klesají, až pro $\lambda = b^2$ přejde elipsa v dvojnásobnou hlavní osu. Roste-li λ nad b^2, přejde kuželosečka (9) v hyperbolu, jejíž hlavní osa se stále zmenšuje, vedlejší roste, až pro $\lambda = a^2$ přejde hyperbola v dvojnásobnou vedlejší osu. Obecným bodem procházejí dvě kuželosečky (9), jedna elipsa, druhá hyperbola, a obě se v uvažovaném bodě protínají kolmo (vyložte podrobněji!). Parametry λ_1, λ_2 obou kuželoseček jsou určeny rovnicí (9), která je pro λ kvadratická.

Z identity

$$(a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda) - (b^2 - \lambda)x^2 - (a^2 - \lambda)y^2 \equiv (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

plyne pro $\lambda = a^2$ resp. $\lambda = b^2$

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm \frac{1}{e}\sqrt{(a^2 - \lambda_1)(a^2 - \lambda_2)} \\ &\text{resp.} \\ y &= \pm \frac{1}{e}\sqrt{(\lambda_1 - b^2)(b^2 - \lambda_2)} \quad (e^2 = a^2 - b^2); \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

obráceně pak řešením rovnice (9) nalezneme

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\,(-x^2 - y^2 + a^2 + b^2 \pm \pm \sqrt{(x^2 - y^2 - a^2 + b^2)^2 + 4x^2y^2}). \qquad (10')$$

Rovnicemi (10) jsou vyjádřeny pravoúhlé souřadnice x, y parametry λ_1, λ_2, které v soustavě konfokálních kuželoseček (9) určují jednu elipsu a jednu hyperbolu, v tomto bodě kolmo se protínající; rovnice ty dále ukazují, že každé obecné dvojici $(\lambda_1; \lambda_2)$ odpovídají čtyři body $(\pm x; \pm y)$, po dvou souměrně sdružené podle souřadnicových os. Rovnice (10') pak ukazují, že obráceně obecnému bodu $(x; y)$ (s výjimkou ohnisek; vyložte!) jsou přiřazena dvě čísla λ_1, λ_2; na jejich pořadí nezáleží.

Čísla λ_1, λ_2 se nazývají eliptické souřadnice bodu; bod v této souřadnicové soustavě je tedy určen jako průsečík dvou konfokálních kuželoseček, z nichž můžeme počítati na př. elipsy do soustavy Σ_1, hyperboly do soustavy Σ_2.([19])

Další vlastnosti těchto souřadnic v úlohách: 23—25.

Jiné druhy křivočarých souřadnic. A. Parabolické souřadnice jsou definovány rovnicí

$$y^2 = 2\lambda x + \lambda^2 \quad (\lambda \text{ parametr}), \qquad (11)$$

která vyjadřuje soustavu konfokálních parabol (odůvodněte!). Označíme-li λ_1, λ_2 kořeny rovnice (11), platí

$$x = -\tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2), \quad y = \pm\sqrt{-\lambda_1\lambda_2} \qquad (12)$$

a obráceně

$$\lambda_{1,2} = -x \pm \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (12')$$

Rovnice ty ukazují, že každým obecným bodem $(x; y)$ procházejí dvě konfokální paraboly, osa jedné leží v kladné ose x, osa druhé v záporné ose x (vyložte podrobněji!).([20])

B. Hyperbolické souřadnice. Křivky soustav Σ_1, Σ_2 nechť jsou vyjádřeny rovnicemi

$$x^2 - \frac{1}{n}\,y^2 = \lambda^2, \quad xy^n = \mu \quad (\lambda, \mu \text{ parametry})! \qquad (13)$$

Snadno se přesvědčíme, že křivky obou soustav jsou navzájem ortogonální; zvolíme-li speciálně $n = 1$, obdržíme dvě kolmo se protínající soustavy rovnoosých hyperbol. Čísla λ_1, λ_2, definovaná rovnicemi

$$x^2 - y^2 = \lambda_1,\ 2xy = \lambda_2,\ (\lambda = \lambda_1,\ \mu = \tfrac{1}{2}\lambda_2) \qquad (14)$$

slují **hyperbolické souřadnice** bodu. Prozkoumejte je podrobněji! [21] [22]

Úlohy k tomuto odstavci: 26—33.

Úlohy ke cvičení.

1. Odvoďte polární rovnice některých čar transformací (1) z příslušných rovnic v pravoúhlých souřadnicích!

2. Bez použití pravoúhlých souřadnic řešte některé základní úlohy v polárních souřadnicích: a) vzdálenost dvou bodů, b) obsah trojúhelníku (a odtud rovnici přímky jdoucí dvěma body), c) úhel dvou přímek (kdy jsou rovnoběžné, kolmé?) a pod.!

[a) $+\sqrt{\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - 2\varrho_1\varrho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$, b), c) transformujte příslušný výraz v pravoúhlých souřadnicích a také odvoďte vztah přímo!]

3. Jak zní rovnice přímky, která prochází bodem $(\varrho_1; \varphi_1)$ a s polární osou svírá úhel φ_2?

[$\varrho_1^{-1}\sin(\varphi_2 - \varphi) + \varrho^{-1}\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$; rovnici (3) limitujte pro $\varrho_2^{-1} \to 0$; proč?]

4. Odvoďte polární úsekovou rovnici přímky!

[Je-li ϱ_0 úsek přímky na polární ose, φ_0 její úhel s polární osou, je $\varrho : \varrho_0 = \sin\varphi_0 : \sin(\varphi - \varphi_0)$.]

5. Co vyjadřuje rovnice $\varrho = a\cos\varphi + b\sin\varphi$?

[Kružnici jdoucí počátkem. Jak ji lze sestrojiti z kružnic $\varrho_1 = a\cos\varphi$, $\varrho_2 = b\sin\varphi$ $(\varrho = \varrho_1 + \varrho_2)$?]

6. Dokažte, že pro dva kolmé průvodiče ϱ_1, ϱ_2, vycházející ze středu elipsy, platí $\varrho_1^{-2} + \varrho_2^{-2} = a^{-2} + b^{-2}$ (a, b poloosy)!

[Z polární středové rovnice $\varrho^{-2} = a^{-2}\cos^2\varphi + b^{-2}\sin^2\varphi$.]

7. Co vyjadřují rovnice a) $\varrho^{-2} = a\cos 2\varphi + b\sin 2\varphi + c$, b) $k\varrho^{-2} = \sin(\varkappa + 2\varphi)$ (k, $\varkappa$ konstanty)?

[a) kuželosečku, b) rovnoosou hyperbolu; je to speciální případ křivky a) $(c = 0)$.]

8. Jak zní polární rovnice a) rovnoosé hyperboly, je-li pól ve vzdálenosti její poloosy od středu a polární osa v hlavní ose její, b) kuželosečky ve tvaru vrcholovém, c) paraboly s ohniskem

v pólu a s osou v polární ose, d) elipsy se středem v pólu a s hlavní osou v polární ose?

[a) $\varrho = \pm 2a \cos \varphi : \cos 2\varphi$, b) $\varrho = 2p \cos \varphi : [1 - (1 + q) \cos^2 \varphi]$, kde $p = b^2 : a$, $q = b^2 : a$, speciálně pro $q = 0$, c) $p : \varrho = 2 \sin^2 \dfrac{\varphi}{2}$, d) $b^2 \varrho^{-2} = 1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi$.]

9. Dokažte, že pro úseky sečny vedené v kuželosečce ohniskem a jím rozdělené platí $2p^{-1} = \varrho_1^{-1} + \varrho_2^{-1}$!

[Z ohniskové rovnice (4)!]

10. Odvoďte polární rovnici a) Dioklovy kisoidy, b) lemniskaty!

[a) Podle definice platí $\varrho = \dfrac{2r}{\cos \varphi} - 2r \cos \varphi$; $\varrho = 2r \sin^2 \varphi : \cos \varphi$. b) Platí $\varrho_{1,2}{}^2 = \varrho^2 + c^2 \pm 2\varrho c \cos \varphi$ a $\varrho_1 \varrho_2 = c^2$; $\varrho^2 = 2c^2 \cos 2\varphi$. Co značí r, c? Odvoďte tyto rovnice také z pravoúhlých rovnic!]

11. Co je geometrickým místem pat kolmic spuštěných z průsečíku dvou přímek k sobě kolmých na úsečku stálé délky a, která se po nich pohybuje svými krajními body?

[Čtyřlistá růžice $\varrho = a \sin \varphi \cos \varphi$. Jak zní její rovnice v pravoúhlých souřadnicích?]

12. Budiž dána základní křivka s rovnicí $\varrho = f(\varphi)$. Čáru s rovnicí $\varrho = f(\varphi) \pm b$ ($b =$ konst.) nazýváme konchoidou základní křivky vzhledem k pólu. Sestrojte a) konchoidu přímky (konchoidu Nikomedovu), b) konchoidu kružnice, jestliže pól leží na základní kružnici (závitnici Pascalovu)! Napište rovnice těchto křivek!

[a) $\varrho = \dfrac{a}{\cos \varphi} \pm b$ čili $(x^2 + y^2)(x - a)^2 - b^2 x^2 = 0$; rozeznávejte $b \gtreqless a$! b) $\varrho = 2a \cos \varphi + b$ čili $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 - b^2 (x^2 + y^2) = 0$; povšimněte si případu $b = 2a$ (kardioida)!]

