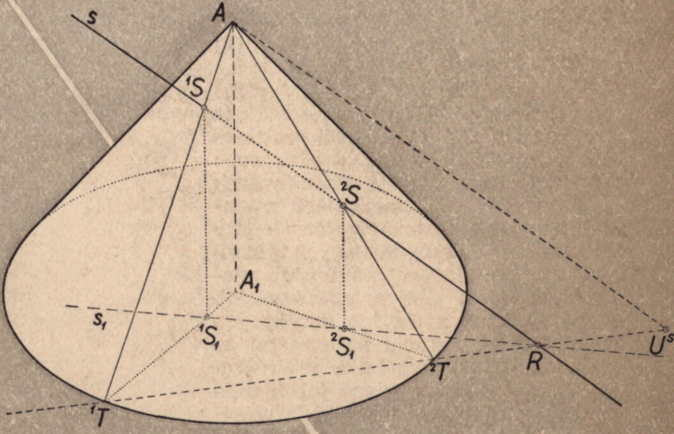
O rovinných konstrukcích odvozených z prostorových útvarů

JOSEF HOLUBÁŘ

O rovinných konstrukcích

ODVOZENÝCH Z PROSTOROVÝCH ÚTVARŮ



Cesta k vědění svazek 47

Josef Holubář:

O rovinných konstrukcích odvozených z prostorových útvarů

Mnohá řešení konstruktivních planimetrických úloh se zjednoduší, *interpretujeme-li úlohu* „prostorově", t. j. předpokládáme-li, že dané prvky a útvar výsledný jsou středovými, případně pravoúhlými průměty určitých útvarů v prostoru do roviny. Takovým rozšířením do prostoru přinášíme do úlohy nové předpoklady, o které se opírá prostorová geometrie, a proto není překvapením, že mnohé konstrukce a důkazy vět budou jednodušší. Rozšíření úlohy planimetrické na úlohu prostorovou má také mnohdy tu výhodu, že se úloha stane názornější a její řešení pro mnohého řešitele průhlednější a snazší.

Autor proto vybral některé *typické úlohy z elementární geometrie* rovinné a ukázal na nich, jak se řeší prostorovou interpretací, a tak doplnil svou dřívější knížku (*Cesta k vědění,* svazek 4), pojednávající o methodách rovinných konstrukcí. Čtenář najde v knížce „prostorové" *důkazy* některých základních vět projektivní geometrie „prostorové", *řešení úloh* o kuželosečkách a o kružnicích z daných dotykových prvků atd. Při studiu se seznámí se *základy cyklografického* a *stereografického promítání* a pozná jejich užití při řešení mnohých důležitých planimetrických úloh. Tak se bezděky připraví k četbě větší monografie Seifertovy, která se zabývá cyklografií podrobněji.

JČMF Kčs 30,—

JOSEF HOLUBÁŘ:

O ROVINNÝCH KONSTRUKCÍCH ODVOZENÝCH Z PROSTOROVÝCH ÚTVARŮ

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

PŘEDMLUVA

Zobrazení prostorových útvarů v rovině, které se provádí obyčejně různými druhy promítání neboli projekcí, děje se na základě geometrických vztahů mezi útvary prostorovými a rovinnými a jest hlavním úkolem deskriptivní geometrie.

Ale je také možno a často s výhodou hleděti na útvary a na konstrukce planimetrické jako na průměty příslušných prostorových útvarů, čili, jak říkáváme, interpretovati rovinné obrazce prostorově a přiřaditi rovinné obrazce k prostorovým útvarům geometrickými transformacemi. Přitom lze dospěti k řešení četných planimetrických úloh, a to i těch, které by vyžadovaly mnohdy odvození vztahů a vlastností značně složitých, kdyby měly býti řešeny přísně planimetricky. Prostorovou interpretací dospějeme však často k výsledku jednodušeji, někdy dokonce elementárním způsobem i v úlohách, jež planimetricky sahají již do vyšší geometrie. Slouží tudíž deskriptivní geometrie svými methodami a výsledky i k řešení úloh planimetrických. Někdy mají takové úlohy přímo svůj původ v deskriptivní geometrii.

Budeme se zabývati některými takovými úlohami, roztřídíme je, pokud lze, podle společných vlastností určitého prostorového řešení a připojíme je k středoškolské látce. Přitom bude možno použíti často i prací našich geometrů, kteří právě v tomto oboru přispěli hojně k řešení těchto úloh. Úvodem si povšimneme prostorového výkladu rovinných obrazců a provedeme k objasnění prostorové interpretace také důkazy několika základních geometrických vět, které se částečně probírají i v učivu středoškolském. Později pojednáme o cyklografii neboli cyklickém (kruhovém) promítání a o stereografické projekci, neboť zvláště cyklickým promítáním bude možno řešiti četné planimetrické úlohy.

Tato knížka má tak býti pokračováním autorových výkladů, které vyšly v 4. svazku této sbírky s názvem „Methody rovinných konstrukcí, úloha Apolloniova a úlohy příbuzné“, kde prostorové konstrukce se vůbec nevyskytovaly. Má tak doplniti methody rovinných konstrukcí výlučně na základě prostorových vztahů geometrických útvarů. Protože kromě toho prostorová interpretace učí hleděti na rovinné obrazce s vyššího hlediska a vnikati hlouběji do vzájemných vztahů geometrických útvarů, poskytne i řešení úloh již dříve probraných našim čtenářům mnoho nových poznatků i zajímavostí.

Při vydání tohoto svazku děkuji srdečně p. dr J. Bečkovi, profesoru reálného gymnasia, za pečlivé prohlédnutí textu po jazykové stránce a p. J. Vítkovi, abiturientu reál. gymnasia, za vydatnou pomoc při rýsování a popisu všech obrazců.

Za ochotu projevenou při přípravě tohoto svazku zvláště děkuji p. dr F. Vyčichlovi, profesoru matematiky na vysoké škole technické, Jednotě českosl. matematiků a fysiků za vydání tohoto svazku a knihtiskárně „Prometheus“ za pečlivé jeho provedení.

V Praze v únoru 1944.

Josef Holubář.

1. PROSTOROVÝ VÝKLAD ROVINNÝCH OBRAZCŮ

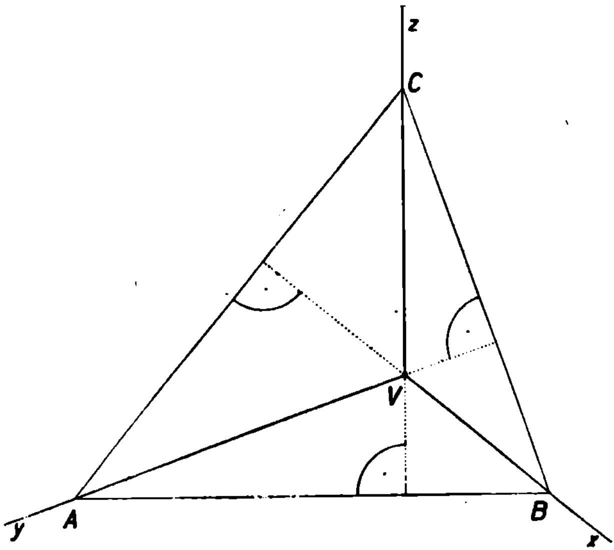
Nejprve uvedeme dva příklady, které ukáží, jak lze snadno dokázati vlastnosti nebo sestrojení rovinného obrazce, vyložíme-li jej prostorově.

1,1. Výšky v trojúhelníku. O výškách v obecném trojúhelníku ABC lze snadno i planimetricky dokázati, že se protínají v jediném bodě V, t. zv. orthocentru. Prostorový důkaz této vlastnosti dostaneme ihned, aniž zavedeme další pomocné čáry, podíváme-li se jen na obraz „prostorově". Myslíme si trojúhelník ABC (obr. 1), a to ostroúhlý, jako stopní trojúhelník v axonometrické průmětně $\varrho \equiv (ABC)$, určený stopami AB, BC, CA tří souřadnicových rovin, navzájem k sobě kolmých. Orthogonální průměty souřadnicových os do průmětny ϱ jsou pak výšky AV, BV, CV daného trojúhelníka a jejich společný bod V je průmětem počátku souřadnic. Že úhly spojnic CV a AB atd. jsou pravé, to vyplývá ze známé vlastnosti průmětu pravého úhlu, který tvoří příslušné, v prostoru mimoběžné přímky CV, AB atd., neboť jedna tato přímka, a to zde AB, jest v průmětně.[1])

[1]) Promítání axonometrické, v tomto případě orthogonální, t. zv. *kolmá axonometrie*, používá axonometrické průmětny, jež je v obecné poloze k třem souřadnicovým rovinám vzájemně k sobě kolmým, které splývají s třemi základními průmětnami, první π, druhou ν a třetí μ. K rovinám π, ν, μ mívají zpravidla technické předměty základní polohu, t. j. jejich tři význačné směry (nebo i rozměry) k sobě kolmé, bývají s osami souřadnicovými rovnoběžné, takže kolmé průměty předmětů do takové axonometrické průmětny poskytují velmi názorné obrazy a jejich sestrojení je poměrně velmi snadné. Proto se užívá kolmé axonometrie velmi často v technické praxi. Vědecké práce mezinárodního významu o axonometrii pocházejí od *K. Pelze* (v. pozn. 7 na str. 12 M. rov. k.), s jehož jménem je spojen vývoj tohoto důležitého druhu promítání. Poučení o axonometrii viz Lit. III, str. 249 a n., díl I.

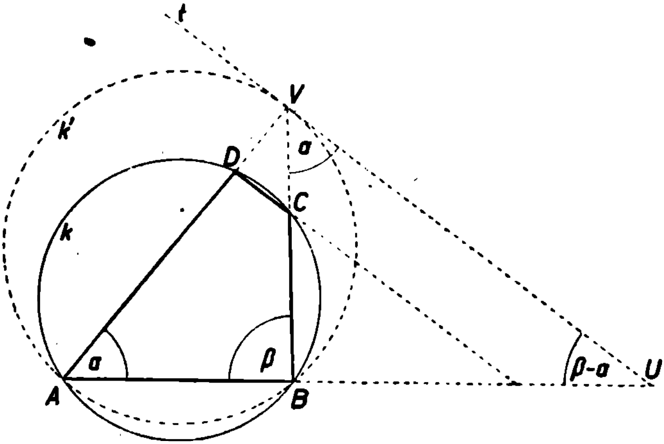
Poznámka. Na obr. 1 můžeme, jak známo, kterýkoliv bod považovati za orthocentrum trojúhelníka, určeného zbývajícími třemi body. Vyskytují se zde 4 body a 6 přímek: každým bodem jdou 3 přímky skupiny a na každé přímce jsou vytčeny dva body. Skupina bodů a přímek je uspořádána na základě vlastnosti orthocentra a tvoří t. zv. *geometrickou konfiguraci*. Značí-li písmeno B počet bodů a p počet přímek, pak lze konfiguraci označiti symbolem (B_p, p_B), v němž index p při B znamená, že každým bodem jde p přímek konfigurace, a index B při p obdobně, že na každé přímce je vytčeno B bodů, a to vždy a jen takový počet. Naší konfiguraci náleží tedy symbol $(4_3, 6_2)$.

Úloha 1. Jak se provede prostorová interpretace obrazu pro důkaz při tupoúhlém trojúhelníku ABC?



Obr. 1. Výšky trojúhelníka — axonometrický obraz souřadnicových os.

I,2. Tětivový čtyrúhelník. Jiný příklad planimetrického obrazce, kde možnost prostorové interpretace jest přímo nápadná, poskytuje tětivový čtyrúhelník $ABCD$ (obr. 2). Můžeme totiž trojúhelník ABV, jehož vrchol V je průsečík stran AD, BC čtyrúhelníka, považovati za hlavní řez kosého kruhového kužele a kružnici k, opsanou čtyrúhelníku $ABCD$ za



Obr. 2. Tětivový čtyrúhelník — obraz antiparalelních řezů na kosém kruhovém kuželi.

poledníkový řez kulové plochy. Úsečky $\overline{AB}$ a $\overline{CD}$ jsou pak průměty dvou kruhových (cyklických) řezů na kuželi do roviny hlavního řezu, a to řezů antiparalelních. Další kulová plocha, opsaná kuželi (ABV), jejíž poledníkový řez jest na obraze k', určuje svou tečnou rovinou sestrojenou v bodě V — na obraze jest jejím průmětem tečna t kružnice k' v bodě V — směr rovin kruhových řezů kužele, a to antiparalelních k řezu, jehož průmět jest $\overline{AB}$. Každý takový řez leží zároveň s podstavnou kružnicí (AB) na jedné ploše kulové, proložené touto kružnicí. Tím určuje tečna t pro konstrukci čtyrúhelníka $ABCD$ směr jeho strany CD, což by bylo možno dokázati i planimetricky. Dále ovšem jest na obraze úhel AUV roven $\beta - \alpha$, takže lze konstrukci našeho čtyrúhelníka provésti i bez pomocné kružnice k'. (Sestrojte čtyrúhelník $ABCD$, jsou-li dány délky stran AB, CD a úhly α, β.[2])

Úloha 2. Sledujte obraz i pro případ tětivového čtyrúhelníka druhořadého (se zkříženými stranami BC, AD) za předpokladu neomezené kuželové plochy.

Úloha 3. Jak se změní tětivový čtyrúhelník v případě, že $\alpha + \beta = 2R$, a jaké řezy vzniknou na příslušné ploše?

[2]) Srovn. článek *V. Hübnera*: Drobnosti geometrické v Příloze k Časopisu pro pěstov. matem. a fys., roč. XVI (Časop. XXXVII), (1908), str. 21.

2. PROSTOROVÝ DŮKAZ PLANIMETRICKÝCH VĚT

2,1. Věta Desarguesova.[3]) Tato věta praví: Jsou-li dva trojúhelníky v takové poloze, že spojnice dvojic sdružených vrcholů procházejí jediným bodem, protínají se dvojice sdružených stran v bodech, které leží na jedné přímce, a naopak. Věta má zvláštní theoretickou důležitost v soustavě axiomů při bádání o základech geometrie a jest základní větou synthetické geometrie rovinné.[4]) Její planimetrický důkaz vyžaduje pomocných vět o příčkách trojúhelníka a dělicích poměrech, kdežto prostorový důkaz je velmi jednoduchý.

Považujme na obr. 3 spojnice AA', BB', CC', dvojic sdružených vrcholů trojúhelníků ABC a $A'B'C'$; které procházejí bodem O, za průmět, ať rovnoběžný nebo středový, tří hran trojhranu s vrcholem O, trojúhelníky pak ABC a $A'B'C'$ považujme za průmět řezů dvou rovin s trojhranem. Pak musí průsečíky sdružených stran řezů, t. j. body $I \equiv (BC, B'C')$, $II \equiv (CA, C'A')$ a $III \equiv (AB, A'B')$ ležeti v jediné přímce o, neboť ta je průmětem průsečnice obou rovin sečných. Pro náš planimetrický útvar jest přímka o osou perspektivnosti a bod O středem perspektivnosti daných trojúhelníků, které jsou v perspektivní poloze.

Z téže prostorové interpretace plyne i obrácená věta.

Kdyby byl bod na př. III úběžným bodem, čili kdyby sdružené přímky AB a $A'B'$ byly spolu rovnoběžné, byla by i osa o s těmito přímkami rovnoběžná, jak plyne opět z prostorové vlastnosti průsečnice rovin (ABC) a $(A'B'C')$. Zvláštní případ nastane, jestliže jsou dvě a dvě sdružené

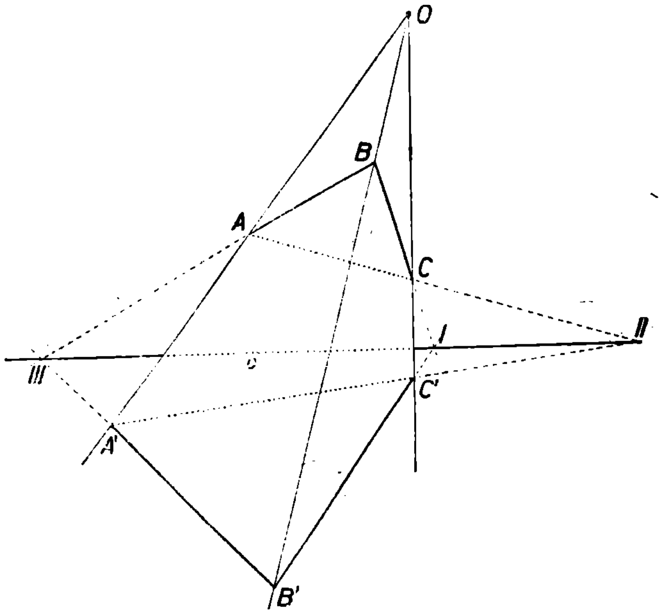
---

[3]) Viz pozn. 4 na str. 25 M. rov. k.

[4]) Viz *D. Hilbert*: Grundlagen der Geometrie, Leipzig u. Berlin. 1913, kap. V.

strany trojúhelníků rovnoběžné; osa *o* se stane úběžnou přímkou, takže musí býti spolu rovnoběžné i strany třetí dvojice. Trojúhelníky jsou pak *homothetické*. Jiný zvláštní případ dostaneme, bude-li střed perspektivnosti v nekonečnu; trojúhelníky budou ve vztahu *perspektivní afinity*. Konečně bude-li současně také osa *o* v nekonečnu, budou trojúhelníky perspektivně *shodné*. Vztah trojúhelníků v perspektivní poloze vyznačené na obr. 3, když střed *O* i osa *o* jsou v konečnu, nazývá se *perspektivní kolineace*.

Poznámka. Na obr. 3 jeví se opět zvláštní uspořádání skupiny 10 bodů a 10 přímek. Snadno lze seznati, že kterýkoliv



Obr. 3. Věta Desarguesova — obraz rovinných řezů na trojhranu.

bod obrazu lze považovati za střed perspektivnosti dvou trojúhelníků, při čemž patří k němú jediná přímka jako osa perspektivnosti; na př.: střed I, trojúhelníky $BB'III$ a $CC'II$, osa OAA' a pod. Dospíváme ke konfiguraci (10_3, 10_3), která se nazývá *konfigurace Desarguesova*. Značí se někdy krátce symbolem (10_3), neboť každým bodem procházejí 3 přímky a každá přímka obsahuje 3 body konfigurace.

Úloha 4. Dokažte prostorově větu: Mají-li tři trojúhelníky v rovině společný střed perspektivnosti, pak vzniklé tři osy perspektivnosti tří dvojic trojúhelníků se protínají v jednom bodě. Vzniká konfigurace (20_3, 15_4), zvaná Hessova.[5])

Úloha 5. Podobně dokažte tuto větu: Jsou-li v rovině tři trojúhelníky $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ tak položeny, že příslušné tři strany A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 atd. se vždy protínají v jednom bodě, tedy celkem ve třech bodech, které jsou na jedné přímce, pak leží příslušné tři středy perspektivnosti také na jedné přímce. Konfigurace (15_4, 20_3).

Úloha 6. Dokažte větu: Jsou-li dva trojúhelníky (obrazce) homothetické k třetímu, jsou i spolu homothetické; tři středy homothetie tří dvojic trojúhelníků leží v jedné přímce. [Zvláštní případ předcházející věty.]

Úloha 7. Zvolte tři rovnoběžné úsečky, považujte je za homothetické průměry tří kružnic (vždy podle dvou středů — vnějšího a vnitřního) a dokažte pak prostorově větu Mongeovu.[6]) [Tři dané úsečky považujte za průmět pobočných hran trojbokého hranolu, na kterém jsou trojúhelníkové řezy.]

2,2. Věta Pascalova. Kuželosečka je, jak známo, určena pěti svými body. Vztah mezi šesti body kuželosečky vyjadřuje věta Pascalova: V šestiúhelníku do kuželosečky vepsaném protínají se tři dvojice protějších stran v bodech ležících na jedné přímce, t. zv. přímce Pascalově. Je to základní věta projektivní geometrie pro kuželosečky; planimetricky se dokazuje užitím věty Menelaovy[7]) a prostorově možno ji doká-

---

[5]) Podle geometra *Hesse* (zemřel 1874). Viz též Lit. V, odst. 64.

[6]) Viz GV, str. 116.

[7]) Příčka $\triangle ABC$, která neprochází žádným jeho vrcholem, protíná jeho strany v bodech A', B', C' tak, že vždycky platí $(ABC') \,.\, (BCA') \,.\, (CAB') = 1$.

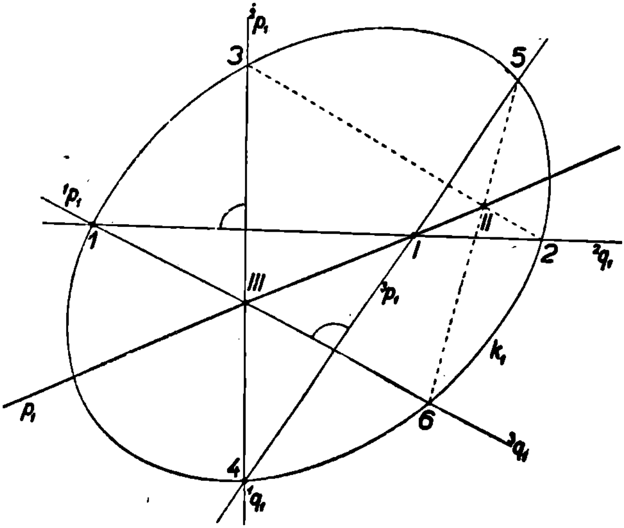
zati z vlastností povrchových přímek rotačního jednodílného hyperboloidu.[8])

Za tím účelem připomeňme si nejprve hlavní vlastnosti povrchových přímek rotačního jednodílného hyperboloidu. Tato plocha vzniká buď rotací tvořící hyperboly h kolem její vedlejší osy anebo otáčením přímky p kolem osy o, která je s přímkou p mimoběžná. Může též vzniknouti rotací přímky q, která je s přímkou p souměrně sdružena podle libovolné roviny σ, proložené osou o. Přímka p vytvoří otáčením jednu soustavu povrchových přímek plochy a přímka q druhou soustavu. Každá přímka p prvé soustavy protíná každou přímku q druhé soustavy, protože lze vždycky sestrojiti osou o rovinu souměrnosti σ zvolených přímek p a q, které se právě v σ protínají. Rovina určená přímkami p, q je tečnou rovinou hyperboloidu v bodě, který je v průsečíku přímek p, q. Přímky téže soustavy jsou však vzájemně mimoběžné: kdyby se totiž protínaly, muselo by se to státi na ose rotace o, ale pak by nebyly ani přímky p a osa o mimoběžné. Vedeme-li osou o rovinu ${}^1\sigma$ rovnoběžnou se zvolenou přímkou prvé soustavy ${}^1p$, jest přímka ${}^1q$ druhé soustavy, která je s ${}^1p$ souměrně sdružená podle roviny ${}^1\sigma$, s touto přímkou rovnoběžná: existují tedy na ploše dvojice přímek rovnoběžných, vždy jedna přímka dvojice z prvé soustavy a druhá přímka z druhé soustavy; rovina určená přímkami ${}^1p, {}^1q$ dotýká se hyperboloidu v úběžném bodě těchto přímek. Rotací této roviny kolem osy o dostaneme všecky možné takové tečné roviny hyperboloidu a ty obalují asymptotickou plochu kuželovou, která je vytvořena také otáčením asymptot tvořící hyperboly h kolem osy o.

Zvolme nyní průmětnu kolmou na rovnoběžné povrchové přímky ${}^1p, {}^1q$ a mysleme si libovolnou rovinu ${}^1\varrho$, protínající hyperboloid v kuželosečce k. Orthogonálními průměty přímek ${}^1p, {}^1q$ jsou body ${}^1p_1, {}^1q_1$ (obr. 4) a průmětem kuželosečky k

[8]) Pelcův důkaz; viz článek *J. Klímy* v Rozhledech mat.-přírodov., roč. II (1923), str. 38.

jest kuželosečka k_1, procházející body ${}^1p_1$, ${}^1q_1$. Průměty všech přímek prvé soustavy jdou bodem ${}^1q_1$, a průměty všech přímek druhé soustavy bodem ${}^1p_1$. Tak dvě přímky ${}^2p$, ${}^3p$ prvé soustavy a dvě přímky ${}^2q$, ${}^3q$ druhé soustavy mají na obr. své průměty ${}^2p_1$, ${}^3p_1$ procházející ${}^1q_1$ a průměty ${}^2q_1$, ${}^3q_1$ procháze-



Obr. 4. Věta Pascalova — obraz rovinného řezu a přímek rotačního jednodílného hyperboloidu.

jící ${}^1p_1$. Přímky ${}^2p$ a ${}^2q$, jakožto dvě různoběžky, určují rovinu ${}^2\varrho$ a podobně přímky ${}^3p$ a ${}^3q$ stanoví rovinu ${}^3\varrho$. Označíme-li průměty průsečíků přímek ${}^2p$ a ${}^3p$ s rovinou ${}^1\varrho$ kuželosečky k číslicemi *3, 5*, jsou tyto body v průsečících ${}^2p_1$ a ${}^3p_1$ s k_1; podobně také průměty průsečíků přímek ${}^2q$ a ${}^3q$ s rovinou ${}^1\varrho$, body *2* a *6*, leží na ${}^2q_1$, ${}^3q_1$ a k_1. A nyní je spojnice *23* průmětem průsečnice rovin ${}^2\varrho$, ${}^1\varrho$, spojnice *56* průmětem průsečnice rovin ${}^3\varrho$, ${}^1\varrho$ a dále spojnice průsečíků *III*, *I*, dvojic přímek ${}^2p$, ${}^3q$, resp. ${}^3p$, ${}^2q$, je průsečnicí p rovin ${}^2\varrho$, ${}^3\varrho$. Tyto tři průsečnice rovin ${}^i\varrho$ ($i = 1, 2, 3$) se protínají v bodě, jehož průmětem jest bod *II*. Leží tedy body *I*, *II*, *III* na jedné přímce p_1, která je Pascalovou přímkou pro šestiúhelník *123456*, jehož vrcholy *1*, *4* jsou v bodech ${}^1p_1$, resp. ${}^1q_1$, a který je vepsán kuželosečce k_1. Její body *I*, *II*, *III* určujeme vhodně podle tohoto schematu:

$$\left.\begin{array}{l} 12\,.\,45 \equiv I \\ 23\,.\,56 \equiv II \\ 34\,.\,61 \equiv III \end{array}\right\} p.$$

A každou kuželosečku k_1, procházející body *1*, *4*, můžeme považovati za průmět kuželosečky k, která náleží zvolenému hyperboloidu, neboť promítací válcová plocha obsahující k_1 má s hyperboloidem společné dvě jeho přímky ${}^1p$ a ${}^1q$, takže zbývající částí pronikové křivky obou ploch je kuželosečka k.

