Matematika hrou i vážně

Bohdan Zelinka (author): Matematika hrou i vážně. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1979.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403944

Terms of use:

© Bohdan Zelinka, 1979

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

MATEMATIKA HROU I VÁŽNĚ

44

Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

BOHDAN ZELINKA

Matematika hrou i vážně

PRAHA 1979
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

Recenzovali doc. RNDr. Lev Bukovský, CSc., a Jiří Steckbauer

© Bohdan Zelinka, 1979

Příroda hovoří řečí matematiky

(Galileo Galilei)

Matematika je věda, která dává
nejlepší příležitost pozorovat proces myšlení
a má tu přednost,
že při jejím pěstování nabýváme cviku
v metodě rozumového uvažování,
které může být potom používáno ke studiu
kteréhokoliv předmětu

(G. Pólya)

PŘEDMLUVA

Účelem této knížky je jednak poskytnout čtenáři rozptýlení, jednak však také mu dát aspoň přibližnou představu o struktuře moderní matematiky. Domnívám se, že pro studenty středních škol, kteří se chystají na vysokoškolské studium přírodovědného nebo technického směru, je to potřebné. Proto rozděluji knihu na kapitoly podle nejdůležitějších matematických oborů a o každém z nich se snažím uvést něco zajímavého, co by čtenáře upoutalo a současně mu dalo jistý obraz o příslušném oboru. Každá kapitola je doplněna úlohami, které — vzhledem k rekreačně matematickému charakteru knihy — jsou spíše hádankami než školními příklady.

Rozsah kapitol je nestejný. Nejrozsáhlejší jsou kapitoly o algebře a geometrii; to jsou obory, v nichž je možno sdělit dosti zajímavostí, aniž by se předpokládaly hlubší předběžné znalosti.

Různé matematické věty uvádím převážně bez důkazů — důkaz předkládám pouze tehdy, může-li být pokládán za zajímavý. Rovněž jsem vždy nemohl zcela dbát na přesné matematické vyjadřování a definice; snažil jsem se spíše o názorný popis. Myslím, že to odpovídá charakteru publikace, která není učebnicí, ale sbírkou zajímavostí.

Kniha vznikla na základě různých pramenů; jejich seznam je uveden. Některé úlohy jsem získal ústním podáním bez citace pramenů, proto se omlouvám těm autorům, které jsem možná v seznamu literatury nejmenoval.

Byl bych rád, kdyby tato knížka ve čtenářích posílila zájem o matematiku a zbavila je jistého strachu, který stále ještě tato věda v lidech vyvolává.

V Liberci 23. prosince 1977.

BOHDAN ZELINKA

ÚVOD
MATEMATIKA NENÍ JEN POČÍTÁNÍ

Mnozí lidé si představují matematiku jen jako počítání a matematiky jako počtáře. Že tomu ve skutečnosti tak docela není, můžeme si snadno uvědomit, když víme, že do matematiky patří i geometrie; v ní je přece mnoho věcí, u nichž nejde o žádné počty. Však také název této vědy je odvozen z řeckého „mathéma“, což neznačí „počítati“ ani „číslo“, ale — „učení“. Matematika je tedy jakési obecné učení o věcech našeho světa, a to učení abstrahující od jednotlivostí a zaměřující se na obecné rysy pojmů a vztahů mezi nimi. Zkoumá-li například lineární funkce, zkoumá je jako takové a nestará se o to, zda jde o velikost dráhy rovnoměrného pohybu kosmické rakety v závislosti na čase nebo o množství sebraných brambor v závislosti na počtu lidí tyto brambory sbírajících.

Střední škola podává studentům určitý ucelený úsek matematiky. Tato ucelenost může být považována za klad, má však i záporný rys; student nemá představu o tom, co v té matematice ještě může být kromě toho, co on zná. Má snad jakési představy o tom, že existuje diferenciální a integrální počet, což jsou prý věci nesmírně těžké. Přijde-li pak na vysokou školu, je vyděšen už samotnými názvy matematických oborů, o nichž dříve neměl tušení a jimiž se nyní bude muset zabývat.

Abyste tedy měli jakous takous představu o tom, jak matematika vypadá, je tato knížka rozdělena na kapitoly podle hlavních matematických oborů. Samozřejmě zde nejde o učebnici; je to jen výběr takových věcí z jednotlivých oborů, které by pro vás mohly být zajímavé. Je to něco podobného jako výlet do cizího města. Při něm si všímáme historických památek a jiných významných staveb, například divadel, obchodních domů a restaurací. Nastěhujeme-li se do toho města, vidíme je už zcela jinak — všímáme si prozaických věcí, jako je opravna obuvi, holič nebo zubní lékař. Tato knížka je jen výletem do světa matematiky. Budete-li jednou matematiku studovat, najdete v ní mnoho věcí, které byste dnes jistě pokládali za nezáživné a v takovéto knížce je odmítali číst, ale i na ně si zvyknete a najdete i v nich určitý půvab, stejně jako jste si zvykli na město či vesnici, kde bydlíte, i když třeba neoplývá pamětihodnostmi.

Vydejte se tedy na výlet matematickým světem.

I. KAPITOLA

TEORIE MNOŽIN A MATEMATICKÁ LOGIKA

Vyprávění o různých oborech matematiky začneme tím, že si něco řekneme o dvou jejích oborech, pro něž se někdy užívá souhrnného názvu základy matematiky. Je to teorie množin a matematická logika.

Názvy někdy matou. Pod slovem základy si představujeme obvykle to nejlehčí, co v daném oboru existuje. Je-li někdo odborníkem v základech matematiky, může to u nezasvěcených vyvolat dojem, že jde o začátečníka, který dosud nedokázal do matematiky hlouběji proniknout. To je ovšem veliký omyl. Zde slovo základy vyjadřuje něco podobného jako základy stavby. Postavit základy domu rozhodně není lehčí než postavit střechu; naopak je to práce, na níž závisí osud celé stavby. Jsou-li základy postaveny špatně, dům se zřítí a sebedokonalejší střecha jej nezachrání. A tak i moderní matematiku lze přirovnat k stavbě spočívající na základech, jimiž jsou právě zmíněné dvě disciplíny.

Je to zcela pochopitelné. Není matematického oboru, v němž bychom se nesetkali s pojmem množiny, ať už jde o množinu čísel, bodů, funkcí či čehokoliv jiného. A že se každá matematická úvaha musí řídit logickými pravidly, je také jistě každému jasné.

S pojmem množiny jste se již seznámili ve škole. Se slovem množina bylo až donedávna možno se setkat pouze v odborné matematické literatuře. Teprve v poslední době, díky modernizaci školního vyučování matematice, proniklo i do novin a dokonce i do televizních her. V jedné hře například dědeček odmítá prosbu svého vnuka, aby mu pomohl s úkolem z matematiky, slovy: „Tomu já nerozumím, to jsou množiny.“ Pro nematematiky se množina stala strašákem; pokládají ji za poslední výkřik matematiky, pro prostého člověka zcela nepochopitelný. Vy už víte, že to s tou nepochopitelností není tak zlé; základní pojmy jako sjednocení a průnik vám jistě nedělají těžkosti. A množina také není v matematice ničím novým; tohoto pojmu se běžně užívá už mnoho desítek let.

Ovšem ona úděsnost slova množina plyne hlavně z toho, že se v češtině tohoto slova používá pouze jako matematického termínu; v běžné řeči se toto slovo prostě nevyskytuje (nebo alespoň nevyskytovalo, dokud se nezačalo diskutovat o modernizaci školské matematiky). V jiných jazycích je tomu jinak. V tenisu i jiných sportech se i u nás užívá slova set (i když se prosazuje český výraz sada). Je to slovo anglické; v angličtině se ho také užívá pro soupravu nějakých předmětů (například „coffee set“ je souprava nádobí na kávu) a jakožto matematický termín značí množinu. Rovněž se u nás často používalo francouzského slova ensemble pro soubor (pěvecký, taneční nebo divadelní); ve francouzské matematické terminologii zase označuje množinu. Ruština má pro množinu výraz množestvo; i s ním jste se jistě setkali v hodinách ruštiny, aniž by vám to připomnělo nějakou matematiku.

Angličané, Francouzi a Rusové se tedy nemusejí děsit slova označujícího množinu. A proč vlastně se u nás zavedlo ono tajemné slovo? Původně se užívalo termínu množství, což je docela běžné slovo. Jsou s ním ovšem potíže. Tímto slovem jsme zvyklí označovat nikoliv to, co by odpovídalo matematickému termínu množina, ale spíše kvantitu něčeho, a to zejména nějaké látky (například mluvíme o množství alkoholu v krvi). I gramaticky je nevýhodné tím, že se u něho těžko rozlišují jednotlivé pády a těžko by se od něho odvozovalo přídavné jméno. Existuje například množinová topologie, ale výraz „množstvová topologie" by jistě našim uším nezněl příjemně. Máme tedy množiny; lidé zběhlí v matematice jsou na to zvyklí, a ani ostatní by se toho slova nemuseli bát.

Že množinu nelze definovat, to snad také chápete. Definujeme-li nějaký pojem, musíme v definici použít jiných pojmů, které už známe. Nelze použít „definice kruhem", to jest definovat například pojem A pomocí pojmu B, pojem B pomocí pojmu C a pojem C opět pomocí pojmu A. Pak bychom nevěděli ani co je A, ani co je B, ani co je C. Do nekonečna také jít nemůžeme, musíme se tedy při definování někde zastavit a určité pojmy prostě ponechat nedefinované. To jsou pak takzvané základní pojmy — v matematice je to například číslo, bod, přímka, rovina a také množina. Tyto pojmy nám prostě musejí být nějak intuitivně jasné; doufám, že pojem množiny vám jasný je.

Teorie množin je vybudována axiomaticky. Existují dva systémy axiomů této teorie, a to systém Zermelův-Fraenkelův a Bernaysův-Gödelův. Nebudeme je zde popisovat; soustředíme se jen na některé zajímavosti z teorie množin.

Logika byla známa již ve starověkém Řecku; zabýval se jí především známý filozof Aristotelés. Ve středověku se aristotelovská logika stala základem takzvané scholastiky, která především sloužila teologii a vlastní logice mnoho nepřinesla. Teprve v novověku se začalo v logice užívat matematických metod a vznikla tak matematická logika. Matematika s logikou tedy těsně souvisí. Matematika, jako všechny ostatní vědy, užívá logiky, na druhé straně však také logika užívá matematiky. Dnes je matematická logika obsáhlým oborem a značně ovlivňuje nejen teoretickou matematiku, ale i nauku o samočinných počítačích — informatiku.

Uveďme si některé zajímavosti z teorie množin a matematické logiky.

NENÍ NEKONEČNO JAKO NEKONEČNO

Dvě množiny A a B se nazývají ekvivalentní, jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení množiny A na množinu B. Je zřejmé, že dvě konečné množiny jsou ekvivalentní právě tehdy, mají-li stejný počet prvků. Můžeme si představit množinu A jako množinu mužů a B jako množinu žen v tanečním sále. Jestliže muži vyzvou ženy k tanci, vznikne tím určité zobrazení z množiny A do množiny B; obrazem každého tančícího muže v tomto zobrazení je jeho taneční partnerka. Aby toto zobrazení bylo skutečně vzájemně jednoznačným zobrazením množiny A na množinu B, je nutné, aby všichni muži i všechny ženy tančili; samozřejmě vždy jeden muž s jednou ženou, tanec například s koštětem se nepřipouští. To je ovšem možné právě tehdy, je-li stejný počet mužů i žen.

Jak je to s nekonečnými množinami? Těžko si dovedeme představit sál s nekonečně mnoha muži a nekonečně mnoha ženami. Pokud si jej však přece představíme, zdálo by se nám, že by tu neměly být žádné potíže. Je-li nekonečně mnoho žen, neměla by žádnému muži chybět tanečnice, a je-li nekonečně mnoho mužů, neměla by žádná žena sedět. A přece tomu tak nemusí být.

Nechť A je množina všech přirozených čísel; je to zřejmě množina nekonečná. Nechť B je množina všech nekonečných posloupností, jejichž členy jsou rovny 0 nebo 1; i takovýchto posloupností je zřejmě nekonečně mnoho. Zobrazit vzájemně jednoznačně množinu A na množinu B tedy znamená sestavit nekonečnou posloupnost

$$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4, \ldots,$$

jejíž členy jsou prvky množiny B, tedy nekonečné posloupnosti nul a jedniček, a v níž se každý prvek množiny B vyskytuje právě jednou. Takováto posloupnost vlastně představuje posloupnost obrazů jednotlivých přirozených čísel v našem zobrazení.

Předpokládejme, že taková posloupnost existuje. Pro každé přirozené číslo n prvky posloupnosti $\boldsymbol{b}_n$ označíme $b_{n1}, b_{n2}, b_{n3}, b_{n4}, \ldots$. Máme tedy

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{b}_1\colon\ b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14}, \ldots \\ \boldsymbol{b}_2\colon\ b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{24}, \ldots \\ \boldsymbol{b}_3\colon\ b_{31}, b_{32}, b_{33}, b_{34}, \ldots \\ \boldsymbol{b}_4\colon\ b_{41}, b_{42}, b_{43}, b_{44}, \ldots \\ \vdots \end{array}$$

Nyní sestrojíme určitou posloupnost $\boldsymbol{c}$; její členy budou $c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots$ a budou definovány tak, že

$$c_n = 1 - b_{nn}$$

pro každé přirozené číslo n. Tedy je-li $b_{nn} = 0$, je $c_n = 1$, a je-li $b_{nn} = 1$, je $c_n = 0$. Posloupnost $\boldsymbol{c}$ je tedy opět nekonečná posloupnost z nul a jedniček; znamená to $\boldsymbol{c} \in B$ a tedy $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}_q$ pro nějaké přirozené číslo q (protože předpokládáme, že každý prvek z B se vyskytuje právě jednou mezi členy posloupnosti $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4, \ldots$). Uvažujme q-tý člen posloupnosti $\boldsymbol{c}$, tedy c_q. Podle definice posloupnosti $\boldsymbol{c}$ je

$$c_q = 1 - b_{qq}.$$

Protože však $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}_q$, je c_q roven q-tému členu posloupnosti $\boldsymbol{b}_q$, tedy

$$c_q = b_{qq}.$$

Obě rovnosti mohou být splněny současně pouze tehdy, je-li $c_q = \frac{1}{2}$; to však není možné, protože c_q musí být rovno 0 nebo 1.

Vidíme tedy, že ať sestavíme jakoukoliv posloupnost prvků množiny B, vždy se najde prvek množiny B, který „se do ní nevejde". Množiny A a B jsou obě nekonečné, množina B je však jaksi „více nekonečná" než množina A.

Na posloupnosti z nul a jedniček jsme se omezili jen kvůli jednoduchosti. Kdybychom za množinu B vzali množinu všech nekonečných posloupností přirozených čísel, došli bychom zřejmě ke stejnému výsledku.

Ekvivalence množin, jak byla výše definována, umožňuje roztřídit všechny množiny do tříd tak, že dvě množiny patří do téže třídy právě tehdy, jsou-li spolu ekvivalentní. Každé této třídě je vzájemně jednoznačně přiřazeno takzvané kardinální číslo. Mezi kardinální čísla patří všechna nezáporná celá čísla; například číslo 5 je takto přiřazeno třídě všech pětiprvkových množin. Tyto množiny jsou navzájem ekvivalentní a nejsou ekvivalentní se žádnou množinou jinou než pětiprvkovou. Pro nekonečné množiny ovšem musíme zavést takzvaná nekonečná kardinální čísla. Třídě ekvivalentních množin, která obsahuje množinu všech přirozených čísel, přiřazujeme kardinální číslo $\aleph_0$.

Znak $\aleph$ je hebrejské písmeno alef. Je to první písmeno hebrejské abecedy; neznamená A, jak by se nám mohlo zdát, ale pouze ráz, to jest jakési „hm“, podobně jako bulharské tvrdé jer nebo rumunské Ă. Zato však je mezi hebrejskými písmeny výraznou individualitou; jednotlivá písmena této abecedy jsou si značně podobná a mohou se snadno zaměnit, avšak alef se od ostatních rozezná snadno.

Index nula ve výrazu $\aleph_0$ značí, že jde o nejmenší nekonečné kardinální číslo; nejmenší v tom smyslu, že každá podmnožina množiny všech přirozených čísel buď je ekvivalentní s touto množinou (říkáme, že má mohutnost $\aleph_0$), nebo je konečná. Množinám mohutnosti $\aleph_0$ říkáme také spočetné množiny. Souvisí to s tím, co jsme si říkali o uspořádání prvků takovýchto množin do posloupnosti.

Ukážeme si, že i množina všech kladných racionálních čísel je spočetná. Provedeme to tak, že si sestrojíme posloupnost obsahující všechna tato čísla.

Každé kladné racionální číslo lze vyjádřit jako podíl dvou přirozených čísel, tedy jako zlomek a/b, kde a a b jsou přirozená čísla. Požadujeme-li navíc, aby a a b byla nesoudělná čísla, tedy aby zlomek a/b nebylo možno krátit (v tom případě říkáme, že a/b je zlomek v základním tvaru), je toto vyjádření jednoznačné. Výškou zlomku a/b budeme nazývat číslo $a + b$.

Nejmenší možná výška zlomku s kladným čitatelem i jmenovatelem je 2 a má ji pouze zlomek $\frac{1}{1}$, což je číslo 1. Tedy toto číslo bude prvním členem naší posloupnosti. Výšku 3 mají zlomky $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{1}$; ty tedy budou druhým a třetím členem posloupnosti. Výšku 4 mají zlomky $\frac{1}{3}$ a $\frac{3}{1}$ $\left(\text{zlomek } \frac{2}{2} \text{ není v základním tvaru}\right)$; bude to čtvrtý a pátý člen posloupnosti. Dále budou následovat zlomky výšky 5, to jest $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}$, potom zlomky výšky 6, tedy $\frac{1}{5}, \frac{5}{1}$, zlomky výšky 7, to jest $\frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, \frac{6}{1}$ a tak dále. Vidíme, že takto postupně zařadíme do posloupnosti všechna kladná racionální čísla. Množina všech kladných racionálních čísel je tedy spočetná. Snadno bychom také dokázali, že i množina všech racionálních čísel je spočetná; stačí naši posloupnost upravit tak, že před první člen dáme nulu a za každý člen dáme číslo k němu opačné.

Jak je to však s množinou všech reálných čísel? Víme, že reálné číslo může mít nekonečný desetinný rozvoj; pak mu je tedy přiřazena jistá nekonečná posloupnost číslic. Z toho potom plyne, že množina reálných čísel je ekvivalentní množině *B*, o níž jsme mluvili na začátku tohoto paragrafu. (Důkaz je ovšem trochu složitější.) Tato množina má tedy jinou mohutnost než $\aleph_0$; říká se jí mohutnost kontinua. Rovněž množina všech iracionálních čísel má tuto mohutnost. Dalo by se tedy říci, že iracionálních čísel je „více“ než čísel racionálních.

Existuje nějaká nekonečná podmnožina množiny reálných čísel, která by nebyla ani spočetná, ani by neměla mohutnost kontinua? Takzvaná Cantorova hypotéza kontinua říká, že ne. Je to ovšem pouze hypotéza čili domněnka; zatím nebyla dokázána. Avšak K. Gödel dokázal, že ji nelze vyvrátit pouze pomocí axiomů teorie množin, a P. Cohen a československý matematik P. Vopěnka (vzájemně nezávisle) dokázali, že ji pouze pomocí těchto axiomů nelze dokázat.

POTENČNÍ MNOŽINA

Je-li dána množina M, pak množinu všech jejích podmnožin označíme $P(M)$ a nazveme ji potenční množinou množiny M. Je-li M konečná a má-li n prvků, pak $P(M)$ má 2^n prvků, což je více než n, tedy množina $P(M)$ není ekvivalentní množině M. Platí to však i pro nekonečné množiny.

Nechť M je libovolná množina a předpokládejme, že její potenční množina je s ní ekvivalentní. Znamená to, že existuje vzájemně jednoznačné zobrazení φ množiny M na množinu $P(M)$. Každému prvku $x \in M$ je tedy vzájemně jednoznačně přiřazena nějaká podmnožina $\varphi(x)$ množiny M. Poněvadž $\varphi(x)$ je podmnožina množiny M, můžeme se ptát, zda $x \in \varphi(x)$ nebo $x \notin \varphi(x)$. Označme N množinu všech prvků $x \in M$ takových, že $x \notin \varphi(x)$. Množina N je podmnožinou množiny M a musí být tedy obrazem některého prvku $y \in M$ v zobrazení φ, tedy $N = \varphi(y)$ pro nějaké $y \in M$. Zkoumejme nyní, zda y patří či nepatří do N. Je-li $y \in N$, znamená to, že $y \notin \varphi(y)$; protože však $N = \varphi(y)$, dostáváme spor. Je-li však $y \notin N$, pak $y \notin \varphi(y)$ a tedy by mělo být $y \in N$. Z toho plyne, že žádané zobrazení φ nemůže existovat a množina $P(M)$ má tedy jinou mohutnost než množina M.

Kardinální čísla obecně zapisujeme malými písmeny staré německé abecedy (švabachu). Jsou-li $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ dvě kardinální čísla, pak píšeme $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ právě tehdy, existuje-li množina mohutnosti $\mathfrak{b}$, která obsahuje jako podmnožinu nějakou množinu mohutnosti $\mathfrak{a}$. Je-li $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ a $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$, pak píšeme $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ a říkáme, že $\mathfrak{a}$ je menší než $\mathfrak{b}$, popřípadě, že $\mathfrak{b}$ je větší než $\mathfrak{a}$.

Potenční množina $P(M)$ obsahuje jako podmnožinu množinu všech jednoprvkových podmnožin množiny M; tato množina je zřejmě ekvivalentní s M a tedy mohutnost množiny $P(M)$ je v tomto smyslu větší než mohutnost množiny M. Ke každé množině lze tedy sestrojit množinu větší mohutnosti, tedy neexistuje žádné největší kardinální číslo a kardinálních čísel (i těch nekonečných) je nekonečně mnoho.

PARADOX KRÉŤANA

Ve starověkém Řecku měli obyvatelé ostrova Kréty pověst lhářů. Vznikl tehdy logický problém: Kréťan Epimenidés prohlásil, že všichni Kréťané jsou lháři. Co z toho máme vyvozovat? Je-li to pravda, pak je lhářem i Epimenidés a jeho výrok je lží.

Zde ovšem můžeme připustit i to, že Epimenidovo tvrzení je lež; existují Kréťané, kteří nelžou, avšak Epimenidés mezi ně nepatří. Můžeme však vyslovit přesnější formulaci tohoto paradoxu: V obci je holič, který holí všechny muže z obce, kteří se sami neholí, a kromě nich už neholí nikoho jiného. Je nyní otázka, zda se tento holič sám holí či nikoliv. Jestliže se sám holí, pak tedy nepatří mezi muže z obce, kteří se sami neholí, z čehož by plynulo, že se neholí. Jestliže se sám neholí, je jedním z mužů z obce, kteří se sami neholí, a tedy se holí.

Podobně ve slavném Cervantesově románu „Důmyslný rytíř don Quijote de la Mancha“ si můžeme přečíst příběh, který je další formulací tohoto paradoxu. Přes řeku vede most a u něho stojí šibenice. Každý pocestný, který přechází most, musí pod přísahou sdělit, co chce na druhé straně dělat. Zjistí-li se, že lhal, je pověšen na zmíněné šibenici. Jeden pocestný prohlásil, že se jde dát oběsit na oné šibenici. Tedy nebude-li oběšen, lhal a měl by být oběšen. Bude-li oběšen, mluvil pravdu a neměl by být oběšen. (Bylo by asi vhodné ještě dodat, že šibenice sloužila výlučně k věšení „mostních lhářů“; jinak by totiž pocestný mohl být oběšen za něco jiného.)

Přejděme nyní k ryze matematické variantě tohoto paradoxu. Prvkem množiny může být cokoliv, tedy i množina. Je tedy také možné, aby některá množina byla svým vlastním prvkem. Nechť tedy M je množina všech množin, které neobsahují sebe samu jako prvek. Jestliže nyní $M \in M$, pak M obsahuje sebe samu jako prvek, a tedy $M \notin M$. Jestliže $M \notin M$, pak M neobsahuje sebe samu jako prvek a musí být $M \in M$. (Trochu to připomíná úvahu z předešlého paragrafu.)

Znamená to tedy, že celá teorie množin je postavena na hlavu? Nikoliv; axiomatika této teorie je vybudována tak, že se vyrovnává i s tímto paradoxem. Především ne každý soubor nějakých objektů se nazývá množinou. Například nemluvíme o množině všech množin, ale o třídě všech množin. Třída je obecnější pojem než množina; každá množina je třídou, ale ne každá třída je množinou. Nebudeme zde přesně popisovat, kdy mluvíme o množině a kdy pouze o třídě. Stačí jen uvést, že množině lze přiřadit její mohutnost, zatímco například u třídy všech množin to nelze; nemůžeme přece vědět, jaké všemožné množiny je možno zavést. (Něco jiného je například množina všech podmnožin dané množiny.) Rovněž tedy nemluvíme o množině všech množin, které nejsou prvkem sebe samé. Podrobnější vysvětlování této problematiky by překročilo rámec této populárně naučné publikace.

Zmíníme se jen ještě o podobném paradoxu, který lze zařadit do matematické logiky. Je jistě možné některá přirozená čísla jednoznačně vyjádřit výrazem v češtině, který obsahuje méně než třicet slov. Například číslo 2 lze vyjádřit jako „dvě“ nebo „jediné sudé prvočíslo“.

Českých slov je konečně mnoho, tedy českých výrazů o méně než třiceti slovech je také konečný počet. Přirozených čísel je nekonečně mnoho, tedy určitě existují přirozená čísla, která nelze požadovaným způsobem vyjádřit. Každá neprázdná podmnožina množiny všech přirozených čísel obsahuje číslo, které je nejmenším číslem z této množiny. (Říkáme, že množina všech přirozených čísel je dobře uspořádaná; například množina všech kladných racionálních čísel tuto vlastnost nemá.) Existuje tedy nejmenší přirozené číslo, které nelze jednoznačně vyjádřit výrazem v češtině o méně než třiceti slovech; toto číslo je právě jedno.

A teď se podívejme na výraz „nejmenší přirozené číslo, které nelze jednoznačně vyjádřit výrazem v češtině o méně než třiceti slovech". Je to výraz v češtině, který obsahuje méně než třicet slov. Jak je to tedy s naším číslem? Dá se vyjádřit požadovaným způsobem nebo nedá?

Logika se vyrovnává s tímto paradoxem tím, že mluví o jazyku a o metajazyku. Vyjadřujeme-li zde nějaká přirozená čísla slovními výrazy, mluvíme jazykem; vypovídáme-li něco o tomto vyjadřování, mluvíme metajazykem. Nenechme se mýlit tím, že v obou případech používáme češtiny; z hlediska logiky jde o dva různé jazyky. Něco podobného jsou věty „Praha je hlavní město Československa" a „Praha je podstatné jméno rodu ženského". Pokaždé mluvíme o něčem jiném; poprvé o městě Praze, podruhé o slově „Praha", přičemž o slově „Praha" mluvíme metajazykem, do něhož toto slovo nepatří.

Dítě vychované modernizovanou matematikou jede s matkou vlakem. Náhle se podívá z okna a vykřikne: „Mami, tamhle je množina kraviček!" Matka vyhlédne z okna a opáčí: „Vždyť tam žádné kravičky nejsou!" Dítě se nedá zmást: „Ale ano, je tam prázdná množina kraviček!"

Tato anekdota v nás vzbudí jistě úvahy o podivuhodných vlastnostech prázdné množiny. Vidíme, že to může být zrovna tak množina kraviček jako množina čehokoliv jiného. A zde se setkáváme s dalším logickým paradoxem.

V logice se mluví o obsahu a rozsahu pojmu. Obsah pojmu je souhrn jeho vlastností, jeho rozsah je souhrn všech exemplářů tohoto pojmu. Říká se, že dva pojmy mají stejný obsah právě tehdy, mají-li stejný rozsah; pak jde vlastně o tentýž pojem.

Kentaury známe z řecké mytologie. Byly to zvláštní bytosti, napůl lidé a napůl koně. Byli to tvorové divocí a necivilizovaní, byly však mezi nimi i takové výjimky jako vzdělaný a moudrý Kentaur Cheirón, učitel Héraklův, kterého Héraklés nešťastným omylem střelil šípem namočeným do jedovaté krve Hydry lernejské. Jinou bájnou bytostí je jednorožec, kterého můžeme vidět jako štítonoše ve znaku Velké Británie; tvor podobný koni, ale s jedním rovným rohem uprostřed čela.

Vezměme si nyní pojmy „Kentaur" a „jednorožec". Jejich obsah, tedy souhrn vlastností, jistě není tentýž; Kentauři přece neměli žádný roh. Přitom však oba pojmy mají stejný rozsah — prázdnou množinu. Neexistují přece ani Kentauři, ani jednorožci. Jak to však potom je? Je Kentaur a jednorožec totéž?

Tento paradox lze vysvětlit tím, že pojem nemusí vždy vyjadřovat nějaký existující objekt. Kdyby tomu tak bylo, byla by naše kultura ochuzena o bájesloví a vlastně i o značnou část krásné literatury. Vždyť třeba Čapkovi mloci nebo továrna na absolutno jsou pojmy známé tisícům čtenářů a přitom ve skutečnosti neexistují. Spíše než skutečnou věc vyjadřuje pojem představu lidí o této věci a může vyjádřit i představy o věcech neexistujících. Tvrzení, že pojmy mají stejný obsah právě tehdy, mají-li stejný rozsah, není tedy pravdivé.

PARADOX HOLOHLAVÉHO

V matematice se používá principu matematické indukce, který jistě znáte. Máme-li dokázat, že nějaké tvrzení platí pro všechna přirozená čísla, stačí, když dokážeme, že platí pro číslo 1 a že z předpokladu, že tvrzení platí pro číslo n, plyne, že platí i pro číslo $n + 1$.

Jestliže nějaký člověk není holohlavý a vytrhneme-li mu jeden vlas, nestane se tím holohlavým. Předpokládáme-li, že pro nějaké přirozené číslo n platí, že po vytržení n vlasů se takový člověk nestane holohlavým, pak tedy můžeme tvrdit, že se jím nestane ani po vytržení dalšího vlasu, tedy vytrhneme-li mu celkem $n + 1$ vlasů. Podle principu matematické indukce tedy člověk, který není holohlavý, se jím nestane ani po vytržení libovolného počtu vlasů.

Výsledek to je jistě absurdní. Kde je chyba? V principu matematické indukce jistě ne. Je tedy ve výchozím předpokladu. Nelze tvrdit, že člověk, který není holohlavý, se po vytržení jednoho vlasu nestane holohlavým.

Teď se budete asi divit, jak je to možné. Jde však o to, že každý pojem, s nímž v matematice pracujeme (kromě základních pojmů, o nichž jsme už mluvili), musí být přesně definován. Chceme-li vyslovovat nějaká matematická tvrzení o holohlavém člověku, musíme si tento pojem definovat. Definujeme-li holohlavého jako člověka, který nemá vůbec žádné vlasy, pak člověk s jediným vlasem není holohlavý, ale po vytržení jednoho vlasu se jím stane. Definujeme-li holohlavého třeba jako člověka, který má nejvýše sto vlasů, pak člověk, který má 101 vlasů, není holohlavý a stane se jím po vytržení jednoho vlasu.

Úlohy

1. Algebraické číslo je takové číslo, které je kořenem některé algebraické rovnice s celočíselnými koeficienty, to jest rovnice

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

kde n je nějaké přirozené číslo a koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou celá čísla. Patří mezi ně všechna racionální čísla. Každé racionální číslo lze psát ve tvaru zlomku a/b, kde a a b jsou celá čísla, tedy takové číslo je kořenem lineární algebraické rovnice

$$bx - a = 0.$$

Mezi algebraická čísla však patří i některá čísla iracionální; například $\sqrt{2}$ je číslo iracionální a přitom je to kořen rovnice

$$x^2 - 2 = 0.$$

Ovšem existují i reálná čísla, která nejsou algebraická; říkáme jim transcendentní. Patří mezi ně například Ludolfovo číslo π a Eulerovo číslo e (základ přirozených logaritmů).
Jak je to s množinou všech reálných algebraických čísel?
Je spočetná, či nikoliv?

2. Kdesi v Orientě je Město Mudrců. Svůj název má od toho, že jeho obyvatelé vědí všechno na světě kromě jediné věci: nikdo z nich neví, zda jeho manželka je věrná (o cizích manželkách to ví). Jednoho dne vydal sultán ferman, v němž oznamoval, že se v Městě Mudrců vyskytuje ženská nevěra, a nařizoval, aby každý muž z tohoto města, jakmile u své ženy zjistí nevěru, ji ještě téhož dne zabil. Třicátého dne po vydání fermanu všichni manželé nevěrných žen své manželky zabili. Kolik bylo nevěrných manželek?

3. Na ostrově žijí dva domorodé kmeny: Poctivci a Lháři. Poctivci vždy mluví pravdu, Lháři vždy lžou. Cestovatel se zeptal jednoho domorodce, ke kterému kmeni patří. Když domorodec odpověděl, cestovatel ho přijal za průvodce. Cestou potkali dalšího domorodce. Cestovatel poslal průvodce, aby se ho zeptal, kdo je. Průvodce tak učinil a potom cestovateli sdělil, že druhý domorodec tvrdil, že je Poctivec. Byl průvodce Poctivec, nebo Lhář?

4. Vězeň je v cele, která má dva východy. Oba jsou střeženy žalářníky, z nichž jeden vždy mluví pravdu, druhý vždy lže. Jeden z východů vede na svobodu, druhý na popraviště. Panovník dal vězni milost, ale pouze pod podmínkou, že vězeň vyjde z vězení správným východem; vyjde-li východem, který vede na popraviště, bude popraven. Přitom smí jednomu ze žalářníků položit jedinou otázku. Jakou otázku položí, když neví, který ze žalářníků je pravdomluvný a který lhář?

5. Král měl tři dcery: Anežku, Bertu a Cecílii. Anežka mluvila vždy pravdu, Berta vždy lhala a Cecílie někdy mluvila pravdu, někdy lhala. Ke dvoru přijel cizí princ a žádal krále o ruku Anežky. Král ho zavedl do komnaty, kde všechny tři dcery seděly vedle sebe. Slíbil, že mu Anežku dá, pokud pozná, která z nich to je. Přitom smí každé položit jedinou otázku. Princ se každé z princezen zeptal, jak se jmenuje ta, která sedí uprostřed. Princezna sedící vlevo odpověděla, že Anežka, princezna sedící uprostřed řekla, že Berta, princezna sedící vpravo odvětila, že Cecílie. Na základě těchto odpovědí princ Anežku poznal a byla slavná svatba. Jak princ uvažoval?

6. Odsouzenec k smrti žádal krále o milost. Král odpověděl, že o milosti rozhodne los. Odsouzenec dostane sáček, v němž budou dvě kuličky: bílá a černá. Vytáhne-li bílou kuličku, bude volný, vytáhne-li černou, bude popraven. Hodný žalářník však vězni prozradil, že se ho král chystá podvést: v sáčku budou obě kuličky černé. Přesto však odsouzenec dosáhl toho, že byl omilostněn. Jak to udělal?

7. Pět rybářů se vydalo spolu na lov; jmenovali se Kapr, Mří

nek, Vokoun, Cejn a Štika. Každý z nich ulovil jednu rybu; tyto ryby byly náhodou zase kapr, mřínek, okoun, cejn a štika. Nikdo však nechytil tu rybu, jejíž jméno nesl. Pan Cejn nechytil štiku a pan Štika nechytil cejna. Štiku ulovil jmenovec ryby, kterou chytil pan Vokoun; nebyl to kapr. Jakou rybu ulovil pan Kapr?

Úlohám tohoto typu se říká zebry. Tento název pochází od jedné klasické úlohy, která je však složitější než úloha o panu Kaprovi. Vystupují v ní příslušníci různých národů, z nichž každý chová nějaké zvíře a má svůj oblíbený nápoj. Úloha je komplikována tím, že všichni bydlí v jedné ulici a jsou o některých uvedeny údaje, zda bydlí nalevo či napravo od sebe. Úlohou je zjistit, kdo chová zebru. Přesné znění úlohy si autor této knížky bohužel nepamatuje.

8. Některé předměty mající vlastnost X mají také vlastnost Y. Ke každému předmětu majícímu vlastnost X existuje předmět, který nemá ani vlastnost Y ani vlastnost Z. Dokažte, že existují předměty, které nemají ani vlastnost X, ani vlastnost Z.

9. Ve škole jsou tři zájmové kroužky: chemický, šachový a pěvecký. Každý žák ve třídě chodí do některého z nich. Do chemického chodí šestnáct žáků, do šachového sedmnáct, do pěveckého čtrnáct žáků. Osm žáků chodí současně do chemického i šachového kroužku, šest do chemického i pěveckého, čtyři do šachového i pěveckého. Tři žáci navštěvují všechny tři kroužky. Kolik je žáků ve třídě?

Řešení úloh

1. Množina všech reálných algebraických čísel je spočetná. Dokážeme to podobně jako u množiny všech racionálních čísel. Ke každému algebraickému číslu a najdeme algebraickou rovnici $\varrho(a)$, jejímž kořenem je číslo a. Výškou rovnice $\varrho(a)$ pak budeme nazývat součet absolutních hodnot jejích koeficientů; tedy je-li $\varrho(a)$ rovnice

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

bude výška $v(a)$ rovnice $\varrho(a)$ rovna

$$v(a) = |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n|.$$

Každá algebraická rovnice má konečnou výšku a konečný počet kořenů. Vezmeme tedy nejprve nejmenší číslo, které je výškou některé rovnice $\varrho(a)$ pro některé číslo a, a vypíšeme reálné kořeny všech rovnic $\varrho(a)$, které mají tuto výšku; bude jich konečný počet. Pak vezmeme druhou nejmenší výšku a provedeme totéž. Takto postupujeme, až vyčerpáme všechny výšky. Dostaneme nekonečnou posloupnost, která bude obsahovat všechna reálná algebraická čísla. Některá se v ní mohou opakovat, avšak vhodným vyškrtáváním členů dostaneme posloupnost, v níž se každé reálné algebraické číslo bude vyskytovat právě jednou. Tím je dokázáno, že množina všech reálných algebraických čísel je spočetná. (Konečná být nemůže, protože obsahuje jako podmnožinu množinu všech racionálních čísel.)

2. Úloha se řeší matematickou indukcí. Dokážeme tvrzení: Je-li počet nevěrných žen v Městě Mudrců roven n, pak budou zabity n-tého dne. Je-li $n = 1$, pak manžel nevěrné ženy ví, že všechny ženy ostatních mužů jsou věrné. Protože se však ze sultánova fermanu dověděl, že existuje alespoň jedna nevěrná žena, pozná, že to musí být ta jeho, a zabije ji hned prvního dne. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro $n = k$, kde k je nějaké přirozené číslo. Nechť počet nevěrných žen je $k + 1$. Manžel každé z nich ví o k nevěrných ženách ostatních mužů. Když tedy uplyne k dní, uvažuje takto: Dejme tomu, že moje žena je věrná. Pak existuje pouze k nevěrných žen. Tedy podle indukčního předpokladu by měly být zabity už včera. Protože se tak nestalo, je nevěrných žen nikoliv k, ale $k + 1$ a patří k nim i moje žena. Nato ji zabije, což mělo být dokázáno. Z tohoto tvrzení plyne, že nevěrných žen bylo třicet.

