

01. ročník matematické olympiády

Jan Vyšín (editor); Rudolf Zelinka (editor): 01. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1951/52. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1953.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404415>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

PRVNÍ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIADY

PRAHA 1953

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ

PRVNÍ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIADY

*(Zpráva o řešení úloh ze soutěže
konané ve školním roce 1951/52.)*

1952

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ
PRAHA

34. sv. edice Pedagogické aktuality
536. kniha edice Dědictví Komenského

Za přispění pracovního kolektivu sestavili:

Jan Vyšín a Rudolf Zelinka

1. KE VZNIKU A ORGANISACI MATEMATICKÉ OLYMPIADY

U nás se stalo pěknou tradicí, že Jednota čs. matematiků a fyziků již od počátku svého založení pečovala o zvyšování úrovně vyučování matematice tím, že ve svých časopisech uveřejňovala matematické úlohy, určené k řešení pro studenty škol 3. stupně. Avšak okruh těchto řešitelů byl přec stále jenom velmi úzký. Snaha, aby se úroveň vyučování matematice na naší socialistické škole soustavně zvyšovala, vedla naše učitele matematiky a představitele naší matematické vědy k myšlence, pořádat každoročně pro žáky našich škol zvláštní matematickou soutěž; jen tímto způsobem lze propagačně a organizačně zajistit zvýšení zájmu o studium matematiky a technických věd vůbec. Vzorem k tomu byly v SSSR již tradiční matematické olympiady a dále soutěže toho druhu, pořádané i v jiných zemích lidově demokratických, zvláště v Polsku.

Učitelé Olomouckého a Ostravského kraje uspořádali v minulých dvou letech v krajském měřítku podobné matematické soutěže pro žáky škol 3. stupně a také soudruzi na Slovensku se chystali v létě r. 1951 uskutečnit ve školním roce 1951/1952 podobnou soutěž. Bezprostředním popudem k uspořádání celostátní matematické soutěže pro žáky našich škol byl návrh prof. Dr. E. Čecha, aby byl ustaven přípravný výbor matematické olympiady, který by celou věc projednal jednak s ministerstvem školství, věd a umění (MŠVU), jednak s Československým svazem mládeže (ČSM). Polské zkušenosti totiž ukázaly, že je nezbytné, aby se vedení soutěže ujal nejvyšší školský orgán, který by soutěž nejen hmotně zajistil, ale který

by také svou autoritou mobilisoval příslušné školské orgány, především pak učitele matematiky. Vedle MŠVU bylo třeba ke spolupráci získat i ČSM, neboť matematická olympiada zapadá vhodně do rámce jeho činnosti.

V září r. 1951 se ustavil přípravný výbor matematické olympiady, který vypracoval návrh organizačního řádu soutěže a předložil jej ministerstvu školství, věd a umění, aby se spolu s ČSM a s Ústředním ústavem matematickým (ÚÚM) ujalo uspořádání takové soutěže; pro nejbližší léta má být tato soutěž jako celostátní zatím zaměřena na žáky výběrových škol 3. stupně. MŠVU s velkým porozuměním návrh přijalo, a tak v prosinci r. 1951 vychází ve Věstníku MŠVU oběžník č. 190 (č. j. 24 743/51 — II/3 ze dne 13. XII. 1951), jímž se zřizuje matematická soutěž pro žáky, která po sovětském vzoru dostala název matematická olympiada. Oběžník především poukazuje na praktický i výchovný význam matematiky pro naši mládež a dále oceňuje soutěž s hlediska soustavného zvyšování úrovně vyučování matematice, fyzice a vědám technickým; pomocí soutěže mají být vyhledáni a včas podchyceni mladí talentovaní studenti a soustavně se má pečovat o přípravu budoucích vedoucích technických kádrů našeho hospodářského života. V dalším oběžník načrtává organizační řád soutěže, soutěž plně hmotně vybavuje a zajišťuje.

Soutěž má proběhnout ve třech etapách, zvaných kola. První kolo má úkol přípravný, studijní; soutěžící řeší doma předepsané úlohy, při čemž má být za vedení svého učitele matematiky nabádán k samostatnému studiu matematických textů, především školských učebnic matematiky.

Druhé kolo má již ostrý ráz eliminační a koná se v t. zv. oblastech; v každé oblasti je zpravidla sdruženo několik krajů. V sídlech oblastí jsou zřízeny oblastní výbory matematické olympiady (OVMO). Oblasti jsou zřízeny v městech s vysokou školou; jsou to tedy tato města: Bratislava, Brno, Košice, Olomouc, Ostrava, Pardubice, Plzeň, Praha. Členy OVMO jmenuje ústřední výbor matematické olympiady (ÚVMO).

Soutěž prvního a druhého kola se koná za vedení oblast-

ního výboru ve dvou kategoriích. Do kategorie A jsou zařazeni žáci 3. a 4. tříd výběrových škol 3. stupně, do kategorie B žáci 1. a 2. tříd těchto škol. Závěrečné třetí kolo matematické olympiady, které je celostátní, je určeno jen pro soutěžící v kategorii A.

Celou soutěž řídí ústřední výbor matematické olympiady; jeho členy jmenuje MŠVU, které v něm má také své zástupce. V oblastních výběrech i v ústředním výboru jsou zastoupeni učitelé matematiky na vysokých školách, učitelé matematiky na školách 3. stupně, zástupci školských orgánů (školských referátů KNV) a zástupci ČSM.

ÚVMO byl ustaven takto:

Dr František Vyčichlo, náměstek ředitele ÚÚM a profesor techniky jako předseda, místopředsedové Dr Jindřich Šmída, náměstek ministra školství, věd a umění, Dr J. Hronec, profesor slovenské university; jednatelem výboru byl jmenován Rudolf Zelinka, vědecký pracovník ÚÚM, členy výboru tito soudruzi:

Dr O. Borůvka, profesor Masarykovy university v Brně,
Jan Hlaváček, referent školského oddělení ÚVČSM v Praze,
Josef Holubář, vědecký pracovník pedagogické fakulty v Praze,

František Hradecký, profesor Nerudova gymnasia v Praze,
Miloš Jelínek, ústřední inspektor MŠVU v Praze,
Vítězoslav Repáš, přednosta oddělení PŠVU v Bratislavě,
Karol Rován, profesor gymnasia v Piešťanech,
Rudolf Tomica, profesor gymnasia v Brně-Králově Poli.
Předsedy oblastních výborů byli jmenováni tito soudruzi:

Dr Štefan Schwarz, profesor techniky v Bratislavě,
Dr Boh. Vlach, krajský školní inspektor v Brně,
Dr Fr. Jurga, profesor techniky v Košicích,
doc. Dr Josef Metelka, děkan pedagogické fakulty v Olomouci,
Dr Alfons Hyška, asistent vysoké školy báňské v Ostravě,
Josef Zieris, profesor gymnasia v Pardubicích,
Jan Taišl, asistent pedagogické fakulty v Plzni,
Dr Karel Hruša, asistent pedagogické fakulty v Praze.

Ještě než vyšel oběžník MŠVU č. 190, uveřejnil přípravný výbor v časopise „Matematika ve škole“ organizační pokyny k soutěži a od prosince r. 1951 do března r. 1952 publikoval každý měsíc v tomto časopise po čtyřech úlohách pro každou z obou kategorií A a B. Každá úloha byla oblastním výborem samostatně klasifikována podle těchto zásad:

„Výborné“ řešení je takové, které je po všech stránkách bezvadné. Ve „chvalitebném“ řešení se mohou vyskytnout menší formální nedostatky. Řešení „dobré“ má buď závažnější formální nebo méně závažné odborné nedostatky; řešení „dostatečné“ je sice zhruba úplné, ale jsou v něm závažné odborné nedostatky. Jinak je řešení „nedostatečné“. Stanovená klasifikace je tedy mnohem přísnější než obvyklá klasifikace školská, což samozřejmě vyplývá z povahy výběrovosti soutěže. Podle těchto zásad byla provedena také klasifikace ve druhém a třetím kole.

Úspěšný soutěžící prvního kola musil ze 16 zadaných úloh rozřešit alespoň 9 s oceněním ne horším než dobrým. Úspěšný řešitel druhého nebo třetího kola musil ze 4 předložených úloh, k jichž řešení mu byly vyměřeny 4 hodiny čistého času, rozřešit nejméně dvě s oceněním ne horším než dobrým.

Soutěž prvního kola byla vzhledem k tomu, že oběžník MŠVU č. 190 vyšel opožděně, uzavřena až koncem dubna 1952. Soutěž druhého kola se konala pod vedením oblastních výborů v místech jejich sídla (mimo to též v Hradci Králové a v Kroměříži) v neděli 18. května 1952 za účasti školských orgánů.

Soutěž třetího kola konala se v neděli dne 15. června 1952 v budově matematického ústavu Karlovy university v Praze II, Ke Karlovu 3. Účastníci soutěže sjeli se do Prahy již v sobotu dne 14. června 1952 a společně se zástupci ÚVMO a školských úřadů navštívili večerní představení divadelní hry „Otec“ od Aloise Jiráska v Komorním divadle. Soutěž třetího kola byla zahájena dne 15. června 1952 o 9. hod. proslovy, jež pronesli Dr Jindřich Šmída, náměstek ministra školství, věd a umění, Josef Čejna, referent školského oddělení ÚVČSM a univ. prof. Dr E. Čech, ředitel Ústředního ústavu matema-

tického, který při této příležitosti věnoval každému účastníkovi soutěže první díl své „Analytické geometrie“.

Ve svém projevu prof. Čech zdůraznil, že matematická olympiada vhodně navazuje na tradici, kterou u nás založila naše Jednota čs. matematiků a fyziků, která je vedle moskevského „Matěmatičeskogo občestva“ nejstarší společností toho druhu vůbec. Dále naznačil cíle, kterých chceme pomocí matematické olympiady dosáhnout, a vyzval přítomnou mládež, aby pilně studovala tak, aby jednou mohla s úspěchem plnit úkoly, které od ní naše lidově demokratická republika bude požadovat. Vyslovil pevné přesvědčení, že naši svazáci všechny tyto úkoly skutečně splní.

Po skončení vlastní soutěže třetího kola účastnili se soutěžící spolu s čestnými hosty, mezi nimiž byl mimo jiné školský referent ÚNV v Praze Václav Jaroš a prof. slovenské techniky Dr Štefan Schwarz, společného oběda v Národním domě na Královských Vinohradech. Nedělní odpoledne věnovali účastníci soutěže prohlídce Prahy. Hostitelské úkoly vzorně plnil školský referát ÚNV v Praze za vedení soudružky Dr L. Městkové.

Bližší zprávy o průběhu a výsledcích jednotlivých kol matematické olympiady jsou uvedeny v odstavci 2.

2. ZPRÁVA O PRŮBĚHU A VÝSLEDKÁCH JEDNOTLIVÝCH KOL MATEMATICKÉ OLYMPIADY

A. SOUTĚŽ PRVNÍHO KOLA

Soutěže prvního kola účastnili se podle zpráv z oblastí celkem 1003 řešitelé, převážně žáci gymnasií. Některé oblasti měly dosti velkou účast (Praha, Brno). V některých krajích, kde nebyla provedena žádná propagace soutěže, byla účast velmi slabá. Poměrně slabá byla účast žáků 3. tříd (asi 25% celkového počtu v kategorii A) a tříd prvních (asi 40% celkového počtu v kategorii B). Mezi řešiteli bylo asi 150 žákyní (t. j. asi 15%). Tito účastníci zastupovali asi 140 škol, převážně gymnasií; účast žáků škol průmyslových byla velmi slabá a jen dva z nich se dostali do třetího kola.

Přehled výsledků prvního kola je patrný z tabulky 1.

Tab. č. 1.

Přehled účastníků prvního kola podle oblastí

Oblast	Kategorie A		Kategorie B		Zastupoval celkem škol
	celkem účastníků	úspěšných řešitelů	celkem účastníků	úspěšných řešitelů	
Bratislava	62	9	81	15	14
Brno	65	3	135	10	31
Košice	37	5	24	3	4
Olomouc	64	17	99	26	14
Ostrava	51	12	25	3	11
Pardubice	30	14	37	11	13
Plzeň	22	8	42	14	11
Praha	103	8	126	8	41
celkem	434	76	569	90	139

Přehled o počtu a kvalitě řešení 16 úloh z prvního kola podle jednotlivých kategorií je patrný z tabulek č. 2a a 2b.

Z tabulek je patrné, které z daných úloh byly příliš obtížné, a dále, že účastníci soutěže v druhém pololetí ochabovali, patrně proto, že si definitivní vypracování řešení nechali až na konec termínu odevzdání.

Tab. č. 2a.

Přehled o řešení 16 úloh prvního kola, kategorie A

Celkový počet účastníků 434.

Úloha č.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Řešení 1 oceně- no znám- kou	32	130	42	43	89	51	28	12	21	36	68	58	2	9	7	16
	2	13	42	50	34	23	68	53	7	24	39	52	35	1	15	6
	3	55	23	130	68	24	33	41	20	33	36	21	15	4	14	7
	4	31	23	71	65	19	70	52	7	50	26	13	14	0	59	19
	5	136	68	72	28	93	68	89	35	46	18	19	46	7	14	4
Celkový počet poda- ných řešení	267	286	365	238	248	290	263	81	174	155	173	168	14	111	33	81
z toho řešení úspěš- ných	100	195	222	145	136	152	122	39	78	111	141	108	7	38	20	51

Tab. č.2b.

Přehled o řešení 16 úloh prvního kola, kategorie B

Celkový počet účastníků 569.

Úloha č.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
Řešení oceně- no znám- kou	1	19	16	5	28	11	79	147	11	13	15	10	32	14	5	23	114
	2	25	57	13	99	48	65	57	40	27	19	23	17	13	31	54	79
	3	82	100	36	47	69	75	21	41	55	42	44	4	16	33	23	18
	4	92	140	65	65	86	97	22	54	57	35	28	11	8	14	32	25
	5	70	133	82	82	178	108	36	117	68	67	59	42	15	20	51	17
Celkový počet poda- ných řešení	288	446	201	321	392	424	283	263	220	178	164	106	66	103	183	253	
z toho řešení úspěš- ných	126	173	54	174	128	219	225	92	95	76	77	53	43	69	100	211	

B. SOUTĚŽ DRUHÉHO KOLA

Do druhého kola postoupilo v kategorii A 76, v kategorii B 90 soutěžících; v kategorii B se dostavilo k soutěži druhého kola 84 soutěžících.

Přehled výsledků druhého kola je patrný z tabulky č. 3.

Tab. č. 3.

Přehled účastníků druhého kola podle oblastí

Oblast	Kategorie A		Kategorie B	
	celkem účastníků	úspěšných řešitelů	celkem účastníků	úspěšných řešitelů
Bratislava	9	6	15	4
Brno	3	3	10	6
Košice	5	2	3	0
Olomouc	17	9	20	3
Ostrava	12	9	3	1
Pardubice	14	9	11	3
Plzeň	8	3	14	8
Praha	8	6	8	5
celkem	76	47	84	30

V kategorii A bylo 62 úloh oceněno známkou výbornou, 41 úloh známkou chvalitebnou, 29 úloh známkou dobrou, takže celkem bylo řešeno úspěšně 132 úloh. 30 úloh bylo oceněno známkou dostatečnou a zbývající byly buď nedostatečné nebo nebylo podáno řešení.