13. Které čáry vyjadřuje rovnice $\varrho^n = a^n \sin n\varphi$ (slují sinové spirály) pro $n = 1, 2, -1, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$? Jak sestrojíte jejich tečny?

[Kružnici; lemniskatu (užijte transformace $\varrho = '\varrho$, $\varphi = \frac{1}{4}\pi - '\varphi$!); přímku; rovnoosou hyperbolu; kardioidu; parabolu. Z rovnice (5) plyne $\vartheta = n\varphi$; vyšetřete podrobně jednotlivé případy!]

14. Odvození rovnice tečny, v textu jen naznačené, proveďte podrobněji!

15. Sestrojte křivku $\varrho = a \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$! Dokažte, že křivka touto rovnicí vyjádřená, je kolmá strofoida!

[Průvodič protne křivku ve dvou bodech M_1, M_2 takových, že $\overline{OM}_1 = \varrho_1 = a \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, $\overline{OM}_2 = \varrho_2 = a \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}$. Pro střed S úsečky $\overline{M_1M_2}$ platí $\overline{OS} = \frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2) = \frac{a}{\sin \varphi}$; trojúhelník AOS [A $(a; \frac{1}{2}\pi)$] je pravoúhlý. Dále je $\overline{SM}_1 = \overline{OS} - \overline{OM}_1 = \overline{SM}_2 = \overline{OM}_2 - \overline{OS}$, tedy $\overline{AS} = \overline{SM}_1 = \overline{SM}_2$, což je charakteristická vlastnost pro strofoidu.]

16. Určete rovnici čar, které splňují rovnici $\vartheta = f(\varphi)$! Zvláště pak čáry, pro které je $\vartheta = k + n\varphi$, k, n konstanty (speciálně pro $n = 0$)!

[Z rovnice $\operatorname{tg} \vartheta = \varrho : \varrho'$ plyne integrací pro náš případ $\varrho = Ce^A$, kde $A = \int \frac{d\varphi}{\operatorname{tg} f(\varphi)}$. Speciálně $\varrho = C \sin^{\frac{1}{n}} (k + n\varphi)$, což jsou (až na otočení kolem pólu) sinové spirály. C značí integrační konstantu. Pro $n = 0$ plyne integrací rovnice $\operatorname{tg} k = \varrho : \varrho'$ vztah $\varrho = Ce^{\varphi \operatorname{cotg} k}$; křivka vyjádřená touto rovnicí sluje logaritmická spirála.]

17. Dokažte, že transformace biradiálních souřadnic na biangulární a obráceně je vyjádřena rovnicemi:
$\varrho_1 = 2l \sin \varphi_2 : \sin (\varphi_2 - \varphi_1)$, $\varrho_2 = 2l \sin \varphi_1 : \sin (\varphi_2 - \varphi_1)$,
a obráceně
$\cos \varphi_1 = (\varrho_1^2 - \varrho_2^2 + 4l^2) : 4l\varrho_1$, $\cos \varphi_2 = (\varrho_1^2 - \varrho_2^2 - 4l^2) : 4l\varrho_2$!

[Z rovnic (8).]

18. Které křivky jsou vyjádřeny v biradiálních souřadnicích rovnicemi a) $\varrho_1 + \varepsilon\varrho_2 = 2a$ $(\varepsilon = \pm 1)$, b) $\varrho_1 : \varrho_2 = \lambda$, c) $\varrho_1\varrho_2 = \lambda^2$, d) $a\varrho_1^2 + b\varrho_2^2 = c$ (speciálně pro $a = -b$ a pro $c = 0$)?

[a) Středová kuželosečka, b) kružnice (t. zv. Apolloniova), c) Cassiniho křivky (pro $\lambda = l$ lemniskata), d) kružnice (speciálně přímka a Apolloniova kružnice).]

19. Kterou křivku vyjadřuje rovnice $a\varrho_1\varrho_2 + b\varrho_1 + c\varrho_2 + d = 0$ (a, b, c, d konstanty)? Speciálně pro $a = 0$ (a pro $a = 0$, $-d = \pm 2lc$), pro $ad - bc = 0$!

[Křivku osmého stupně. Pro $a = 0$ obdržíme křivku čtvrtého stupně $\mu\varrho_1 + \nu\varrho_2 = \lambda$ [sluje Descartův ovál; jeho polární rovnice vzhledem k pólu O_1 a polární ose $\overrightarrow{O_1O_2}$ zní $(\mu^2 - \nu^2)\varrho_1^2 - 2(\lambda\mu - 2l\nu^2 \cos \varphi_1)\varrho_1 + (\lambda^2 - 4l^2\nu^2) = 0$, takže pro $\lambda = \pm 2l\nu$ (t. j. pro $-d = \pm 2lc$) dostaneme Pascalovu závitnici $(\mu^2 - \nu^2)\, \varrho_1^2 = 2\lambda\,(\mu \pm \nu \cos \varphi_1)$]. Pro $ad - bc = 0$ dostaneme dvě kružnice (které?).]

20. Které křivky jsou vyjádřeny v biangulárních souřadnicích rovnicemi a) $\varphi_2 - \varphi_1 = \alpha$, b) $\varphi_1 : \varphi_2 = \lambda$ ($\lambda = -1, \frac{1}{2}, 2$)?

[a) kružnice (proč?), b) přímka, kružnice, kružnice.]

21. Dokažte, že elipsu, jejíž ohniska leží v pólech, lze vyjádřiti biangulární rovnicí $\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \operatorname{cotg} \frac{\varphi_2}{2} = (1 - \varepsilon) : (1 + \varepsilon)$, kde $\varepsilon = l : a$ (a velká poloosa elipsy)!

[Vztah $\varrho_1 + \varrho_2 = 2a$ transformujte na biangulární souřadnice podle rovnic 17. úlohy! Obdobnou úvahu proveďte také pro hyperbolu!]

22. Kterou křivku vyjadřuje rovnice $a \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 + b \operatorname{tg} \varphi_1 + c \operatorname{tg} \varphi_2 + d = 0$ (a, b, c, d konstanty)? Speciálně pro $b + c = 0$, pro $b = c = 0$, pro $a = d = \operatorname{tg} \alpha$ a $b = -c = 1$, pro $a = -d = \operatorname{tg} \alpha$ a $b = c = 1$ (a speciálně pro $\alpha = \frac{1}{2}\pi$)!

[Kuželosečku jdoucí póly. Pro $b + c = 0$ je středová, pro $b = c = 0$ má rovnici $x^2 + \lambda y^2 = \mu$, pro $a = d = \operatorname{tg} \alpha$ a $b = -c = 1$ nalezneme kružnici, pro $a = -d = \operatorname{tg} \alpha$ a $b = c = 1$ máme rovnoosou hyperbolu $\varphi_1 + \varphi_2 = \alpha$ (speciálně $x^2 - y^2 = l^2$; vyslovte větou!).]

23. Která křivka je v eliptických souřadnicích vyjádřena rovnicemi a) $\lambda_1 + \lambda_2 = k$, b) $\lambda_1 \lambda_2 = k$? Speciálně pro $k = 0$!

[a) kružnice (speciálně Mongeova kružnice), b) elipsa.]

24. Dokažte větu Ivoryho: Dvě konfokální elipsy a k nim příslušné konfokální hyperboly určují svými průsečíky v jednom kvadrantu čtyrúhelník, jehož úhlopříčky jsou si rovny!

[Jsou-li λ_1, λ_2 resp. Λ_1, Λ_2 souřadnice jedné resp. druhé dvojice konfokálních kuželoseček, jsou souřadnice protějších vrcholů čtyřúhelníka $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ $[(\lambda_1; \lambda_2), (\Lambda_1; \Lambda_2)]$ a $(x_3; y_3)$, $(x_4; y_4)$ $[(\Lambda_1; \lambda_2), (\lambda_1; \Lambda_2)]$; rovnice (10) pak ukazují, že $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2$.]

25. Výpočtem dokažte: Rovnice (9) má pro každé x, y (s výjimkou ohnisek) dva reálné kořeny λ_1, λ_2; jeden reálný kořen leží v intervalu (b^2, a^2), druhý v intervalu $(-\infty, b^2)$! Co to znamená geometricky?

[Z rovnic (10), které uvedeme na tvar $e^2x^2 = (a^2 - \lambda_1)(a^2 - \lambda_2)$ resp. $-e^2y^2 = (b^2 - \lambda_1)(b^2 - \lambda_2)$; použijte (nepodstatného) předpokladu, že $a^2 > b^2$. Obecným bodem $(x; y)$ prochází jedna reálná elipsa a jedna reálná hyperbola soustavy (9).]

26. Které čáry jsou v parabolických souřadnicích vyjádřeny rovnicemi a) $\lambda_1 + \lambda_2 = k$, b) $\lambda_1 \lambda_2 = k$? Speciálně pro $k = 0$!

[Přímky, speciálně souřadnicové osy.]

27. Jak zní v parabolických souřadnicích rovnice a) kružnice se středem v počátku, b) paraboly ve vrcholovém tvaru?

[a) $\lambda_1 - \lambda_2 = \pm 2r$, b) $\lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} = p^{-1}$.]

28. Větu Ivoryho dokažte pro parabolu!

[Podle pokynu, uvedeného v 24. úloze.]