3. Je-li druhý domorodec Poctivec, odpoví na průvodcovu otázku pravdivě, že je Poctivec. Je-li Lhář, zalže, že je Poctivec. Toto je tedy jediná možná odpověď na průvodcovu otázku. Průvodce ji pravdivě reprodukoval, je tedy Poctivec.

4. Vězeň ukáže na některý východ a zeptá se jednoho ze žalářníků: „Jak by odpověděl druhý žalářník, kdybych se ho zeptal, zda tento východ vede na svobodu?“ Předpokládejme, že východ vede na svobodu. Jestliže dotázaný žalářník je pravdomluvný, pak druhý je lhář a odpověděl by, že ne. Pravdomluvný reprodukuje správně tuto odpověď a řekne ne. Jestliže dotazovaný je lhář, pak druhý je pravdomluvný a odpověděl by ano; dotazovaný lživě tuto odpověď reprodukuje jako ne.

V obou případech z odpovědi ne vězeň pozná, že východ vede na svobodu. Analogicky z odpovědi ano by usoudil, že východ vede na popraviště.

5. Nejprve princ zjistil, která princezna sedí uprostřed. Sama o sobě tvrdila, že je Berta. Nebyla to Anežka, protože ta by nemohla lhát, že je Berta. Nebyla to Berta, protože ta by neřekla pravdivě, že je Berta. Byla to tedy Cecílie. Princezna sedící vpravo tuto princeznu označila pravdivě jako Cecílii, je tedy Anežka.

6. Odsouzenec vytáhl jednu kuličku, nikomu ji neukázal a jakoby nedopatřením ji spolkl. Pak vyzval krále, aby se podíval, která kulička v sáčku zbyla. Byla to ovšem černá kulička. Král nemohl přiznat svůj podvod, proto musel připustit, že odsouzenec vytáhl bílou kuličku.

7. Sestavíme si takovouto tabulku:

	K	M	O	C	Š
K	—				
M		—			
V			—		
C				—	—
Š				—	—

Řádky značí rybáře, sloupce ryby. Znaménka minus značí případy, které jsou výslovně vyloučené. Zbývá údaj o tom, že štiku ulovil jmenovec ryby, kterou chytil pan Vokoun, a že tato ryba nebyla kapr. Štiku tedy neulovil pan Kapr a můžeme si do příslušného políčka napsat další minus. Neulovil ji ani pan Vokoun; nemohl být jmenovcem ryby, kterou sám chytil. Štiku tedy chytil pan Mřínek. Cejna mohl ulovit už jen pan Kapr nebo pan Vokoun. Kdyby ho chytil pan Vokoun, pak by pan Cejn chytil štiku, což není možné. Tedy cejna chytil pan Kapr. Výsledná tabulka pak vypadá takto:

	K	M	O	C	Š
K	—	—	—	+	—
M	—	—	—	—	+
V	—	+	—	—	—
C		—		—	—
Š		—		—	—

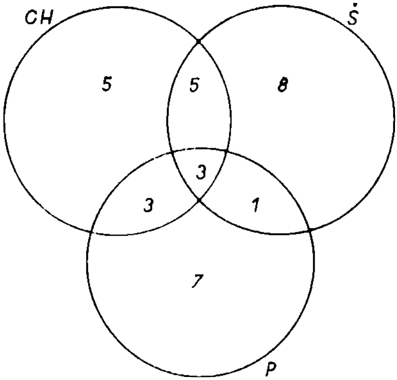
Nevíme, jaké ryby chytili pánové Cejn a Štika; v obou případech to mohl být kapr nebo okoun. Na to se však úloha neptá.

8. Nechť M je množina předmětů, které mají vlastnost X, a nechť N je množina předmětů, které nemají ani vlastnost Y, ani vlastnost Z. Nechť m je počet prvků množiny M a n počet prvků množiny N. Z textu je patrné, že $n \geqq m$. Pokud $n > m$, nemůže být $N \subset M$. Pokud $n = m$, pak může být $N \subset M$ právě tehdy, je-li $N = M$. To však není možné, protože existují předměty, které mají vlastnost X i Y, tedy patří do M a nepatří do N. Tedy případ $N \subset M$ je vyloučen. Existuje tedy alespoň jeden předmět, který patří do N a nepatří do M, tudíž nemá žádnou z vlastností X, Y, Z.

9. Sečteme nejprve počty žáků chodících do jednotlivých kroužků; dostaneme $16 + 17 + 14 = 47$. Při tomto sčítání jsme počítali dvakrát žáky, kteří chodí do dvou kroužků, a třikrát žáky, kteří chodí do tří kroužků. Odečteme tedy součet počtů žáků, kteří chodí do jednotlivých dvojic kroužků; dostaneme $47 - (8 + 6 + 4) = 29$. Žáky, kteří chodí do všech tří kroužků, jsme nyní počítali opět třikrát, tedy musíme ještě přičíst jejich počet a dostaneme $29 + 3 = 32$.

Použili jsme takzvaného principu inkluze a exkluze. Podle něho můžeme popsaným střídavým sčítáním a odčítáním postupovat v případě libovolného počtu kroužků, pokud pro každou vlastní podmnožinu množiny kroužků víme, kolik žáků navštěvuje všechny kroužky z této podmnožiny.

Úlohu můžeme také řešit pomocí takzvaného Vennova diagramu (obr. I.1). Nakreslíme si tři kruhy, které mají neprázdný průnik; každý z nich znázorňuje množinu všech žáků navštěvujících jeden kroužek (označení CH, $Š$, P). Do průniku všech tří kruhů napíšeme číslo 3, to jest počet prvků průniku všech tří množin. Do části roviny, která je společná kruhům CH a $Š$, ale nepatří do P, napíšeme 5; je to rozdíl počtu žáků, kteří chodí do obou zmíněných kroužků, a počtu žáků, kteří navště-



Obr. I.1

vují všechny tři kroužky. Analogicky pak napíšeme čísla 3 a 1. Od počtu žáků z chemického kroužku (což je 16) odečteme součet všech čísel, která jsou napsána v kruhu CH; dostaneme 5 a zapíšeme toto číslo do té části kruhu CH, která nepatří ostatním kruhům. Analogicky do $Š$ zapíšeme 8 a do P zapíšeme 7. Součet všech čísel zapsaných do obrázku je počet žáků ve třídě.

II. KAPITOLA

ALGEBRA A TEORIE ČÍSEL

Algebra byla původně pouze naukou o řešení rovnic. S jejími počátky se setkáváme už ve starém Řecku. Ve III. století před naším letopočtem žil Diofantos z Alexandrie, jehož jméno se nám zachovalo v termínu diofantická rovnice; je to rovnice, jejíž řešení se hledá v oboru celých čísel. O systematickém rozvoji algebry v antice (na rozdíl od geometrie) však mluvit nelze. Započali s ním až arabští matematikové v raném středověku. Samo slovo algebra pochází z názvu knihy „Hisab al-džebr val-muqabala“ (nauka o napravování a zjednodušování), kterou napsal Muhammad ibn Músá al-Chvárizmí v IX. století. Ono „napravování a zjednodušování“ znamená postup při řešení algebraické rovnice, jak jej známe ze školy. Poznamenejme, že ve Španělsku (pod vlivem Maurů) slovo „algebrista“ značilo napravovače zlomenin, což býval zpravidla také holič.

Později se našly způsoby řešení rovnic druhého a třetího stupně. Vzorec pro řešení kvadratické rovnice jistě znáte. Vzorec pro řešení kubické rovnice $x^3 + px = q$ se nazývá Cardanův vzorec podle H. Cardana (1501—1576); je to

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} - \frac{q}{2}}.$$

Dlouhou dobu se matematikové snažili získat podobné vzorce pro rovnice stupně vyššího než čtvrtého. Teprve E. Galois (1811—1832) a nezávisle na něm N. H. Abel (1802—1829) dokázali, že u takovýchto rovnic nelze vypočítat kořeny z koeficientů rovnice pomocí početních operací sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování (říkáme, že tyto rovnice nelze řešit v radikálech). Tento důkaz byl vlastně počátkem abstraktní algebry, o níž bude dále řeč. Jak vidíme z letopočtů narození a úmrtí, oba zmínění matematikové zemřeli velmi mladí; Galois měl dokonce podobný osud jako básník Puškin — zemřel v souboji.

K zapisování a řešení soustav lineárních rovnic se užívají matice; jsou to tabulky čísel uspořádané do obdélníka, popřípadě do čtverce, a jsou pro ně definovány početní operace podobně jako pro čísla. Význam matic dnes již daleko přesahuje pouhé řešení soustav rovnic; matice se uplatňují v řadě jiných matematických oborů i ve fyzice. Dokonce se definují i funkce matic. Můžeme mít například sinus matice — tedy ne sinus čísla, ale sinus celé tabulky čísel; tento sinus je opět maticí. Teorie matic se zahrnuje do takzvané lineární algebry. Ta se kromě matic zabývá vektorovými prostory, lineárními zobrazeními a podobnými pojmy.

Různé operace se dají provádět i s jinými objekty než s čísly. Známe sčítání úseček a úhlů, analogií násobení čísel může být skládání nějakých zobrazení. Zabýváme-li se různými operacemi bez ohledu na to, jakého druhu jsou objekty, s nimiž je provádíme, mluvíme o abstraktní algebře. O různých pojmech tohoto oboru si povíme později.

Samostatným oborem, který těsně souvisí s algebrou, je teorie čísel. Zdálo by se, že o číslech musí být už všechno známo; není tomu tak a stále zůstává mnoho neřešených problémů. Do teorie čísel patří například otázky dělitelnosti přirozených čísel, prvočísla a podobně. Podle metod, jichž se používá, mluvíme o algebraické teorii čísel a analytické teorii čísel.

Algebra se uplatňuje i v ostatních matematických oborech; máme například algebraickou geometrii a algebraickou topologii.

ZÁKLADNÍ VĚTA ALGEBRY

Víte, že pomocí komplexních čísel lze vyjádřit odmocniny ze záporných čísel, o nichž bychom jinak museli tvrdit, že neexistují. Víte, že pomocí nich lze řešit každou kvadratickou rovnici. To však není vše; platí takzvaná základní věta algebry (neboli fundamentální věta algebry), která říká, že každá algebraická rovnice má v oboru komplexních čísel alespoň jeden kořen. Algebraickou rovnicí nazýváme rovnici, kterou lze ekvivalentními úpravami upravit na tvar

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_n$ jsou nějaká komplexní čísla; samozřejmě alespoň jedno z čísel $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ musí být různé od nuly; jinak by se v rovnici vůbec nevyskytovala neznámá. Tato věta nebyla dokázána algebraickými prostředky, ale prostředky matematické analýzy. Lze z ní pak odvodit, že každá algebraická rovnice stupně n má právě n kořenů, pokud se ovšem každý kořen bere s příslušnou násobností — tedy například dvojnásobný kořen se počítá jako dva kořeny (násobnost kořenů zde definovat nebudeme). Jsou-li $x_1, x_2, \dots, x_n$ kořeny rovnice

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

pak pro každé číslo x platí

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = \\ = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Každý mnohočlen stupně alespoň prvního lze tedy vyjádřit jako součin lineárních mnohočlenů.

UHODNUTÍ KOŘENE ROVNICE

Umíme-li řešit kvadratickou rovnici, rozřešíme i rovnici vyššího stupně, pokud se nám podaří uhodnout některé kořeny.

Mějme rovnici

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

Nechť její kořeny jsou $x_1, x_2, \dots, x_n$. Z předešlého odstavce víme, že platí

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = \\ = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Představme si, že jeden kořen (nechť je to x_1) nějakým způsobem uhodneme. Potom tedy můžeme mnohočlen

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

dělit mnohočlenem $x - x_1$; dostaneme nějaký mnohočlen

$$b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}$$

stupně $n - 1$. Kořeny rovnice

$$b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1} = 0$$

jsou zbývající kořeny původní rovnice.

Uveďme si to na příkladě. Mějme kubickou rovnici

$$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0.$$

Napadne nás, že jedním kořenem této rovnice by mohlo být číslo 1. Dosadíme tedy $x = 1$, a ejhle — ono to skutečně vychází. Nyní tedy mnohočlen $x^3 - 9x^2 + 23x - 15$ dělíme mnohočlenem $x - 1$; dostáváme

$$(x^3 - 9x^2 + 23x - 15) : (x - 1) = x^2 - 8x + 15.$$

Řešíme rovnici

$$x^2 - 8x + 15 = 0.$$

Dostáváme kořeny 3 a 5. Tedy původní rovnice má kořeny 1, 3 a 5.

ABSTRAKTNÍ ALGEBRA

Jak už jsme se zmínili v úvodu, algebra se zabývá určitými operacemi (úkony), které se provádějí s matematickými objekty. Abstraktní algebra se přitom nezabývá tím, jakého druhu jsou tyto objekty; říkáme, že od toho abstrahuje.

Nejčastěji se setkáváme s operacemi, které se provádějí se dvěma objekty; říkáme jim binární operace. Je to například známé sčítání, odčítání, násobení a dělení čísel; může to být také sčítání úseček nebo úhlů nebo skládání funkcí (například složením funkcí $y = \log x$, $y = \sin x$ vznikne funkce $y = \log \sin x$, popřípadě $y = \sin \log x$). Můžeme tedy zkoumat množinu nějakých objektů takových, že s každými dvěma z nich lze provést určitou binární operaci a výsledek této operace je opět obsažen v této množině. Takovéto množině budeme říkat grupoid.

Například množina všech přirozených čísel je grupoidem vzhledem ke sčítání; každá dvě přirozená čísla lze sečíst a součet je opět přirozené číslo. Podobně je množina všech přirozených čísel grupoidem vzhledem k násobení, ale nikoliv vzhledem k odčítání a dělení; odčítáme-li nebo dělíme-li dvě přirozená čísla, nemusíme vždy dostat přirozené číslo.

Víme, že pro sčítání a násobení čísel (nikoliv pro odčítání a dělení) platí asociativní zákon

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$
$$(ab)\,c = a(bc).$$

Tento zákon platí také pro sčítání úseček a úhlů, pro skládání funkcí a pro řadu dalších binárních operací. Máme-li tedy grupoid, jehož operace splňuje asociativní zákon (říkáme, že to je operace asociativní), tento grupoid se nazývá pologrupa. Množina všech celých čísel je tedy pologrupou vzhledem ke sčítání a násobení, vzhledem k odčítání je pouze grupoidem, nikoliv pologrupou.

U některých operací se stává, že existuje objekt té vlastnosti, že výsledek binární operace provedené s tímto prvkem a libovolným druhým prvkem je opět roven onomu druhému prvku. Tak pro číslo 0 platí

$$a + 0 = a$$

pro každé a. Pro číslo 1 opět platí

$$a \,.\, 1 = a.$$

Pro funkci $y = x$ platí, že složíme-li ji s libovolnou funkcí $y = f(x)$, dostaneme opět funkci $y = f(x)$. Takovýto prvek nazýváme jednotkovým prvkem vzhledem k příslušné operaci. Pologrupa, která obsahuje jednotkový prvek vzhledem k příslušné operaci, se nazývá monoid. Tedy například množina všech nezáporných celých čísel je monoidem vzhledem ke sčítání — jednotkovým prvkem je zde 0. Množina všech přirozených čísel je monoidem vzhledem k násobení (jednotkovým prvkem je zde 1), ale nikoliv vzhledem ke sčítání.

Víme dále, že ke každému číslu a existuje jeho opačná hodnota $-a$; sečtením čísel a a $-a$ dostaneme 0. Podobně ke každému nenulovému číslu a existuje jeho převrácená hodnota $\frac{1}{a}$; vynásobením čísel a a $\frac{1}{a}$ dostaneme 1. Jestliže tedy máme monoid s tou vlastností, že ke každému prvku tohoto monoidu existuje právě jeden prvek takový, že výsledkem příslušné operace provedené s těmito prvky je jednotkový prvek monoidu, tento monoid se nazývá grupou. Tedy množina všech celých čísel je grupou vzhledem ke sčítání, ale vzhledem k násobení je pouze monoidem; opačná hodnota $-a$ celého čísla a je vždy celým číslem, převrácená hodnota $\frac{1}{a}$ nikoliv. Množina všech nenulových reálných čísel je grupou vzhledem k násobení, množina všech reálných čísel nikoliv (neexistuje převrácená hodnota čísla 0).

Příkladem grupy, která má konečný počet prvků, je grupa složená z komplexních čísel $1, -1, i, -i$ s operací násobení. Příkladem konečné grupy, jejíž prvky nejsou čísla, je grupa permutací, to jest vzájemně jednoznačných zobrazení nějaké konečné množiny M opět na množinu M; o ní si ještě něco povíme dále.

Jak už jsme uváděli, v abstraktní algebře se nestaráme o to, jakého druhu jsou objekty, s nimiž pracujeme. Říkáme jim prostě prvky; mluvíme o prvcích grupoidu, pologrupy, monoidu, grupy. Zkoumají se pouze vlastnosti související přímo s příslušnou operací. Tak například u konečné grupy se mluví o řádu prvku (někdy se o něm mluví i u grupy nekonečné). Každý prvek konečné grupy má tu vlastnost, že pro nějaké přirozené číslo n jeho n-tá mocnina je rovna jednotkovému prvku. (Operaci v grupě zpravidla nazýváme násobením, i když nemusí jít vždy o násobení čísel. Umocňování se odvozuje z tohoto násobení podobně jako u násobení čísel.) Nejmenší takové n se nazývá řádem příslušného prvku. Dokazuje se věta, že řád každého prvku konečné grupy je dělitelem řádu grupy, to jest počtu všech prvků grupy. (Přesvědčte se o tom sami u grupy složené z čísel 1, —1, i, —i.) Takováto věta platí pro každou konečnou grupu, ať jsou její prvky jakékoliv matematické objekty.

Pro ilustraci si nyní uvedeme grupu všech permutací tříprvkové množiny $M = \{1, 2, 3\}$; zpravidla se označuje S_3. Každou permutaci množiny M můžeme zapsat tak, že do jednoho řádku napíšeme čísla 1, 2, 3 v obvyklém pořadí, v druhém řádku pak pod každé číslo napíšeme jeho obraz v příslušné permutaci; celek dáme do závorek. Jak víme, počet permutací tříprvkové množiny je $3! = 6$. Budou to tyto permutace:

$$p_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na množině těchto permutací budeme nyní zkoumat operaci skládání zobrazení. Jsou-li q_1, q_2 dvě z našich permutací, pak q_1q_2 bude značit permutaci, která každému prvku x množiny M přiřazuje prvek $q_1(q_2(x))$, to jest obraz prvku $q_2(x)$ v zobrazení q_1. Máme-li najít permutaci p_1p_2, pak si opět napíšeme čísla 1, 2, 3 v obvyklém pořadí a pod ně příslušné obrazy. Obrazem prvku 1 v zobrazení p_2 je prvek 2, obrazem prvku 2 v zobrazení p_1 je prvek 3; tedy obrazem prvku 1 v zobrazení p_1p_2 je prvek 3. Podobně najdeme obrazy prvků 2 a 3 a máme

$$p_1p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = p_4.$$

Dostali jsme opět prvek naší množiny permutací. Můžeme si takto nalézt složené zobrazení pro libovolnou dvojici permutací a sestavit si tabulku, která se nazývá Cayleyova tabulka. Každý řádek i každý sloupec tabulky odpovídá jedné permutaci (obecně jednomu prvku grupy nebo grupoidu). Permutace uvedená v řádku odpovídajícím permutaci q_1 a ve sloupci odpovídajícím permutaci q_2 je permutace q_1q_2. Tabulka vypadá takto:

	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_1	p_1	p_0	p_4	p_5	p_2	p_3
p_2	p_2	p_3	p_0	p_1	p_5	p_4
p_3	p_3	p_2	p_5	p_4	p_0	p_1
p_4	p_4	p_5	p_1	p_0	p_3	p_2
p_5	p_5	p_4	p_3	p_2	p_1	p_0

Místo o permutacích budeme nyní mluvit o prvcích grupy, místo o skládání permutací budeme mluvit o grupovém násobení. Vidíme, že násobením libovolných dvou prvků naší množiny dostaneme opět prvek této množiny. O platnosti asociativního zákona se můžete přesvědčit sami. Prvek p_0 má tu vlastnost, že pro libovolné $q \in S_3$ je

$$p_0q = qp_0 = p_0,$$

je tedy jednotkovým prvkem. Ke každému $q \in S_3$ existuje prvek $q^{-1} \in S_3$ (inverzní prvek k prvku q) takový, že

$$qq^{-1} = q^{-1}q = p_0.$$

Máme $p_0^{-1} = p_0$, $p_1^{-1} = p_1$, $p_2^{-1} = p_2$, $p_3^{-1} = p_4$, $p_4^{-1} = p_3$, $p_5^{-1} = p_5$. Jde tedy skutečně o grupu.

Všimněme si, že pro každé $q \in S_3$ je $(q^{-1})^{-1} = q$. To platí v každé grupě.

Řád grupy S_3 je 6, jak už jsme uvedli výše. Prvky p_0, p_1, p_2, p_5 mají řád 2, neboť $p_0^2 = p_1^2 = p_2^2 = p_5^2 = p_0$ a pro přirozený exponent menší než 2 to neplatí. Prvek p_3 má řád 3, neboť $p_3^3 = p_0$, ale $p_3^2 = p_4$. Rovněž prvek p_4 má řád 3. Čísla 2 a 3 jsou ovšem děliteli čísla 6, což je řád grupy.

Vezmeme-li podmnožinu $\{p_0, p_3, p_4\}$, vidíme, že součin libovolných dvou prvků z této podmnožiny i inverzní prvek k libovolnému jejímu prvku je opět prvkem této podmnožiny a že tato podmnožina obsahuje jednotkový prvek p_0. Říkáme, že tato podmnožina je podgrupou naší grupy.

Všimněme si ještě, že v každém řádku Cayleyovy tabulky a rovněž v každém jejím sloupci se každý prvek grupy vyskytuje právě jednou. Pro libovolnou grupu totiž platí, že pro libovolné prvky a, b, c této grupy z rovnosti $ab = ac$ nebo z rovnosti $ba = ca$ plyne $b = c$.

Obecně v pologrupě toto platit nemusí. Narazíme na to v kapitole V při výkladu o latinských čtvercích.

Ještě se zmíníme o tom, že v naší grupě například $p_1p_2 \neq p_2p_1$, tedy neplatí komutativní zákon jako při násobení čísel. Grupa, v níž komutativní zákon platí, se nazývá Abelova.

Takovýmto způsobem zkoumá abstraktní algebra i jiné druhy operací. Množina s nějakou operací, popřípadě i s více operacemi, se nazývá algebrou. Tedy každý grupoid, pologrupa, monoid a grupa je algebrou. Jsou další typy algeber se speciálními názvy — okruhy, tělesa, svazy, polosvazy, kvazigrupy a podobně. Operace nemusejí být vždy binární, mohou se provádět i s jiným počtem prvků než se dvěma. Příkladem ternární operace, to jest operace prováděné s třemi prvky, je operace, která třem bodům neležícím v přímce přiřazuje těžiště příslušného trojúhelníka.

Mluvili jsme zde o operacích a mysleli jsme tím nějaké matematické úkony. Doufám, že toto slovo ve vás nevyvolává nepříjemné asociace se skalpelem a pachem chloroformu. Výraz operace má širší význam než jen chirurgický; značí prostě nějakou speciální činnost (jistě jste se setkali například s pojmem vojenské operace).

ČÍSELNÉ SOUSTAVY

Napíšeme-li číslo 1978, znamená to, že jde o číslo rovné

$$1 . 10^3 + 9 . 10^2 + 7 . 10^1 + 8 . 10^0 .$$

Říkáme, že jsme toto číslo zapsali v desítkové (dekadické) soustavě. Místo čísla 10 bychom však mohli užít i jiného přirozeného čísla. Samočinné počítače počítají v soustavě dvojkové (dyadické). Zatímco desítková soustava užívá číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9, užívá dvojková soustava pouze číslic 0 a 1. Je to pro počítač výhodné, protože tyto číslice lze snadno vyjádřit tak, že 0 odpovídá stavu, kdy určitým obvodem neprotéká proud, a 1 odpovídá stavu, kdy proud protéká.

Jak bychom zapsali číslo 1978 ve dvojkové soustavě? Popíšeme si postup. Dělíme číslo dvěma a zbytek při tomto dělení zapíšeme jako poslední číslici dvojkového vyjádření. V našem případě 1978 : 2 = 989, zbytek je 0. Totéž provedeme s podílem — tedy 989 : 2 = 494, zbytek je 1, zapíšeme jej jako předposlední číslici. Dále 494 : 2 = 247, zbytek 0; 247 : 2 = 123, zbytek 1; 123 : 2 = 61, zbytek 1; 61 : 2 = 30, zbytek 1; 30 : 2 = = 15, zbytek 0; 15 : 2 = 7, zbytek 1; 7 : 2 = 3, zbytek 1; 3 : 2 = 1, zbytek 1; 1 : 2 = 0, zbytek 1. (Na to poslední dělení nesmíme zapomenout!) Zápis čísla 1978 ve dvojkové soustavě je tedy

$$11110111010.$$

Znamená to, že

$$1978 = 1.2^{10} + 1.2^9 + 1.2^8 + 1.2^7 + 0.2^6 + \\ + 1.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0.$$

Můžete si to sami zkontrolovat.

Jak jsme uváděli, dvojková soustava má význam především pro samočinný počítač. Pro člověka má tu nevýhodu, že zápisy čísel v této soustavě jsou příliš dlouhé a nepřehledné. Představme si, že bychom měli použít většího množství čísel zapsaných ve dvojkové soustavě. Máme si zapsat jejich sáhodlouhá vyjádření v této soustavě nebo je mít zapsána v soustavě desítkové a až v případě potřeby je převádět do dvojkové? Obojí má jistě své nevýhody. Proto raději používáme ještě jiné soustavy, a to osmičkové (oktadické).

Číslo 8 je třetí mocnina čísla 2. Z tohoto faktu plyne snadný způsob převádění zápisu čísel z dvojkové soustavy do osmičkové a obráceně. Napišme si nejprve zápisy čísel 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 a 7 (to jest čísel, jimž odpovídají jednotlivé číslice osmičkové soustavy) ve dvojkové soustavě; pokud mají méně cifer než tři, píšeme před ně příslušný počet nul.

Číslo	Dvojkový zápis
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Vezměme si nyní náš zápis čísla 1978 ve dvojkové soustavě. Zapišme jej tak, že vždy po každé třetí číslici, počínaje od konce, uděláme mezeru:

11 110 111 010.

Takto máme zápis rozdělen na trojice cifer (dvojici 11 na začátku můžeme považovat za trojici 011). Ke každé z nich najdeme číslo, které tato trojice vyjadřuje ve dvojkové soustavě. Vidíme, že jde o zápisy čísel 3, 6, 7, 2 a tedy zápis čísla 1978 v osmičkové soustavě je 3672. Pro kontrolu si můžete ještě provést přímo převod čísla 1978 z desítkové soustavy do osmičkové podobným způsobem, jakým jsme převáděli do soustavy dvojkové (místo dvěma dělíme ovšem osmi); uvidíte, že dostanete tentýž výsledek. Při převodu z osmičkové soustavy do dvojkové postupujeme zase tak, že jednotlivé cifry nahradíme jejich dvojkovým vyjádřením (pokud je méně než trojmístné, napíšeme před ně příslušný počet nul). Zápis čísel v osmičkové soustavě nebývá nikdy o mnoho delší než zápis v desítkové soustavě, přitom má tu výhodu, že jej lze poměrně snadno (jak jsme viděli) převést na zápis dvojkový; z desítkové soustavy to tak jednoduché není, protože číslo 10 není mocninou dvou.

Řekněme si nyní, proč vlastně používáme desítkové soustavy. Důvod je pouze ten, že máme na obou rukou dohromady deset prstů. Stejný počet prstů měli i naši dávní předkové, jejichž jedinou výpočetní technikou byly právě tyto prsty. Na základě toho se vytvořily příslušné názvy čísel a později jejich zápisy, takže dnes bychom si už asi těžko zvykali na jinou soustavu než desítkovou. Jiný důvod než tento skutečně není; z matematického hlediska číslo 10 jakožto základ číselné soustavy je nevýhodné. Je totiž dělitelné (kromě jedničky a sama sebe) jen čísly 2 a 5. Častěji však v životě potřebujeme něco dělit na třetiny nebo čtvrtiny než na pětiny. Proto by pro nás byla výhodnější soustava dvanáctková; číslo 12 je dělitelno čísly 2, 3, 4 a 6. V této soustavě ovšem je třeba mít samostatnou číslici i pro čísla 10 a 11; užívá se k tomu účelu zpravidla písmen T a E, což jsou začáteční písmena odpovídajících anglických číslovek „ten“ a „eleven“. Číslo 1978 by se v této soustavě zapsalo jako 118T, což je

$$1.12^3 + 1.12^2 + 8.12^1 + 10.12^0.$$

V desítkové soustavě máme míry, váhy, další fyzikální jednotky i měnovou soustavu. Metr má deset decimetrů, decimetr deset centimetrů, centimetr deset milimetrů. Podobně je tomu u vah. Československá koruna se dělí na sto, to jest 10^2, haléřů.

Představme si, že by se tři kusy nějakého zboží prodávaly za korunu. Kolik vlastně potom stojí jeden kus? Třiatřicet a dvě třetiny haléře? Zde vidíme nevýhodu desítkové soustavy. Nejde ovšem jen o naše koruny a haléře; v převážné většině států je základní měnová jednotka rozdělena na sto menších jednotek.

Výjimku tvořila donedávna britská měnová soustava. Základní jednotkou byla libra šterlinků. Ta se dělila na dvacet šilinků a šilink opět na dvanáct pencí. (V češtině se mluví o pencích a čte se to tak, jak se to píše. V angličtině „pence", čteno „pens", je množné číslo slova „penny", což je označení oné nejmenší britské měnové jednotky. Je tedy jeden penny, ale dvě pence, tři pence, pět pencí.) Dříve ani jeden penny nebyl nejmenší měnovou jednotkou, ale dělil se ještě na čtrnáct farthingů.

Mnohému tato soustava připadá těžkopádná. Je to však proto, že jsme zvyklí na naše koruny a haléře. Po matematické stránce byla britská měnová soustava výhodná. Polovina libry byla deset šilinků, třetina šest šilinků a osm pencí, čtvrtina pět šilinků, pětina čtyři šilinky, šestina tři šilinky a čtyři pence, osmina dva šilinky a šest pencí. Vidíme, že libru bylo možno dělit všemi přirozenými čísly od jedné do osmi kromě sedmi. Dokud však existovaly farthingy, bylo možno vyjádřit i sedminu libry; byly to dva šilinky, deset pencí a čtyři farthingy. Dále bylo možno libru dělit deseti, dvanácti, patnácti, dvaceti, čtyřiadvaceti, třiceti, čtyřiceti a šedesáti.

Dokud nebyl příliš rozvinut mezinárodní obchod, nebylo důvodu tuto soustavu měnit. Nyní však by dělal potíže její přepočet na měny jiných států, proto byla i ve Velké Británii přijata desítková měnová soustava. Jedna libra šterlinků se dnes dělí na sto pencí. Podobnou soustavu jako Británie mívala kdysi i Francie; dodnes ji připomíná výraz „sou“, který (neoficiálně) označuje částku pěti centimů. Původně to byla dvacetina franku, analogie britského šilinku.

Přestože, jak jsme uvedli, užíváme desetinné soustavy u měr, vah i měny, neužíváme jí pro měření velikostí úhlů a času. Byla navržena reforma měření úhlů, při níž by se stal jednotkou jeden grad, což by byla setina velikosti pravého úhlu; tato jednotka by se dělila na decigrady, centigrady a miligrady. Tato soustava se neujala; právě úhly potřebujeme dělit na různé počty stejných částí a víme z geometrie, že obzvláštní význam mají úhly o velikostech 30° a 60°. Těžko bychom asi říkali, že každý vnitřní úhel rovnostranného trojúhelníka má velikost 66 gradů, 6 decigradů, 6 centigradů a šest a dvě třetiny miligradu. Stejně těžko bychom si asi zvykali na to, kdybychom místo hodin, minut a sekund měli nějaké decidny, centidny a milidny. Naše obvyklé měření času a úhlů pochází už od starých Babylóňanů, kteří si už tehdy uvědomovali jeho výhodnost.

Pro zajímavost ještě uveďme, že staří Mayové užívali soustavy dvacítkové (asi proto, že dvacet je celkový počet prstů na rukou a nohou) a jistý primitivní kmen na Nové Guineji prý užívá soustavy jedenáctkové (důvod je záhadný, protože 11 je prvočíslo, tudíž je mimořádně nevýhodné jako základ číselné soustavy).

PRVOČÍSLA

Co je to prvočíslo, jistě víte. Je to takové přirozené číslo, které má pouze dva dělitele, a to sebe samo a číslo 1. Číslo 1 mezi prvočísla nepatří. (Někdy se i opačné hodnoty prvočísel považují za prvočísla, ale tím se zde zabývat nebudeme.)

Prvočísel je nekonečně mnoho. Důkaz tohoto tvrzení je zajímavým příkladem nepřímého důkazu neboli důkazu sporem. Předpokládejme, že toto tvrzení neplatí a že tedy existuje jen konečný počet prvočísel; nechť tento počet je n a tato prvočísla jsou $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Součin všech těchto prvočísel označme P. Číslo $P + 1$ není dělitelné žádným z prvočísel $p_1, p_2, \ldots, p_n$; kdyby bylo dělitelné některým z nich, musel by být i rozdíl čísel $P + 1$ a P, tedy číslo 1, dělitelný tímto prvočíslem, což zřejmě není možné, protože číslo 1 je dělitelné jen sebou samým. Každé přirozené číslo větší než 1 je však dělitelno alespoň jedním prvočíslem, tedy $P + 1$ musí být dělitelno nějakým prvočíslem různým od čísel p_1, $p_2, \ldots, p_n$. To však je spor, protože jsme předpokládali, že žádné takovéto prvočíslo neexistuje. Tedy náš předpoklad byl nesprávný a prvočísel je nekonečně mnoho.

K vyhledání všech prvočísel menších než dané přirozené číslo n se užívá metody zvané Eratosthenovo síto. Napišme si všechna přirozená čísla od 2 do n (o čísle 1 víme, že není prvočíslem). Nyní škrtáme všechna čísla dělitelná dvěma kromě čísla 2, pak všechna čísla dělitelná třemi kromě čísla 3 a dále vždy čísla dělitelná dalším z dosud neškrtnutých čísel kromě toho čísla samého. Tak postupujeme tak dlouho, až dojdeme k prvnímu číslu většímu než $\sqrt{n}$; pak postup končí. Ze všech napsaných čísel nám zbudou jen prvočísla. U prvního čísla většího než $\sqrt{n}$ jsme se zastavili, protože dále bychom nedostali nic nového; je-li nějaké číslo menší nebo rovné n dělitelno číslem větším než $\sqrt{n}$ a různým od n, pak je dělitelno i nějakým číslem menším než $\sqrt{n}$ a různým od jedné. Zkuste si to sami pro čísla od dvou do sta.

Nějaký vzorec, který by nám udával n-tý člen posloupnosti všech prvočísel v závislosti na n, není znám. Proto je velmi obtížné u vysokých čísel určovat, zda jsou to prvočísla či nikoliv. Největší dosud známé prvočíslo našel Tuckerman pomocí samočinného počítače. Je to číslo $2^{19937} - 1$; má 6002 cifry.

V teorii čísel se užívá funkce $\pi(x)$ definované pro kladná x, která označuje počet prvočísel nepřevyšujících číslo x. (S Ludolfovým číslem nemá nic společného.) P. L. Čebyšev (1821—1894) dokázal, že pro každé kladné x platí nerovnost

$$0{,}89 . \frac{x}{\ln x} < \pi(x) < 1{,}11 . \frac{x}{\ln x} .$$

Výraz $\ln x$ značí přirozený logaritmus čísla x (viz III. kapitola). Od té doby byly nalezeny přesnější (ovšem složitější) nerovnosti.

Je-li nějaké celé číslo n dělitelné prvočíslem p a jsou-li a, b celá čísla taková, že $ab = n$, pak buď a, nebo b je dělitelné číslem p. Pokud však zavedeme takzvaná celá komplexní čísla, což jsou komplexní čísla, jejichž reálné i imaginární části jsou celá čísla, pak v oboru těchto čísel toto tvrzení neplatí. Číslo 10 lze vyjádřit jako součin $(1 + 3i)(1 - 3i)$, přitom však žádné z čísel $1 + 3i$, $1 - 3i$ není dělitelné dvěma ani pěti (při příslušném dělení nedostaneme celé komplexní číslo).

Prvočíselnými dvojčaty nazýváme takové dvojice prvočísel, jejichž rozdíl je roven dvěma. Prvočíselnými dvojčaty jsou například dvojice $\{3, 5\}$, $\{5, 7\}$, $\{11, 13\}$, $\{17, 19\}$, $\{29, 31\}$. Dosud se neví, zda těchto dvojic je konečně nebo nekonečně mnoho.

Kdybychom obdobně definovali prvočíselná trojčata, zjistili bychom, že neexistují jiná než $\{3, 5, 7\}$. Pro libovolné celé číslo n totiž právě jedno z čísel n, $n + 2$, $n + 4$ je dělitelno třemi. Jestliže n není dělitelno třemi, pak buď $n = 3k + 1$, nebo $n = 3k + 2$, kde k je celé číslo. V prvním případě $n + 2 = 3(k + 1)$ a je tedy dělitelno třemi. V druhém případě $n + 4 = 3(k + 2)$ a je dělitelno třemi. Jediné prvočíslo dělitelné třemi je ovšem číslo 3 a tedy nemáme jinou možnost než právě $\{3, 5, 7\}$. Z toho už je také patrné, že prvočíselná čtyřčata nemohou vůbec existovat.

M. Mersenne (1588—1648) zkoumal prvočísla, která lze vyjádřit ve tvaru $2^s - 1$, kde s je přirozené číslo; tato prvočísla se podle něho nazývají Mersennova prvočísla. Číslo $2^s - 1$ může být prvočíslem jen tehdy, je-li s prvočíslem, ale obrácené tvrzení neplatí; číslo 11 je prvočíslo, ale číslo $2^{11} - 1 = 2047 = 23 . 89$. Mersennových prvočísel je známo dosud jen 24, jsou to čísla $2^s - 1$, kde s nabývá hodnot 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937.