V kategorii B bylo 12 úloh oceněno známkou výbornou, 37 úloh známkou chvalitebnou a 43 úloh známkou dobrou; celkem bylo řešeno úspěšně 92 úloh. 45 úloh bylo oceněno známkou dostatečnou a zbývající úlohy byly buď nedostatečné nebo nebylo podáno řešení.

Obstálo tedy v kategorii A zhruba 62% účastníků a v kategorii B zhruba 36% účastníků.

Protože pro kategorii B bylo druhé kolo závěrečné, uvádíme jména vítězů v této kategorii podle jednotlivých oblastí

(jde vesměs o žáky gymnasií; G = gymnasium; číslo za jménem značí třídu):

(1) *Bratislava*: Juraj Virsík 1b, Bratislava; Marian Šteller 2a, Trnava; Viera Paulíny-Tothová 2, IIG Bratislava; Jozef Brody 1, IIG Bratislava.

(2) *Brno*: *Petr Vopěnka 2, Ledec n. S.; Ivan Kolář 1, Brno-Židenice; Otto Reimer 2, Ivančice; Oldřich Buchta 1, Brno-Žabovřesky; Miroslav Svoboda 2, Telč; Zdeněk Kouba 2, Telč.

(3) *Olomouc*: *Milan Dvořák 2b, Prostějov; Petr Urban 2b, Prostějov; Stanislav Trávníček 2b, Kroměříž.

(4) *Ostrava*: Eduard Walach 2, Český Těšín.

(5) *Pardubice*: *Ivan Saxl 1, Chrudim; Vlastimil Heinzel 2, Broumov; Miloš Němec 1, Pardubice.

(6) *Plzeň*: Karel Vlachovský 2b, Plzeň (Nám. odborářů); Vladimír Jezdinský 1a, Klatovy; Petr Liebl 2a, Č. Budějovice; Vlastimil Tomášek 2a, Č. Budějovice; Marie Magerová 1a, Klatovy; Jiří Voleník 1b, Rokycany; Otakar Vavroch 1b, Plzeň (Nám. odborářů); František Hesoun 2b, Č. Budějovice.

(7) *Praha*: *Evžen Kindler 2, Praha XII, Londýnská; Ivan Friš 2b, Praha XVI, Vančurovo G.; Tomislav Šimeček 1, jaz. G, Praha XII, Slezská; Josef Jelen 2, Hořovice; Vladimíra Šourková 2, Bílina.

I. cena v kategorii B byla přiřčena 4 účastníkům, kteří jsou v seznamu označeni hvězdičkou. Byli odměněni peněžitým darem po 2500 Kčs a výběrem z odborné literatury.

Pěti dalším účastníkům bylo věnováno po 1500 Kčs a knižní dary. 3 účastníci získali III. cenu po 500 Kčs a knižní dary.

C. SOUTĚŽ TŘETÍHO KOLA

Do třetího kola postoupilo 47 soutěžících (kategorie A); k soutěži se dostavilo 46 účastníků; z nich obstálo 22 účastníků, t. j. zhruba 48%. Mezi vítězi je 5 Slováků, kteří obsadili první dvě místa.

Přehled klasifikace ve třetím kole je patrný z tabulky č. 4. Pořadí vítězů je uvedeno dále.

Tab. č. 4.

	Počet prací oceněných známkou					Počet nepodaných řešení
	1	2	3	4	5	
Číslo úlohy 1	11	3	3	5	19	5
Číslo úlohy 2	6	9	2	4	19	6
Číslo úlohy 3	5	5	11	4	11	10
Číslo úlohy 4	2	0	15	3	20	6
Součty	24	17	31	16	69	27

POŘADÍ VÍTĚZŮ TŘETÍHO KOLA MATEMATICKÉ OLYMPIADY

(Jde vesměs o žáky gymnasií; G=gymnasium; za jménem jednotlivých vítězů je uvedeno jméno učitele, který žáka vyučoval.)

1. Juraj Bosák 4b, IIG Bratislava (Uhlík).
2. Jozef Gruska 3b, Prievidza (Vašek).
3. Jiří Janta 4b, Ostrava I, Tř. čs. legií (Pomykal).
4. Jaroslav Kautský 4c, Nerudovo G, Praha III (Hradecký).
5. až 9. Pavol Brunovský 3d, IIG Bratislava (Dubec); Bohumil Cenkl 3b, Olomouc (Švarcová, Losenický); Bedrich Formánek 4c, IIG Bratislava (Dubec, Furta); Jiří Jelínek 4a, Plzeň, Nám. odborářů (Fišerová); Břetislav Mičulka 3b, Místek (Vítek).
10. Jan Vaněk 4b, Teplice (Slavík).
11. Ivan Kertész 4b, IIG Košice (Rečičár).
12. až 18. Pavel Čihák 4a, Jičín (Bíma); Vladimír Doležal 4e, Praha XIII (Dr Procházka); Jindřich Klimeš 4c, Pardubice (Kapička, Matějka); Ivo Zvára 4a, Pardubice (Kapička); Josef Cyprián 4c, Ostrava I, Matiční (Andrýs); Josef Čermák 3a, Chrudim (Langpaul); Jan Otčenášek 4d, Brno-Husovice (Maňák).

19. Vlastimil Krejsa 4, Ostrava I, Matiční (Andrýs).
20. až 22. Dagmar Čejková 4a, Chotěboř (Příhodová); Jaroslav Hofmann 3, Zábřeh (Kosek); Jaromír Vosmanský 4b, Gottwaldov (Berka).

Prvních 11 účastníků obdrželo vedle knižních cen od MŠVU peněžité odměny. První cena 6000 Kčs, druhá cena 5000 Kčs, třetí cena 4500 Kčs atd. až jedenáctá cena 2000 Kčs. Zbývající dostali knižní ceny.

3. ZHODNOCENÍ I. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIADY

1. I když je hlavním úkolem matematické olympiady vzbudit zájem o hlubší a intenzivnější studium matematiky v co nejširším okruhu studentů a objevovati mezi nimi matematické talenty, je jedním z jejích vedlejších úkolů získat z průběhu soutěže určité poznatky o současném stavu vyučování matematice na výběrových školách 3. st. Tyto poznatky mohou dát našim učitelům matematiky velmi cenné direktivy pro jejich další učitelskou práci. To však platí nejen o učitelích škol 3. st., ale do značné míry i o učitelích škol 2. st.; vždyť v budoucnu bude třeba soutěž přenést i na všeobecně povinné školy. Některé okresy uspořádaly (již ve školním roce 1951/52) podobnou soutěž pro žactvo škol 2. stupně.

Soutěž ukázala, že máme na školách řadu nadaných studentů; na druhé straně bylo shledáno, že mnozí účastníci soutěže, tedy většinou žáci nadprůměrní, ne-li vynikající, projeví závažné nedostatky nejen v některých základních vědomostech, ale i v usuzovacím procesu, v metodě řešení matematických úloh, ve slovní formulaci myšlenkového postupu řešení a pod. Tím spíše lze očekávat, že ještě hlubší nedostatky se projeví u žáků průměrných. Na základě zkušeností nabytých z I. ročníku matematické olympiady bude třeba hledat cesty, kterými lze tyto nedostatky soustavně odstraňovat. Po této stránce musí přispět k soustavnému zvyšování úrovně vyučování matematice zvláště matematické kroužky při KPS a OPS a s nimi všichni učitelé matematiky; také touto cestou mohou naši učitelé matematiky nemálo

přispět našemu socialistickému budování a boji za mír v celém světě. Politicky vyspělé a odborně dokonale připravené kádry mladých techniků jsou zárukou, že cíle, jež si naše společnost ukládá, skutečně splníme.

Při hodnocení prvního ročníku matematické olympiady se soustředíme hlavně na úlohy I. kola, jednak proto, že nám poskytují nejvíce materiálu jak počtem úloh a jejich problematikou, tak i počtem účastníků; obě další, časově úzce omezená kola nepřinesla v podstatě nic nového.

Bylo jistě nesprávné, že účastníci I. kola nemohli být už během něho postupně informováni o správném řešení odevzdaných úloh a o nejzávažnějších chybách, které se v jejich řešení vyskytovaly. Soustavné informace byly tím žádoucíjší už proto, že I. kolo mělo úkol studijní, tedy přípravný, a bylo vlastně z celé soutěže nejdůležitější a nejvýchovnější. Tím, že žákům takové informace nemohly být poskytnuty, se stalo, že typické chyby se opakovaly znovu ve II. a III. kole. Důvod, proč bylo nutno prodloužit termín odevzdávání řešení úloh I. kola, je znám. Především se celá soutěž o měsíc opozdila, mnohé školy prováděly propagaci soutěže až po vydání ministerského oběžníku a konečně na mnohé školy docházel časopis „Matematika ve škole“ se značným opožděním a nepravdělně. Také se v průběhu soutěže ukázalo, že nejen žáci nedovedli ve svých školních učebnicích matematiky vyhledat a nastudovat materiál, jehož znalost byla podmínkou úspěšného řešení, ale že i mnozí učitelé, kteří se dosud s novými učebnicemi dobře neseznámili, nedovedli svým svěřencům po této stránce poradit. Nabádat žáka k samostatnému studiu školních učebnic matematiky, jak to konečně vyžaduje i usnesení předsednictva KSČ o učebnicích pro národní a střední školy, je nejen úkolem školy, ale i jedním z cílů matematické olympiady.

Nevýhodou při našem hodnocení je, že jsme namnoze zcela odkázáni na stručné a kusé zprávy jednotlivých oblastních výborů. Je tu dále i otázka, do jaké míry mohou být řešení jednotlivých úloh soutěže podkladem pro objektivní posu-

zování stavu vyučování matematice; jde tu totiž o otázku vhodnosti a přiměřenosti jednotlivých zadaných úloh. V této věci se mínění jednotlivých oblastních výborů značně rozcházejí. Je jisté, že některé z úloh (na př. A 8, A 13*) byly nadměrně složité a obtížné; naopak jiné úlohy (na př. A 12) byly příliš jednoduché; ale přece jen většina úloh byla celkem přiměřená, a právě o výsledky jejich řešení se opíráme při svém hodnocení.

2. Nejzávažnější nedostatek je v tom, že žáci neobracejí postup při dokazování, t. j., že odůvodní správnost tvrzení $A \Rightarrow B$ a pak jako samozřejmě správné přijmou tvrzení $B \Rightarrow A$. Tato chyba se vyskytuje i v řešení úloh aritmetických, ale ještě častěji v úlohách geometrických. Tak na př. důkaz vztahu z úlohy A 6 se prováděl většinou podle tohoto chybného schematu: Plyne-li z dané nerovnosti (rovnice) nerovnost (rovnice), která platí pro každé reálné x, y, z , pak platí daná nerovnost (rovnice) pro každé reálné x, y, z . Nebo v úloze B 5 se užívalo tohoto chybného závěru: Střed otáčení (existuje-li) leží na jistých dvou přímkách; tedy každý společný bod těchto dvou přímek je středem takového otáčení. Podobné chyby se vyskytovaly hromadně v úlohách A 3, A 4, A 7, A 8, A 16, B 7, B 15. To svědčí o tom, že na mnohých školách se nevěnuje dosud dostatek pozornosti logické správnosti výkladu matematiky. Řada učitelů se při výkladu omezuje na to, že odvodí jakýmsi ne dosti přesným způsobem vzorec nebo poučku, kterých má žák stejně nekritickým způsobem užít k řešení určitého cvičení, při čemž se žáci málo vedou k tomu, aby důkaz nejen plně pochopili a snad pomocí svých poznámek jej i reprodukovali, ale aby také pocítovali nutnost, že každé matematické tvrzení má být, pokud je to na tomto stupni možné, řádně odůvodňováno.

Rozhodně je třeba vymýtit takové učitelovy výklady, které budí dojem, že se poučka odůvodňuje, ale ve skutečnosti celá

*) A 8 značí úlohu 8 kategorie A v I. kole; B 3/II značí úlohu čís. 3 ve druhém kole a pod.

úvaha je povrchní, opírá se na př. nekriticky o jakýsi speciální náčrt, je plna logických skoků a dohadů. Takto bychom naše žáky nenaučili matematicky myslet, tím méně aspoň trochu samostatně pracovat a studovat z učebnice.

3. Druhý závažný nedostatek jsou chybějící, neúplné nebo chybné diskuse; jde o probrání jednotlivých možných případů při důkazu nebo o diskusi nalezeného řešení, t. j. též o zkoumání podmínek řešitelnosti. Tento nedostatek je patrný zejména při synthetických úlohách v geometrii. Tak na př. v úloze B 2 se neuvažovalo v řadě řešení o případech, kdy osa úsečky AB protíná přímkou OS v bodě O nebo S a kdy je úloha neřešitelná. Takovýto nedostatek v diskusi vyplynul ovšem z toho, že nalezené konstruktivní řešení úlohy nebylo vůbec dokazováno. Nebo v úloze B 10 byly sice určeny strany obou neshodných trojúhelníků takto: a , ka , k^2a ; ka , k^2a , k^3a , avšak vůbec se nezkoumalo, pro která čísla k jsou takové trojúhelníky možné. Nedostatky v diskusích se vyskytovaly ve značné míře také v úlohách A 3, A 4, A 7, A 9, A 15, B 1, B 4, B 9, B 14, B 15.

4. V souvislosti s úlohou B 2, o níž byla výše zmínka, je třeba se zmínit o konstruktivních úlohách vůbec. V soutěži byla řada takových úloh, avšak značné procento účastníků řešilo tyto úlohy bezplánovitě; je zřejmé, že jim není znám postup při řešení konstruktivní úlohy. Mnozí neprováděli rozběr, téměř nikdo se ani nezmiňoval o důkazu konstrukce, což ovšem souvisí s nedostatkem, který jsme uvedli na prvním místě. Při konstruktivních úlohách se také nejvíce projevila neschopnost žáků popsat srozumitelně postup; zdá se, že jim leckde chybí nejen matematická terminologie a fraseologie, ale také nejnutnější výcvik ve vyjadřování matematických myšlenek. Proto bylo nesnadné některá řešení vůbec posuzovat.

5. Čtvrtý nedostatek je, že mnohým účastníkům není vůbec jasné, co je matematický důkaz. Tak na př. v úloze A 12 zjistili někteří řešitelé počet obdélníků v několika konkrétních případech a z těchto výsledků získali neúplnou indukci

obecný výsledek, ale nepokusili se jej vůbec dokázat. Jinde (na př. v úloze B 15) uhodli výsledek z názoru anebo diskusi prováděli z názoru, a nikoli rozбором výsledného vzorce (A 10). V úloze A 3/III zase vůbec nezkoumali, zda úhly (duté) $\angle BAU$, $\angle CDV$ skutečně existují, při důkazu pak vycházeli jen od vlastního náčrtu. Zejména v analytické geometrii (úloha A 7) nebylo mnoha účastníkům jasné, jak má vypadat řešení úlohy. Přenášeli bez jakýchkoli dalších úvah výsledky odvozené za pomoci obrázku z prvního kvadrantu do ostatních a generalisovali je; tito žáci zřejmě nepochopili podstatu analytické geometrie, ač jde téměř výhradně o žáky 4. třídy.