29. Na jaké souřadnicové soustavy vedou rovnice (13) pro $n = 0, -1, -\frac{1}{2}$?

[Kartézské souřadnice v přímce, polární souřadnice v rovině, křivočaré souřadnice v rovině (soustava Σ_1 jsou elipsy, Σ_2 paraboly).]

30. Které čáry jsou v hyperbolických souřadnicích vyjádřeny rovnicemi a) $\lambda_i = 0$ $(i = 1, 2)$, b) $\lambda_1 + \varepsilon\lambda_2 = k$ $(\varepsilon = \pm 1)$, c) $\lambda_1 : \lambda_2 = k$?

[a) asymptoty čar soustav Σ_1, Σ_2, b) rovnoosé hyperboly, c) složené kuželosečky (jak?).]

31. Prozkoumejte t. zv. ortogonální kruhové souřadnice, které jsou definovány rovnicemi

$$\lambda_1 = \log \frac{l}{\underset{+}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}}} - \log \frac{l}{\underset{+}{\sqrt{(x+l)^2 + y^2}}},$$

$$\lambda_2 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x-l} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x+l}!$$

[Použijeme-li bipolárních souřadnic s póly $(\mp l; 0)$, můžeme tyto rovnice psáti ve tvaru $\lambda_1 = \log \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$, $\lambda_2 = \varphi_2 - \varphi_1$; soustavy Σ_1, Σ_2 jsou ortogonální soustavy kružnic. Atd.]

32. Prozkoumejte t. zv. lemniskatické souřadnice, které jsou definovány rovnicemi

$$\lambda_1 = \log \frac{l}{\underset{+}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}}} + \log \frac{l}{\underset{+}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}}},$$

$$\lambda_2 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x-l} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x+l}!$$

[Jako v 31. úloze nalezneme také zde $\lambda_1 = \log \frac{l^2}{\varrho_1\varrho_2}$, $\lambda_2 = \varphi_1 + \varphi_2$; soustavy Σ_1, Σ_2 jsou složeny z křivek Cassiniho a z rovnoosých hyperbol a jsou ortogonální. Atd.]

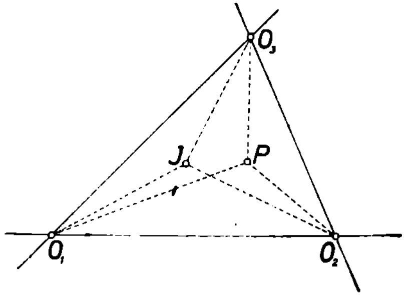
33. Napište nejjednodušší souřadnice, tvoří-li soustavu Σ_1 soustředné kružnice, soustavu Σ_2 rovnoběžné přímky!

[$\lambda_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\lambda_2 = y$ (nebo $\lambda_2 = x$). Obráceně?]

V.

PROJEKTIVNÍ SOUŘADNICE.

Souřadnice bodu. A. Definice. Zvolme tři základní body O_1, O_2, O_3, které neleží v jedné přímce (souřadnicové body nebo vrcholy) a další bod J v obecné poloze. Zvolme nyní další obecný bod P a promítněme jej z bodů O_1, O_2, O_3; totéž učiňme i s bodem J (viz obr. 12). Přímky svazků $(O_1), (O_2)$ určují dvojpoměry[23] $k_1 = O_1(O_2O_3JP)$, $k_2 = O_2(O_3O_1JP)$, které napsaným pořadím jsou stanoveny jednoznačně. Obráceně, jsou-li dána dvě čísla k_1, k_2, jakožto hodnoty prvního resp. druhého dvojpoměru, obdržíme obecně jediný bod P jednoduchou konstrukcí: jakožto průsečík obou odpovídajících přímek svazků (O_1) a (O_2). Bylo by tedy možné použíti již těchto čísel jako souřadnic bodu v rovině. Uvažme však, že disponujeme ještě třetím bodem O_3, a tedy i třetím dvojpoměrem $k_3 = O_3(O_1O_2JP)!$



Obr. 12.

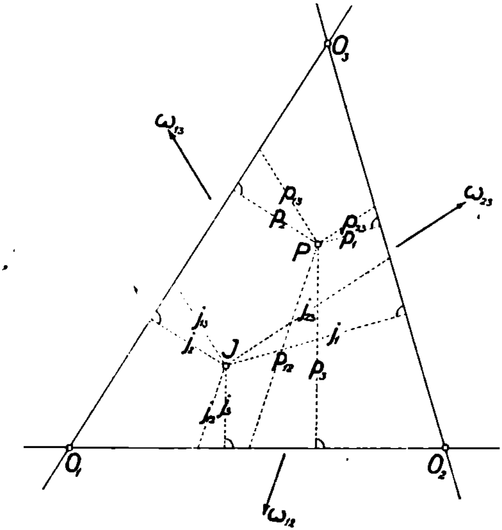
Hledejme nejprve geometrický význam dvojpoměrů k_i ($i = 1, 2, 3$). Za tím účelem přiřaďme každé straně O_jO_k souřadnicového trojúhelníka určitý směr ω_{jk} ($j, k = 1, 2, 3$) a promítněme v tomto směru body J a P do protějších stran trojúhelníka $O_1O_2O_3$ (viz obr. 13). Dělicí poměr přímky O_1J vzhledem k přímkám O_1O_2 a O_1O_3 je podle definice

$$\frac{\sin(O_1O_2, O_1J)}{\sin(O_1O_3, O_1J)} = \frac{j_{12}\sin\omega_{12}}{j_{13}\sin\omega_{13}}, \text{ tedy úměrný } \frac{j_{12}}{j_{13}},$$

dělicí poměr přímky O_1P vzhledem k týmž přímkám

$$\frac{\sin(O_1O_2, O_1P)}{\sin(O_1O_3, O_1P)} = \frac{p_{12}\sin\omega_{12}}{p_{13}\sin\omega_{13}}, \text{ tedy úměrný } \frac{p_{12}}{p_{13}},$$

(O_1O_2, O_1J) značí úhel (lhostejno v tomto případě, zda je ostrý nebo tupý) přímek O_1O_2, O_1J atd., ω_{jk} jsou (ostré nebo tupé) úhly v obr. 13 stejně označených paprsků se



Obr. 13.

stranami souřadnicového trojúhelníka, j_{12} je délka úsečky jdoucí z bodu J ve směru ω_{12}, od tohoto bodu až k ose O_1O_2 atd. A tedy $k_1 = \frac{j_{12}}{j_{13}} : \frac{p_{12}}{p_{13}}$; obdobně pro k_2 a k_3. I poznáváme, že dvojpoměry k_i nejsou nezávislé, nýbrž že platí $k_1k_2k_3 = 1$: dvěma z těchto hodnot je určena i třetí, takže zavedení třetího dvojpoměru neznamená zavedení žádné podstatně nové veličiny.

Ale ani veličiny k_i nebereme ještě za souřadnice bodu P; místo nich zavádíme tři poměrná čísla x_i vztahy

$$k_1 = \frac{x_2}{x_3},\ k_2 = \frac{x_3}{x_1},\ k_3 = \frac{x_1}{x_2},$$

a nazýváme je projektivní souřadnice bodu. Je tedy, označíme-li $\varrho(\varrho \neq 0)$ faktor úměrnosti,

$$\varrho x_1 = \frac{p_{23}}{j_{23}},\ \varrho x_2 = \frac{p_{31}}{j_{31}},\ \varrho x_3 = \frac{p_{12}}{j_{12}}; \tag{1}$$

projektivní souřadnice bodu jsou tři čísla úměrná vzdálenostem tohoto bodu, měřeným v určitých směrech, od stran daného trojúhelníka $O_1O_2O_3$, a děleným stejně měřenými vzdálenostmi jiného daného bodu J.

Položme $p_{ik} = j_{ik}$ pro každé i, k! Pak je $\varrho x_1 = \varrho x_2 = \varrho x_3 = 1$. Má tedy bod J vlastnost, že všechny jeho projektivní souřadnice jsou si rovny; je to bod jednotkový.

Není nikterak na újmu obecnosti, jestliže předpokládáme, že směry ω_{jk} jsou kolmé k stranám O_jO_k. Pak místo rovnic (1) máme jednodušší (viz obr. 13)

$$\varrho x_i = \frac{p_i}{j_i} \text{ nebo jinak } \varrho x_i = \varkappa_i p_i,\ (i = 1, 2, 3). \tag{2}$$

Vyslovte!

B. Základní vlastnosti. Je tedy soustava projektivních bodových souřadnic jednoznačně určena souřadnicovým trojúhelníkem a jednotkovým bodem. Geometrický význam těchto souřadnic je pak dán rovnicemi (2). Vybudování soustavy je opřeno jen o pojem dvojpoměru a není tudíž nijak vztaženo — jak tomu bylo u všech soustav posavadních — na pomocnou soustavu kartézskou. I hodí se tyto souřadnice především k vyšetřování geometrických vlastností, které souvisí s dvojpoměrem.[25])

Základní vlastnosti našich souřadnic vyvodíme snadno z jejich definice rovnicemi (2). Tak pro bod O_1 platí $\varrho x_1 = v_1 : j_1$, $x_2 = x_3 = 0$ (v_1 je délka výšky v trojúhelníku $O_1O_2O_3$ spuštěné z vrcholu O_1), a poněvadž záleží jen na poměru souřadnic, lze psáti nejjednodušeji

$$O_1\,(1;\,0;\,0),\ \text{a podobně}\ O_2\,(0;\,1;\,0),\ O_3\,(0;\,0;\,1).$$

A také $J\,(1;\,1;\,1)$. Pro body na přímce O_1O_2 (souřadnicové ose) platí $p_{12} = 0$, i je její rovnice $x_3 = 0$; a pod. Proto neexistuje bod $(0;\,0;\,0)$, poněvadž by musil současně ležeti na všech souřadnicových osách, což při jejich obecné poloze je vyloučeno.