DOKONALÁ A SPŘÁTELENÁ ČÍSLA

Ve starověku do matematiky pronikaly různé mystické představy. Bylo tomu tak zejména u Pythagora a jeho žáků. Číslům se připisovaly různé vlastnosti, které s vlastní matematikou neměly nic společného. Tak vznikl i pojem dokonalého čísla. Je to pojem zajímavý, i když z hlediska dnešní matematiky nejde vlastně o žádnou dokonalost.

Vlastním dělitelem přirozeného čísla n se nazývá každý jeho dělitel různý od n. Dokonalým prvočíslem prvního druhu nazýváme číslo, které je součtem všech svých vlastních dělitelů. Číslo, které je součinem všech svých vlastních dělitelů, se nazývá dokonalým číslem druhého druhu.

Číslo 6 je dokonalým číslem prvního i druhého druhu; jeho vlastními děliteli jsou čísla 1, 2, 3 a platí $1 + 2 + 3 = 1.2.3 = 6$.

Veškerá dokonalá čísla prvního druhu, která jsou známa, jsou sudá. Je dokázáno, že sudé číslo n je dokonalým číslem prvního druhu právě tehdy, je-li možno je vyjádřit ve tvaru $n = 2^{s-1}(2^s - 1)$, kde s je přirozené číslo, $s > 1$ a $2^s - 1$ je prvočíslo. Tím se nám zkoumání těchto čísel převádí na zkoumání Mersennových prvočísel, o nichž jsme se zmiňovali v předešlém odstavci. Víme, že Mersennových prvočísel zatím mnoho neznáme, neznáme tedy ani mnoho dokonalých čísel prvního druhu. Největší známé je $2^{19936}(2^{19937} - 1)$.

Liché dokonalé číslo prvního druhu neznáme ani jedno. Víme jen, jaký tvar tato čísla musejí mít, pokud existují. L. Euler (1707—1783) dokázal, že každé takovéto číslo musí mít tvar $p^{4k+1}N^2$, kde k je celé nezáporné číslo, p je prvočíslo tvaru $4s + 1$ (kde s je přirozené číslo) a N není dělitelné číslem p. Dále víme, že tato čísla musejí mít tvar $12k + 1$ nebo $36k + 9$, kde k je přirozené číslo. Je rovněž zjištěno, že žádná lichá čísla menší než 10^{20} nejsou dokonalými čísly prvního druhu. Nevíme ani, zda dokonalých čísel prvního druhu je konečný, nebo nekonečný počet.

Zato dokonalá čísla druhého druhu dovedeme přesně charakterizovat. Víme, že přirozené číslo různé od jedné je dokonalým číslem druhého druhu právě tehdy, je-li buď součinem dvou různých prvočísel, nebo třetí mocninou prvočísla. Důkaz je poměrně jednoduchý. Je-li číslo součinem dvou různých prvočísel p a q, pak všichni jeho vlastní dělitelé jsou čísla 1, p, q a jejich součin dává ono číslo. Je-li číslo rovno p^3, kde p je prvočíslo, pak všichni jeho vlastní dělitelé jsou 1, p, p^2 a jejich součin je p^3. Nenastává-li pro číslo $n > 1$ žádný z těchto případů, pak buď n je prvočíslem a jediný jeho vlastní dělitel je 1, nebo je $n = p^2$, kde p je prvočíslo (pak všichni vlastní dělitelé čísla n jsou 1 a p), nebo $n = pqr$, kde p a q jsou prvočísla a r přirozené číslo různé od p a větší než 1. Pak čísla p, r, pr jsou vlastními děliteli čísla n. Pokud by n bylo dokonalé číslo druhého druhu, muselo by být dělitelno jejich součinem p^2r^2, tedy $n = p^2r^2s$, kde s je přirozené číslo. Potom by však bylo $q = prs$, což není možné, protože q je prvočíslo.

S pojmem dokonalého čísla souvisí pojem spřátelených čísel. Spřátelenými čísly nazýváme dvojici přirozených čísel $\{a, b\}$, která má tu vlastnost, že $a \neq b$, součet všech vlastních dělitelů čísla a je roven číslu b a součet všech vlastních dělitelů čísla b je roven číslu a.

Neví se dodnes, zda dvojic spřátelených čísel je konečný, nebo nekonečný počet. Nejmenší dvě čísla, která jsou spřátelená, jsou 220 a 284. Vlastními děliteli čísla 220 jsou čísla 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110; jejich součet je 284. Vlastními děliteli čísla 284 jsou čísla 1, 2, 4, 71, 142; jejich součet je 220.

Arabský matematik Thâbit ben Korrah (IX. století) dokázal, že jsou-li čísla $p = 3 . 2^{n-1} - 1$, $q = 3 . 2^n - 1$, $r = 9 . 2^{2n-1} - 1$ prvočísly (kde n je přirozené číslo větší než jedna), pak 2^npq a 2^nr jsou spřátelená čísla. Dosud není známa dvojice spřátelených čísel, z nichž by jedno bylo sudé a druhé liché, ani dvojice nesoudělných spřátelených čísel.

PYTHAGOREJSKÁ ČÍSLA

Z geometrie známe Pythagorovu větu. S ní souvisí pojem pythagorejské trojice čísel, což je trojice nesoudělných přirozených čísel $[x, y, z]$, pro něž platí $x^2 + y^2 = z^2$, to jest existuje pravoúhlý trojúhelník o odvěsnách délek x a y a o přeponě délky z. Nejznámější takovouto trojicí je $[3, 4, 5]$.

Pythagorejské trojice lze získat tím způsobem, že zvolíme dvě nesoudělná přirozená čísla u a v, z nichž jedno je sudé a druhé liché, a položíme $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, $z = u^2 + v^2$. Skutečně vidíme, že

$$x^2 + y^2 = (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = u^4 - 2u^2v^2 + \\ + v^4 + 4u^2v^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = \\ = (u^2 + v^2)^2 = z^2.$$

Lze dokázat, že každou pythagorejskou trojici čísel lze získat tímto způsobem. Zkuste si sami některé takovéto trojice najít.

VELKÁ FERMATOVA VĚTA

Viděli jsme, že existuje nekonečně mnoho pythagorejských trojic čísel. Jak to však vypadá, když místo druhých mocnin bereme nějaké vyšší mocniny?

Pierre de Fermat (1601—1665) zanechal ve své pozůstalosti jistou Diofantovu knihu, do níž si na okraje stránek zapisoval své poznámky. Na jednom místě poznamenává, že pro žádná přirozená čísla x, y, z a n, kde $n \geqq 3$, neplatí rovnost

$$x^n + y^n = z^n.$$

Důkaz tohoto tvrzení se nezachoval a dodnes jej nikdo jiný nenalezl. Vyslovují se pochybnosti o tom, zda Fermat vůbec nějaký důkaz tohoto tvrzení objevil; měl přece k dispozici mnohem méně matematických poznatků a metod než dnešní matematikové.

Nicméně se toto tvrzení nazývá velkou Fermatovou větou (na rozdíl od jiné Fermatovy věty, které se říká „malá" a která dokázána je). Správně by se mělo mluvit o Fermatově hypotéze neboli domněnce. Důkaz není znám a není znám ani žádný příklad, který by tuto hypotézu vyvracel.

Jak je vidět, i taková prostá věc jako přirozená čísla skrývá ještě mnohá tajemství.

Úlohy

1. Starořecký matematik Diofantos z Alexandrie (o němž jsme se zmiňovali v úvodu této kapitoly) si dal na svůj náhrobek vytesat tento epitaf:

„Poutníče! Zde odpočívá smrtelná schránka Diofanta. Čísla, jaký div, mohou vyprávět, jak dlouho žil. Šestina jeho života bylo bezstarostné dětství. Dvanáctina uplynula, když se jeho brada pokryla chmýřím. Sedminu pak prožil v bezdětném manželství. Pak uplynulo ještě pět let, než byl obšťastněn prvním synem. Tomu však krutý osud dopřál jen polovinu života jako jeho otci. V hlubokém smutku prožil pak ctihodný stařec konec svých pozemských dnů, když svého syna o čtyři roky přežil. Řekni, poutníče, jak stár byl Diofantos, když smrt ho odvedla k předkům?"

Jistě i vy zodpovíte tuto otázku.

2. Hlemýžď leze na zeď vysokou deset metrů. Během dne povyleze o tři metry, v noci spí a sklouzne při tom o dva metry. Za jak dlouho vyleze na zeď?

3. Místa A a B jsou od sebe vzdálena 180 km. Z místa A vyjede po přímočaré silnici auto směrem k místu B rychlostí 60 km/hod. V okamžiku, kdy auto vyjede z místa A, vyletí z místa B moucha rychlostí 120 km/hod a letí autu naproti. Když dolétne k autu, vrátí se opět stejnou rychlostí do místa B, pak letí opět k autu a vše se opakuje tak dlouho, až auto dojede do místa B. Jakou celkovu dráhu vykoná moucha?

4. Máme deset pytlů s mincemi. Víme, že v jednom z nich jsou falešné mince; každá z nich je o desetinu gramu lehčí než pravá. V ostatních pytlích jsou mince pravé. Známe přesnou váhu pravé mince a máme k dispozici dostatečně přesné váhy a závaží. Jak zjistíme pomocí jediného vážení, v kterém pytli jsou falešné mince?

5. Lev sežere ovci za dvě hodiny, vlk za tři hodiny a pes za šest hodin. Za jakou dobu by ji sežrali společně?

6. Na pánvi se opékají topinky. Opečení každé strany krajíce trvá třicet sekund, na pánev se vejdou dvě topinky. Za jakou nejkratší dobu lze opéci tři topinky?

7. Lovci lovili zajíce, divoké králíky a bažanty. Celkem ulovili 142 kusů. Počet zajíců byl šestinásobkem počtu králíků. Celkový počet noh ulovené zvěře byl 452. Kolik bylo které zvěře?

8. Všichni známe slovo knihomol; označujeme tak člověka, který pro samé čtení zapomíná na všechno ostatní. V původním významu však toto slovo značí skutečně jistého mola, jehož housenky žerou papír a působí tak škody na knihách. V knihovně jsou vedle sebe dva díly jisté knihy. První díl (včetně předsádky) má 575 stran, druhý 498 stran. Prokousání jedné stránky trvá housence knihomola jednu minutu, prokousání desky hodinu. Housenka je v prvním dílu knihy mezi přední deskou a předsádkou. Jak dlouho jí trvá, než se prokouše na místo mezi zadní deskou a předsádkou druhého dílu?

9. Koňský potah urazil polovinu cesty bez nákladu rychlostí 12 km/hod, potom byl naložen a další polovinu cesty se pohyboval rychlostí 4 km/hod. Jaká byla jeho průměrná rychlost?

10. Konají se závody v běhu na lyžích. Pokud závodník běží celou trať rychlostí 10 km/hod, přiběhne do cíle ve 13 hodin. Pokud běží rychlostí 15 km/hod, doběhne v 11 hodin. Jakou rychlostí musí běžet, aby doběhl ve 12 hodin?

11. Toto je tak trochu detektivní hádanka. Ředitel továrny každý den jezdí autem z továrny na oběd do své vily. Jeho šofér vyjede z vily, přijede vždy přesně ve 12 hodin před továrnu, ředitel nastoupí a šofér se s ním vrátí do vily. Jednoho dne však ředitel vyšel již před polednem pěšky k domovu. Přešel přes lesík a poté potkal svého šoféra, který pro něho jel k továrně. Šofér zastavil, ředitel nastoupil do auta a šofér ho odvezl do vily. Přijeli o půl hodiny dříve než v jiné dny. V lesíku se však toho dne udála vražda, a to, jak bylo přesně zjištěno, v 11.40. Měl ředitel alibi?

12. Pan A, který je matematik, potká na ulici svého známého, pana B. Pan B mu sděluje, že právě jde kupovat dárky pro své tři syny, kteří shodou okolností mají všichni v tentýž den narozeniny. Ptá se pana A, zda by dokázal určit jejich věk, ví-li, že součin jejich věků je 36. „To mi ovšem nestačí," odpovídá pan A. Pan B tedy dodává: „Součet jejich věků je roven počtu oken na přední stěně domu, který stojí před námi." Pan A se chvíli zamyslí a posléze řekne: „Ani to mi nestačí." Pan B tedy ještě dodá: „Můj nejstarší syn nosí brýle, které mají na levém oku 2,5 dioptrie." Nyní už pan A určil věky všech synů pana B. Vaším úkolem je určit je také, i když neznáte onen počet oken.

13. Doktor Watson dal jednou Sherlocku Holmesovi tuto hádanku: „V zahradě si hrají jednak mé děti, jednak děti mého bratra, mé sestry a mého strýce. Nejvíce dětí je mých, nejméně strýcových; bratrových dětí je více než sestřiných. Všech je příliš málo na to, aby mohly utvořit dvě devítičlenné skupiny. Součin počtů dětí jednotlivých rodin je roven číslu mého domu. Kolik je kterých dětí?" Sherlock Holmes se zamyslil a po chvíli odpověděl, že mu tyto údaje nestačí; potřeboval by ještě vědět, kolik je strýcových dětí. Když mu to doktor Watson sdělil, Holmes úlohu vyřešil. Po mnoha letech se s touto úlohou seznámil Holmesův vnuk pan Hopkins. Ten ovšem neznal číslo domu, v němž bydlíval doktor Watson, ani počet dětí jeho strýce. Přesto i on hádanku vyřešil. Dokážete to i vy?

Řešení úloh

1. Věk, kterého se Diofantos dožil, označme x. Potom doba dětství je $\frac{1}{6}x$, doba před prvním chmýřím na bradě $\frac{1}{12}x$ doba bezdětného manželství $\frac{1}{7}x$. Pak následuje pět let, po nich doba života Diofantova syna, což je $\frac{1}{2}x$, nakonec ještě čtyři roky. Dostáváme rovnici

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x.$$

Řešením této rovnice je $x = 84$.

2. Na první pohled se zdá, že stačí uvažovat, že hlemýžď za den a noc urazí délku jednoho metru a tedy na zeď vyleze za deset dní. Nezapomeňme však, že po sedmi dnech a nocích se dostane do výšky sedmi metrů a osmého dne pak vyleze zbývající tři metry a je nahoře!

3. Úloha vypadá složitě; toho, kdo zná nekonečné řady, nejspíše napadne, že by mohl použít těchto řad. Přitom však není vůbec podstatné, kudy moucha létá. Podstatné je, že se pohybuje stálou rychlostí 120 km/hod po celou dobu, kterou potřebuje auto o rychlosti 60 km/hod k tomu, aby dojelo z místa A do místa B. Tato doba jsou tři hodiny a moucha tedy nalétá 360 km.

4. Z prvního pytle vybereme jednu minci, z druhého dvě a tak dále; obecně z n-tého pytle n mincí. Tyto mince zvážíme. Rozdíl váhy 55 pravých mincí a váhy, kterou zjistíme, je roven k desetinám gramu, kde k je pořadové číslo pytle, v němž jsou falešné mince.

5. Sežerou ji za hodinu; lev sežere polovinu, vlk třetinu a pes šestinu.

6. Za devadesát sekund. Prvních třicet sekund opékáme první dvě topinky po jedné straně, potom první topinku otočíme, druhou topinku vyjmeme a položíme místo ní třetí. Dalších třicet sekund tedy opékáme druhou stranu první topinky a první stranu třetí topinky. Potom první topinku (hotovou) vyjmeme a vložíme místo ní druhou. Za posledních třicet sekund pak opečeme obě tyto topinky.

7. Kdyby všechna ulovená zvěř byli bažanti, bylo by pouze 284 noh. Protože jich je 452, tedy o 168 více, musí být polovina ze 168, tedy 84, rovna počtu ulovené čtyřnohé zvěře. Protože zajíců je šestkrát více než králíků, je počet králíků sedminou z tohoto čísla, tedy 12, a počet zajíců 72. Bažantů je 58.

8. Pouze dvě hodiny, protože potřebuje pouze prokousat přední desku prvního dílu a zadní desku druhého dílu. Jsou-li oba díly uloženy v knihovně tak, jak obvykle bývají, to jest první díl nalevo od druhého, zmíněné desky jsou přímo vedle sebe.

9. Čekali bychom, že průměrná rychlost bude aritmetickým průměrem z čísel 12 a 4, tedy 8 km/hod. Není tomu tak. Nechť celková dráha (v kilometrech) je s. Potah urazil její první polovinu za $\frac{1}{24}s$ hodin, druhou polovinu za $\frac{1}{8}s$ hodin; celkový čas byl tedy $\frac{1}{24}s + \frac{1}{8}s = \frac{1}{6}s$ hodin. Čtvrtinu z této doby, to jest $\frac{1}{24}s$ hodin, se potah pohyboval rychlostí 12 km/hod, tři čtvrtiny rychlostí 4 km/hod. Průměrná rychlost je tedy $(12 + 3 . 4)/4 = 6$ km/hod.

10. Nevíme zatím, v kolik hodin byl závod odstartován ani jak dlouhá je trať. Vypočteme si nejdříve tyto údaje. Nechť start byl v x hodin. Běží-li lyžař rychlostí 10 km/hod, pak proběhne trať v čase $13 - x$ hodin; běží-li rychlostí 15 km/hod, pak mu závod trvá $11 - x$ hodin. Délka tratě je tedy

$$10(13 - x) = 15(11 - x).$$

Z toho vypočteme $x = 7$. Start byl tedy v 7 hodin, trať je dlouhá 60 km. Aby závodník doběhl ve 12 hodin, musí běžet rychlostí 12 km/hod.

11. Nechť x je doba potřebná k cestě autem od továrny k vile. Obvykle tedy ředitel přijíždí do vily ve $12 + x$ hodin, onoho dne přijel ve $\frac{23}{2} + x$ hodin. Šofér vyjíždí vždy ve $12 - x$ hodin od vily. Osudného dne tedy šofér potkal ředitele ve chvíli, která je aritmetickým průměrem čísel $12 - x$ a $\frac{23}{2} + x$; cesta tam i zpět mu totiž musela trvat stejnou dobu. Tento průměr nezávisí na x a je to $\frac{47}{4}$, to je 11 hodin 45 minut. Ředitel tedy alibi neměl.

12. Vědět, že součin věků je 36, samozřejmě nestačí. Číslo 36 lze mnoha způsoby vyjádřit jako součin tří přirozených čísel;

je to 1.1.36, 1.2.18, 1.3.12, 1.4.9, 1.6.6, 2.2.9, 2.3.6, 3.3.4. Nyní je důležité, že panu A nestačilo znát ani součet věků. Součty příslušných čísel v jednotlivých případech jsou totiž navzájem různé, s výjimkou jediné dvojice případů, a to 2, 2, 9 a 1, 6, 6; v obou těchto případech je součet 13. Kdyby byl počet oken jiný než 13, pan A by mohl už věky určit. Bylo tedy 13 oken a pan A potřeboval ještě další údaj. V tomto posledním údaji není ovšem podstatný počet dioptrií, ale to, že pan B užívá výrazu „můj nejstarší syn". V případě 1, 6, 6 by dva starší synové byli dvojčata a pan B by musel říci „jeden z mých starších synů". Věky jednotlivých synů jsou tedy 2, 2, 9.

18. Nechť a, b, c, d jsou po řadě počty dětí doktora Watsona, jeho bratra, sestry a strýce. Nechť N je číslo domu doktora Watsona. Pak platí $a > b > c > d$, $a + b + c + d < 18$, $abcd = N$. Samozřejmě a, b, c, d, N jsou přirozená čísla. Kdyby bylo $d \geqq 3$, bylo by $c \geqq 4$, $b \geqq 5$, $a \geqq 6$ a tedy $a + b + c + d \geqq 18$. Tedy $d = 1$ nebo $d = 2$. Nyní nastává piplavá práce vypsat všechny přípustné čtveřice (a, b, c, d) a určit jejich součiny. Provedeme-li to, zjistíme, že jsou tři čtveřice o stejném součinu, a to (5, 4, 3, 2), (6, 5, 4, 1) a (8, 5, 3, 1). Libovolné dvě přípustné čtveřice, z nichž alespoň jedna nepatří mezi uvedené, mají součiny různé. Některá z uvedených čtveřic je tedy řešením; jinak by Holmes mohl úlohu vyřešit i bez údaje o počtu strýcových dětí. Kdyby bylo $d = 1$, nestačil by mu ani tento údaj — měl by stále ještě dvě možnosti. Je tedy $d = 2$, $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$, $N = 120$.

III. KAPITOLA

MATEMATICKÁ ANALÝZA

Znáte jistě pojem funkce a víte, jak se kreslí grafy funkcí. Dalo by se říci, že moderní matematika vznikla tehdy, když se začalo užívat tohoto pojmu a začaly se systematicky studovat funkce pomocí diferenciálního a integrálního počtu. Začali s tím G. W. Leibniz (1646—1716) a I. Newton (1643—1727). (Ano, byl to ten s tím padajícím jablkem.) Zavedení pojmu funkce bylo vlastně něčím zásadně novým v matematickém myšlení — začaly se zkoumat proměnné veličiny a jejich vzájemná závislost. To mělo ovšem podstatný vliv i na rozvoj fyziky.

Odvětví matematiky, které se zabývá zkoumáním funkcí, se nazývá matematická analýza. Nazývá se tak proto, že analyzuje vztahy mezi jednotlivými proměnnými veličinami.

Základní pojmy matematické analýzy jsou limita, derivace a integrál. O limitě jste už něco slyšeli, alespoň o limitě posloupnosti. Derivovat ani integrovat se zde učit nebudeme, v takovéto knížce by to nemělo smysl. Ukážeme si však v dalších odstavcích alespoň principy těchto úkonů.

Analýza se ovšem nezabývá jen funkcemi jedné proměnné, ale studuje i funkce více proměnných; tyto proměnné mohou nabývat i imaginárních hodnot. Jedním odvětvím matematické analýzy je funkcionální analýza, která zkoumá pojmy poněkud obecnější než funkce, a to funkcionály a operátory. U nich proměnné nemusejí nabývat číselných hodnot, ale jejich hodnotami mohou být i jiné matematické objekty, například samotné funkce. Jiným zobecněním pojmu funkce je pojem distribuce, kterým se zabývá teorie distribucí — rovněž součást matematické analýzy. S integrálem souvisí i pojem míry, to jest jistého zobrazení, která daným množinám přiřazuje nějaká reálná čísla, která jaksi charakterizují velikost této množiny. Příkladem míry je délka úsečky, obsah obrazce nebo objem tělesa. Pojmem míry se zabývá teorie míry.

Významným odvětvím matematické analýzy je teorie diferenciálních rovnic. Jsou to rovnice, v nichž neznámé nepředstavují čísla, ale funkce; v těchto rovnicích se objevují derivace těchto funkcí. Tato teorie je nepostradatelná pro fyziku a techniku. Podobně existují i rovnice diferenční a rovnice integrální.

Tato kapitola bude poměrně krátká. Není tomu tak proto, že by autor podceňoval význam matematické analýzy, ale proto, že je těžké sdělovat vám zajímavosti z tohoto oboru, dokud jste nezvládli derivování a integrování. Nicméně doufám, že i to málo, co bude zde uvedeno, vám pomůže udělat si alespoň nějakou představu o oboru, s nímž se na začátku vysokoškolského studia ještě dost a dost natrápíte.

DERIVACE

Derivace funkce $y = f(x)$ je definována jako limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

kde h je určitá pomocná proměnná. Samozřejmě na první pohled není jasné, proč se to definuje právě takto a jaký to má význam. Ukažme si to na dvou příkladech — jednom fyzikálním a jednom geometrickém.

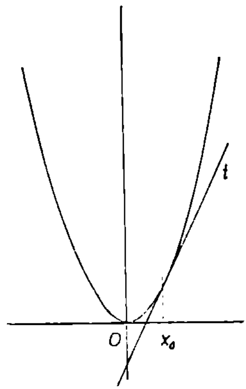
Nějaké těleso padá volným pádem; víme, že jeho dráha v čase t je dána vzorcem $s = \frac{1}{2} gt^2$, kde g je gravitační zrychlení. Vezměme dva časové okamžiky t a $t + h$, kde $h > 0$, a spočtěme průměrnou rychlost tělesa mezi těmito okamžiky. Za dobu mezi okamžiky t a $t + h$ urazí těleso dráhu $\Delta s = \frac{1}{2} g[(t + h)^2 - t^2]$, časový rozdíl je h, tedy průměrná rychlost je

$$v = \frac{\Delta s}{h} = \frac{1}{2} g(2t + h).$$

Bude-li se hodnota h stále přibližovat k nule, bude se v blížit k hodnotě, kterou dostaneme tím, že do výrazu za h dosadíme nulu. Tato hodnota gt je tedy limitou v pro h blížící se k nule a je to okamžitá rychlost v okamžiku t. A je to také derivace funkce $s = \frac{1}{2} gt^2$.

Mohli bychom se ptát, jaký má vlastně smysl vypočítávat okamžitou rychlost. Význam to má; v případě volného pádu sice těžko můžeme předpokládat, že by náhle přestala působit gravitace, ale pokud pohyb vyvolává nějaká jiná síla, můžeme si představit, že v určitém časovém okamžiku tato síla přestane působit. Co udělá těleso? Pokračuje v pohybu tak, že tento pohyb je rovnoměrný přímočarý a jeho rychlost je rovna okamžité rychlosti v okamžiku, kdy síla přestala působit.

Nyní si představme graf funkce $y = x^2$; víme, že je to parabola na obr. III.1. Chtěli bychom napsat rovnici tečny k této parabole v bodě $[x_0, x_0^2]$, kde x_0 je nějaké reálné číslo. Potřebujeme především znát její směrnici, to jest tangens úhlu, který tato přímka svírá s kladnou poloosou osy x. Pokud bychom místo tečny měli sečnu, vypočetli bychom její směrnici snadno. Jestliže tato sečna protíná parabolu v bodech $[x_0, x_0^2]$, $[x_1, x_1^2]$, je její

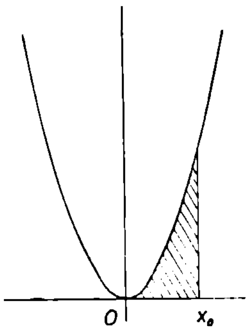


Obr. III.1

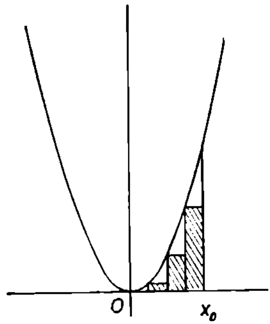
směrnice rovna $(x_1^2 - x_0^2)/(x_1 - x_0) = x_0 + x_1$. Jestliže se číslo x_1 blíží k číslu x_0, pak tato hodnota se blíží k $2x_0$ a sečna se blíží k tečně v bodě $[x_0, x_0^2]$. A skutečně $2x_0$ je směrnice tečny v bodě $[x_0, x_0^2]$; platí to pro libovolné x_0. A rovněž funkce $y = 2x$ je derivací funkce $y = x^2$.

Směrnice tečny ke grafu funkce vlastně udává určitou míru stoupání (popřípadě klesání, je-li záporná) funkce v okolí příslušného bodu. Je to něco podobného, jako když stoupáme na nějakou horu. Čím větší úhel svírá tečna k trajektorii našeho pohybu s vodorovnou rovinou, tím strmější je naše stoupání.

Podobně jako je rychlost derivací dráhy podle času, je například zrychlení opět derivací rychlosti podle času. Derivací se dá vyjádřit úhlová rychlost, okamžitý průtok nějaké kapaliny potrubím, hustota v daném bodě nehomogenní tyče a podobně; obecně tedy určitá míra změny hodnoty funkce. Odvětví matematické analýzy, které se zabývá derivacemi, se nazývá diferenciální počet.



Obr. III.2



Obr. III.3

INTEGRÁL

Vraťme se opět ke grafu funkce $y = x^2$. Zajímal by nás obsah obrazce vyšrafovaného na obr. III.2. Zkusme si jej nejdříve vyjádřit přibližně. Úsečku spojující počátek O s bodem osy x o souřadnici x_0 rozdělíme na n shodných úseček a nad každou sestrojíme obdélník, který má jeden vrchol na parabole; na obr. III.3 je to znázorněno pro $n = 6$. Vypočtěme obsah obrazce, který je sjednocením těchto obdélníků. Vždy jedna strana každého obdélníka má délku $\frac{x_0}{n}$, druhá strana má délky $\frac{x_0^2}{n^2}$, $\frac{4x_0^2}{n^2}$, $\frac{9x_0^2}{n^2}$, ..., $\frac{(n-1)^2x_0^2}{n^2}$, obecně je to tedy $\frac{j^2x_0^2}{n^2}$ pro j od 1 do $n - 1$. Obsah sjednocení všech obdélníků je tedy

$$P_n = \frac{x_0^3}{n}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^2}\right) =$$
$$= \frac{x_0^3}{n^2}\,[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2].$$

Existuje vzorec, který říká, že součet druhých mocnin přirozených čísel od 1 do n je roven $\frac{1}{6}\,n(n+1)\,(2n+1)$; tedy

$$P_n = \frac{x_0}{6n^3}\,(n-1)\,n\,(2n-1) = \frac{x_0}{6}\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right).$$

Čím větší vezmeme n, tím více se bude rozdíl mezi obsahem zkoumaného obrazce a obsahem sjednocení obdélníků přibližovat k nule. Zlomky, v nichž je čitatel konstantní a jmenovatel je roven mocnině n, se budou blížit také k nule. Tedy obsah našeho obrazce je $\frac{1}{3}\,x_0^3$.

Řekneme, že výraz $\frac{1}{3}\,x_0^3$ je určitým integrálem funkce $y = x^2$ od 0 do x_0 a píšeme

$$\int_0^{x_0} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,x_0^3.$$

Toto je tedy princip integrování. Určitý integrál se zpravidla nepočítá přímo jako takováto limita, ale existují jiné způsoby jeho výpočtu. Zpravidla se počítá pomocí takzvaného neurčitého integrálu; hledání neurčitého integrálu je v jistém smyslu opakem derivování. Neurčitý integrál dané funkce je množina všech funkcí, jejichž derivací je daná funkce. Tím se však zabývat nebudeme.

Poznamenáme jenom, že výpočty obsahů obrazců ohraničených křivkami jsou jen jednou z mnoha aplikací integrálu. Stejně jako derivace, má i integrál veliký význam ve fyzice. Podobně jako nám derivace umožňuje například určovat rychlost obecného (tedy nikoliv nutně rovnoměrného) pohybu, můžeme pomocí integrálu například vyjádřit práci vykonanou silou, která se mění; jako při výpočtu rychlosti nerovnoměrného pohybu nevystačíme s prostým dělením, ani zde bychom nevystačili s prostým násobením. Existují různé typy integrálů; odvětví matematické analýzy, které se jimi zabývá, se nazývá integrální počet. Diferenciální a integrální počet se někdy souhrnně nazývají infinitezimálním počtem.

SOUČET DRUHÝCH MOCNIN PŘIROZENÝCH ČÍSEL

V předešlém odstavci jsme narazili na vzorec pro součet druhých mocnin přirozených čísel od 1 do n. Jak se dá takovýto vzorec odvodit?

Známe vzorec pro součet přirozených čísel od 1 do n; tento součet se rovná $\frac{1}{2}n(n+1)$. Je tedy vyjádřen mnohočlenem druhého stupně proměnné n.

Zkusme, zda by se nedal součet druhých mocnin přirozených čísel od 1 do n vyjádřit jako mnohočlen třetího stupně, tedy ve tvaru

$$s(n) = an^3 + bn^2 + cn + d.$$

Musí samozřejmě být

$$s(1) = 1$$

a dále rozdíl $s(n) - s(n-1)$, tedy rozdíl mezi součtem druhých mocnin přirozených čísel od 1 do n a součtem druhých mocnin přirozených čísel od 1 do $n - 1$ pro libovolné n, je samozřejmě roven n^2; tedy

$$s(n) - s(n-1) = n^2.$$

Pokud se onen součet skutečně dá vyjádřit tak, jak předpokládáme, je tedy

$$\begin{gathered} a + b + c + d = 1, \\ an^3 + bn^2 + cn + d - [a(n-1)^3 + \\ + b(n-1)^2 + c(n-1) + d] = n^2. \end{gathered}$$

Druhou rovnici můžeme upravit na tvar

$$(3a - 1)\, n^2 + (2b - 3a)\, n + a - b + c = 0.$$

Pokud by bylo $3a - 1 \neq 0$, byla by to kvadratická rovnice pro neznámou n a měla by nejvýše dva různé kořeny. Pokud by bylo $3a - 1 = 0$ a $2b - 3a \neq 0$, byla by to rovnice lineární a měla by jen jeden kořen. Kdyby bylo $3a - 1 = 0$, $2b - 3a = 0$, $a - b + c \neq 0$, pak by rovnice prostě neplatila pro žádné n. My však potřebujeme, aby rovnice platila pro všechna (nebo alespoň pro všechna přirozená) čísla n. To je možné jen tehdy, když se všechny koeficienty v této rovnici rovnají nule, tedy

$$\begin{aligned} 3a - 1 &= 0, \\ 2b - 3a &= 0, \\ a - b + c &= 0. \end{aligned}$$

Je to soustava tří rovnic o třech neznámých a, b, c; její řešení je $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$. Dosadíme-li do rovnice

$$a + b + c + d = 1,$$

dostáváme $d = 0$. Je tedy

$$s(n) = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n = \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1).$$

Protože $s(1) = 1$ a $s(n) - s(n - 1) = n^2$ pro každé n, jde skutečně o součet druhých mocnin přirozených čísel od 1 do n.

Na tomto vzorci jsme si ukázali, jak vypadá obvykle postup vědecké práce v matematice. Z analogie jsme usoudili, že by mohlo jít o mnohočlen třetího stupně; samozřejmě zpočátku jsme si s tím nemohli být jisti. Zkusili jsme, zda existuje mnohočlen třetího stupně s požadovanými vlastnostmi, a zjistili jsme, že existuje. Takto skutečně postupují matematikové ve své práci, i když objevují věci podstatně složitější.

ACHILLEUS A ŽELVA ANEB NEKONEČNÉ ŘADY

Bájeslovný řecký hrdina Achilleus měl přízvisko „rychlonohý“. S jeho jménem se spojuje jeden zajímavý paradox, jímž se zabývali starořečtí filozofové.

Achilleus pronásleduje želvu; samozřejmě běží podstatně rychleji než ona. Než však uběhne Achilleus polovinu vzdálenosti, která ho dělí od želvy, želva přece jen nějakou vzdálenost urazí. Pak tedy Achilleus opět uběhne polovinu vzdálenosti, která zbývá mezi ním a želvou; želva opět kousek popoleze. Takto bychom mohli pokračovat v těchto úvahách do nekonečna, tudíž Achilleus želvu nikdy nedohoní.

Prakticky je ovšem jasné, že Achilleus želvu dohoní. Jak to tedy vysvětlíme?

Paradox spočívá v tom, že zde máme nekonečný počet časových úseků — za každý takovýto úsek Achilleus vždy zdolá polovinu vzdálenosti, která ho dělí od želvy. Každý tento úsek má délku, kterou lze vyjádřit kladným číslem; celková doba Achilleova běhu je pak součtem všech těchto čísel. Zdálo by se, že součet nekonečně mnoha kladných čísel nemůže být konečným číslem; když se na to podíváme blíže, zjistíme, že může.

Vezměme si úsečku A_0B délky 1 a vyznačme na ní body $A_1, A_2, A_3, \ldots$ tak, že bod A_j pro libovolné přirozené j je ve vzdálenosti $(2^j - 1)/2^j$ od bodu A_0. Úsečka A_0A_1 má tedy délku $\frac{1}{2}$, úsečka A_1A_2 má délku $\frac{1}{4}$ a tak dále; obecně úsečka $A_{j-1}A_j$ pro každé přirozené j má délku $\frac{1}{2^j}$. Sjednocením všech těchto úseček je úsečka A_0B bez bodu B; přitom libovolné dvě z nich mají nejvýše jeden společný bod. Bude tedy zcela pochopitelné, když prohlásíme, že součtem všech mocnin čísla $\frac{1}{2}$, jejichž exponenty jsou přirozená čísla, je číslo 1.

Výraz

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots,$$

kde a_n pro všechna přirozená n jsou čísla, nazýváme nekonečnou řadou. Pro každé přirozené n výraz

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

nazýváme n-tým částečným součtem této nekonečné řady. Jestliže posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ má konečnou limitu s, nazýváme tuto limitu součtem dané nekonečné řady.

Připomeňme si, co je geometrická řada. Je to řada

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

té vlastnosti, že podíl a_{n+1}/a_n je konstantní; označujeme jej q a nazýváme kvocientem geometrické řady. Jde tedy vlastně o řadu

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots .$$

Víme, že n-tý částečný součet této řady je

$$s_n = a_1 + a_1q + \dots + a_1q^{n-1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} .$$

Jak to vypadá s limitou posloupnosti částečných součtů? Předpokládejme $a_1 \neq 0$; kdyby bylo a_1 rovno nule, měli bychom řadu složenou ze samých nul a její součet by byl samozřejmě roven nule. Je-li $|q| > 1$, výraz q^n nemá konečnou limitu a nemá ji tedy ani s_n; v tomto případě tedy součet geometrické řady neexistuje. Je-li $q = 1$, pak všechny členy řady jsou stejná nenulová čísla a její součet ovšem také neexistuje. Je-li $q = -1$, pak $s_n = a_1$ pro liché n a $s_n = 0$ pro sudé n, tedy posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ rovněž nemá limitu. Je-li $|q| < 1$, pak posloupnost $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu 0 a součet řady je

$$s = \frac{a_1}{1 - q} .$$

Řada $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$, o níž jsme mluvili na začátku, je geometrická řada. Máme $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, tedy skutečně $s = 1$.

Samozřejmě i jiné řady než geometrické mohou mít konečný součet. K tomu, abychom zjistili, zda tento konečný součet existuje, můžeme použít d'Alembertova kritéria; nazývá se podle J. L. R. d'Alemberta (1717—1783). Máme-li řadu

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots,$$

zkoumáme limitu podílu a_{n+1}/a_n. Je-li tato limita větší než —1 a menší než 1, součet řady existuje; je-li větší než 1 nebo menší než —1, součet neexistuje. Je-li limita rovna 1 nebo —1, kritérium nám nepomáhá, protože konečný součet může existovat, ale také nemusí. Tak například u řady

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

tato limita je rovna nule a řada má konečný součet; je to Eulerovo číslo e, o němž si povíme dále.

Podívejme se nyní na řadu složenou z převrácených hodnot přirozených čísel

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

Říkáme jí harmonická řada. D'Alembertovo kritérium nám u ní nepomůže; zmíněná limita je rovna jedné. Zdálo by se, že tato řada má konečný součet, ale není tomu tak. Utvořme jinou řadu tím, že pro každé přirozené n všechny členy od $\frac{1}{2^n + 1}$ do $\frac{1}{2^{n+1} - 1}$ nahradíme číslem $\frac{1}{2^{n+1}}$, tedy číslem menším. Vypadá to takto:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+$$
$$\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots.$$

Pokud by harmonická řada měla mít konečný součet, musela by jej mít i tato nová řada. Ona však konečný součet nemá; je v ní číslo 1, pak číslo $\frac{1}{2}$, potom dvakrát číslo $\frac{1}{4}$, čtyřikrát číslo $\frac{1}{8}$, osmkrát $\frac{1}{16}$ a tak dále. Dvě čtvrtiny jsou jedna polovina a stejně tak čtyři osminy, osm šestnáctin a tak dále; máme tedy nekonečně mnoho polovin a součet není konečný. Naproti tomu například řada složená z převrácených hodnot druhých mocnin přirozených čísel konečný součet má.