Zvláštní případ Pascalova šestiúhelníka nastane, jestliže degeneruje kuželosečka k_1 ve dvě přímky ${}^1k$, ${}^2k$ (obr. 5). Zvolíme-li na ${}^1k$ tři libovolné body označené *1*, *5*, *3* a na ${}^2k$ body *4*, *2*, *6*, protínají se příslušné dvojice přímek podle Pascalova schematu ve třech bodech *I*, *II*, *III* na přímce p. Dospějeme k zvláštní větě Pascalově, kterou znal již alexandrijský geometr Pappus (okolo r. 300 po Kr.). V projektivní geometrii nazývá se přímka p osou projektivních bodových řad na přímkách ${}^1k$, ${}^2k$ nebo též jejich direkční osou a slouží k sestrojování sdružených bodů těchto řad.[9])

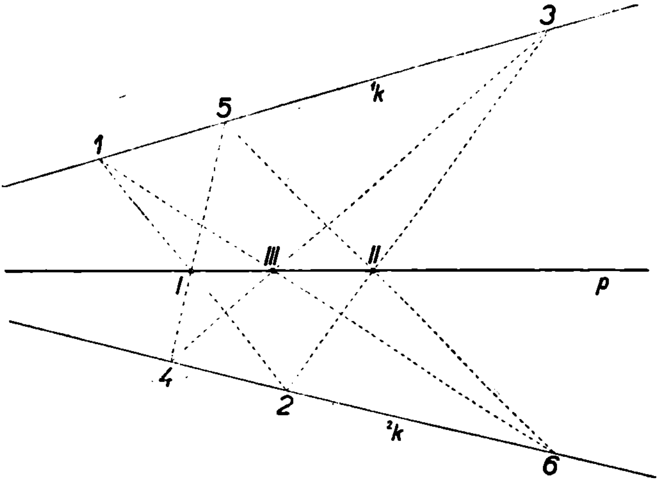
Poznámka. Na obr. 5 jest sestrojeno celkem devět přímek a každá přímka obsahuje tři body; je zde také 9 bodů a každým bodem procházejí 3 přímky. Vzniká zde konfigurace, zvaná Pascalova, jíž náleží znak (9_3). Kterákoliv přímka

[9]) Viz Lit. III, str. 12.

obrazce je Pascalovou přímkou pro určitou dvojici přímek, které představují degenerovanou kuželosečku.

Úloha 8. Dokažte prostorově větu obsaženou v obr. 5. Jak nutno voliti zde rovinu ${}^1\varrho$? [Rovina ${}^1\varrho$ je tečnou rovinou hyperboloidu.]

Úloha 9. Jakou zvláštní větu poskytne obr. 5, budou-li jednak spojnice *12* a *45* a jednak spojnice *23* a *56* spolu rovnoběžné?



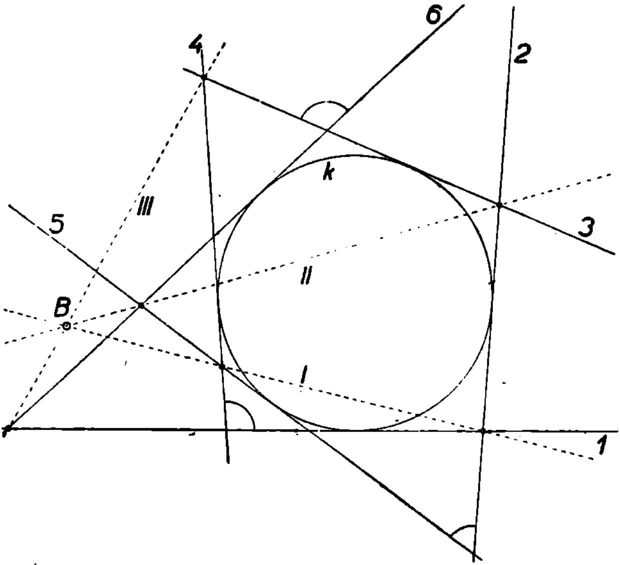
Obr. 5. Zvláštní případ Pascalova šestiúhelníka.

2,3. Věta Brianchonova. Z Pascalovy věty lze polárností odvoditi planimetricky větu Brianchonovu:[10]) V šestiúhelníku opsaném kuželosečce (kružnici) procházejí spojnice tří dvojic protějších vrcholů jediným bodem, který se nazývá bod Brianchonův. I tuto větu dokážeme prostorovou interpretací příslušného obrazce, a to pro kružnici.

---

[10]) Viz Lit. III, str. 21 a 35.

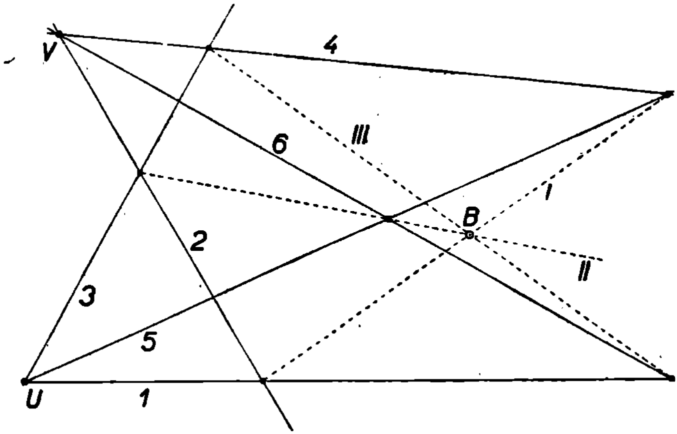
Mysleme si danou kružnici k (obr. 6) jako první obrys rotačního jednodílného hyperboloidu, jehož osa je kolmá k průmětně. Pak můžeme tečny kružnice k, označené na obr. číslicemi $1, \ldots, 6$, považovati za průměty šesti povrchových přímek naší plochy. Přímky plochy $1, 3, 5$ nechť náležejí



Obr. 6. Věta Brianchonova — obrys a obrazy přímek rotačního jednodílného hyperboloidu.

jedné soustavě povrchových přímek a přímky $2, 4, 6$ druhé soustavě, takže jsou mimoběžné všechny liché mezi sebou a také všechny sudé mezi sebou, kdežto každá lichá protíná všechny sudé. Přímky 1 a 4 určují tedy rovinu ${}^1\varrho$, 2 a 5 rovinu ${}^2\varrho$, 3 a 6 rovinu ${}^3\varrho$. Průsečnice rovin ${}^1\varrho$, ${}^2\varrho$ má pak průmět v přímce I, jež spojuje průsečíky dvojic přímek $1, 2$ a

4, 5. Podobně průsečnice rovin ${}^2\varrho$, ${}^3\varrho$ má průmět v přímce $II \equiv (2 \,.\, 3;\ 5 \,.\, 6)$ a průsečnice třetí dvojice rovin ${}^3\varrho$, ${}^1\varrho$ v přímce $III \equiv (3 \,.\, 4;\ 6 \,.\, 1)$. A průmět průsečíku tří rovin ${}^i\varrho$, $(i = 1, 2, 3)$, jest bod B, průsečík průmětů oněch tří průsečnic I, II, III, a to bod Brianchonův. Schema, určující přímky $I, \ldots, III$ a bod B, jest totéž jako schema pro Pascalovu přímku v odst. 2,2.



Obr. 7. Zvláštní případ věty Brianchonovy.

Věta platí ovšem pro kuželosečky vůbec, což plyne ze středového průmětu obrazce 6.

K zvláštnímu případu věty Brianchonovy dospějeme, zvolíme-li degenerovanou kuželosečku, t. j. kuželosečku, která se rozpadá v dvojici bodů U, V (obr. 7):[11]) Vedeme-li bodem U tři libovolné paprsky a označíme-li je číslicemi *1, 3, 5* a bodem V podobně tři paprsky *2, 4, 6*, pak procházejí tři

[11]) Kuželosečka je vytvořena svými tečnami jako jejich obálka, a rozpadá-li se v dvojici bodů, tvoří tečny dva paprskové svazky se středy U, V.

spojnice I, II, III průsečíků příslušných dvojic paprsků 1 až 6, sestrojených podle našeho schematu, jediným bodem B.

Poznámka. Věta vyjadřující vlastnost obr. 7 je duální[12]) k zvláštní větě předcházejícího odstavce a souhrn devíti přímek a devíti bodů tvoří zde opět konfiguraci (9_3), duální ke konfiguraci Pascalově: Kterýkoliv bod je Brianchonovým bodem pro určitou bodovou dvojici, a to vždy jedinou, která představuje degenerovanou kuželosečku.

Úloha 10. Dokažte prostorově zvláštní větu Brianchonovu obrazce 7. [Považujte body U, V za orthogonální průměty dvou rovnoběžných přímek hyperboloidu do roviny k nim kolmé atd.]

[12]) Princip duality platí v projektivní geometrii pro rovinné útvary tak, že si bod a přímka přísluší duálně. Z platné věty jedné dostaneme duální větu rovněž platnou, nahradíme-li ve větě prvé prvky a útvary v ní se vyskytující prvky a útvary duálními. Bližší poučení viz na př. Lit. V, str. 515 a n.

3. ŘEŠENÍ ÚLOH O KUŽELOSEČKÁCH PROSTOROVÝMI VZTAHY

3,1. Průsečíky kuželoseček, které mají společné ohnisko. K řešení této planimetrické úlohy použijeme rotačního kužele a prostorového vztahu, který je vyjádřen větou, známou ze středoškolských výkladů: Orthogonální průměty kuželoseček, ležících na rotační ploše kuželové, do roviny kolmé k ose kuželové plochy jsou kuželosečky se společným ohniskem v bodě, který je průmětem vrcholu plochy do téže průmětny.[13])

Úlohu rozřešíme tak, že určíme pro dané kuželosečky, třebas jakožto první průměty kuželoseček příslušné kuželové plochy, jejich roviny ϱ a σ, pak vyhledáme průsečnici s obou rovin a potom sestrojíme průsečíky přímky s s kuželovou plochou; první průměty těchto bodů jsou hledané průsečíky. Protože rovina ϱ i σ je danými kuželosečkami určena dvojznačně — druhá rovina ϱ' prvé kuželosečky je s rovinou ϱ souměrná podle roviny τ, která prochází vrcholem kužele rovnoběžně s první průmětnou, a podobně rovina σ' druhé kuželosečky s rovinou σ — stanoví dvojice rovin ϱ', σ svou průsečnicí s' ještě další dva průsečíky daných kuželoseček. Další dvojice rovin neposkytují v prvém průmětě jiných průsečíků, jak vyplývá z uvedené souměrnosti dvojic rovin ϱ, ϱ' a σ, σ' podle roviny τ.

Konstrukci této snadné úlohy přenecháváme čtenáři.

Věty tohoto odstavce můžeme použíti i k řešení jiných úloh o kuželosečkách, na př. máme-li sestrojiti kuželosečku danou ohniskem a dalšími prvky. Hledíme vždy určiti rovinu kuželosečky náležející příslušné kuželové ploše, aby jejím průmětem do roviny kolmé k ose kužele byla hledaná kuželosečka.[14])

[13]) Viz Dg VI—VII, str. 37, 39 a 44.

[14]) Srovnej autorův článek: Sestrojení kuželoseček z ohniska a dalších prvků v Rozhledech mat.-přírodov., 16 (1936—1937), str. 133 a n.

Úloha 11. Sestrojte průsečíky a) dané elipsy a hyperboly; b) dané elipsy (hyperboly) s danou parabolou, mají-li společné ohnisko.

Úloha 12. Sestrojte středovou kuželosečku danou ohniskem a a) třemi jejími body, b) směrem osy a dvěma jejími body.

3,2. Kuželosečky dotýkající se ve dvou bodech. Úlohy, jak sestrojiti kuželosečky, které se dotýkají dvojnásobně jiné dané kuželosečky, mají bezpochyby svůj původ v deskriptivní geometrii.[15]) Lze totiž hledanou kuželosečku považovati za průmět rovinného řezu na ploše druhého stupně, která má danou kuželosečku za obrysovou křivku.

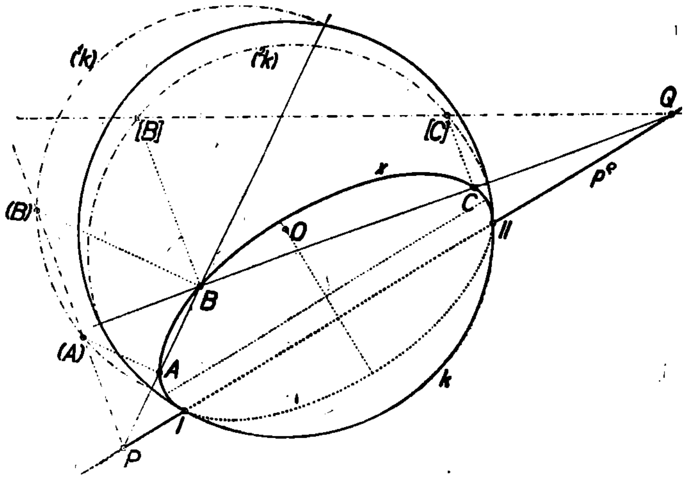
Ukážeme řešení úlohy na případu, když daná kuželosečka je kružnice.

a) Hledejme kuželosečku, která prochází třemi danými body A, B, C a která se dotýká dvojnásobně dané kružnice $k(O, r)$. Nutno rozeznávati se zřetelem k reálnému řešení jen dva případy, a to, že body A, B, C leží buď uvnitř nebo vně kružnice k.

α) Leží-li A, B, C *uvnitř* k, pak považujme k za obrys, třebas první, orthogonálního průmětu plochy kulové a každý bod A, resp. B, resp. C za půdorys dvou bodů, které leží na této ploše a které jsou souměrně sdružené podle roviny π, v níž si myslíme rovník k umístěn (obr. 8). Vedeme-li body A, B promítací rovinu, která protíná kulovou plochu v kružnici ${}^1k$, a sklopíme-li ji do průmětny π i s body A, B, dostaneme ve spojnici sklopených bodů (A), (B), ležících na $({}^1k)$, sklopenou sečnu $(A)(B)$ kulové plochy. Přitom nejprve považujme kóty z_A a z_B za kladné. Průsečík $(A)(B)$ s AB je první stopník P přímky AB. Podobně bod Q je stopník přímky BC (z_C nechť je také kladné) a tedy spojnice PQ první stopou p^ϱ roviny $\varrho \equiv ABC$. Hledaná kuželosečka x sestrojí se pak jako půdorys řezu takto určené roviny ϱ s kulovou plochou. Na obr. je to elipsa dotýkající se k v bodech I, II, v nichž stopa p^ϱ protí-

[15]) Viz pojednání *J. Sobotky*: Příspěvek k sestrojování kuželoseček dvojnásobně se dotýkajících v Časopise JČMF, XXXII (1903), str. 1 a n.

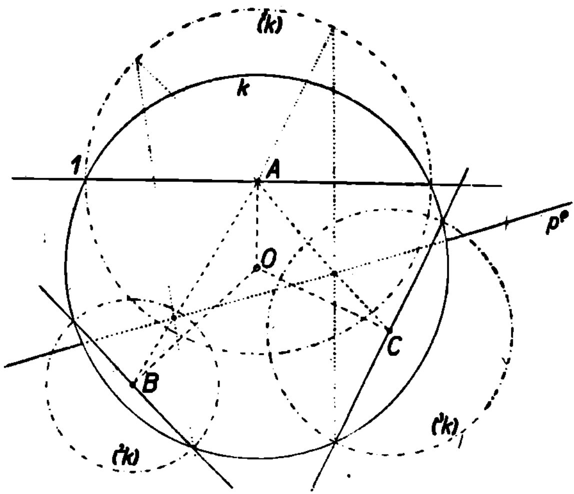
ná k. Při jiné poloze bodů A, B, C mohly by body I, II býti imaginární, elipsa x by ležela celá uvnitř k a dotyk by byl imaginární. V mezním případě by splynuly body I, II ve vrcholu elipsy x a kružnice k by byla pro elipsu x oskulační kružnicí v tomto vrcholu.



Obr. 8. Elipsa určená body A, B, C a dotýkající se dvojnásobně kružnice k — obraz rovinného řezu na kulové ploše.

Na obr. jsme předpokládali, že všecky tři body A, B, C jsou na horní polovině kulové plochy, jejich kóty jsme sestrojili vesměs kladné (+++). Jiná skupina znamének těchto kót, a to (++—), (+—+) a (+——) poskytla by další tři elipsy, které řeší úlohu. Skupiny znamének vesměs opačných proti znaménkům uvedených skupin vedly by k týmž elipsám, neboť roviny stanovené těmito opačně označenými skupinami bodů A, B, C jsou souměrně sdružené s oněmi rovinami podle π. Úloha je tedy čtyrznačná.

Jiné uspořádání konstrukce dostaneme, jestliže určíme kóty bodů A, B, C plochy kulové tak, že na př. bodem A vedeme rovinu kolmou k průmětu poloměru OA (obr. 9). Poloměr $\overline{A1}$ kružnice ${}^1k$ ležící v této rovině na ploše kulové je přímo roven kótě z_A. Všimněme si, že je protata sklopená



Obr. 9. Osy elips daných body A, B, C a dotýkajících se dvojnásobně kružnice k.

kružnice $({}^1k)$ rovníkem k diametrálně; podobně i kružnice $({}^2k)$ a $({}^3k)$. Středy podobnosti dvojic kružnic $({}^ik)$, $i = 1, 2, 3$, jsou stopníky přímek AB, BC, CA, jak potvrzuje použití kót bodů A, B, C při hledání těchto stopníků. Proto příslušná osa podobnosti těchto tří kružnic určuje stopu p^ϱ roviny $\varrho \equiv ABC$. Protože p^ϱ určuje směr hlavní osy elipsy x, je kolmice spuštěná s O na p^ϱ druhou její osou. Máme tedy výsledek: Kolmice spuštěné z bodu O k čtyřem osám podobnosti[16]) kružnic (${}^i k$) jsou osami výsledných elips.

Úloha 13. Sestrojte elipsu, která prochází dvěma body danými uvnitř dané kružnice, aby tato kružnice byla její kružnicí oskulační ve vrcholu.

Úloha 14. Sestrojte elipsu, která prochází dvěma body danými uvnitř dané kružnice, které se má dvojnásobně dotýkati, je-li dán ještě směr osy elipsy.

Úloha 15. Dvěma body danými uvnitř dané kružnice k proložte elipsu, která se k dvojnásobně dotýká, je-li dán mimo to bod, kterým prochází osa elipsy.

β) Jsou-li dané body A, B, C *vně* dané kružnice $k(O, r)$, považujme k za obrysovou křivku orthogonálního průmětu rotačního jednodílného hyperboloidu $\varkappa$, a to výhodně rovnoosého, jehož osa tedy prochází bodem O a je kolmá k průmětně π, v níž nechť leží rovník (hrdlo) k plochy $\varkappa$ (obr. 10). Body A, B, C jsou půdorysy vždy dvou bodů ležících na $\varkappa$. Jejich kóty z dostaneme tak, že si myslíme, na př. bodem A procházející rovnoosou hyperbolu v promítací rovině proložené OA, t. j. poledník plochy. Označíme-li $\overline{OA} = x$, pak má poledník ve své rovině rovnici $x^2 - z^2 = r^2$. Vedeme-li tedy z A tečnu ke kružnici k, pak její délka $\overline{A1}$ je rovna z_A, jak plyne z pravoúhlého trojúhelníka $OA1$. Kružnice $k_A(A, z_A)$ protíná proto kružnici k orthogonálně, jakož i kružnice $k_B(B, z_B)$ a $k_C(C, z_C)$. Pak jsou stopníky přímek AB, BC a CA středy podobnosti dvojic kružnic $k_{A \ldots C}$ a osy podobnosti těchto kružnic jsou stopami čtyř rovin $\varrho \equiv ABC$, jejichž řezy s plochou $\varkappa$ poskytují ve svých půdorysech čtyři výsledné kuželosečky. Platí zde tedy celkem: Kolmice, spuštěné ze středu O dané kružnice k na čtyři osy podobnosti kružnic $k_{A \ldots C}$, jsou osami čtyř kuželoseček, které procházejí body A, B, C a které se dvojnásobně dotýkají kružnice k.

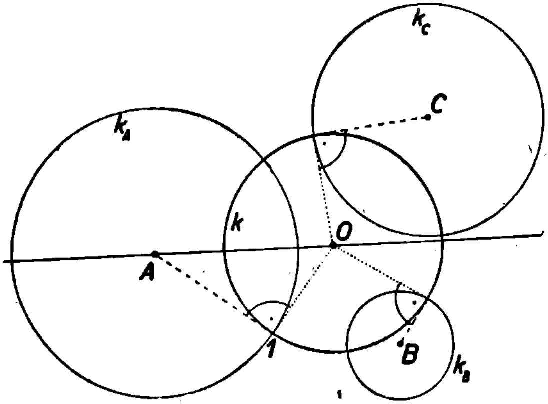
---

[16]) Viz M. rov. k., str. 23. Na obr. 9 je sestrojena pouze jedna osa podobnosti s^ϱ, když byla pro kóty z bodů A, B, C zvolena znaménka $(+ - -)$.

Úloha 16. Sestrojte kuželosečku, která prochází dvěma body danými vně dané kružnice, aby byla daná kružnice její oskulační kružnicí ve vrcholu.

Úloha 17. Dvěma body danými vně dané kružnice k veďte kuželosečku, která se k dvojnásobně dotýká a jejíž osa prochází dalším daným bodem.

Úloha 18. Sestrojte kuželosečku, je-li dána středem, délkou jedné poloosy a dvěma body.



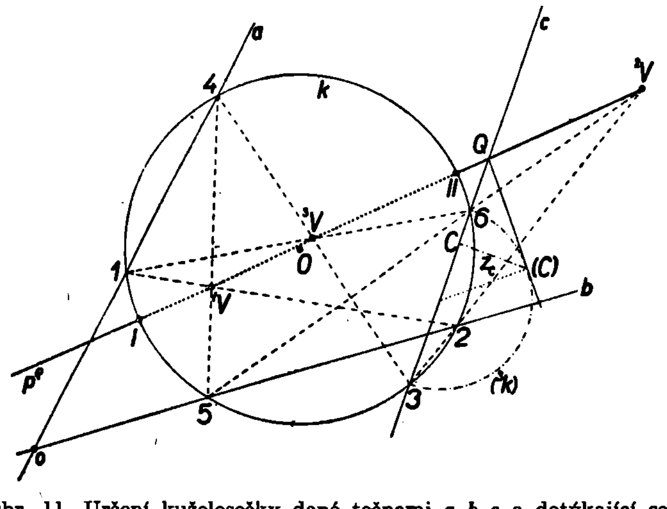
Obr. 10. Určení kuželosečky dané body A, B, C a dotýkající se dvojnásobně kružnice k — obraz rovinného řezu na rotačním jednodílném hyperboloidu rovnoosém.

b) Nyní hledejme kuželosečku, která se dotýká tří daných přímek a, b, c a která se dvojnásobně dotýká dané kružnice $k(O)$.

α) Všimněme si nejdříve případu, když jsou přímky a, b, c sečnami kružnice k. Přímka a nechť protíná k (obr. 11) v bodech 1, 4, přímka b v bodech 2, 5 a přímka c v bodech 3, 6. Kružnici k považujme za rovník kulové plochy $\varkappa$, který leží v průmětně π. Myslíme-li si přímkami a, b, c promítací roviny, pak jsou úsečky $\overline{14}, \overline{25}$ a $\overline{36}$ průměty tří kružnic ${}^ik$ ($i = 1, 2, 3$), které náležejí ploše $\varkappa$. A sestrojíme-li rovinu, která se všech tří kružnic ${}^ik$ dotýká, pak průmět řezu této roviny s plochou $\varkappa$ bude elipsa vyhovující naší úloze.

Dvojicemi kružnic ${}^ik$ můžeme proložiti vždy dvě kuželové plochy druhého stupně s kruhovými řezy v dvojicích kružnic ${}^ik$ (viz úvodní část 1, 2). Tyto kuželové plochy jsou souměrné podle roviny π a jejich vrcholy v π dostaneme jako body ${}^iV$ v průsečících spojnic, na př. *12, 45* atd. Po třech určují Pascalovu přímku příslušného šestiúhelníka *123456*, vepsaného do kružnice k. Na obr. 11 je sestrojena jedna trojice vrcholů ${}^iV$ podle schematu, uvedeného v 2,2 a to:

$$\left.\begin{aligned} 12 \,.\, 45 &\equiv {}^1V \\ 23 \,.\, 56 &\equiv {}^2V \\ 34 \,.\, 61 &\equiv {}^3V \end{aligned}\right\} p^{\varrho}.$$



Obr. 11. Určení kuželosečky dané tečnami a, b, c a dotýkající se dvojnásobně kružnice k — obraz rovinného řezu na kulové ploše.

Tečná rovina kužele s vrcholem ^iV a její řez s plochou $\varkappa$ dotýkají se obou kružnic ^ik, které leží na zvoleném kuželi. Proto lze přímkou p^ϱ vésti roviny, a to dvě, souměrně sdružené podle π, které se dotýkají všech tří kružnic ^ik; Pascalova přímka p^ϱ jest jejich společnou stopou. Společný průmět obou řezů, elipsa e, jest tedy jedním řešením naší úlohy. Řešení jest opět několik. (Viz úl. 62 kap. 6.)