6. Z věcných nedostatků se nejvíce projevila nedostatečná znalost práce s nerovnostmi a absolutními hodnotami (úlohy A 2, A 6, B 5), špatné osvojení rozkladů shodností v osově souměrnosti, resp. málo cviku při užívání těchto rozkladů (úlohy A 15, B 3). a konečně nedostatečná znalost vlastností dělicího poměru (úloha A 7).

7. Soutěžící v kategorii B ukázali, že dosud nejsou na matematické zkoumání problémů dosti navyklí, což lze vysvětlit do značné míry tím, že na střední škole se dosud žáci mnohde učí provádět automaticky jakési operace nebo jakési konstrukce, jichž hlubší odůvodnění neznají nebo plně nechápou, a že teprve během studia na škole 3. st. jim pozvolna přivyspívají; proto značná část soutěžících v kategorii B v II. kole neobstála. Ale i v kategorii A ve III. kole obstála sotva polovina soutěžících, při čemž si musíme uvědomit, že úspěšným řešitelem II. nebo III. kola byl soutěžící, který vypracoval nejméně 2 úlohy (ze čtyř) alespoň dobře, takže po této stránce byly požadavky poměrně malé.

8. Na druhé straně je třeba konstatovat, že přes všechny nesnáze, s nimiž provedení soutěže muselo zápasit, proběhla soutěž celkem hladce a nemálo přispěla na řadě škol k zvýšení zájmu o studium matematiky a technických oborů vůbec. Někteří učitelé věnovali propagaci soutěže velkou pozornost a při různých besedách s řešiteli značně přispěli k tomu,

že soutěžící v II. nebo i v III. kole podali velmi pěkné výkony.

Na tomto místě je třeba poděkovat jak soudruhům v oblastních výběrech matematické olympiady, tak i soudruhům v matematických kabinetech při KPS. Zvláště tyto kroužky za spolupráce s krajskými inspektory a orgány MŠVU a PŠVU podstatně přispěly k rychlému proniknutí soutěže; také pracovníci skupin ČSM mají svou zásluhu o získání řady soutěžících.

Návštěva soutěžících II. kola v oblastních městech a návštěva účastníků III. kola v Praze znamenala pro mnohé studenty mimořádnou událost, na kterou budou rádi vzpomínat.

Potěšující je, že se olympiada stala celostátním podnikem, jehož se slovenští pracovníci účastnili velmi pěkným způsobem, o čemž svědčí zvláště to, že první dva z vítězů jsou Slováci. Přitom je třeba konstatovat, že slovenští žáci dosud většinou neměli nové učebnice matematiky k dispozici.

Za velmi kladný přínos matematické olympiady musíme považovat konstatování mnohých soutěžících, s nimiž jsme rozmlouvali, že totiž začali studovat školské učebnice matematiky. Je zajímavé, že velmi bedlivě srovnávali staré učebnice a rozsáhlost jejich látky s učebnicemi novými, při čemž pak sami konstatovali pokrok, který nové učebnice znamenají po stránce přesnosti a zevrubnosti. Můžeme proto očekávat, že příští ročník matematické olympiady splní své úkoly lépe než ročník letošní a že s pomocí našich politicky uvědomělých, mládež milujících učitelů matematiky přispěje podstatně ke zvýšení kvality vědomostí našich studentů nejen v matematice, ale i v příbuzných disciplínách.

4. ŘEŠENÍ ÚLOH ZE SOUTĚŽE

A. ÚLOHY I. KOLA, KATEGORIE A

1. Jaký vztah platí mezi úhly α , β , γ , platí-li

a) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma$,

b) $\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\beta + \operatorname{tg} 2\gamma = \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\beta \cdot \operatorname{tg} 2\gamma$?

Řešení. a) Daný vztah lze postupně upravovati takto:

$$2 \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta) + 2 \sin \frac{1}{2} \gamma \cos \frac{1}{2} \gamma =$$

$$= 2 \left[2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right] \cos \frac{\gamma}{2};$$

$$\sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta) + \sin \frac{1}{2} \gamma \cos \frac{1}{2} \gamma =$$

$$= \left[\cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta) + \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \right] \cos \frac{1}{2} \gamma;$$

$$\cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \left[\sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta) - \cos \frac{1}{2} \gamma \right] +$$

$$+ \cos \frac{1}{2} \gamma \left[\sin \frac{1}{2} \gamma - \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \right] = 0;$$

$$\cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \left[\sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta) - \sin \frac{1}{2} (\pi - \gamma) \right] +$$

$$+ \cos \frac{1}{2} \gamma \left[\cos \frac{1}{2} (\pi - \gamma) - \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \right] = 0;$$

$$\begin{aligned}
& 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \frac{1}{4}(\pi + \alpha + \beta - \gamma) \sin \frac{1}{4}(\alpha + \beta + \gamma - \pi) + \\
& + 2 \cos \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{4}(\pi + \alpha + \beta - \gamma) \sin \frac{1}{4}(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = 0; \\
& \sin \frac{1}{4}(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \left[\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \frac{1}{4}(\pi + \alpha + \beta - \gamma) + \right. \\
& \quad \left. + \cos \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{4}(\pi + \alpha + \beta - \gamma) \right] = 0.
\end{aligned}$$

Tomu lze vyhovět, když:

(1) buď

$$\sin \frac{1}{4}(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = 0, \text{ t. j. když } \alpha + \beta + \gamma = (4k + 1)\pi,$$

kde k je libovolné číslo celé ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$),

(2) nebo když

$$\begin{aligned}
& \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \frac{1}{4}(\pi + \alpha + \beta - \gamma) + \\
& + \cos \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{4}(\pi + \alpha + \beta - \gamma) = 0.
\end{aligned}$$

Tento vztah lze upravit takto:

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \left[\cos \frac{1}{4}(\alpha + \beta - \gamma) - \sin \frac{1}{4}(\alpha + \beta - \gamma) \right] + \right. \\
& + \cos \frac{1}{2}\gamma \left[\cos \frac{1}{4}(\alpha + \beta - \gamma) + \sin \frac{1}{4}(\alpha + \beta - \gamma) \right] \left. \right\} = 0, \\
& \cos \frac{1}{4}(\alpha + \beta - \gamma) \left[\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \cos \frac{1}{2}\gamma \right] - \\
& - \sin \frac{1}{4}(\alpha + \beta - \gamma) \left[\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \cos \frac{1}{2}\gamma \right] = 0,
\end{aligned}$$

takže

$$\begin{aligned} & \cos \frac{1}{4}(\alpha + \beta - \gamma) \cos \frac{1}{4}(\alpha - \beta + \gamma) \cos \frac{1}{4}(-\alpha + \beta + \gamma) - \\ & - \sin \frac{1}{4}(\alpha + \beta - \gamma) \sin \frac{1}{4}(\alpha - \beta + \gamma) \sin \frac{1}{4}(-\alpha + \beta + \gamma) = 0. \end{aligned}$$

Nalezený vztah nelze rozřešit prostředky školské matematiky. Lze však udat některá částečná řešení. Vztahu vyhovíme třeba tak, že položíme $-\alpha + \beta + \gamma = \pi$; daný vztah pak přejde ve tvar

$$\begin{aligned} & \cos \frac{1}{4}(\alpha + \beta - \gamma) \cos \frac{1}{4}(\alpha - \beta + \gamma) - \\ & - \sin \frac{1}{4}(\alpha + \beta - \gamma) \cdot \sin \frac{1}{4}(\alpha - \beta + \gamma) = 0, \end{aligned}$$

čili $\cos \frac{1}{2}\alpha = 0$. Odtud plyne $\alpha = (2k - 1)\pi$, kde k je celé,

takže $\beta + \gamma = 2k\pi$. Podobně bychom dostali částečné řešení

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= 2k\pi, \beta = (2k - 1)\pi \text{ nebo } \alpha + \beta = 2k\pi, \gamma = \\ &= (2k - 1)\pi. \end{aligned}$$

b) Daný vztah má význam, když

$$2\alpha \neq \frac{1}{2}\pi + l\pi, \quad 2\beta \neq \frac{1}{2}\pi + m\pi, \quad 2\gamma \neq \frac{1}{2}\pi + n\pi, \quad (1)$$

kde l, m, n jsou celá čísla. Je vždy $\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 2\beta \neq 1$. Kdyby totiž $\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 2\beta = 1$, pak by z daného vztahu plynulo $\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\beta + \operatorname{tg} 2\gamma = \operatorname{tg} 2\gamma$, čili $\operatorname{tg}^2 2\alpha = -1$, což není možné. Lze tedy psát

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\beta}{\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 2\beta - 1} = -\operatorname{tg} (2\alpha + 2\beta),$$

čili

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = k\pi, \quad (2)$$

kde k je celé číslo.

Protože postup lze obrátit, máme výsledek: danému vztahu je vyhověno právě tehdy, je-li (za předpokladu (1)) vyhověno (2).

2. Jsou-li p_1, p_2, q_1, q_2 reálná čísla a je-li $p_1 p_2 = 2(q_1 + q_2)$, pak aspoň jedna z rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + p_1 x + q_1 &= 0, \\ x^2 + p_2 x + q_2 &= 0 \end{aligned}$$

má reálné kořeny. Dokažte!

Řešení. Kdyby měly obě rovnice kořeny imaginární, bylo by

$$p_1^2 - 4q_1 < 0, p_2^2 - 4q_2 < 0, \text{ čili } p_1^2 < 4q_1, p_2^2 < 4q_2.$$

Pak by bylo $p_1^2 + p_2^2 < 4(q_1 + q_2)$ a vzhledem k podmínce dané v úloze by bylo také

$$p_1^2 + p_2^2 < 2p_1 p_2, \text{ čili } (p_1 - p_2)^2 < 0,$$

což je nemožné, neboť p_1, p_2 jsou reálná čísla.

3. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány velikosti úseček AB, AC, BD, CD a přímky $p \parallel AC, q \parallel BD$. Provedte diskusi.

Řešení. Předpokládejme, že jsme našli řešení. Pak posunutí, které převede bod D v bod C , nechť převede bod B v bod B' . Bod B' nesplyne s bodem C (jinak by bylo $B \equiv D$) a neleží na přímce AC mimo bod C (jinak by bylo $AC \equiv CB' \parallel DB$; avšak úhlopříčky nejsou v žádném čtyřúhelníku vypuklém ani nevypuklém rovnoběžné). Body A, C, B'

tvoří tedy trojúhelník, v němž jsou známy směry dvou stran $AC \parallel p$, $CB' \parallel BD \parallel q$ a jejich velikosti $\overline{AC}$, $\overline{CB'} = \overline{BD}$.

Konstrukce je tedy tato: zvolíme bod C , jím vedeme přímky $p' \parallel p$, $q' \parallel q$. Bod C rozdělí přímku p' na dvě polopřímky: vybereme jednu z nich a označíme ji CX . Bod C rozdělí přímku q' na dvě polopřímky: vybereme jednu z nich a označíme ji CY . Na polopřímkách CX , CY sestrojíme body A , B' tak, aby úsečka CA měla předepsanou velikost a aby bylo $\overline{CB'} = \overline{BD}$. Sestrojíme dále bod B tak, aby úsečka AB měla předepsanou velikost a aby bylo $\overline{BB'} = \overline{CD}$. Konečně sestrojíme bod D tak, aby bylo $B'C \uparrow \uparrow BD$ a $\overline{B'C} = \overline{BD}$. Úloha je řešitelná, jsou-li splněny tyto předpoklady:

1. Lze sestrojit bod B , t. j. $|\overline{AB} - \overline{CD}| \leq \overline{AB'} \leq \overline{AB} + \overline{CD}$.

2. Trojice bodů A, B, C ; B, C, D ; C, D, A ; D, A, B neleží v přímce.

Úloha má nejvýše čtyři řešení, neboť vyjdeme-li z polopřímek CX , CY , dostaneme nejvýše dvě řešení (dva trojúhelníky $AB'B$ souměrně sdružené podle přímky AB'), vyjdeme-li z polopřímek CX' a CY' opačných k CX , CY , dostaneme opět nejvýše dvě řešení.

4. Jsou dány dvě různoběžky p , p' a na nich dva různé body A , A' (A na p , A' na p'). Určete bod M na přímce p a bod M' na přímce p' tak, aby bylo $\overline{AM} = \overline{A'M'}$ a aby úsečka MM' měla danou velikost d . Proved'te diskusi.

Řešení. Předpokládejme, že jsme našli řešení a že $M \neq A$. Posunutí, které převádí bod M' v bod A' , převede bod A v bod, který označíme M'' , a bod M v bod, který označíme M_0 . Protože podle předpokladu je $\overline{A'M''} = \overline{AM}$ a úsečky AM'' a MM_0 jsou shodné a souhlasně rovnoběžné délky $A'M'$, je AMM_0M'' kosočtverec.

Proto leží bod M_0 na jedné z os přímek $p, p'' \equiv AM''$. Úsečky $M'A'$ a MM_0 jsou rovněž shodné a souhlasně rovnoběžné, tedy $\overline{MM'} = \overline{M_0A'} = d$, takže bod M_0 leží na kružnici se středem v A' a poloměrem d .

Z tohoto rozboru plyne konstrukce:

Při daných různoběžkách p, p' , bodech A, A' na p, p' a délce d sestrojíme nejprve bodem A přímkou p'' rovnoběžnou s přímkou p . Sestrojíme dále osy o_1, o_2 přímek p a p'' a kružnici $k \equiv (A', d)$. Každému průsečíku M_0 kružnice k s jednou z os o_1, o_2 odpovídá právě jedno řešení úlohy, jak vyplývá z obrácení postupu.

1. Je-li $M_0 \equiv A$, sestrojíme bodem M_0 rovnoběžku q s přímkou p' , která protne p v bodě, který označíme M . Je $M \equiv M_0$. Posunutí, které převede bod M_0 v bod M , převede bod A' v bod $M' \equiv A'$, který leží na p' a pro který vskutku platí $\overline{A'M'} = (\overline{M_0M}) = \overline{AM}$, $\overline{M'M} = \overline{A'M_0} = d$. Že ke každému ze sestrojených bodů M_0 existuje právě jeden bod M a jeden bod M' , vyplývá z úvodního rozboru.

2. Je-li $M_0 \equiv A$, je jedno řešení $M \equiv A, M' \equiv A'$. Další řešení dostaneme jako v případě 1.

Existují tedy nejvýše čtyři řešení podle toho, kolik je průsečíků kružnice k s dvojicí os o_1, o_2 .