Geometrické místo bodů, jejichž souřadnice splňují lineární homogenní vztah

$$\sum_i a_i x_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{3}$$

je přímka. Obsahuje-li vrchol O_1, platí $a_1 = 0$, a obráceně (proč?); a pod. Obsahuje-li dva vrcholy O_i, jsou v její rovnici dva koeficienty a_i rovny nule, a rovnice pak vyjadřuje souřadnicovou osu; a obráceně (jak?). Na př. rovnice přímky, která prochází vrcholem O_3, je $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ ($a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$); z této rovnice plyne, že $x_1 = -\varrho a_2$, $x_2 = \varrho a_1$, x_3 je libovolné ($\varrho \neq 0$ je faktor úměrnosti). Má tedy každý bod této přímky souřadnice $(-a_2;\,a_1;\,x_3)$ [nebo $(a_2;\,-a_1;\,x_3)$], které se shodují ve dvou číslech. Obráceně dva body, které se shodují ve dvou souřadnicích a liší ve

[25]) Poněvadž oba základní metrické pojmy, délku a úhel, lze vyjádřiti také dvojpoměry (viz 7., 11. a 12. úlohu), nevyskytují se zásadní potíže ani při vyšetřování metrických vlastností v těchto souřadnicích (mluvíme pak o metrice v projektivních souřadnicích). Zpravidla však toho nečiníme; jde-li o takový druh úlohy (a je-li to vhodné), použijeme trimetrických souřadnic, které — jak víme — jsou geometricky interpretovány obdobně jako souřadnice projektivní.

třetí, leží na přímce jdoucí vrcholem, který má týž index jako souřadnice, v níž se oba body liší.

Přímka (3) obsahuje body $(y_1; y_2; y_3)$, $(z_1; z_2; z_3)$ [stručně: body (y), (z)], jestliže platí

$$\sum_i a_i y_i = 0, \quad \sum_i a_i z_i = 0.$$

Vyloučením koeficientů a_i z těchto dvou rovnic a z rovnice (3) nalezneme rovnici přímky, jdoucí dvěma body, ve tvaru

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

(odůvodněte!), a zároveň také podmínku, aby tři body (x), (y), (z) ležely v přímce. Jsou-li λ_1, λ_2 dvě libovolná čísla různá od nuly, ukazuje determinant (4), že platí

$$\varrho x_i = \lambda_1 y_i + \lambda_2 z_i, \quad (i = 1, 2, 3); \tag{5}$$

souřadnice bodu na přímce lze tedy vyjádřiti jako lineární kombinaci souhlasných souřadnic dvou jejích libovolných bodů. Obráceně, tři body, z nichž souřadnice jednoho jsou lineární kombinací ostatních dvou, leží v přímce. I vyjadřují rovnice (5) parametricky přímku (s homogenními parametry λ_1, λ_2). Jak by byla přímka vyjádřena parametricky pomocí nehomogenního parametru Λ?

Rovnice

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 \sum_i a_i x_i + \lambda_2 \sum_i b_i x_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3); \\ \text{stručněji:} \\ \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0, \left(L_1 \equiv \sum_i a_i x_i = 0, \; L_2 \equiv \sum_i b_i x_i = 0\right), \end{array}\right\} \tag{6}$$

kde λ_1, λ_2 jsou dvě libovolná čísla, vyjadřuje s v a z e k přímek; $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ jsou základní přímky svazku, λ_1, λ_2

homogenní parametry svazku, bod určený rovnicemi $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ (jaké má souřadnice?) je střed svazku (6).([24])

C. Souřadnice v přímé řadě bodové. V přímé řadě bodové (na přímce) zvolíme dva různé body O_1, O_2 a další bod J v obecné poloze vůči bodům O_1, O_2. Pak obecný bod P této řady určuje jediný dvojpoměr (O_1O_2JP) v tomto pořadí, a obráceně. Označme hodnotu tohoto dvojpoměru k nebo $\frac{x_2}{x_1}$; i platí podle definice

$$(O_1O_2JP) = \frac{\overline{O_2P} : \overline{O_2J}}{\overline{O_1P} : \overline{O_1J}} = \frac{p_2 : j_2}{p_1 : j_1} = k = \frac{x_2}{x_1}.$$

Projektivní souřadnice bodu v řadě jsou pak definovány rovnicemi

$$\varrho x_1 = \frac{p_1}{j_1}, \ \varrho x_2 = \frac{p_2}{j_2}. \tag{1'}$$

Splynou-li body J a P, je $p_i = j_i$ a $\varrho x_i = 1$, $(i = 1, 2)$; je tedy bod J opět bod jednotkový. A okamžitě vidíme, že rovnice (1′) lze psáti také ve tvaru (2) (ovšem jen pro $i = 1, 2$).

Takto definovány, jsou tyto souřadnice speciálním případem souřadnic v rovině. Můžeme tedy jejich základní vlastnosti uvésti již jen přehledně, přenechávajíce podrobnější prozkoumání čtenáři: Souřadnicovými vrcholy a jednotkovým bodem je projektivní soustava v přímé bodové řadě určena jednoznačně. Souřadnice bodu jsou čísla úměrná vzdálenostem tohoto bodu od souřadnicových vrcholů, měřeným dvěma různými měřítky, která jsou stanovena polohou jednotkového bodu vzhledem k souřadnicovým vrcholům, nebo čísla úměrná vzdálenostem tohoto bodu od souřadnicových vrcholů, násobeným dvěma různými (ale jinak pevnými) konstantami. Bod O_1 má souřadnice (1; 0); podobně O_2 (0; 1), J (1; 1). Lineární homogenní vztah

$$a \equiv \sum_i a_i x_i = 0, \ (i = 1, 2) \tag{3'}$$

vyjadřuje bod $(-a_2; a_1)$ [nebo $(a_2; -a_1)$].([25])

Další vlastnosti v úlohách: 1—8.

Použití bodových souřadnic. A. Vyjádření dvojpoměru souřadnicemi a parametrem. Buďtež dány čtyři body přímé řady bodové: $\underset{i}{X}(\underset{i}{x_1}; \underset{i}{x_2})$, $(i = 1, 2, 3, 4)$. Podle definice projektivních souřadnic v přímé řadě bodové je $(O_1O_2J\underset{i}{X}) =$ $= \underset{i}{x_2} : \underset{i}{x_1}$, $(i = 1, 2, 3, 4)$, takže (podle výsledku 4. úlohy) platí

$$(\underset{1\,2\,3\,4}{XXXX}) = \frac{\underset{1}{x_2}\underset{3}{x_1} - \underset{1}{x_1}\underset{3}{x_2}}{\underset{2}{x_2}\underset{3}{x_1} - \underset{2}{x_1}\underset{3}{x_2}} : \frac{\underset{1}{x_2}\underset{4}{x_1} - \underset{1}{x_1}\underset{4}{x_2}}{\underset{2}{x_2}\underset{4}{x_1} - \underset{2}{x_1}\underset{4}{x_2}}; \tag{7}$$

tímto způsobem je dvojpoměr čtyř bodů $\underset{i}{X}$ vyjádřen jejich souřadnicemi.

Podle předcházejícího odstavce vyjádřeme dva body A, B řady rovnicemi $a = 0$, $b = 0$, a uvažujme lineární kombinaci těchto rovnic, t. j. rovnici

$$c \equiv \lambda_1 a + \lambda_2 b = 0.$$

Tato rovnice opět vyjadřuje jiný bod řady (který?); nazýváme proto λ_1, λ_2 homogenní parametry v řadě. Obecný bod řady (x) lze však jinak vyjádřiti také pomocí dvou jiných bodů řady (y) a (z) rovnicemi

$$\varrho x_i = \lambda_1 y_i + \lambda_2 z_i, \ (i = 1, 2). \tag{5'}$$

Jsou-li totiž body (x), (y), (z) dány svými souřadnicemi, lze [za předpokladu, že $y_1 z_2 - y_2 z_1 \neq 0$ (co značí?)] určiti z rovnic (5′) čísla λ_1, λ_2; obráceně, je-li dána dvojice čísel λ_1, λ_2, existuje jediný bod (x), jehož souřadnice jsou vyjádřeny rovnicemi (5′). Body (y), (z) slovou základní body řady; λ_1, λ_2 jsou opět homogenní parametry bodu v řadě.

Na základě rovnice (7) snadno dokážeme, že dvojpoměr čtyř bodů řady (pro jednoduchost se omezíme na nehomogenní parametry)

$$a + \Lambda_i b = 0 \text{ resp. } \underset{i}{\varrho} x_k = y_k + \Lambda_i z_k \ (i = 1, 2, 3, 4; k = 1, 2) \tag{8'}$$

je pomocí parametrů vyjádřen výrazem

$$\frac{\Lambda_1 - \Lambda_3}{\Lambda_2 - \Lambda_3} : \frac{\Lambda_1 - \Lambda_4}{\Lambda_2 - \Lambda_4}. \tag{8''}$$

Vyjádření s homogenními parametry přenecháváme čtenáři.