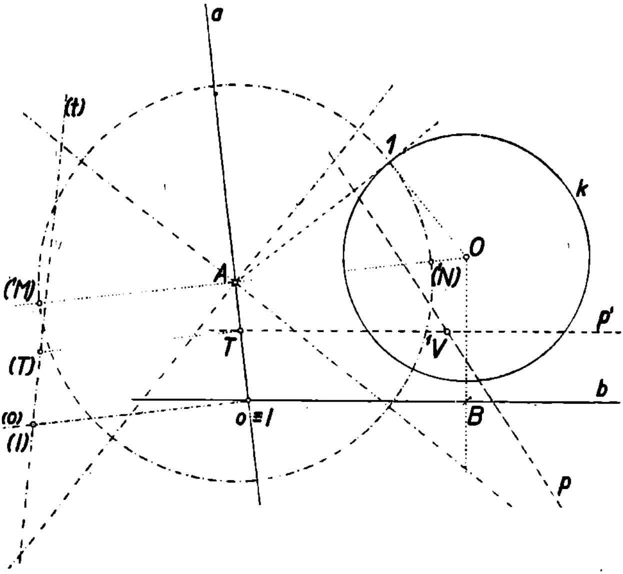
Na obraze je určena jedna rovina ϱ, jdoucí p^ϱ a bodem C, ve kterém se dotýká kružnice ^3k. Kóta $z_C = \overline{C(C)}$.

Úloha 19. Sestrojte elipsu, která se dotýká dvojnásobně dané kružnice k, dvou daných přímek, sečen kružnice k, a která prochází bodem, daným uvnitř k.

Úloha 20. Sestrojte elipsu, která se dotýká dvojnásobně dané kružnice k, jedné její dané sečny a která prochází dvěma body, danými uvnitř k.

β) Jestliže dané přímky a, b, c neprotínají danou kružnici k, zavedeme místo kulové plochy rotační jednodílný rovnoosý hyperboloid $\varkappa$ jako v této kap. sub a), β). Na obr. 12 je sestrojen jen vrchol ^1V jednoho kužele druhého stupně, proloženého hyperbolami ^1k, ^2k, v nichž protínají promítací roviny přímek a, b plochu $\varkappa$. Tyto hyperboly jsou, jak víme, rovnoosé, se středy A, resp. B, a souměrné podle roviny π. Bod ^1V sestrojíme jako průsečík dvou přímek p a p'. Jedna přímka je polára p průsečíku o přímek a, b vzhledem ke kružnici k; její použití odůvodníme z předcházejícího obr. 11, kde bod $o \equiv a \,.\, b$ a ^1V jsou diagonální body čtyrrohu *1425*, tedy polárně sdružené body vzhledem ke kružnici k. V našem případě na obr. 12 jsou vrcholy čtyrrohu sice imaginární, ale polárný vztah bodů o a ^1V zůstává nezměněn. Druhou přímku p' určíme z kolineárního vztahu hyperboly ^1k a ^2k, jakožto kuželoseček ležících na kuželové ploše s hledaným vrcholem ^1V. Bod ^1V jest přitom středem kolineace a průsečnice o rovin hyperbol ^1k, ^2k je osou kolineace. Opatříme-li si dvojici sdružených bodů v této kolineaci, bude jejich spojnice p' paprsek kolineace a ten půjde hledaným středem kolineace

^{1}V. Za tím účelem zvolme jednu tečnu hyperboly ^{2}k, a to její asymptotu m, sestrojme její průsečík s o, samodružný bod I, a jím veďme k hyperbole ^{1}k tečnu t jako přímku kolineárně sdruženou s m. Tečnu t sestrojíme snadno ve sklopené rovině hyperboly ^{1}k. Vrcholy (^{1}M), (^{1}N) sklopené hyperboly (^{1}k)



Obr. 12. Vrchol kužele proloženého dvěma hyperbolami na rotačním jednodílném hyperboloidu.

sestrojíme podle odst. a), β); platí $\overline{A(^{1}M)} = \overline{A(^{1}N)} = \overline{AI}$, kde $\overline{AI}$ je délka tečny z A vedené ke k. Sklopený bod (I) na (o) je určen svou kótou $z = \overline{IB}$, protože zmíněná asymptota m svírá s π úhel 45°. A bodem (I) vedená tečna (t) k hyperbole (^{1}k) poskytuje ve svém bodě dotyku (T) již sklopený bod T, kolineárně sdružený s úběžným bodem asymptoty m. Půdorysem bodu T, který leží na a, vedeme tedy přímku p' rovnoběžně s b a tím je bod ${}^1V \equiv p \,.\, p'$ nalezen. Druhá tečna, kterou bychom vedli bodem (T) k hyperbole $({}^1k)$, poskytla by vrchol druhého kužele, proloženého hyperbolami ${}^1k$, ${}^2k$.

Je patrno, že můžeme i v případě sečen a, b, c dané kružnice k, kterým jsme se zabývali sub α), místo kulové plochy použíti rovnoosého hyperboloidu a učiníme tak, jestliže řez s kulovou plochou nevede k reálnému výsledku.

Další použití kuželů, proložených dvojicemi hyperboloických řezů ${}^ik$ jest pro dokončení řešení úlohy stejné jako v odst. α).

Úloha 21. Řešte úlohy 19 a 20 v případě, nejsou-li dané přímky sečnami kružnice k.

c) Úlohy, sestrojiti kuželosečku, která se dvojnásobně dotýká dané elipsy a přitom vyhovuje dalším nutným podmínkám, bylo by možno převésti afinní transformací dané elipsy v kružnici na úlohy, kterými jsme se zabývali v předcházejících odstavcích.

Jinak je v příznivých případech možno hned považovati elipsu za obrysovou křivku průmětu rotačního elipsoidu do roviny, v níž leží jeho osa rotace, t. j. roviny hlavního poledníku, obdobně jako při ploše kulové.[17]) Příznivými případy myslíme ty, když body a řezy elipsoidu, odvozené z daných bodů a tečen, vycházejí reálné.

I když daná kuželosečka je hyperbola nebo parabola, lze si počínati při řešení v takových příznivých případech obdobně.

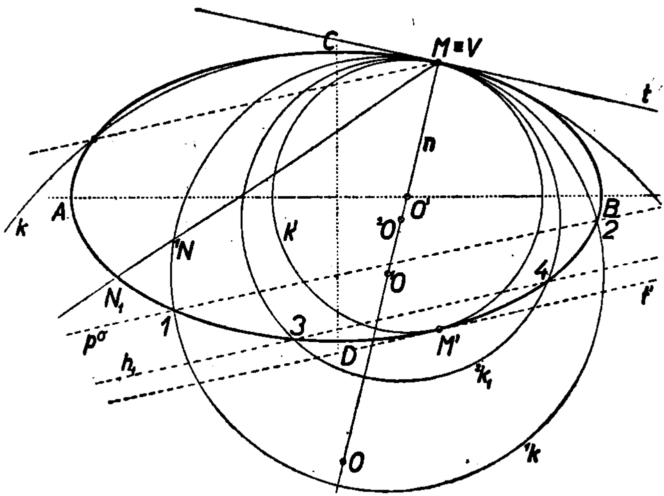
Konečně i tehdy, je-li daná kuželosečka degenerovaná v dvě přímky buď různoběžné nebo rovnoběžné, poslouží k prostorovému řešení příslušných úloh kuželová nebo válcová plocha, považujeme-li dané různoběžky, resp. rovnoběžky, za obrysové přímky průmětu rotačního kužele, resp. válce.

---

[17]) Viz některé úlohy Lit. III, díl II, odst. 225.

3,3. Jiné úlohy o kuželosečkách řešené prostorově: a) *Oskulační kružnice.* Z prostorových vztahů můžeme odvoditi i konstrukci oskulační kružnice neboli kružnice křivosti kuželosečky v libovolném jejím bodě.[18])

Mějme dánu elipsu (obr. 13) osami AB, CD, na ní libovolný bod M a v něm tečnu t a normálu n. Opíšeme-li z kteréhokoliv



Obr. 13. Kružnice, které se dotýkají elipsy v bodě M — rovinné řezy na kuželové ploše.

koliv bodu ${}^1O$, zvoleného na n, kružnici ${}^1k$ poloměrem $\overline{{}^1OM}$, dotýká se elipsy v M a protíná ji v dalších dvou bodech 1, 2. Považujme ${}^1k$ za podstavu kužele v π, jehož vrchol V má v π průmět $V_1 \equiv M$. Vedeme-li bodem V libovolnou povrchovou přímku kužele, spojnici V s bodem ${}^1N$ kružnice ${}^1k$, pak její průmět protne elipsu v bodě N_1, který je průmětem nějakého

[18]) Viz Lit. II, str. 150.

bodu N na zvolené povrchové přímce. Rovina σ, proložená stopou $p^\sigma \equiv 12$ a bodem N, vytíná na kuželi řez, a to kuželosečku, která je určena body $1, 2, N, M$ a tečnou, v bodě M, jejíž průmět je t. Je proto daná elipsa, obsahující body $1, 2, N_1$ a M s tečnou t, průmětem řezu, způsobeného rovinou σ na našem kuželi. Vedeme-li nyní libovolnou rovinu ϱ, rovnoběžnou s π, protne kuželovou plochu v kružnici ^2k a rovinu σ v hlavní přímce $h \parallel p^\sigma$, na níž leží dva body řezu v σ. Spojnice průsečíků $3, 4$ kružnice $^2k_1$ s danou elipsou, t. j. průmět h_1, je tedy rovnoběžná se spojnicí bodů $1, 2$. Jsou tedy společné sečny všech kružnic ^ik a dané elipsy spolu rovnoběžné. Jako zvláštní případ sečny dostaneme tečnu t' elipsy v bodě M', souměrně sdruženém s M podle osy AB (nebo tečnu t'' v M'', který je s M souměrně sdružený podle CD), zvolíme-li střed příslušné kružnice k' (nebo k'') na ose AB (nebo CD) v bodě O', resp. O''[19]). Úhly tečen t a t' s osou AB jsou si rovny, ale opačného smyslu. Platí tedy celkem věta, a to pro kuželosečku vůbec:

Společné sečny kuželosečky a kružnic, které se kuželosečky dotýkají v daném bodě, jsou vzájemně rovnoběžné a svírají s osou kuželosečky úhly rovné úhlu tečny kuželosečky, sestrojené v daném bodě, *a téže osy, ale opačného smyslu.* Říkáme též krátce, že tyto sečny jsou s tečnou antiparalelní vzhledem k osám kuželosečky.

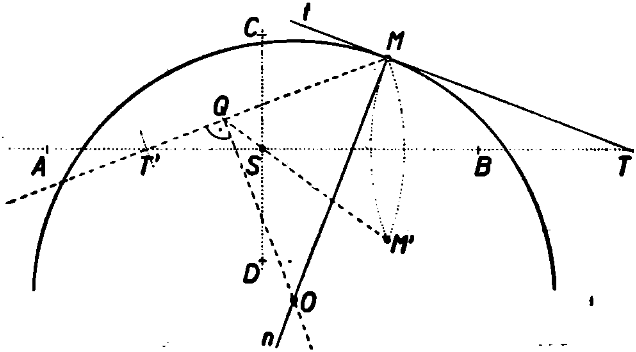
Jestliže v jiném zvláštním případě, a to na obr. 13 pro kružnici k, splyne jeden krajní bod společné tětivy kružnice k a kuželosečky s bodem M, stane se kružnice k oskulační kružnicí kuželosečky v bodě M. Tyto křivky mají v bodě M tři soumezné společné body, t. j. dotyk druhého stupně.

Z odvozených vlastností dostáváme pro elipsu takovouto konstrukci kružnice křivosti v jejím bodě M (obr. 14). Sestrojíme přímku MT', antiparalelní s tečnou t vzhledem k hlavní ose AB elipsy třebas přenesením délky $\overline{MT}$ do po-

---

[19]) Na obr. 13 je sestrojena jen kružnice k'.

lohy MT'. Přímka MT' jest již společnou sečnou kružnice křivosti a elipsy. Sestrojíme-li dále bod M', souměrně sdružený s M podle osy AB, a spojíme-li M' se středem S elipsy, je v elipse tato spojnice sdruženým průměrem k směru sečny MT' (proč?). Protne tedy sečnu MT' v bodě Q, jenž je středem tětivy na ní elipsou vyťaté, kterou není třeba ani omezovati: Kolmice QO k MT' v bodě Q vztyčená určí již na normále n střed křivosti O.



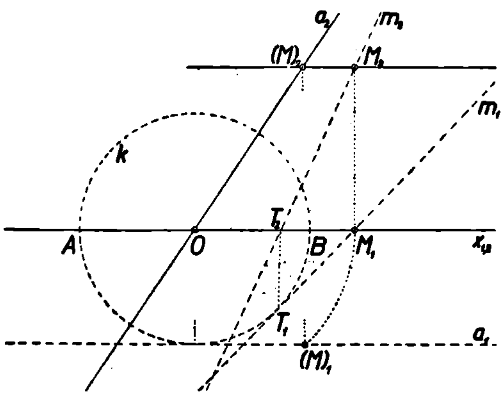
Obr. 14. Kružnice křivosti elipsy v bodě M.

Úloha 22. Sestrojte střed křivosti a) dané hyperboly, b) dané paraboly v jejich libovolném bodě.

b) *Konstrukce o hyperbole.* Všimněme si nyní některých jednoduchých konstrukcí o hyperbole, které lze odvoditi prostorově, považujeme-li danou hyperbolu za obrys průmětu rotačního jednodílného hyperboloidu do ν a kružnici k (obr. 15), opsanou nad hlavní osou AB hyperboly jakožto průměrem, za obrys průmětu téže plochy do π, k níž je tedy osa hyperboloidu kolmá.[20])

[20]) Viz článek *V. Hübnera* v Příloze k Časopisu JČMF, XXXII (1903), str. 259. Také v učebnici Dg VI—VII jsou odvozeny prostorově některé konstrukce hyperboly na str. 45 a n.

α) Hyperbola je dána hlavní osou AB a bodem. Máme sestrojiti asymptoty hyperboly. V ose AB (obr. 15) volme osu $x_{1,2}$ sdružených průmětů, prvního a druhého, a daný bod hyperboly označme M_2, jakožto nárys bodu na hlavním poledníku hyperboloidu. Sestrojme půdorys M_1 na x_{12} a mysleme si tečnu m_1, vedenou z M_1 ke k, která je půdorysem jedné přímky hyperboloidu, procházející na ploše bodem M. Oto-



Obr. 15. Určení hyperboly dané hlavní osou AB a bodem M_2.

číme-li m_1 (a není ani třeba m_1 rýsovati) do polohy a_1, rovnoběžné s x_{12}, a bod M_1 do polohy $(M)_1$ na a_1, pak nárys a_2 přímky a hyperboloidu poskytne jednu asymptotu druhého obrysu hyperboloidu a tedy i asymptotu dané hyperboly. Sestrojíme proto $(M)_2$ na rovnoběžce s x_{12} vedené bodem M_2 a spojnice $O(M)_2$ jest asymptota a_2.

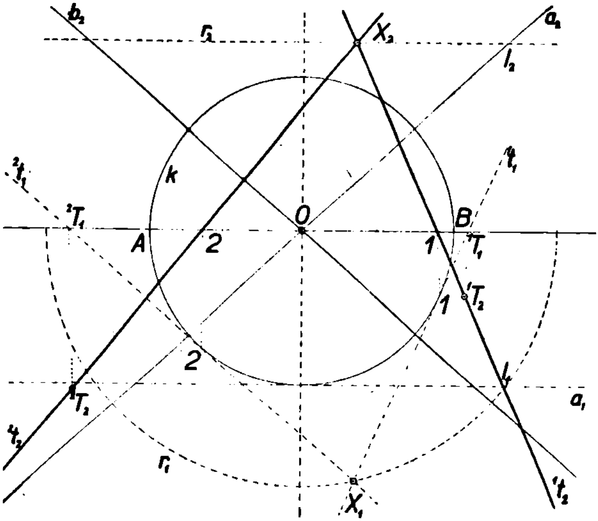
Jestliže jsme sestrojili m_1, pak nárys m_2 přímky m je tečna dané hyperboly v bodě M_2. Určíme ji s pomocí bodu T_2 na x_{12}, který je nárysem bodu T, společného přímce m a hrdlu k.

Úloha 23. **Hyperbola je dána hlavní osou a tečnou. Sestrojte s pomocí rotačního hyperboloidu její asymptoty.**

Úloha 24. **Hyperbola je dána asymptotami a bodem. Sestrojte podobným způsobem její hlavní osu.**

β) Hyperbola je dána hlavní osou a asymptotou; máme vésti k hyperbole tečny daným bodem. Nad hlavní osou AB opišme opět kružnici k a považujme ji zase za půdorys hrdla rotačního hyperboloidu; dané asymptoty označme a_2, b_2, jakožto nárysy obrysových přímek asymptotického kužele a daný bod X_2, jako nárys bodu X, který leží na hyperboloidu (obr. 16). Hledané tečny jsou pak nárysy dvou přímek plochy, které procházejí bodem X.

Nejprve sestrojíme půdorys X_1 bodu X na půdorysu r_1 rovnoběžky r, vedené na ploše bodem X. Jeden bod rovno-



Obr. 16. Tečny sestrojené k hyperbole z bodu X_2.

běžky r na přímce a je bod I. Sestrojíme tedy nejdříve a_1 jako tečnu hrdla rovnoběžnou s x_{12} a na ní půdorys I_1, čímž je $r_1(O; \overline{OI_1})$ určeno. Z půdorysu X_1, který stačí určiti na r_1 jednoznačně, vedeme tečny ${}^1t_1 \equiv X_1 1$, ${}^2t_1 \equiv X_1 2$ k hrdlu a to jsou půdorysy přímek plochy, které procházejí bodem X. Jejich nárysy ${}^1t_2$, ${}^2t_2$, určené s pomocí bodů *1*, resp. *2*, jsou hledané tečny. Na obr. jsou doplněny i jejich body dotyku ${}^1T_2$, ${}^2T_2$.

Úloha 25. K hyperbole dané hlavní osou a asymptotami sestrojte tečny rovnoběžné s danou přímkou. [Použijte vlastnosti, že přímky hyperboloidu jsou rovnoběžné s povrchovými přímkami jeho asymptotického kužele.]

4. UŽITÍ PLOCHY ROTAČNÍHO PARABOLOIDU K ŘEŠENÍ PLANIMETRICKÝCH ÚLOH[21])

Ježto orthogonálním průmětem eliptických řezů rovin s plochou rotačního paraboloidu na rovinu π kolmou k ose paraboloidu jsou kružnice[22]) a protože naopak lze považovati každou kružnici v π za první průmět elipsy, která leží na takové pevně zvolené ploše paraboloidu, poskytuje toto vzájemně jednoznačné přiřadění elips na ploše a kružnic v π vhodnou pomůcku k řešení planimetrických úloh na základě vztahů prostorových, a to především pro kružnice.

4,1. Snadno lze z tohoto vztahu odvoditi i graficky jednoduše provésti **řešení obecné úlohy Apolloniovy**, t. j. sestrojiti kružnice, které se dotýkají tří kružnic, obecně daných v rovině π.

Řešení. Dané kružnice ${}^ik$, $i = 1, 2, 3$, považujme za první průměty elips ${}^ie$, které leží na ploše libovolně zvoleného rotačního paraboloidu, jehož osa je však kolmá k π. Pak lze každou dvojicí elips ${}^ie$ proložiti dvě plochy kuželové druhého stupně. Každá tečná rovina takové kuželové plochy seče plochu paraboloidu obecně v elipse e, která se dotýká obou elips ${}^ie$, jimiž plocha kuželová byla proložena; první průmět elipsy e je pak kružnice k, která se dotýká prvních průmětů obou použitých elips ${}^ie$, t. j. dvou příslušných kružnic ${}^ik$. Je-li tedy určena jedna plocha kuželová $\varkappa$, proložená elipsami na př. ${}^1e$, ${}^2e$, a její vrchol V, a pro elipsy ${}^1e$, ${}^3e$ opět jedna, $\varkappa'(V')$, pak společné tečné roviny ploch $\varkappa$, $\varkappa'$ poskytují svými řezy na ploše paraboloidu elipsy, které se dotýkají všech tří elips ${}^ie$; prvním průmětem oněch elips jsou pak kružnice,

[21]) *J. Holubář*: Rozhledy mat.-přírod., XX (1940), str. 11 a n.
[22]) Viz učebnici Dg VI—VII, str. 131.

které se dotýkají daných tří kružnic ^ik a jsou tedy výslednými kružnicemi úlohy Apolloniovy. Společné tečné roviny ploch kuželových $\varkappa$, $\varkappa'$ opravdu existují, protože plochy obsahují společnou elipsu ^1e; určíme je, sestrojíme-li vrcholovou přímku $o \equiv VV'$, pak její průsečík Q s rovinou elipsy ^1e a vedeme-li z něho tečny k elipse ^1e; tyto tečny určují spolu s přímkou o obecně dvě tečné roviny, jež poskytují vyloženým způsobem dvě kružnice, které se dotýkají daných kružnic.

Snadno poznáme, že přímka o obsahuje také vrchol V'' třetí plochy kuželové $\varkappa''$, která je určena elipsami ^2e, ^3e, a že určené společné roviny tečné ploch $\varkappa, \varkappa'$ dotýkají se nutně i této třetí plochy $\varkappa''$. Když pak ještě použijeme dalších, druhých ploch kuželových s vrcholy U, U', U'', jež určují dvojice elips $(^1e^2e)$, $(^1e^3e)$ a $(^2e\,^3e)$, dostaneme celkem čtyři přímky vrcholové o.[23]) Ty poskytnou osm výsledků řešících obecnou úlohu Apolloniovu; výsledky mohou býti v sudém počtu někdy imaginární, to podle toho, jsou-li tečny vedené z příslušných bodů Q k elipse ^1e reálné nebo imaginární, čili jsou-li reálné nebo imaginární společné tečné roviny použitých ploch kuželových.

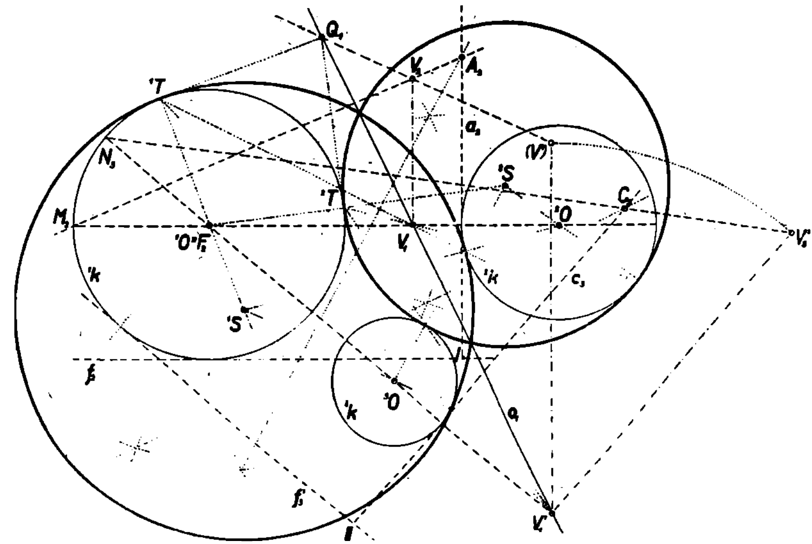
Provedení. Graficky úlohu provedeme jednoduše, zvolíme-li vhodně plochu rotačního paraboloidu a výhodnou polohu druhé, resp. třetí průmětny (ovšem bez rýsování elips). V obr. 17 neoznačeny pro zjednodušení indexy daných kružnic ^ik i jejich středů ^iO, které jsou jinak obvyklé pro první průměty útvarů.

Plochu rotačního paraboloidu proložme přímo kružnicí ^1k a za ohnisko F plochy zvolme pak bod ^1O. Druhou průmětnu veďme střednou $^1O^2O$, takže F_2 je v bodě ^1O a přímka řídicí f_2 druhého průmětu hlavního meridiánu je tečna kružnice ^1k, rovnoběžná s $^1O^2O$. Druhým průmětem elipsy ^2e je tedy úsečka, jejíž krajní body A_2, B_2 jsou na 2. průmětu hlavního

---

[23]) Bližší vysvětlení viz na konci odstavce 4,1.

meridiánu v jeho průsečících s druhým průmětem obrysových přímek promítací plochy válcové elipsy ${}^2e$, t. j. s tečnami a_2, resp. b_2, kružnice ${}^2k$, kolmými k ${}^1O{}^2O$. Stačí však určiti jen bod A_2, a to podle definice paraboly, že pro jeho průvodiče platí $\overline{IA_2} = \overline{F_2A_2}$. Jedna obrysová přímka plochy



Obr. 17. Obecná úloha Apolloniova — kružnice jako obrazy rovinných řezů na rotačním paraboloidu.

kuželové $\varkappa$, proložené dvojicí ${}^1k$, ${}^2e$, má tedy 2. průmět M_2A_2, neboť 2. průmětem kružnice ${}^1k$ jest její průměr jdoucí bodem M_2. Na M_2A_2 bude již 2. průmět V_2 vrcholu V plochy $\varkappa$. První jeho průmět V_1 jest jeden střed podobnosti kružnic ${}^1k$, ${}^2k$ (v obr. vnitřní), takže bod V_2 lze na M_2A_2 určiti ordinálou z V_1; úsečka V_1V_2 jest ovšem souřadnicí z bodu V.

Podobně proložme střednou ${}^1O^3O$ třetí průmětnu kolmou k π, mysleme si třetí průmět elipsy ${}^3e$ a sestrojme opět jen bod C_3, jeden krajní bod úsečky C_3D_3, která jest 3. průmětem elipsy ${}^3e$. Obdobně jako dříve je spojnice N_3C_3 třetím průmětem jedné obrysové přímky plochy kuželové $\varkappa'$; bod V'_3, třetí průmět vrcholu V' této plochy, určíme opět z 1. průmětu V'_1, který je jedním středem podobnosti kružnic ${}^1k$, ${}^3k$ (v obr. vnějším). V úsečce $V'_1V'_3$ získáváme opět souřadnici z bodu V'.