EULEROVO ČÍSLO

Mezi polskými matematiky se vypráví tato anekdota:

Přednosta psychiatrické kliniky jde na vizitu. Jeden z pacientů ho upozorňuje na to, že na pokoji číslo osm jeden pacient druhého derivuje. Přednosta vstoupí do zmíněného pokoje a vidí, že jeden pacient leží na zemi, druhý na něm sedí a buší ho do zad. Zeptá se ležícího: „To se necháte takhle derivovat?" Pacient odpoví: „Já si nic nedělám ze žádného derivování; já jsem e^x!"

K tomu, abychom porozuměli této anekdotě, potřebujeme vědět, že existují funkce, které se rovnají svým derivacím, tedy se derivováním nemění. Je to funkce e^x a všechny funkce, které z ní vzniknou násobením konstantou.

Co však značí to e? Vezměme si posloupnost, jejíž n-tý člen je $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Jakou limitu má tato posloupnost? Leckdo by asi řekl, že $1 + \frac{1}{n}$ má limitu 1 a číslo 1 umocněné na libovolný exponent dává opět 1, tedy limita naší posloupnosti je 1. Tady však nesmíme zapomenout, že exponent roste do nekonečna. Limita existuje, ale není to 1. Je to číslo, které se podle L. Eulera (1707—1783) nazývá Eulerovo číslo a označuje se písmenem e.

Podobně jako číslo π i číslo e je číslem transcendentním; je to číslo, které není kořenem žádné algebraické rovnice s celočíselnými koeficienty. Znamená to ovšem, že e je také číslo iracionální; jeho desetinný rozvoj je nekonečný neperiodický. Na dvacet desetinných míst lze číslo e psát

$$e \doteq 2{,}71828182845904523536.$$

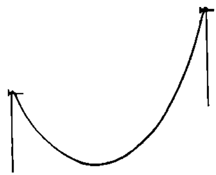
Ze zlomků s trojciferným čitatelem i jmenovatelem se k číslu e nejvíce přibližuje zlomek $\frac{878}{323}$.

Význam čísla e v matematické analýze lze srovnat s významem čísla π v geometrii (podotkněme však, že π má velký význam i v matematické analýze.) Řekli jsme už, že funkce $y = e^x$ má tu vlastnost, že její derivace je opět $y = e^x$. Dokud toho nevíte mnoho o derivacích, asi vám to mnoho neřekne, ale až se blíže seznámíte s matematickou analýzou, poznáte důležitost tohoto faktu.

S číslem e se však můžeme setkat přímo v přírodě. Vezměme lano (nebo řetěz) a zavěsme jeho konce na dva háky, jejichž vzdálenost je menší než délka lana a které nejsou přímo jeden nad druhým. Vlivem gravitace lano zaujme tvar oblouku křivky, které se říká řetězovka neboli katenoida. Tato křivka je grafem funkce

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

kde a je nějaká konstanta. Řetězovku vidíme na obr. III.4.



Obr. III.4

Vezměme si funkci $y = x^x$ definovanou pro všechna nezáporná x. Pro jaké x tato funkce nabývá nejmenší hodnoty? Myslíte, že pro x rovné jedné, nule nebo jedné polovině? Nikoliv, pro $x = \frac{1}{e}$. Podobně zase funkce $y = \sqrt[x]{x}$ nabývá největší hodnoty pro $x = e$.

V kombinatorice a v teorii pravděpodobnosti má velký význam poměr počtu všech permutací n-prvkové množiny bez samodružných prvků k počtu všech permutací této množiny. Posloupnost složená z hodnot tohoto poměru pro všechna přirozená n má limitu $\frac{1}{e}$. Zmíněný poměr lze ilustrovat následujícím způsobem. Hosté v počtu n si dali klobouky do šatny. Šatnářka klobouky neoznačila a vydává je zcela náhodně. Je-li n velké, pravděpodobnost, že nikdo nedostane svůj klobouk, je velmi blízká k číslu $\frac{1}{e}$.

V matematické statistice má velký význam Eulerova funkce, která se rovněž vyjadřuje pomocí čísla e.

Dále si uveďme Stirlingův vzorec, který udává přibližnou hodnotu $n!$. Je to

$$n! \doteq n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Vidíme, že se v něm vyskytuje jak e, tak π. Zdá se vám asi divné, proč by se to mělo takto počítat, ale ono to má význam ani ne tak pro samotný výpočet $n!$, ale pro to, aby se mohl faktoriál nahradit vhodnou spojitou funkcí, což je často potřebné.

Logaritmus o základu e se nazývá přirozený logaritmus. Na rozdíl od dekadických logaritmů, které se označují $\log x$, se přirozený logaritmus čísla x značí $\lg x$ nebo $\ln x$; ten druhý symbol je zkratkou latinského „logarithmus naturalis“ čili „přirozený logaritmus“. Přirozený logaritmus čísla x je tedy číslo, na které musíme umocnit e, abychom dostali číslo x. Asi se vám nezdá příliš přirozené místo čísla 10 brát za základ logaritmů takové podivné číslo, avšak stejně nepřirozené by se zdálo dělit plný úhel na 2π radiánů místo na 360 stupňů. Teprve při studiu matematické analýzy pochopíte, že to skutečně smysl má a že má smysl nazývat takové logaritmy přirozenými.

Úlohy

1. Jsou dána reálná čísla a, b, přičemž $a < b$. Mějme funkci $y = f(x)$, která je definována tak, že $f(x) = 0$ pro $x < a$ a pro $x > b$ a $f(x) = 1$ pro $a < x < b$; pro $x = a$ a $x = b$ funkce $f(x)$ není definována. Vyjádřete tuto funkci jedinou rovnicí, v níž se vyskytují pouze operace sčítání, odčítání, násobení, dělení a přechodu k absolutní hodnotě.

2. Tibetský láma koná pouť na posvátnou horu. Vyjde z kláštera v šest hodin ráno, jde nejkratší cestou na horu, na vrchol hory dojde v šest hodin večer. Na vrcholu stráví noc v meditacích. Ráno v šest hodin začne sestupovat toutéž cestou, v šest hodin večer dojde zpět do kláštera. Jeho pohyb je nerovnoměrný; láma dělá zcela nepravidelně přestávky na odpočinek a na jídlo. Dokažte, že v určitém okamžiku druhého dne bude přesně na tom místě, kde byl před 24 hodinami.

3. Jistě chápete, co asi znamená symbol $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}$; prostě sčítání a odmocňování se provádí do nekonečna. (Jde samozřejmě o limitu určité posloupnosti.) Je to konečné číslo. Určete je!

4. Koňský handlíř se vrací z jarmarku. Přijde k mostu, kde potká čerta. Čert mu říká: „Vím, o kolik jsi dnes ošidil lidi. Mohu ti tvé jmění rozmnožit. Pokaždé, když přejdeš tento most, všechny peníze v kapse se ti zdvojnásobí. Po prvním přejití mostu mi však musíš zaplatit padesát korun, po druhém sto korun a po každém dalším vždy o padesát korun více než po předešlém.“ Handlíř přešel několikrát most a jmění mu narůstalo. Pak však mu začaly peníze ubývat a nakonec zůstal čertovi dlužen. Kdyby měl na začátku o haléř víc, nemohlo se mu to stát. Kolik peněz měl handlíř na začátku?

5. V soustavě souřadnic mějme rovnoramenný trojúhelník A_nB_nC o vrcholech $A_n\left[-\frac{1}{n}, 0\right]$, $B_n\left[\frac{1}{n}, 0\right]$, $C[0, 3]$, kde n je přirozené číslo. Pro každé n těžiště tohoto trojúhelníka je $T[0, 1]$. Limitou posloupnosti bodů A_n je počátek O soustavy souřadnic a je i limitou posloupnosti bodů B_n. Jde-li tedy n do nekonečna, trojúhelníky A_nB_nC se blíží k úsečce OC. Ta by tedy také měla mít těžiště v bodě T, přitom však T zřejmě není jejím středem. Jak to vysvětlíte?

Řešení úloh

1. Toto vyjádření je

$$y = \frac{(x - a + |x - a|)\,(b - x + |b - x|)}{4|x - a|\,.\,|b - x|}$$

2. Výstup i sestup lze znázornit grafem, v němž na osu x nanášíme čas uplynulý od šesté hodiny ranní, na osu y vzdálenost od kláštera. Vzdálenost lámy od kláštera v závislosti na čase je pro první i pro druhý den vyjádřena funkcí, jejímž grafem je spojitá křivka. Obě křivky leží celé v obdélníku o vrcholech $[0, 0]$, $[12, 0]$, $[12, d]$, $[0, d]$, kde d je vzdálenost vrcholu hory od kláštera. Křivka pro první den spojuje body $[0, 0]$ a $[12, d]$, křivka pro druhý den spojuje body $[0, d]$ a $[12, 0]$, tedy vždy protilehlé vrcholy obdélníka. Protože tyto křivky jsou spojité, musejí mít alespoň jeden společný bod. (Je to intuitivně zřejmé, v matematické analýze to lze přesně dokázat.) Souřadnice tohoto bodu udávají hledaný časový okamžik a příslušnou vzdálenost od kláštera.

3. Označme si onen výraz symbolem a. Potom

$$a^2 = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}} = 2 + a.$$

Číslo a je tedy kořenem rovnice

$$a^2 - a - 2 = 0.$$

Kořeny této rovnice jsou 2 a -1. Protože odmocnina je vždy číslo nezáporné, musí být $a = 2$.

4. Měl 99 korun a 99 haléřů. Kdyby měl sto korun, přibylo by mu po každém přejití mostu a příslušném zaplacení padesát korun. Takto mu po každém přejití přibude padesát korun minus 2^n haléřů. Samozřejmě 2^n při n rostoucím nade všechny meze roste také nade všechny meze, tedy handlíř skutečně zchudne.

5. Pojem těžiště trojúhelníka je převzat z fyziky. Těžiště trojúhelníka lze brát jako těžiště soustavy tří hmotných bodů — vrcholů trojúhelníka — o stejné hmotnosti. Jestliže si představíme, že se body A_n, B_n pohybují směrem k bodu O, až s ním splynou, bude nakonec v bodě O hmotný bod o hmotnosti rovné dvojnásobku hmotnosti bodu C a tedy těžiště dvojice hmotných bodů O, C bude skutečně v bodě T.

IV. KAPITOLA

GEOMETRIE A TOPOLOGIE

Všichni jistě dobře víte, že geometrií se zabývali lidé už ve starověkém Řecku — setkáváte se v ní přece neustále s jmény jako Pythagoras, Eukleides nebo Thales. Ovšem ještě dříve nežli Řekové ji pěstovaly jiné národy, například Egypťané a Babylóňané. U nich však šlo veskrze o praktické otázky vyměřování pozemků a staveb — odtud vlastně pochází její název, který znamená (v řečtině) zeměměřictví. Ale až v Řecku se stala geometrie skutečně exaktní vědou, a to především díky Eukleidovi (IV. století př. n. l.) a jeho slavnému spisu „Základy geometrie". Eukleides zavedl do geometrie soustavu axiomů a z ní odvozoval jednotlivé věty — tak se to v matematice dělá podnes. Geometrie tím značně předběhla ostatní matematické obory, v nichž se s něčím takovým začalo až podstatně později. Není bez zajímavosti, že filozof Baruch Spinoza (1630 až 1677) napsal dílo „Ethica ordine geometrico demonstrata" čili „Etika předvedená geometrickým způsobem". Proč zrovna geometrickým? Užívá snad nějakých bodů, přímek nebo kružnic? Nikoliv; s geometrií má tento výklad etiky společné pouze to, že je psán formou jednotlivých vět (pouček), za nimiž následují důkazy. Dnes bychom tento způsob nazvali spíše matematickým, protože se ho užívá všude v matematice. Ve Spinozově době se však užíval především v geometrii; ostatní matematické obory se vlastně teprve rodily.

Jak vypadá geometrie dnes? Eukleidův systém axiomů přetrval do dnešní doby, ovšem v modernizované podobě, kterou mu dal David Hilbert (1862—1943). V souvislosti s ním mluvíme o euklidovské geometrii, euklidovské rovině a euklidovském prostoru.*)

Soustava axiomů euklidovské geometrie je rozdělena na několik skupin. Jednou z nich jsou axiomy metrické, to jest týkající se měření délek a velikostí úhlů. Užíváme-li v geometrii měření, mluvíme o geometrii metrické. Pokud se nezajímáme o délky úseček ani oblouků ani o velikosti úhlů a všímáme si pouze vzájemné polohy jednotlivých geometrických útvarů, jde o geometrii afinní. V afinní geometrii však stále rozlišujeme mezi vlastními a nevlastními**) body a přímkami; pokud všechny body a přímky, vlastní i nevlastní, „zrovnoprávníme", dostáváme geometrii projektivní. Každá z těchto geometrií se vždy zabývá vlastnostmi geometrických útvarů, které se nemění při zobrazeních určitého typu, odborně řečeno invarianty určité grupy transformací. Toto rozdělení provedl Felix Klein (1849—1925) ve svém Erlangenském programu.

V souvislosti s tímto rozdělením si můžeme uvést i takzvanou absolutní geometrii, jejíž soustava axiomů se získá ze soustavy axiomů euklidovské geometrie vynecháním axiomu o rovnoběžkách. Ale o tom se zmíníme podrobněji v samostatném odstavci.

---

*) Jméno Eukleides v polatinštěné podobě zní Euclides; odtud je název „euklidovský". Dříve se říkalo také „eukleidovský".

**) Každé přímce se přiřazuje jistý prvek zvaný nevlastní bod této přímky tak, že dvěma přímkám je přiřazen tentýž nevlastní bod právě tehdy, jsou-li rovnoběžné. Množina všech nevlastních bodů dané roviny se nazývá nevlastní přímka této roviny. Pak lze tvrdit, že libovolné dvě různé přímky v rovině mají společný bod (vlastní nebo nevlastní).

Dále se však geometrie dělí ještě na další odvětví podle toho, jakou metodou se geometrické útvary zkoumají. Používá-li se algebry, jde o algebraickou geometrii. Zavedou-li se metody diferenciálního počtu, jde o geometrii diferenciální a podobně existuje i geometrie integrální. Užívá-li se kombinatoriky, mluvíme o kombinatorické geometrii. Pohybem geometrických útvarů se zabývá kinematická geometrie. Zobrazení třírozměrných útvarů v rovině (promítací metody) zkoumá deskriptivní geometrie. (Deskriptivní geometrie je samozřejmě také součástí matematiky, i když se jí na střední škole vyučuje jako samostatnému předmětu.)

Samostatným oborem, který se již do geometrie nezahrnuje, je topologie. Ta jde v Kleinově Erlangenském programu vlastně nejdále — zkoumá invarianty spojitých transformací. Nebudeme definovat, co to je, ale popíšeme si to názorně. Představme si, že máme dvě křivky vymodelované z plastického drátu. Můžeme-li jednu z nich tak zdeformovat, aby byla geometricky podobná druhé, říkáme, že tyto křivky jsou topologicky ekvivalentní; přitom nesmíme drát nikde přetrhnout ani svařovat či spájet. Takto například úsečka je ekvivalentní kruhovému oblouku, ale nikoli kružnici; kružnice je zase ekvivalentní elipse nebo obvodu čtverce. V topologii se ekvivalentní křivky prostě považují za stejné, nečiní se mezi nimi rozdílu. Podobně se mluví i o topologicky ekvivalentních plochách či jiných útvarech. Topologie se ovšem neomezuje pouze na toto, ale zkoumá obecně pojem spojitosti a pojmy s ním související. Těsně souvisí s funkcionální analýzou, o níž jsme mluvili ve III. kapitole.

Analogií mnohoúhelníka v třírozměrném prostoru je mnohostěn (polyedr). Je to těleso omezené mnohoúhelníkovými stěnami; příkladem mnohostěnu je hranol nebo jehlan.

Jestliže geometrický útvar s libovolnými dvěma body obsahuje celou úsečku, která tyto body spojuje, říkáme mu konvexní útvar; mluvíme tedy také o konvexních mnohostěnech. Pro konvexní mnohostěny platí Eulerův vzorec:

$$n + v = h + 2,$$

kde n je počet stěn, v počet vrcholů a h počet hran. (Ověřte si to na nějakém známém mnohostěnu.)

Víme, že ke každému $n \geqq 3$ existuje v rovině pravidelný konvexní n-úhelník, tedy n-úhelník, který má všechny strany stejně dlouhé a všechny úhly shodné. (Pravidelnému trojúhelníku říkáme rovnostranný trojúhelník, pravidelný čtyřúhelník se nazývá čtverec.) Jeho analogií je pravidelný konvexní n-stěn. Všechny stěny pravidelného n-stěnu jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky a v každém jeho vrcholu se stýká stejný počet hran.

Čekali bychom, že opět pro každé přirozené $n \geqq 4$ bude existovat pravidelný konvexní n-stěn. Uvidíme, že tomu tak není.

Nechť stěny pravidelného konvexního n-stěnu jsou pravidelné p-úhelníky a nechť se v každém vrcholu stýká q hran. Jestliže n, v, h mají stejný význam jako ve výše uvedeném Eulerově vzorci, pak tedy sečtením počtů hran všech stěn dostaneme číslo np, které je dvojnásobkem počtu h hran našeho n-stěnu; každá hrana totiž náleží právě dvěma stěnám, proto se při tomto sčítání počítá dvakrát. Je tedy

$$np = 2h.$$

Sečteme-li počty hran vycházejících z jednotlivých vrcholů, dostaneme číslo qv, které je opět dvojnásobkem počtu hran; každá hrana spojuje dva vrcholy, a tedy se opět počítá dvakrát. Máme

$$qv = 2h.$$

Z toho vypočteme

$$h = \frac{1}{2} np,$$

$$v = 2h/q = np/q,$$

Dosadíme do Eulerova vzorce:

$$\frac{np}{q} + n = \frac{1}{2} np + 2$$

a tedy

$$n = 4q/(2p + 2q - pq).$$

Počet stěn n tedy musí být takový, aby se dal vyjádřit tímto výrazem, kde p a q jsou přirozená čísla a samozřejmě $p \geqq 3$, $q \geqq 3$. Jmenovatel zlomku lze psát jako

$$p(2 - q) + 2q.$$

Protože $q \geqq 3$, je $2 - q$ záporné. Tedy je-li $p \geqq 6$, je

$$p(2 - q) + 2q \leqq 6(2 - q) + 2q = 4(3 - q) \leqq 0.$$

V tomto případě by bylo n záporné nebo nedefinované, protože čitatel zlomku je kladný. Pro $p \geqq 6$ tedy zmíněný mnohostěn neexistuje a můžeme se omezit na hodnoty p rovné 3, 4 a 5. Pro $p = 3$ je

$$n = 4q/(6 - q).$$

Vidíme, že v tomto případě musí být $q \leqq 5$, aby výraz byl kladný a pro q tedy padají v úvahu pouze hodnoty 3, 4 a 5.

Máme tedy tyto možnosti:

a) $p = 3$, $q = 3$, $n = 4$;
b) $p = 3$, $q = 4$, $n = 8$;
c) $p = 3$, $q = 5$, $n = 20$.

Pro $p = 4$ je

$$n = 2q/(4 - q).$$

Zde pro q padá v úvahu pouze hodnota 3. Máme další možnost:

d) $p = 4$, $q = 3$, $n = 6$.

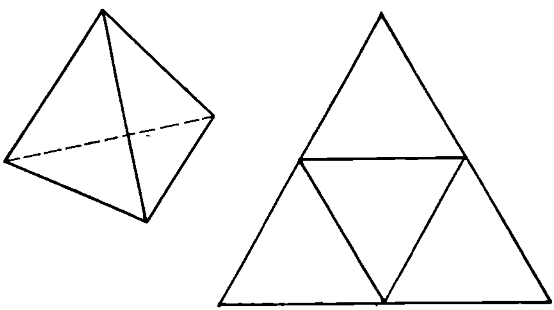
Pro $p = 5$ je

$$n = 4q/(10 - 3q).$$

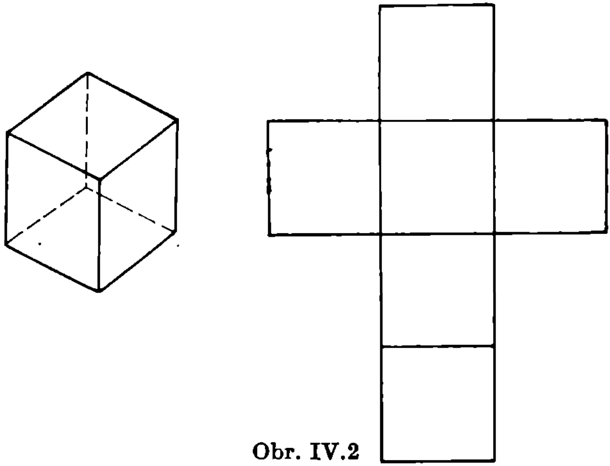
Zde také musí být $q = 3$ a máme poslední možnost:

e) $p = 5$, $q = 3$, $n = 12$.

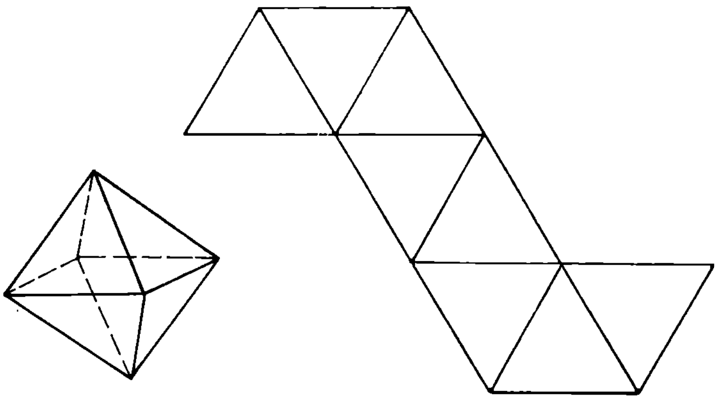
Vidíme tedy, že neexistují jiné pravidelné konvexní



Obr. IV.1

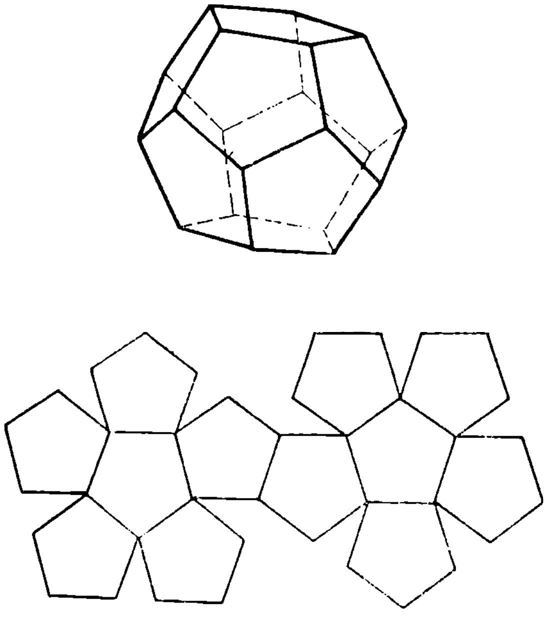


Obr. IV.2



Obr. IV.3

mnohostěny než čtyřstěn (tetraedr), osmistěn (oktaedr), dvacetistěn (ikosaedr), šestistěn (hexaedr) a dvanáctistěn (dodekaedr). Nedokázali jsme zatím, že takovéto



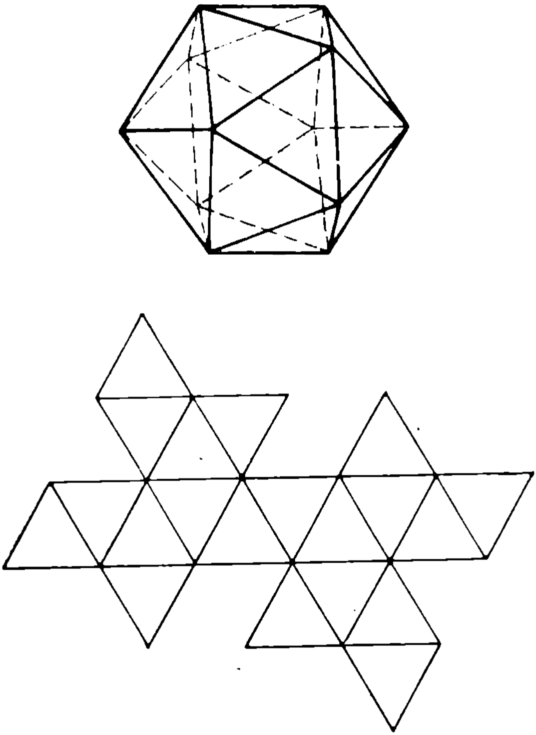
Obr. IV.4

pravidelné konvexní mnohostěny existují; dokázali jsme pouze, že nemohou existovat žádné jiné.

Tyto mnohostěny však existují a byly známy již ve starém Řecku. Někdy se jim podle filozofa Platóna říká platónovská tělesa.

Pravidelný čtyřstěn má čtyři stěny, které jsou rovnostrannými trojúhelníky. Má čtyři vrcholy a šest hran. Na obr. IV.1 vidíme názorný nákres čtyřstěnu a rozvinutí jeho povrchu do roviny.

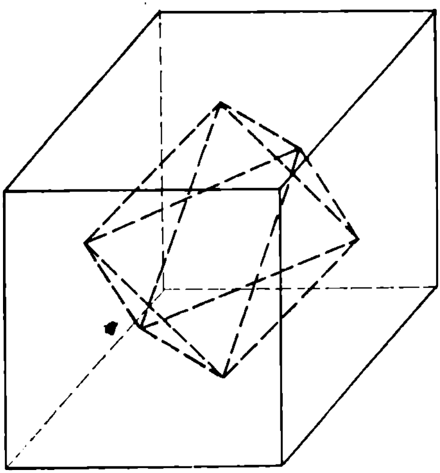
Pravidelný šestistěn se zpravidla nazývá krychle. Má šest stěn, které jsou čtverci. Má osm vrcholů a dvanáct hran (obr. IV.2).



Obr. IV.5

Pravidelný osmistěn má osm stěn, které jsou rovnostrannými trojúhelníky. Má šest vrcholů a dvanáct hran (obr. IV.3).

Pravidelný dvanáctistěn má dvanáct stěn, které jsou



Obr. IV.6

pravidelnými pětiúhelníky. Má dvacet vrcholů a třicet hran (obr. IV.4).

Pravidelný dvacetistěn má dvacet stěn, které jsou rovnostrannými trojúhelníky. Má dvanáct vrcholů a třicet hran (Obr. IV.5).

Víme, že každému pravidelnému mnohoúhelníku lze opsat i vepsat kružnici; středy obou kružnic splývají. Můžeme tedy vzít pravidelný konvexní mnohostěn, na každé stěně najít takovýto střed; dostaneme tak vrcholy jiného pravidelného konvexního mnohostěnu, který nazýváme duálním mnohostěnem k danému mnohostěnu. Ke krychli je duálním mnohostěnem pravidelný osmistěn a k němu je duální opět krychle (obr. IV.6). Podobně pravidelný dvanáctistěn a pravidelný dvacetistěn jsou navzájem duální. Pravidelný čtyřstěn je duální sám k sobě.

Zmiňme se ještě o tom, že každému pravidelnému mnohostěnu lze opsat i vepsat kulovou plochu; středy obou těchto kulových ploch spolu splývají.

VČELY A GEOMETRIE

Představme si, že by si včelí královna pozvala nějakého matematika a požádala by ho o navržení optimálního tvaru včelí buňky. Požadavky by byly asi takovéto:

a) Včelí buňka má mít tvar mnohoúhelníka; všechny buňky v plástvi musejí být stejné.

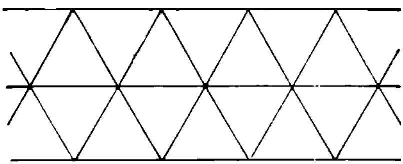
b) Buňky mají být co největší, aby se do nich vešlo co nejvíce medu, přičemž se však musí šetřit stavebním materiálem, to jest voskem. Měly by to být tedy mnohoúhelníky, které při daném obvodu mají maximální obsah.

c) Buňky mají vyplňovat plástev co nejekonomičtěji; mělo by jít tedy o mnohoúhelníky, jimiž lze pokrýt rovinu, to jest rozložit rovinu na takovéto mnohoúhelníky tak, aby žádné dva z nich neměly společný vnitřní bod a aby každý bod roviny náležel některému z nich.

Matematik by se zamyslil a načrtl by příslušný návrh. Jak by asi uvažoval?

Je-li počet vrcholů mnohoúhelníka pevně dán, pak ze všech mnohoúhelníků o daném obvodu má největší obsah pravidelný mnohoúhelník. Ze všech trojúhelníků o daném obvodu má tedy největší obsah rovnostranný trojúhelník, ze všech čtyřúhelníků o daném obvodu čtverec a tak dále. (Důkaz nebudeme uvádět.) Buňky by tedy měly mít tvar pravidelných mnohoúhelníků.

Máme nyní pokrýt rovinu pravidelnými mnohoúhelníky podle podmínky c). Je-li nějaký bod A vrcholem některého z těchto mnohoúhelníků, pak je vrcholem několika takových mnohoúhelníků. Součet velikostí úhlů při vrcholu A všech těchto mnohoúhelníků je roven 360°.



Obr. IV.7

Protože jde o shodné pravidelné mnohoúhelníky, jsou všechny tyto úhly shodné a jejich velikost ve stupních je $360/q$, kde q je počet mnohoúhelníků se společným vrcholem A.

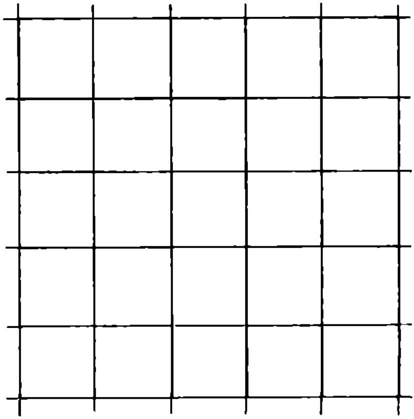
Každý úhel pravidelného n-úhelníka má velikost $180(n - 2)/n$ stupňů. Hledáme tedy takové přirozené n, aby platilo

$$180(n - 2)/n = 360/q,$$

kde q je přirozené číslo. Úpravou dostaneme:

$$n = 2 + 4/(q - 2).$$

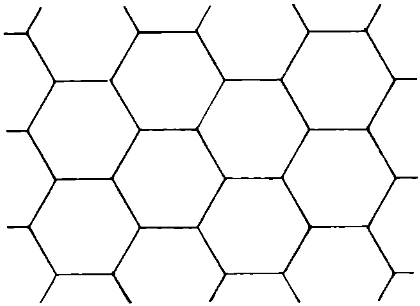
Číslo n má být přirozené. Z toho tedy plyne, že číslo $q - 2$ musí být dělitelem čísla 4. Protože zřejmě $q \geqq 3$, musí být $q - 2$ rovno jedné, dvěma nebo čtyřem a q je rovno třem, čtyřem nebo šesti. Rovinu nelze tedy žádaným způsobem pokrýt jinými pravidelnými mnohoúhelníky než rovnostrannými trojúhelníky, čtverci nebo pravidelnými šestiúhelníky. Takováto pokrytí vidíme na obr. IV.7, IV.8 a IV.9.



Obr. IV.8

Tedy každá včelí buňka by měla být rovnostranným trojúhelníkem, čtvercem nebo pravidelným šestiúhelníkem. Který z těchto obrazců zvolíme? Říkali jsme si, že při pevném počtu vrcholů má ze všech mnohoúhelníků o daném obvodu největší obsah pravidelný mnohoúhelník. Jestliže nyní máme pravidelný n_1-úhelník a pravidelný n_2-úhelník, oba o témž obvodu, kde $n_2 > n_1$, pak obsah pravidelného n_2-úhelníka bude větší než obsah pravidelného n_1-úhelníka. Tedy obsah čtverce je větší než obsah rovnostranného trojúhelníka o stejném obvodu, ale je menší než obsah pravidelného šestiúhelníka, který má také tento obvod. Matematik tedy navrhne včelí královně, aby se včelí buňky stavěly ve tvaru pravidelných šestiúhelníků.

Žádná včelí královna ovšem nikdy se žádným matematikem nekonzultovala. Nicméně včely stavějí své buň-



Obr. IV.9

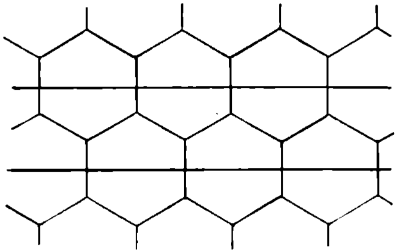
ky přesně podle tohoto návrhu. Nejsou schopny matematických úvah, ale vede je k tomu pud. Dokonce zachovávají přesně délku strany šestiúhelníka; je to 2,71 mm. Proto byla tato délka dokonce navrhována za základ soustavy měr.

Ještě si všimněme obrázků IV.7, IV.8 a IV.9. Jde o takzvané pravidelné parketáže. Takovouto parketáž si můžeme představit jako limitní případ mnohostěnu — „mnohostěn" o nekonečném počtu vrcholů a stěn, jehož všechny stěny leží v jedné rovině. Vraťme se k vzorci

$$n = 4q/(2p + 2q - pq)$$

z předešlého odstavce. Je-li p počet stran pravidelného mnohoúhelníka tvořícího pravidelnou parketáž a q počet hran vycházejících z vrcholu této parketáže, dostáváme ve jmenovateli nulu; máme totiž buď $p = 3$, $q = 6$, nebo $p = 4$, $q = 4$, nebo $p = 6$, $q = 3$. I z toho je patrná zmíněná představa parketáže jako limitního případu mnohostěnu.

V předešlém odstavci jsme mluvili také o dualitě mezi pravidelnými mnohostěny, například mezi krychlí



Obr. IV.10

a pravidelným osmistěnem. Zcela analogicky můžeme zavést pojem duality i u pravidelných parketáží. Trojúhelníková a šestiúhelníková pravidelná parketáž jsou navzájem duální, čtvercová pravidelná parketáž je duální sama k sobě.

Závěrem se zmiňme o tom, že rovinu lze pokrýt i shodnými pětiúhelníky, ale nikoliv pravidelnými (obr. IV.10).

OREL A ORLICE

I v heraldice — nauce o erbech — se můžeme setkat s geometrickými zajímavostmi. Nebylo lhostejné, jaký obraz (v heraldické terminologii figura) byl na štítě;

největší poctou bylo dostat do znaku krále zvířat lva nebo krále ptáků orla, popřípadě orlici.

Jak se však rozezná orel od orlice? V heraldice je to jednoduché — podle počtu hlav. Orlice má jen jednu hlavu, kdežto orel dvě. Rakousko-uherské císařství mělo ve znaku černého orla na zlatém štítě. Dnešní Rakouská republika má ve znaku (bez štítu) černou orlici.

Proč se v heraldice zobrazuje orel se dvěma hlavami? Cožpak v přírodě takoví orli žijí? Důvod je ryze geometrický. Heraldická orlice je souměrná podle svislé osy; jediné, co tuto symetrii narušuje, je hlava, která je zobrazena z profilu. Zobrazovat ptačí hlavu en face by bylo obtížné, zvláště u stylizovaného obrazu, jakým je heraldická figura. Proto se dosahuje symetrie „proti přírodě“ tím, že se přidá další hlava a vznikne orel. Heraldika nemá nic společného s realistickým malířstvím, proto se nad něčím takovým nepozastavuje.

EUKLIDOVSKÉ KONSTRUKCE

Ve škole jste často řešili konstruktivní geometrické úlohy. Šlo při nich o to, sestrojit nějaký geometrický útvar pomocí pravítka a kružítka, jinými slovy použitím dvou základních geometrických úkonů — spojení dvou daných bodů přímkou a opsání kružnice z daného středu daným poloměrem. (Pokud mluvíme o pravítku, máme na mysli pravítko bez měřítka.) Tyto konstrukce se nazývají euklidovské, opět podle Eukleida.

Báje vypráví, že ve starořeckém Délu vypukl mor. Obyvatelé hledali pomoc u boha Apollóna. Jak už to u řeckých bohů bývalo, Apollón pomoc slíbil, ale nikoli zadarmo. V jeho svatyni byl oltář tvaru krychle; Apollón požadoval, aby tento oltář byl nahrazen novým téhož tvaru, ale o dvojnásobném objemu. Tak vznikl takzvaný délský problém neboli problém reduplikace krychle.

Označíme-li délku hrany krychle a, pak hrana krychle o dvojnásobném objemu má délku $a\sqrt[3]{2}$. Šlo tedy o to, k dané úsečce délky a sestrojit úsečku délky $a\sqrt[3]{2}$. Obyvatelé Délu se o to (pomocí pravítka a kružítka) snažili ze všech sil, ale nepodařilo se jim to. A nepodařilo se to nikomu dodnes — ono to totiž nelze.

Představme si, že řešíme euklidovsky nějakou konstruktivní úlohu. Máme při tom dány určité body v rovině; tyto body mají určité souřadnice. Současně s rýsováním si jednotlivé kroky konstrukce propočítáváme analyticky. Jsou-li $[x_A, y_A]$ souřadnice bodu A a $[x_B, y_B]$ souřadnice bodu B, pak přímka AB má rovnici

$$(y_A - y_B)\,x + (x_B - x_A)\,y + x_A y_B - \\ - x_B y_A = 0. \qquad (1)$$

Jsou-li $[x_S, y_S]$ souřadnice bodu S, pak kružnice o středu S, jejíž poloměr je roven délce úsečky AB, má rovnici

$$x^2 + y^2 - 2x_S x - 2y_S y + x_S^2 + y_S^2 = x_A^2 - \\ - 2x_A x_B + x_B^2 + y_A^2 - 2y_A y_B + y_B^2. \qquad (2)$$

Obě tyto rovnice mají tyto společné vlastnosti:

a) Koeficienty u x^2 a y^2 jsou rovny 1 nebo 0.

b) Koeficienty u x a y jsou rovny číslům získaným ze souřadnic daných bodů pomocí násobení celým číslem a sčítání.

c) Absolutní členy jsou rovny číslům získaným pomocí násobení celým číslem a sčítání z čísel, která lze vyjádřit jako součin dvou daných souřadnic.

d) Nevyskytuje se součin xy ani vyšší mocniny x a y než druhé.

Souřadnice průsečíku dvou přímek dostaneme řešením soustavy dvou rovnic typu (1), souřadnice průsečíků přímky s kružnicí řešením soustavy dvou rovnic, z nichž jedna je typu (1) a druhá typu (2), souřadnice průsečíků dvou kružnic řešením soustavy dvou rovnic typu (2).