B. **Parametr v bodové řadě a ve svazku přímek.** Bodová řada budiž vyjádřena rovnicí (s homogenními parametry λ_1, λ_2)

$$\varrho x_i = \lambda_1 y_i + \lambda_2 z_i, \ (i = 1, 2, 3).$$

Pro bod (y) je $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, pro bod (z) je $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, pro bod (x) budiž $\lambda_1 = \underset{1}{\lambda_1}$, $\lambda_2 = \underset{1}{\lambda_2}$, pro jiný obecný bod řady $('x)$ budiž $\lambda_1 = \underset{2}{\lambda_1}$, $\lambda_2 = \underset{2}{\lambda_2}$. I je podle předcházejícího odstavce

$$(yz\, x\,'x) = \frac{\Lambda_1 - \Lambda_3}{\Lambda_2 - \Lambda_3} : \frac{\Lambda_1 - \Lambda_4}{\Lambda_2 - \Lambda_4},$$

čili — zavedeme-li homogenní parametry místo nehomogenních

$$(yzx\,'x) = \frac{\underset{2}{\lambda_1}}{\underset{2}{\lambda_2}} : \frac{\underset{1}{\lambda_1}}{\underset{1}{\lambda_2}};$$

dvojpoměr dvou bodů řady vzhledem k bodům základním se rovná podílu jejich parametrů.[26]) Speciálně bod (x^*), jehož souřadnice jsou

$$\varrho x_i^* = \lambda_1 y_i - \lambda_2 z_i, \quad (i = 1, 2, 3),$$

značí bod harmonicky sdružený s bodem (x) vzhledem k bodům (y), (z) (proveďte podrobněji!).

Body přímky (5) promítněme z obecného bodu (u)! Rovnice těchto promítajících přímek tedy zní

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 z_1 & \lambda_1 y_2 + \lambda_2 z_2 & \lambda_1 y_3 + \lambda_2 z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

a lze ji upraviti na tvar $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$, kdež

$$L_1 \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0, \quad L_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

jsou rovnice přímek, které promítají z bodu (u) základní body řady (5). Vidíme tedy, že přímky, které z obecného bodu promítají bodovou řadu, tvoří svazek (v němž základními jsou ony přímky, které promítají základní body řady), parametr ve svazku je týž, jako v bodové řadě. A to tedy znamená, že vlastnosti bodové řady, o nichž jsme mluvili na počátku tohoto odstavce, můžeme jednoduše přenésti i na svazek přímek. Tedy na př.: dvojpoměr dvou přímek svazku vzhledem k základním přímkám se rovná podílu jejich parametrů (dvojpoměr čtyř přímek svazku se rovná dvojpoměru jejich parametrů

[26]) A obecněji, dvojpoměr čtyř bodů řady rovná se dvojpoměru jejich parametrů v témž pořadí (dokažte!).

v témže pořadí), a speciálně přímka s rovnicí

$$\lambda_1 L_1 - \lambda_2 L_2 = 0$$

vyjadřuje přímku svazku, harmonicky sdruženou s přímkou $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$ vzhledem k základním přímkám $L_1 = 0$, $L_2 = 0$.

C. Harmonický pól a polára. Souřadnicová soustava budiž určena trojúhelníkem $O_1O_2O_3$ a jednotkovým bodem J. Označme J_i průměty bodu J z vrcholů O_i do protější osy; je tedy

$$J\,(1;\,1;\,1);\ J_1\,(0;\,1;\,1),\ J_2\,(1;\,0;\,1),\ J_3\,(1;\,1;\,0).$$

Poněvadž bod J_1 leží na přímce O_2O_3, lze jeho souřadnice vyjádřiti ve tvaru (5) takto:

$$\varrho\,.\,0 = \lambda_1\,.\,0 + \lambda_2\,.\,0, \varrho\,.\,1 = \lambda_1\,.\,1 + \lambda_2\,.\,0, \varrho\,.\,1 = \lambda_1\,.\,0 + \lambda_2\,.\,1,$$

takže

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \varrho;$$

pro bod J^*_1, s ním harmonicky sdružený vzhledem k bodům O_2, O_3 tedy platí: $J^*_1\,(0;\,\lambda_1;\,-\lambda_2)$ (odůvodněte!) čili

$$J^*_1\,(0;\,-1;\,1),\ \text{a podobně}\ J^*_2\,(-1;\,0;\,1),\ J^*_3\,(-1;\,1;\,0).$$

Snadno se přesvědčíme, že body J^*_1, J^*_2, J^*_3 leží v přímce, jejíž rovnice zní

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Přímka ta se nazývá harmonickou polárou bodu J vzhledem k trojúhelníku $O_1O_2O_3$. Vyslovte větou její vlastnost! Dokažte větu obrácenou: Protneme-li příčkou p strany trojúhelníka $O_1O_2O_3$ v bodech J^*_1, J^*_2, J^*_3 a sestrojíme-li k těmto bodům body harmonicky sdružené J_1, J_2, J_3 vzhledem k vrcholům trojúhelníka, prochází spojnice těchto bodů s protilehlými vrcholy trojúhelníka jedním bodem (harmonickým pólem uvažovaného trojúhelníka vzhledem k příčce p)!

Úlohy k tomuto odstavci: 9—14.

Souřadnice přímky. A. Definice. Jako projektivní souřadnice přímky ξ_i definujeme čísla úměrná koeficientům a_i v rovnici přímky (3). Každou trojicí čísel x_i (s výjimkou trojice 0, 0, 0) nebo čísel jim úměrných je určen jediný bod; každou trojicí čísel a_i (opět s výjimkou trojice 0, 0, 0), nebo čísel jim úměrných, je určena jediná přímka. Obráceně — jak již ostatně víme — obecným bodem není určena jediná trojice čísel x_i, nýbrž nekonečně mnoho trojic navzájem úměrných; podobně obecnou přímkou není určena jediná trojice ξ_i, nýbrž nekonečně mnoho trojic navzájem úměrných. Jednotkový bod J má souřadnice (1; 1; 1), podobně jednotková přímka j má souřadnice [1; 1; 1]; odtud (a vzhledem k výsledkům předcházejícího odstavce) vidíme, že bod J a přímka j jsou harmonickými útvary vzhledem k souřadnicovému trojúhelníku.

Incidence bodu (x) a přímky $[\xi]$ je vyjádřena rovnicí

$$\sum_i \xi_i x_i = 0, \ (i = 1, 2, 3); \tag{9}$$

tato rovnice je zároveň analytickým vyjádřením zákona duality v projektivních souřadnicích. Jsou-li čísla ξ_k pevná, pak ukazuje rovnice (9), že všechny body (x), jejichž souřadnice této rovnici vyhovují, leží na přímce vyjádřené rovnicí (9). Jsou-li čísla x_k pevná, ukazuje tato rovnice, že všechny přímky $[\xi]$, jejichž souřadnice této rovnici vyhovují, procházejí bodem vyjádřeným rovnicí (9). Při proměnných ξ_k otáčí se přímka $[\xi]$ kolem bodu (x) a rovnice (9) je rovnicí tohoto bodu. Při proměnných x_k je obdobně rovnice (9) rovnicí přímky jakožto spojnice všech bodů, které na ní leží.

B. Geometrická definice přímkových souřadnic. Projektivní souřadnice přímky lze definovati také geometricky. Zvolme tři základní přímky (souřadnicové osy) o_1, o_2, o_3 v obecné poloze (obr. 14) a další přímku j v obecné poloze k nim. I bude obecná přímka p určena, budeme-li znáti její průsečíky s dvěma základními přímkami, na př. s o_1 a o_2. Označme O_1, O_2, O_3 průsečíky os, průsečíky přímky j s osami J_1, J_2, J_3, průsečíky p s osami P_1, P_2, P_3! Průsečíky P_i jsou jednoznačně určeny dvojpoměry

$$P_1 \ldots o_1\,(o_2 o_3 j p) = (O_3 O_2 J_1 P_1) \text{ atd.}$$

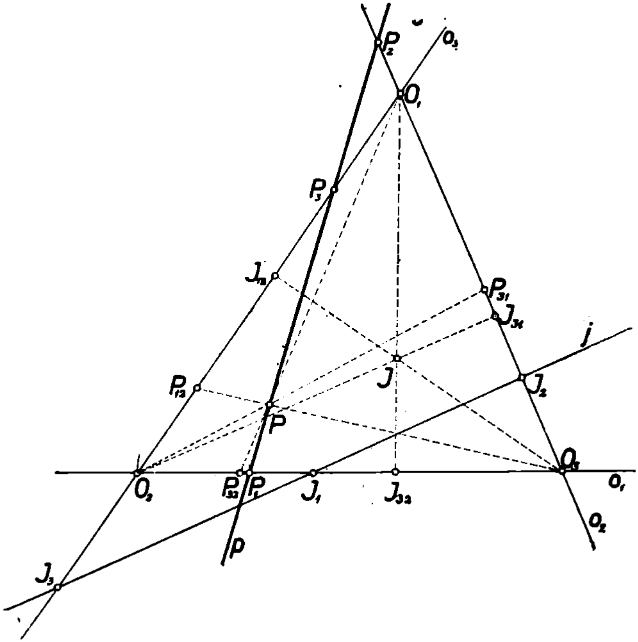
Označíme-li ι_i resp. π_i délky kolmic (měřené obvyklým měřítkem), spuštěných z bodů O_i na přímky j resp. p,[27]) pak vidíme, že platí

[27]) Jako u souřadnic bodových, tak i zde mohli bychom obecněji měřit tyto délky v jistých daných směrech.

$$o_1\,(o_2o_3jp) = (O_3O_2J_1P_1) = \frac{\overline{O_3J_1}}{\overline{O_2J_1}} : \frac{\overline{O_3P_1}}{\overline{O_2P_1}} = \frac{\iota_3}{\iota_2} : \frac{\pi_3}{\pi_2} = \frac{\pi_2}{\iota_2} : \frac{\pi_3}{\iota_3} \text{ atd.}$$

Položme nyní

$$\varkappa_1 = o_1\,(o_2o_3jp) = \frac{\pi_2}{\iota_2} : \frac{\pi_3}{\iota_3} = \frac{\xi_2}{\xi_3} \text{ atd.;}$$



Obr. 14.

pak veličiny ξ_i jsou projektivní souřadnice přímky. Jsou tedy definovány rovnicemi

$$\varrho\xi_i = \frac{\pi_i}{\iota_i}, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{10}$$

O dvojpoměrech $\varkappa_i$ platí opět $\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 = 1$.