A nyní již spojnice $VV' \equiv 0$ protne π, jakožto rovinu kružnice společné plochám $\varkappa, \varkappa'$, ve svém stopníku Q. Ten sestrojíme jednoduše tak, že souřadnici z bodu V' přeneseme od V'_1 na rovnoběžku tímto bodem vedenou s V_1V_2 do bodu (V'); spojnice $V_2(V')$ protíná o_1 již v bodě Q_1. Tečny vedené z Q_1 ke kružnici ${}^1k$ stanoví na ní dotykové body ${}^1T$ a ${}^2T$ dvou výsledných kružnic, řešících úlohu Apolloniovu. Středy těchto kružnic ${}^1S$, ${}^2S$ sestrojíme pak způsobem, známým z planimetrie: Spojnice ${}^1TV_1$ určuje na ${}^2k$ a spojnice ${}^1TV'_1$ na ${}^3k$ dotykové body s prvou kružnicí výslednou a podobně i spojnice ${}^2TV_1$, resp. ${}^2TV'_1$ dotykové body s druhou kružnicí výslednou; z nich už dostáváme oba středy ${}^1S$ a ${}^2S$.

Z obr. 17 je viděti, že jsou skutečně čtyři přímky o, které spojují po třech šest vrcholů $V \ldots$ a $U \ldots$ pomocných ploch kuželových, jak už bylo výše řečeno, neboť první průměty bodů $V \ldots$ a $U \ldots$ jsou středy podobnosti daných kružnic ${}^ik$ a tedy spojnice vždy tří z šesti středů podobnosti $V_1 \ldots$ a $U_1 \ldots$ jsou čtyři osy podobnosti kružnic ${}^ik$, o nichž platí věta Mongeova.[24]) Při sestrojování dalších dvojic výsledných kružnic dotykových by se jen opakovala konstrukce provedená v obraze ještě třikrát.

4,2. Jako jsme ke každé kružnici k v průmětně π přiřadili na našem paraboloidu jeho elipsu e pomocí promítací plochy válcové této elipsy, tak i každé přímce a v π ležící odpovídá

---

[24]) Viz GV, str. 116.

na paraboloidu parabola, jejímž průmětem je právě přímka a. Konečně i každému bodu A v π odpovídá vždy jediný bod plochy a opačně. Přiřadění je opět i pro tyto útvary vzájemně jednoznačné a můžeme tedy obdobně jako v odst. 4,1 řešiti i **zvláštní úlohy Apolloniovy**, když některou danou kružnici nahradíme přímkou nebo bodem, zůstane-li mezi danými třemi prvky aspoň jedna kružnice. Provedení takových úloh jest jen pozměněním postupu užitého při úloze obecné.

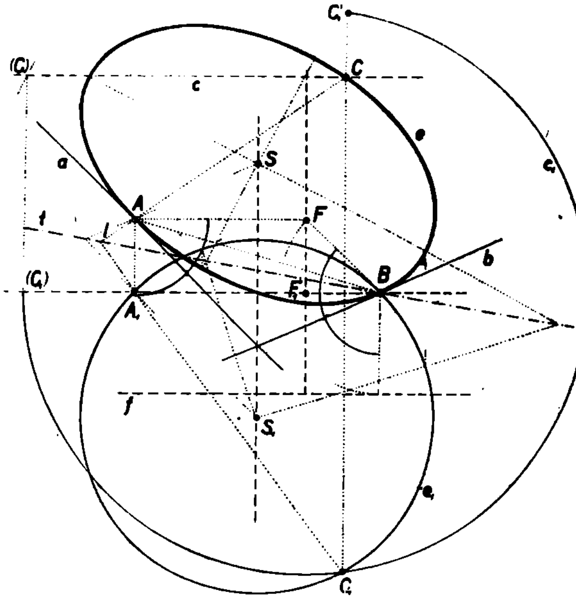
4,3. Jiné užití řezů rovin s plochou rotačního paraboloidu, jehož osa je kolmá k π, na úlohy planimetrické vyplyne z afinního vztahu mezi elipsou e_2, která je nárysem eliptického řezu na naší ploše, a kružnicí e_1, která je jeho půdorysem. Osou afinity je, jak známo, obraz t_{12} průsečnice roviny řezu s rovinou totožnosti.

Tak lze **sestrojiti elipsu,** danou třemi body A, B, C a tečnami a, b v bodech A, B, považujeme-li ji za nárys eliptického řezu na ploše rotačního paraboloidu, afinitou s kružnicí, kterážto úloha se obyčejně řeší středovou kolineací s kružnicí pomocí řezu na ploše rotačního kužele. (Viz kap. 3, odst. 3,2, c.)

Plochu rotačního paraboloidu určíme (obr. 18) hlavním meridiánem, t. j. parabolou, jdoucí danými body A, B a dotýkající se v nich daných tečen a, b.[25]) Hledaná elipsa musí se totiž dotýkati hlavního meridiánu ve dvou bodech — ať už reálných (jako v našem případě) nebo imaginárních; v imaginárních patrně tehdy, když průsečnice roviny řezu s rovinou hlavního meridiánu neprotíná hlavní meridián reálně. — Pro naši úlohu vystačíme v obraze s ohniskem F a přímkou řídicí f hlavního meridiánu, jejichž sestrojení je známo z výkladů školních a je v obrazci provedeno. Vedeme-li kdekoliv rovnoběžku s f, můžeme ji považovati za půdorys hlavního meridiánu a na ní určiti ordinálami F_1, A_1 a B_1 — v obrazci jsme ji vedli bodem B, takže $B_1 \equiv B$. Abychom určili půdo-

[25]) Indexy značící nárys pro zjednodušení v obraze vynecháme.

rys bodu C, který leží na ploše, veďme bodem C (vlastně C_2) nárys rovnoběžky (označíme jej c) a stanovme jeho krajní bod (C), jako průsečík přímky c s hlavním meridiánem (F, f). Na půdoryse c_1 rovnoběžky je pak ordinálou dvojznačně určen bod C_1, resp. C'_1. Kružnice e_1, vedená body A_1, B_1, C_1,



Obr. 18. Elipsa daná body A, B, C a tečnami a, b v bodech A, B — elipsa nárysem rovinného řezu na rotačním paraboloidu.

jest pak afinně sdružena s elipsou e. Osou afinity je přímka $t \equiv BI$. Bod C'_1 by určil druhou kružnici, opět afinně sdruženou s elipsou e; osou afinity by byla přímka t', jdoucí opět samodružným bodem B. Další určení elipsy e, t. j. sestrojení jejího středu S a os, je již známé a je provedeno i v našem obraze.

Kdyby daný bod C s prvky $A(a)$, $B(b)$ neurčoval elipsu, nýbrž hyperbolu, ukázalo by se to v obraze tak, že body C_1 a C'_1 by vyšly imaginární — ordinála jdoucí bodem C by kružnici c_1 neprotínala reálně. Kdyby konečně oba body C_1 a C'_1 splynuly na spojnici A_1B_1, pak by bod C náležel hlavnímu meridiánu a ten by určoval parabolu, při této zvláštní poloze daných prvků jimi stanovenou.

Kdyby byla dána elipsa e dvěma body A, B, jejich tečnami a, b a další tečnou c, mohli bychom ovšem větou Brianchonovou sestrojiti dotykový bod C a řešiti tuto úlohu stejným způsobem. Bylo by však možno postupovati přímo takto: Proložíme přímkou c druhou její promítací rovinu ϱ, stanovíme snadno půdorys eliptického řezu r roviny ϱ, a to kružnici r_1, mající průměr na půdoryse hlavního meridiánu, a pak určíme kružnici e_1, resp. e'_1, která prochází body A_1, B_1 a dotýká se r_1; elipsa e je pak opět afinně sdružena s e_1, resp. s druhou kružnicí e'_1.

Úloha 26. Užitím rotačního paraboloidu řešte zvláštní úlohu Apolloniovu (kpB). Viz označení v M. rov. k., str. 15.

Úloha 27. Sestrojte elipsu, je-li dána dvěma tečnami a, b s jejich body dotyku A, B a další tečnou. [Podle předcházejícího pokynu.]

5. CYKLOGRAFIE

Že mnohé planimetrické úlohy, zvláště o kružnicích, lze s úspěchem řešiti na základě prostorových útvarů, vhodně přiřaděných k rovinným útvarům, tedy transformací útvarů rovinných v útvary prostorové, ukazuje zvláště t. zv. cyklické nebo kruhové promítání, které zavedl do deskriptivní geometrie s dokonalým využitím jeho konstruktivních možností německý geometr W. Fiedler.[26]) Toto promítání sahá ovšem daleko za mez pouhého užití k řešení planimetrických úloh,[27]) k němuž směřují naše výklady základů cyklografie. Ale i tak ukáže cyklografická methoda řešení planimetrických úloh současně, jak se jí rozšíří jejich počet, neboť mnohé úlohy, které cyklograficky snadno řešíme, přímo vznikly z cyklografických vztahů.

5,1. Základní vlastnosti cyklického promítání. a) *Cyklický průmět bodu.* Rovinu, v níž máme řešiti planimetrické úlohy, považujme za průmětnu π. Je-li dána v průmětně kružnice $a_0(A_1, z)$, vztyčme v jejím středu A_1 kolmici k π a nanesme na tuto kolmici úsečku $\overline{A_1A} = \overline{A_1A^*} = z$, jednou nad π a po druhé pod π. Ke kružnici a_0 je tím přiřaděna v prostoru dvojice bodů A, A^*, souměrně sdružených podle roviny π. Naopak je tak přiřaděna ke každému bodu A, v prostoru libovolně vytčenému, v π kružnice $a_0(A_1)$, jejíž střed je orthogonální průmět A_1 bodu A a jejíž poloměr se rovná vzdálenosti A od π, t. j. kótě z bodu A. Kružnice a_0 se nazývá kruhový čili cyklický průmět bodu A. Bodu tak přísluší jedna kružnice jako cyklický průmět, ale kružnici dva body, které tato kružnice cyklicky zobrazuje. Přiřadění bude vzájemně jednoznačné, zavedeme-li orientované kružnice, t. j. cykly.[28])

[26]) Viz Lit. I; české pojednání o cyklografii viz Lit. V, kap. III, str. 56 a n.

[27]) Viz zvláště obsahem bohaté dílo novější, Lit. IV.

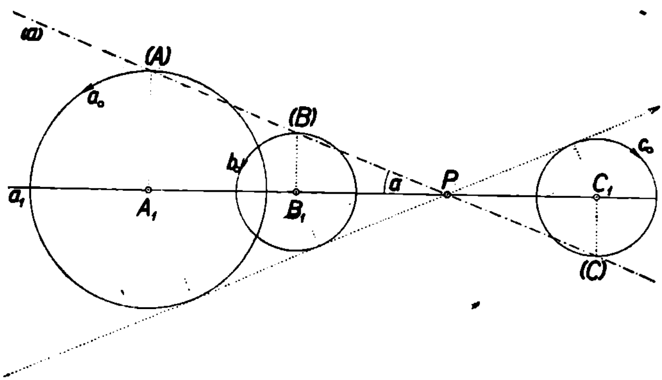
[28]) Viz M. rov. k., str. 19.

Pak cyklus kladný zobrazuje bod nad průmětnou s kladnou kótou z a záporný cyklus bod pod průmětnou, jehož kóta z je záporná. Přímka p v π, jakožto mezní případ kružnice s nekonečně velkým poloměrem, zobrazuje cyklicky dva úběžné body, které náležejí přímkám kolmým k p a které s π svírají úhel rovný 45°; orientované přímce p v π jest pak přiřaděn jediný úběžný bod přímek k ní kolmých, které svírají 45° s kladnou polorovinou π, stanovenou vzhledem k orientované přímce p.

Toto vzájemně jednoznačné přiřadění cyklů roviny π a bodů prostoru se nazývá cyklografické nebo cyklické promítání, krátce cyklografie.

b) *Cyklický průmět přímky.* Cyklickým průmětem přímky, t. j. nekonečného množství bodů na ní ležících neboli lineární bodové řady prostoru, je skupina cyklů, t. zv. *lineární cyklická řada.* Je to řada cyklů se společným středem podobnosti ve stopníku přímky.

Důkaz vyplývá z obr. 19, kde přímka a je určena body A, B, jejichž cyklické průměty jsou cykly a_0, b_0. Přímku a



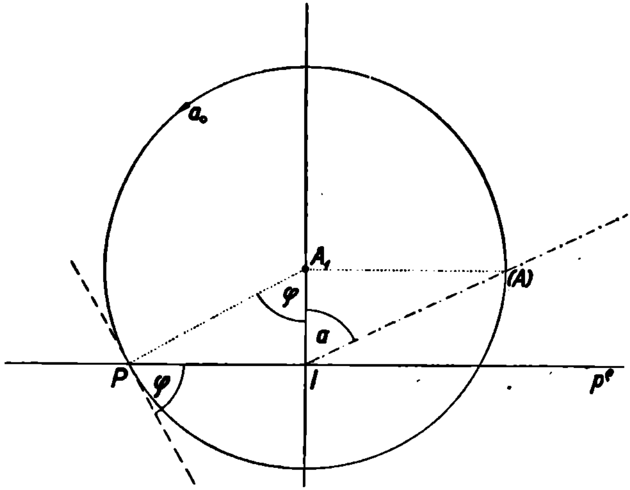
Obr. 19. Cyklický průmět přímky.

jsme sklopili do π a sestrojili její stopník P a naopak s pomocí sklopeného bodu (C) na (a) jeho cyklický průmět c_0, je-li dána jeho kóta. Na obr. je dále viděti, že stopník přímky jest vnějším středem podobnosti cyklů, jsou-li cykly souhlasného smyslu jako cykly a_0, b_0, anebo vnitřním středem podobnosti, jsou-li smyslu nesouhlasného, jako na př. a_0, c_0. Velikost odchylky α přímky a od π rozhoduje dále o poloze středu podobnosti P: Je-li $\alpha < 45°$, leží P vně všech cyklů a je možno z něho vésti společné tečny těchto cyklů, pro $\alpha > 45°$ padne P dovnitř všech cyklů a společné tečny cyklů jsou imaginární. Pro $\alpha = 45°$ jest P společným bodem dotyku příslušných cyklů. Hodnota cotg α nazývá se *modul lineární cyklické řady*. Jsou-li společné tečny lineární cyklické řady reálné, možno těmito společnými tečnami, tedy dvojicí orientovaných přímek v π, určiti lineární cyklickou řadu a tím i příslušnou přímku prostoru.

c) *Cyklický průmět roviny.* Body roviny ϱ neboli rovinné pole bodové promítá se cyklicky v *cyklické pole*; stopa p^ϱ roviny ϱ spojuje středy podobnosti všech lineárních cyklických řad, které jsou cyklickým průmětem přímek ležících v rovině ϱ. Přímka p^ϱ se nazývá *osa podobnosti cyklického pole*. Uvedená vlastnost vyplývá z jednoduché věty deskriptivní geometrie, že stopníky všech přímek roviny leží na stopě této roviny.

α) Velikost odchylky α roviny ϱ od π rozhoduje o jakosti cyklického pole. Je-li $\alpha < 45°$, pak žádný cyklus takového pole neprotíná osu podobnosti p^ϱ, neboť ze stopníků všech přímek roviny lze vésti k příslušným řadám cyklů reálné tečny; vždyť odchylky všech přímek roviny od π jsou menší anebo nejvýše rovny α. Pro $\alpha > 45°$ protínají naopak všecky cykly pole osu podobnosti p^ϱ a pro $\alpha = 45°$ dotýkají se všecky cykly pole jeho osy podobnosti, jak plyne z délek stran promítacích trojúhelníků úseček, ležících na spádových přímkách roviny ϱ. Hodnota cotg α nazývá se *modul cyklického pole*.

β) Budiž dáno cyklické pole (obr. 20) cyklem a_0, který zobrazuje libovolný bod A roviny ϱ, a osou podobnosti p^ϱ, která a_0 protíná. Stopník spádové přímky roviny ϱ označme I. Pak úhel $A_1I(A)$ je roven odchylce α roviny ϱ od π. Protíná-li a_0 osu p^ϱ v bodě P v úhlu φ, platí:



Obr. 20. Cyklické pole dané osou podobnosti p^ϱ a cyklem a_0.

$$\frac{\overline{A_1I}}{\overline{A_1P}} = \frac{\overline{A_1I}}{\overline{A_1(A)}},$$

čili $\cos\varphi = \operatorname{cotg}\alpha$. Z toho plyne: *Všecky cykly téhož cyklického pole protínají jeho osu podobnosti ve stejných úhlech; kosinus těchto úhlů se rovná modulu pole.* Úhly ty jsou jen tehdy reálné, pokud $\cos\varphi \leqq 1$, tedy pokud i $\operatorname{cotg}\alpha \leqq 1$, t. j. pokud $\alpha \geqq 45°$. Ale platnost věty můžeme rozšířiti i na případ, že úhel φ je imaginární, ježto známe hodnotu jeho kosinu, ovšem větší než 1, která je určena poměrem vzdálenosti A_1 od p^ϱ k poloměru příslušného cyklu a_0.

γ) Ježto rovina ϱ je určena třemi body A, B, C, je cyklické pole v π určeno třemi cykly a_0, b_0, c_0. Středy podobnosti tří dvojic cyklů určují osu podobnosti p^ϱ cyklického pole.

Jestliže však jsou dány v π tři kružnice a orientujeme-li je v cykly kladné i záporné, určíme tak v prostoru tři dvojice bodů: A, A^*; B, B^*; C, C^*. Dostaneme tudíž $2^3 = 8$ rovin, které možno sestaviti v čtyři dvojice: $ABC, A^*B^*C^*$; A^*BC, AB^*C^*; AB^*C, A^*BC^*; ABC^*, A^*B^*C. Každá dvojice rovin, souměrně sdružených podle π, má společnou stopu, která je osou podobnosti dvou cyklických polí. Celkem dospějeme k šesti středům podobnosti dvojic cyklů a k čtyřem osám podobnosti osmi cyklických polí, kde *každá osa podobnosti daných tří kružnic obsahuje jejich tři středy podobnosti*, t. j. k větě Mongeově, vyslovené již v M. rov. k. na str. 23.

5,2. Geometrická místa bodů v prostoru. Nyní uvedeme některá jednoduchá g. m., jež vyplývají z předcházejících výkladů.

a) G. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou *kružnice* (cykly obojího smyslu), *které procházejí daným bodem* A_1, jest rotační plocha kuželová s vrcholem v A_1 a s osou kolmou k π, jejíž tvořicí přímky svírají s π (a též s osou) úhel 45°. Protože každá rovina procházející osou protíná tuto kuželovou plochu v povrchových přímkách k sobě kolmých, nazývá se *rotační kuželová plocha pravoúhlá.*

b) G. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou *kružnice dotýkající se kružnice k* dané v π, jsou dvě rotační kuželové plochy pravoúhlé, podle π vzájemně souměrné, s řídicí kružnicí k.

c) G. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou *kružnice dotýkající se přímky p* dané v π, jsou dvě roviny se společnou stopou p, odchýlené od π o úhel $\alpha = 45°$.

Platnost těchto tří vět plyne přímo z definice cyklického zobrazení. Věty a) a c) jsou zvláštními případy věty b), a to pro nulový poloměr dané kružnice k, resp. nekonečně velký její poloměr.

d) G. m. bodů, jejichž cyklické průměty jsou *kružnice, které přímky p* danou v π *protínají v úhlu velikosti* φ, který je dán svým kosinem ($\cos\varphi = n$), jsou dvě roviny se společnou stopou p, souměrně sdružené podle π, jejichž odchylka α od π je dána vztahem $\operatorname{cotg}\alpha = \cos\varphi = n$.

Tato věta je obrácená k větě odst. 5,1 sub c), β) a lze její platnost snadno potvrditi.

5,3. Cyklografické řešení planimetrických úloh. G. místa, obsažená v uvedených větách ve spojení s vlastnostmi lineárních cyklických řad a cyklických polí, umožňují už řešiti mnohé planimetrické úlohy jednoduchými prostorovými konstrukcemi.

a) Jako příklad uvedeme především *tři jednoduché úlohy*, z nichž druhá a třetí jsou označeny v knize M. rov. k. symboly (kpp) a (ppp^{φ}).[29])

α) Ve dvou lineárních cyklických řadách, daných vždy dvěma cykly, a to a_0, b_0, resp. c_0, d_0, máme nalézti takové cykly, aby měly s daným cyklem k_0 společný střed podobnosti.

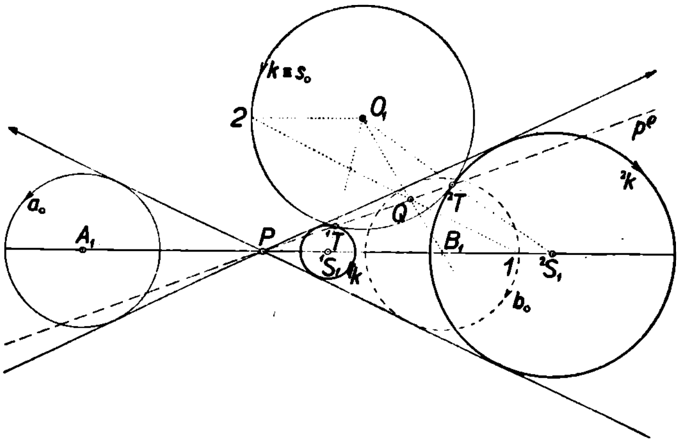
Řešení provedeme tak, že v prostoru vedeme bodem K, jehož cyklický průmět je k_0, příčku k přímkám a, b, obecně mimoběžným, které jsou v prostoru určeny danými dvěma lineárními cyklickými řadami, t. j. přímka a body A, B a přímka b body C, D. Cyklické průměty průsečíků příčky s mimoběžkami a, b jsou hledané cykly.

β) V lineární cyklické řadě, dané cyklem a_0 a středem podobnosti P, máme sestrojiti cyklus, který se dotýká dané kružnice $k(O_1)$ (obr. 21).

---

[29]) Na str. 15 a 17. I později použité zkratky pro text úloh příbuzných s Apolloniovou úlohou jsou ve svazku M. rov. k. na str. 15—17.

Zvolme pro kružnici k určitý smysl, na př. nejprve kladný, aby zobrazovala jediný bod O (nad π). Cykly, které se dotýkají cyklu k, zobrazují podle odst 5,2, b) body v prostoru, které vyplňují rotační kuželovou plochu pravoúhlou s vrcholem O a s řídicí kružnicí k. Hledané cykly budou tedy cyklickými průměty průsečíků přímky PA s touto plochou.



Obr. 21. Cyklus, který náleží lineární cyklické řadě (P, a_0) a který se dotýká kružnice k.

Konstrukci provedeme takto: Body A, P, O proložíme rovinu ϱ a sestrojíme její stopu p^ϱ. Ta prochází stopníkem P přímky AP a stopníkem Q přímky OB, jež je spojnicí bodu O a bodu B, zvoleného na přímce AP. Na obraze jsme zvolili bod B_1 souměrný s A_1 podle P, takže příslušný cyklus b_0 má stejný poloměr jako a_0, ale je záporného smyslu. Stopa p^ϱ protíná cyklus k v dotykových bodech ${}^1T$, ${}^2T$ hledaných cyklů ${}^1k$ a ${}^2k$ s cyklem k, takže jejich středy ${}^1S_1$, ${}^2S_1$ na A_1P jsou jimi určeny. Daná kružnice k, orientovaná záporně, vedla by k dalším dvěma výsledným cyklům, které jsou na našem obraze imaginární.

V našem případě lze vésti z bodu P k cyklu a_0 tečny a těch se výsledné cykly dotýkají, neboť náležejí téže lineární cyklické řadě. Máme zde tedy zvláštní Apolloniovu úlohu, a to (kpp), jak již bylo řečeno na začátku, ovšem jen pro orientované tečny cyklu a_0. Ale tečny vedené z P k a_0 mohou býti jindy imaginární. Lze tedy vyloženým způsobem řešiti i úlohu, jak sestrojiti cykly, které se dotýkají dvou imaginárních přímek, daných bodem P, který je uvnitř daného cyklu a_0, a dané kružnice k. Tato úloha by však měla vždycky čtyři reálné výsledky; vždyť obě osy podobnosti p^ϱ protínají reálně cyklus a_0 a tedy i danou kružnici k, neboť jsou stopami rovin procházejících také příslušným bodem O.

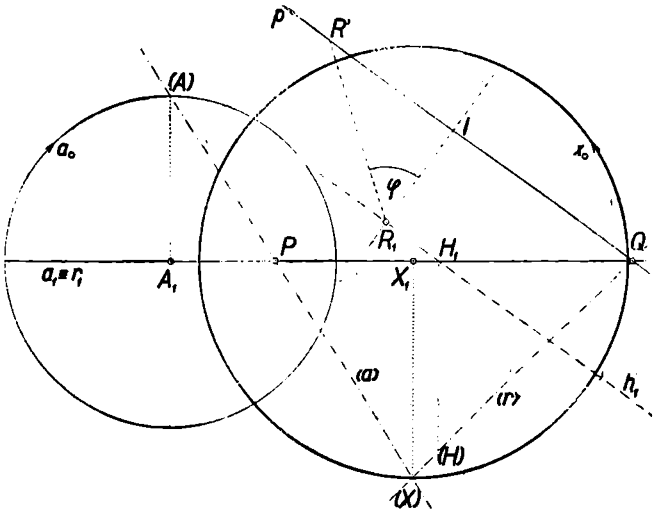
γ) V lineární cyklické řadě dané cyklem a_0 a středem podobnosti P máme sestrojiti cyklus, který danou přímku p protíná v úhlu φ ($\cos \varphi = \frac{3}{5}$) (obr. 22).

Bod X, jehož cyklický průmět je hledaný cyklus x_0, leží na přímce $a \equiv PA$ a v rovině ϱ, která má stopu v dané přímce p a odchylku α od π, pro niž platí vztah $\operatorname{cotg} \alpha = \cos \varphi$. Najdeme tedy bod X jako průsečík přímky a s rovinou ϱ. Roviny ϱ jsou však dvě, souměrně sdružené podle π, takže úloha je dvojznačná.