Mějme nyní dány souřadnice bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$; množina souřadnic všech těchto bodů budiž M_1. Označme M_2 množinu všech reálných čísel, která buď patří do M_1, nebo se dostanou jako řešení zmíněných soustav rovnic splňujících podmínky a), b), c), d), kde „souřadnicemi daných bodů" míníme čísla z množiny M_1. Podobně jako jsme přešli od množiny M_1 k množině M_2, přejdeme od M_2 k další množině M_3, potom od M_3 k M_4 a tak dále. Dostaneme posloupnost množin

$$M_1, M_2, M_3, M_4, \ldots.$$

pro niž platí $M_i \subset M_j$ při $i < j$. Sjednocení všech množin z této posloupnosti označme M. Je zřejmé, že bod, jehož některá souřadnice nepatří do množiny M, euklidovsky z daných bodů $A_1, \ldots, A_n$ nesestrojíme.

Takovéto body skutečně existují. Plyne to z toho, o čem jsme hovořili v I. kapitole. Lze dokázat, že množina M je spočetná, zatímco o množině všech reálných čísel víme, že spočetná není a nemůže se rovnat množině M.

Vezmeme-li tedy bod $A_1 \equiv [0, 0]$ a bod $A_2 \equiv [0, a]$ pak $M_1 = \{0, a\}$. Číslo $a\sqrt[3]{2}$ do množiny M nebude patřit.

Jsou tedy úlohy euklidovsky neřešitelné a délský problém je jednou z nich. Podobně není euklidovsky proveditelná ani rektifikace kružnice a kvadratura kruhu. Rektifikace kružnice znamená sestrojení úsečky, jejíž délka je rovna délce kružnice o daném poloměru; s ní těsně souvisí kvadratura kruhu, to jest sestrojení čtverce, jehož obsah je roven obsahu kruhu o daném poloměru. Neřešitelnost těchto úloh plyne z faktu, že π není algebraické číslo. Rovněž nelze daný obecný úhel rozdělit na třetiny — tzv. trisekce úhlu. (Ve zvláštních případech, například u pravého úhlu, to lze.)

Přestože je toto dokázáno, je mnoho lidí, kteří se stále pokoušejí tyto úlohy řešit. Jde zpravidla o lidi, kteří sice matematiku neznají, jsou však nepřístupní jakémukoliv poučení. Vypráví se historka o jednom „řešiteli“, který „vyřešil“ délský problém díky tomu, že se domníval, že grafem funkce $y = x^3$ je přímka. Obtěžoval se svým „řešením“ tři významné akademiky na matematicko-fyzikální fakultě Karlovy univerzity, ale ani jim se nepodařilo ho o jeho omylu přesvědčit. Je to poučení i pro vás — než se začnete pokoušet o vědeckou práci, především studujte. Tím se vyhnete tomu, abyste objevovali dávno objevené nebo se pokoušeli o něco, o čem je dokázáno, že je to nemožné.

VÍCEROZMĚRNÉ PROSTORY

Představme si, že kdesi existují dvourozměrné bytosti, které nemají potuchy o existenci třetího rozměru; jejich světem je rovina. Kdyby do jejich světa vtrhl někdo z nás třírozměrných, mohl by tam provádět věci nevídané.

Mohl by třeba zázračným způsobem osvobodit vězně z vězení. Vězeň by si odpykával svůj trest v cele, která by měla tvar nějakého rovinného obrazce, například obdélníka (obr. IV.11). Obdélník je ze všech stran uzavřen svými stranami, které představují nepřekonatelnou překážku. Vězeň zaručeně nemůže utéci — vždyť z vnitřního bodu obdélníka do kteréhokoliv vnějšího bodu se lze dostat jen skrz jeho stranu, to jest stěnu vězení.

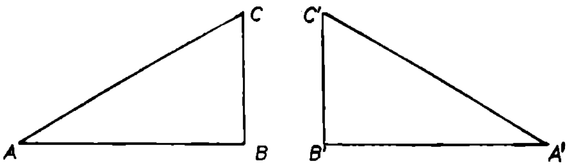
A nyní by přišel třírozměrný našinec a provedl by zázrak. Sebral by vězně, vyzvedl ho z roviny do třírozměrného prostoru a opět by ho položil do roviny v některém místě mimo vězení. Dvourozměrné bytosti by žasly — jak se jen mohl podařit útěk z uzamčené cely? Prošel

Obr. IV.11

snad vězeň zdí? My víme, že zdí neprošel, ale šel cestou, která je pro dvourozměrné bytosti nepochopitelná. Šel mimo rovinu, v níž tyto bytosti žijí, tedy z jejich hlediska prostě opustil svět a zase se vrátil, ovšem na zcela jiné místo světa, než ze kterého odešel.

A nyní přejděme v našich úvahách o dimenzi výše. Na místo dvourozměrných bytostí přijdeme my a na naše místo pak bytosti čtyřrozměrné. Kdyby se do našeho života začaly plést tyto bytosti, mohlo by se také stát, že by nějaký vězeň tajemně zmizel z cely a objevil se někde mimo areál nápravně výchovného zařízení. Marně bychom si kladli otázku, kudy uprchl. Skrz zamčené dveře? Skrz mříže v okně? Skrz zeď, podlahu či strop? Nikoliv, odešel jinudy. Čtyřrozměrná bytost ho vynesla ven ze světa, tedy mimo náš třírozměrný prostor, a vrátila ho do tohoto prostoru na jiném místě.

Existence čtyřrozměrného prostoru by byla výhodná nejen pro vězně, ale i pro počestné řemeslníky. Roztržitému obuvníkovi se může stát, že omylem místo páru bot ušije dvě stejné levé boty. Mohl by tedy vyhodit jednu z těchto levých bot ven z našeho prostoru a tato



Obr. IV.12

bota by dopadla zpět jako pravá. Podobně by si mohl pomoci i rukavičkář.

Je tu totiž opět analogie. Na obr. IV.12 vidíme dva trojúhelníky $\Delta\ ABC$ a $\Delta\ A'B'C'$. Tyto trojúhelníky jsou nepřímo shodné; existuje vzájemně jednoznačné zobrazení, které zobrazuje body jednoho z nich na body druhého a zachovává délky úseček i velikosti úhlů, avšak žádným pohybem v rovině nelze převést jeden z těchto trojúhelníků v druhý. Kdybychom měli tyto trojúhelníky vystřižené z papíru a posunovali je po desce stolu, nikdy se nám je nepodaří přemístit tak, aby ležely na sobě a aby přitom splýval vrchol A s vrcholem A', vrchol B s vrcholem B' a vrchol C s vrcholem C'. Můžeme však jeden trojúhelník zvednout se stolu, obrátit jej lícem dolů a položit zpět na stůl. Tímto pohybem ve třírozměrném prostoru jsme dostali z trojúhelníků nepřímo shodných trojúhelníky přímo shodné.

Stejně tak existují i nepřímo shodné třírozměrné útvary; příkladem je pravá a levá bota nebo pravá a levá rukavice z téhož páru. Pohybem ve čtyřrozměrném prostoru lze převést nepřímo shodné třírozměrné útvary v útvary přímo shodné; pohybem v třírozměrném prostoru to nelze.

Další prostor pro bujnou fantazii skýtá prostoročas. Ke třem souřadnicím x, y, z bodu v třírozměrném prostoru přidejme čtvrtou souřadnici t, která značí čas. Potom uspořádaná čtveřice $[x, y, z, t]$ představuje bod čtyřrozměrného prostoru a je to takzvaná událost. Čtveřice $[x, y, z, t]$ prostě znamená, že určitý bod měl v časovém okamžiku t souřadnice x, y, z. Každé hodnotě souřadnice t odpovídá nějaký třírozměrný prostor, který vyjadřuje situaci v příslušném okamžiku; tyto třírozměrné prostory tvoří soustavu navzájem rovnoběžných prostorů, analogickou osnově přímek v rovině. Pokud bychom si představili, že takovýto časoprostor reálně existuje jako čtyřrozměrný prostor, pak bychom si mohli představit různé výlety do minulosti. Například historik, kterému vrtá hlavou, kdo vlastně zavraždil Václava III., mohl by si najít prostor odpovídající příslušnému okamžiku v roce 1306 a pak už by zbývalo jen vydat se do Olomouce, aby byl svědkem této historické události. Riskoval by ovšem při tom, že si ho s tím králem spletou. Kdyby se tak stalo a kdyby přesto vyvázl životem a vrátil se do dnešní doby, mohl by také zjistit, že jeho diplom je neplatný, protože Karlova univerzita nikdy neexistovala. Václav III., vyváznuv z rukou vrahů, zplodil nástupce trůnu Přemysla Otakara III., takže Přemyslovci po meči zůstali zachováni a Lucemburkové nikdy na český trůn nenastoupili.

A poněvadž Přemysl Otakar III. zůstal věren rytířským mravům a dával přednost lovu a turnajům před zakládáním univerzit, zůstala Praha bez univerzity.

Toto všechno jsou ovšem fantazie a zkoumání vícerozměrných prostorů v matematice a ve fyzice s tím nemá nic společného. Matematik zkoumá tyto prostory, aniž by se třásl před mohutnou čtyřrozměrnou rukou, která by ho z ticha jeho pracovny přenesla čtyřrozměrným prostorem do některé prázdné cely v Sing-Singu. Vícerozměrné prostory jsou pro něho prostředkem, jak zjednodušit určité úvahy. Například máme-li soustavu n hmotných bodů, pak tyto body mají dohromady $3n$ souřadnic a lze tuto soustavu zkoumat jako jeden bod ve $3n$-rozměrném prostoru. Známe-li analytickou geometrii v třírozměrném prostoru, není už tak těžké přidat další souřadnice a pracovat s nimi analogicky. Stejně je tomu i s prostoročasem. Jde prostě o takzvaný matematický aparát; pod slovem aparát si nemusíme představovat zrovna fotoaparát nebo radioaparát, ale prostě něco, čeho se používá, aby se dosáhlo nějakých výsledků. Pro libovolné přirozené n je n-rozměrný prostor pro matematika prostě množinou všech uspořádaných n-tic reálných čísel, s nimiž se pracuje jako se souřadnicemi bodů. O tom, zda takovýto prostor skutečně existuje v tom smyslu, v jakém mluvíme o našem třírozměrném prostoru, matematik prostě neuvažuje; to je otázka spíše pro fyziky, astronomy a filozofy.

NEEUKLIDOVSKÁ GEOMETRIE

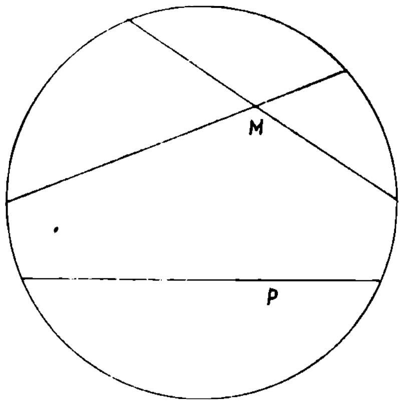
Jedním z axiomů euklidovské geometrie je axiom o rovnoběžkách. Říká, že daným bodem lze k dané přímce vést právě jednu rovnoběžku.

Dlouho se matematikové zabývali otázkou, zda je skutečně nutno tento axiom považovat za axiom — zda by se totiž nedal dokázat z ostatních axiomů. Ruský matematik N. I. Lobačevskij (1793—1856) a maďarský matematik J. Bolyai (1802—1860) se na tuto otázku rozhodli jít cestou, která dnes je v matematice běžná, ale tehdy znamenala něco revolučního. Rozhodli se zkoumat geometrii, v níž by platily všechny axiomy euklidovské geometrie s výjimkou axiomu o rovnoběžkách; ten by byl nahrazen axiomem tvrdícím, že daným bodem k dané přímce, která jím neprochází, lze vést alespoň dvě přímky, které s danou přímkou nemají společný bod.

Lze skutečně sestrojit model takovéto geometrie. Modelem geometrie rozumíme soustavu nějakých prvků zvaných „body" a nějakých prvků zvaných „přímky", pro něž příslušná soustava axiomů platí. Nezáleží na tom, že nejde o body a přímky v běžném smyslu; pokud by axiom o rovnoběžkách skutečně vyplýval z ostatních axiomů, musel by platit v každém modelu, který tyto axiomy splňuje.

Zvolme v rovině kružnici k. „Body" našeho modelu budou všechny body ležící uvnitř kružnice k (a žádné jiné), „přímky" budou vnitřky všech tětiv kružnice k. Pro tyto „body" a „přímky" platí všechny axiomy euklidovské geometrie kromě axiomu o rovnoběžkách. (Aby platily metrické axiomy, musíme délky úseček a velikosti úhlů definovat trochu jinak než běžným způsobem, ale tím se zde nebudeme zabývat.) Přitom však daným „bodem" lze k dané „přímce" vést dokonce nekonečně mnoho „přímek", které s ní nemají společný „bod". Na obr. IV.13 vidíme dvě takovéto „přímky" vedené „bodem" M k přímce p. Z toho plyne, že axiom o rovnoběžkách nevyplývá z ostatních axiomů; kdyby tomu tak bylo, musel by platit i zde. Takováto geometrie se nazývá geometrie Lobačevského.

Axiom o rovnoběžkách lze nahradit i axiomem tvrdícím, že každé dvě přímky mají společný bod; pak je však nutno trochu pozměnit i některé další axiomy.



Obr. IV.13

Dostaneme tak geometrii, které se říká Riemannova geometrie podle G. F. B. Riemanna (1826—1866). I zde si můžeme sestrojit určitý model. Mějme kulovou plochu. „Bodem" našeho modelu bude každá dvojice navzájem protilehlých bodů této plochy, „přímkou" bude každá hlavní kružnice kulové plochy, to jest kružnice, jejímž středem a poloměrem je střed a poloměr kulové plochy.

Pokud axiom o rovnoběžkách prostě vynecháme a ničím jej nenahradíme, mluvíme o absolutní geometrii. Každé tvrzení, které platí v absolutní geometrii, platí i v geometrii euklidovské, Lobačevského i Reimannově.

Zkoumání neeuklidovských geometrií má význam v moderní fyzice (teorie relativity).

KONEČNÁ PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE

V úvodu této kapitoly jsme mluvili o tom, co je to projektivní geometrie. Její základní axiomy jsou pouze tři:

1. Libovolnými dvěma body prochází právě jedna přímka.
2. Libovolné dvě přímky mají společný právě jeden bod.
3. Existují čtyři body, z nichž žádné tři neleží v přímce.

Někdy se přidávají ještě další axiomy (například axiom Desarguesův), ale základem jsou tyto tři. Bereme-li všechny body a přímky v euklidovské rovině, včetně nevlastních, tyto axiomy jsou zřejmě splněny. Bodů a přímek je ovšem nekonečně mnoho.

Existují však modely projektivní geometrie, které mají jen konečný počet „bodů" a „přímek". S modely určité geometrie jste se setkali už v předešlém odstavci; nebude vám tedy činit potíže představit si, že „body" budou čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 a „přímkami" budou tříprvkové množiny $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 3, 7\}$, $\{1, 4, 6\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{2, 4, 7\}$, $\{3, 4, 5\}$ a $\{5, 6, 7\}$. O „bodu" řekneme, že leží na „přímce" právě tehdy, je-li prvkem příslušné množiny. Můžete si ověřit, že všechny axiomy zde platí.

Máme tedy projektivní geometrii, která má pouze sedm bodů a sedm přímek (uvozovky zde již vynecháváme); na každé přímce leží tři body, každým bodem procházejí tři přímky. Je to nejmenší možný počet bodů a přímek takovéto geometrie. Existují ovšem další konečné projektivní geometrie; v každé z nich každá přímka obsahuje tentýž počet k bodů a rovněž každým bodem prochází k přímek. Celkový počet bodů a celkový počet přímek se také sobě rovnají; je to

$$n = k^2 - k + 1.$$

Neexistuje ovšem konečná geometrie pro každé k, ale lze dokázat, že existuje tehdy, je-li $k = p^a + 1$, kde p je prvočíslo, a je přirozené číslo.

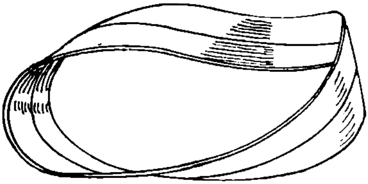
Pokud však bychom chtěli najít model konečné geometrie, v němž by skutečně množina bodů byla podmnožinou množiny bodů (vlastních i nevlastních) euklidovské roviny a rovněž množina přímek byla podmnožinou množiny přímek této roviny, nepodaří se nám to. Zvolíme-li totiž v euklidovské rovině čtyři body, z nichž žádné tři neleží v přímce, spojujeme tyto body přímkami, hledáme průsečíky těchto přímek a opět je spojujeme a tak dále, neskončíme nikdy po konečném počtu kroků a dostaneme tak geometrii nekonečnou.

Ještě více než v samotné geometrii se konečné geometrie uplatňují v algebře (teorie svazů) a v kombinatorice.

MOEBIŮV LIST

Povíme si o jednom zajímavém kouzle. Vezmete proužek papíru, jehož konce jsou slepeny. Ukážete divákům, že na jedné ani na druhé straně proužku není vůbec nic nakresleno. Potom před diváky podél proužku kreslíte čáru tak dlouho, až se vrátíte do výchozího bodu. Diváci vás mohou ostře sledovat, aby se přesvědčili, že nezvedáte tužku s papíru. Pak proužek opět ukážete. Diváci užasnou — čára je na obou stranách proužku!

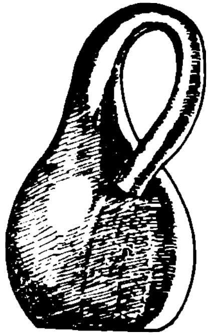
Celý trik spočívá ve způsobu, jakým jsou slepeny konce proužku. Aby kouzlo vyšlo, nesmíme je slepit běžným způsobem (rub na líc), ale musíme nejprve proužek zkroutit o 180° a potom přilepit rub na rub. Teď už je zřejmé, jak se „kouzlí“. Začneme-li kreslit na líci, přejdeme v místě slepení na rub, nakreslíme čáru na rubu, v místě slepení opět přejdeme na líc a kreslení dokončíme. V kouzle můžeme pokračovat tak, že proužek podél nakreslené čáry rozstřihneme; proužek se nerozpadne na dva kusy, ale zůstane vcelku.



Obr. IV.14

Náš slepený proužek má tvar jisté zajímavé plochy, která se podle A. F. Moebia (1790—1868) nazývá Moebiův list (obr. IV.14). Moebius patří vlastně k prvním průkopníkům té oblasti matematiky, která se dnes nazývá topologie a o níž jsme se zmínili už v úvodu této kapitoly. Moebiův list je příkladem takzvané neorientovatelné plochy. Orientovat plochu znamená v podstatě určit její „rub“ a „líc“ (to je ovšem řečeno nematematicky). U roviny to zřejmě lze, u kulové plochy také. U Moebiova listu nikoliv; mohli bychom říci, že „má jen jednu stranu“. Rovněž okraj Moebiova listu je pouze jednou souvislou křivkou. Tato plocha se tedy počítá mezi neorientovatelné, na rozdíl od roviny nebo kulové plochy, které jsou plochami orientovatelnými.

Vezměme si nyní kruh vystřižený z papíru a slepme jeho okraj po celé délce s okrajem Moebiova listu. Prakticky to raději nezkoušejte, protože se vám to nepodaří. Něco takového si dovedeme představit pouze ve čtyřrozměrném prostoru. Protože však už víme, že matematik běžně pracuje i s vícerozměrnými prostory, můžeme v úvahách klidně pokračovat. Dostaneme uzavřenou plochu, která je topologicky ekvivalentní s projektivní



Obr. IV.15

rovinou. Co to znamená? Projektivní rovina vznikne z euklidovské roviny přidáním nevlastní přímky. Existuje tedy vzájemně jednoznačné zobrazení množiny všech vlastních i nevlastních bodů roviny na množinu bodů naší plochy, které je spojité a převádí každou přímku projektivní roviny (tedy včetně jejího nevlastního bodu) na nějakou uzavřenou křivku na naší ploše. (Nebudeme definovat, co je spojité zobrazení, ale podle toho, co jsme si řekli v úvodu naší kapitoly o topologii, si dovedete představit, co to je.) Přitom tyto křivky mají tytéž vlastnosti jako přímky v projektivní rovině — každými dvěma body plochy prochází právě jedna takováto křivka a každé dvě takovéto křivky mají právě jeden společný bod. Proto této ploše z hlediska topologie můžeme prostě říkat projektivní rovina; víme, že topologie takové plochy, které jsou mezi sebou topologicky ekvivalentní, prostě nerozlišuje.

Vezměme nyní dva Moebiovy listy a slepme jejich okraje (samozřejmě to opět v třírozměrném prostoru nelze). Dostaneme neorientovatelnou plochu, která se nazývá Kleinova láhev. Proč zrovna láhev? Je to patrné z obr. IV.15. Vidíme zde jakousi „komínovou rouru", která prochází stěnou „láhve"; ve skutečnosti ovšem vede „jinudy" jako onen vězeň prchající z vězení.

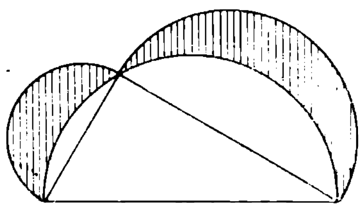
Úlohy

1. Sestrojte trojúhelník, jsou-li dány velikosti jeho výšek.

2. Sestrojte trojúhelník, jsou-li dány délky jeho těžnic.

3. Útvar na obr. IV.16 se nazývá Hippokratovy měsíčky. Jeho obvod tvoří půlkružnice, jejichž průměry jsou strany pravoúhlého trojúhelníka. Vypočtěte obsah tohoto útvaru, znáte-li délky a, b odvěsen trojúhelníka.

4. Letadlo letělo sto kilometrů přesně na jih, potom sto kilometrů na západ a zase sto kilometrů na sever. Přitom se na-

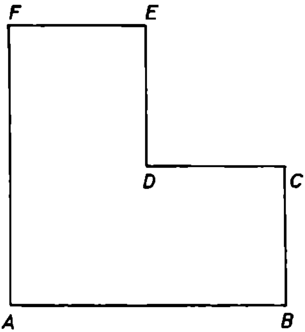


Obr. IV.16

konec vrátilo přesně na totéž místo, odkud vzlétlo. Jak je to možné? Pozor, úloha má dvě řešení.

5. Obrazec na obr. IV.17 rozdělte na čtyři shodné nepřekrývající se obrazce.

6. Když jste vyřešili úlohu 5, jistě vám nebude dělat potíže ani tato úloha: Rozdělte čtverec na pět shodných nepřekrývajících se obrazců.



$$\overline{BC}=\overline{FE}=\overline{CD}=\overline{ED}=\tfrac{1}{2}\overline{AB}$$
$$\overline{AB}=\overline{AF}$$

Obr. IV.17

7. Státní vlajky severských států jsou obdelníky s křížem zvaným heroldský, sahajícím až ke kraji vlajky. Představme si, že by kříž zabíral přesně polovinu obsahu obdélníka; obě jeho ramena jsou ovšem stejně široká. Určete šířku ramen kříže v závislosti na délkách *a*, *b* stran obdélníka.

8. Mluvíme-li už o vlajkách, připomeňme si, že u každé státní vlajky je (přímo ústavou příslušného státu) přesně určen poměr délek stran. Všechny exempláře téže státní vlajky jsou si tedy geometricky podobné, ať už jde o vlajku na obří lodi nebo o stolní vlaječku, která se klade na stůl oficiálním hostům z příslušné země. Rozhodně byste měli vědět, jaký je poměr délek stran u československé státní vlajky.

9. Pouze u dvou státních vlajek je tento poměr 1 : 1 a jde tedy o vlajky čtvercového tvaru. Které státy mají takovéto vlajky?

10. A ještě jedna otázka tohoto typu: Který jediný stát na světě má vlajku jiného tvaru než čtyřúhelníkového?

11. V rovině jsou dány dvě různoběžné přímky a, b a bod M, který leží mimo ně. Máme tento bod spojit přímkou s průsečíkem P přímek a, b. „To nic není," řeknete. Ovšem pozor: přímky a, b se protínají mimo papír, na který kreslíme, a nesmíme papír nastavovat ani kreslit po stole. (Říkáme v tomto případě, že průsečík P je nepřístupný.)

12. Nyní mějme opět nepřístupný průsečík P přímek a, b a dále přímku c, jejíž průsečíky s přímkami a i b jsou přístupné. Bodem P máme k přímce c vést kolmici.

13. Máme lupu, která zvětšuje pětkrát. Podíváme se touto lupou na úhel velikosti 5°. Jak velký se nám bude tento úhel jevit?

14. Představme si, že by zeměkoule byla přesnou koulí s rovným povrchem bez horstev a moří. Kolem rovníku by byl napjat drát těsně obepínající zeměkouli. Tento drát by se náhle prodloužil o metr. Lze jej pak nazvednout tak, aby pod ním podběhla myš?

Řešení úloh

1. Jsou-li a, b, c délky stran trojúhelníka a v_a, v_b, v_c velikosti příslušných výšek, pak pro obsah P tohoto trojúhelníka platí:

$$P = \frac{1}{2} av_a = \frac{1}{2} bv_b = \frac{1}{2} cv_c.$$

Z toho plynou tyto úměry:

$$\begin{aligned} a : b &= v_b : v_a, \\ b : c &= v_c : v_b, \\ a : c &= v_c : v_a. \end{aligned} \tag{1}$$

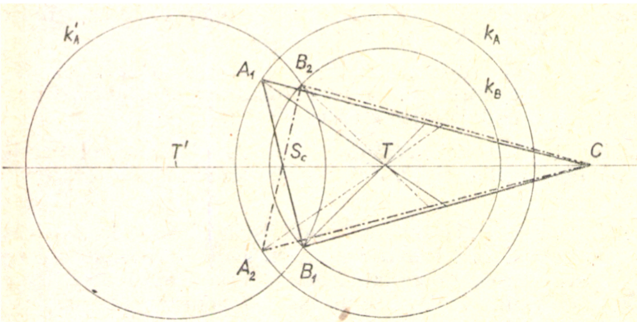
Mějme nyní nový trojúhelník, jehož délky stran jsou v_a, v_b, v_c

a velikosti příslušných výšek w_a, w_b, w_c. Pak zřejmě opět platí:

$$
\begin{aligned}
w_a : w_b &= v_b : v_a, \\
w_b : w_c &= v_c : v_b, \qquad (2)\\
w_a : w_b &= v_b : v_a.
\end{aligned}
$$

Srovnáním úměr (1) a (2) dostáváme:

$$w_a : w_b : w_c = a : b : c. \qquad (3)$$



Obr. IV.18

Sestrojíme tedy nejprve trojúhelník T_1, jehož délky stran jsou dané velikosti výšek v_a, v_b, v_c. V tomto trojúhelníku sestrojíme výšky a pak sestrojíme trojúhelník T_2, jehož délky stran se rovnají velikostem w_a, w_b, w_c těchto výšek. Podle (3) tento trojúhelník je podobný hledanému trojúhelníku. Nyní tedy zbývá k trojúhelníku T_2 sestrojit podobný trojúhelník T, v němž výška ke straně odpovídající straně délky w_a v T_2 má velikost v_a; tento trojúhelník je řešením úlohy.

2. Dané délky těžnic označme t_a, t_b, t_c. Nechť vrcholy hledaného trojúhelníka jsou A, B, C, nechť středy stran protilehlých těmto vrcholům jsou po řadě S_a, S_b, S_c. Těžiště označme T. Sestrojíme nejprve trojúhelník $\Delta\, ABT$. Délka strany AT je rovna $\frac{2}{3}\, t_a$, délka strany BT se rovná $\frac{2}{3}\, t_b$. Dále známe délku těžnice S_cT trojúhelníka $\Delta\ ABT$; je rovna $\frac{1}{3} t_c$. Sestrojme nejprve úsečku S_cT. Bod A musí ležet na kružnici k_A o středu T a o poloměru $\frac{2}{3} t_a$; podobně bod B leží na kružnici k_B o středu T a o poloměru $\frac{2}{3} t_b$. Bod B je obrazem bodu A ve středové souměrnosti o středu S_c; leží tedy na kružnici k'_A, která je obrazem kružnice k_a v této souměrnosti (obr. IV.18). Bod B tedy nalezneme jako průsečík kružnic k'_A a k_B (jsou možná dvě řešení). Bod A pak sestrojíme jako obraz bodu B ve zmíněné souměrnosti. Takto máme sestrojen trojúhelník $\Delta\ ABT$. Nyní již snadno nalezneme i bod C; leží na polopřímce S_cT ve vzdálenosti t_c od bodu S_c.

3. Výsledek dostaneme tak, že od obsahu útvaru složeného z trojúhelníka a půlkruhů nad odvěsnami odečteme obsah půlkruhu nad přeponou. Máme tedy

$$P = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}\pi a^2 + \frac{1}{8}\pi b^2 - \frac{1}{8}\pi c^2.$$

Podle Pythagorovy věty $c^2 = a^2 + b^2$, tedy

$$P = \frac{1}{2}ab.$$

Obsah Hippokratových měsíčků je roven obsahu příslušného pravoúhlého trojúhelníka. Všimněte si, že se ve výsledku nevyskytuje číslo π, ač jde o útvar omezený kruhovými oblouky.

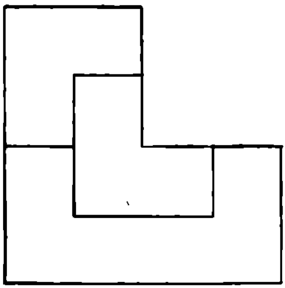
4. První řešení: Letadlo startovalo ze severního pólu. Odtud mohlo letět po libovolném poledníku, neboť vždy šlo o cestu na jih. Potom letělo sto kilometrů po rovnoběžce, takže bylo stále vzdáleno sto kilometrů od severního pólu. Nakonec letělo sto kilometrů na sever, takže se opět vrátilo na severní pól.

Druhé řešení: Na severní i jižní zemské polokouli existují rovnoběžky všech možných délek nepřesahujících délku rovníku. Existuje tedy na jižní polokouli rovnoběžka délky sto kilometrů. Letadlo startovalo z místa vzdáleného od této rovnoběžky sto kilometrů na sever. Letělo na jih až k této rovnoběžce, celou ji obletělo a vrátilo se na sever stejnou cestou, jakou předtím letělo na jih. (Na severní polokouli ovšem také existuje rovnoběžka délky sto kilometrů; neexistuje však místo vzdálené od ní na sever sto kilometrů, protože severní pól je od ní blíže než sto kilometrů.)

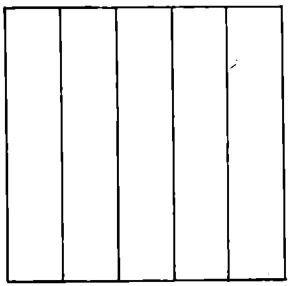
5. Řešení je na obr. IV.19.

6. Řešení je na obr. IV.20. Je to řešení velice jednoduché. Po trápení s předešlou úlohou jste však na to asi hned nepřišli. Pravděpodobně jste uvažovali: „Předtím se dělilo na čtyři obrazce, a jak to bylo složité! Což teprve dělit něco na pět obrazců!"

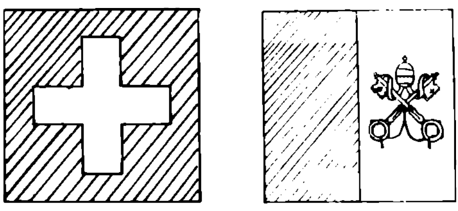
7. Hledaná šířka nechť je x. Obsah jednoho ramene kříže je



Obr. IV.19



Obr. IV.20



Obr. IV.21

roven ax, obsah druhého bx. Obsah kříže dostaneme tak, že od součtu těchto obsahů odečteme obsah x^2 jejich společné části. Má-li se tento obsah rovnat polovině obsahu obdélníka, musí platit:

$$ax + bx - x^2 = \frac{1}{2} ab.$$

Úpravami dostaneme kvadratickou rovnici:

$$2x^2 - 2(a + b)\,x + ab = 0.$$

Řešení je:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}(a + b \pm \sqrt{a^2 + b^2}).$$

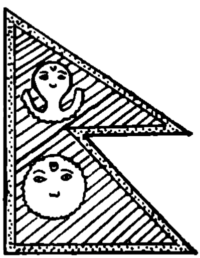
Protože x musí být menší než a i než b, padá v úvahu pouze hodnota $\frac{1}{2}(a + b - \sqrt{a^2 + b^2})$.

8. Tento poměr je 2 : 3.

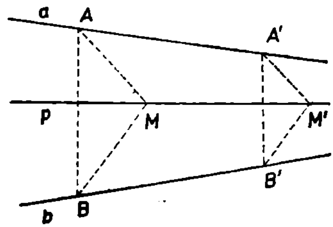
9. Je to Švýcarsko a Vatikán; jejich vlajky vidíme na obr. IV.21.

10. Je to Nepál; jeho vlajka je na obr. IV.22.

11. Zvolme bod A na přímce a a bod B na přímce b tak, aby body A, B, M neležely v přímce. Dále zvolme na přímce a bod A' různý od A. Existuje právě jedna stejnolehlost o středu P, v níž bod A' je obrazem bodu A. Bod B' odpovídající v této stejnolehlosti bodu B sestrojíme jako průsečík přímky b (což



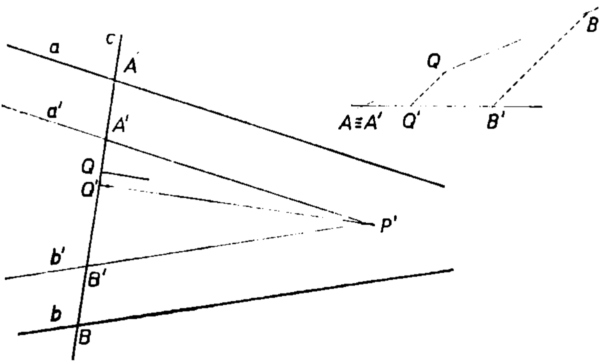
Obr. IV.22



Obr. IV.23

je spojnice BP) s rovnoběžkou k přímce AB vedenou bodem A'. Podobně sestrojíme i obraz M' bodu M; bude to průsečík rovnoběžky k přímce AM vedené bodem A' s rovnoběžkou k přímce BM vedené bodem B'. Protože M' je obrazem bodu M ve stejnolehlosti o středu P, je $M' \neq M$ a přímka MM' prochází bodem P, tedy je to hledaná přímka MP. (Obr. IV.23).

12. Nechť A, B jsou po řadě průsečíky přímek a, b s přímkou c. Zvolme bod P' mimo přímku c a veďme jím přímky $a' \parallel a$,



Obr. IV.24

$b' \parallel b$. Průsečíky přímek a', b' s přímkou c označme po řadě A', B'. Trojúhelníky $\Delta\ ABP$ a $\Delta\ A'B'P'$ jsou podobné. Veďme bodem P' kolmici k přímce c a její patu označme Q'. Bod Q' v příslušné podobnosti odpovídá bodu Q, který je patou kolmice vedené z bodu P k přímce c; máme tedy:

$$AQ : BQ = A'Q' : B'Q'$$

a pomocí této úměry snadno sestrojíme bod Q a vedeme jím kolmici k přímce c, což je hledaná kolmice. (Obr. IV.24).

13. Úhel se i při pohledu lupou bude jevit ve velikosti 5°, protože lupa zvětšuje pouze délky, nikoliv velikosti úhlů.

14. Nechť R je poloměr zeměkoule v metrech. Pak původní délka drátu v metrech je $2\pi R$. Zvětšíme-li drát o metr, bude tato délka rovna $2\pi R + 1$. Můžeme tedy z drátu utvořit kružnici o poloměru $R + \frac{1}{2\pi}$. Všechny body této kružnice pak mohou být umístěny ve výšce $\frac{1}{2\pi}$ metru nad zemským povrchem. Je to více než čtrnáct centimetrů, tedy myš může pod drátem klidně podběhnout.

V. KAPITOLA

TEORIE GRAFŮ A KOMBINATORIKA

Jednou z moderních matematických disciplín je teorie grafů. Grafy, které tato teorie zkoumá, však nejsou grafy funkcí, ale jiné objekty, které s grafy funkcí mají společný jen název odvozený z řeckého „grafein“, což znamená „psáti“. Rozlišují se grafy neorientované a orientované.

Neorientovaný graf G je uspořádaná dvojice množin $[U, H]$, kde U je nějaká množina, jejíž prvky nazýváme uzly grafu G, a H je podmnožina množiny všech neuspořádaných dvojic různých prvků množiny U; prvky množiny H nazýváme hranami grafu G.

Zaměníme-li v této definici slovo „neuspořádaných“ slovem „uspořádaných“, dostaneme definici orientovaného grafu.

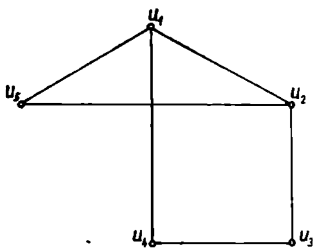
Zatím vám tyto definice asi mnoho neříkají; zvláště asi nechápete, proč se něčemu takovému říká zrovna graf. Povězme si tedy, jak se takovéto grafy znázorňují; omezíme se na případ, kdy množina U (a tedy i množina H) je konečná.

Prvky množiny U (tedy uzly grafu) si nakreslíme jako malé kroužky. Jestliže $u \in U$, $v \in U$ a neuspořádaná dvojice $\{u, v\} \in H$, nakreslíme úsečku nebo oblouk spojující kroužky odpovídající uzlům u a v. Tak dostaneme znázornění neorientovaného grafu. Příklad vidíme na obr. V.1. Zde $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, hrany grafu jsou dvojice $\{u_1, u_2\}$, $\{u_1, u_4\}$, $\{u_1, u_5\}$, $\{u_2, u_3\}$, $\{u_2, u_5\}$, $\{u_3, u_4\}$.

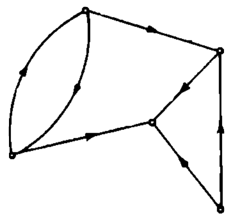
Místo $\{u_1, u_2\}$ můžeme hranu zapsat stručně jako u_1u_2.

Podobně bychom zakreslili i orientovaný graf. Je-li $u \in U$, $v \in U$ a uspořádaná dvojice $[u, v] \in H$, kreslíme úsečku nebo oblouk spojující kroužky odpovídající uzlům u a v se šipkou směřující ke kroužku znázorňujícímu uzel v. Příklad vidíme na obr. V.2.