Zbývá ovšem dokázati, že přímkové souřadnice, definované tímto způsobem geometricky, jsou tytéž, které jsme zavedli v předcházejícím odstavci definicí analytickou. Za tím účelem musíme předpokládati, že trojúhelník souřadnic bodových splyne s trojúhelníkem souřadnic přímkových (viz obr. 14). Vztah mezi J a j je určen dvojpoměry

$$(O_1O_2J_3J_{12}),\ (O_2O_3J_1J_{23}),\ (O_3O_1J_2J_{31}).$$

Zvolme nyní J a j v takové vzájemné poloze, aby tyto dvojpoměry byly harmonické, čili aby přímka j byla harmonickou polárou bodu J vzhledem k trojúhelníku $O_1O_2O_3$. Pak ale pro bod P platí

$$k_1 = O_1\,(O_2O_3JP) = (O_2O_3J_{32}P_{32}) = \frac{x_2}{x_3} \text{ atd.},$$

pro přímku p

$$\varkappa_1 = o_1\,(o_2o_3jp) = (O_2O_3J_1P_1) = \frac{\xi_2}{\xi_3} \text{ atd.}$$

Z těchto vztahů odvodíme

$$(O_2O_3J_{32}P_{32})\,.\,(O_3O_2J_1P_1)\,.\,(O_2O_3J_1J_{32}) =$$
$$= \frac{\overline{O_2P_1}}{\overline{O_3P_1}} : \frac{\overline{O_2P_{32}}}{\overline{O_3P_{32}}} = (O_2O_3P_1P_{32}),$$

a poněvadž podle naší volby je $(O_2O_3J_1J_{32}) = -1$, nalézáme tak vztahy

$$-\frac{x_2}{x_3}\,.\,\frac{\xi_2}{\xi_3} = (O_2O_3P_1P_{32}) \text{ atd.}$$

Bod P však leží na přímce p; tedy promítneme-li z bodu P body O_2, O_3, P_1, P_{32} na přímku o_2, platí

$$(O_2O_3P_1P_{32}) = (P_{31}O_3P_2O_1) \text{ atd.}$$

Dále je (podle známých vlastností dvojpoměru; viz také 1. úlohu!)

$$(P_{31}O_3P_2O_1) = 1 - (O_1O_3P_2P_{31}) = 1 - \frac{1}{(O_3O_1P_2P_{31})} \text{ atd.}$$

čili

$$-\frac{x_2}{x_3}\,.\,\frac{\xi_2}{\xi_3} = 1 + \frac{x_1}{x_3}\,\frac{\xi_1}{\xi_3}.$$

To však je podmínka incidence (9) útvarů p a P, jak jsme měli dokázati.

Obě definice souřadnic ξ_i jsou tedy identické, jestliže oba souřadnicové trojúhelníky splynou a jestliže jednotkové útvary jsou v harmonické poloze vzhledem k základnímu trojúhelníku. Pak je také $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ rovnice jednotkové přímky $[1; 1; 1]$, $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$ rovnice jednotkového bodu $(1; 1; 1)$.([26])

Úlohy k tomuto odstavci: 15.—19.

Transformace projektivních souřadnic. A. Transformace bodových souřadnic. Lineární substituce v proměnných x_1, x_2, x_3, která je vyjádřena rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} \varrho\,'x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \varrho\,'x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \varrho\,'x_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \\ &(\text{stručně: } \varrho\,'x_i = \sum_k a_{ik}x_k, \quad i, k = 1, 2, 3) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

převádí bod (x) v bod $('x)$. Má-li vyjadřovati transformaci projektivních souřadnic, musí obráceně převáděti bod $('x)$ jednoznačně v původní bod (x). Nutná a postačující podmínka pro to je, aby soustava (11) byla řešitelná i podle proměnných x_i, t. j., aby determinant soustavy (modul substituce) $A \equiv |a_{ik}|$ byl různý od nuly. Je-li tomu tak, pak je obráceně

$$\frac{A}{\varrho}\, x_i = \sum_k A_{ki}\,'x_k, \tag{12}$$

při čemž A_{ki} značí doplněk prvku a_{ki} v determinantu A (proveďte podrobněji!).

Pak obecnému bodu (x) odpovídá jeden bod $('x)$, a obráceně. Souřadnicové osy původní soustavy, určené rovnicemi $x_i = 0$, transformují se v přímky $\sum_k A_{ki}\,'x_k = 0$, nové souřadnicové osy $'x_i = 0$ jsou v původní soustavě vyjádřeny rovnicemi $\sum_k a_{ik}x_k = 0$.

B. Transformace přímkových souřadnic. Podle úvah předcházejícího odstavce transformují se body přímky $\sum_i \xi_i x_i = 0$ v body přímky $\sum_k {}'\xi_k {}'x_k = 0$. Abychom nalezli explicitní výrazy pro ${}'\xi_k$, dosaďme do rovnice původní přímky z rovnic (12). Obdržíme

$$\sum_i \left\{ \xi_i \sum_k A_{ki} {}'x_k \right\} = 0,$$

což lze také psáti (proveďte podrobněji!)

$$\sum_i \sum_k \xi_i A_{ki} {}'x_k \equiv \sum_k \sum_i \xi_i A_{ki} {}'x_k \equiv \sum_k \left\{ {}'x_k \sum_i \xi_i A_{ki} \right\} = 0.$$

Proto
$$\varrho \, {}'\xi_k = \sum_i \xi_i A_{ki}. \tag{13}$$

A obráceně (proveďte podrobněji!) nalezneme

$$\varrho \xi_i = \sum_k {}'\xi_k a_{ki}. \tag{14}$$

Rovnice (13), (14) vyjadřují transformaci přímkových souřadnic. Srovnáme-li je s rovnicemi (11), (12) pozorujeme, že transformace přímkových souřadnic vyplývá z transformace bodových souřadnic, když proměnné x nahradíme proměnnými ξ, a koeficienty a_{ik} doplňky A_{ik}, a obráceně. Dále vidíme, že veličiny x vyjadřují se veličinami ${}'x$ stejně, jako veličiny ${}'\xi$ veličinami ξ, až na to, že indexy u koeficientů jejich jsou vzájemně zaměněny. Pravíme stručně, že transformace přímkových souřadnic je kontragredientní k transformaci bodových souřadnic.[27]

Úlohy k tomuto odstavci: 20—29.

Úlohy ke cvičení.

1. Napište hodnoty všech dvojpoměrů, které lze vytvořiti ze čtyř různých bodů ležících v přímce!

[$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = k$; $(ABDC) = (BACD) = (DCAB) = (CDBA) = \frac{1}{k}$ (t. zv. reciproký dvojpoměr); $(ACBD) = (CADB) = (BDAC) = (DBCA) = 1 - k$ (komplementární dvojpoměr); $(ACDB) = (CABD) = (BDCA) = (DBAC) = \frac{1}{1-k}$ (dvojpoměr reciproký ke komplementárnímu); $(ADCB) = (DABC) = (CBAD) = (BCDA) = \frac{k}{k-1}$; $(ADBC) = (DACB) = (CBDA) = (BCAD) = \frac{k-1}{k}$ (dvojpoměr komplementární k reciprokému). Vyslovte tyto vlastnosti dvojpoměru větami!]

2. Jak se zjednoduší výsledek předcházející úlohy, jestliže $(ABCD)$ je rovno a) 1, b) -1. c) Jak je tomu v případě, když žádáme, aby základní dvojpoměr byl rovný dvojpoměru reciprokému ke komplementárnímu nebo rovný dvojpoměru komplementárnímu k reciprokému?

[a) 6 hodnot se redukuje na 3 $(1, 0, \infty)$; body A, B, C, D nejsou již vesměs různé, b) 3 hodnoty $(-1, 2, \frac{1}{2})$; body A, B, C, D tvoří harmonickou čtveřinu v pořadí $(ABCD)$ [nebo $(CDAB)$]. c) $(ABCD) = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3}) = \sqrt[3]{-1}$, čtveřina je ekvianharmonická; body A, B, C, D nejsou ovšem všechny reálné.]