Zvolíme-li na našem obraze pro přímku p určitý smysl, pak sestrojíme jen jednu rovinu ϱ. Určíme ji bodem R, jehož půdorys R_1 zvolíme ve vzdálenosti $\overline{R_1I}$ od stopy p, rovné třem dílům v kladné polorovině π, stanovené orientovanou přímkou p. Cyklický průmět bodu R je kladný cyklus r_0 s poloměrem $\overline{R_1R'}$, rovným pěti zvoleným dílům. Pak skutečně je úhel $IR_1R' = \varphi$. K sestrojení průsečíku X s rovinou ϱ použijeme krycí přímky r, jejíž půdorys $r_1 \equiv a_1$, a sklopíme rovinu (r, a) s oběma přímkami do π. Sklopená přímka (r) jde stopníkem Q na p a sklopeným bodem (H), když jsme H_1 určili na r_1 v průsečíku půdorysu h_1 hlavní přímky h roviny ϱ

procházejícího R_1, takže $z_H = z_R$. Sklopená přímka a je $(a) \equiv \equiv P(A)$. Průsečík přímek (a), (r) je bod (X), z něhož na a_1 sestrojíme X_1, což je střed hledaného cyklu x_0, který opíšeme poloměrem $\overline{X_1(X)}$.

Můžeme také říci, že jsme rozřešili úlohu, jak sestrojiti cyklus x_0, který se dotýká dvou přímek, tečen určených



Obr. 22. Cyklus, který náleží lineární cyklické řadě (P, a_0) a který protíná přímku p v úhlu φ.

cyklem a_0 a středem podobnosti P, tedy v našem obraze imaginárních, a který protíná přímku p v daném úhlu φ — úlohu, jak již bylo řečeno, (ppp^{φ}).

Úloha 28. Jsou dány tři lineární cyklické řady, které zobrazují dvě přímky a, b spolu rovnoběžné a další přímku c, která neleží v rovině přímek a, b. V každé řadě určete takový cyklus, aby se výsledné tři cykly dotýkaly v jednom bodě.

[V prostoru řešíme úlohu: Průsečíkem přímky c s rovinou (a, b) vedeme v této rovině přímku, odchýlenou od π o úhel $\alpha = 45°$.]

Úloha 29. V lineární cyklické řadě dané dvěma cykly a_0, b_0 sestrojte cykly, a) které procházejí daným bodem, b) které se dotýkají dané přímky. [a) úloha (ppB), b) úloha (ppp), kde dané dvě tečny jsou po případě imaginární.]

Úloha 30. Řešte cyklograficky úlohu a) (ppr), b) $(pp^{\varphi}r)$, sestrojiti kružnici daného poloměru r, která kromě toho splňuje další dvě podmínky, a to a) p, p; b) p, p^{φ}.

Úloha 31. Podobně řešte úlohy, sestrojiti kružnici, která danou přímku (na př. orientovanou) protíná v daném úhlu φ_1 (dáno $\cos \varphi_1 = n$), t. j. splňuje podmínku p^{φ} a mimo to další dvě podmínky, a to a) p, p^{φ}; b) p^{φ}, p^{φ}. [Volte na př. v úloze b): $\cos \varphi_i = -\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{1}{3}; i = 1, 2, 3$.]

Úloha 32. Zvolte v předcházející úloze $\cos \varphi_1 > 1$, na př. $\frac{4}{3}$, a řešte pak obě úlohy. [Určete příslušnou rovinu její odchylkou α od π podle vztahu $\operatorname{cotg} \alpha = \cos \varphi$.]

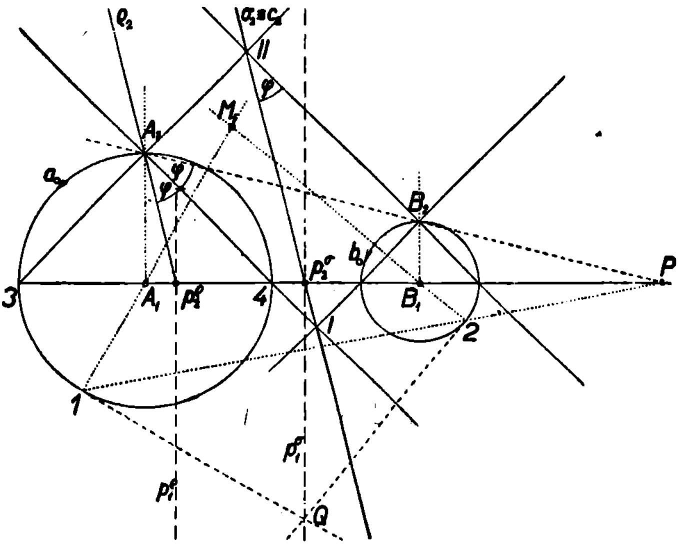
b) *Úloha Apolloniova.* Nyní přikročíme k cyklografickému řešení obecné úlohy Apolloniovy (kkk). Dané kružnice se středy A_1, B_1, C_1 orientujme třebas nejprve vesměs kladně v cykly a_0, b_0, c_0 a tyto cykly považujme za cyklické průměty bodů A, B, C. Abychom vyhověli podmínce dotyku hledaných cyklů s cykly a_0, b_0, c_0, sestrojíme podle odst. 5,2, b) tři rotační kuželové plochy pravoúhlé $\varkappa_a, \varkappa_b, \varkappa_c$ s vrcholy A, B, C a s řídicími křivkami a_0, b_0, c_0 a najdeme společné body těchto ploch. Jejich cyklické průměty jsou pak hledané dotykové cykly. Seznáme, že při zvolené orientaci daných kružnic budou tyto cykly dva, někdy však také imaginární.

α) Napřed se zabývejme v přípravném obr. 23 jen dvěma kuželovými plochami, a to $\varkappa_a, \varkappa_b$, a sestrojme jejich nárys, při čemž zvolme za druhou průmětnu společnou rovinu souměrnosti obou ploch. Protože obě plochy mají na každé své povrchové přímce společný úběžný bod, neboť lze vždy na druhé ploše vésti jednu povrchovou přímku rovnoběžnou s vytčenou přímkou prvé plochy,[30]) mají společnou úběžnou

---

[30]) Takové plochy se nazývají rovnoběžné.

kružnici. Zbytek jejich pronikové čáry jest kuželosečka c v rovině σ, kolmé k společné rovině souměrnosti obou ploch, takže její nárys je přímka σ_2. Na našem obraze je kuželosečka c hyperbolou, protože má reálné body úběžné, společné s úběžnou kružnicí obou ploch, a to na úběžné přímce roviny



Obr. 23. Určení roviny hyperboly, která leží na dvou rotačních kuželových plochách (pravoúhlých).

σ a na povrchových přímkách, na př. plochy $\varkappa_a$, které leží v rovině ϱ, vedené bodem A rovnoběžně se σ. Půdorys kuželosečky c je známé g. místo středů kružnic, které se dotýkají cyklů a_0, b_0.

Určeme nyní blíže rovinu σ. Její *první stopa* p^σ je *chordála* cyklů a_0, b_0. Kdyby se totiž cykly a_0, b_0 protínaly, byla by to jednoduše spojnice jejich společných bodů, neboť oba cykly leží právě v π. Když se však tyto cykly neprotínají, vyplývá tato vlastnost z této souvislosti: Abychom dospěli k nějakému bodu kuželosečky c, použijme výhodně společné vrcholové roviny ploch $\varkappa_a$, $\varkappa_b$, jejíž stopa *12* prochází stopníkem P vrcholové přímky AB, t. j. středem podobnosti cyklů a_0, b_0. Průsečík povrchových přímek $A1$, $B2$, t. j. bod M ležící na obou plochách, má půdorys M_1, který je středem cyklu m_0, dotýkajícího se cyklů a_0, b_0 v bodě *1*, resp. *2*. Průsečík Q tečen cyklů a_0, b_0 v bodě *1*, resp. *2*, leží proto na chordále těchto cyklů, jak plyne na př. z vlastnosti tří chordál tří kružnic, zde cyklů m_0, a_0, b_0. Ale bod Q je průsečíkem prvních stop tečných rovin kuželových ploch, dotýkajících se jich podél přímek $A1$, resp. $B2$, tedy prvním stopníkem tečny kuželosečky c, a proto leží na první stopě roviny σ, která je tudíž chordálou cyklů a_0, b_0.

Dále ještě promítejme rovinu σ centrálně z bodu A do π a určeme její *úběžnici*, t. j. první stopu p^ϱ roviny ϱ rovnoběžné s rovinou σ a procházející A, o níž jsme se již prve zmínili. Pak z rovnosti úhlů φ na obrazci zatržených — úhly φ jsou totiž rovny úhlům úhlopříček σ_2, A_2B_2 obdélníka A_2IB_2II s jeho stranami — vyplývá, že p_1^ϱ je *polára* středu podobnosti P vzhledem k cyklu a_0. Vždyť průsečík p_1^ϱ s A_1B_1, na obraze označený p_2^ϱ jako nárys stopy p^ϱ, a bod P jsou sdružené póly vzhledem k cyklu a_0, tvořice s body *3*, *4* harmonickou čtveřinu bodovou.[31])

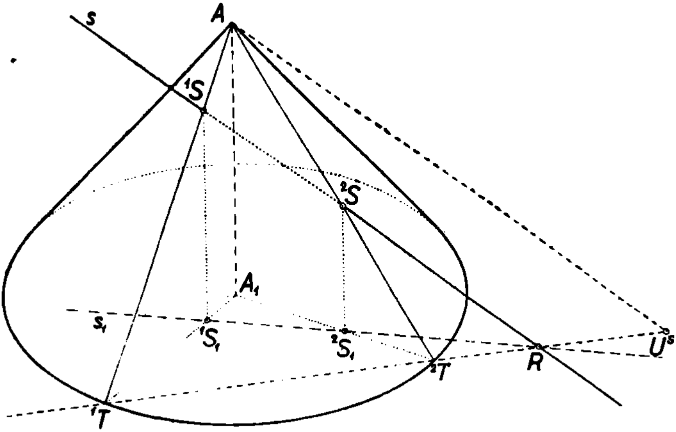
β) Sestrojíme-li nyní podobně rovinu σ', která obsahuje opět kuželosečku c' společnou kuželovým plochám $\varkappa_a$, $\varkappa_c$, bude průsečnice s obou rovin σ, σ' obsahovati právě ty dva body ${}^1S$, ${}^2S$, které jsou společné všem třem kuželovým plochám. Můžeme je určiti jako průsečíky přímky s na př. s plochou $\varkappa_a$; jejich cyklické průměty řeší tedy Apolloniovu úlohu pro cykly a_0, b_0, c_0.

Centrální průměty bodů ${}^1S$, ${}^2S$ z bodu A do π padnou na cyklus a_0 do bodů ${}^1T$, ${}^2T$ na spojnici ${}^1S_1A_1$, resp. ${}^2S_1A_1$, což

[31]) Viz GV, str. 122.

znamená, že body ${}^1T$, ${}^2T$ jsou body dotyku cyklu a_0 s hledanými cykly (viz náčrt na obr. 24).

Stopník R přímky s je průsečík stop p^σ, $p^{\sigma'}$, t. j. průsečík chordál cyklů a_0, b_0, resp. a_0, c_0, čili *potenční střed* těchto cyklů.



Obr. 24. Průsečíky přímky s s rotační plochou kuželovou — dotyk jejich cyklických průmětů s cyklem a_0.

Úběžník U^s přímky s je průsečík úběžnic p^ϱ, $p^{\varrho'}$, polár to středu podobnosti P cyklů a_0, b_0, resp. P' cyklů a_0, c_0, tedy *pól* osy podobnosti PP' daných cyklů vzhledem k cyklu a_0.

Dospíváme tím z našich prostorových vztahů ke klasickému Gergonnovu planimetrickému řešení Apolloniovy úlohy.[32])

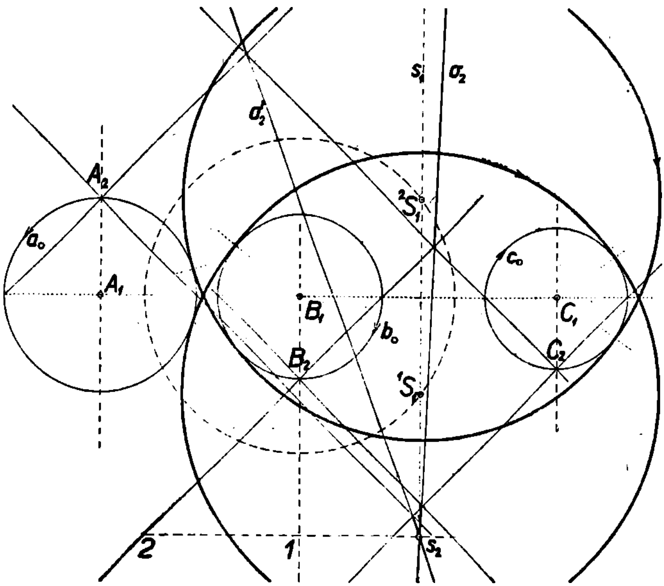
Vystřídáním orientace daných kružnic dospěli bychom k všem osmi výsledným cyklům, a to ze čtyř kombinací znamének daných cyklů, protože v souhlase s diskusí plani-

[32]) Viz M. rov. k. str. 23 a n.

metrickou poskytnou vždy dvě kombinace vesměs různých znamének, na př. (+—+) a (—+—), touž dvojici výsledků, a to jen opačně orientovaných kružnic, jak vyplývá ze souměrnosti příslušných ploch kuželových podle roviny π.

γ) Bylo by ovšem možno hledati body ${}^1S$, ${}^2S$ přímo v prostoru, což provedeme v případě, když dané cykly mají středy na jediné přímce a kdy planimetrický postup Gergonnův selhává (obr. 25).

Dané kružnice se středy A_1, B_1, C_1 orientujme v cykly a_0, b_0, c_0 třebas v pořadí (+——) a volme za druhou průmětnu ν společnou rovinu souměrnosti všech tří příslušných kuželových ploch. Kuželosečka společná plochám $\varkappa_b$, $\varkappa_c$ leží



Obr. 25. Řešení Apolloniovy úlohy, když dané cykly mají středy na přímce.

v rovině σ kolmé k ν a kuželosečka společná plochám $\varkappa_c$, $\varkappa_a$ v rovině σ' rovněž k ν kolmé; jest tedy průsečnice s také kolmá k ν. Její nárys je bod s_2 v průsečíku σ_2 a σ'_2 a půdorys s_1 je kolmice vedená bodem s_2 k středné $A_1B_1C_1$. Na s_1 budou již středy ${}^1S_1$, ${}^2S_1$ hledaných cyklů. Body ${}^1S$, ${}^2S$ sestrojíme jako průsečíky přímky s s plochou na př. $\varkappa_b$. Vedeme-li bodem s_2 nárys rovnoběžky plochy $\varkappa_b$, jest úsečka $\overline{12}$ poloměr této rovnoběžky; její půdorys, t. j. kružnice opsaná z B_1 poloměrem rovným $\overline{12}$, stanoví již na s_1 hledané středy ${}^1S_1$, ${}^2S_1$ dvou výsledných cyklů. Podobně bychom sestrojili i ostatní dvojice celkového řešení.

Úloha 33. Řešte cyklograficky zvláštní úlohy Apolloniovy, a to zejména a) (kkp), b) (kkB), c) (kpB), d) (kBB).

Úloha 34. Co je g. m. bodů, jejichž cyklické průměty jsou kružnice, které se dotýkají a) dané kružnice v jejím daném bodě, b) dané přímky v jejím daném bodě? Řešte na základě těchto g. m. cyklograficky Pappovu úlohu (kk_B).

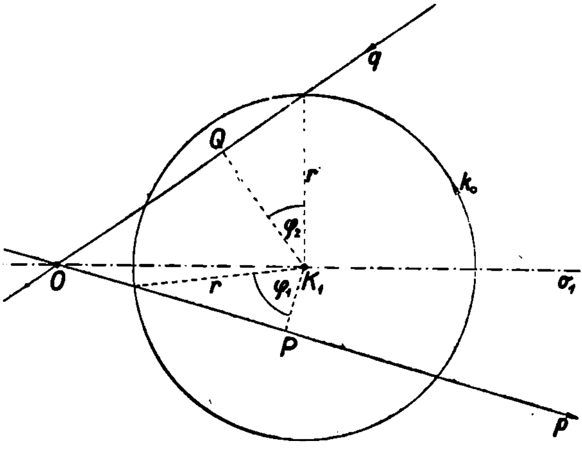
Úloha 35. Určete cyklograficky druhé ohnisko G_1 kuželosečky, je-li dáno jedno její ohnisko F_1 a tři její body A, B, C. [Z bodu F_1 opište cyklus f_0 jdoucí třebas A a na pravoúhlé rotační ploše kuželové (F_1, f_0) sestrojte body B, C a příslušné cykly b_0, c_0. Hledaná kuželosečka jest půdorysem řezu roviny $\varrho \equiv ABC$ s plochou (F, f_0). Jí proložená druhá cyklicky promítací plocha kuželová (G, g_0) určí ohnisko G_1.] Proveďte diskusi úlohy.

Úloha 36. Určete cyklograficky kuželosečku, známe-li její jedno ohnisko a ještě a) dva body a tečnu, b) jeden bod a dvě tečny.

Úloha 37. Podobně sestrojte kuželosečku, známe-li její ohnisko, směr osy a mimo to ještě a) dva body, b) bod a tečnu.

5,4. Další geometrická místa bodů v prostoru a příslušné planimetrické úlohy. a) Pro řešení dalších planimetrických úloh užitím cyklického promítání bude výhodné odvoditi ještě další *geometrická místa* bodů v prostoru, získaná spojením dvou jednoduchých podmínek, kterými jsme určovali skupiny cyklů v odst. 5,2, po případě zavedením ještě jiné podmínky pro žádané cykly.

α) G. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou kružnice, které protínají dvě přímky p, q dané v π v stejných úhlech, jsou dvě roviny souměrnosti ${}^1\sigma$, ${}^2\sigma$ přímek p, q, k sobě kolmé a kolmé k π. Přitom může býti podle odst. 5,1, c), β) úhel φ také imaginární. Při orientovaných přímkách p, q jest ovšem g. m. jen jedna jejich rovina souměrnosti σ. Důkaz věty je zřejmý z vlastnosti cyklů, které náležejí cyklickým polím stejných modulů.



Obr. 26. Geom. místo středů cyklů, které protínají přímky p, q v úhlech, jejichž kosiny mají daný poměr.

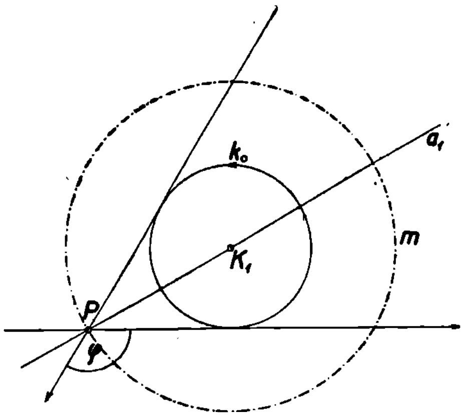
β) Mějme nyní v π dvě orientované přímky p, q (obr. 26), z nichž první je protata cyklem $k_0(K_1, r)$ v úhlu φ_1 tak, že $\cos\varphi_1 = n_1$, a druhá týmž cyklem v úhlu φ_2, pro nějž $\cos\varphi_2 = n_2$. Na obraze jsou úhly φ_1 a φ_2 reálné. Poměr

$$\cos\varphi_1 : \cos\varphi_2 = \frac{\overline{K_1P}}{r} : \frac{\overline{K_1Q}}{r} = \overline{K_1P} : \overline{K_1Q} = n_1 : n_2 = k$$

je tedy roven poměru vzdáleností K_1 od přímek p, q. Spojíme-li tedy K_1 s průsečíkem O přímek p, q přímkou σ_1, mají všecky její body a žádný jiný bod poměr vzdáleností od p, q roven k. Číslo k udává také dělicí poměr přímky σ_1 k přímkám p, q, neboť

$$\sin \widehat{p\sigma_1} : \sin \widehat{q\sigma_1} = \overline{K_1P} : \overline{K_1Q} = k.$$

Platí tedy věta: *G. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou cykly, které protínají dvě přímky* (orientované) p, q *dané v* π



Obr. 27. Cykly, které mají s cyklem k_0 společné tečny svírající daný úhel φ.

v úhlech, jejichž kosiny mají daný poměr k, *jest rovina* σ *kolmá k* π, *jejíž půdorys* σ_1 *je určen dělicím poměrem* $(pq\sigma_1) = k$.

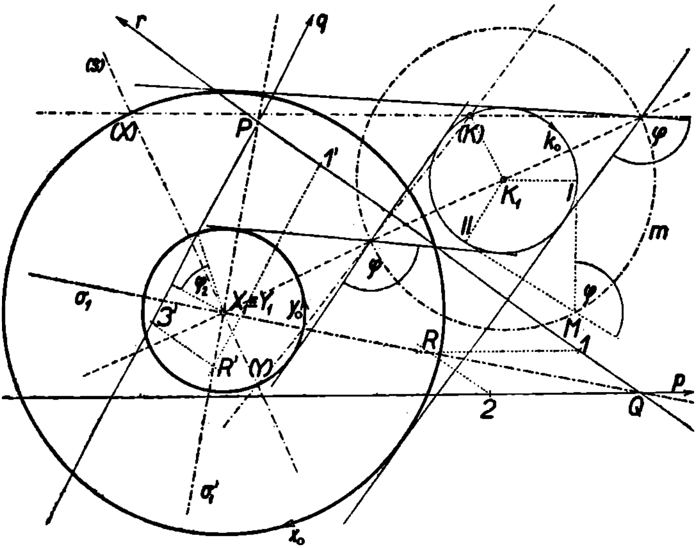
γ) Dále zvolme v π cyklus $k_0(K_1, r)$ a sestrojme z bodu P k němu tečny, které nechť tvoří úhel φ (obr. 27). Spojnice PK jest přímka a a její body se zobrazují v cykly, tvořící lineární cyklickou řadu, a jejich společné tečny s cyklem k_0 jsou sestrojené tečny. Sestrojíme-li tedy kružnici m ze středu K_1 a poloměrem $\overline{K_1P}$ a proložíme-li jí plochu kuželovou $\varkappa$ s vrcholem K, mají všecky body této plochy tu vlastnost, že jejich cyklické průměty jsou cykly, jejichž společné tečny s cyklem k_0 tvoří úhly rovné φ. A také každý cyklus a_0, jehož společné tečny s cyklem k_0 svírají úhel velikosti φ, je cyklickým průmětem bodu A, který náleží ploše $\varkappa$, neboť spojnice AK určuje vždy přímku plochy $\varkappa$. Tím jsme dokázali větu: *G. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou cykly, které mají s cyklem k_0 daným v π společné tečny svírající daný úhel φ, je plocha kuželová s vrcholem K, jejíž řídicí kružnice v π obsahuje body, z nichž vedené tečny k cyklu k_0 svírají úhel rovný φ.*

b) Řešme nyní tuto *úlohu*: V π jsou dány tři orientované přímky p, q, r a cyklus k_0. Máme sestrojiti cyklus, který protíná dané přímky v úhlech, jejichž kosiny jsou v poměru: $\cos \varphi_1 : \cos \varphi_2 : \cos \varphi_3 = 3 : (-2) : 6$, a jehož tečny společné s cyklem k_0 svírají úhel $\varphi = 120°$ (obr. 28).

Použijeme g. m. bodů odvozených v tomto odst. sub a), β), a to dvakráte, a sub a), γ) a sestrojíme průsečíky X, Y příslušných dvou rovin σ, σ' a kuželové plochy $\varkappa$; cykly x_0, y_0 zobrazující body X, Y jsou pak hledané cykly.

Konstrukce: Půdorys roviny σ, kolmé k π, pro přímky p, r a poměr kosinů úhlů $3 : 6$ dostaneme takto: Naneseme od průsečíku Q těchto přímek libovolnou úsečku $\overline{Q1}$ na r a úsečku $\overline{Q2} = 2 . \overline{Q1}$ na p v příslušném smyslu, vedeme body 1, 2 rovnoběžky s p, resp. r, které se protínají v bodě R, a spojíme Q s R; spojnice $QR \equiv \sigma_1$. Všimněme si, že bod R leží v kladné polovině jak vzhledem k orientované přímce p, tak vzhledem k orientované přímce r, což vyhovuje kladnému poměru kosinů úhlů φ_i. To také rozhodovalo o smyslu, v jakém jsme nanášeli úsečky $\overline{Q1}$, $\overline{Q2}$. Podobně sestrojíme půdorys roviny σ' pro přímky q, r a příslušný poměr kosinů úhlů, zde záporný, hodnoty $-2 : 6$. Použijeme úseček $\overline{P1'}$, $\overline{P3'} = 3 . \overline{P1}$ a bodu R'; spojnice $PR' \equiv \sigma'_1$. Půdorys průsečnice s rovin σ, σ' obsahuje půdorysy hledaných bodů; ty jsou $X_1 \equiv Y_1 \equiv s_1$.

Pak sestrojíme v daném cyklu k_0 dva jeho poloměry K_1I, K_1II svírající úhel φ, v bodech I, II tečny cyklu k_0 a jejich průsečík M. Tímto bodem prochází kružnice $m(K_1)$, řídicí kružnice kuželové plochy $\varkappa$, která má vrchol K.



Obr. 28. Cyklus, který protíná přímky p, q, r v úhlech, jejichž kosiny jsou v daném poměru, a jehož tečny společné s cyklem k_0 svírají úhel φ.

Abychom určili průsečíky X, Y přímky s s plochou $\varkappa$, sklopíme rovinu (s, K) do π, a v průsečících sklopené přímky (s) a sklopených povrchových přímek kužele dostáváme sklopené body $(X), (Y)$. Jimi procházejí hledané cykly x_0, y_0, spolu soustředné, se středem v $X_1 \equiv Y_1$.