5. Buď n přirozené číslo a $x_1, x_2, \dots, x_n$ čísla reálná. Dokažte, že když platí

$$n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2,$$

pak je nutně $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Řešení. Daný vztah lze přepsat ve tvaru

$$\begin{aligned} nx_1^2 + nx_2^2 + \dots + nx_n^2 &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + 2x_1x_2 + \\ &+ 2x_1x_3 + \dots + 2x_{n-1}x_n, \end{aligned}$$

při čemž každé číslo x_i se vyskytuje právě v $n - 1$ součinech $2x_i x_k$. Lze tedy psát

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} - x_n)^2 = 0,$$

a to lze splnit jen tehdy, jsou-li všechny rozdíly v závorkách rovny nule, t. j. je-li

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n.$$

6. Dokažte, že pro každé reálné x, y, z platí

$$x + y + z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Kdy nastává rovnost?

Řešení. Jsou-li x, y, z , reálná čísla, vždy platí

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0.$$

Odtud plyne

$$2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2yz - 2zx + 2z^2 \geq 0,$$

čili

$$(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2),$$

a pak

$$|x + y + z| \leq \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)},$$

a tedy tím spíše

$$x + y + z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Rovnost nastane, je-li $x = y = z \geq 0$.

7. Úsečka AB velikosti d se pohybuje tak, že její krajní body zůstávají na dvou pevných navzájem kolmých přímkách. Co vyplní při tom bod X přímky AB , jehož dělicí poměr (ABX) je roven danému číslu $\lambda \neq 0; 1$? Může být

křivka opsaná bodem X kružnice? Jsou mezi křivkami opsanými bodem X dvě podobné nebo shodné?

Řešení. Dané dvě navzájem kolmé přímky zvolíme za osy souřadnic; bod A nechť leží na ose x , bod B na ose y a jejich souřadnice budť $A \equiv [x_1; 0]$, $B \equiv [0; y_2]$. Z podmínek naší úlohy vyplývá jednak:

$$x_1^2 + y_2^2 = d^2, \quad (1)$$

jednak vztah pro bod $X \equiv [x; y]$:

$$x = \frac{x_1}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{-\lambda y_2}{1 - \lambda}. \quad (1')$$

Odtud plyne $x_1 = (1 - \lambda)x$, $y_2 = -\frac{1}{\lambda}(1 - \lambda)y$. Dosa-
díme-li za x_1 , y_2 do rovnice (1), vyjde po úpravě

$$\frac{(1 - \lambda)^2}{d^2} x^2 + \frac{(1 - \lambda)^2}{d^2 \lambda^2} y^2 = 1. \quad (2)$$

Každý bod X leží tedy na elipse o rovnici (2). Obráceně, je-li $[x; y]$ libovolný bod této elipsy, určíme čísla $x_1 = (1 - \lambda)x$ a $y_2 = -\frac{1}{\lambda}(1 - \lambda)y$. Použijeme-li rovnice (2), dostaneme, že mezi čísly x_1 , y_2 platí rovnice (1). To znamená, že vzdálenost bodů $[x_1; 0]$, $[0; y_2]$ je d ; mimo to jsou splněny rovnice (1'), t. j. bod $[x; y]$ má vzhledem k bodům $[x_1; 0]$, $[0; y_2]$ dělicí poměr λ , a náleží tudíž mezi hledané body X . Proto je elipsa (2) geometrickým místem všech bodů X .

Elipsa (2) je kružnicí tehdy a jen tehdy, je-li

$$\frac{(1 - \lambda)^2}{d^2} = \frac{(1 - \lambda)^2}{d^2 \lambda^2},$$

čili $1 = \frac{1}{\lambda^2}$, t. j. $\lambda = -1$ (je totiž $\lambda \neq 1$).

Bod X je pak středem úsečky AB .

Vyšetřeme, kterým λ odpovídají elipsy podobné, resp. shodné, předpokládáme-li d pevně zvolené. Pro dvě hodnoty $\lambda_1 = \lambda_2$ dostaneme dvě elipsy totožné, jak plyne z rovnice (2). Necht' je tedy $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Aby dvě elipsy, odpovídající hodnotám λ_1, λ_2 byly podobné, musí být úměrné jejich poloosy a tedy také čtverce těchto poloos, t. j. musí platit

$$\frac{d^2}{(1-\lambda_1)^2} : \frac{d^2\lambda_1^2}{(1-\lambda_1)^2} = \frac{d^2}{(1-\lambda_2)^2} : \frac{d^2\lambda_2^2}{(1-\lambda_2)^2}, \quad (3)$$

nebo

$$\frac{d^2}{(1-\lambda_1)^2} : \frac{d^2\lambda_1^2}{(1-\lambda_1)^2} = \frac{d^2\lambda_2^2}{(1-\lambda_2)^2} : \frac{d^2}{(1-\lambda_2)^2}. \quad (3')$$

Za našeho předpokladu $\lambda_1 \neq 1, \lambda_2 \neq 1$ je rovnice (3) ekvivalentní s rovnicí

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2, \quad (4)$$

rovnice (3') s rovnicí

$$(\lambda_1\lambda_2)^2 = 1. \quad (4')$$

1. Platí-li (4), musí být $\lambda_1 = -\lambda_2$ (neboť $\lambda_1 \neq \lambda_2$), a tedy $|\lambda_1| \neq 1$. V tomto případě jde o podobnost, neboť koeficient

úměrnosti je $\left| \frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_1} \right| \neq 1$. Kdyby totiž bylo $\left| \frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_1} \right| = 1$,

bylo by $(1-\lambda_1)^2 = (1+\lambda_1)^2$, t. j. $\lambda_1 = 0$, a to je spor, takže shodnost je vyloučena.

2. Bude-li platit rovnice (4'), mohou nastat dva případy:

a) $\lambda_1\lambda_2 = 1$, pak je nutně $|\lambda_1| \neq 1$ ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), $\lambda_2 \neq 0$ a můžeme psát $\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2}$. Koeficient úměrnosti je

$$\left| \frac{\lambda_2(1-\lambda_1)}{1-\lambda_2} \right| = \left| \frac{\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2}{1-\lambda_2} \right| = \left| \frac{\lambda_2 - 1}{1-\lambda_2} \right| = 1,$$

takže jde o shodnost.

$$\text{b) } \lambda_1 \lambda_2 = -1 \ (|\lambda_1| \neq 1, \lambda_2 \neq 0), \text{ pak je } \lambda_1 = -\frac{1}{\lambda_2}.$$

Koeficient úměrnosti je

$$\left| \frac{\lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2}{1 - \lambda_2} \right| = \left| \frac{\lambda_2 + 1}{1 - \lambda_2} \right| \neq 1,$$

neboť $\lambda_2 \neq 0$.

Shodnost je tedy vyloučena a jde o podobnost.

Dostáváme tedy podobnost pro případy

$$\lambda_1 = -\lambda_2, \quad |\lambda_1| \neq 0; 1,$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\lambda_2}, \quad |\lambda_1| \neq 0; 1,$$

a shodnost v případě

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2} \quad |\lambda_1| \neq 0; 1.$$

8. Soustava čtverců má tuto vlastnost:

Jeden vrchol každého čtverce leží na přímce p , druhý na přímce q a třetí na přímce r .

Dokažte, že čtvrté vrcholy čtverců soustavy leží také na přímce.

Úžitím předchozího výsledku sestrojte čtverec $ABCD$, jehož vrchol A leží na dané přímce a , vrchol B na dané přímce b , vrchol C na dané přímce c a vrchol D na dané přímce d . Diskuse.

Řešení. Prvou část úlohy budeme řešit v poněkud přesnější formulaci (viz dále Úloha 1). Nejprve však zavedeme tyto úmluvy:

Všechny vyšetřované geometrické útvary leží v pevné dané rovině, v níž je určen kladný smysl otáčení. Tuto rovinu vez-

meme za souřadnicovou rovinu o osách x, y (kladný směr osy y vznikne z kladného směru osy x otočením o $+90^\circ$).

Souřadnice bodu A budeme značit x_A a y_A a budeme psát $A = [x_A, y_A]$. Smluvíme se dále na tomto označení:

1. Jsou-li A, B dva body a λ číslo reálné, budeme znakem $A + B$ značit bod $[x_A + x_B, y_A + y_B]$ a znakem λA bod $[\lambda x_A, \lambda y_A]$. Místo $(-1)A$ budeme stručně psát $-A$.

2. Je-li A bod v naší rovině, budeme znakem A^* značit bod, který vznikne z bodu A otočením o $+90^\circ$ kolem počátku, tedy $A^* = [-y_A, x_A]$. Snadno nahlédneme, že

$$(\lambda A + \mu B)^* = \lambda A^* + \mu B^*$$

(jsou-li A, B body a λ, μ reálná čísla).

3. Jestliže bod A leží na přímce a , budeme stručně psát

$$A \varepsilon a.$$

Jsou-li p, q dvě přímky, bude úhel $\sphericalangle pq$ značit úhel, o který je nutno otočit přímku p , abychom dostali přímku rovnoběžnou s přímkou q . Tento úhel je určen až na celistvý násobek 180° . Jsou-li dány čtyři body A, B, C, D , budeme říkat, že tvoří čtverec (A, B, C, D) (kladně orientovaný), když A, B, C, D jsou vrcholy čtverce o stranách AB, BC, CD, DA a když strana AD vznikne ze strany AB otočením o 90° (kladně) kolem bodu A .*

Věta 1. Čtyři body A, B, C, D tvoří čtverec tehdy a jen tehdy, když

$$C - B = (B - A)^*, \quad (1)$$

$$B - A = C - D. \quad (2)$$

Věta 2. Buďtež $(A, B, C, D), (A', B', C', D')$ dva čtverce. Nechtě ze vztahů $A = A', B = B', C = C', D = D'$ jsou splněny alespoň dva. Pak jsou splněny i vztahy zbývající.

Věty 1 a 2 jsou zřejmé.

*) Za čtverec pokládáme i útvar vytvořený čtyřmi splývajícími body.

Úloha 1. Jsou dány tři přímky a, b, c . Vyšetřte, co je soubor d vrcholů D čtverců (A, B, C, D) , kde $A \varepsilon a, B \varepsilon b, C \varepsilon c$. Proveďte diskusi.

Řešení. 1. Nechť $\sphericalangle ab = 45^\circ, \sphericalangle bc = 45^\circ$ a nechť přímky a, b, c se neprotínají v jednom bodě. Potom neexistuje čtverec (A, B, C, D) tak, aby $A \varepsilon a, B \varepsilon b, C \varepsilon c$.

2. V každém jiném případě je d přímka.

Abychom mohli dokázat řešení úlohy 1, odvodíme si pět pomocných vět číslovaných I až V.

I. Nechť přímky a, c nejsou kolmé. Pak pro každé $B \varepsilon b$ existuje právě jeden čtverec (A, B, C, D) tak, že $A \varepsilon a, C \varepsilon c$.

Důkaz existence. Budiž y soubor bodů $Y = B + (X - B)^*$, kde X probíhá body přímky c (to znamená, že y je přímka, která vznikne z přímky c otočením o 90° kolem bodu B). Je tedy y přímka kolmá k c , tedy y není rovnoběžná s a . Přímky y a a protínají se tedy v jistém bodě A . Určeme bod C vztahem*) $A = B + (C - B)^*$. Je tedy $C \varepsilon c, A \varepsilon a$.

Určeme ještě bod D vztahem (2) z věty 1. Tvoří tedy body (A, B, C, D) podle této věty čtverce.

Důkaz unicity. Buďtež $(A, B, C, D), (A', B, C', D')$ dva různé čtverce takové, že $A, A' \varepsilon a; C, C' \varepsilon c$. Podle věty 2 je $A \neq A', C \neq C'$.

Podle věty 1 je

$$C - B = (B - A)^*,$$

$$C' - B = (B - A')^*,$$

*) To tedy znamená $x_A = x_B - y_C + y_D$,

$$y_A = y_B + x_C - x_D,$$

čili

$$x_C = x_B - (y_B - y_A),$$

$$y_C = y_B + (x_B - x_A),$$

takže $C - B = (B - A)^*$.

a tedy $C - C' = (A' - A)^*$. Vznikne tedy vektor $\overline{C'C}$ z vektoru $\overline{AA'}$ otočením o 90° ; ježto oba vektory jsou nenulové a ježto první leží na přímce c a druhý na a , jsou přímky a a c k sobě kolmé, což je spor.

II. Nechť a není kolmé k c . Buďtež (A_1, B_1, C_1, D_1) a (A_2, B_2, C_2, D_2) dva čtverce takové, že $A_1, A_2 \varepsilon a$, $B_1, B_2 \varepsilon b$, $C_1, C_2 \varepsilon c$, při čemž $B_1 \neq B_2$ (takové čtverce podle I existují). Pak $D_1 \neq D_2$.

Důkaz. Předpokládejme, že $D_1 = D_2$. Pak je $A_1 \neq A_2$, $C_1 \neq C_2$ (jinak by podle věty 2 bylo $B_1 = B_2$). Dle věty 1 je $C_1 - D_1 \stackrel{(2)}{=} B_1 - A_1 \stackrel{(1)}{=} -(C_1 - B_1)^* \stackrel{(2)}{=} -(D_1 - A_1)^*$; (čísla v závorkách nad rovnítky značí odkazy na vztahy (1) a (2) z věty 1).

Tedy $C_1 - D_1 = (A_1 - D_1)^*$ a podobně $C_2 - D_2 = (A_2 - D_2)^*$. Ježto $D_1 = D_2$, dostaneme odečtením $C_1 - C_2 = (A_1 - A_2)^*$. Ježto $C_1, C_2 \varepsilon c$, $A_1, A_2 \varepsilon a$, $C_1 \neq C_2$, $A_1 \neq A_2$, jsou přímky c a a k sobě kolmé, což je spor.

III. Nechť a není kolmé k c . Budiž d' přímka spojující body D_1, D_2 z věty II (je $D_1 \neq D_2$). Pro libovolné reálné λ budiž $A = A(\lambda) = A_1 + \lambda(A_2 - A_1)$, $C = C(\lambda) = C_1 + \lambda(C_2 - C_1)$, $B = B(\lambda) = B_1 + \lambda(B_2 - B_1)$, $D = D(\lambda) = D_1 + \lambda(D_2 - D_1)$. Pak $A \varepsilon a$, $B \varepsilon b$, $C \varepsilon c$, $D \varepsilon d'$ a body (A, B, C, D) tvoří čtverec.

Důkaz. Z věty 1 plyne

$$C_1 - B_1 = (B_1 - A_1)^*,$$

$$C_2 - B_2 = (B_2 - A_2)^*.$$

Znásobíme první rovnici číslem $1 - \lambda$, druhou číslem λ a sečteme je; dostaneme $C - B = (B - A)^*$. Dále plyne z věty 1

$$B_1 - A_1 = C_1 - D_1,$$

$$B_2 - A_2 = C_2 - D_2.$$

Znásobíme opět první rovnici číslem $1 - \lambda$, druhou číslem λ a sečteme je; dostaneme $B - A = C - D$.