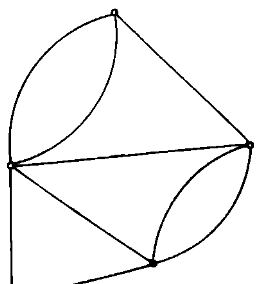
O hraně uv v neorientovaném grafu G říkáme, že spojuje uzly u a v a že je incidentní s uzly u a v. (Proč mluvíme o spojování, je zřejmé z toho, co jsme si právě



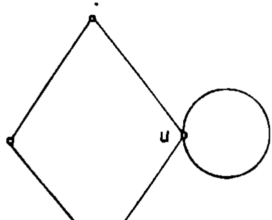
Obr. V.1



Obr. V.2



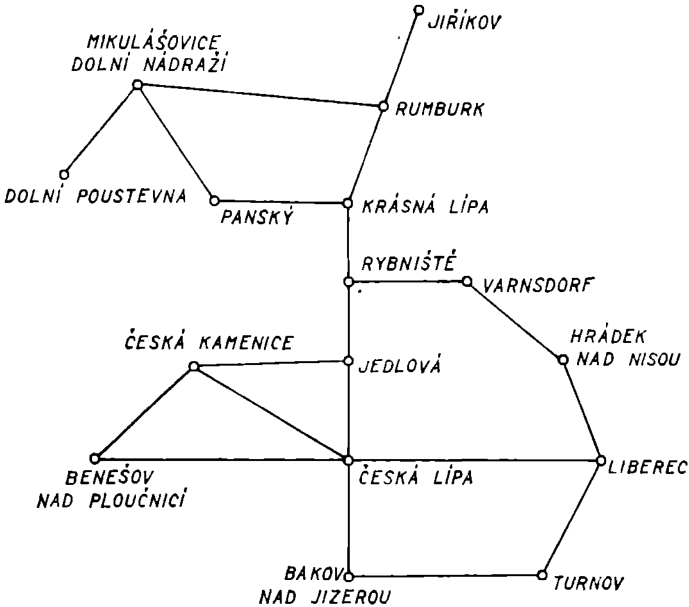
Obr. V.3



Obr. V.4

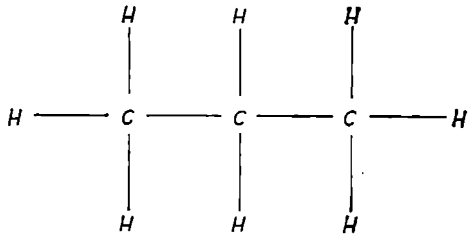
říkali.) Podobně v orientovaném grafu často píšeme místo $[u, v]$ stručně $\overrightarrow{uv}$ a říkáme, že tato hrana jde z uzlu u do uzlu v, u je jejím počátečním uzlem a v je jejím koncovým uzlem.

Z naší definice vyplývá, že v neorientovaném grafu mohou být spojeny hranou pouze dva různé uzly a žádné dva uzly nemohou být spojeny více než jednou hranou. Skutečně nejčastěji se zkoumají grafy, v nichž je toto splněno. Někdy se však ukazuje účelným upravit



Obr. V.5

definici tak, aby mohlo existovat i více hran spojujících tutéž dvojici uzlu; takovéto grafy se často nazývají multigrafy, aby se tak odlišily od grafů, o nichž mluvíme zde. Příklad multigrafu je na obr. V.3. U orientovaných grafů připouští naše definice existenci hran $\overrightarrow{uv}$ a $\overrightarrow{vu}$, které spojují tutéž dvojici uzlů, jsou však opačně orientované. Pokud bychom připouštěli existenci více



Obr. V.6

hran se společným počátečním i koncovým uzlem, mluvili bychom o orientovaném multigrafu.

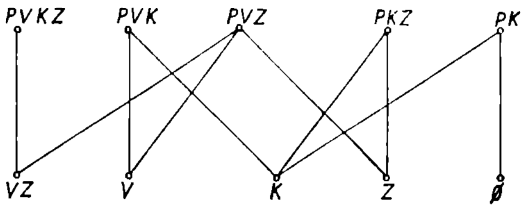
Někdy se připouštějí (v neorientovaném i orientovaném grafu) i takzvané smyčky, to jest hrany spojující nějaký uzel se sebou samým. Příklad neorientovaného grafu se smyčkou u uzlu u je na obr. V.4.

Je mnoho aplikací teorie grafů. Uveďme si jen, že schematické znázornění železniční sítě (obr. V.5) nebo chemický strukturní vzorec (vzorec propanu na obr. V.6) je grafem. Některé zajímavosti z této teorie poznáme v následujících odstavcích.

S teorií grafů těsně souvisí kombinatorika. Něco z ní už znáte ze školy (variace, kombinace). I ta má velký význam pro jiné obory matematiky (mluvíme o kombinatorické topologii a kombinatorické geometrii, důležitá je kombinatorika i pro teorii pravděpodobnosti) i pro praxi. I z ní poznáme některé zajímavosti.

PŘEVOZNÍK, VLK, KOZA A ZELÍ

Známou hádanku na toto téma jste jistě už slyšeli. Ukážeme si, jak ji můžeme řešit pomocí teorie grafů.



Obr. V.7

Převozník má převézt přes řeku vlka, kozu a zelí. Všechny tři najednou vézt nemůže; může vzít současně buď vlka a kozu, nebo vlka a zelí, nebo kozu a zelí. Přitom však nemůže ponechat bez dozoru vlka s kozou, protože vlk by kozu sežral. Z podobného důvodu nemůže nechat osamotě kozu se zelím. Jak má postupovat při převážení?

Situaci si můžeme znázornit grafem na obr. V.7. Každý uzel tohoto grafu označuje jistou situaci při převozu; je označen začátečními písmeny názvů těch objektů, které jsou na prvním břehu; tedy například *PK* značí, že na prvním břehu je převozník s kozou a na druhém samozřejmě vlk a zelí. Symbolem prázdné množiny Ø je označena situace, kdy jsou všichni převezeni na druhý břeh. Hrany znázorňují možné přechody od jedné situace k druhé. Vyloučené situace jako *VK* nebo *KZ* vynecháváme.

Jde nyní o to, nalézt v grafu cestu z uzlu *PVKZ* do uzlu $\emptyset$. Cestou z uzlu u_0 do uzlu u_n v grafu G nazýváme konečnou posloupnost uzlů a hran tohoto grafu, která má tvar

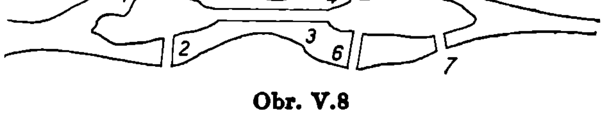
$$u_0,\ u_0u_1,\ u_1,\ u_1u_2,\ u_2,\ \ldots,\ u_{n-1},\ u_{n-1}u_n,\ u_n$$

a v níž se žádné uzly ani hrany neopakují. Na příslušném obrázku každé cestě odpovídá jednoduchá lomená čára.

Na obr. V.7 vidíme dvě takovéto cesty. Jedna má uzly *PVKZ*, *VZ*, *PVZ*, *V*, *PVK*, *K*, *PK*, $\emptyset$, druhá má uzly *PVKZ*, *VZ*, *PVZ*, *Z*, *PKZ*, *K*, *PK*, $\emptyset$. Tyto cesty nám udávají dvě možná řešení. První řešení: převézt nejprve kozu, vrátit se sám zpět, převézt zelí, vrátit se zpět s kozou, převézt vlka, vrátit se sám zpět, převézt kozu. Druhé řešení: převézt nejprve kozu, vrátit se sám zpět, převézt vlka, vrátit se zpět s kozou, převézt zelí, vrátit se sám zpět, převézt kozu.

SEDM MOSTŮ V KRÁLOVCI

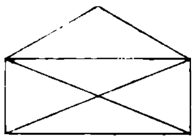
O Leonhardu Eulerovi jsme už mluvili v III. kapitole v souvislosti s číslem e. Tento veliký matematik prožil část svého života v městě Královci (Königsberg) ve



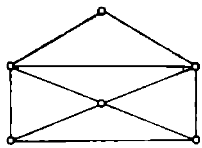
Obr. V.8

Východním Prusku (dnešní Kaliningrad v SSSR). V tomto městě v Eulerově době bylo sedm mostů přes řeku Pregel; jsou znázorněny na obr. V.8.

Obyvatelé Královce si tehdy lámali hlavu s hádankou, zda by si mohli udělat procházku městem tak, aby přes každý most přešli právě jednou a vrátili se nakonec zpět na místo, odkud vyšli. Pro matematika, jakým byl Euler, ovšem i takováto maličkost byla podnětem k vy-



Obr. V.9



Obr. V.10

tvoření matematické teorie. Tak vznikl důležitý pojem eulerovského grafu.

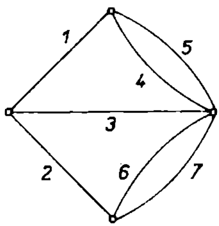
Představme si, že nějaký obrázek chceme nakreslit jedním tahem tak, abychom nezvedali tužku s papíru a abychom žádnou čáru nekreslili dvakrát. Vezměme si třeba dopisní obálku na obr. V.9. Takovýto obrázek můžeme upravit na znázornění grafu. Jestliže z nějakého bodu vychází jiný počet čar než dvě, budeme tento bod považovat za znázornění uzlu grafu a nakreslíme tam příslušný kroužek. I bod, z něhož vycházejí dvě čáry, můžeme považovat někdy za znázornění uzlu, nechceme-li dostat multigraf. Z oné obálky nám tedy vznikne graf na obr. V.10.

Tah v grafu G je definován podobně jako cesta. Je to posloupnost

$$u_0,\ u_0u_1,\ u_1,\ u_1u_2,\ u_2,\ \ldots,\ u_{n-1},\ u_{n-1}u_n,\ u_n$$

uzlů a hran grafu G. Na rozdíl od cesty uzly se mohou v této posloupnosti opakovat, ale hrany nikoliv. Jestliže u_0 splývá s u_n, pak mluvíme o uzavřeném tahu, v opačném případě jde o otevřený tah. Obsahuje-li tento tah všechny hrany grafu G (každou ovšem právě jednou), říkáme mu eulerovský tah.

Nakreslit obrázek jedním tahem tedy znamená najít v. příslušném grafu eulerovský tah. Máme-li se navíc



Obr. V.11

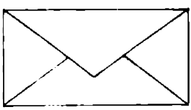
nakonec vrátit na totéž místo, odkud jsme vyšli, musí jít o uzavřený eulerovský tah. V případě hádanky o sedmi mostech města Královce jde o to, nalézt uzavřený eulerovský tah v multigrafu na obr. V.11. Uzly tohoto multigrafu odpovídají břehům řeky a ostrovům, hrany znázorňují příslušné mosty.

Stupeň uzlu u v grafu G je počet hran incidentních s uzlem u v grafu G. Počet uzlů lichého stupně v konečném grafu je vždy sudý. Je tomu tak proto, že součet stupňů všech uzlů v grafu je roven dvojnásobku počtu hran, tedy číslu sudému. Platí to i pro multigrafy.

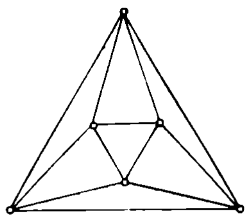
Uzavřený eulerovský tah v konečném grafu (nebo multigrafu) G existuje právě tehdy, mají-li všechny uzly v tomto grafu sudý stupeň. Znamená to, že takovýto graf lze nakreslit jedním tahem tak, že začneme kdekoliv a opět se vrátíme tam, odkud jsme vyšli. Takovýto graf se nazývá eulerovský. V multigrafu na obr. V.11 to zřejmě nelze; tam dokonce všechny uzly mají lichý stupeň. Žádanou procházku po mostech města Královce tedy nelze provést. (Přesně bychom vlastně měli mluvit o souvislých grafech, tedy o grafech té vlastnosti, že v nich k libovolným dvěma uzlům existuje cesta, která je spojuje. Pokud graf není souvislý, samozřejmě jej jedním tahem nakreslit nelze. V celém tomto odstavci však pro jednoduchost budeme mlčky předpokládat, že jde vždy o souvislý graf, popřípadě multigraf.)

Pokud v grafu existují právě dva uzly lichého stupně, neexistuje v něm uzavřený eulerovský tah, ale existuje otevřený eulerovský tah, který vychází z jednoho uzlu lichého stupně a končí v druhém. Příkladem je graf na obr. V.10. Tento graf lze nakreslit jedním tahem, nemůžeme však začít kdekoliv, ale musíme vyjít z některého ze dvou uzlů, které jsou na obrázku dole, a skončit v druhém. (Zkuste to!)

Pokud je uzlů lichého stupně více než dva, eulerovský tah v grafu neexistuje. Nejmenší počet tahů takových, že každá hrana grafu patří právě do jednoho z nich, je roven polovině tohoto počtu uzlů lichého stupně (tento



Obr. V.12



Obr. V.13

počet uzlů je sudý). Multigraf na obr. V.11 lze tedy nakreslit dvěma tahy. Abychom nakreslili zalepenou dopisní obálku na obr. V.12, potřebujeme tři tahy.

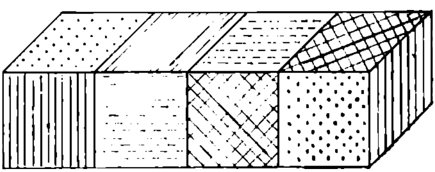
Příklad eulerovského grafu, tedy grafu, který lze nakreslit jedním tahem, je na obr. V.13.

V době, kdy žil Euler, teorie grafů jako samostatný matematický obor ještě neexistovala. Pro Eulera byla hádanka se sedmi mosty spíše rozptýlením při jeho vážné vědecké práci. Nicméně — veden kratochvilnou hříčkou — položil už tehdy základy této teorie a jistě zaslouženě dodnes mluvíme o eulerovských tazích a eulerovských grafech.

HLAVOLAM S BAREVNÝMI KOSTKAMI

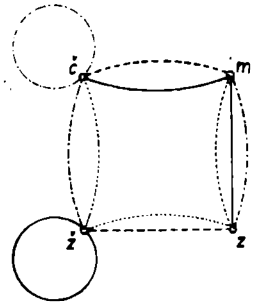
Možná, že se vám už někdy dostal do ruky hlavolam sestávající ze čtyř krychlí s různě zbarvenými stěnami. Krychle jsou čtyři a na jejich stěnách se vyskytují čtyři barvy: červená, modrá, zelená a žlutá. Úkolem je srovnat krychle do řady, to jest vytvořit z nich kvádr s rozměry $4 \times 1 \times 1$ tak, aby se na každé obdélníkové stěně kvádru vyskytovaly všechny čtyři barvy (obr. V.14).

Také k řešení této úlohy můžeme použít teorie grafů. Nejprve uspořádejme krychle v libovolném pořadí, to



Obr. V.14

jest označme je symboly K_1, K_2, K_3, K_4. Sestrojíme multigraf G, jehož uzly budou označeny $\check{c}$, m, z, $\check{z}$ a budou odpovídat barvám s příslušným začátečním písmenem. (V matematice zpravidla neužíváme jako symbolů písmen s háčky, ale zde to uděláme, abychom měli dobrý přehled.) Hrany grafu G budou znázorňovat dvojice



Obr. V.15

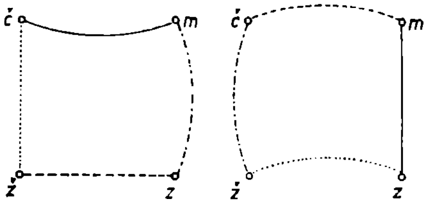
protilehlých stěn jednotlivých krychlí; hrany odpovídající jedné krychli odlišíme v grafu od hran odpovídajících ostatním krychlím (na obr. V.15 jsou rozlišeny tak, že jsou kresleny plně, čárkovaně, čerchovaně nebo tečkovaně, podle toho, o kterou krychli jde). Protože na každé krychli jsou tři dvojice protilehlých stěn, obsahuje graf celkem dvanáct hran rozdělených do čtyř tříd po třech hranách. Hrana patřící do i-té třídy spojuje dva uzly x, y grafu G právě tehdy, jestliže se na i-té krychli K_i vyskytuje dvojice protilehlých stěn mających barvy x, y. Je zřejmé, že G může být multigrafem a může obsahovat i smyčky.

Předpokládejme, že máme sestrojen graf G odpovídající dané čtveřici krychlí a že máme hlavolam vyřešen, to jest máme sestaven kvádr s požadovanými vlastnostmi. Předpokládejme dále, že tento kvádr leží na stole a že tedy můžeme mluvit o stěně dolní, horní, přední a zadní, které mají vesměs rozměry 4×1. Podobně nazýváme stěny jednotlivých krychlí tvořící tyto stěny kvádru.

Mějme nyní zobrazení p_1, které každé barvě x přiřazuje barvu $p_1(x)$ tak, že $p_1(x)$ je barva dolní stěny krychle, jejíž horní stěna má barvu x. Protože horní stěny krychlí mají navzájem různé barvy a dolní stěny rovněž, je to vzájemně jednoznačné zobrazení naší množiny barev opět na tuto množinu, to jest permutace této množiny. Bereme-li místo horní stěny přední a místo dolní stěny zadní, dostaneme podobně permutaci p_2.

Budeme nyní orientovat některé hrany grafu G, to jest přikreslovat k nim šipky. Každá barva x je spojena v grafu G s barvou $p_1(x)$; k této hraně přikreslíme šipku vedoucí od x k $p_1(x)$. Graf, který obsahuje všechny uzly grafu G a všechny hrany, které jsme takto orientovali, označme F_1. Je to takzvaný faktor grafu G. (Graf, jehož množina uzlů je podmnožinou množiny uzlů grafu G a jehož množina hran je podmnožinou množiny hran grafu G, nazýváme podgrafem grafu G. Podgraf grafu G, jehož množina uzlů je rovna množině uzlů grafu G, nazýváme faktorem grafu G.) Každý jeho uzel má stupeň rovný dvěma (je-li uzel incidentní se smyčkou, počítá se tato smyčka při určování stupně uzlu jako dvě hrany). Říkáme mu tedy faktor stupně dvě neboli kvadratický faktor. Navíc má F_1 tu vlastnost, že obsahuje právě čtyři hrany a každá z těchto hran je z jiné třídy. Podobně k permutaci p_2 najdeme kvadratický faktor F_2 grafu G, který má rovněž tuto vlastnost. Dále je zřejmé, že faktory F_1 a F_2 nemají společnou hranu (takováto hrana by musela odpovídat dvojici horní a dolní stěny některé krychle a současně přední a zadní stěny téže krychle, což není možné); říkáme, že jsou hranově disjunktní.

Nyní si představme, že jsme v grafu G našli faktory F_1 a F_2 popsaných vlastností. Ukážeme si, že pak můžeme hlavolam vyřešit. Hrany každého z faktorů F_1, F_2 orientujeme tak, aby každý uzel byl počátečním uzlem právě



Obr. V.16

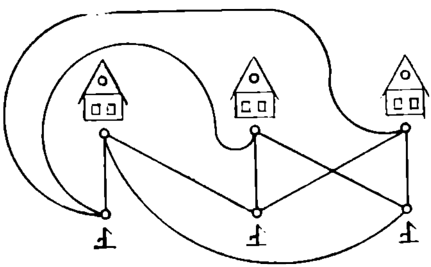
jedné hrany příslušného faktoru. To lze vždy provést a jistě snadno přijdete na to, jak se to provede. Hraně i-té třídy směřující od uzlu x k uzlu y bude v řešení odpovídat poloha i-té krychle, při které má její horní stěna barvu x a dolní barvu y. Uvedeme krychle do této polohy a sestavíme z nich kvádr; pak na horní i dolní stěně budou všechny čtyři barvy. Podobně hraně i-té třídy směřující od uzlu x k uzlu z v F_2 bude odpovídat poloha i-té krychle, při které má její přední stěna barvu x a zadní barvu z. Protože F_2 je hranově disjunktní s F_1, jeho hrany odpovídají jiným dvojicím stěn krychlí než jsou ty, které jsou nahoře a dole. Krychle tedy můžeme do požadované polohy uvést pouze otáčením kolem svislé osy bez měnění polohy horní a dolní stěny. Takto získáme řešení hlavolamu.

Obvykle se prodávají krychle vybarvené tak, že odpovídají grafu na obr. V.15. V tom případě je řešením hlavolamu kvádr, na jehož horní stěně jsou barvy v pořadí červená, zelená, modrá, žlutá, na dolní stěně modrá, žlutá, zelená, červená, na přední stěně modrá, červená, žlutá, zelená, na zadní stěně zelená, modrá, červená, žlutá. Další řešení úlohy získáte například přeskupením krychlí, záměnou protilehlých stěn (každou krychli otočíte o 180° kolem svislé osy) nebo otočením kvádru podle jeho podélné osy.

Popsané kvadratické faktory grafu G vyhledáváme při tak malém počtu hran zkusmo, systematicky probereme jednotlivé možnosti. Uvedené metody lze použít i v případech, kdy počet krychlí a barev jejich stěn je jiný než čtyři; dostáváme pak pouze grafy s jiným počtem uzlů a tříd hran, jinak je postup stejný.

ROVINNÉ GRAFY

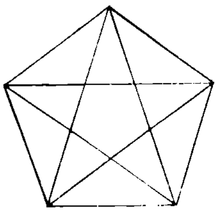
Jsou tři domy a tři studně. Majitel každého domu by chtěl mít od svého domu cesty ke všem třem studním, ale žádný z těchto majitelů nechce, aby se některá jeho



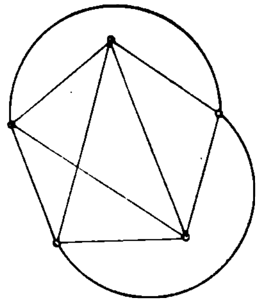
Obr. V.17

cesta křižovala se sousedovou. Je to možné tak zařídit?

Tato úloha se týká takzvaných rovinných grafů. Jak jsme uváděli na začátku této kapitoly, grafy znázorňujeme tak, že uzly kreslíme jako malé kroužky a hrany jako úsečky nebo oblouky spojující tyto kroužky. Přitom jsme zatím nehleděli na to, zda lze tyto úsečky nebo



Obr. V.18



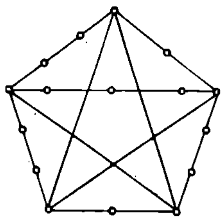
Obr. V.19

oblouky kreslit tak, aby se nikde neprotínaly. Pokud to lze, říkáme příslušnému grafu rovinný graf.

Znázorníme-li domy i studně jako uzly grafu a příslušné cesty jako jeho hrany, dostaneme graf, který se v teorii grafů často označuje symbolem $K_{3,3}$. Tento graf není rovinný; v nejlepším případě jej lze nakreslit tak, že se pouze dva oblouky znázorňující hrany spolu protínají (obr. V.17). Majitelům domů tedy nezbývá nic jiného, než aby se alespoň dva z nich dohodli, že se jejich cesty budou křižovat.

Ve středověku se věřilo, že jisté znamení zvané muří noha může chránit člověka před nástrahami ďábla; je o tom zmínka i v Goethově „Faustovi“. Muří noha je pravidelný pětiúhelník se všemi úhlopříčkami (obr. V.18). Odpovídá mu graf, který se označuje K_5; má pět uzlů, každé dva uzly jsou v něm spojeny hranou. Ani tento graf není rovinný; na obr. V.19 vidíme jeho nákres, na němž se právě dva oblouky protínají.

Jestliže některé hrany grafu G nahradíme cestami, které obsahují ještě další uzly, a dostaneme tak graf G', říkáme, že graf G' byl získán z grafu G dělením hran.



Obr. V.20

Na obr. V.20 vidíme graf získaný dělením hran z grafu K_5.

Samozřejmě není-li nějaký graf rovinný, není rovinný ani graf získaný z něho dělením hran. A jestliže nerovinný graf G_1 je podgrafem (to jest částí) grafu G_2, pak ani graf G_2 nemůže být rovinný. Tedy žádný graf, který obsahuje jako podgraf graf $K_{3,3}$ nebo K_5 nebo graf získaný z některého z těchto grafů dělením hran, není rovinný.

Platí to však i obráceně. Mluví o tom věta, kterou dokázal K. Kuratowski:

Graf G je rovinný právě tehdy, neobsahuje-li jako podgraf graf $K_{3,3}$ nebo K_5 nebo graf získaný z některého z těchto grafů dělením hran.

Tato významná věta nám umožňuje určit, zda je nějaký graf rovinný, aniž bychom se jej pokoušeli kreslit žádaným způsobem.

BAREVNÉ MAPY

Zeměpisné mapy se zpravidla barví tak, že území každého státu je vybarveno jednou barvou a území sousedních států jsou vybarvena různými barvami.

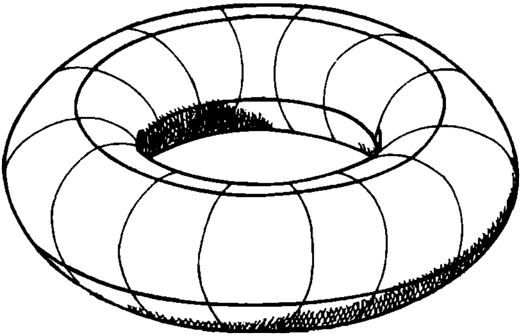
Představme si, že máme takovouto mapu nakreslenou v rovině nebo na globu. Můžeme vzít zcela libovolnou mapu, která vůbec nemusí odpovídat skutečné situaci na zeměkouli. Chtěli bychom ji obarvit předepsaným způsobem. Území, která mají společný jen jeden bod (jako například Arizona a Colorado), za sousední nepokládáme a můžeme je barvit stejnou barvou. Území, která jsou od sebe oddělena územím jiného státu (popřípadě mořem), pokládáme za různá; neuvažujeme o tom, že třeba patří témuž státu (například USA a Aljaška). Kolik barev na to potřebujeme?

Tři barvy nestačí. Najdeme-li si na mapě Lucembursko a jeho tři sousedy, Francii, Belgii a NSR, vidíme, že každý z těchto sousedů sousedí s oběma ostatními a že tedy každý ze zmíněných čtyř států musí být obarven jinou barvou.

P. J. Heawood na konci minulého století dokázal, že pět barev stačí. Dlouho však nebylo jasné, zda by nestačily čtyři barvy. Tento problém vešel do dějin matematiky jako problém čtyř barev.

Úvahy o barvení map lze převést na úvahy o rovinných grafech. Uvnitř každého území na mapě zvolíme jeden bod — třeba hlavní město příslušného státu. Ten bude uzlem určitého grafu. Hranou v tomto grafu spojíme dva uzly právě tehdy, leží-li tyto uzly na územích, která spolu sousedí. Takovýto graf bude rovinný.

Nyní tedy jde o to, obarvit uzly tohoto grafu tak, aby libovolné dva uzly spojené hranou měly různou barvu. Jinými slovy, máme rozložit množinu uzlů grafu na



Obr. V.21

disjunktní třídy tak, aby žádné dva uzly z téže třídy nebyly spojeny hranou. Nejmenší počet takovýchto tříd (čili barev) se nazývá chromatické číslo grafu. Problém čtyř barev tedy spočívá v tom, zda chromatické číslo rovinného grafu může být větší než čtyři.

Problém čtyř barev odolával snahám matematiků až do července 1976. Tehdy američtí matematikové W. Haken a K. Appel dokázali, že chromatické číslo rovinného grafu nemůže být větší než čtyři a tedy čtyři barvy stačí k obarvení libovolné mapy. Podařilo se jim najít konečný (ale velmi vysoký) počet grafů, o nichž dokázali, že lze-li tyto grafy žádaným způsobem obarvit, lze tak obarvit všechny rovinné grafy. Obarvení těchto grafů pak provedli na samočinném počítači.

Je zajímavé, že pro složitější plochy než rovina nebo kulová plocha byla podobná tvrzení dokázána podstatně dříve. Například už dlouho je známo, že libovolnou mapu na anuloidu (plocha podobná pneumatice na obr. V.21) lze obarvit sedmi barvami.

S větou o čtyřech barvách je ekvivalentní věta, kterou vyslovil (tehdy pouze jako hypotézu) P. G. Tait: Je-li G rovinný graf, v němž každý uzel má stupeň 3, pak lze hrany grafu G obarvit třemi barvami tak, že žádné dvě hrany incidentní s týmž uzlem nemají stejnou barvu.

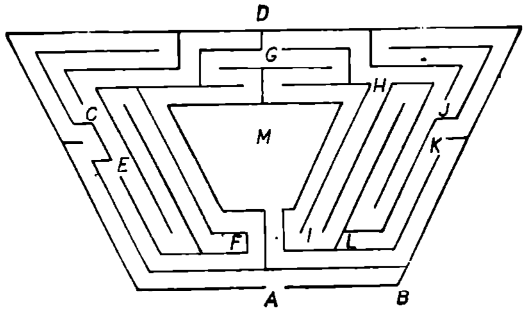
BLUDIŠTĚ

Z řecké mytologie známe báji o labyrintu, který postavil všeuměl Daidalos pro krétského krále Mínóa. V labyrintu byl ukryt Mínótauros, člověk s býčí hlavou, syn býka a Mínóovy manželky Pásifaé. Tomuto netvoru musel athénský král Aigeus každých devět let posílat jako stravu sedm mladíků a sedm dívek. Konec tomu učinil Aigeův syn Théseus, který Mínótaura zabil. Musel ho však nejprve v labyrintě najít a po svém hrdinském činu se dostat z labyrintu ven. K tomu mu pomohla Ariadné, dcera krále Mínóa. Dala mu klubko nití; Théseus táhl nit za sebou, čímž si značil cestu.

Báje má určité historické jádro; zbytky labyrintu byly skutečně na Krétě nalezeny.

Dnes slouží bludiště jako atrakce. Všichni jistě znáte zrcadlové bludiště v Praze na Petříně. Anglický humorista Jerome Klapka Jerome poutavě popisuje bloudění v bludišti v Hampton Courtu ve své knize „Tři muži ve člunu kromě psa“ (v novějším překladu „Tři muži ve člunu, o psu nemluvě“):*)

„Nakonec vedli si všickni jako diví a volali průvodce; milý průvodce přišel, vylezl na žebřík před bludištěm a se žebříku jim vysvětloval, kudy ven. Všem však už v hlavě vířilo a byli tak popleteni, že nic nechápali, takže



Obr. V.22

je průvodce vyzval, aby zůstali, kde jsou, že pro ně přijde. Srazili se v houfec a čekali; průvodce slezl a vstoupil do bludiště.

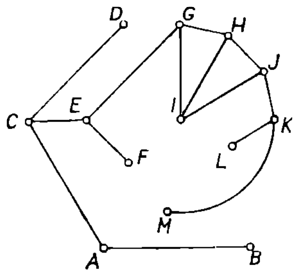
Byl naneštěstí, jak už tomu osud někdy chce, nováčkem a nevyznal se valně ve své živnosti; v bludišti sice byl, ale nalézti jich nemohl. Chodil sem tam, aby se k nim dostal, a konečně sám zabloudil. Občas jej zahlédli, jak se žene na druhé straně přepážky; pokaždé, když je uviděl, hnal se k nim a oni čekali pět minut; ale průvodce objevil se za chvíli opět na místě, kde byl dříve, a divil se, kudy prý chodili.

*) Překlad T. a E. Háchů. Vydalo nakladatelství F. Topič v Praze 1902.

Nezbylo nic jiného než čekat, až přijde od oběda starý dozorce, a pak teprve dostali se ven.

Harris tvrdil, že, pokud prý dovede posoudit, je to bludiště výtečné; i dohodli jsme se, že tam budeme hledět vlákat Jiřího, až poplujeme zpět."

Plán bludiště v Hampton Courtu je na obr. V.22. Takovéto bludiště lze znázornit grafem; je na obr. V.23.



Obr. V.23

Představme si, že by Théseus neměl Ariadninu nit, ale zato křídu, kterou by si mohl značit cesty, kterými prošel. Jak by postupoval, aby zaručeně Mínótaura našel a dostal se opět ven? Na to existují různé předpisy čili algoritmy (o algoritmech se podrobněji dočtete v VII. kapitole). Jeden z nich popsal Norbert Wiener (1895 až 1964), zvaný „otec kybernetiky".

Chodbu, kterou prošel jednou, bude Théseus značit jedním křížkem; pokud ji projde podruhé, nakreslí ještě druhý křížek. Z každého rozcestí se vždy dá některou chodbou, která dosud nebyla označena; pokud jsou všechny chodby označeny, půjde tou jednokřížkovou chodbou, které použil naposledy při příchodu na toto rozcestí (to je vždy možné). Nikdy nevstoupí do chodby označené dvěma křížky. Při tomto postupu zaručeně Mínótaura najde. Kdyby byl oklamán a žádný Mínótauros by v bludišti nebyl, mohl by se o tom Théseus přesvědčit tím, že by se podle tohoto algoritmu dostal zpět ke vchodu, kterým do labyrintu vešel; algoritmus zaručuje, že v tomto případě by byl celý labyrint prohledán. Pokud Théseus Mínótaura najde a zabije, vrátí se tak, že používá stále chodeb s jedním křížkem; ty ho bezpečně dovedou k východu. Zkuste si to s labyrintem na obr. V.22.

MAGICKÉ ČTVERCE

Magickým čtvercem nazýváme tabulku rozdělenou na n řádků a n sloupců, do jejíchž políček jsou vepsána čísla od 1 do n^2 tak, aby součet čísel v každém řádku, v každém sloupci a v obou úhlopříčkách byl stejný.

Kdysi se věřilo, že tyto čtverce mají skutečně magický význam. Dnes se na ně díváme pouze jako na zajímavou hříčku.

Na grafickém listě Albrechta Dürera „Melancholie" můžeme nalézt magický čtverec z obr. V.24.

Popíšeme si nejstarší metodu sestavování magických čtverců pro n liché. Tato metoda se nazývá indická nebo také siamská (Siam je starý název Thajska).

Řádky budeme číslovat zdola nahoru čísly 1 až n, sloupce zleva doprava rovněž čísly 1 až n. Symbol (x, y) značí políčko v x-tém řádku a y-tém sloupci. Jestliže se v popisu metody vyskytne výraz $x + 1$ a budeme mít $x = n$, budeme za $x + 1$ považovat číslo 1; podobně pro $y + 1$. Vyskytne-li se výraz $x - 1$ a bude $x = 1$, budeme za $x - 1$ považovat číslo n. Řekli jsme, že n je liché; má tedy tvar $n = 2m + 1$, kde m je přirozené číslo.

Tohoto čísla m budeme v popisu metody používat.

Nyní můžeme popsat jednotlivá pravidla indické metody:

1) Číslo 1 vepíšeme do políčka $(n, m + 1)$.

2) Jestliže číslo z je vepsáno do políčka (x, y) a políčko $(x + 1, y + 1)$ je dosud volné, vepíšeme číslo $z + 1$ do políčka $(x + 1, y + 1)$.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Obr. V.24

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Obr. V.25

3) Jestliže číslo z je vepsáno do políčka (x, y) a políčko $(x + 1, y + 1)$ je už obsazeno, pak číslo $z + 1$ vepíšeme do políčka $(x - 1, y)$. (Lze dokázat, že toto políčko musí být volné.)

Mějme $n = 3$, tedy $m = 1$. Číslo 1 podle pravidla 1) zapíšeme do (3, 2). Políčko (1, 3) je volné, napíšeme tam 2. Políčko (2, 1) je volné, napíšeme tam 3. Políčko (3, 2) je už obsazeno číslem 1, tedy číslo 4 píšeme do políčka (1, 1). Políčko (2, 2) je volné, píšeme tam 5. Políčko (3, 3) je volné, píšeme tam 6. Políčko (1, 1) je obsazeno číslem 4, tedy číslo 7 píšeme do políčka (2, 3). Políčko (3, 1) je volné, píšeme tam 8. Konečně 9 píšeme do volného políčka (1, 2). Magický čtverec je hotov (obr. V.25).

Existují ovšem i další metody sestavování magických čtverců.

Jiný druh zajímavých čtvercových tabulek jsou latinské čtverce. Máme opět tabulku o n řádcích a n sloupcích. Tentokrát do ní vpisujeme čísla od 1 do n tak, aby se každé z těchto čísel v každém řádku a v každém sloupci vyskytovalo právě jednou.

5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1
1	2	3	4	5

Obr. V.26

4	3	2	1
3	1	4	2
2	4	1	3
1	2	3	4

Obr. V.27

Latinské čtverce mají pro moderní matematiku podstatně větší význam než čtverce magické. Souvisejí s teorií grup, o níž jsme mluvili v II. kapitole, a jí podobnou teorií kvazigrup. Rovněž mají význam pro zkoumání konečných geometrií, které jsme poznali v IV. kapitole.

Latinský čtverec můžeme sestavit poměrně jednoduše. Budeme políčka značit (x, y) jako v předešlém odstavci. Do políčka (x, y) vepíšeme zbytek získaný při dělení čísla $x + y - 1$ číslem n; je-li tento zbytek 0, píšeme místo něj n. Tak například pro $n = 5$ dostaneme latinský čtverec na obr. V.26.

Je-li n takové číslo, že $n + 1$ je prvočíslo, můžeme také do políčka (x, y) vepsat zbytek při dělení čísla xy

číslem $n + 1$. Příklad takového čtverce pro $n = 4$ je na obr. V.27.

Počet různých latinských čtverců o n řádcích a n sloupcích je velmi vysoký; pro každé n je to nejméně

$$1!\,.\,2!\,.\,3!\,\ldots\,n!$$

Sestrojování latinských čtverců tedy není nic těžkého. Horší je to však s ortogonálními dvojicemi latinských čtverců. Dva latinské čtverce o n řádcích a n sloupcích nazveme ortogonálními, jestliže ke každé uspořádané dvojici $[a, b]$ celých čísel mezi 1 a n existuje právě jedna dvojice (x, y) taková, že a je v políčku (x, y) v prvním čtverci a b je v políčku (x, y) v druhém čtverci. Příklad ortogonálních latinských čtverců je na obr. V.28.

Utvoříme-li nyní z ortogonálních latinských čtverců čtverec, v jehož každém políčku je uspořádaná dvojice čísel, která leží v odpovídajících políčkách obou daných čtverců, nazývá se tento čtverec řecko-latinský. V našem případě je to čtverec na obr. V.29 (čárky mezi čísly nepíšeme).

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	1	2	3	4
2	3	4	5	1
4	5	1	2	3

Obr. V.28

Zde se opět setkáváme s jménem L. Eulera. Ten dokázal, že pro každé liché n a pro každé n dělitelné čtyřmi existují ortogonální latinské čtverce o n řádcích a n sloupcích. Pro ostatní čísla n mohou existovat a nemusejí. Neexistují například pro $n = 6$, pro $n = 10$ existují. Euler se zabýval úlohou, zda lze postavit 36 důstojníků o šesti různých hodnostech a ze šesti různých pluků do

11	22	33	44	55
23	34	45	51	12
35	41	52	13	24
42	53	14	25	31
54	15	21	32	43

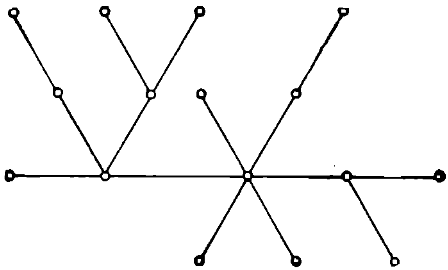
Obr. V.29

čtverce tak, aby v každé řadě a v každém zástupu byli důstojníci vesměs různých hodností a z různých pluků. Řešením by byl řecko-latinský čtverec o šesti řádcích a šesti sloupcích: jak jsme uvedli, tento čtverec neexistuje. Úloha tedy nemá řešení.