V našem případě protíná jen cyklus x_0 všecky tři dané přímky reálně, kdežto cyklus y_0 protíná jen přímku q reálně v úhlu φ_2. Jest totiž $\cos\varphi_2$ asi $-\frac{1}{2}\frac{5}{2}$, takže $\cos\varphi_1$ musí býti asi $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\frac{5}{2} = \frac{4}{4}\frac{5}{4}$ a $|\cos\varphi_3|$ asi $3 \cdot \frac{1}{2}\frac{5}{2} = \frac{4}{2}\frac{5}{2}$; tedy jsou obě hodnoty větší než 1. Pro úhel cyklu x_0 s přímkou q vychází $\cos\varphi_2'$ zhruba $-\frac{1}{4}$, takže $\cos\varphi_1'$ je asi $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$ a $|\cos\varphi_3'|$ asi $3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, oba tedy menší než 1.

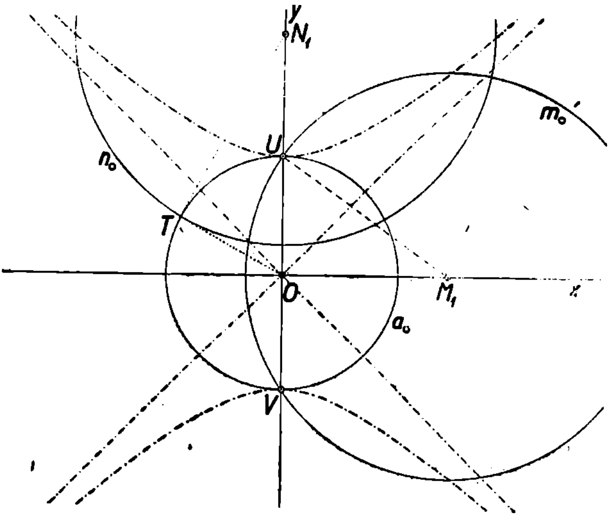
Úloha 38. V π jsou dány čtyři orientované přímky a_i, $i = 1, \ldots, 4$. Určete cyklus, který protíná první tři přímky v úhlech φ_i, pro něž $\cos\varphi_1 : \cos\varphi_2 : \cos\varphi_3 = 2 : (-3) : 1$, a přímku a_4 v úhlu, jehož $\cos\varphi_4 = -\frac{1}{2}$.

Úloha 39. V π jsou dány dvě orientované přímky p, q a cyklus k_0. Sestrojte cyklus, který se dotýká p, q a jehož tečny společné s cyklem k_0 svírají daný úhel.

Úloha 40. Pro dané útvary v předcházející úloze sestrojte cyklus, který se p dotýká, q protíná v úhlu daném jeho kosinem a jehož tečny společné s k_0 svírají daný úhel.

5,5. Svazky a sítě kružnic. a) Zvolme v π *svazek kružnic* se základními body U, V (obr. 29). Podle věty odst. 5,2, a) dostaneme g. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou kružnice tohoto svazku, jako křivku společnou dvěma kuželovým plochám pravoúhlým $\varkappa_u$, $\varkappa_v$ s vrcholy U, V. Jejich proniková čára jest (mimo úběžnou kružnici) opět jako v obecnějším případě, popsaném v odst. 5,3, b), α), hyperbola h, a to při zvláštní poloze shodných kuželových ploch $\varkappa_u$, $\varkappa_v$ rovnoosá, která leží v rovině souměrnosti bodů U, V, jež je také rovinou souměrnosti obou ploch. O tom se lze přesvědčiti snadno i analyticky zavedením pravoúhlých os souřadnicových x, z ve zmíněné rovině souměrnosti. Osu x zvolme v π v ose souměrnosti bodů U, V a osu z v kolmici, vztyčené k π ve středu O úsečky UV. Půdorys M_1 libovolného bodu M křivky leží na x, takže $\overline{OM_1} = x_M$ a poloměr kružnice $m_0(M_1, \overline{M_1U})$ jest roven z_M se znaménkem určeným orientací kružnice m_0. Označíme-li délku $|\overline{OU}| = |\overline{OV}| = a$, pak vyplývá přímo z pravoúhlého trojúhelníka M_1UO vztah $z^2 - x^2 = a^2$, což je rovnice hyperboly h. Nejmenší kružnice $a_0(O, a)$ svazku (UV) zobrazuje cyklicky vrcholy A, B hyperboly h.

Opíšeme-li dále z bodu N_1, libovolně zvoleného na spojnici UV, kružnici n_0, která protíná orthogonálně kružnici a_0 a tedy i ostatní kružnice svazku (UV), jest její poloměr $\overline{N_1T} = z_N$, a to + nebo — pro dva body N v prostoru souměrně sdružené podle π. Zavedeme-li v rovině k π kolmé a pro-



Obr. 29. Orthogonální svazky kružnic — cyklický průmět dvou hyperbol.

ložené přímkou UV soustavu souřadnic y, z, při čemž leží osa y v přímce UV, jest $\overline{ON_1} = y_N$. Z pravoúhlého trojúhelníka N_1OT plyne pak vztah: $y^2 - z^2 = a^2$, což je rovnice g. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou kružnice svazku, protínající orthogonálně kružnice dřívějšího svazku (UV).[33]) Je to opět rovnoosá hyperbola $\overline{h}$ v rovině (yz) s vrcholy

[33]) Viz M. rov. k. str. 44 a n.

v bodech U, V. Na obrazci je čerchovaně vyrýsována hyperbola $\bar{h}$ po sklopení do π kolem osy y a je současně obrazem hyperboly h, sklopené do π kolem osy x.

Celkem dostáváme tedy tento výsledek: *Dva svazky kružnic v π protínajících se navzájem orthogonálně jsou cyklickým průmětem bodů, které tvoří dvě rovnoosé hyperboly v rovinách k sobě kolmých a kolmých k π, jejichž osy jsou v osách obou svazků.* Reálné základní body jednoho svazku jsou vrcholy hyperboly, jejíž body mají cyklické obrazy v kružnicích druhého svazku; krajní body imaginární osy této hyperboly jsou vrcholy druhé hyperboly a její body mají cyklické obrazy v kružnicích prvého svazku.

Z rovnic obou hyperbol, které jsme odvodili v rovinách (xz) a (yz), plyne také naopak, že rovnoosé hyperboly h a $\bar{h}$ určují cyklickým průmětem svých bodů dva svazky vzájemně orthogonálních kružnic se základními body reálnými, resp. imaginárními.

b) Pozorujme nyní obr. 29 se zřetelem ke kružnici a_0.

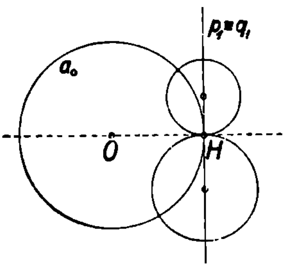
α) Hyperbola $\bar{h}$ obsahuje body, jejichž cyklickým průmětem jsou kružnice svazku se středy na průměru UV, které protínají a_0 orthogonálně. Rotací této hyperboly kolem osy z vznikne *plocha rotačního rovnoosého hyperboloidu jednodílného s hrdlem a_0* jakožto *g. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou kružnice, které protínají kružnici a_0 orthogonálně.*

Souhrn všech těchto kružnic se nazývá *síť kružnic*, a je určena v π základní kružnicí a_0, kterou protínají kružnice sítě orthogonálně. Síť kružnic obsahuje nekonečně mnoho svazků kružnic, z nichž je úplně složena.

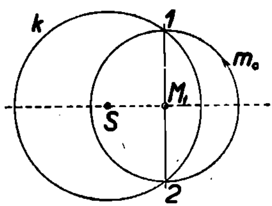
Ale z vlastnosti plochy rotačního jednodílného hyperboloidu, který je plochou přímkovou (viz výklad kap. 2, odst. 2,2), můžeme tuto síť kružnic odvoditi jinak, a to z nesčíslného množství lineárních řad kružnic (cyklů obojí orientace) takto: Mysleme si v libovolném bodě H hrdla hyperboloidu (obr. 30) jeho tečnou rovinu τ, tedy kolmou k π, a v ní dvě přímky plochy p, q. Jejich odchylky od π jsou rovny 45° a přímky jsou souměrně sdružené podle roviny π. Cyklickým průmětem jejich bodů jest proto dotykový svazek kružnic, které mají středy na $p_1 \equiv q_1$ a společný bod dotyku H; obsahují dvě lineární řady dotykových cyklů, které protínají kružnici a_0 orthogonálně. Rotací přímky p, resp. q, kolem osy z vznikne náš hyperboloid. Celkem tedy poskytují lineární řady dotykových cyklů, které cyklicky zobrazují jednak přímky plochy jedné soustavy, a řady cyklů, které zobrazují přímky druhé soustavy, celou síť kružnic ke kružnici a_0 orthogonálních.

β) Hyperbola h obsahuje body, jejichž cyklickým průmětem jsou kružnice svazku (UV), které půlí kružnici a_0 neboli které protínají a_0 diametrálně. Rotací hyperboly h kolem osy z vznikne *plocha rotačního rovnoosého hyperboloidu dvojdílného* s vrcholy na ose z a s reálnou osou, která se rovná délce $\overline{UV}$, jakožto *g. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou kružnice, které protínají kružnici a_0 diametrálně.* Tvoří opět *síť* kružnic, stanovenou základní kružnicí a_0 a podmínkou diametrálního protínání této kružnice.

γ) Ze svazku kružnic (UV) (obr. 29) můžeme dospěti k jiné soustavě kružnic v π, posouváme-li svazek v π ve směru UV. Vzniklý nekonečný počet svazků kružnic poskyt-



Obr. 30. Cykly, které protínají kružnici a_0 orthogonálně.



Obr. 31. Cykly, které protíná kružnice k diametrálně.

ne soustavu kružnic, které vytínají na přímce y tětivy stálé délky rovné $\overline{UV}$. Myslíme-li si, že se posouvá současně i hyperbola h, jejíž body zobrazuje cyklicky náš svazek kružnic, můžeme prosloviti větu: *G. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou kružnice soustavy určené přímkou y a podmínkou, že mají vytínati na y tětivy dané délky, jest hyperbolická válcová plocha*, jejíž řídicí křivkou je hyperbola h a jejíž povrchové přímky mají směr y.

δ) Jak vidíme, jsou přiřaděny k sítím kružnic sub α), β) i k soustavě kružnic sub γ) v prostoru body, které vyplňují plochu. Takové soustavy kružnic v rovině se nazývají *kongruence kružnic*. I cyklické pole je takovou kongruencí. Síť kružnic je mezi kongruencí vyznačena vlastností, že její kružnice, které procházejí daným bodem, tvoří svazek.

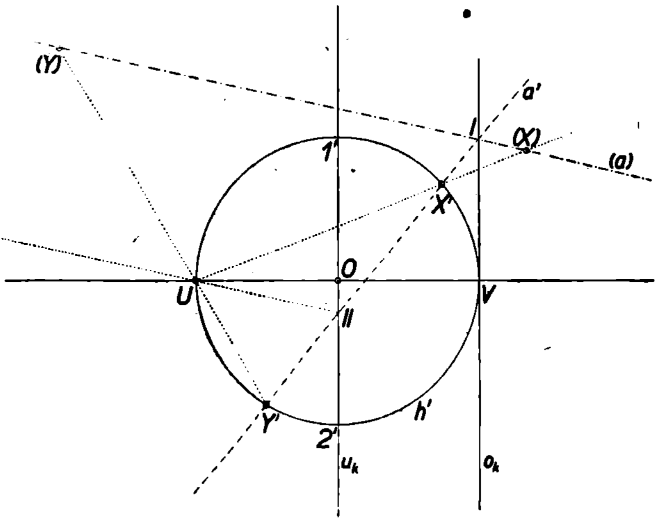
Jinou jednoduchou kongruenci kružnic v π poskytne cyklický průmět bodů plochy kulové $\varkappa$, která má v kružnici $k(S)$ dané v π svůj rovník (obr. 31). Vedeme-li půdorysem M_1 libovolného bodu M plochy kulové tětivu rovníku k, kolmou k spojnici SM_1, určuje svou délkou $\overline{12}$ průměr příslušného cyklu m_0 (na obraze je m_0 kladného smyslu, tedy M je nad π); cyklus m_0 jest kružnicí k rozpůlen. Naopak je každá kružnice m_0, půlená danou kružnicí k, cyklickým průmětem dvou bodů M, M' spolu souměrných podle π, které leží na ploše kulové $\varkappa$. Proto *g. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou kružnice půlené kružnicí k danou v π, neboli které kružnice k protíná diametrálně, je plocha kulová, sestrojená nad kružnicí k jako rovníkem.* (Srovnej s obr. 9.)

c) Podle vět odvozených v tomto odstavci řešme nyní prostorově jako příklad *některé planimetrické úlohy.*

α) V π jsou dány dvě orientované přímky p, q a kružnice $k(S)$. Máme sestrojiti cyklus, který se dotýká přímek p, q a který protíná kolmo kružnici k. (Úloha ppk^0; viz pozn. 29.)

Víme, že cykly, které se dotýkají p, q, tvoří lineární cyklickou řadu, která zobrazuje body přímky a, určené stopníkem P v průsečíku p, q a bodem A, jehož cyklickým průmětem je zvolený cyklus a_0, dotýkající se p, q. Vyhledáme proto v prostoru průsečíky X, Y přímky a s rotačním hyperboloidem, určeným kružnicí k podle odst. b), α). Hledané cykly x_0, y_0 jsou cyklické průměty bodů X, Y.

Konstrukce: Přímkou a proložíme rovinu α kolmou k π, která protne zmíněný hyperboloid v rovnoosé hyperbole h^*, a nalezneme průsečíky X, Y přímky a s hyperbolou h^*. Za tím účelem sklopíme rovinu α s přímkou a i s hyperbolou h^* do π a použijeme výhodně středové kolineace hyperboly h^* s kružnicí h', sestrojenou nad hlavní osou $\overline{UV}$ hyperboly h^* jako nad průměrem (obr. 32). Vrchol U, jakožto bod dotyku obou křivek považujme za střed kolineace a tudíž tečnu ve



Obr. 32. Průsečíky přímky a s rotačním hyperboloidem — cykly, které se dotýkají dvou daných přímek a které protínají kolmo danou kružnici.

vrcholu V za osu kolineace o_k. Myslíme-li si bodem U paprsky kolineace svírající s UV úhel 45°, tedy procházející úběžnými body hyperboly h^*, seznáváme, že sdružené body na h' jsou body $1'$, $2'$, krajní to body sklopené vedlejší osy hyperboly h^*; spojnice $1'2'$ je tedy úběžnicí kolineace u_k. Protože hledáme průsečíky přímky (a) s h^*, sestrojíme napřed přímku a', kolineárně sdruženou s (a), a to užitím samodružného bodu I na o_k a úběžníku II na u_k. Bod II je průsečík paprsku kolineace UII, k (a) rovnoběžného, s úběžnicí u_k. Přímka a' protíná h' v bodech X', Y', kolineárně sdružených s hledanými body (X), (Y), které dostáváme na (a) a na paprscích kolineace UX', resp. UY'.

Protíná-li rovina α hrdlo k, vycházejí vrcholy U, V v π, ovšem na k. Kdyby půdorys přímky a neprotínal hrdlo a vrcholy U, V by tedy nevyšly v π, což by znamenalo, že je hlavní osa hyperboly kolmá k π, sestrojili bychom délku této osy a tím určili hyperbolu tak jako v obr. 12 v kapit. 3, odst. 3,2, b).

β) V π jsou dány dvě kružnice ${}^1k({}^1O, {}^1r)$, ${}^2k({}^2O, {}^2r)$ a orientovaná přímka p. Máme sestrojiti cyklus, který protíná ${}^1k$ i ${}^2k$ diametrálně a přímku p v úhlu φ, když $\cos\varphi = n$ (na př. $= -\frac{1}{4}$). Máme tedy řešiti úlohu $(k^d k^d p^\varphi)$ z M. rov. k. (Viz pozn. 29.)

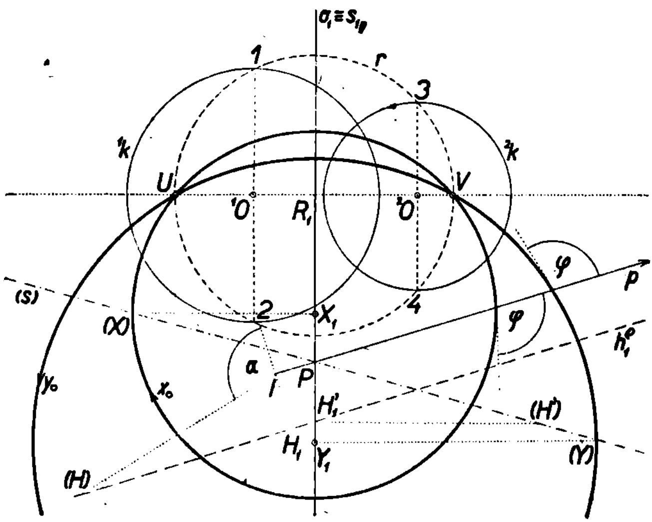
Nejdříve prostorově dokážeme, že cykly (kružnice) k, které protínají dvě kružnice ${}^1k$, ${}^2k$ diametrálně, tvoří svazek kružnic se základními body vždycky reálnými, jež leží na středné kružnic ${}^1k$, ${}^2k$.[34])

Podle věty odst. b), β) jsou kružnice k cyklickým průmětem bodů společných plochám dvou rovnoosých rotačních hyperboloidů dvojdílných ${}^1\varkappa$, ${}^2\varkappa$ s reálnými osami kolmými k π, se středy v bodech ${}^1O$, resp. ${}^2O$, a s poloosami délek ${}^1r$, resp. ${}^2r$. Pronikovà čára mimo úběžnou kružnici, jež je společná i oběma shodným asymptotickým kuželovým plochám

[34]) Srovnej M. rov. k., str. 46.

hyperboloidů $^1\varkappa$, $^2\varkappa$, jest kuželosečka v rovině σ, kolmé k středné $^1O^2O$, neboť mají plochy $^1\varkappa$, $^2\varkappa$ dvě společné roviny souměrnosti, a to rovinu π a rovinu obsahující spojnici $^1O^2O$, kolmou k π; i mají tedy také společnou osu, průsečnici obou rovin souměrnosti, t. j. přímku $^1O^2O$. Je proto rovina σ kolmá k této přímce. Ale kuželosečka v rovině σ, náležející oběma hyperboloidům, jest hyperbola h, odvozená v odst. a), jejíž body mají cyklický průmět v kružnicích svazku (U, V), se základními body reálnými, jak jsme měli dokázati.

Nyní se vraťme k řešení úlohy. Protože g. m. bodů, jejichž cyklický průmět jsou cykly protínající orientovanou přímku p v úhlech velikosti φ, jest rovina ϱ s odchylkou α a modulem $\operatorname{cotg} \alpha = \cos \varphi$ (viz odst. 5,2, α), vyhledáme průsečíky X, Y hyperboly h v rovině σ s rovinou ϱ, t. j. společné body hyper-



Obr. 33. Cyklus, který protíná kružnice ^1k, ^2k diametrálně a přímku p v úhlu φ.

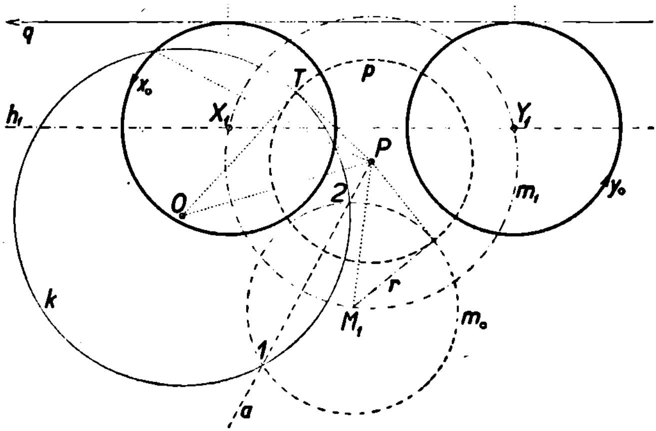
boly h a průsečnice s rovin σ, ϱ. Cyklický průmět x_0, y_0 bodů X, Y poskytuje již hledané cykly.

Konstrukce (obr. 33): Nejprve sestrojme půdorys roviny σ, přímku σ_1 kolmou k ${}^1O{}^2O$. Vedeme ji bodem R_1, který je středem kružnice r, protínající ${}^1k$ a ${}^2k$ diametrálně v bodech *1, 2*, resp. *3, 4*, a střednou těchto kružnic v bodech U, V. Přitom jsou body *1, 2* a *3, 4* krajní body průměru kružnice ${}^1k$, resp. ${}^2k$, kolmého k středné, a body U, V základní body svazku kružnic, které ${}^1k$ a ${}^2k$ protínají diametrálně. Pak určíme rovinu ϱ, procházející stopou $p^\varrho \equiv p$, a to ještě hlavní přímkou h^ϱ s pomocí modulu roviny ϱ, aby $\cotg \alpha = -\frac{1}{4}$. Na obr. bylo použito sklopeného trojúhelníka $I(H)H_1$, v němž odvěsna $\overline{IH_1}$ má délku zvolené jednotky a odvěsna $\overline{H_1(H)} = z_H$ délku 4 takových jednotek. (Srovn. obr. 22.) Půdorys průsečnice s rovin ϱ, σ je přímka $s_1 \equiv \sigma_1$; přímku s pak určíme jejím stopníkem $P \equiv (p \,.\, \sigma_1)$ a bodem H', jehož půdorys $H'_1 \equiv (h_1^\varrho \,.\, \sigma_1)$. Konečně sklopíme rovinu σ s hyperbolou h a přímkou s do π, abychom sestrojili průsečíky s a h, což provedeme třebas užitím kolineace hyperboly (h) s kružnicí r $(R_1, \overline{R_1U})$ podle obr. 32. Dokončení konstrukce jest již jasné z obrazce.

γ) V π je dána kružnice $k(O)$, mimo ni bod P a orientovaná přímka q. Máme sestrojiti cyklus daného poloměru r, který určuje s kružnicí k chordálu procházející bodem P a který se dotýká přímky q.

1. Nechť leží bod P nejprve vně kružnice k (obr. 34). Je-li přímka a, procházející bodem P a sekoucí k v bodech *1, 2*, chordálou kružnice k a jedné kružnice $m_0(M_1, r)$, pak seče kružnice p, sestrojená ze středu P a protínající k orthogonálně, i kružnici m_0 v pravém úhlu. Naopak každá kružnice m_0 (zde daného poloměru r), která seče orthogonálně kružnici p, určuje s kružnicí k chordálu, která prochází bodem P, protože bod P má stejnou mocnost M ke kružnici k i m_0, rovnu $\overline{PT}^2$, t. j. čtverci délky tečny vedené z P ke k. Protože pak

body, jejichž cyklickým průmětem jsou kružnice protínající p orthogonálně, tvoří rovnoosý rotační hyperboloid jednodílný $\varkappa$, jehož hrdlem je kružnice p, zobrazují cykly m_0 daného poloměru r ty body plochy $\varkappa$, které jsou vzdáleny od π o délku $\pm r$, tedy body dvou shodných kružnic (rovnoběžek) plochy $\varkappa$, ležících v rovinách rovnoběžných s π a vzdálených



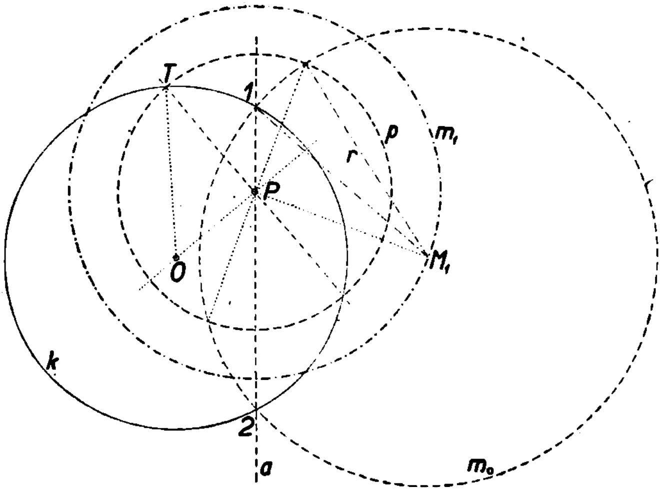
Obr. 34. Cyklus daného poloměru, který určuje s kružnicí k chordálu procházející bodem P a který se dotýká přímky q.

od π o délku $\pm v$. Splývající středy vždy dvou cyklů m_0 vyplňují v π kružnici m_1, půdorys oněch dvou rovnoběžek; tato kružnice je soustředná s p a má poloměr $\overline{PM}_1 = \sqrt{\overline{PT}^2 + r^2}$.

Abychom ještě vyhověli podmínce, že se hledaný cyklus daného poloměru má dotýkati přímky q, proložíme touto přímkou rovinu ϱ s odchylkou $\alpha = 45°$ a určíme v ϱ její hlavní přímku h, která má půdorys h_1, vzdálený od q v kladném smyslu o délku r.

Průsečík kružnice m_1 a přímky h_1 jsou body X_1, Y_1, středy hledaných cyklů x_0, y_0, na našem obraze reálných.

2. Všimněme si ještě případu, když leží daný bod P uvnitř dané kružnice k (obr. 35). Pak je možno z bodu P sestrojiti kružnici p poloměrem $\overline{PT}$, kterou kružnice k protíná dia-



Obr. 35. Kružnice, které určují s kružnicí k chordály procházející bodem P.

metrálně. Ale potom i každá kružnice m_0, která stanoví s kružnicí k chordálu *12* procházející P, protíná p diametrálně a zase i naopak. Protože body, jejichž cyklickým průmětem jsou kružnice, které protínají p diametrálně, vyplňují rovnoosý rotační hyperboloid dvojdílný $\varkappa'$, jehož hlavní osa kolmá k π má délku $2 \,.\, \overline{PT}$, zobrazují cykly m_0 daného poloměru r ty body plochy $\varkappa'$, které na ní tvoří opět shodné kružnice v rovinách s π rovnoběžných, majících od π vzdálenost $\pm r$. A středy M_1 těchto cyklů určují v π opět kružnici m_1, soustřednou s p, jejíž poloměr $\overline{PM_1} = \sqrt{r^2 - \overline{PT}^2}$. Aby kružnice m_1 byla reálná, musí býti $r \geqq \overline{PT}$, jak je viděti hned na ploše $\varkappa'$, má-li na ní vzniknouti ve vzdálenosti od π rovné $\pm r$ reálná rovnoběžka, v mezním případě ovšem s poloměrem nulovým.