Body (A, B, C, D) tvoří tedy čtverec. Ostatní je zřejmé.

IV. Předpoklady stejné jako v III. Pak $d' = d$.

Důkaz. $\alpha)$ Budiž $D \varepsilon d$. Pak existuje čtverec (A, B, C, D) tak, že $A \varepsilon a, B \varepsilon b, C \varepsilon c$. Zvolme reálné λ tak, aby $B(\lambda) = B$ (to lze, ježto $B_1 \neq B_2$); podle III je $(A(\lambda), B(\lambda), C(\lambda), D(\lambda))$ čtverec, pro který $A(\lambda) \varepsilon a, B(\lambda) \varepsilon b, C(\lambda) \varepsilon c$ a přitom $B(\lambda) = B$. Podle I je tedy $D(\lambda) = D$. Avšak podle III je $D(\lambda) \varepsilon d'$. Tedy $D \varepsilon d'$.

$\beta)$ Budiž $D \varepsilon d'$. Zvolme reálné λ tak, aby $D(\lambda) = D$ (to lze, ježto $D_1 \neq D_2$). Podle III je $(A(\lambda), B(\lambda), C(\lambda), D(\lambda))$, čtverec a $A(\lambda) \varepsilon a, B(\lambda) \varepsilon b, C(\lambda) \varepsilon c$, tedy $D(\lambda) \varepsilon d$. Avšak $D = D(\lambda)$, tedy $D \varepsilon d$.

V. Nechť nyní přímky a, c jsou k sobě kolmé. Zvolme přímku a za přímkou $x = y$, přímkou c za přímkou $x = -y$. Budiž p přímkou $x = 0$ a q přímkou $y = 0$ (je tedy úhel $\sphericalangle ap = 45^\circ$, $\sphericalangle aq = 135^\circ$).

$\alpha)$ Je-li (A, B, C, D) čtverec, pro který $A \varepsilon a, C \varepsilon c$, je $B \varepsilon p, D \varepsilon q$.

Důkaz. Vrchol B , resp. D dostaneme, otočíme-li vrchol A , resp. C kolem středu $S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C$ čtverce (A, B, C, D) o $+90^\circ$, tedy

$$B = S + (A - S)^*, \quad D = S + (C - S)^*,$$

a dále

$$x_B = x_S - y_A + y_S = \frac{1}{2}x_A + \frac{1}{2}x_C - y_A + \frac{1}{2}y_A + \frac{1}{2}y_C = 0,$$

$$\text{neboť } x_A = y_A, x_C = -y_C, y_D = y_S + x_C - x_S = \frac{1}{2}y_A + \frac{1}{2}y_C + x_C - \frac{1}{2}x_A - \frac{1}{2}x_C = 0 \text{ z téhož důvodu. Je tedy}$$

$D \varepsilon q$.

$\beta)$ Budiž $B \varepsilon p, D \varepsilon q$. Potom zřejmě existuje čtverec (A, B, C, D) . Je pak $A \varepsilon a, C \varepsilon c$.

Důkaz. Podle věty $V\alpha$), aplikujeme-li ji na čtverec (B, C, D, A) , leží (ježto $p \perp q$) bod C , resp. A , na přímce, která vznikne z p , resp. q otočením o 45° kolem společného průsečíku (tedy kolem počátku); je tedy $C \varepsilon c$, $A \varepsilon a$.

Důkaz vlastního řešení. Bod 1. Je $a \perp c$. Pak $b \parallel p$ (viz větu V), $b \neq p$. Množiny b , p nemají žádný společný bod, tedy podle $V\alpha$) neexistuje čtverec (A, B, C, D) tak, aby $A \varepsilon a$, $B \varepsilon b$, $C \varepsilon c$.

Bod 2. Příklad α). $a \perp c$. Pak $d = q$.

Důkaz. Nechť $D \varepsilon d$. Existuje tedy čtverec (A, B, C, D) tak, že $A \varepsilon a$, $B \varepsilon b$, $C \varepsilon c$, tedy podle $V\alpha$) je $D \varepsilon q$.

Nechť $D \varepsilon q$. Budiž B společný bod přímek p a b . Pak pro čtverec (A, B, C, D) dle $V\beta$) platí $A \varepsilon a$, $C \varepsilon c$, tedy $D \varepsilon d$.

Příklad β). a není kolmé k c . Pak podle IV je $d = d'$.

Poznámka. Z důkazu plyne ihned konstrukce přímky d , pokud existuje. V případě, že a není kolmé k c , vypadá tato konstrukce takto: Zvolme na přímce b dva různé body B_1 , B_2 . Otočme přímkou c kolem B_i ($i = 1, 2$) o 90° . Otočená přímka protne přímkou a v bodě A_1 , resp. A_2 . Sestrojme čtverec (A_i, B_i, C_i, D_i) pro $i = 1, 2$. Body D_1 , D_2 jsou různé a jejich spojnice je přímka d .

V případě, že $a \perp c$, je d přímka vzniklá z c otočením o 45° kolem průsečíku přímek a , c .

Úloha 2. Buďtež dány čtyři přímky a , b , c , d . Sestrojit čtverec (A, B, C, D) tak, aby $A \varepsilon a$, $B \varepsilon b$, $C \varepsilon c$, $D \varepsilon d$.

Řešení. I. Čtverec (A, B, C, D) kladně orientovaný.

Příklad 1. Alespoň jedna z dvojic přímek a , c nebo b , d představuje dvojici přímek navzájem kolmých. Bez újmy obecnosti lze předpokládat (cyklickou záměnou označení a , b , c , d lze toho dosáhnout), že $a \perp c$.

Definujme přímky p , q takto: Obě procházejí společným průsečíkem přímek a , c a svírají s nimi úhly: $\sphericalangle ap = \sphericalangle cq = 45^\circ$.

Budiž B , resp. D soubor společných bodů přímek b , p , resp. d , q . Pak všechny hledané čtverce (A, B, C, D) najdeme

takto: Zvolíme libovolně bod D v množině $\mathbf{D}$ a bod B v množině $\mathbf{B}$ (tím jsou body A, C jednoznačně určeny).

Důkaz vyplývá ihned z vět $V\alpha$) a $V\beta$), uvedených v důkazu řešení předcházející úlohy.

Případ 2. Není ani $a \perp c$ ani $b \perp d$.

Podle předcházející úlohy 1 sestrojme přímku d' (viz poznámku uvedenou za předcházející úlohou).

Případ α). Přímky d' a d nemají společný bod. Potom neexistuje řešení.

Případ β). Přímky d' a d jsou totožné. Potom každý čtverec (A, B, C, D) , pro který $A \varepsilon a$, $B \varepsilon b$, $C \varepsilon c$, je řešením.

Případ γ). Přímky d' a d mají právě jeden společný bod D . Potom existuje právě jeden hledaný čtverec (A, B, C, D) . Přímku a otočíme o 90° kolem bodu D . Otočená přímka protne přímku c v jediném bodě C (není totiž $a \perp c$); body D, C je čtverec jednoznačně určen.

Vše okamžitě plyne z řešení úlohy 1.

II. Čtverec (A, B, C, D) záporně orientovaný.

Označíme $a = a'$, $b = d'$, $c = c'$, $d = b'$ a provedeme tutéž konstrukci jako v I. pro přímky a', b', c', d' . Určíme tím všechny čtverce (A', B', C', D') kladně orientované, pro něž $A' \varepsilon a'$, $B' \varepsilon b'$, $C' \varepsilon c'$, $D' \varepsilon d'$. Položíme-li dále $A' = A$, $B' = D$, $C' = C$, $D' = B$, dostaneme z těchto čtverců právě všechny záporně orientované čtverce (A, B, C, D) , pro něž je $A \varepsilon a$, $B \varepsilon b$, $C \varepsilon c$, $D \varepsilon d$. (Uvedené řešení je autorské. V podstatě se opírá o komplexní čísla, bylo však formálně upraveno. Náznornější řešení synthetické lze podat na př. užitím stereometrie.)

9. Pro které hodnoty nezávisle proměnné x nabývá lomená lineární funkce

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (1)$$

hodnoty x ? Proveďte diskusi vzhledem k různým hodnotám koeficientů a, b, c, d .

Řešení. Funkce (1) má smysl jen tehdy, není-li současně $c = d = 0$. Aby $y = x$, je nutné a stačí, aby nastal jeden z těchto případů:

$$1. \ c = 0 \ (d \neq 0), \ x = \frac{1}{d}(ax + b), \quad (2)$$

nebo

$$2. \ c \neq 0, \ x \neq -\frac{d}{c} \text{ a } x = \frac{ax + b}{cx + d}. \quad (3)$$

Případ 1. Jsou tyto možnosti:

$\alpha)$ $a \neq d$, pak existuje jediné x , které má hledanou vlastnost; je $x = \frac{b}{d - a}$.

$\beta)$ $a = d$, $b \neq 0$, pak neexistuje žádné x , pro které by $x = x + \frac{b}{d}$, tedy ani x , vyhovující dané podmínce.

$\gamma)$ $a = d$, $b = 0$, pak (2) je splněna pro každé x , takže každé x vyhovuje podmínce.

Případ 2. Z rovnice (3) a podmínky $x \neq -\frac{d}{c}$ plyne

$$cx^2 + (d - a)x - b = 0. \quad (4)$$

Označme Δ diskriminant

$$\Delta = (d - a)^2 + 4bc.$$

Rozlišujeme:

$\alpha)$ $\Delta > 0$;

pak kořeny (4) jsou

$$x_1 = \frac{1}{2c}(a - d + \sqrt{\Delta}), \quad x_2 = \frac{1}{2c}(a - d - \sqrt{\Delta}).$$

Aby x_1 , resp. x_2 , vyhovovalo úloze, musí být ještě $x_1 \neq -\frac{d}{c}$, resp. $x_2 \neq -\frac{d}{c}$. To je splněno, není-li $-\frac{d}{c}$ kořenem rovnice (4), t. j. platí-li $\frac{d^2}{c} - (d - a)\frac{d}{c} - b \neq 0$, čili $ad - bc \neq 0$.

Potom tedy existují dvě různá x_1, x_2 , vyhovující úloze.

Je-li $ad - bc = 0$, je pro $x \neq -\frac{d}{c}$

$$\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{ax + \frac{ad}{c}}{cx + d} = \frac{a}{c},$$

takže jediné x , vyhovující úloze, je $x = \frac{a}{c}$, pokud $\frac{a}{c} \neq -\frac{d}{c}$, čili $a \neq -d$. Je-li $a = -d$, neexistuje žádné takové x .

$\beta) \Delta = 0$;

pak $x = \frac{a - d}{2c}$ je jediné x , vyhovující úloze, opět pokud $\frac{a - d}{2c} \neq -\frac{d}{c}$ čili pokud $a + d \neq 0$. Je-li $a = -d$, neexistuje řešení.

$\gamma) \Delta < 0$;

pak neexistuje (reálné) řešení.

10. Buďte A, O, B tři různé body svislé roviny, která protne vodorovnou rovinu jdoucí bodem O v přímce KOL . Označme $\sphericalangle AOL = \alpha$, $\sphericalangle BOL = \beta$ ostré úhly a $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$ dvě úsečky.

Po polopřímkách AO , BO se pohybují směrem k O body vlivem tíže zemské bez tření; jeden je bod M , jehož výchozí polohou je bod A , druhý je bod N s počáteční polohou v bodě B .

Určete čas, v němž bude přímka MN vodorovná a proveďte diskusi o existenci řešení. Body M, N se počnou pohybovat ze svých výchozích poloh současně.

Řešení. Složky zrychlení v přímkách AO , resp. BO jsou $g \sin \alpha$, resp. $g \sin \beta$. Označme s_1 , resp. s_2 dráhu, kterou vyko-

nal bod M , resp. N za t časových jednotek od počátku pohybu. Pak je (jde o pohyby rovnoměrně zrychlené):

$$s_1 = \frac{g}{2} t^2 \sin \alpha, \quad s_2 = \frac{g}{2} t^2 \sin \beta.$$

Výška bodu M , resp. N , nad vodorovnou rovinou v okamžiku t je $(a - s_1) \sin \alpha$, resp. $(b - s_2) \sin \beta$. Podle podmínky úlohy je nutně

$$(a - s_1) \sin \alpha = (b - s_2) \sin \beta.$$

Po dosazení za s_1 a s_2 a po úpravě vyjde

$$\frac{g}{2} t^2 (\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta) = a \sin \alpha - b \sin \beta.$$

Ježto α, β jsou ostré úhly, je $\sin \alpha > 0$, $\sin \beta > 0$, t. j. $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = 0$ tehdy a jen tehdy, je-li $\sin \alpha = \sin \beta$, čili $\alpha = \beta$.

Je-li $\alpha = \beta$ a $a \neq b$, je úloha neřešitelná, neboť přímka MN splývá stále s přímkou OAB . Je-li $\alpha = \beta$ a $a = b$, nemá úloha smysl, neboť $M \equiv N$ a přímka MN není definována.

Je-li $\alpha \neq \beta$, na př. $\alpha > \beta$, lze z rovnice (1) vypočíst příslušný čas t_0 :

$$t_0^2 = \frac{2}{g} \cdot \frac{a \sin \alpha - b \sin \beta}{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}.$$

Úloha bude mít v tomto případě řešení tehdy a jen tehdy, jestliže t_0^2 vyjde kladné, t. j. je-li

$$\frac{a \sin \alpha - b \sin \beta}{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta} > 0;$$

protože $\sin \alpha > \sin \beta$, musí být

$$a \sin \alpha - b \sin \beta > 0. \quad (1)$$

Je ovšem třeba, aby v čase t_0 se dostaly body M , N do takových poloh, které jsou nad vodorovnou rovinou, t. j. aby platilo

$$(a - s_1) \sin \alpha > 0 \text{ nebo } (b - s_2) \sin \beta > 0,$$

kde $s_1 = \frac{1}{2}gt_0^2 \sin \alpha$, $s_2 = \frac{1}{2}gt_0^2 \sin \beta$. Použijeme-li na př. první nerovnosti a dosadíme za t_0^2 , dostaneme

$$\left(a - \frac{a \sin \alpha - b \sin \beta}{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta} \sin^2 \alpha \right) \sin \alpha > 0,$$

čili s použitím vztahů $\sin \alpha > 0$, $\sin \beta > 0$

$$a \sin \alpha < b \sin \beta. \quad (2)$$

Úloha je tedy podle (1), (2) řešitelná tehdy, a jen tehdy, platí-li

$$\frac{b}{a} < \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} < \frac{a}{b}.$$

11. Dokažte, že pro $n > 1$ celé platí:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1.$$

Řešení. Označme

$$s_{n-1} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \quad (1)$$

pro celé $n > 1$. Pro celé $m > 1$ platí

$$\frac{1}{m^2} < \frac{1}{m(m-1)}.$$

Je tedy $s_{n-1} < s'_{n-1}$, kde

$$s'_{n-1} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} \quad (2)$$

pro celé $n > 1$. Ale

$$s'_{n-1} = \frac{n-1}{n}$$

podle výsledku cvič. 67b z učebnice Matematika pro 3. tř. gymnasií. Je tudíž

$$s_{n-1} < \frac{n-1}{n},$$

při čemž zlomek vpravo je pro celé $n > 1$ vždy pravý.