3. Ukažte, že platí $(ABCD) = -\operatorname{tg}^2 \frac{\varkappa}{2}$, $(ABDC) = -\operatorname{cotg}^2 \frac{\varkappa}{2}$, $(ACBD) = -\sec^2 \frac{\varkappa}{2}$, $(ACDB) = \cos^2 \frac{\varkappa}{2}$, $(ADCB) = \sin^2 \frac{\varkappa}{2}$, $(ADBC) = \operatorname{cosec}^2 \frac{\varkappa}{2}$ (udal Casey)!

[Ve výsledcích 1. úlohy položte $k = -\operatorname{tg}^2 \frac{\varkappa}{2}$!]

4. Dvojpoměr $(DEFG)$ vyjádřete hodnotami dvojpoměrů $(ABCD)$, $(ABCE)$, $(ABCF)$, $(ABCG)$!

[Jsou-li hodnoty daných dvojpoměrů k_1, k_2, k_3, k_4, je $(DEFG) = \frac{k_1 - k_3}{k_2 - k_3} : \frac{k_1 - k_4}{k_2 - k_4}$. (29)]

5. Vyšetřete souřadnice v přímé řadě bodové, jestliže jednotkový bod je nevlastním bodem přímky O_1O_2!

[$\varrho x_i = \overline{O_iP}$; dvojpoměr se redukuje na dělicí poměr.]

6. Touž úvahu proveďte v případě, že jednotkový bod půlí úsečku $\overline{O_1O_2}$!

[$\varrho x_1 = -\overline{O_1P}$, $\varrho x_2 = \overline{O_2P}$; po vyloučení ϱ plyne odtud $\sum_i \overline{O_iP} \cdot \mu_i = 0$ ($i = 1, 2$), kde $\mu_i = x_i^{-1}$ (barycentrické souřadnice).]

7. Touž úvahu proveďte pro případ, že jeden souřadnicový vrchol je nevlastním bodem přímky O_1O_2. Na základě výsledku vyjádřete eukleidovský pojem délky dvojpoměrem!

[$\varrho x_1 = \overline{O_2J}$, $\varrho x_2 = \overline{O_2P}$; zvolíme-li $\overline{O_2J} = 1$, je $\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{\overline{O_2P}}{1} = x$, kartézské souřadnici bodu na přímce. A tedy $x = (\infty, 0, 1, x)$.]

8. Úlohy 6. a 7. rozšiřte na případ rovinných souřadnic!

[Je-li těžiště souřadnicového trojúhelníka jednotkovým bodem, přejdou projektivní souřadnice na barycentrické. Jestliže osa O_1O_2 leží v nekonečnu, je $p_{12} : \bar{p}_{12} = 1$, a pro $\varrho = 1$ dospíváme ke kartézským souřadnicím bodu v rovině.]

9. Dokažte, že parametry bodu v řadě [vyjádřené rovnicí (5′)] jsou projektivní souřadnice tohoto bodu vzhledem k základním bodům řady jakožto souřadnicovým vrcholům a vzhledem k bodu $(y_1 + z_1;\ y_2 + z_2)$ jako bodu jednotkovému!

10. Ukažte, že okolnost, že dvojice bodů v řadě nebo dvojice přímek ve svazku jsou základními útvary, není podstatná, t. j. že za základní body nebo za základní přímky můžeme zvolit dvojice libovolné!

11. Napište výraz pro dvojpoměr čtyř přímek $x^2 + y^2 = 0$ čili $x \pm iy = 0$ $(i = \sqrt{-1})$ a $y - k_1x = 0$, $y - k_2x = 0$, vzatých v tomto pořadí!

[Považujte pro okamžik x, y za projektivní souřadnice bodu v řadě! Pak $\left(i, -i, -\dfrac{1}{k_1}, -\dfrac{1}{k_2}\right) = [1 + k_1k_2 + i\,(k_1 - k_2)] :$ $: [1 + k_1k_2 - i\,(k_1 - k_2)]$.]

12. Na základě výsledku předcházející úlohy dokažte, že úhel φ dvou přímek, jejichž směrnice jsou k_1, k_2, lze vyjádřiti vzorcem (Laguerreovým)

$$\varphi = \frac{i}{2} \log\,(i, -i, k_1, k_2)!$$

[Dokážeme nejprve, že $\left(i, -i, -\frac{1}{k_1}, -\frac{1}{k_2}\right) = (1 - i \operatorname{tg} \varphi) : (1 + i \operatorname{tg} \varphi) = \cos 2\varphi - i \sin 2\varphi = e^{-2i\varphi}$ (podle vzorce Eulerova). A tedy $\varphi = \frac{i}{2} \log \left(i, -i, -\frac{1}{k_1}, -\frac{1}{k_2}\right)$, což — až na malou úpravu — je již Laguerreův vzorec.([29])]

13. Dokažte: Spojíme-li obecný bod P s vrcholy trojúhelníka $O_1O_2O_3$ a sestrojíme-li k těmto spojnicím harmonicky sdružené přímky vzhledem k příslušným stranám trojúhelníka, leží průsečíky těchto přímek s protilehlými stranami trojúhelníka v jedné přímce (harmonické poláře čili harmonikále uvažovaného trojúhelníka vzhledem k bodu P)!

14. Analyticky potvrďte harmonické vlastnosti úplného čtyřrohu: a) Každým diagonálním rohem čtyřrohu procházejí dvě strany čtyřrohu a dvě strany diagonálního třírohu; tyto čtyři přímky tvoří v uvedeném pořadí harmonickou čtveřinu. b) Každé dva diagonální rohy tvoří harmonickou čtveřinu s těmi body čtyřrohu, které leží na jejich spojnici!([30])

15. Jaké souřadnice mají souřadnicové osy? Napište rovnice souřadnicových vrcholů!

[O_2O_3 [1; 0; 0] atd. Vrchol O_i má rovnici $\xi_i = 0$ atd.]

16. Vyslovte větu duální k větě: Dvě přímky $\sum_i a_i x_i = 0$, $\sum_i b_i x_i = 0$ se protínají v bodě

$$x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} !$$

Rovnice průsečíku těchto přímek zní

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0!$$

18. Totéž pro větu: Souřadnice bodu v řadě jsou vyjádřeny rovnicemi

$$\varrho x_i = \lambda_1 y_i + \lambda_2 z_i, \ (i = 1, 2, 3)!$$

[Souřadnice přímky ve svazku $\lambda_1 \sum_i a_i x_i + \lambda_2 \sum_i b_i x_i = 0$ jsou $\varrho \xi_i = \lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i$.]

19. Totéž pro větu: Tři body (a), (b), (c) leží v přímce, jestliže

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0!$$

20. Jak se lineární substitucí (11) a (12) transformují jednotkové body?

21. Dokažte, že dvojpoměr čtyř bodů přímky je invariant projektivní transformace (lineární regulární substituce)!

[Přímka $\varrho x_k = \lambda_1 y_k + \lambda_2 z_k$ přejde transformací (11) v přímku $\varrho' x_i = \lambda_1 ' y_i + \lambda_2 ' z_i$, v jejíž rovnici jsou tytéž parametry, jako v původní. Dvojpoměr čtyř bodů přímky však závisí pouze na hodnotách λ_1, λ_2.]

22. Obdobně dokažte, že dvojpoměr čtyř přímek svazku je invariant projektivní transformace!

23. Kterými rovnicemi je vyjádřena identická transformace?

$$[\varrho' x_i = x_i]$$

24. Napište rovnice, jimiž se transformuje pouze jednotkový bod!

$$[\varrho ' x_i = a_{ii} x_i]$$

25. Dokažte, že dvě projektivní transformace po sobě jdoucí můžeme nahraditi jedinou transformací!

[Z rovnic $\varrho ' x_i = \sum\limits_k a_{ik} x_k$, $\varrho '' x_i = \sum\limits_k b_{ik} x_k$ plyne $\varrho ' x_i =$

$$= \sum_{k,j} a_{ik} B_{jk} '' x_j, \quad \varrho '' x_i = \sum_{k,j} b_{ik} A_{jk} ' x_j]$$

26. Projektivní transformace tvoří grupu. Dokažte! Jaký invariant má tato grupa?

[Věta vyplývá z výsledků 23. a 25. úlohy a z existence inversní transformace. Dvojpoměr (viz 21. a 22. úlohu). ([37])]

27. Napište transformaci, která převádí obecnou kartézskou soustavu v obecnou soustavu projektivní!

[Kartézská soustava — jako zvláštní případ soustavy projektivní (viz 8. úlohu) — budiž určena body O_1 $(x_2 = x_3 = 0)$, O_2 $(x_3 = x_1 = 0)$, O_3 $(x_1 = x_2 = 0)$ (počátek), J $(x_1 = x_2 = x_3)$; projektivní soustava budiž určena body $'O_i$ $(\lambda_{1i}; \lambda_{2i}; \lambda_{3i})$ $(i = 1, 2, 3)$, $'J$ $(j_1; j_2; j_3)$. Transformace, která převádí O_i v $'O_i$, splňuje vztahy $a_{ik} = \tau_k \lambda_{ik}$ (9 rovnic), transformace, která převádí J v $'J$ splňuje vztahy $\varrho j_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3$ (3 rovnice). Má tedy hledaná transformace tvar

$$\varrho\, 'x_i = \sum_k \tau_k \lambda_{ik} x_k. \text{ (}^{32}\text{)]}$$

28. Co vytvořují průsečíky odpovídajících si přímek ve svazcích $\lambda_1 \sum_i a_i x_i + \lambda_2 \sum_i b_i x_i = 0$, $\lambda_1 \sum_i a_i\, 'x_i + \lambda_2 \sum_i b_i\, 'x_i = 0$?