Poznámka k předcházejícímu příkladu: Kružnice k a bod P podmínkou, aby chordála každého hledaného cyklu a kružnice k procházela bodem P, určují kružnici p, kterou buď k protíná orthogonálně, anebo která je kružnicí k diametrálně proťata, což záleží na poloze bodu P vzhledem ke kružnici k. Označme tuto podmínku (k^B).

Jsou-li tedy dány dvě kružnice ${}^1k$, ${}^2k$ a dva body P, Q, můžeme hledati cykly m_0 takové, aby určovaly s ${}^1k$ a ${}^2k$ chordály tak, že chordála vždy m_0 a ${}^1k$ prochází bodem P a že chordála m_0 a ${}^2k$ prochází vždy Q, t. j. které vyhovují dvěma podmínkám (k^B).

Z vlastností prostorových útvarů, jejichž body jsou zobrazeny v π cykly m_0, je patrno, že tyto cykly tvoří svazek kružnic se středy na přímce kolmé k spojnici PQ.[35])

Podmínka (k^B) jest zobecněním podmínky diametrálního protínání kružnice k hledanými cykly, neboť učiníme-li daný bod P středem kružnice k, dospějeme k podmínce (k^d), diametrálního protnutí kružnice k.

A také spojení podmínky (k^B) s podmínkou (k^d) nebo k^0 (orthogonálního protnutí) vede opět k svazku kružnice v π, takže možno vyloženým způsobem řešiti i úlohy o kružnicích obecnější povahy, než byly úlohy uvedené v M. rov. k. na str. 16.

---

[35]) Viz též důkaz provedený projektivní geometrií v článku *F. Kadeřávka*: Sestrojení kružnic za daných podmínek, Příloha k Čas. JČMF, XX (1912), str. 71 a n.

Úloha 41. Sestrojte cyklus, který se dotýká dvou orientovaných přímek daných v π a protíná diametrálně daný cyklus. [Úloha ppk^d.]

Úloha 42. V π jsou dány dvě kružnice ${}^1k$, ${}^2k$ a orientovaná přímka p; sestrojte cyklus, který protíná ${}^1k$ i ${}^2k$ orthogonálně a který se dotýká p. [Úloha k^0k^0p.]

Úloha 43. Řešte úlohy 41, 42 s tou změnou, že dané přímky mají býti proťaty v úhlu φ, který je dán svým kosinem. [Úlohy $k^dp^\varphi p^\varphi$, $k^0k^0p^\varphi$.]

Úloha 44. Sestrojte cyklus, který jednu danou kružnici protíná orthogonálně, druhou diametrálně a buď a) se dotýká dané přímky p, nebo b) protíná p v daném úhlu ($\cos\varphi = n$). [Úlohy k^0k^dp, $k^0k^dp^\varphi$.]

Úloha 45. Sestrojte cyklus, který protíná jednu danou kružnici orthogonálně, druhou diametrálně a třetí tak, aby jeho chordála s touto kružnicí procházela daným bodem.

Úloha 46. V lineární cyklické řadě, dané dvěma cykly a_0, b_0, nalézti cyklus, který přímku p danou v π protíná v úsečce dané délky. [Průsečíky přímky s hyperbolickou válcovou plochou.]

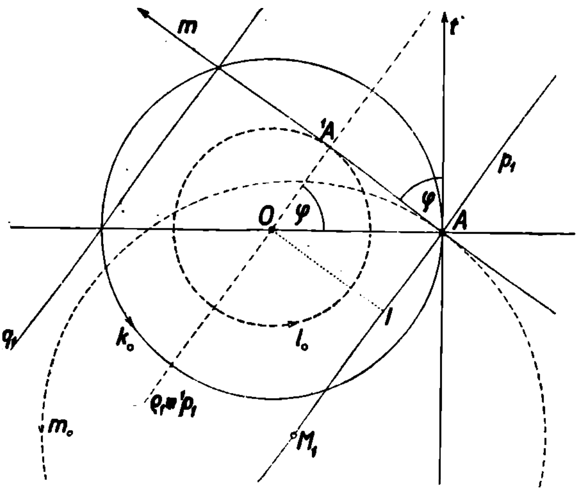
Úloha 47. Jakou plochu vytvoří body, jejichž cyklický průmět jsou cykly, protínající kružnici k danou v π tak, že tětivy společné cyklům a kružnici k mají danou délku. [Plocha 4. stupně.]

Úloha 48. V lineární cyklické řadě, dané středem podobnosti a cyklem, sestrojiti cyklus, který je kružnicí k danou v π proťat diametrálně. [Průsečíky přímky s kulovou plochou nad rovníkem k.]

Úloha 49. Užitím kulové plochy řešte úlohu: Sestrojiti kružnici, která protíná diametrálně tři kružnice dané v π.

5,6. Kružnice proťaté v daném úhlu. a) Především odvoďme g. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou kružnice, které protínají danou kružnici $k(O, r)$ v daném úhlu φ.

Na obr. 36 orientujme kružnici k danou v π v cyklus k_0 třebas kladně a zvolme na ní bod A. V něm sestrojme cyklus $m_0(M_1)$, který seče k v úhlu $\varphi = \widehat{tm}$. Takových cyklů jest nekonečně mnoho. Dotýkají se v bodě A přímky m, takže jejich středy M_1 vyplňují přímku p_1, kolmou k m. Body M v prostoru přiřaděné cyklům m_0 leží na přímce p, která má stopník v bodě A a odchylku od π rovnou $45°$. Opisuje-li bod A cyklus k_0, otáčí se přímka p kolem osy o, která prochází bodem O a je kolmá k π. Přitom vytvoří přímka p plochu rotačního hyperboloidu jednodílného $\varkappa$ o ose o. Ježto odchylka od π tvořících přímek p je rovna 45°, jest hyperboloid $\varkappa$ rovnoosý. Přímka m je první stopou roviny $\tau \equiv (mp)$, která je tečnou rovinou plochy $\varkappa$ a dotýká se jí v úběžném bodě přímky p. Rovina τ protíná totiž plochu $\varkappa$ kromě



Obr. 36. Kružnice, které protínají cyklus k_0 v úhlu φ.

přímky p ještě v přímce q, souměrné s přímkou p podle poledníkové roviny ϱ, rovnoběžné s p; jest tedy přímka q rovnoběžná s p a úběžný bod přímek p, q jest dotykovým bodem τ s $\varkappa$. Dotýká se tedy rovina τ i kuželové plochy asymptotické náležející ploše $\varkappa$, a to podél přímky ${}^1p$, která má stopník ${}^1A$ na m. Cyklus l_0, soustředný s k a dotýkající se m v bodě ${}^1A$, poskytuje tedy kružnici asymptotické kuželové plochy, která leží v π. Poloměr $\overline{O^1A}$ je roven $r \cos \varphi$, jak vyplývá z pravoúhlého trojúhelníka OA^1A, který má při vrcholu O

úhel velikosti φ. K cyklu l_0 je cyklograficky přiřaděn v prostoru bod L, jakožto vrchol asymptotické kuželové plochy a jakožto střed plochy $\varkappa$. Úsečka $\overline{OI}$ na kolmici vedené z O k p určuje poloměr hrdla plochy $\varkappa$ a tedy i délku poloosy a této plochy; platí

$$a = \overline{O_1 I} = r \sin \varphi.$$

Tím je plocha $\varkappa$ úplně určena.

Kdybychom orientovali danou kružnici k záporně, dospěli bychom stejným postupem k ploše rotačního hyperboloidu $\varkappa^*$, která je souměrná s plochou $\varkappa$ podle roviny π, takže obě plochy mají v π společnou rovnoběžku k. A všecky body ploch $\varkappa, \varkappa^*$ mají svým cyklickým průmětem cykly, které protínají k v úhlu velikosti φ, a ovšem jedině tyto body.

Můžeme tedy prosloviti větu: *G. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou kružnice, které kružnici $k(r)$ danou v π protínají v úhlech velikosti φ, jsou plochy dvou rotačních jednodílných hyperboloidů rovnoosých se společnou rovnoběžkou k, jejichž střed jest od π vzdálen o délku $\pm r \cos \varphi$ a jejichž poloosa má délku $a = r \sin \varphi$.*

Zvláštní případy.

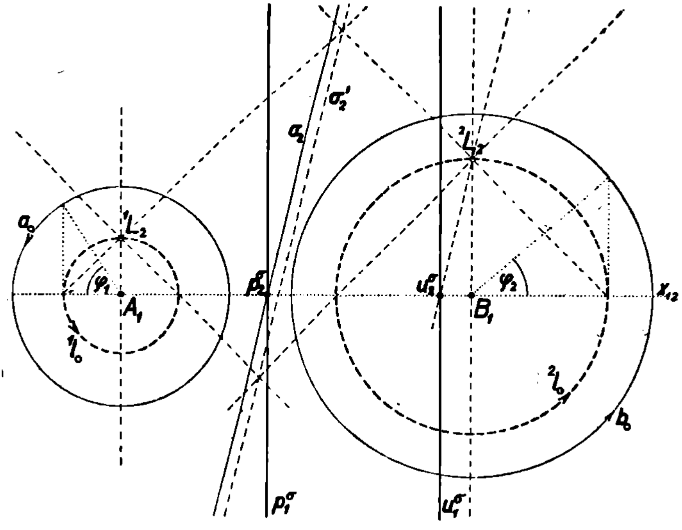
1. Pro $\varphi = 90°$, t. j. pro kružnice, které protínají danou kružnici orthogonálně, dostaneme plochu hyperboloidu, jejímž hrdlem je daná kružnice ve shodě s větou odst. 5,5, b, α).

2. Pro $\varphi = 0$, t. j. při dotyku kružnic s danou kružnicí, přejdou plochy $\varkappa, \varkappa^*$ v rotační kuželové plochy, odvozené v odst. 5,2, b).

3. Jestliže se poloměr dané kružnice stane nekonečně velikým, takže přejde daná kružnice v přímku, změní se plochy $\varkappa, \varkappa^*$ v roviny. To bychom mohli ukázati limitním přechodem, sledujícím vztah tečné roviny ploch hyperboloidů o stopě m; dokázali jsme však větu již samostatně v odst. 5,2, c).

b) Užitím právě odvozené věty můžeme nyní cyklograficky řešiti *zobecněnou Apolloniovu úlohu* ($k^\varphi k^\varphi k^\varphi$), t. j. sestrojiti kružnici, která dané tři kružnice k_i protíná v úhlech velikosti φ_i, $i = 1, 2, 3$. (Srovn. planimetrické řešení v M. rov. k., str. 91 a n.) Zde půjde obecně o sestrojení průsečíků tří hyperboloidů $\varkappa_i$.

α) V přípravném obr. 37 všimneme si nejprve pronikové čáry dvou ploch $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, použitých pro dané kružnice $a_0(A_1, r_1)$,



Obr. 37. Určení roviny hyperboly, která leží na dvou rotačních jednodílných hyperboloidech (rovnoosých).

$b_0(B_1, r_2)$ při daných úhlech φ_1, resp. φ_2, když obě kružnice orientujeme, a to na př. kladně.

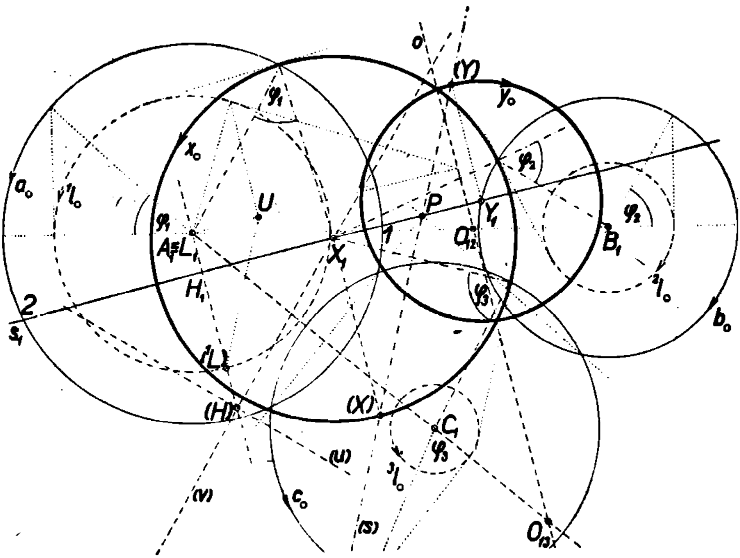
Druhou průmětnu zvolme v rovině souměrnosti obou ploch. V π sestrojme cykly $^1l_0$, $^2l_0$, soustředné a souhlasně orientované s cykly a_0, resp. b_0, a to s poloměry $r_1 \cos \varphi_1$, resp. $r_2 \cos \varphi_2$; poskytují kružnice, náležející příslušným asymptotickým plochám kuželovým s vrcholy ^1L resp. ^2L. Na obraze je sestrojen jejich nárys $^1L_2$ a $^2L_2$. Společná úběžná kružnice těchto kuželových ploch náleží též plochám $\varkappa_1, \varkappa_2$, takže další částí pronikové čáry ploch $\varkappa_1, \varkappa_2$ je kuželosečka c ležící v rovině σ, kolmé k společné rovině souměrnosti obou ploch, tedy kolmá k druhé průmětně. Kuželosečka c je podobná s pronikovou čarou c' asymptotických kuželových ploch a tato kuželosečka c' leží v rovině σ', rovnoběžné s rovinou σ.[36]) Podle toho určíme rovinu σ jednak první stopou p^σ a úběžnicí u^σ v π, kterou mají obě roviny společnou. Stopa p^σ je chordálou cyklů a_0, b_0, protože spojuje průsečíky těchto cyklů, třeba na obr. imaginární. Promítáme-li centrálně na př. z bodu ^2L, je pak úběžnice u^σ podle obr. 23 polárou středu podobnosti cyklů $^1l_0, {}^2l_0$ vzhledem k cyklu $^2l_0$. Na našem obraze je určena jako první stopa roviny vedené středem promítání ^2L rovnoběžně s rovinou σ'. Půdorysy bodů kuželosečky c jsou středy cyklů, které protínají dané cykly a_0, b_0 v daném úhlu φ_1, resp. φ_2.

Při nesouhlasně orientovaných daných kružnicích protnou se příslušné plochy $\varkappa_1, \varkappa_2{}^*$, anebo $\varkappa_1{}^*, \varkappa_2$ ve dvou kuželosečkách souměrně sdružených podle π, z nichž třeba první je c^*, takže můžeme označiti jejich společný půdorys $c_1{}^*$. I poznáváme, že *g. m. středů kružnic, které protínají dané dvě kružnice v úhlech velikosti* φ_1, φ_2, *jsou dvě kuželosečky* $c_1, c_1{}^*$. Jsou-li to hyperboly, pak jejich asymptoty jsou kolmé k společným tečnám kružnic $^1l_0, {}^2l_0$, protože tyto tečny jsou mezní kružnice s nekonečně dlouhými poloměry, které protínají dané kružnice v úhlech velikosti φ_1, resp. φ_2.

β) *Řešení úlohy* ($k^\varphi k^\varphi k^\varphi$). Orientujeme-li dané kružnice v cykly a_0, b_0, c_0 se středy A_1, B_1, C_1 a s poloměry r_i, $i = 1, 2, 3$, na př. v pořadí $(+--+)$, pak stanovíme plochy hyperboloidů $\varkappa_A, \varkappa_B{}^*, \varkappa_C$ a hned sestrojíme průsečnici s rovin σ_{AC}, σ_{BC}, v nichž leží kuželosečky c_{AC}, c_{BC}, a to první kuželosečka jako v α) uvedená proniková čára ploch $\varkappa_A, \varkappa_C$

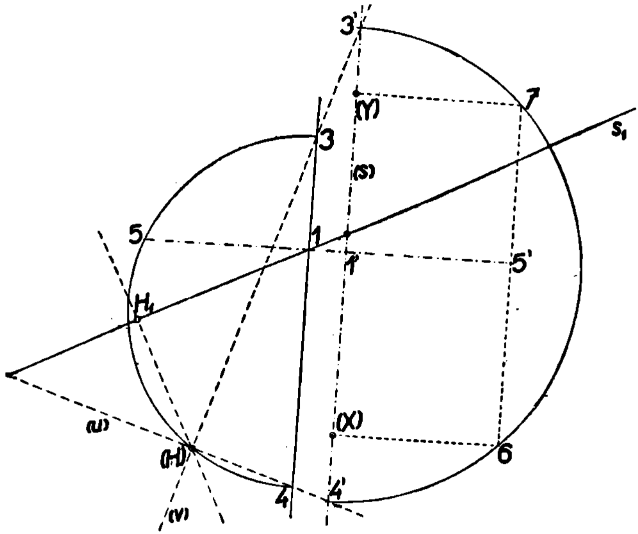
[36]) Viz Dg VI—VII, str. 134.

a druhá kuželosečka společná plochám $\varkappa_B^*$, $\varkappa_C$. Pak sestrojíme průsečíky přímky s třebas s plochou $\varkappa_A$, tedy dva body X, Y společné, jak patrno, všem třem plochám hyperboloidů, takže příslušné cykly x_0, y_0 poskytují při zvolené orientaci daných kružnic dvě řešení naší úlohy.



Obr. 38a). Cykly, které protínají cykly a_0, b_0, c_0 v úhlech φ_i, $i = 1, 2, 3$.

Konstrukci uspořádáme takto (obr. 38a): Nejprve sestrojíme chordály cyklů a_0, c_0 a b_0, c_0, jakožto stopy rovin σ_{AC} a σ_{BC} a jejich průsečík P, tedy potenční střed daných cyklů. Ten je stopníkem průsečnice s obou rovin. Pak sestrojíme cykly ${}^il_0$, soustředné postupně s a_0, b_0, c_0 s poloměry dlouhými $r_i \cos\varphi_i$, které určují příslušné asymptotické kuželové plochy hyperboloidů $\varkappa_A, \varkappa_B^*, \varkappa_C$. Promítáme-li centrálně roviny σ_{AC}, σ_{BC} z bodu ${}^1L$, který je vrcholem prvé asymptotické kuželové plochy, protínají se úběžnice těchto rovin v úběžníku U průsečnice s, jenž jest podle předchozích výkladů pólem osy podobnosti o cyklů ${}^il_0$ vzhledem k cyklu ${}^1l_0$. Osa podobnosti o jest na obraze určena jako spojnice středů podobnosti $O_{1,2}$



Obr. 38b). Průsečíky přímky (s) s hyperbolou.

cyklů ${}^1l_1, {}^2l_1$ a $O_{1,3}$ cyklů ${}^1l_1, {}^3l_1$. Půdorys s_1 přímky s prochází pak bodem P a je rovnoběžný se spojnicí ${}^1L_1U$; je tedy s_1 kolmé k o. Nyní jde již jen o to, určiti průsečíky X, Y přímky s s plochou $\varkappa_A$. Přímkou s myslíme si vedenu promítací rovinu, která protíná $\varkappa_A$ v rovnoosé hyperbole h, jejíž dva body $1, 2$ určuje s_1 na a_0. Střed H hyperboly h, jehož půdorys H_1 půlí úsečku $\overline{12}$, má kótu z_H rovnou kótě z_{1L}, t. j. kótě vrcholu ${}^1L$ asymptotické kuželové plochy, čímž jest již hyperbola určena. Její rovinu sklopíme do π s hyperbolou h i s přímkou s. Sklopená hyperbola (h) jest pak určena bodem *1* nebo *2* a asymptotami (u), (v) k sobě kolmými, které procházejí bodem (H). Sklopená přímka (s) prochází stopníkem P a jest rovnoběžná se spojnicí $(^1L)U$, sklopenou to přímkou ^1LU.

Průsečíky přímky (s) s hyperbolou (h) sestrojíme buď podle obr. 32, anebo aniž hyperbolu dále určujeme, užitím poučky: Vedeme-li různými body hyperboly rovnoběžky libovolného směru a stanovíme-li na každé rovnoběžce její průsečíky s asymptotami, je součin úseků mezi bodem hyperboly a těmito průsečíky na všech rovnoběžkách konstantní, ale pro různé směry rovnoběžek jiný.[37])

Pro jasnost vysuňme konstrukci do obr. 38b): Vedeme tedy pomocnou rovnoběžku s (s) bodem *1*, sestrojíme geometrický průměr úseků $\overline{13}$, $\overline{14}$, a to úsečku $\overline{15}$; pak vyrýsujeme pomocnou kružnici nad průměrem $\overline{3'4'}$, který jest úsekem na (s) vyťatým asymptotami (u), (v) a nalezneme na této kružnici body *6*, *7* takové, aby byly od (s) vzdáleny o délky rovné úsečce $\overline{1'5'} = \overline{15}$. Kolmice spuštěné z bodů *6*, *7* na (s) protínají tuto přímku v hledaných bodech (X), (Y), sklopených to středech výsledných cyklů.

Půdorysy X_1, Y_1 bodů X, Y určují pak středy a kóty $\overline{X_1(X)}$, resp. $\overline{Y_1(Y)}$ poloměry hledaných cyklů x_0, y_0. Všimněme si, že potenční střed P daných kružnic je středem podobnosti cyklů x_0, y_0, protože tyto cykly jsou cyklickým průmětem dvou bodů přímky s; dalo by se dokázati, že osa podobnosti o cyklů $^il_0$ jest jejich chordálou.

Na obraze jsou vyznačeny též úhly φ_i v průsečících cyklu x_0 s danými cykly a pak jako kontrola přesnosti konstrukce

[37]) Tato poučka je zobecněním stále používané věty při přímkách rovnoběžných s osami hyperboly, kdy se konstantní součin úseků rovná a^2, resp. $-b^2$. Důkaz zobecněné poučky viz v Lit. III, díl I, str. 17.

také tečny cyklu x_0 v týchž bodech; jsou totiž také tečnami příslušných cyklů ${}^i l_0$, protože tyto cykly tvoří obálky přímek, které protínají dané cykly v úhlech φ_i.

Změnou orientace daných kružnic dostali bychom pro čtyři podstatně různé kombinace znamének cyklů tak jako při řešení Apolloniovy úlohy v odst. 5,3, b), β) osm výsledných cyklů, po dvou po případě imaginárních. Body v prostoru přiřaděné těmto cyklům leží po dvou na čtyřech přímkách. Ty jsou průsečnicemi rovin obsahujících kuželosečky, společné plochám hyperboloidů, které jsou kombinovány po dvou ve čtyřech trojicích, z nichž žádné dvě nejsou souměrně sdružené podle π, tedy na př.: $\varkappa_A\varkappa_B\varkappa_C$; $\varkappa_A{}^*\varkappa_B\varkappa_C$; $\varkappa_A\varkappa_B{}^*\varkappa_C$; $\varkappa_A\varkappa_B\varkappa_C{}^*$.

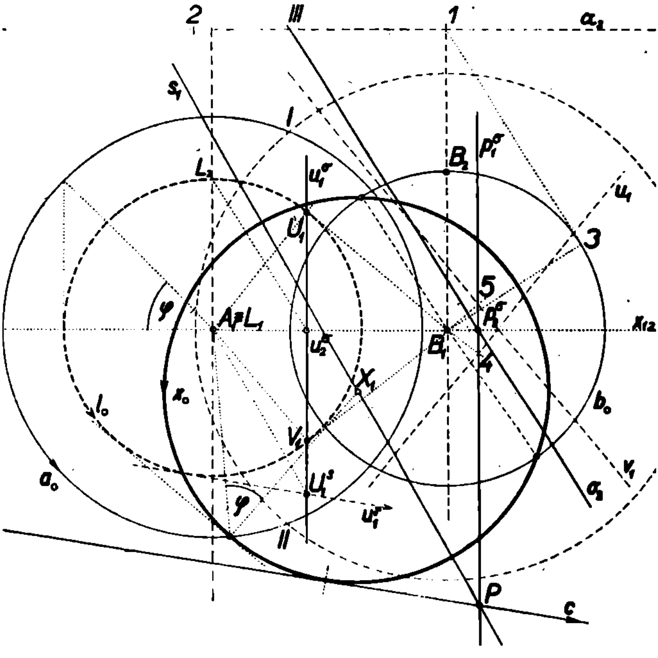
c) Z velkého množství úloh, které jsou přehledně uvedeny v M. rov. k. na str. 17 a n. a jež možno řešiti cyklograficky, rozřešíme jako příklad ještě úlohu ($k^\varphi k^d p$): Máme sestrojiti kružnici, která protíná danou kružnici $a_0(A_1, r_1)$ v úhlu velikosti φ, jinou danou kružnici $b_0(B_1, r_2)$ diametrálně a která se dotýká dané přímky c.

Je třeba určiti v prostoru společné body plochy rotačního jednodílného hyperboloidu rovnoosého $\varkappa_A$ nebo $\varkappa_A{}^*$, který určuje prvá podmínka, plochy dvojdílného rotačního hyperboloidu rovnoosého $\varkappa_B$, určeného druhou podmínkou a roviny γ nebo γ^*, kterou vyžaduje splnění třetí podmínky.

Konstrukci provedeme na obr. 39 pro plochy $\varkappa_A, \varkappa_B$ a γ, čímž dospějeme k dvěma výsledkům, a uspořádáme ji takto:

Najdeme kuželosečku h, společnou plochám $\varkappa_A, \varkappa_B$, pak průsečnici s roviny γ s rovinou σ, v níž leží kuželosečka h, a konečně průsečíky X, Y přímky s s kuželosečkou h. Jejich cyklický průmět poskytne výsledné cykly.