12. Buď $ABCD$ čtverec. Uvnitř strany AB zvolte m různých bodů a veďte jimi rovnoběžky se stranou BC . Podobně uvnitř strany BC zvolte n různých bodů a veďte jimi rovnoběžky ke straně AB .

Kolik pravoúhlých rovnoběžníků vzniklo provedenou konstrukcí?

Řešení. Dostaneme dvě soustavy rovnoběžných příček, z nichž první soustava obsahuje $m + 2$ příček (i se stranami čtverce) a druhá $n + 2$ příček. Strany každého rovnoběžníka leží ve dvou dvojicích příček; každá dvojice se skládá ze dvou různých příček téže soustavy. Obráceně, vezmeme-li dvě dvojice $p_1||p_2$ a $q_1||q_2$ a dvě dvojice $p'_1||p'_2$ a $q'_1||q'_2$ tak, aby aspoň jedna z prvních čtyř příček p_1, p_2, q_1, q_2 se nevyskytovala mezi příčkami p'_1, p'_2, q'_1, q'_2 , dostaneme dva různé rovnoběžníky.

V první soustavě lze utvořit $\binom{m+2}{2}$ dvojice různých příček, v druhé soustavě $\binom{n+2}{2}$. Všech pravoúhlých čtyřúhelníků tedy je $\binom{m+2}{2} \cdot \binom{n+2}{2}$,

13. Pro která přirozená čísla n je možno zlomek $\frac{n^2 + 4n + 6}{n(n^4 - 1)}$ vyjádřit desetinným rozvojem a) ukončeným, b) ryze periodickým, c) neryze periodickým?

Řešení. Daný zlomek má smysl pro přirozená čísla $n > 1$.

a) Čitatel není nikdy dělitelný pěti. Pro $n = 2$ je $n^2 + 4n + 6 = 18$ a každé přirozené číslo $n > 2$ lze psát ve tvaru $n = 5k + z$, kde $z = 0, \pm 1, \pm 2$ a k je přirozené, takže $n^2 + 4n + 6 = 5(5k^2 + 2kz + 4k) + z^2 + 4z + 6$. Je-li $z = 0$, vyjde při dělení pěti zbytek 1; je-li $z = 1$, vyjde rovněž zbytek 1; je-li $z = -1$ nebo $z = 2$, vyjde zbytek 3; je-li $z = -2$, vyjde zbytek 2. Naproti tomu jmenovatel je vždy násobek pěti. Pro $n = 2$ je $n(n^4 - 1) = 30$ a pro $n > 2$ je

$$n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = (5k + z)[5(5k^2 + 2kz) + z^2 - 1][5(5k^2 + 2kz) + z^2 + 1].$$

Je-li $z = 0$, je první činitel dělitelný pěti, je-li $z = \pm 1$, je druhý činitel dělitelný pěti, je-li $z = \pm 2$, je třetí činitel dělitelný pěti. Proto daný zlomek vede buď k rozvoji ukončenému (M III str. 43) nebo k rozvoji neryze periodickému (M III cvič. 134).

b) Jmenovatel $n(n^4 - 1) = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1)$ je vždy dělitelný třemi, neboť z činitelů $n - 1, n, n + 1$ je vždy jeden dělitelný třemi. K rozvoji ukončenému může vést jen tehdy, dá-li se krátit třemi. Každé přirozené číslo $n \geq 2$ lze napsat ve tvaru $n = 3h + z$, kde $z = 0, \pm 1$ a h je přirozené. Pro $z = 1$ však číslo $n^2 + 4n + 6 = 3(3h^2 + 6h + 3) + 2$ není dělitelné třemi; zbývají tedy případy $z = 0$ a $z = -1$.

$$\alpha) \text{ Pro } z = 0 \text{ je } \frac{n^2 + 4n + 6}{n(n^4 - 1)} = \frac{3h^2 + 4h + 2}{(3h - 1)h(3h + 1)(9h^2 + 1)},$$

což pro $h = 1$ vede ke zlomku $\frac{9}{80} = 0,1125$. Je-li h tvaru

$h = px$, kde p je liché prvočíslo různé od 5 a x přirozené číslo, pak prvočíslem p nelze krátit.

Je-li h tvaru $h = 2^r \cdot 5^s$, kde r a s jsou přirozená čísla, pak $3h + 1 = 3 \cdot 2^r \cdot 5^s + 1$ je liché číslo nedělitelné pěti, které obsahuje aspoň jednoho lichého prvočinitele p různého od 5. Poněvadž $3h^2 + 4h + 2 = (3h + 1)(h + 1) + 1$, nelze prvočinitelem p krátit.

Je-li dále $h = 2^r$, kde r je přirozené číslo, pak $n - 1 = 3h - 1 = 3 \cdot 2^r - 1$, $n + 1 = 3h + 1 = 3 \cdot 2^r + 1$ jsou dvě po sobě jdoucí lichá čísla nedělitelná třemi a alespoň jedno z nich není dělitelné pěti. Jestliže číslo $n + 1$ není dělitelné pěti, je dělitelné nějakým prvočíslem q různým od 2, 3, 5 a protože je $n^2 + 4n + 6 = (n + 1)(n + 3) + 3$, prvočíslem q nelze krátit. Jestliže číslo $n + 1$ je dělitelné 5, číslo $n - 1$ není dělitelné 5 a je to tedy buď prvočíslo různé od 2, 3, 5, nebo je to součin takových prvočísel. Protože $n^2 + 4n + 6 = (n - 1)(n + 5) + 11$, můžeme eventuálně krátit 11. Jestliže je $r > 2$, je $n - 1 = 3 \cdot 2^r - 1 > 11$, tedy i po případném zkrácení 11 zbude ve jmenovateli prvočinitel různý od 2, 3, 5, kterým krátit nelze. Snadným výpočtem zjistíme, že také případy $r = 1, 2$ ($h = 2, 4$) vedou k nekonečným rozvojm.

Je-li konečně $h = 5^s$, kde s je přirozené číslo, je $n = 3 \cdot 5^s$. Čísla $n - 1$, $n + 1$ jsou dvě po sobě jdoucí sudá čísla, nedělitelná 3 a 5 a jedno z nich není dělitelné 4. Jestliže číslo $n + 1$ není dělitelné 4, je dělitelné lichým prvočíslem q různým od 3 i 5 a protože je $n^2 + 4n + 6 = (n + 1)(n + 3) + 3$, nelze tímto prvočíslem krátit.

Jestliže číslo $n - 1$ není dělitelné 4, lze psát $n - 1 = 2 \cdot Q$, kde číslo Q je buď liché prvočíslo různé od 3, 5 nebo součin takových prvočísel. V tomto případě lze event. krátit 11, neboť

$$n^2 + 4n + 6 = (n - 1)(n + 5) + 11,$$

ale ve jmenovateli zbude vždy prvočíslo, kterým krátit nelze; pro $s = 1$ je totiž

$$Q = \frac{3 \cdot 5 - 1}{2} = 7$$

a pro $s > 1$ je $Q > 1$.

$$\beta) \text{ Pro } z = -1 \text{ je } \frac{n^2 + 4n + 6}{n(n^4 - 1)} = \frac{3h^2 + 2h + 1}{(n - 1)nh(n^2 + 1)},$$

což pro $h = 1$ vede ke zlomku $\frac{6}{10} = 0,6$. Je-li h tvaru $h = px$,

kde p je liché prvočíslo různé od 5 a x přirozené číslo, pak prvočíslem p nelze krátit.

Je-li h tvaru $h = 2^r \cdot 5^s$, kde r a s jsou přirozená čísla, pak $n = 3h - 1 = 3 \cdot 2^r \cdot 5^s - 1$ je liché číslo nedělitelné pěti, které obsahuje aspoň jednoho lichého prvočinitele p různého od 5. Poněvadž $3h^2 + 2h + 1 = (3h - 1)(h + 1) + 2$, proto nelze prvočinitelem p krátit.

Je-li dále $h = 2^r$, kde r je přirozené číslo, pak čísla $n = 3h - 1$, $n - 1 = 3h - 2$ nejsou dělitelná třemi a aspoň jedno z nich není dělitelné pěti, při čemž $n = 3 \cdot 2^r - 1$ je liché a $n - 1 = 3 \cdot 2^r - 2 = 2(3 \cdot 2^{r-1} - 1)$ pro $r > 1$ obsahuje lichý faktor $3 \cdot 2^{r-1} - 1$; aspoň jedno z těchto čísel tedy obsahuje lichého prvočinitele q různého od 3 a od 5. Je-li to číslo n , pak prvočinitelem q nelze krátit, a je-li to číslo $n - 1$, lze krátit nejvýš jedenácti, neboť $n^2 + 4n + 6 = (n - 1)(n + 5) + 11$; poněvadž však pro $r = 2, 3$ nastane první případ (čísla $3 \cdot 2^2 - 1$, $3 \cdot 2^3 - 1$ nejsou dělitelná pěti), může to nastat pouze pro $r > 3$, ale pak i po tomto zkrácení zbude ve jmenovateli aspoň jeden další lichý prvočinitel q_1 různý od 3 a od 5, kterým se nedá krátit, neboť $3 \cdot 2^{r-1} - 1 > 22$. Pro $r = 1$ zlomek krátit nelze, neboť

$$\text{je roven } \frac{17}{4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 26}.$$

Je-li konečně $h = 5^s$, kde s je přirozené číslo, pak číslo $n - 1 = 3h - 2 = 3 \cdot 5^s - 2$ je liché a nedělitelné pěti ani třemi. Poněvadž $n^2 + 4n + 6 = (n - 1)(n + 5) + 11$, dá se číselník proti faktoru $n - 1$ ve jmenovateli zkrátit nejvýše jedenácti; poněvadž dále $n - 1 > 12$, proto i po tomto zkrácení zbude ve jmenovateli aspoň jeden další lichý prvočinitel p různý od 3 a od 5, kterým se nedá krátit.

Daný zlomek vede k rozvoji neryze periodickému s jedinými výjimkami $n = 3$ a $n = 2$, kdy vede k rozvoji ukončenému.

14. Je dána posloupnost $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots$, při čemž platí $a_{n+1} = 3a_n + 4b_n, b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$; a_1, b_1 jsou kladná čísla.

a) Vyjádřete $a_n^2 - 2b_n^2$ pomocí a_1, b_1 .

b) Dokažte, že $\lim \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}$.

Řešení.

a) Ze vztahů $a_{n+1} = 3a_n + 4b_n, b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ plyne $a_{n+1}^2 - 2b_{n+1}^2 = 9a_n^2 + 24a_nb_n + 16b_n^2 - 8a_n^2 - 24a_nb_n - 18b_n^2 = a_n^2 - 2b_n^2$, a odtud matematickou indukcí

$$a_n^2 - 2b_n^2 = a_1^2 - 2b_1^2 \text{ pro každé přirozené číslo } n. \quad (1)$$

b) Posloupnosti $\{a_n\}, \{b_n\}$ jsou posloupnosti kladných čísel, při čemž $a_{n+1} > 3a_n, b_{n+1} > 3b_n$; odtud matematickou indukcí odvodíme, že pro $n > 1$ je $a_n > 3^{n-1} \cdot a_1, b_n > 3^{n-1} \cdot b_1$.

Z rovnosti (1) plyne $\frac{a_n}{b_n} - \sqrt{2} = \frac{a_1^2 - 2b_1^2}{b_n(a_n + b_n\sqrt{2})}$ a odtud

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \sqrt{2} \right| = \frac{|a_1^2 - 2b_1^2|}{b_n(a_n + b_n\sqrt{2})} < \frac{|a_1^2 - 2b_1^2|}{3^{2n-2} \cdot b_1(a_1 + b_1\sqrt{2})} = \frac{A}{3^{2n-2}},$$

kde $A = \frac{|a_1 - b_1\sqrt{2}|}{b_1} \geq 0$. Volíme-li libovolné kladné číslo k , lze stanovit přirozené číslo m tak, aby

$$\frac{A}{3^{2m-2}} < k.$$

Je-li $A > 0$, vyhovíme tomu pro $3^{2m-2} > \frac{A}{k}$, a tedy

$$(2m - 2) \log 3 > \log \frac{A}{k}, m > 1 + \frac{\log(A:k)}{\log 3};$$

pak pro každé $n \geq m$ je tím spíše $\frac{A}{3^{2n-2}} < k$. Je-li $A = 0$,

nastane to pro každé přirozené n . Posloupnost $\left\{ \frac{a_n}{b_n} - \sqrt{2} \right\}$ je tedy nulová, takže $\lim \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}$.

15. V rovině ϱ jsou dány dva body A, B a dva duté úhly α, β . Bod X roviny ϱ otočíme jednak kolem středu A o úhel α v daném smyslu do polohy X' , jednak kolem bodu B o úhel β v daném smyslu (stejném nebo opačném) do polohy X'' . Co vyplní všechny ty body X , pro něž má úsečka $X'X''$ danou velikost $d > 0$?

Řešení. První otáčení rozložíme v souměrnosti s osami o_1, o_2 , druhé v souměrnosti s osami o_1, o_3 . To je vždy možné: je-li $A \equiv B$, zvolíme $o_1 \equiv AB$, je-li $A \equiv B$, zvolíme za o_1 libovolnou přímku vedenou bodem A . Složením otáčení $(o_2 o_1)$, $(o_1 o_3)$ vznikne shodnost **S**, která převede bod X' v bod X'' . Nyní je třeba rozeznávat dva případy:

a) $o_2 \parallel o_3$; to nastane tehdy a jen tehdy, je-li $\alpha = \beta$ a jsou-li smysly daných otáčení souhlasné (uvědomíme si, že přímka o_1 přejde v o_2 otočením o ostrý úhel $\frac{1}{2}\alpha$ v daném smyslu otáčení). Shodnost **S** je pak posunutí, ve zvláštním případě, je-li totiž $o_2 \equiv o_3$, identita. Avšak v posunutí mají bod a jeho obraz konstantní vzdálenost, rovnou velikosti posunutí. Lze tedy nalézt body X', X'' žádané vlastnosti tehdy a jen tehdy, je-li velikost posunutí rovna d . K tomu je předně nutné, aby bylo $A \equiv B$ (je-li $A \equiv B$, je A samodružným bodem posunutí, toto posunutí je identita a má tudíž velikost rovnou nule). Dále, označíme-li C obraz bodu A ve shodnosti **S**, je nutně $\overline{AC} = d$, $\sphericalangle ABC = \alpha = \beta$. Naopak, jestliže rovno-ramenný trojúhelník s rameny rovnými úsečce AB a s úhlem α při temeni má základnu d , má posunutí **S** velikost d . Vyslovená vlastnost je tedy nutnou a postačující podmínkou, aby bylo možno najít vůbec nějaký bod X žádané vlastnosti. Je-li splněna, vyplní body X' , a tudíž i body X , celou rovinu.

b) o_2, o_3 jsou různoběžky; to nastane vždy, je-li $\alpha \neq \beta$, ale i v případě, že $\alpha = \beta$ a smysly obou daných otáčení jsou opačné. Shodnost $\mathbf{S} \equiv (o_2 o_3)$ je pak otáčení, jehož středem je průsečík D přímek o_2, o_3 ; úhel tohoto otáčení je jistý dutý nebo přímý úhel γ (libovolného smyslu). Body X', X'' , jejichž vzdálenost je d , vyplní takovou kružnici se středem D , v níž tětíva délky d přísluší středovému úhlu γ . Ježto body X' vyplní kružnici se středem D , vyplní i jejich obrazy ve shodnosti $(o_2 o_1)$, t. j. body X , kružnici; její střed je obraz bodu D ve shodnosti $(o_2 o_1)$.