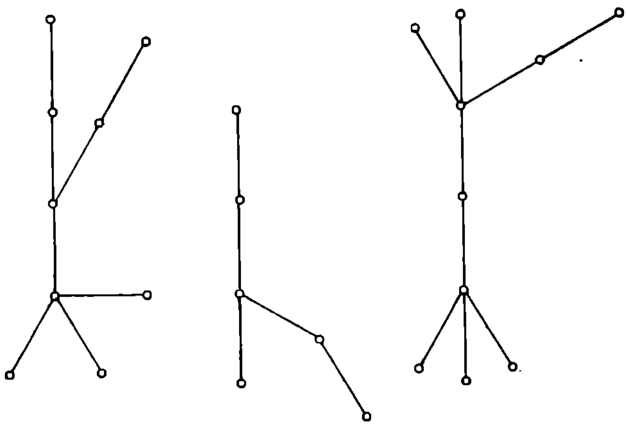
Ukázalo se, že řecko-latinské čtverce mají aplikace v agronomii. Představme si, že máme sedm odrůd pšenice a sedm druhů umělého hnojiva. Chceme vyzkoušet vliv jednotlivých hnojiv; k dispozici máme pole tvaru čtverce. Nejprůkaznější je pokus tehdy, utvoříme-li na poli řecko-latinský čtverec a do políčka s dvojicí $[a, b]$ nasejeme a-tou odrůdu pšenice a pohnojíme ji b-tým hnojivem.

ŽIVÁ PŘÍRODA V MATEMATICE

Co byste řekli matematickým termínům „strom“, „les“, „kostra“, „had“, „housenka“? V teorii grafů se skutečně vyskytují.



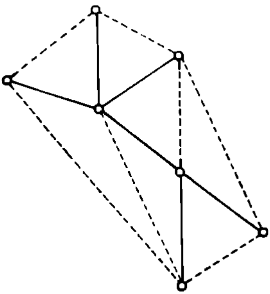
Obr. V.30



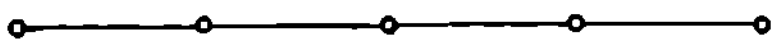
Obr. V.31

Uzavřený tah, v němž se neopakují uzly, se nazývá kružnice. Graf nazýváme souvislým, jestliže ke každým dvěma jeho uzlům existuje cesta, která je spojuje. Graf bez kružnic se nazývá les; je-li navíc souvislý, je to strom. Les se skládá z jednoho nebo více stromů. Na obr. V.30 vidíme strom, na obr. V.31 les.

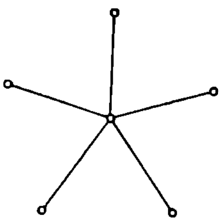
Každý souvislý graf G obsahuje faktor, který je stromem; tento faktor se nazývá kostrou grafu G. Na obr. V.32 vidíme takovouto kostru; její hrany jsou kresleny plně, ostatní hrany grafu G čárkovaně.



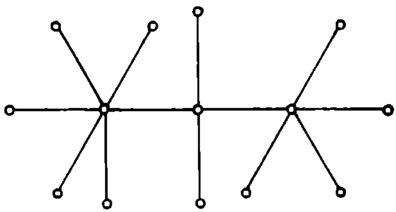
Obr. V.32



Obr. V.33

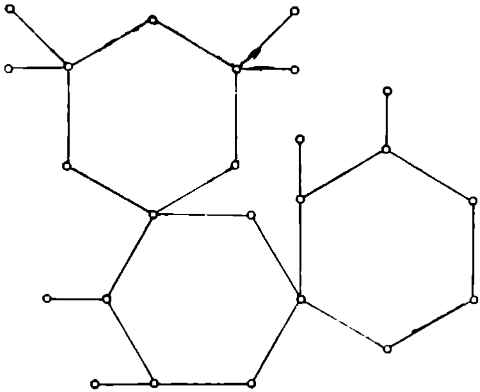


Obr. V.34



Obr. V.35

Strom neobsahující uzly stupně většího než dvě je had (obr. V.33). Strom, v němž právě jeden uzel má stupeň větší než jedna, je hvězda (obr. V.34). Hvězdy sice do živé přírody nepatří, ale tento graf připomíná spíše mořskou hvězdici. Strom, z něhož odstraněním všech uzlů stupně jedna a hran s nimi incidentních vznikne



Obr. V.36

had, se nazývá housenka (obr. V.35). Graf, jehož každá hrana náleží nejvýše jedné kružnici, je kaktus (obr. V.36).

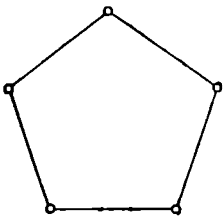
V teorii grafů se setkáme i s listy a kořeny. Jiné zajímavé termíny jsou kolo, mlýn, vřeteno a podobně.

Úlohy

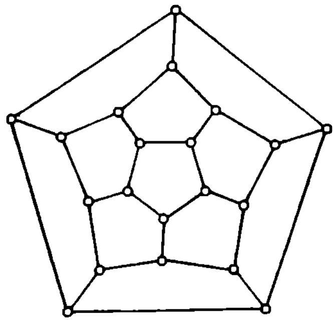
1. Podobným způsobem jako úlohu o převozníkovi lze řešit tuto úlohu: Tři cestovatelé cestují zemí lidojedů. Mají tři průvodce z řad domorodců. Nedůvěřují jim, a proto se snaží, aby lido-

jedi nad nimi neměli nikdy přesilu. Všech šest lidí se potřebuje přeplavit přes řeku loďkou, v níž je místo jen pro dvě osoby. Jak to provedou?

2. Podobným způsobem se mají přeplavit tři manželské páry. Muži jsou žárliví a žádný z nich nedovolí, aby jeho manželka byla v jeho nepřítomnosti ve společnosti jiného muže. Jak se přeplaví?



Obr. V.37



Obr. V.38

3. Řešte analogickou úlohu pro více než tři manželské páry za předpokladu, že v řece je ostrov.

4. Na šachovnici je osm dam, každá z nich může brát libovolnou jinou. Rozestavte je tak, aby se navzájem neohrožovaly.

5. Obvyklou šachovnici může projít kůň tak, že každé pole navštíví právě jednou a nakonec se vrátí na výchozí pole. Bylo by to možné i na čtvercové šachovnici o lichém počtu řad a sloupců? Bylo by to možné na obvyklé šachovnici, z níž jsou vyříznuta pole a1 a h8?

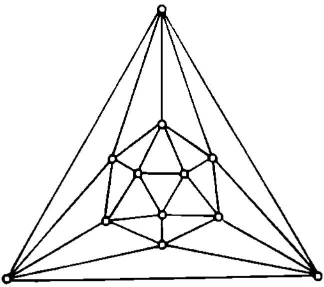
6. Graf na obr. V.37 nakreslete tak, aby se každé dvě hrany, které nejsou incidentní s týmž uzlem, protínaly právě v jednom bodě.

7. V grafu na obr. V.38 najděte uzavřený tah, který prochází každým uzlem právě jednou. (Jde o takzvanou Hamiltonovu kružnici.)

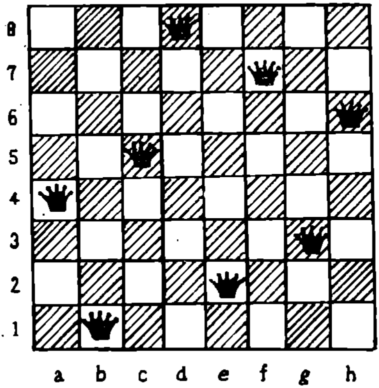
8. Totéž pro graf na obr. V.39.

9. Indickou metodou sestavte magický čtverec o pěti řádcích a pěti sloupcích.

10. Čemu je roven součet čísel v libovolném řádku magického čtverce o n řádcích a n sloupcích?



Obr. V.39



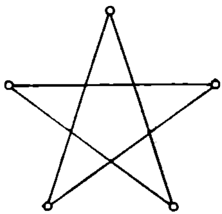
Obr. V.40

Řešení úloh

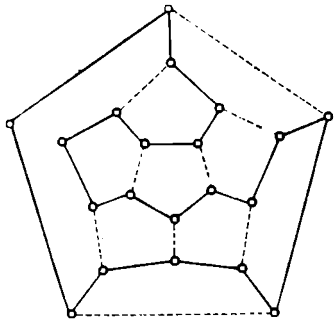
1. Nejprve přepluje cestovatel s lidojedem, cestovatel se vrátí. Přeplují dva lidojedi, jeden se vrátí. Přeplují dva cestovatelé, vrátí se jeden cestovatel s lidojedem. Přeplují dva cestovatelé, vrátí se jeden lidojed. Přeplují dva lidojedi, jeden z nich se vrátí. Nakonec přeplují dva lidojedi.

2. Manželské páry označme A, B, C. Nejprve přepluje paní A a paní B, paní A se vrátí. Přepluje paní A a paní C, paní A se vrátí. Přepluje pan B a pan C, manželé B se vrátí. Přepluje pan A a pan B, paní C se vrátí. Přepluje paní A a paní C, paní A se vrátí. Nakonec přepluje paní A a paní B.

3. Nejdříve paní A odveze postupně všechny ostatní ženy na ostrov a vrátí se. Potom pan B odveze postupně všechny ostatní muže kromě pana A na druhý břeh a vrátí se. Přeplují manželé A, pan C se vrátí. Přeplují pan B a pan C. Nakonec paní A postupně převeze všechny ostatní ženy z ostrova na druhý břeh.



Obr. V.41



Obr. V.42

4. Jedno možné řešení je na obr. V.40.

5. Není to možné. Kůň musí postupně střídat bílá a černá pole, tedy na šachovnici musí být stejný počet černých a bílých polí. V obou popsaných případech jsou tyto počty různé.

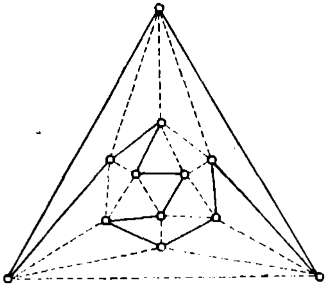
S chodem koně na šachovnici souvisí hádanka zvaná koníček. Určitý text je vepsán po jednotlivých slabikách do políček tabulky tak, že každá slabika je v políčku, které lze dosáhnout tahem koně z políčka s předchozí slabikou; úkolem je tento text najít. S touto hádankou se můžete často setkat v časopise „Hádanka a křížovka".

6. Řešení je na obr. V.41.

7. Řešení je na obr. V.42.

8. Řešení je na obr. V.43.

9. Řešení je na obr. V.44.



Obr. V.43

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Obr. V.44

10. Ve čtverci jsou všechna čísla do 1 do n^2, jejich součet je $\frac{1}{2}n^2(n^2 + 1)$. Řádků je n, v každém z nich je součet stejný, je tedy roven $\frac{1}{2}n(n^2 + 1)$.

VI. KAPITOLA

TEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI

Často lidé v běžném životě mluví o padesátiprocentní, osmdesátiprocentní nebo devadesátiprocentní pravděpodobnosti a ani si přitom neuvědomují, že teorie pravděpodobnosti je jednou z matematických disciplín a že její význam v moderním světě stále stoupá.

Základním pojmem této teorie je pravděpodobnost. Je to zobrazení množiny určitých jevů do množiny všech reálných čísel větších nebo rovných nule a menších nebo rovných jedné. Číslo takto přiřazené nějakému jevu se nazývá pravděpodobností tohoto jevu. Jev, který nastane zcela jistě, má pravděpodobnost rovnou jedné, jev nemožný má pravděpodobnost rovnou nule. Jestliže A a B jsou dva jevy, které nemohou nastat současně, pak pravděpodobnost jevu spočívajícího v tom, že nastane buď jev A, nebo jev B, je rovna součtu pravděpodobností jevu A a jevu B.

Házíme-li hrací kostkou, pak zřejmě pravděpobnost toho, že padne některé číslo, je stejná jako pravděpodobnost padnutí kteréhokoliv jiného čísla. Protože všech možných čísel je šest, je pravděpodobnost padnutí kteréhokoliv čísla rovna jedné šestině (součet všech těchto pravděpodobností musí být 1).

Pravděpodobnost, že padne sudé číslo, je rovna jedné polovině. Nastane to totiž ve třech případech (říkáme jim příznivé případy); jsou to případy, kdy padne 2, 4 nebo 6. Počet těchto případů dělíme šesti, což je počet všech možných případů, a dostaneme jednu polovinu. Podobně pravděpodobnost, že padne číslo dělitelné třemi, je rovna jedné třetině.

Házejme nyní dvěma kostkami současně. Jaká je pravděpodobnost, že na první kostce padne sudé číslo a na druhé číslo dělitelné třemi? Jde o současný výskyt dvou nezávislých jevů (výsledek na jedné kostce nikterak neovlivňuje výsledek na druhé). První jev má pravděpodobnost $\frac{1}{2}$, druhý $\frac{1}{3}$, pravděpodobnost současného výskytu obou jevů je rovna součinu těchto pravděpodobností, tedy $\frac{1}{6}$. Skutečně, příznivých případů je šest, jsou to dvojice [2, 3], [4, 3], [6, 3], [2, 6], [4, 6], [6, 6], a počet všech možných případů je počet všech možných uspořádaných dvojic z čísel od jedné do šesti, tedy 36. Dělením dostaneme $\frac{1}{6}$.

Nyní házejme opět jednou kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že padne buď sudé číslo, nebo trojka? Jevy „padne sudé číslo“ a „padne trojka“ nemohou při jednom hodu jednou kostkou nastat současně; jsou to takzvané jevy disjunktní. Pravděpodobnost toho, že nastane jeden z těchto jevů, je rovna součtu pravděpodobností těchto jevů, tedy $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$. Skutečně jsou čtyři příznivé případy ze šesti možných, a to 2, 3, 4, 6.

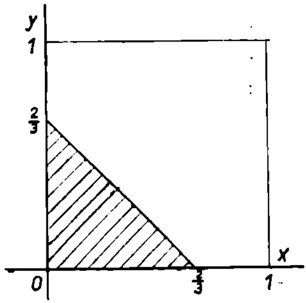
Nyní si představme trochu složitější případ. Máme tři osudí: ve dvou z nich je po třech bílých a dvou černých koulích, v jednom je jedna bílá a čtyři černé koule. Osudí nejsou nijak označena, takže předem nevíme, kolik jakých koulí v kterém osudí je. Nyní náhodně vy bereme jedno osudí a vytáhneme jednu kouli. Jaká je pravděpodobnost, že tato koule bude bílá?

Pravděpodobnost toho, že zvolíme osudí s třemi bílými koulemi a z něho potom vytáhneme bílou kouli, je rovna součinu příslušných pravděpodobností, to jest $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. Pravděpodobnost, že zvolíme osudí s jednou bílou koulí a vytáhneme z něho bílou kouli, je $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$. Oba jevy jsou disjunktní — taháme jen z jednoho osudí. Celková pravděpodobnost vytažení bílé koule je tedy $\frac{2}{5} + \frac{1}{15} = \frac{7}{15}$.

Jak však budeme zjišťovat pravděpodobnost tehdy, když je jak příznivých případů, tak všech možných případů nekonečný počet? Představme si, že ze dvou lidí každý nezávisle na druhém zvolí nezáporné reálné číslo nepřevyšující číslo 1. Jaká je pravděpodobnost, že součet obou čísel nepřevýší $\frac{2}{3}$?

Zde užíváme takzvané geometrické pravděpodobnosti. Zvolenou dvojici čísel můžeme považovat za souřadnice některého bodu čtverce, jehož vrcholy jsou body [0, 0], [0, 1], [1, 0], [1, 1]. Dvojicím čísel, jejichž součet je menší než $\frac{2}{3}$, odpovídají body pod přímkou $y = \frac{2}{3} - x$; tyto body tvoří trojúhelník, který vidíme na obr. VI.1. Jeho obsah je roven $\frac{2}{9}$, obsah čtverce je roven 1. Hledaná pravděpodobnost je podílem těchto čísel, tedy $\frac{2}{9}$.

Kdybychom zkoumali pravděpodobnost toho, že součet zvolených čísel bude roven $\frac{2}{3}$, zjistili bychom,



Obr. VI.1

že je to nula. Odpovídající body vyplňují v našem čtverci pouze úsečku, což je útvar jednorozměrný a jeho obsah je tedy roven 0. Přesto nejde o jev nemožný. Každý nemožný jev má pravděpodobnost 0, ale ne každý jev o pravděpodobnosti 0 je nemožný. Podobně jev s pravděpodobností 1 nemusí být vždy jistý; v našem případě by to mohl být jev spočívající v tom, že součet není roven $\frac{2}{3}$.

Popsali jsme si základní poznatky, které budete potřebovat k tomu, abyste porozuměli dalšímu textu. Jinak teorie pravděpodobnosti je značně rozvinutým odvětvím matematiky a její význam se zdaleka neomezuje jen na hazardní hry. Tato teorie se uplatňuje v různých oblastech matematiky i v jiných vědách (fyzika, ekonomie) a v technice. Těsně s ní souvisí i matematická statistika.

SPORTKA

Všichni asi znáte pravidla sázkové soutěže Sportka. Proto nebudeme vysvětlovat tato pravidla a rovnou si řekneme, jaké jsou pravděpodobnosti výher v jednotlivých pořadích. Omezíme se na výhry v jednom tahu bez prémiového čísla.

Všech možných případů, to jest všech možných šestic čísel, které mohou být sázeny, je $\binom{49}{6}$. Má-li sázející vyhrát první pořadí, musí zvolit právě tu jedinou šestici čísel, která je vylosována. Pravděpodobnost výhry v prvním pořadí je tedy

$$p_1 = \frac{1}{\binom{49}{6}}\,.$$

Aby sázející vyhrál druhé pořadí, musí vsadit pět čísel z oněch šesti tažených a jedno číslo ze zbývajících 43 netažených. Počet příznivých případů je tedy $\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1}$ a pravděpodobnost je

$$p_2 = \frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1}}{\binom{49}{6}}\,.$$

Na výhru ve třetím pořadí je třeba vsadit čtyři čísla ze šesti tažených a dvě čísla ze 43 netažených. Pravděpodobnost je tedy

$$p_3 = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}}$$

Konečně výhra ve čtvrtém pořadí má pravděpodobnost

$$p_4 = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}}.$$

Pravděpodobnost, že vůbec něco vyhrajeme, je pak součtem těchto pravděpodobností.

Nemělo by význam, kdybychom zde uváděli číselné hodnoty těchto pravděpodobností; pohrajte si s tím sami na kalkulačce. Uvedeme jen, že pravděpodobnost výhry v prvním pořadí je přibližně rovna jedné čtrnáctimiliónté. Kdyby každý občan Československa vsadil sportku, bylo by to možno provést tak, že převážná většina všech šestic by byla vsazena jen jednou a jen poměrně malé množství, jen nějaký milión, by bylo vsazeno dvakrát. Reklamní heslo na poutači u silnice vedoucí k ruzyňskému letišti v Praze „Sportka — jistá výhra!“ je tedy velmi daleko od pravdy.

Polovina výtěžku sportky se dělí mezi vyhrávající, druhá polovina je věnována na rozvoj našeho sportu. Spravedlivé dělení je takové, že výška výhry je nepřímo úměrná její pravděpodobnosti. Výhry v jednotlivých pořadích jsou tedy $\frac{k}{p_1}, \frac{k}{p_2}, \frac{k}{p_3}, \frac{k}{p_4}$, kde k je nějaké číslo. Jsou-li počty výherců v jednotlivých pořadích n_1, n_2, n_3, n_4 a rozdělovaná částka S, pak platí

$$\frac{kn_1}{p_1} + \frac{kn_2}{p_2} + \frac{kn_3}{p_3} + \frac{kn_4}{p_4} = S.$$

Z toho se dá k snadno vypočíst.

Ovšem tím by naše úvahy nad sportkou nekončily. Všimněme si, jak sázíme. Co by lidé asi řekli o člověku, který by vsadil čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6? Asi by poznamenali něco nelichotivého o jeho inteligenci, protože by byli přesvědčeni, že takováto čísla přece nemohou nikdy vyjít. A přesto všechny šestice, tedy i šestice $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, mají stejnou pravděpodobnost, že budou taženy; je to vždy

$$\frac{1}{\binom{49}{6}}.$$

Uspořádání kuliček v osudí je přece zcela náhodné a nijak nezávisí na pořadí příslušných čísel. Vždyť místo čísel by na kuličkách mohly být libovolné jiné znaky. Sázet čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6 může být naopak výhodné. Nejde totiž jen o pravděpodobnost výhry, ale i o její možnou výši. Jak už jsme uváděli, polovina výtěžku sportky se dělí mezi vyhrávající; uvedli jsme také, jak se dělí. Z toho je vidět, že vsadí-li někdo zmíněná čísla a vyhraje-li, pak má naději získat podstatně větší částku, než kdyby vyhrál na nějaká jiná čísla, protože — vzhledem k výše uvedenému — bude jedním z mála výherců. Pak se tedy naplní přísloví, že kdo se směje naposled, ten se směje nejlépe.

Při sázení sazky je ovšem situace podstatně jiná. Tam nejde o náhodné vytahování kuliček z osudí, ale o výsledky sportovních zápasů, které nejsou zcela náhodné (i když do jisté míry také), ale závisí především na výkonu jednotlivých mužstev. Při sázení tedy také nemají všichni sázející stejné šance, ale lépe je na tom ten, kdo se zajímá o výkony sportovních mužstev a dovede podle nich předpovědět výsledky budoucích zápasů. Totéž ovšem platí i o sázení na koňských dostizích.

RULETA

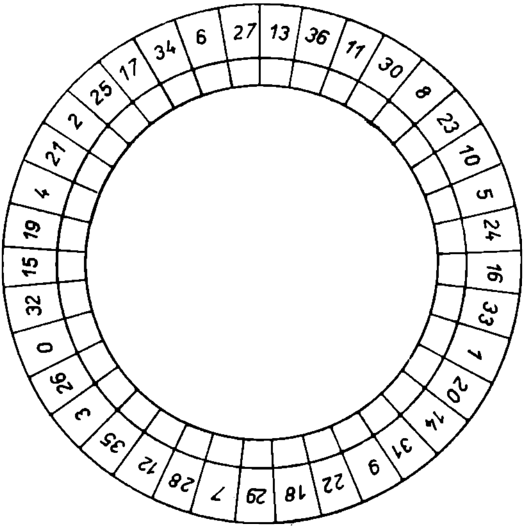
Jednou z hazardních her, na kterých si můžeme dobře vysvětlit teorii pravděpodobnosti, je ruleta. Hraje se s kolem vyobrazeným na obr. VI.2. Na obvodu kola jsou napsána čísla od 0 do 36, vedle nich jsou prohlubně. Kolo se roztočí a vhodí se na ně kulička. Po zastavení kola zapadne kulička do jedné z prohlubní a určí tak vyhrávající číslo. Pravděpodobnost, že vyjde určité číslo, je ovšem u všech čísel stejná a je rovna $\frac{1}{37}$.

Vsazené obnosy se kladou na hrací plán (obr. VI.3). Polovina nenulových čísel na tomto plánu je kreslena černě, druhá polovina červeně. Na našem nebarevném obrázku jsou černá čísla značena orámováním. Nula není ani černá, ani červená.

Jsou možné tyto typy sázek:

(a) na určité číslo (pleine) — výhra je šestatřicetinásobek sázky;
(b) dvě čísla vedle sebe (cheval) — osmnáctinásobek;
(c) vodorovná řada s třemi čísly (transversale pleine) — dvanáctinásobek;

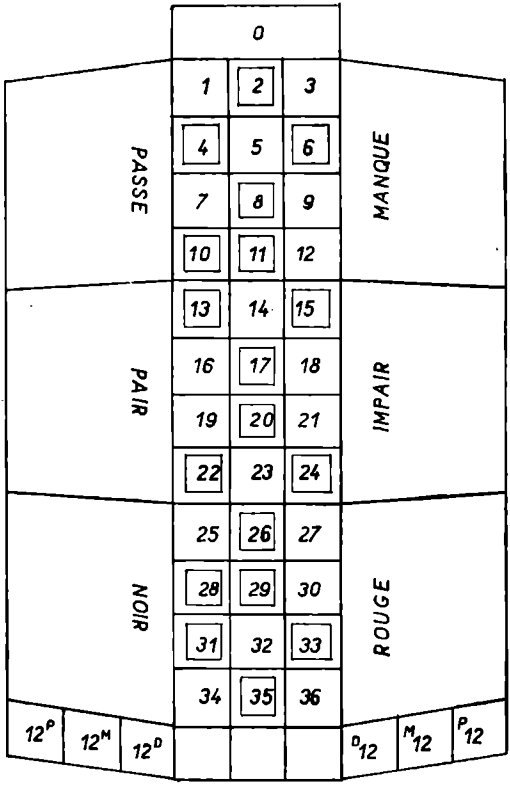
(d) čtyři čísla ve čtverci (carré) — devítinásobek;
(e) první čtyři čísla (0, 1, 2, 3) — devítinásobek;
(f) dvě vodorovné řady (transversale 6) — šestinásobek;
(g) svislá řada s 12 čísly (colonne) — trojnásobek;
(h) první tucet čísel 1—12 (12 p) — trojnásobek;
(i) druhý tucet čísel 13—24 (12 m) — trojnásobek;
(j) třetí tucet čísel 25—36 (12 d) — trojnásobek;
(k) všechna sudá čísla (pair) — dvojnásobek;
(l) všechna lichá čísla (impair) — dvojnásobek;
(m) všechna červená čísla (rouge) — dvojnásobek;
(n) všechna černá čísla (noir) — dvojnásobek;



Obr. VI.2

(o) první polovina všech čísel 1—18 (manque) — dvojnásobek;

(p) druhá polovina všech čísel 19—36 (passe) — dvojnásobek.



Obr. VI.3

Číslo 0 má v ruletě zvláštní postavení. Nepokládá se za sudé (i když víme, že sudé je), není červené ani černé. Vyjde-li nula, vyhrává pouze ten, kdo sázel přímo na ni nebo podle bodu (e). Ti, kteří sázeli na jednotlivá čísla, mohou dostat zpět polovinu sázky nebo hrát s toutéž sázkou v dalším kole. Ostatní prohrávají.

Na okamžik zapomeňme, že na ruletě je také nula. Pak vidíme, že výhra je vždy k-násobkem sázky, kde $\frac{1}{k}$ je pravděpodobnost výhry. Je to správné. Sází-li někdo na jednotlivé číslo, má pravděpodobnost výhry rovnou $\frac{1}{36}$; vyhraje-li, dostane šestatřicetinásobek sázky. Sází-li na lichá čísla, má pravděpodobnost výhry $\frac{1}{2}$, tedy výhra je pouze dvojnásobkem sázky.

Existence nuly tyto úvahy poněkud komplikuje. Pravděpodobnost výhry na jednotlivé číslo není $\frac{1}{36}$, ale $\frac{1}{37}$; pravděpodobnost výhry na lichá čísla není $\frac{1}{2}$, ale $\frac{18}{37}$. To však nejsou tak velké rozdíly a je to proto, že herna je výdělečný podnik a musí být proti hráčům poněkud zvýhodněna. Známá herna Casino v Monte Carlu například kryje podstatnou část státního rozpočtu Monackého knížectví. Hraje-li se ruleta v soukromé společnosti, musí jeden z hráčů řídit hru čili dělat krupiéra. Ten nemůže uvažovat, co by vsadil, ale musí přijmout každou sázku a ze své kapsy vyplácet příslušné výhry. (Inkasuje ovšem všechny prohrané částky.) Za toto si také zaslouží zvýhodnění.

Pokud v herně někdo „rozbije bank", to jest vyhraje v řadě případů za sebou velké částky, koná se jakýsi symbolický pohřební obřad. Ruletový stůl se zakryje černým suknem a vyřadí se z provozu. Není to však jen obřad, ale má to i praktický význam. Nic na světě není dokonalé, tedy ani ruleta, a může se stát, že ruletové kolo není přesně vyváženo, takže některá čísla mají podstatně větší pravděpodobnost, že vyjdou, než ostatní. Proto je třeba v takovém případě vyřadit ruletu z provozu a zkontrolovat její vyvážení.

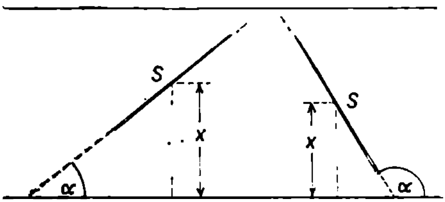
Název Stendhalova románu „Červený a černý" sice značí červený oděv vojáka a černý oděv kněze, není však zcela vyloučeno, že zde měl autor na mysli i ruletu a přirovnání života svého hlavního hrdiny k této hře.

Závěrem bych poznamenal, že pokud by mě chtěl někdo obviňovat z toho, že nabádám mládež k hazardním hrám, měl by si podrobně pročíst tento odstavec a promyslit si všechny zmíněné pravděpodobnosti; pak pozná, že tento text vyznívá spíše opačně.

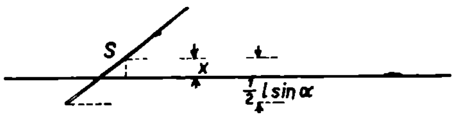
JEHLA A ČÍSLO π

Franc. matematik Buffon (1707—1788) vymyslel zajímavou úlohu. Na papíře jsou nakresleny rovnoběžné linky, vzdálenost dvou sousedních linek je d. Na papír z velké výšky házíme jehlu délky l, přičemž $l < d$. Jaká je pravděpodobnost, že jehla dopadne tak, aby ležela přes některou linku? (Jehlu bereme jako úsečku, zanedbáváme její tloušťku.)

Polohu jehly na papíře lze charakterizovat dvěma čísly. Jedním z nich je vzdálenost středu jehly od nejbližší linky, která je na papíře níže než tento střed. Tato vzdálenost může nabývat hodnot od 0 do d; všechny tyto hodnoty můžeme považovat za stejně pravděpodobné. Zmíněnou vzdálenost budeme značit x. Druhým číslem je velikost α úhlu, který svírá jehla s libovolnou z linek, je-li tato linka orientována zleva doprava. (Viz obr. VI.4.) Tento úhel měříme v obloukové míře. Číslo α tedy může nabývat všech hodnot od 0 do π; všechny



Obr. VI.4



Obr. VI.5

tyto hodnoty můžeme považovat opět za stejně pravděpodobné.

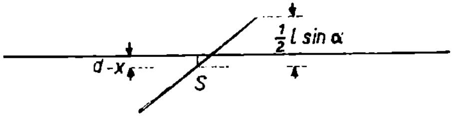
Snadno zjistíme, že jehla leží přes linku právě tehdy, je-li buď

$$\frac{1}{2} l \sin \alpha > x.$$

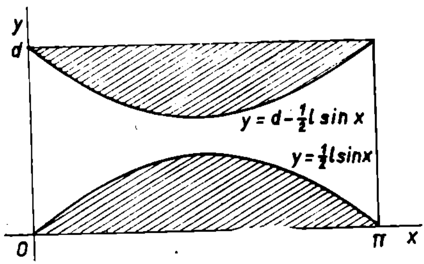
(obr. VI.5), nebo

$$\frac{1}{2} l \sin \alpha > d - x$$

(Obr. VI.6). Použijeme geometrické pravděpodobnosti. Každá dvojice $[x, \alpha]$ představuje souřadnice některého bodu obdélníka, jehož vrcholy jsou body $[0, 0]$, $[d, 0]$, $[d, \pi]$, $[0, \pi]$. Body, jejichž souřadnice splňují první nerovnost, jsou body pod grafem funkce $y = \frac{1}{2} l \sin x$:



Obr. VI.6



Obr. VI.7

body, jejichž souřadnice splňují druhou nerovnost, jsou nad grafem funkce $y = d - \frac{1}{2} l \sin x$. Jsou tedy ve dvou obrazcích vyšrafovaných na obr. VI.7. Součet obsahů těchto obrazců je roven $2l$. (Musíte mi to zatím věřit; až budete umět integrovat, přesvědčíte se o tom sami.) Obsah celého obdélníka je πd, tedy hledaná pravděpodobnost je $\frac{2l}{\pi d}$.

Asi jste už něco slyšeli o zákonu velkých čísel. Provádějme několikrát určitý pokus, například házení hrací kostkou. Házíme-li n-krát a z toho m-krát nám padne šestka, řekneme, že relativní četnost padnutí šestky je $\frac{m}{n}$. Zákon velkých čísel zde nebudeme přesně formulovat, ale řekneme si, že při velkém počtu pokusů z něho plyne, že s velkou pravděpodobností se relativní četnost jevu bude jen velmi málo lišit od jeho pravděpodobnosti. Házíme-li kostkou třicettisíckrát, můžeme čekat, že šestka padne přibližně pěttisíckrát.

Opakujeme tedy házení jehlou n-krát pro značně velké n, a je-li počet případů, kdy jehla padla žádaným způsobem, roven m, pak

$$\frac{m}{n} \doteq \frac{2l}{\pi d}$$

Z toho pak

$$\pi \doteq \frac{2ln}{dm}.$$

Takto bychom se při rostoucím n postupně přibližovali k číslo π a mohli bychom tedy házením jehlou přibližně určit toto číslo. Je to ovšem úvaha ryze teoretická; prakticky to provádět by nemělo smysl. Ani l, ani d totiž neměříme s přesností na mnoho desetinných míst, nemluvě o tom, že jehla i linky mají také určitou tloušťku, kterou jsme zcela zanedbávali. Snažit se tedy určit π na mnoho desetinných míst z takovýchto nepřesných údajů nemá význam. Nicméně jde o zajímavou hříčku.

Lewis Carroll (1832—1898) je světové veřejnosti znám především jako autor knih „Alenčina dobrodružství v říši divů“ a „Alenčina dobrodružství za zrcadlem“. Tyto knihy jsou stále oblíbenou četbou dětí i dospělých; mnozí lidé, mezi nimi i významný filozof a matematik Bertrand Russell (1872—1970) tvrdili, že jde o knihy výlučně pro dospělé. Méně je už známo, že Lewis Carroll je autorem řady prací o matematické logice; tyto práce ovšem podepisoval svým občanským jménem Charles Lutwidge Dodgson. Zmiňme se ještě o tom, že patřil také k průkopníkům umělecké fotografie.

Jakési hraniční pásmo mezi jeho činností vědeckou a uměleckou tvoří řada matematických hádanek a úloh, které Carroll, jak uvádí, vymýšlel v bezesných nocích. Jsou to úlohy vtipné a rozhodně nikoli lehké. Mezi nimi je i jedno pozoruhodné sofisma, které zde uvedeme.

V urně jsou dvě koule, o nichž víme jen to, že každá z nich je buď černá, nebo bílá. Máme určit jejich barvu, aniž bychom je vyjímali z urny. (Použití rentgenu se nedovoluje.) K řešení se užívá teorie pravděpodobnosti.

Řešení je překvapivé. Nejprve provedeme přípravnou (zřejmě bezchybnou) úvahu. Jsou-li v urně tři koule, z nichž každá je černá nebo bílá, vyjímáme-li jednu kouli, pak pravděpodobnost vytažení černé koule je rovna $\frac{2}{3}$ právě tehdy, jsou-li dvě koule černé a jedna bílá. Nyní přistoupíme k řešení. Do urny přidáme jednu černou kouli; pak jsou tedy v urně tři koule, z nichž jedna je zaručeně černá, každá z ostatních je buď černá, nebo bílá. Pravděpodobnost, že všechny koule jsou černé, je rovna $\frac{1}{4}$ (poněvadž jde vlastně o pravděpodobnost, že obě původní koule jsou černé), pravděpodobnost vytažení černé koule v tomto případě je rovna 1. Pravděpodobnost, že dvě koule jsou černé a jedna bílá, je rovna $\frac{1}{2}$ a pravděpodobnost vytažení černé koule v tomto případě je rovna $\frac{2}{3}$. Pravděpodobnost, že dvě koule jsou bílé a jedna černá, je rovna $\frac{1}{4}$ a pravděpodobnost vytažení černé koule v tomto případě je rovna $\frac{1}{3}$. Samozřejmě pravděpodobnost, že všechny tři koule jsou bílé, je rovna 0. Počítejme celkovou pravděpodobnost vytažení černé koule. Je to

$$\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Podle naší přípravné úvahy je to možné právě tehdy, jsou-li dvě koule černé a jedna bílá. Protože jsme přidávali jednu černou kouli, musela být na začátku jedna koule černá a jedna bílá.

Jde o sofisma, tedy o tvrzení podávané tak přesvědčivě, že se zdá být pravdivé, ačkoliv pravdivé není. V „důkaze" se zaměňuje takzvaná nepodmíněná a podmíněná pravděpodobnost. V přípravné úvaze jde o nepodmíněnou pravděpodobnost, v dalších úvahách pak o pravděpodobnost podmíněnou. Tento rozdíl pochopíte při hlubším studiu teorie pravděpodobnosti.

Úlohy

1. Čtyři muži si dali své klobouky do šatny. Šatnářka je však zapomněla označit, takže při odchodu jim je vydává zcela náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že všichni čtyři dostanou nazpět své klobouky? Jaká je pravděpodobnost, že své klobouky dostanou právě tři, právě dva a právě jeden? Jaká je pravděpodobnost, že nikdo neobdrží svůj vlastní klobouk?

2. Tři osoby se posadí ke stolu, před nímž je řada šesti židlí. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi nebude prázdná židle, volí-li svá místa zcela náhodně?

3. Deset lidí se rozsadí kolem okrouhlého stolu. Jaká je pravděpodobnost, že určitá dvojice lidí bude sedět vedle sebe?

4. Jaká je pravděpodobnost, že ze tří náhodně vytažených mariášových karet bude alespoň jedno eso?

5. Dva přátelé se dohodli, že se na jistém místě sejdou mezi druhou a třetí hodinou odpoledne. Dohodli se, že ten, kdo přijde první, bude na druhého čekat, dokud nepřijde, nejvýše však dvacet minut. Jaká je pravděpodobnost, že se sejdou?

6. Máme 25 bílých koulí a 25 černých; rozdělíme je libovolným způsobem do dvou osudí. Někdo jiný pak volí náhodně jedno osudí a vytahuje z něho jednu kouli. Je pravděpodobnost vytažení bílé koule vždy $\frac{1}{2}$, nebo může být větší?

7. Dva hráči A a B házeli korunou; A vyhrával, padla-li panna, v opačném případě vyhrával B. Hráč B neměl ve hře štěstí. Hráč A mu navrhl změnu pravidel: každý bude házet dvěma mincemi a hráč B vyhraje vždy, když bude mít více lvů než A. Je to pro hráče B výhodnější než házení jednou mincí?