Při konstrukci použijeme též druhé průmětny, zvolené v rovině souměrnosti ploch $\varkappa_A, \varkappa_B$, k níž rovina σ je kolmá; osa x je tedy spojnice A_1B_1. Nejprve sestrojíme cyklus l_0 ($L_1 \equiv A_1$; $r_1 \cos\varphi$), a to kladný jako a_0, pak poláru bodu B_1 vzhledem k l_0, což je úběžnice u^σ roviny σ (podle b), α) tohoto odstavce), jestliže jsme zvolili střed promítání pro pomocný centrální průmět v bodě L. Protože u^σ protíná na obr. kružnici asymptotické kuželové plochy v bodech U, V, jest kuželosečka h hyperbolou. Její dva body I, II vyhledáme v rovině α, rovnoběžné s π a od π vzdálené výhodně o dvojnásobek kóty z_L bodu L. Tato rovina protíná plochu $\varkappa_A$ v rovnoběžce shodné s a_0, takže její půdorys se ztotožňuje s a_0, a plochu $\varkappa_B$ protíná v rovnoběžce, jejíž poloměr $\overline{12}$ snadno určíme bodem 2, který náleží hlavnímu poledníku plochy $\varkappa_B$;



Obr. 39. Cyklus, který protíná cyklus a_0 v úhlu φ, b_0 diametrálně a který se dotýká přímky c.

učiníme proto $\overline{12} = \overline{13}$, při čemž $\overline{13}$ je délka tečny vedené z *1* k b_0, neboť bod *2* náleží rovnoosé hyperbole se středem B_1 a s vrcholem B_2. Půdorysy rovnoběžek obou ploch se protínají v půdorysech bodů I, II (index je vynechán). Nárys σ_2 roviny σ prochází pak bodem III, který je nárysem bodů I, II; σ_2 je rovnoběžný se spojnicí $L_2 u_2{}^\sigma$; protíná osu x v bodě $p_2{}^\sigma$, což je nárys první stopy p^σ. Tím je určen i první průmět této stopy, kolmý k x. Protože body U, V jsou úběžníky asymptot u, v hyperboly h, dostaneme první stopníky asymptot, body *4*, *5*, na stopě p^σ a na stopách tečných rovin asymptotické kuželové plochy sestrojených podél přímek LU, resp. LV, tedy na tečnách kružnice l_0 v bodech U_1, resp. V_1. První průměty asymptot procházejí body *4*, *5* rovnoběžně s $L_1 U_1$, resp. $L_1 V_1$. Půdorys h_1 hyperboly h je tedy dostatečně určen asymptotami u_1, v_1 a body I, II; h_1 jest *g. m. středů kružnic* (cyklů obou smyslů), *které protínají kružnici a_0 v úhlu φ a kružnici b_0 diametrálně.*

Nyní přímkou c, kterou jsme orientovali a jíž se mají výsledné cykly dotýkati, proložíme rovinu γ s první odchylkou $\alpha = 45°$. Určíme ještě úběžnici u^γ této roviny, totiž tečnu cyklu l_0 rovnoběžnou s orientovanou přímkou c. Pak půdorys s_1 průsečnice rovin σ, γ prochází stopníkem $P \equiv (c \,.\, p_1{}^\sigma)$ a je rovnoběžný se spojnicí $L_1 U_1{}^s$, kde značí bod $U_1{}^s \equiv$ $\equiv (u_1{}^\gamma \,.\, u_1{}^\sigma)$ půdorys úběžníku přímky s.

Posléze vyhledáme průsečíky X_1, Y_1 přímky s_1 s hyperbolou h_1, třebas konstrukcí uvedenou v odst. b), β), a vyrýsujeme výsledné cykly $x_0(X_1)$, $y_0(Y_1)$, náležející lineární cyklické řadě, která je přiřaděna přímce s. Kontrola řešení jest obdobná té, jíž bylo použito při řešení úlohy $(k^\varphi k^\varphi k^\varphi)$ v odst. b), β). (Na obr. je vyrýsován jen cyklus x_0.)

Je patrno, že by rovina γ^*, souměrná s rovinou γ podle π, poskytla ještě další dva výsledné cykly.

Diskusi a konstrukce výsledků při zvláštní poloze daných útvarů v úlohách uvedených v odst. b) a c) nebudeme již sledovati a odkazujeme čtenáře na obsažné dílo Fiedlerovo a Müllerovo, Lit. I a IV.

Úloha 50. Z úloh o kružnicích, kde se vyskytuje podmínka protnutí dané kružnice v daném úhlu, řešte cyklograficky zvláště úlohy: $k^\varphi k^\varphi p^\varphi$; $k^\varphi k^\varphi B$; $k^\varphi p^\varphi p^\varphi$; $k^\varphi p^\varphi B$; $k^\varphi BB$. (Viz přehled v M. rov. k., str. 17.)

Úloha 51. V lineární cyklické řadě dané cykly a_0, b_0 (střed podobnosti uvnitř) najděte cyklus, který protíná daný cyklus c_0 v daném úhlu ($\cos\varphi = n$). [Úloha ppk^φ, při níž dané tečny cyklů a_0, b_0 i cyklů výsledných jsou imaginární.]

Úloha 52. Všimněte si, že na obr. 36 jest délka tečny cyklu l_0 a kteréhokoliv cyklu m_0 rovna konstantní délce $\overline{A^1A}$. Délka společné tečny dvou cyklů mezi body dotyku nazývá se *tečnová (tangenciální) vzdálenost dvou cyklů.*

Co je g. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou cykly, které od daného cyklu mají danou tečnovou vzdálenost? [Rotační jednodílný hyperboloid rovnoosý.]

Úloha 53. V lineární cyklické řadě, dané cyklem a středem podobnosti, najděte cyklus, který má od jiného daného cyklu danou tečnovou vzdálenost.

Úloha 54. K daným třem cyklům najděte cyklus, který má od nich tečnové vzdálenosti postupně t_i, $i = 1, 2, 3$.

Úloha 55. Jest dán cyklus a_0, orientovaná přímka p a bod B; sestrojte cyklus, který má od a_0 danou tečnovou vzdálenost, přímku p protíná v daném úhlu a který prochází bodem B.

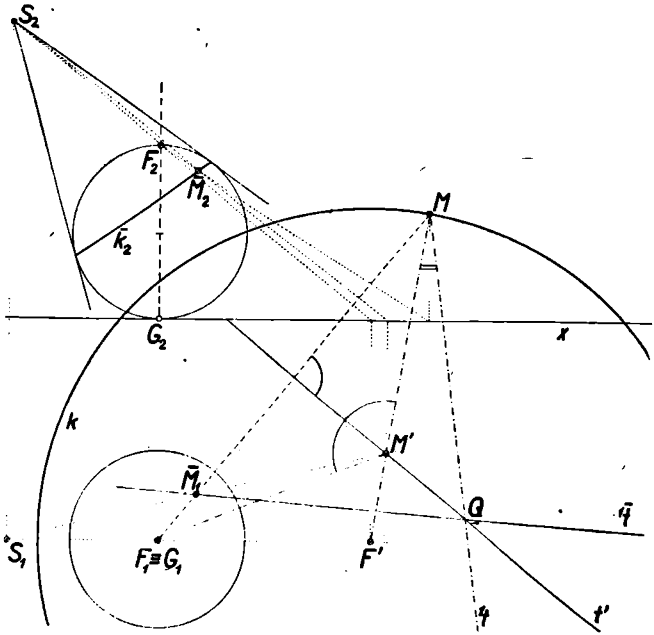
Úloha 56. Jakou změnu cyklů v π, které zobrazují body v prostoru, způsobí posunutí těchto bodů ve směru kolmém k π o délku ϱ? [Dilatace cyklů v π; viz M. rov. k., str. 74.] Použijte této transformace jednak na kužel uvedený v odst. 5,2, a), jednak na hyperboloid z odst. 5,5, b).

6. STEREOGRAFICKÁ PROJEKCE

Jiná transformace rovinných útvarů v prostorové útvary, které lze také použíti k řešení planimetrických úloh, je t. zv. stereografická projekce.

Při ní přiřaďujeme k útvarům roviny π útvary kulové plochy $\varkappa$ tím způsobem, že na plochu $\varkappa$ promítáme útvary ležící v π z bodu, zvoleného na ploše $\varkappa$ v jednom krajním bodě jejího průměru, který je kolmý k π.

Zvolíme-li plochu kulovou $\varkappa$ jako na obr. 40 tak, aby se ro-



Obr. 40. Dvě vlastnosti stereografické projekce (důkaz).

viny π dotýkala v bodě G, pak promítáme útvary roviny π na plochu $\varkappa$ z bodu F, který je diametrálně protilehlý k bodu G. Bod M roviny π se promítne na $\varkappa$ do bodu $\overline{M}$, který je druhým společným bodem promítacího paprsku FM s plochou $\varkappa$. Přiřadění bodů roviny π a bodů kulové plochy je vzájemně jednoznačné s výjimkou bodu F na k a úběžných bodů roviny π. Proč?

Stereografické projekce obyčejně používáme k zobrazení útvarů plochy $\varkappa$ v rovině π anebo v rovinách s π rovnoběžných, kdy docházíme v těchto rovinách k obrazům vzájemně homothetickým podle středu F, takže promítáme opačně útvary kulové plochy do roviny π, a mluvíme pak o stereografickém průmětu kulové plochy do roviny. Takové zobrazení je časté v kartografii.[38])

6,1. Vlastnosti stereografické projekce. Všimneme si dvou hlavních vlastností této transformace, a to že při ní přecházejí kružnice roviny π v kružnice kulové plochy $\varkappa$ i naopak a že se jí zachovávají úhly transformovaných křivek a tedy také vzájemný dotyk kružnic. Obě tyto vlastnosti dokážeme ze středového osvětlení kulové plochy,[39]) jako důsledek známé poučky Quetelet-Dandelinovy.

a) Na obr. 40 sestrojíme půdorys i nárys našich útvarů. Na kulové ploše $\varkappa$, která se dotýká π v bodě G, zvolme libovolný bod $\overline{M}$ a jím procházející a na ploše $\varkappa$ ležící kružnici $\overline{k}$, jejíž rovina je kolmá k druhé průmětně. Dále sestrojíme stereografický průmět M bodu $\overline{M}$ z bodu F do průmětny π, t. j. první stopník paprsku $F\overline{M}$, a pak odvodíme stereografický průmět k kružnice $\overline{k}$. Považujme $\overline{k}$ za mez vlastního stínu plochy $\varkappa$ při středovém osvětlení z bodu S a sestrojme tedy bod S jako vrchol kuželové plochy, která se dotýká

[38]) Viz na př. učebnici Dg VI—VII.

[39]) Důkaz podle *K. Pelce* z pojednání Věstníku Král. české společnosti nauk, Praha 1898.

plochy $\varkappa$ podél kružnice $\bar{k}$. Vržené stíny bodů F, G na π, body F', G jsou ohniska kuželosečky, v našem případě elipsy k', meze vrženého stínu plochy $\varkappa$ na π. Jedním bodem elipsy k' je bod M', jakožto vržený stín bodu $\bar{M}$ na π. Tečna t' elipsy k', půlící příslušný úhel průvodičů bodu M', je první stopou tečné roviny kulové plochy v bodě dotyku $\bar{M}$, takže spojnice $G_1\bar{M}_1$, jakožto půdorys poloměru kulové plochy jdoucího bodem $\bar{M}$, je kolmá na přímku t'. Spojnice $F'M'$ je však první stopou roviny $(SF\bar{M})$ a prochází tedy stereografickým průmětem M bodu $\bar{M}$, neboť M je prvním stopníkem přímky $F\bar{M}$. I jest bod M průsečíkem spojnice $G_1\bar{M}_1$ se spojnicí $F'M'$, a proto bodem souměrně sdruženým s ohniskem G_1 elipsy k' podle její tečny t'. Všechny body kružnice $\bar{k}$ promítají se stereograficky do bodů, které vyplňují kružnici k, jakožto geom. místo bodů souměrně sdružených s ohniskem G elipsy k' podle jejích tečen; střed F' kružnice k je v druhém ohnisku této elipsy.

Také naopak: Promítneme-li libovolnou kružnici k danou v π stereograficky z bodu F na plochu $\varkappa$, dostaneme kružnici $\bar{k}$, což potvrdíme tak, že si myslíme promítnuty tři body v π ležící na kružnici k do bodů plochy $\varkappa$. Těmito body na $\varkappa$ jest určena rovina a její řez s plochou $\varkappa$ je kružnice $\bar{k}$, přiřaděná stereograficky ke kružnici k. Platí tedy: *Stereografickým průmětem kružnic $\bar{k}$ plochy kulové*, pokud kružnice neprochází středem projekce, *jest kružnice k*. Vzájemné přiřazení kružnic $k, \bar{k}$ jest jednoznačné. *Středem kružnice k je stereografický průmět vrcholu kuželové plochy, která se dotýká plochy kulové podél kružnice $\bar{k}$*, neboli stereografický průmět pólu roviny kružnice $\bar{k}$. *Poloměr kružnice k*, jak také plyne z našeho důkazu, *rovná se délce hlavní osy kuželosečky, která je středovým průmětem kružnice $\bar{k}$ z vrcholu její dotykové kuželové plochy.*

Jestliže kružnice na kulové ploše prochází středem projekce, pak jest jejím stereografickým průmětem přímka; vždyť také se stává příslušná kuželosečka parabolou.

b) Rovnost úhlů křivek přiřaděných stereografickou projekcí dokážeme z vlastností útvarů na našem obraze takto: Protože jsou délky tečen vedených z bodu M' ke kulové ploše sobě rovny, platí rovnosti: $M'\overline{M} = \overline{M'G} = \overline{M'M}$. Můžeme tedy považovati bod M za obraz bodu $\overline{M}$ vzniklý sklopením tečné roviny bodu $\overline{M}$ do π kolem její první stopy t'. Jestliže pak sestrojíme v této rovině v bodě $\overline{M}$ ještě jinou libovolnou tečnu ${}^1\overline{t}$ plochy $\varkappa$, jest jejím sklopeným obrazem přímka ${}^1t$, spojnice QM, při čemž je bod Q na t' prvním stopníkem tečny ${}^1\overline{t}$. Ale přímka ${}^1t$ je také stereografickým průmětem tečny ${}^1\overline{t}$, jako byla přímka MM' stereografickým průmětem tečny $\overline{M}M'$.

Proto *úhel, který svírají tečny kulové plochy v libovolném jejím bodě, a úhel sevřený stereografickým průmětem těchto tečen jsou stejně velké a tím i úhly přiřaděných křivek.*

6,2. Stereografické řešení úlohy Apolloniovy. Jde-li o řešení obecné Apolloniovy úlohy v rovině π pro dané kružnice ${}^ik$, $i = 1, 2, 3$, můžeme převésti tyto kružnice stereografickou projekcí v kružnice ${}^i\overline{k}$ na zvolenou kulovou plochu $\varkappa$. Rozřešíme-li úlohu Apolloniovu na ploše $\varkappa$ pro kružnice ${}^i\overline{k}$, dostaneme stereografickým promítnutím výsledků do π výsledné kružnice pro dané kružnice ${}^ik$.

a) *Konstrukci* lze pak uspořádati takto: Dvěma kružnicemi kulové plochy, na př. ${}^1\overline{k}$, ${}^2\overline{k}$, proložíme dvě kuželové plochy druhého stupně s vrcholy V_{12}, V'_{12}. Každá tečná rovina takové plochy protíná kulovou plochu v kružnici, která se dotýká obou kružnic ${}^1\overline{k}$, ${}^2\overline{k}$. Sestrojíme-li tedy ještě další dvě kuželové plochy, proložené další dvojicí kružnic ${}^1\overline{k}$, ${}^3\overline{k}$, s vrcholy V_{13}, V'_{13}, pak mají na př. kuželové plochy s vrcholy

V_{12}, V_{13} společnou kružnici $^1\bar{k}$, takže lze k nim sestrojiti dvě společné tečné roviny, které již stanoví na kulové ploše dvě kružnice, dotýkající se všech tří kružnic $^i\bar{k}$.

Společné tečné roviny dvojic kuželových ploch V_{12}, V_{13}; V_{12}, V'_{13}; V'_{12}, V_{13} a V'_{12}, V'_{13} poskytnou osm rovin, určujících na kulové ploše osm kružnic, které řeší Apolloniovu úlohu na kulové ploše. Z nich lze potom odvoditi stereograficky̌m promítnutím osm kružnic v rovině π, které se dotýkají daných kružnic ^ik.

b) Vhodnou volbou kulové plochy $\varkappa$ možno dospěti v π k planimetrickým konstrukcím, které řeší Apolloniovu úlohu pro kružnice ^ik způsobem *Gergonnovým*, *Gaultierovým* i *Fouchéovým*,[40]) jak ukázal vztahy prostorovými již bývalý profesor karlínské reálky *F. Machovec*.[41])

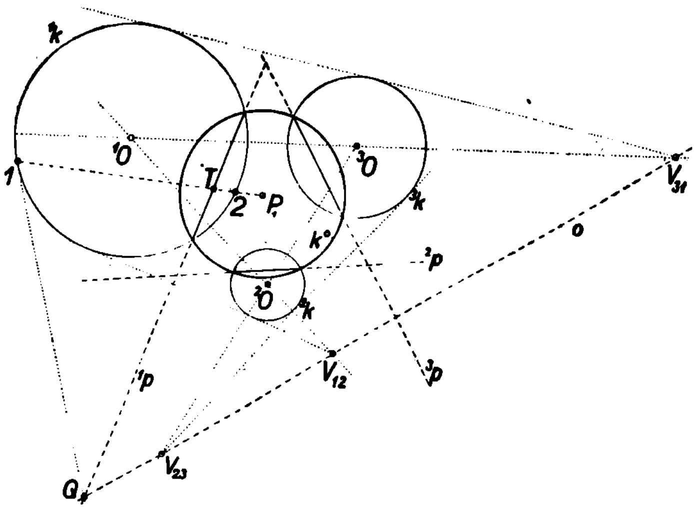
Ukážeme tak aspoň odvození konstrukce Gaultierovy pro kružnice ^ik (obr. 41), k nimž lze sestrojiti reálnou kružnici orthotomickou k_0 (viz M. rov. k., str. 36, obr. 18).

Kružnici k^0 považujme za rovník kulové plochy $\varkappa$ v π a promítněme dané kružnice ^ik na $\varkappa$ do kružnic $^i\bar{k}$ z bodu plochy $\varkappa$, který jest v jejím pólu P. Při této stereografické projekci jsou roviny kružnic $^i\bar{k}$ kolmé k π, protože k_0 protíná kružnice ^ik v pravém úhlu. Proto jsou poláry ^ip středu P_1 kružnice k^0 vzhledem ke kružnicím ^ik půdorysy rovin kružnic $^i\bar{k}$ a vrcholy kuželových ploch proložených dvojicemi těchto kružnic jsou body $V_{12}, \ldots$ atd., které leží po třech na čtyřech přímkách o v rovině π; přímky o jsou totiž osami podobnosti kružnic ^ik, jak lze snadno odvoditi z prostorových vztahů, platných pro kuželové plochy, které mají vždy jednu kružnici $^i\bar{k}$ společnou. (Srovnej též s obr. 11.) Je-li pak na obr. bod Q průsečíkem jedné přímky $o \equiv V_{12}V_{23}V_{31}$ s rovinou kružnice $^1\bar{k}$, tedy v π průsečík o s ^1p, pak tečny z Q ke kružnici

[40]) Viz M. rov. k., kap. 3, odst. B, D, E.

[41]) *F. Machovec*: O úloze Apollonické v deskriptivní geometrii. Pátá výroční zpráva reálky karlínské 1879.

$^1\overline{k}$ vedené dotýkají se jí v bodech $\overline{1}$, $\overline{2}$, jejichž půdorysy splývají v bodě T. A body *1*, *2*, přiřazené stereografickou projekcí k bodům $\overline{1}$, $\overline{2}$ na spojnici PT a na kružnici ^1k, jsou dotykovými body dvou výsledných kružnic, které se dotýkají kružnice ^1k právě v těchto bodech. Tak lze sestrojiti i dotykové body výsledných kružnic s kružnicemi ^2k, ^3k.



Obr. 41. Stereografický důkaz Gaultierova řešení Apolloniovy úlohy.

Sestrojení bodů *1*, *2* shoduje se úplně s konstrukcí Gaultierovou, protože spojnice PT jest polárou bodu Q vzhledem ke kružnici ^1k, neboť stereografickým průmětem tečen kružnice $^1\overline{k}$, vedených k ní z bodu Q, jsou přímky $Q1$, resp. $Q2$.

Ze srovnání našeho obrazu s obr. 11 poznáváme, že orthogonálním průmětem v π kružnic plochy $\varkappa$, které se dotýkají kružnic $^i\overline{k}$, jsou elipsy, které se dotýkají tří přímek ^ip a kružnice k^0 dvojnásobně. Pro náš případ kružnic ^ik ukazuje stereografická projekce v rovině π těsnou souvislost úlohy Apolloniovy, řešené pro tyto kružnice, s úlohou o kuželosečkách, které se dvojnásobně dotýkají kružnice k^0.

Poznámka. Myšlenka stereografické projekce kulové plochy vznikla z astronomických potřeb, výhodně zobraziti nebeskou kouli s jejími kružnicemi. Objevuje se již u řeckého astronoma *Hipparcha* (2. stol. př. Kr.). K sestrojení map nebe i země použil jejích vlastností v 2. stol. po Kr. *Ptolemaios* v Alexandrii. Název pochází od francouzských geometrů ze 17. stol. a vědecké zpracování vlastností od slavného *M. Chaslesa* (1793—1880). Soustavně pak se zabýval stereografickou projekcí *W. Fiedler* na curyšské technice.

Zobecnění stereografické projekce dostaneme, nahradíme-li kulovou plochu na př. plochou rotačního elipsoidu. Je obsaženo v této větě: *Elipsy na ploše rotačního elipsoidu promítají se z vrcholu plochy na rovinu kolmou k rotační ose do kružnic.*[42]) Tato věta platí také pro ostatní nepřímkové rotační plochy 2. st., tedy i pro plochu rotačního dvojdílného hyperboloidu a paraboloidu. I vlastnost plochy rotačního paraboloidu, které jsme v kap. 4 využili pro planimetrické konstrukce, jest jen zvláštním případem projekce, při níž je středem promítání úběžný vrchol paraboloidu.

Úloha 57. Řešte zvláštní úlohu Apolloniovu (kBB) stereografickou projekcí a ukažte, že konstrukce je totožná se známou planimetrickou konstrukcí. [Použijte kulové plochy sestrojené nad rovníkem, který prochází danými body a který protíná danou kružnici pravoúhle.]

Úloha 58. Odvoďte planimetrickou konstrukci pro řešení úlohy (kpB) ze stereografické projekce.

Úloha 59. Jakou vlastnost má stereografický průmět hlavních kružnic kulové plochy do roviny jejího rovníku v π? Sestrojte v π svazek kružnic, které jsou stereografickým průmětem hlavních kruž-

[42]) Důkaz viz v odst. 220 Lit. III, díl II; jiný důkaz v Rozhledech matem. přírodov. XII (1933), str. R 76 v článku *J. Roháčka*: Elipsy na nepřímkové ploše rotační 2. st.

nic kulové plochy. Určete pak kružnice této plochy, které mají stereografický průmět v kružnicích protínajících onen svazek pravoúhle.

Úloha 60. V π jsou dány tři kružnice ${}^i k$, $i = 1, 2, 3$, které se navzájem protínají pravoúhle. Sestrojte kružnici, která je kružnicemi ${}^i k$ půlena, použijte ji za rovník kulové plochy $\varkappa$ a odvoďte stereograficky kružnice ${}^i\bar{k}$ na $\varkappa$. V jaké sférické trojúhelníky rozdělí ${}^i\bar{k}$ plochu $\varkappa$? Řešte pro kružnice ${}^i k$ úlohu Apolloniovu prostorovými vztahy.

Úloha 61. Uvnitř dané kružnice k jsou dány tři body; jimi veďte elipsu dvojnásobně se dotýkající k s pomocí stereografické projekce. (Srovnej obr. 8.)

Úloha 62. Pro danou kružnici k a tři její sečny sestrojte elipsu, která se dotýká těchto sečen a kružnice k dvojnásobně užitím stereografické projekce. (Srovnej s obr. 11.)

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

kromě článků, citovaných v poznámkách. V těchto knihách je možno nalézti další poučení i jiné konstrukce.

I. *W. Fiedler*: Cyklographie oder Construktion der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugelsysteme, Leipzig 1882.

II. *V. Jarolímek - B. Procházka*: Deskriptivní geometrie pro vysoké školy technické, Praha 1909.

III. *F. Kadeřávek - J. Klíma - J. Kounovský*: Deskriptivní geometrie Praha 1928, I. a II. díl.

IV. *E. Müller - J. L. Krames*: Vorlesungen über darstellende Geometrie, II. — Die Zyklographie, Leipzig u. Wien 1929.

V. *J. Sobotka*: Deskriptivní geometrie promítání paralelního, Praha 1906.

VI. *L. Seifert*: Cyklografie, Praha 1948 (v tisku).

Vysvětlení zkratek.

Dg VI—VII	=	J. Klíma - V. Ingriš: Deskriptivní geometrie pro VI. a VII. třídu reálek, 2. vyd. (JČMF) 1947.
GV	=	J. Holubář - J. Vojtěch: Geometrie pro V. třídu středních škol, 7. vyd. (JČMF) 1947.
Lit.	=	knihy uvedené vzadu v seznamu použité literatury.
M. rov. k.	=	J. Holubář: O methodách rovinných konstrukcí (úloha Apolloniova a úlohy příbuzné), svazek 4. sbírky Cesta k vědění, JČMF 1940.
G. m.	=	geometrické místo.
$k(S)$	=	kružnice k se středem S; podobně $k(r)$ = kružnice k s poloměrem r; $k(S, r)$ = kružnice se středem S a s poloměrem r.

Indexy průmětů prostorových útvarů, zvláště kde bylo použito jen jednoho průmětu, jsou někdy vynechány pro zjednodušení a se zřetelem k příslušné planimetrické úloze.

OBSAH

Str.

Spisovatel	*Josef Holubář*
Název díla	*O rovinných konstrukcích odvozených z prostorových útvarů*
Vydala	*Jednota československých matematiků a fysiků*
roku	*1948*
v edici	*Cesta k vědění, svazek 47*
za redakce	*Dra R. Brdičky, Dra M. A. Valoucha, Dra F. Vyčichla a Dra O. Zicha*
Stran	*96*
Obrazců	*41*
Vytiskla	*Knihtiskárna Prometheus v Praze VIII*
Vydání	*první (1—4400)*
Cena	*Kčs 30,—*