16. Je dán pravoúhlý rovnoběžník. Z bodu M jeho roviny spustíme kolmice na jeho strany (prodloužené) a označíme P, Q, R, S průsečíky těchto kolmic s dvojicemi rovnoběžných stran.

a) Určete geometrické místo průsečíků $PR \cdot QS$ a $PS \cdot QR$.

b) Určete všechny body M v rovině, které vedou k jednomu a témuž bodu nalezeného geometrického místa.

Řešení. Zvolme soustavu souřadnic tak, aby strany rovnoběžníka byly rovnoběžné s osami souřadnic a jeho střed ležel v počátku. Vrcholy rovnoběžníka nechť mají souřadnice $C \equiv [a; b]$, $B \equiv [a; -b]$, $D \equiv [-a; b]$, $A \equiv [-a; -b]$, kde $a > 0$, $b > 0$. Průsečík přímek PR, QS , pokud tyto přímky a průsečík existují, budiž bod $U \equiv [\xi, \eta]$. Označme x, y souřadnice bodu M . Vyjádříme parametricky přímku PR ($P \equiv [x; -b]$, $R \equiv [-a; y]$), tedy

$$\begin{aligned}\xi &= x - t(a + x), \\ \eta &= -b + t(b + y),\end{aligned}\tag{1}$$

a jedinou rovnicí přímky QS ($Q \equiv [x; b]$, $S \equiv [a; y]$), tedy

$$(\xi - a)(b - y) = (x - a)(\eta - y).\tag{2}$$

Řešením rovnic (1), (2) vyjde parametr t průsečíku U :

$$t = \frac{b(x - a)}{bx - ay}. \quad (3)$$

Tento výsledek platí, jestliže je $bx - ay \neq 0$, t. j. jestliže bod M neleží na přímce AC . Pro body této přímky však je $PR \parallel QS$ a nevznikne bod U . Dosadíme z rovnice (3) do (1); po úpravě vyjde

$$\xi = a \frac{ab - xy}{bx - ay}, \quad \eta = -b \frac{ab - xy}{bx - ay}.$$

Označíme-li $u = \frac{ab - xy}{bx - ay}$, dostaneme $\xi = au$, $\eta = -bu$, t. j. všechny body U leží na přímce BD . Obráceně ke každému číslu u lze nalézt dvojici x, y , t. j. bod M tak, že platí $u = \frac{ab - xy}{bx - ay}$, čili

$$ab - xy = u(bx - ay). \quad (4)$$

To znamená: každý bod rovnoosé hyperboly (4)*), pokud neleží na přímce $bx - ay = 0$ (t. j. přímce AC), vede k těmž bodu U . Hledané geometrické místo je tedy přímka BD ; ke každému jejímu bodu vedou všechny body M , které leží na hyperbole (4), s výjimkou bodů A, C , neboť tyto dva body jsou průsečíky každé hyperboly (4) s přímkou AC .

Obdobně dostaneme geometrické místo bodů V ; stačí vyměnit body P, Q , t. j. ve výsledku psát $-b$ místo $+b$. Dostaneme přímku AC , hyperboly budou mít rovnici

$$ab + xy = v(bx + ay). \quad (5)$$

Vyloučené body budou body B, D .

*) Hyperbola (4) se pro $u = 1$, t. j. pro $M \equiv B$, a $u = -1$, t. j. $M \equiv D$, rozpadá ve dvojici přímek.

1. Řešte soustavu rovnic: $x_1 + x_2 = a_1$,

$$x_2 + x_3 = a_2,$$

$$x_3 + x_4 = a_3,$$

.....

$$x_{n-1} + x_n = a_{n-1},$$

$$x_n + x_1 = a_n.$$

Řešení. Násobíme-li dané rovnice postupně čísla $+1, -1, +1, -1, \dots$ a sečteme-li je, dostaneme

$$x_1(1 \pm 1) = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \pm a_n,$$

kde znaménko $+$ platí, je-li n liché, a znaménko $-$, je-li n sudé.

I. Pro n liché je

$$x_1 = \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3 - \frac{1}{2}a_4 + \dots + \frac{1}{2}a_n,$$

$$x_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{2}a_4 - \dots - \frac{1}{2}a_n,$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3 - \frac{1}{2}a_4 + \dots + \frac{1}{2}a_n,$$

$$x_4 = \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{2}a_4 - \dots - \frac{1}{2}a_n,$$

.....

$$x_n = -\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{2}a_4 - \dots + \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}a_n.$$

II. Pro n sudé má soustava řešení jen tehdy, je-li $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots - a_n = 0$. Pak možno x_1 volit libovolně a z daných rovnic plyne

$$x_2 = a_1 - x_1,$$

$$x_3 = -a_1 + a_2 + x_1,$$

$$x_4 = a_1 - a_2 + a_3 - x_1,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{n-1} - x_1.$$

2. V rovině jsou dány čtyři různé body A, B, S, O . Sestrojte kružnici k_1 procházející body A, B a kružnici k_2 se středem S tak, aby bod O byl jejich středem stejnolehlosti. Proveďte diskusi.

Řešení. Předpokládejme, že kružnice k_1 a k_2 , vyhovující úloze, existují, a označme S_1 střed kružnice k_1 . Pak platí:

(1) S_1 leží na ose o úsečky AB .

(2) S_1 leží na přímce OS a je $S_1 \equiv O$ (jinak by kružnice k_2 stejnolehlá s k_1 podle středu $O \equiv S_1$ musela být s k_1 soustředná, což je ve sporu se vztahem $O \not\equiv S$).

Po této předběžné úvaze přistoupíme k řešení:

Jsou-li dány čtyři různé body A, B, S, O , je nutno rozlišovat 3 případy:

1. Přímký OS a o jsou různé rovnoběžky. Pak podle předchozího řešení neexistuje.

2. Přímký OS a o splývají. Zvolíme-li na OS libovolný bod X různý od O , pak kružnice $k_1 = (X, \overline{XA})$, $k_2 = (S, r)$, kde

$$r = \frac{\overline{AX} \cdot \overline{OS}}{\overline{OX}},$$

vyhovují úloze. Existuje tedy nekonečně mnoho řešení.

3. Přímký OS a o jsou různoběžné. Označme jejich průsečík S_1 .

a) $S_1 \equiv O$, pak podle úvodní konstrukce řešení neexistuje.

b) $S_1 \neq O$. Potom kružnice $k_1 = (S_1, \overline{S_1 A})$, $k_2 = (S, r)$, kde $r = \frac{\overline{AS_1} \cdot \overline{OS}}{\overline{OS_1}}$, vyhovují úloze. Je to jediné řešení, neboť

kružnice k_1 je středem S_1 a bodem A jednoznačně určena. Podle (3) určíme k_2 .

3. Dokažte, že rovinný obrazec souměrný podle dvou různých středů není ohraničený (t. j. neleží v žádném kruhu).

Řešení. Necht' obrazec $\bigcirc$ je souměrný podle dvou různých středů S_1, S_2 . Sestrojme přímkou $o_3 \equiv S_1 S_2$, veďme body S_1, S_2 k ní kolmice $o_1 \perp o_3, o_2 \perp o_3$. Souměrnost podle středu S_1 lze (jakožto otáčení o 180°) rozložit v souměrnosti podle os o_1, o_3 , souměrnost podle středu S_2 lze rozložit v souměrnosti podle os o_3, o_2 . Sestrojíme tedy k obrazci $\bigcirc$ obrazec $\bigcirc_1$ souměrně sdružený podle osy o_1 , k obrazci $\bigcirc_1$ obrazec $\bigcirc_3$ souměrně sdružený podle osy o_3 ; dále k obrazci $\bigcirc_3$ opět obrazec souměrně sdružený podle osy o_3 , a to je obrazec $\bigcirc_1$; konečně k obrazci $\bigcirc_1$ obrazec $\bigcirc_2$ souměrně sdružený podle osy o_2 , a to je podle našeho předpokladu $\bigcirc$.

Obrazec $\bigcirc_2$ vznikl zřejmě z obrazce $\bigcirc$ užitím souměrností podle os o_1, o_2 ; avšak tyto souměrnosti se skládají v posunutí ve směru $S_1 S_2$ a velikosti $2 \cdot \overline{S_1 S_2}$. Toto posunutí převádí obrazec $\bigcirc$ v týž obrazec. Budiž A libovolný bod obrazce $\bigcirc$. Provedeme-li naše posunutí n -krát, přejde bod A v jistý bod A_n obrazce $\bigcirc$ a bude platit

$$\overline{AA_n} = 2n \cdot \overline{S_1 S_2}.$$

Pro vhodně zvolené n je úsečka $\overline{AA_n}$ delší než průměr libovolné kružnice, a tím je tvrzení dokázáno.

4. Dokažte, že $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} < 1$, kde n je přirozené číslo.

Řešení. Platí

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} &= \\ &= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right) + \\ &+ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}, \end{aligned}$$

takže

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} &= \frac{1}{n+1} + \\ &+ \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Pro součet na levé straně platí

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) \geq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

při čemž rovnost nastane pro $n = 1$. Poněvadž

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} > \dots > \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n},$$

platí pro součet na pravé straně

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \leq \frac{n}{n+1} < 1.$$

5. Je dána kružnice k , na ní bod A , dále kružnice k' téhož poloměru a na ní bod A' . Udejte otáčení, které převádí kružnici k v k' a bod A v A' . Diskuse.

Řešení. Nejprve si dokážeme: *otáčení a posunutí lze nahradit jediným otáčením* (otáčení složeno s posunutím dává otáčení). Otáčení rozložíme ve dvě souměrnosti s osami o_1, o_2 tak, aby druhá osa o_2 byla kolmá ke směru posunutí. Posunutí rozložíme ve dvě souměrnosti s osami o_3, o_4 tak, aby první osa o_3 procházela středem otáčení. Výsledná shodnost, která vznikne složením daného otáčení a posunutí, se dá zřejmě složit ze souměrnosti podle os o_1, o_4 . Tyto přímký jsou však různoběžné (není $o_1 \parallel o_2$, je $o_2 \equiv o_3, o_3 \parallel o_4$), proto je výsledná shodnost otáčení. (Otáčení o nulový úhel nepovažujeme v tomto příkladě za otáčení.)

Jestliže středy S a S' kružnic k, k' splývají, úloha je triviální. Budeme tedy předpokládat, že body S a S' jsou různé. Předpokládejme, že úloha má řešení, t. j. že existuje otáčení R , které převádí bod S v bod S' (následkem toho také kružnici k v kružnici k') a bod A ležící na kružnici k v bod A' ležící na kružnici k' .

Nechť posunutí P převádí bod S' v bod S (a tedy kružnici k' v kružnici k). Provedme postupně otáčení R a posunutí P . Výsledná shodnost R' je podle toho, co jsme dokázali, zase otáčení. Toto otáčení R' převádí body kružnice k v body téže kružnice, tedy střed otáčení R' je v bodě S .

Posunutí P převede bod A' v některý bod A'' ležící na k . Není možné, aby bod A splýnul s bodem A'' , v tomto případě by shodnost R' byla identita, ale my jsme dokázali, že R' je (nenulové) otáčení.

Nechť tedy body A a A'' jsou různé, P^{-1} budiž posunutí, které převádí bod S v bod S' . Provedeme-li postupně otáčení R' a posunutí P^{-1} , dostaneme (jak jsme dokázali) otáčení převádějící kružnici k a bod A v kružnici k' a bod A' . Tedy je-li $A'' \neq A$, úloha má řešení.

Nyní dokážeme, že toto řešení je jediné. Všimněme si,

že bod A'' , a tedy také otáčení R' jsou stanoveny jednoznačně. Jestliže R je jakékoli otáčení vyhovující dané úloze, potom postupným provedením tohoto otáčení R a posunutí P dostáváme otáčení R' jednoznačně určené (až na smysl otáčení). Tedy otáčení R vznikne složením jednoznačně určených shodností: otáčení R' a posunutí P^{-1} .

Tedy: Daná úloha má řešení tehdy a jen tehdy, převede-li posunutí P bod A' v bod $A'' \equiv A$.

Konstrukci můžeme provést na př. takto ($A \equiv A''$): Sestrojíme bod A'' , v bodě S najdeme dvojici přímek o_1, o_2 tak, aby složením souměrností s osou o_1 a souměrností s osou o_2 vzniklo otáčení převádějící bod A v bod A'' a aby osa o_2 byla kolmá na spojnici SS' . Přímka o_1 protne osu s úsečky SS' v bodě O , který je středem hledaného otáčení.

6. Buď n přirozené číslo. Kolik je mezi čísly $n^2, (n+2)^2$ přirozených čísel, z nichž žádné není druhou mocninou přirozeného čísla?

Řešení. Budiž x přirozené číslo, o němž platí

$$n^2 < x^2 < (n+2)^2,$$

kde n je dané přirozené číslo. Platí tedy také

$$n < x < n+2,$$

a tedy $x = n+1$.

Číslo x^2 je tedy jediným přirozeným číslem, ležícím mezi přirozenými čísly $n^2, (n+2)^2$, které má tu vlastnost, že je čtvercem přirozeného čísla. Mezi čísly $n^2, (n+2)^2$ je však

$$(n+2)^2 - n^2 - 1 = 4n + 3$$

přirozených čísel, a tedy hledaných čísel je

$$(4n+3) - 1 = 4n+2 = 2(2n+1).$$

7. Buďte $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ čísla, o nichž platí

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0.$$

Potom pro libovolná čísla x, y, z platí

$$(ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 = (az + bx + cy)^2 + (ay + bz + cx)^2.$$

Dokažte!

Řešení. Levou stranu vztahu, jehož platnost máme dokázat, označíme L , pravou stranu P .

Potom

$$\begin{aligned} P - L &= 2(ab + bc + ca) \cdot (xy + yz + xz) = \\ &= 2abc \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \cdot (xy + yz + xz) = 0 \end{aligned}$$

neboli $L = P$, což bylo dokázat.