[Za předpokladu, že oba svazky jsou různé, dostaneme vyloučením parametrů kuželosečku. Vyšetřete některé její vlastnosti!]

29. Obdobnou úlohu proveďte pro souřadnice přímkové!

[Kuželosečka jako obálka svých tečen!]

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY A LITERATURY VHODNÉ PRO DALŠÍ STUDIUM

(1) Zmínku o těchto souřadnicích činí Jarolímek, Deskriptivní geometrie pro vyšší školy reálné, Praha, Jednota mat. fys., 1876.

(2) Geometrii v kosoúhlých souřadnicích probírá podrobněji Bydžovský, Úvod do analytické geometrie, Praha, Jednota mat. fys., 1923.

(3) Podrobnější vlastnosti přímkových souřadnic v knize Bydžovského (2); viz dále Zahradník, Analytická geometrie, I, Brno, Píša, 1907 a Koutský, Plückerovy přímkové souřadnice, Rozhledy mat.-přír., *3*, 1924, 96—111.

(4) Viz Sobotka, Differenciální geometrie, I, Praha, Jednota mat. fys., 1909, 117—119.

(5) Viz Láska-Hruška, Počet grafický a graficko-mechanický, Praha, Jednota mat. fys., 1923, 6—7.

(6) Pro podrobnější studium normálních a axiálních souřadnic možno uvésti jen díla cizojazyčná. Na př. Loria, Curve piane speciali algebriche e transcendenti, II, Milano, Hoepli, 1930 (289 násl.) a Braude, Les coordonnées intrinsèques, Paris, Gauthier-Villars, 1914 (?; v celé knize) obsahují hojný materiál pro souřadnice normální, Wieleitner, Spezielle ebene Kurven, Leipzig, Göschen, 1908 (373 násl.) zabývá se podrobně souřadnicemi axiálními.

(7) Z vlastností homogenních souřadnic uvedeny jen nejdůležitější. V podrobnostech odkazuji na knihu Bydžovského (2) (50 násl.).

(8) Další vlastnosti v knize Sobotkově (4), 80—100.

(9) Viz Láska-Hruška (5) (4 násl.) a Vojtěch, Geometrie projektivní, Praha, Jednota mat. fys., 1932 (237 násl.).

(10) Základní vlastnosti souřadnic duálních k pravoúhlým uvádí také Vojtěch, Základy mathematiky ke studiu věd přírodních a technických, I, Praha, Jednota mat. fys., 1922, 58—59; nazývá je souřadnice d'Ocagneovy.

(11) Viz Zahradník, (3) 54—59 a Koutský, Trojúhelníkové souřadnice a jejich užití, Rozhledy mat. přír., *2*, 1923, 147—150.

(12) Viz Koutský, (11) 150—167 (pod názvem souřadnice trojúhelníkové čili trimetrické), Zahradník, (3) 60 násl. (pod názvem souřadnice trojstranné čili trilineární). Pro podrobnější studium normálních souřadnic se hodí Salmon-Fiedler-Dingeldey, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, I, Leipzig, Teubner, 1922, 131 násl. nebo Falisse-Gob, Cours de

géométrie analytique plane, Bruxelles, Lebègue, 1920, 574 násl. Jako doplněk toho, co uvedeno v hlavním textu, hodí se také tyto dva články: Haas, Jedno užití trojúhelníkových souřadnic, Rozhledy mat. pří., *5*, 1926, 33—37 a Sukdol, Steinerovy elipsy, tamtéž, *13*, 1934, 40—47 a 78—83.

([13]) Podrobnější vlastnosti trimetrických souřadnic bodu a přímky uvádí Zahradník,([8]) 65—68, Falisse,([12]) 583 násl. a 587—600.

([14]) O zvláštních soustavách trimetrických souřadnic pojednává podrobněji Zahradník,([8]) 68—72 a Falisse,([12]) 585—587 (zvláště souřadnice barycentrické). Soustavný přehled o všech druzích trojúhelníkových souřadnic (bodových i přímkových) napsal Cayley do učebnice Salmonovy (viz Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven, Leipzig, Teubner, 1882, 1—18).

O upotřebení trimetrických souřadnic ve fysikální chemii pojednává Baborovský, Theoretická a fysikální chemie, Praha, Č. spol. chem., 1926 (v teorii soustav o třech komponentách, 450 násl.), o upotřebení v optice pojednává Sahánek, Vznik světla v plynech, Praha, Jednota mat. fys., 1941 (v kolorimetrii, 12 násl.).

([15]) Podrobnou literaturu o těchto souřadnicích uvádí Müller, Die verschiedenen Koordinatensysteme, Enz. der math. Wiss., III (Geometrie), AB7, 661 násl.

([16]) Základy analytické geometrie v polárních souřadnicích lze nalézti téměř v každé větší učebnici analytické geometrie; z knih zde již citovaných u Bydžovského,([2]) Zahradníka,([8]) Salmona,([12]) a j.

([17]) Podrobnější vlastnosti polárních souřadnic hledejte v učebnici Vojtěchově,([10]) zejména v druhém jejím svazku (Základy mathematiky, II, Praha, Jednota mat. fys., 1923), v knize Sobotkově([4]) a j.

([18]) O bipolárních souřadnicích pojednal Strouhal v článku O souřadnicích bipolárních, Druhá zpráva Jednoty č. mat., Praha, 1870, 1—10; o biangulárních souřadnicích stručnou zmínku uvádí Zahradník,([8]) 5. O biradiálních i biangulárních souřadnicích psal jsem v článku Dva druhy souřadnic, Rozhledy mat. přír., *16*, 1937, 5—12. Literaturu pro další studium uvádí Müller([15]).

([19]) Eliptickými (a parabolickými) souřadnicemi se zabývá podrobněji Bydžovský,([2]) 185—190 a Salmon,([12]) 419 n.

([20]) Viz Bydžovský,([2]) 189—190, Salmon,([12]) 425—426.

([21]) Hyperbolické souřadnice (a některé další soustavy křivočarých souřadnic, které jsou uvedeny v úlohách), uvádím podle

Fischera, Koordinatensysteme, Sammlung Göschen, Berlin, 1919, 103. Viz také Holzmüller, Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik, Teubner, Berlin, III, 1903, 156—187.

([22]) Obecnou teorii křivočarých souřadnic nalezne čtenář u Schefferse, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, I, Gruyter, Berlin, 1921, 143—188.

([23]) O dvojpoměru pojednávají podrobně Bydžovský([2]) (3 násl.), Zahradník([3]) (8 násl. a 45 násl.) a zejména Vojtěch([9]) (86—96).

([24]) O projektivních souřadnicích (v rovině i v prostoru) pojednávají podrobně tyto knihy: Doehlemann-Olbrich, Geometrische Transformationen, Berlin, Gruyter, 1930, 22—47, Vojtěch,([9]) 237—256, 500—513, 320—432 (základy analytické geometrie v projektivních souřadnicích) a stručně též Fischer,([21]) 36—62, 71—79. Jen o souřadnicích v rovině pojednává Salmon-Fiedler-Dingeldey,([12]) 167 násl.

([25]) O souřadnicích v bodové řadě (a ve svazku přímek) podrobněji Doehlemann-Olbrich,([24]) 13—16. Základní úlohy z teorie binárních forem se naleznou u Vojtěcha,([9]) 129—148.

([26]) Podrobnější poučení o přímkových souřadnicích nalezne čtenář v knihách, které jsou uvedeny v poznámce ([24]).

([27]) O projektivních transformacích podrobně u Doehlemanna-Olbricha,([24]) 74 násl. Přehledně také u Fischera,([21]) 62—71.

([28]) Důkaz této důležité věty, který lze provésti i zcela elementárně, u Doehlemanna-Olbricha,([24]) 12—13.

([29]) O vzorci Laguerreově jedná podrobně Hlavatý, Úvod do neeuklidovské geometrie, Praha, Jednota mat. fys., 1926, 38—40.

([30]) O harmonických vlastnostech úplného čtyřrohu (a čtyřstranu) viz na př. Weyr, Projektivná geometrie, Praha, Jednota mat. fys., 1911, 28—30.

([31]) Podrobněji u Hlavatého,([29]) zejména 189—194.

([32]) Viz Fischer,([21]) 66—68.

OBSAH.

niž je stanovena poloha geometrického prvku (dvě souřadnice kartézské, čtyři souřadnice tetracyklické a pod.) a posléze podle grupy transformací, vzhledem k níž je soustava invariantní (souřadnice projektivní, přirozené a pod.).

V této knížce byla zvolena nejjednodušší cesta: byly probrány různé druhy rovinných souřadnic, při čemž postupováno od pravoúhlých souřadnic, známých ze střední školy, přes zobecnění v dvojím směru (přibrání třetího čísla — souřadnice trojúhelníkové a nahražení kartézské lineární sítě čarami vyšších stupňů — souřadnice křivočaré) až k nejdůležitějšímu druhu souřadnic, k souřadnicím projektivním. Přitom s prospěchem knihu může čísti již ten, kdo se seznámil s nejjednoduššími základy analytické geometrie v rovině.