8. Určete pravděpodobnosti jednotlivých výher v sázkové soutěži Mates (sází se pět z 35 čísel).

Řešení úloh

1. Celkový počet možností je počet všech permutací ze čtyř prvků, to jest $4! = 24$. Jen při jediné možnosti dostanou všichni své klobouky; pravděpodobnost je tedy $\frac{1}{24}$. Není

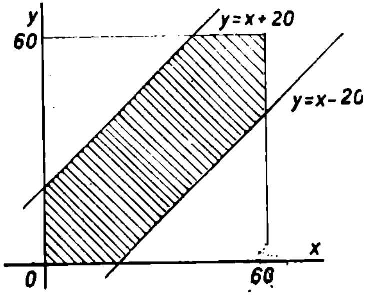
možné, aby tři muži dostali své klobouky a čtvrtý nikoliv; čtvrtý klobouk musí být přece jeho — pravděpodobnost musí být v tomto případě 0. Nyní si představme, že právě dva dostali své klobouky. Tím už je jednoznačně určeno, jaké klobouky dostali zbývající dva — měli klobouky navzájem vyměněné. Možností je tedy $\binom{4}{2} = 6$ a pravděpodobnost je $\frac{1}{4}$. Možnosti, kdy první muž dostane svůj klobouk a všichni ostatní dostanou klobouk cizí, jsou dvě — buď druhý dostane klobouk třetího, třetí čtvrtého a čtvrtý druhého, nebo druhý dostane klobouk čtvrtého, třetí druhého a čtvrtý třetího. Podobně je tomu ovšem i tehdy, kdy svůj klobouk dostane někdo jiný než první; je tedy celkem $4 . 2 = 8$ možností a pravděpodobnost je $\frac{1}{3}$. Pravděpodobnost posledního případu dostaneme tak, že od jedné odečteme součet všech těchto pravděpodobností; je to $1 - \left(\frac{1}{24} + 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{8}$.

2. Všech možností je $\binom{6}{3} = 20$. Příznivé případy jsou čtyři, pravděpodobnost je $\frac{1}{5}$.

3. Celkový počet možností je $10!$. Při počítání příznivých případů uvažujeme, že první ze zmíněných dvou osob může sedět na libovolné židli a druhá nalevo nebo napravo od ní; je tedy dvacet příznivých případů. Pravděpodobnost je $\frac{20}{10!} =$
$= \frac{1}{181440}$.

4. Karet je 32, esa jsou čtyři. Všech možných trojic karet je $\binom{32}{3}$, všech možných trojic karet bez es je $\binom{28}{3}$. Tedy trojic, v nichž je alespoň jedno eso, je $\binom{32}{3} - \binom{28}{3}$. Pravděpodobnost je $1 - \frac{\binom{28}{3}}{\binom{32}{3}}$.

5. Použijeme geometrické pravděpodobnosti. Nechť x je počet minut po druhé hodině v době, kdy přijde první z přátel; analogicky budiž definováno y pro druhého z přátel. Máme $0 \leqq x \leqq 60$, $0 \leqq y \leqq 60$. Body o souřadnicích x, y, které splňují tuto podmínku, vyplní čtverec o vrcholech [0, 0], [0, 60], [60, 60], [60, 0]. Aby se přátelé setkali, musí být $|x - y| \leqq 20$. Body o takovýchto souřadnicích vyplní přímý pás mezi rovnoběžnými přímkami o rovnicích $y = x - 20$ a $y = x + 20$.



Obr. VI.8

Na obr. VI.8 je vyšrafována část tohoto přímého pásu, která leží ve zmíněném čtverci. Skládá se z obdélníka a dvou trojúhelníků, snadno tedy vypočteme její obsah, což je 2000. Obsah čtverce je 3600, tedy pravděpodobnost je $\frac{2000}{3600} = \frac{5}{9}$.

6. Může být větší. Nechť v prvním osudí je jedna bílá koule, v druhém osudí všechny ostatní koule. Pravděpodobnost zvolení libovolného osudí je $\frac{1}{2}$. Zvolí-li se první osudí, je pravděpodobnost vytažení bílé koule 1, v opačném případě $\frac{24}{49}$. Celková pravděpodobnost vytažení bílé koule je

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{49} = \frac{73}{98}.$$

7. Hráč A hráče B ošidil. Při nových pravidlech je pravděpo-

dobnost výhry hráče A pouze $\frac{5}{16}$, zatímco předtím byla $\frac{1}{2}$.

8. Jsou-li p_1, p_2, p_3 pravděpodobnosti výher v jednotlivých pořadích, pak

$$p_1 = \frac{1}{\binom{35}{5}},$$

$$p_2 = \frac{\binom{5}{4}\cdot\binom{30}{1}}{\binom{35}{5}},$$

$$p_3 = \frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{30}{2}}{\binom{35}{5}}.$$

VII. KAPITOLA

INFORMATIKA

Mluvíme-li o matematice, nemůžeme jistě vynechat to, co dnes doslova hýbe světem — samočinné počítače. Nebudeme zde mnoho mluvit o samotných počítačích. Různé zajímavosti o tom, co všechno počítač umí, popřípadě humorné historky týkající se vztahu počítače a člověka, můžete nalézt v jiné literatuře. Zde si povíme něco o matematickém oboru, který s počítači souvisí; nazývá se informatika.

Název informatika není starý. Sama nauka ovšem také není stará, ale její název je podstatně mladší. Donedávna se pro ni z nedostatku vhodného českého výrazu užívalo názvu „computer science", což značí anglicky „věda o počítačích". Zahrnuje problematiku související s matematickou stránkou provozu počítačů; elektrotechnické záležitosti do ní nepatří. Nezaměňujme rovněž informatiku s kybernetikou; kybernetika je širší pojem než informatika — počítače jsou jen jednou stránkou její náplně.

O některých odvětvích informatiky si povíme v dalších odstavcích.

TEORIE ALGORITMŮ

Asi si pamatujete, že jsme v II. kapitole mluvili o jistém středověkém matematikovi s těžko zapamatovatelným jménem. Byl to al-Chvárizmí. Jak to, že jsme se od počítačů dostali náhle do „temného“ středověku?

Al-Chvárizmí ve své knize podal návod k řešení algebraických rovnic. Podle jeho polatinštěného jména nazýváme podobné návody algoritmy; podobnost se slovem logaritmus je čistě náhodná.

Aby však návod k nějakému matematickému postupu byl algoritmem, musí splňovat dvě základní podmínky: musí být použitelný pro řešení poměrně rozsáhlé třídy úloh a musí být popsán tak, aby v každém okamžiku postupu bylo jednoznačně určeno, jak se má pracovat dál.

Příkladem algoritmu je Eukleidův algoritmus pro nalezení největšího společného dělitele dvou přirozených čísel. Nechť jsou dána dvě přirozená čísla; větší z nich označme a, menší b. Chceme najít jejich největšího společného dělitele d. Postupujeme tak, že číslo a dělíme se zbytkem číslem b; zbytek označíme r_1. Je-li $r_1 = 0$, pak $d = b$. Je-li $r_1 \neq 0$, opakujeme postup tak, že místo a vezmeme b a místo b vezmeme r_1. Zbytek při dělení čísla b číslem r_1 označíme r_2. Je-li $r_2 = 0$, je $d = r_1$; jinak opakujeme postup tak, že číslo r_1 dělíme číslem r_2. Dostáváme postupně čísla $r_1, r_2, r_3, \ldots$. Všechna tato čísla jsou nezáporná a každé následující je menší než předcházející, tedy pro nějaké n musíme dostat $r_n = 0$; v tom případě $d = r_{n-1}$.

Ukažme si to pro $a = 2520$, $b = 322$. Dělíme $2520 : 322 = 7$, zbytek 266. Dále $322 : 266 = 1$, zbytek 56. Potom $266 : 56 = 4$, zbytek 42. Pak $56 : 42 = 1$, zbytek 14. Nakonec $42 : 14 = 3$, zbytek 0. Máme $d = 14$. Přehlednou tabulku vidíme na obr. VII.1.

Program pro samočinný počítač se tvoří ve formě algoritmu. Na takovýto program se totiž kladou právě ty požadavky, o nichž jsme mluvili. Pokud by určitý návod k postupu byl použitelný pouze pro malý počet úloh, tedy například pouze pro nalezení největšího společného dělitele čísel 2520 a 322, nemělo by smyslu jej programovat pro počítač; bylo by jednodušší si to vypočítat na papíře. A protože počítač není člověk, nemůžeme chtít, aby samostatně uvažoval; chceme-li něco od něho, musíme mu přesně popsat postup, aby v každém okamžiku práce věděl, co má dělat dál.

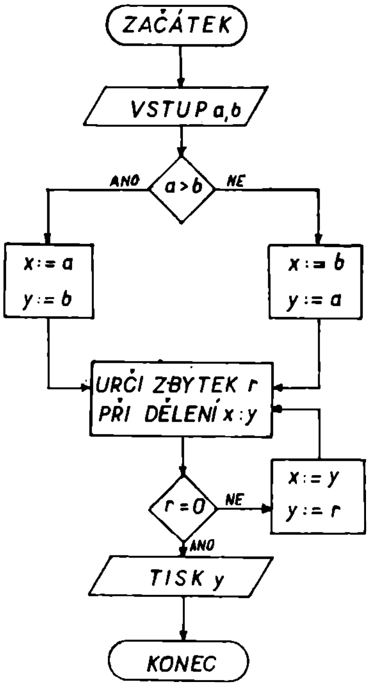
DĚLENEC	DĚLITEL	ZBYTEK
2520	322	266
322	266	56
266	56	42
56	42	14
42	$\boxed{14}$	0

Obr. VII.1

Algoritmus se přehledně zobrazuje vývojovým diagramem. Je to vlastně orientovaný graf, jehož uzly jsou jednotlivé pracovní etapy a jehož hrany uvádějí následnost těchto etap. Vývojový diagram Eukleidova algoritmu vidíme na obr. VII.2.

Algoritmy pro počítač je nutno vypracovat tak, aby byly efektivní, to jest aby výpočet podle nich netrval příliš dlouho. I když počítač vykonává jednotlivé početní úkony ve zlomcích sekundy, při nevhodném programu by mohl pracovat příliš dlouho. A cena za jednu hodinu práce počítače se uvádí ve stovkách korun.

Nejde však jen o sestavování algoritmů, ale často i o určování, zda vůbec lze algoritmus sestavit. Ono to totiž vždy nejde; jsou úlohy, o nichž říkáme, že jsou algoritmicky neřešitelné. Nebudeme si žádné z nich uvádět; stačí, když budete vědět, že o některých úlohách lze tvrdit, že je sebedokonalejší počítač nikdy nevyřeší. Zde teorie algoritmů těsně souvisí s matematickou logikou. S těmito problémy souvisí pojem Markovova algoritmu a Turingova stroje, což je jakýsi idealizovaný počítač. Nelze jej ve skutečnosti sestrojit,



Obr. VII.2

protože by musel obsahovat jistou nekonečnou pásku, ale lze o něm provádět teoretické úvahy, které se pak aplikují na skutečné počítače. (Mohli bychom jej přirovnat k ideálnímu plynu, který také neexistuje, ale pomocí něhož lze provádět úvahy potřebné při zkoumání skutečných plynů.)

JAK SE DOMLUVIT S POČÍTAČEM

Jak jsme se už zmiňovali, pro počítač je nutno vypracovat program, to znamená sdělit mu, co od něho chceme. Program lze napsat ve strojovém kódu, který je ovšem pro každý typ počítače jiný a vždy je těžko zapamatovatelný. Nelze s ním pracovat bez nahlížení do příslušných tabulek. Existují však také takzvané univerzální programovací jazyky. Jsou to určité systémy symbolů, kterým se programátor může naučit tak, jako se učí cizímu jazyku. Programu napsanému v takovémto jazyce mohou rozumět různé počítače; každý z nich si jej prostě přeloží do svého kódu.

Ukažme si, jak vypadá jednoduchý program v jazyce ALGOL. Je to jazyk, který se skládá z matematických symbolů a některých anglických slov. Chceme-li tedy, aby nám počítač Eukleidovým algoritmem určil největšího společného dělitele čísel a a b, můžeme mu to „říci" takto:

```
begin integer a, b;
if a > b then x : = a; y : = b else x : = b; y : = a;
A: z : = x ÷ y; r : = x — y × z;
if r = 0 then print (y) else x : = y; y : = r; go to A
end
```

Nebudeme tento program blíže rozbírat. Je docela zajímavé vidět třeba turecký překlad některé známé české básně, i když turečtině nerozumíme. Zde je situace podobná; víme, o co jde, i když nerozumíme jednotlivým slovům. Ostatně kdo umí anglicky, pro toho to tak docela „turečtina" nebude.

Možná, že se vám zdá divné, že něco takového nazýváme jazykem. Souvisí to však s jistým odvětvím aplikované matematiky, které se nazývá matematická lingvistika. V něm je základním pojmem formální jazyk. Mějme jistou množinu A základních symbolů (říká se jí základní množina nebo abeceda). Množina A^* všech konečných posloupností symbolů z A (říká se jim slova) včetně prázdné posloupnosti (neobsahující žádný symbol) je monoid (viz II. kapitola) vzhledem k operaci zřetězení (například zřetězením slov *aba* a *bcda*, kde a, b, c, d jsou prvky množiny A, je slovo *ababcda*). Říká se mu volný monoid nad množinou A. Formální jazyk (A, L) je pak libovolná podmnožina tohoto monoidu; tento formální jazyk se pak zkoumá matematickými metodami. Lze toho užít ke studiu přirozených jazyků jako například češtiny — zde je základní množinou množina všech slov příslušného jazyka a „slovy" jsou věty z těchto slov utvořené. Jazyk pak je chápán jako množina všech gramaticky správných (byť třeba významově nesmyslných) vět příslušného přirozeného jazyka. Ovšem jsou formální jazyky, které mají význam čistě matematický — například jazyk nad abecedou $\{a, b\}$ složený ze všech slov, kde se na začátku n-krát vyskytuje symbol a a za ním n-krát symbol b, pro libovolné n.

Matematická lingvistika zkoumá obecné zákonitosti jazyků, čímž pomáhá jak jazykovědě, tak tvorbě programovacích jazyků, a zasahuje i do dalších oblastí informatiky.

Nepůjde zde o automat, který po vhození koruny zahraje „O sole mio“, ani o místo, kde lze vstoje u stolku sníst párek s hořčicí. Automaty, o nichž bude řeč, jsou určité matematické objekty, které mohou popsat činnost určitého automatického zařízení (třeba nakonec i toho hudebního automatu). Ukážeme si to na příkladě.

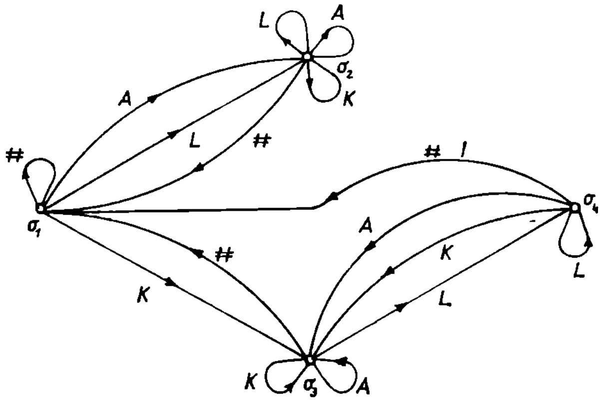
Představme si, že bychom v nějaké tlusté knize měli určit počet všech slov, která začínají písmenem K a končí písmenem L. Je to práce galejnická, proto bychom ji rádi přenechali stroji. Takovýto automat by četl jednotlivá písmena textu, přičemž mezera mezi slovy by se rovněž považovala za písmeno. Jakmile by přečetl slovo zmírněného tvaru, napsal by čárku.

Teorie konečných automatů umožňuje popsat princip činnosti takovéhoto stroje. Vžijme se do jeho situace; představme si, že jsme žáky první třídy základní školy, že už známe abecedu, ale dosud nedovedeme vnímat napsané slovo jako celek, musíme je číst po jednotlivých písmenech. Chceme-li provést požadovaný úkon, musíme si při čtení každého písmene pamatovat vždy právě jednu z těchto věcí:

1. Teď přijde nové slovo.
2. Slovo, které právě čtu, nezačíná písmenem K.
3. Slovo, které právě čtu, začíná písmenem K, ale písmeno, které jsem četl naposledy, není L.
4. Slovo, které právě čtu, začíná písmenem K, a písmeno, které jsem četl naposledy, je L.

Označme si tyto jednotlivé případy σ_1, σ_2, σ_3, σ_4; říkáme jim stavy vnitřní paměti automatu nebo krátce stavy automatu. Je jich konečný počet, proto mluvíme o konečném automatu.

Tyto stavy se mění podle toho, jaké písmeno automat přečte čili jaký vstupní symbol je do něho vložen. Rozlišujeme, zda automat čte K, L, nějaké jiné písmeno (můžeme je vždy značit A) nebo mezeru (značíme $\#$). Je-li například automat ve stavu σ_1 a čte K, přejde do σ_3, protože začal číst slovo začínající písmenem K. Čte-li L nebo A, přejde do σ_2, čte-li $\#$, zůstane v σ_1.



Obr. VII.3

Bude psát čárku neboli vydá výstupní symbol | právě tehdy, byl-li ve stavu σ_4 a následuje-li $\#$; znamená to, že právě přečetl hledané slovo.

Můžeme si to znázornit orientovaným grafem (vlastně multigrafem), jehož uzly budou stavy automatu a hrany budou znázorňovat přechod z jednoho stavu do druhého při určitém vstupním symbolu (ten symbol je vždy u hrany označen). Ke hraně se symbolem $\#$ z σ_4 do σ_1 připíšeme ještě čárku; značí to, že v tomto případě automat píše čárku. Graf vidíme na obr. VII.3.

Není zde pravopisná chyba, protože nejde o byt s ústředním topením ani bez něho, ale o jednotku množství informace. Je to zkratka anglického „binary digit“ čili „dvojková číslice“.

V paměti počítače musejí být uloženy různé informace; jsou tam uloženy ve formě posloupností nul a jedniček. Proč tomu tak je, víme už z II. kapitoly, z odstavce o číselných soustavách. Nejmenší počet takových symbolů, které jsou potřebné pro zakódování určité informace, je právě počet bitů, který tato informace má. Tedy jako délky měříme na metry a hmotnost na kilogramy, měříme množství informace v bitech.

Má-li nějaká informace *n* bitů, znamená to také, že *n* je nejmenší počet otázek, který musíme položit, abychom tuto informaci s jistotou získali, můžeme-li dostávat pouze odpovědi „ano“ nebo „ne“.

Představme si, že náš kamarád vytáhl z mariášové hry jednu kartu a my se chceme dovědět, která to je. Pokud bychom se rovnou zeptali: „Je to zelená osmička?“ a odpověď by byla „ano“, víme to ovšem hned. Pokud by byla odpověď „ne“, nevěděli bychom o mnoho více než předtím. Můžeme však položit určitých pět otázek tak, že žádanou informaci zcela jistě získáme.

Příklad:

„Představuje barva této karty nějakou část rostliny?“ „Ne.“
„Je to červená karta?“ „Ano.“
„Je to karta od desítky níže?“ „Ne.“
„Je to jedna z nejvyšších dvou karet?“ „Ano.“
„Je to eso?“ „Ne.“
„Je to červený král!“

Méně než pěti otázkami to s určitostí zjistit nemůžeme.

Informace o určité kartě z mariášové hry má 5 bitů. Je to pochopitelné; počet karet je 32, tedy 2^5. Kdybychom tyto karty očíslovali a čísla zapsali ve dvojkové soustavě, dostali bychom čísla pětimístná.

Podobnými problémy se zabývá teorie informace; je rovněž součástí informatiky a od ní informatika dostala své jméno. Má význam i pro spojovací techniku. Lze pomocí ní například určit, jak máme nějakou důležitou zprávu zakódovat, aby byla co nejstručnější, ale aby na druhé straně chyba v některém znaku nezpůsobila podstatné zkreslení zprávy. Teorie informace souvisí i s lingvistikou.

Větší jednotkou než bit je byte (čti „bajt“). Je to 8 bitů. Proč právě osm a ne třeba deset nebo sto, pochopíte opět z odstavce o číselných soustavách. Další násobky této jednotky jsou kilobyte a megabyte. Kilobyte nemá přesně tisíc, ale $2^{10} = 1024$ bytů. Megabyte má 1024 kilobytů.

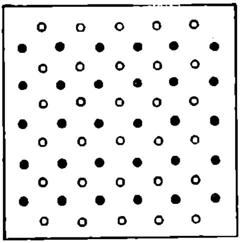
TEORIE HER

V VI. kapitole jsme se zmiňovali o některých hrách, kde výsledek závisel na náhodě (hra v kostky, ruleta). Samozřejmě kromě ryze hazardních her jsou i hry ušlechtilejší, v nichž výhra závisí pouze na schopnostech hráče (šach) nebo částečně na schopnostech a částečně na náhodě (běžné karetní hry). Není divu, že matematika nezanedbává ani tyto hry.

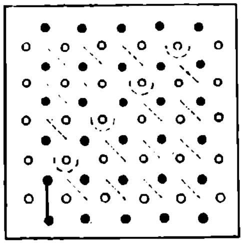
Šach, dáma, mlýn a podobné deskové hry patří mezi takzvané hry s úplnou informací — každý hráč přesně zná situaci hry, nikdo nic nezatajuje. Naproti tomu karetní hry jsou v převážné většině hry s neúplnou informací — žádný hráč nezná karty svých soupeřů.

Řada her, mezi nimi i šach, může být vyjádřena pomocí orientovaných grafů. Uzly grafu jsou jednotlivé pozice hry spolu s údajem, který hráč je na tahu. (Tedy každé pozici odpovídají dva různé uzly, každý z nich znázorňuje situaci, kdy je určitý hráč na tahu.) Z každého uzlu vedou hrany do uzlů znázorňujících pozice, které mohou následovat bezprostředně po odpovídající pozici. Můžeme si potom představovat, že se hra místo na šachovnici nebo jiné hrací desce hraje na grafu, a to s jediným hracím kamenem. Hráči střídavě tahají kamenem po orientovaných hranách grafu. Prohrává ten hráč, který je na tahu a přitom nemůže dále táhnout (neexistuje hrana vycházející z příslušného uzlu).

Nakreslit takovýto graf pro šach by byla ovšem nadlidská práce. A stejně je zatím nejen nad síly člověka, ale i nad síly samočinných počítačů vůbec provést nějakou dokonalou analýzu této hry. Počítače sice hrají šach, ale zdaleka ne zázračně; hrají prostě jako dobří šachisté. Zda je možné, aby jednou počítač porážel velmistry, o tom se názory (mezi matematiky i šachisty) různí. (Zmiňme se v této souvislosti o tom, že exmistr světa v šachu M. Botvinnik je matematikem a zabývá se právě matematickou teorií šachu.) Ještě větší potíže než šach dělá počítačům bridž a japonská desková hra go. Šachisté mohou být rádi — kdyby byl vypracován přesný postup, který by jednoho z hráčů mohl za všech okolností vést k výhře (vyhrávající strategie) nebo alespoň k remíze, šach jako hra by přestal existovat. Teoreticky takováto strategie musí existovat, ale je nad síly lidí i počítačů ji popsat. Jsou však hry, u nichž je takový postup popsán. Některé jednoduché jsou uvedeny ve cvičeních. Zde si všimneme hry, která je trochu složitější. Je to „bridge-it", v doslovném překladu „přemosti to". (Nezaměňovat s karetní hrou bridž.) Hrají dva hráči, bílý a černý. Hráči mají papír s nákresem z obr. VII.4. Tahají střídavě, začíná černý. Tah každého hráče spočívá v tom, že hráč spojí dva sousední body své barvy vodorovnou nebo svislou úsečkou. Úsečky se



Obr. VII.4



Obr. VII.5

nesmějí protínat. Vyhrává hráč, který první spojí lomenou čarou dva body své barvy na protilehlých stranách obrazce. (Pokud by se to nepodařilo nikomu a jeden z hráčů by už nemohl nakreslit další úsečku, tento hráč by prohrál.) Jak ukázal O. Gross, černý může v této hře vždy vyhrát. První úsečku musí vést tak, jak je znázorněno na obr. VII.5. Jestliže bílý vede úsečku procházející koncovým bodem některé z úseček nebo oblouků označených na tomto obrázku čárkovaně, černý musí vést úsečku procházející druhým koncovým bodem. (Tato úsečka je určena jednoznačně.) Vede-li bílý úsečku, která žádným popsaným bodem neprochází, černý může vést libovolnou úsečku. Jestliže černý takto postupuje, zaručeně vyhraje.

Zmiňme se ještě o maticových hrách. Patří mezi ně například takové hry, v nichž oba hráči konají tah současně nezávisle jeden na druhém, jako v této hře:

Hrají dva hráči A a B. Každý položí korunovou minci na stůl a zakryje ji, aby ji druhý neviděl. Pak se obě mince současně odkryjí. Jsou-li obě mince vzhůru pannou, platí hráč A hráči B čtyři koruny, jsou-li obě vzhůru lvem, platí dvě koruny. Je-li mince hráče A vzhůru lvem a mince hráče B vzhůru pannou, platí hráč B hráči A dvě koruny; je-li mince hráče A vzhůru pannou a mince hráče B vzhůru lvem, platí hráč B hráči A čtyři koruny.

Ukazuje se, že nejvhodnější stratégie hráče A je taková: hodit si hrací kostkou a obrátit minci pannou vzhůru tehdy, padne-li číslo dělitelné třemi; v opačném případě obrátit minci vzhůru lvem. Hráč B by to měl dělat zase obráceně. Zde ovšem hraje svou roli náhoda a tedy i teorie pravděpodobnosti.

Zdálo by se, že teorie her slouží pouze kratochvíli. Není tomu tak. Hra ve smyslu této teorie nemusí být jen společenská hra, ale zahrnují se do tohoto pojmu i velmi vážné věci. Může to být válka nebo diplomatická jednání, ale také třeba plánování výživy obyvatelstva. To je „hra proti přírodě", obdobná oné hře s mincemi. Příroda na nás neočekávaně posílá mrazy, vedra, deště, sněhy, krupobití a podobné „tahy" a národohospodáři musejí vést „hru" tak, aby od přírody „vyhráli" co nejvíce.

Úlohy

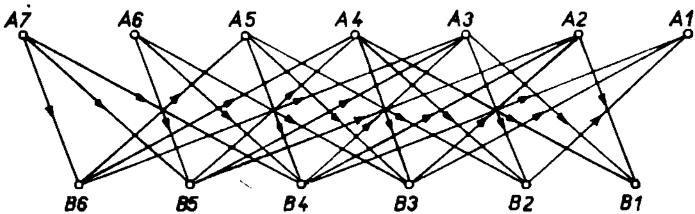
1. Na stole leží patnáct zápalek. Hrají dva hráči, kteří střídavě odebírají jednu, dvě nebo tři zápalky. Prohrává hráč, na něhož zbude poslední zápalka. Určete strategii, která jednoho z hráčů povede s jistotou k vítězství.

2. Nakreslete graf této hry. Pro jednoduchost počítejte se sedmi zápalkami.

3. Zkoumejte tuto hru pro jiné počty zápalek než patnáct.

4. Hráči střídavě kladou na obdélníkový stůl vždy po jedné minci; všechny mince jsou stejné. Mince musí ležet celou svou plochou na desce stolu, nesmí ani částečně překrývat jinou minci. Prohrává hráč, který už nemá kam položit minci. Určete vyhrávající strategii.

5. Hra z úlohy 4 je obměněna tak, že přesně uprostřed stolu stojí váza s květinami, která má kruhové dno. Vázu není dovoleno se stolu sejmout.



Obr. VII.6

Řešení úloh

1. Hráč, který začíná, může vždy vyhrát. Dosáhne toho tak, že poprvé vezme dvě zápalky a potom vždy 4 — n zápalek, kde n je počet zápalek, které odebral druhý hráč v předešlém tahu.

2. Graf je na obr. VII.6. Každý uzel je označen symbolem hráče (A nebo B) a počtem zápalek, které zbývají v dané pozici.

3. Pro jakýkoliv počet zápalek, který při dělení čtyřmi dává zbytek tři, je postup stejný jako u patnácti zápalek. Je-li zbytek při dělení počtu zápalek čtyřmi roven dvěma, bere první hráč poprvé jednu zápalku, je-li roven nule, bere tři zápalky. Dále postupuje stejně jako v předchozím případě. Je-li tento zbytek roven jedné, existuje vyhrávající strategie pro druhého hráče (který nezačíná). Tento hráč opět bere 4 — n zápalek, kde n je počet zápalek, které odebral první hráč v předchozím tahu.

4. První hráč poprvé položí minci přesně doprostřed stolu. Potom klade minci vždy souměrně podle středu stolu k minci, kterou položil druhý hráč v předešlém tahu. Takto první hráč zaručeně vyhraje.

5. V tomto případě má vyhrávající strategii druhý hráč. Opět klade vždy minci souměrně podle středu stolu k minci, kterou položil první hráč v předešlém tahu.

ZÁVĚR

Prošli jsme se světem matematiky a snad vám to dalo nějakou představu o tom, jak tento svět vypadá. Samozřejmě jsme nemohli popsat všechny obory matematiky. Z těch, o nichž jsme nemluvili, uveďme numerické a grafické metody. Víme, že algebraickou rovnici stupně vyššího než čtvrtého nelze řešit v radikálech, lze však získat přibližné hodnoty jejích kořenů právě pomocí těchto metod; podobně je tomu i u mnohých diferenciálních rovnic. Nemluvili jsme o aplikované matematice, která se také dnes pokládá za zvláštní obor. Zmínili jsme se sice o významu matematiky pro fyziku a lingvistiku, víme, že se matematika uplatňuje v chemii, astronomii, ekonomii a technických vědách, je však třeba poznamenat, že proniká i do biologie, psychologie a sociologie. Existuje dále filozofie matematiky, která shrnuje a zobecňuje výsledky jednotlivých matematických oborů. Historie matematiky nám zachovává svědectví o těch, kteří tu byli před námi a bez nichž bychom neznali to, co známe. A nezapomeňme ani na teorii vyučování matematice — vždyť bez tohoto vyučování by nebylo nových matematiků.

Náš výlet matematickým světem končí a doufám, že vám tento svět nepřipadal jako šedá a děsivá krajina na Měsíci, ale jako živý svět, svět kolem nás.

LITERATURA

W. Ahrens: Mathematische Unterhaltungen und Spiele. Leipzig—Berlin 1910.
J. Bosák: Latinské štvorce. Praha 1976.
L. Carroll: История с узелками. Москва 1973
K. Čupr: Matematické zábavy a hry. Praha 1953.
А. П. Доморяд: Математические игры и развлечения. Москва 1961.
M. Gardner: Математические досуги. Москва 1972.
K. Havlíček a kolektiv: Cesty moderní matematiky. Praha 1976.
J. J. Herlinger: Mister Hopkins, wnuk Sherlocka. Warszawa 1972.
H. a M. Honzíkovi: Dobrodružství čísel. Praha 1970.
J. Kadeřábek, V. Kracík: Úvod do teorie pravděpodobnosti, matematické statistiky a příbuzných oblastí. Liberec 1970.
J. G. Kemeny, J. L. Snell, G. L. Thompson: Úvod do finitní matematiky. Praha 1971.
B. A. Korděmskij: Matematické prostocviky. Praha 1966.
L. Mucha: Vlajky a znaky zemí světa. Praha 1975.
Š. Novoveský, K. Križalkovič, J. Lečko: 777 matematických zábaviek a hračiek. Bratislava 1968.
O. Ore: Theory of Graphs. Providence 1962.
J. B. Pavlíček: Základy neeuklidovské geometrie Lobačovského. Praha 1953.
J. I. Perelman: Zajímavá geometrie. Praha 1954.
J. I. Perelman: Živá matematika. Bratislava 1969.
M. T. Постников: Магические квадраты. Москва 1964.
G. Ringel: Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen. Berlin 1959.
J. Sedláček: Nebojte se matematiky. Praha 1969.
J. Sedláček: Úvod do teorie grafů. Praha 1977.
W. Sierpiński: Cardinal and Ordinal Numbers. Warszawa 1958.

D. J. Struik: Dějiny matematiky. Praha 1963.
T. Šalát: Dokonalé a spriatelené čísla. Praha 1969.
I. Tomescu: Introducere în combinatorică. București 1972.
N. J. Vilenkin: Vyprávění o množinách. Praha 1973.
H. Weyl: Symetria. Warszawa 1956.
J. D. Williams: Dokonalý stratég. Praha 1966.
D. Zagier: The First 50 Million Prime Numbers. Math. Intelligencer 0 (1977), 7—19.
O. Zich, A. Kolman: Zajímavá logika. Praha 1965.

Časopisy: Pramen zábavy a poučení
Věda a technika mládeži

SEZNAM DOSUD VYDANÝCH SVAZKŮ EDICE ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

1. *František Hradecký - Milan Koman - Jan Vyšín:* Několik úloh z geometrie jednoduchých těles, 1961, 1963, 1977
2. *Jiří Sedláček:* Co víme o přirozených číslech, 1961, 1965, 1976
3. *Jaroslav Šedivý:* Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách, 1962
4. *Miroslav Šisler - Jiří Jarník:* O funkcích, 1962 a 1963
5. *František Veselý:* O nerovnostech, 1963
6. *Rudolf Výborný:* Matematická indukce, 1963 a 1966
7. *Jaroslav Šedivý:* O podobnosti v geometrii, 1963 a 1967
8. *Jiří Váňa:* O rovnicích s parametry, 1964 a 1970
9. *Jan Vyšín:* Konvexní útvary, 1964
10. *Jiří Sedláček:* Faktoriály a kombinační čísla, 1964
11. *Josef Holubář:* Geometrická místa bodů v prostoru, 1965
12. *Karel Havlíček:* Prostory o čtyřech a více rozměrech, 1965
13. *Miroslav Šisler - Josef Andrys:* O řešení algebraických rovnic, 1966
14. *František Veselý:* O dělitelnosti čísel celých, 1966
15. *Milan Koman:* Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic, 1966
16. *Stanislav Horák:* Kružnice, 1966
17. *Jaromír Hroník:* Úlohy o maximech a minimech funkcí, 1967
18. *Karel Havlíček:* Analytická geometrie a nerovnosti, 1967

19. *Jiří Jarník:* Komplexní čísla a funkce, 1967
20. *Bruno Budinský - Stanislav Šmakal:* Goniometrické funkce, 1968
21. *Alois Apfelbeck:* Kongruence, 1968
22. *Tibor Šalát:* Dokonalé a spriatelené čísla, 1969
23. *Jaroslav Morávek - Milan Vlach:* Oddělitelnost množin, 1969
24. *Ján Gatial - Milan Hejný:* Stavba Lobačevského planimetrie, 1969
25. *Leo Bukovský - Igor Kluvánek:* Dirichletov princíp, 1970
26. *Karel Hruša:* Polynomy v moderní algebře, 1970
27. *Stanislav Horák:* Mnohostěny, 1970
28. *Bruno Budinský - Stanislav Šmakal:* Vektory v geometrii, 1971
29. *František Zítek:* Vytvořující funkce, 1972
30. *Milan Koman - Jan Vyšín:* Malý výlet do moderní matematiky, 1972 a 1974
31. *Oldřich Odvárko:* Booleova algebra, 1973
32. *Jan Vyšín - Jitka Kučerová:* Druhý výlet do moderní matematiky, 1973
33. *Jaroslav Morávek:* O dynamickém programování, 1973
34. *Ladislav Rieger:* O grupách, 1974
35. *Alois Kufner:* Co asi nevíte o vzdálenosti, 1974
36. *Ján Černý:* O aplikáciach matematiky, 1975
37. *Beloslav Riečan - Zdena Riečanová:* O pravdepodobnosti, 1976
38. *Juraj Bosák:* Latinské štvorce, 1976
39. *Alois Kufner:* Nerovnosti a odhady, 1975
40. *Antonín Vrba:* Princip matematické indukce, 1977
41. *Bohdan Zelinka:* Rovinné grafy, 1977
42. *Ladislav Beran:* Uspořádané množiny, 1978
43. *Jiří Jarník:* Posloupnosti a řady, 1978

Připravované svazky:

Antonín Vrba: Kombinatorika, 1979
Jaroslav Šedivý: Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách, 1979
Arnošt Niederle: Zajímavé dvojice trojúhelníků, 1979

OBSAH

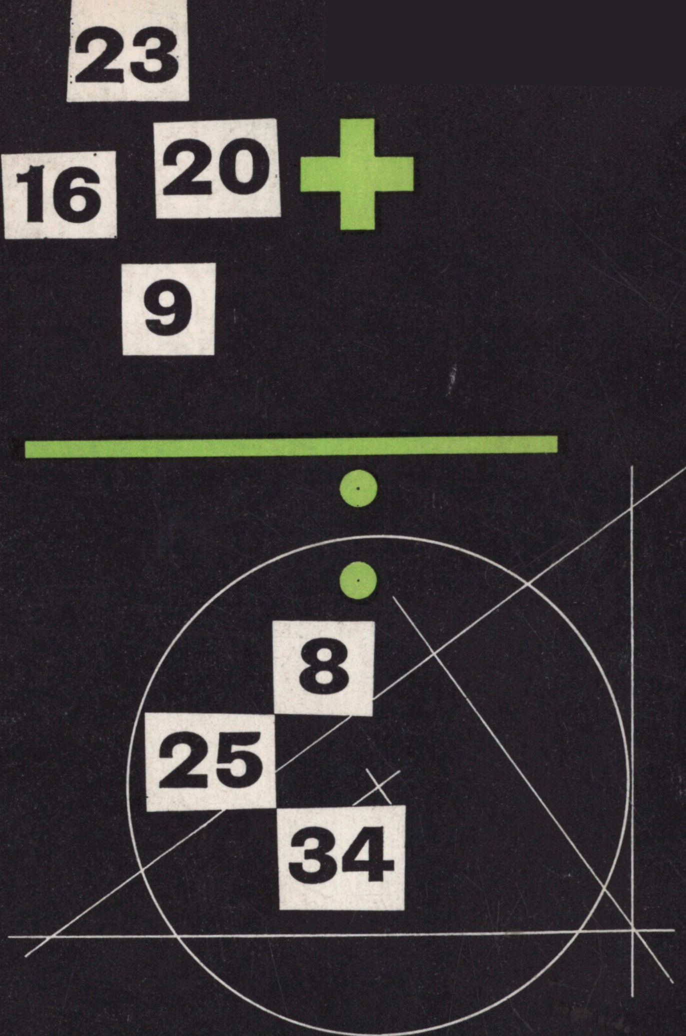
ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

BOHDAN ZELINKA

Matematika hrou i vážně

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
K tisku připravil Vladimír Doležal
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Odpovědná redaktorka Libuše Rousková
Technický redaktor Vladimír Vácha
Publikace číslo 4122
Edice Škola mladých matematiků, svazek 44
Vytiskl MÍR, novinářské závody, n. p.,
závod 1, Praha 1, Václavské nám. 15
6,97 AA, 8,25 VA, 192 stran
Náklad 10 000 výtisků. 1. vydání
Praha 1979. 508/21/82.5

23-125-79 03/2 Cena brož. výt. Kčs 11,—



23-125-79
03/2
Cena brož.
Kčs 11,—