8. Kovové kusy každý o váze asi 170 kg a tvaru velmi přibližně kvádrů o rozměrech 20 cm, 30 cm, 35 cm byly po čtyřech dávány do dřevěných beden o tloušťce 2 cm a posílány autem na místa určení. Truhlárna, která vyrábí bedny, chce zvýšit produktivitu a uspořít materiál. Jak zařídíte uskladnění kusů do beden, aby spotřeba dříví na bedny na kus klesla a počet balených kusů stoupl, když může z dopravních důvodů jedna bedna vážit nejvýše 1200 kg? Kterou abstraktní úlohu matematickou můžete položit a řešit na základě uvedených konkrétních úloh praktické?

Řešení. Kdyby se do bedny vkládalo 7 kovových kusů, zbylo by na váhu bedny jen 10 kg, což při uvedených rozměrech kusu a při smrkovém dříví ($s \doteq 0,8$) nestačí. Proto bedna může obsahovat nejvýše 6 kusů.

Případ 5 kusů v bedně tvaru kvádru není třeba uvažovat, poněvadž by vznikl buď v bedně nevyužitý prostor, nebo rozměry bedny uvnitř by byly 100 cm, 30 cm, 35 cm, nebo 20 cm, 150 cm, 35 cm, nebo 20 cm, 30 cm, 175 cm. Pro ně spotřeba dřeva je větší než $\frac{5}{4}$ spotřeby dřeva na bednu

se 4 kusy. Pro bednu se 4 kusy byly rozměry uvnitř buď 40, 35, 60, nebo 20, 70, 60, nebo 40, 70, 35 (cm).

Spotřeba dřeva v cm^3 byla buď 25 824, nebo 29 664, nebo 29 048. Bedna se 6 kusy uvnitř bude mít objem vnitřku $6 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 35 \text{ cm}^3$. Spotřeba dříví při dané tloušťce 2 cm závisí na povrchu kvádrů, do něhož kusy složíme. Jsou-li rozměry vnitřku a , b , c (měřeny v cm), je spotřeba dřeva na bednu $4(ab + ac + bc) + 16(a + b + c) + 64$ (měřeno v cm^2).

Aby spotřeba byla co nejmenší, musí být povrch nejmenší při daném objemu. 6 kusů udaných rozměrů lze srovnat do kvádrů o rozměrech (v cm) 20, 30, 210, nebo 35, 30, 120, nebo 20, 35, 180, nebo 60, 30, 70, nebo 40, 30, 105, nebo 90, 40, 35, nebo 60, 60, 35, nebo 20, 105, 60, nebo 20, 70, 90.

Výpočtem objemu dřeva potřebného na každou příslušnou bednu zjistíme, že u kvádrů o rozměrech 60 cm, 60 cm, 35 cm je spotřeba nejmenší a činí 33 744 cm^3 . (Jak patrně, potvrzuje se stará zkušenost, že z kvádrů téhož objemu má nejmenší povrch ten, který se tvarem co nejvíce podobá krychli.)

Je patrné, že při 4 kusech bedna nejvhodnějších vnitřních rozměrů, t. j. 40 cm, 35 cm, 60 cm, na níž se spotřebovalo nejméně dřeva, t. j. 25 824 cm^3 , měla spotřebu dřeva větší, než jsou dvě třetiny (objem vnitřku u bedny se 4 kusy je roven $\frac{2}{3}$ objemu bedny s 6 kusy) objemu dřeva potřebného na novou bednu. (Tyto dvě třetiny činí 22 496 cm^3 .)

Truhláři tedy výrobou beden s rozměry vnitřku 60 cm, 60 cm, 35 cm ušetřili dříví a poněvadž do bedny vkládali víc kusů, pomohli rychleji zboží odvážet a jestliže vyráběli

týž počet beden jako dříve, zvýšili produktivitu. Zpracovali víc dříví (v cm^3) a umožnili odvoz víc kusů v témž čase.

Abstraktních úloh odtud plynoucích je možno sestavit mnoho. Na př.: Určit tři kladná čísla x, y, z , pro něž je dán jejich součin a pro které výraz $m(xy + xz + yz) + p(x + y + z) + q$ je číslo nejmenší při daných m, p, q (kladných).

9. Na úsečkách AB, BC, CA tvořících trojúhelník ABC zvolte celkem dva různé body M, N . Dokažte, že úsečka MN není větší než největší ze stran trojúhelníka ABC .

Řešení. Předně dokážeme: *Budiž dán trojúhelník ABC a bod X jeho strany BC . Pak úsečka AX je menší nebo rovna větší ze stran AB, AC . Je-li $X \equiv B$ nebo $X \equiv C$, je tvrzení zřejmě správné. Leží-li bod X mezi B, C , zvolíme označení vrcholů tak, aby platilo $AB \geq AC$, t. j. též $\sphericalangle ACB \geq \sphericalangle ABC$. Podle věty o vnějším úhlu trojúhelníka je $\sphericalangle AXB > \sphericalangle ACB \geq \sphericalangle ABC$; v trojúhelníku ABX tedy platí $\sphericalangle AXB > \sphericalangle ABX \equiv \sphericalangle ABC$, t. j. $\overline{AB} > \overline{AX}$.*

Zvolme nyní dva různé body M, N na úsečkách $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$. Pokud budou oba ležet na téže úsečce (buď oba uvnitř, nebo jeden, po př. oba splývají s krajními body úsečky), bude správnost tvrzení zřejmá.

Nechť tedy body M, N náležejí po řadě na př. stranám AB, BC trojúhelníka ABC , ale nenáležejí oba téže straně, t. j. $N \neq B$. Na trojúhelník ABN aplikujeme předchozí výsledek; úsečka MN je tedy menší nebo rovna větší z úseček AN, BN . Avšak podle téhož výsledku je úsečka AN menší nebo rovna větší ze stran AB, AC ; mimo to je úsečka BN menší nebo rovna straně BC . Tím je tvrzení dokázáno.

10. Sestrojte dva trojúhelníky, které nejsou shodné, ale u nichž pět základních prvků (t. j. stran a úhlů) jednoho je rovno pěti základním prvkům druhého.

Řešení. Zvolíme označení stran tak, aby platilo v prvním trojúhelníku $a \leq b \leq c$, v druhém $a' \leq b' \leq c'$. Oba trojúhelníky se shodují aspoň ve dvou úhlech, tudíž se shodují ve všech třech úhlech a jsou podobné. Dvojice stran k sobě příslušných jsou a, a' ; b, b' ; c, c' , jak vyplývá z jejich uspořádání podle velikosti. Je tedy

$$a' = ka, \quad b' = kb, \quad c' = kc, \quad (1)$$

kde $k \neq 1$, neboť trojúhelníky nejsou shodné. Označme jako čárkovaný ten z obou trojúhelníků, jehož strany jsou větší než příslušné strany druhého trojúhelníka; pak je $k > 1$, $a' > a$, $b' > b$, $c' > c$. Oba trojúhelníky se shodují ještě ve dvou stranách. Avšak podle našich úmluv je $a < a' \leq b' \leq c'$, t. j. strana a se neshoduje se žádnou stranou trojúhelníka čárkovaného. Dále je $b < b' \leq c'$; musí tedy platit $b = a'$. Nemůže být $c = a'$; neboť pak by bylo $a < b = c$, t. j. podle (1) též $a' < b' = c'$ a trojúhelníky by se neshodovaly ve dvou dvojicích stran. Ježto víme, že $c < c'$, je nutně $c = b'$. Strany obou trojúhelníků tedy jsou a, ka, k^2a ; ka, k^2a, k^3a . Trojúhelníky s těmito stranami jsou skutečně podobné (t. j. shodují se ve všech vnitřních úhlech) podle věty *sss* o podobnosti trojúhelníků.

Nyní jde jen o to, zda pro některé číslo $k > 1$ skutečně existuje trojúhelník o stranách a, ka, k^2a . K tomu je nutně a stačí, aby největší ze stran byla menší než součet obou zbývajících. Ježto $k > 1$, je $k^2a > ka > a$; nutná a postačující podmínka tedy zní:

$$a + ka > k^2a,$$

čili

$$1 + k > k^2,$$

neboli

$$k^2 - k - 1 < 0.$$

Trojčlen $k^2 - k - 1$ rozložíme na kořenové činitele

$$k^2 - k - 1 = \left[k - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \right] \cdot \left[k - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \right].$$

Má tedy být

$$\left[k - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \right] \cdot \left[k - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \right] < 0 \quad (2)$$

za předpokladu $k > 1$.

Protože $\sqrt{5} > 1$, je

$$(1 - \sqrt{5}) < 0$$

a

$$-\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) > 0.$$

Je tedy

$$k - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) > 0.$$

Z nerovnosti (2) plyne

$$k - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) < 0,$$

čili

$$k < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

Úloha má tedy řešení tehdy a jen tehdy, jestliže pro k platí

$$1 < k < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

11. Pro která přirozená čísla n je výraz

$$\frac{n - 37}{n + 43}$$

roven druhé mocnině racionálního čísla?

Řešení. Daný výraz je roven druhé mocnině racionálního čísla, je-li

$$\begin{aligned} n - 37 &= k^2 m, \\ n + 43 &= h^2 m, \end{aligned} \quad (1)$$

kde k, h, m jsou celá čísla, $h \neq 0, m \neq 0$ a $|k|, |h|$ čísla nesoudělná. Odtud plyne $(h^2 - k^2) m = 80$ čili

$$(h + k)(h - k)m = 80. \quad (2)$$

Poněvadž n je přirozené číslo, je $n + 43$ také přirozené číslo, takže m je kladné. Poněvadž se v rovnicích (1) čísla k, h vyskytují pouze ve druhých mocninách, můžeme vzít v úvahu jen ty případy, když $k \geq 0, h > 0$, takže $h + k > 0$. Pak vzhledem k (2) také $h - k > 0$ a $h + k \geq h - k$. Poněvadž dále čísla h, k jsou celá a nesoudělná, jsou čísla $h + k, h - k$ buď obě lichá a nesoudělná nebo mají největšího společného dělitele 2. Proto je třeba vyloučit ještě ty dvojice $h + k, h - k$, které jsou násobky některé jiné takové dvojice, takže zbývají případy:

$h + k$	$h - k$	m	h	k	n
1	1	80	1	0	37
4	2	10	3	1	47
5	1	16	3	2	101
8	2	5	5	3	82
10	4	2	7	3	55
10	8	1	9	1	38
20	2	2	11	9	199
40	2	1	21	19	398

12. Dokažte: Jsou-li a, b, c kladná čísla, pak platí

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Řešení. Položme $b + c = x$, $c + a = y$, $a + b = z$; pak $a = \frac{1}{2}(-x + y + z)$, $b = \frac{1}{2}(x - y + z)$, $c = \frac{1}{2}(x + y - z)$.

Proto

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \\ &= \frac{-x+y+z}{2x} + \frac{x-y+z}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) - \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

neboť $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, $\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2$, $\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2$.

13. Je-li přirozené číslo N psáno v desítkové soustavě ve tvaru $a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_n \cdot 10^n$, kde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou číslice, a utvoříme-li čísla $b_1 = a_1 - 2a_0$, $b_2 = a_2 - 2b_1$, $b_3 = a_3 - 2b_2$, $\dots$, $b_n = a_n - 2b_{n-1}$, pak číslo N je dělitelné sedmi tehdy a jen tehdy, je-li sedmi dělitelné číslo b_n .

Řešení. Platí: $a_1 = b_1 + 2a_0$, $a_2 = b_2 + 2b_1$, $a_3 = b_3 + 2b_2$, $\dots$, $a_n = b_n + 2b_{n-1}$, takže

$$\begin{aligned} N &= a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + \dots + a_n \cdot 10^n = \\ &= a_0 + 10b_1 + 20a_0 + 10^2b_2 + 2 \cdot 10^2b_1 + 10^3b_3 + \\ &\quad + 2 \cdot 10^3b_2 + \dots + 10^n b_n + 2 \cdot 10^n b_{n-1} = \\ &= 21a_0 + 21 \cdot 10b_1 + 21 \cdot 10^2b_2 + \dots + 21 \cdot 10^{n-1}b_{n-1} + \\ &\quad + 10^n b_n = \\ &= 7(3a_0 + 3 \cdot 10b_1 + 3 \cdot 10^2b_2 + \dots + 3 \cdot 10^{n-1}b_{n-1}) + \\ &\quad + 10^n b_n. \end{aligned}$$

a) Je-li číslo b_n dělitelné sedmi, je sedmi dělitelné i číslo N .

b) Je-li $N = 7k$, je $10^n b_n = 7[k - (3a_0 + 3 \cdot 10b_1 + 3 \cdot 10^2b_2 + \dots + 3 \cdot 10^{n-1}b_{n-1})]$. Poněvadž čísla 7 a 10 jsou nesoudělná, proto musí být sedmi dělitelné číslo b_n .

Poznámka. Z důkazu je vidno, že táž věta platí i pro dělitelnost třemi.

14. U dvou hmotných koulí, které se nedotýkají a mají pevnou vzájemnou polohu, byla měřením zjištěna jejich nejmenší vzdálenost a , velikost vnější tečny t a velikost vnitřní tečny u .

a) Vyjádřete vzdálenost středu koulí a jejich poloměry jako funkce veličin a , t , u .

b) Jaká je podmínka pro to, aby se poloměry koulí lišily nejvýše o úsečku d ?

Řešení. Naměřené hodnoty nutně splňují nerovnost $0 < a < u < t$. To dokážeme nakonec.

Označme r_1 , r_2 poloměry obou koulí (označení zvolme tak, aby bylo $r_1 \geq r_2$) a c vzdálenost jejich středů. Pak platí:

$$a = c - (r_1 + r_2),$$

$$t = \sqrt{c^2 - (r_1 - r_2)^2},$$

$$u = \sqrt{c^2 - (r_1 + r_2)^2},$$

čili

$$r_1 + r_2 = c - a, \quad (1)$$

$$u^2 = c^2 - (r_1 + r_2)^2, \quad (2)$$

$$t^2 - u^2 = 4r_1r_2. \quad (3)$$

Dosadíme z rovnice (1) do (2); vyjde $c = \frac{a^2 + u^2}{2a}$. Poloměry r_1, r_2 jsou vzhledem k (1) a (3) kořeny kvadratické rovnice (neznámá r):

$$r^2 + \frac{a^2 - u^2}{2a} r + \frac{t^2 - u^2}{4} = 0,$$

t. j.

$$r_1 = \frac{u^2 - a^2}{4a} + \frac{1}{4a} \sqrt{(u^2 + a^2)^2 - 4a^2t^2},$$

$$r_2 = \frac{u^2 - a^2}{4a} - \frac{1}{4a} \sqrt{(u^2 + a^2)^2 - 4a^2t^2}.$$

Tyto rovnice spolu se vztahem $c = \frac{a^2 + u^2}{2a}$ řeší úlohu a), neboť za předpokladu $u > a, u < t$ je $r_1 \geq r_2 > 0$; platí totiž

$$\left(\frac{u^2 - a^2}{4a}\right)^2 > \frac{1}{16a^2} [(u^2 + a^2)^2 - 4a^2t^2],$$

jak se snadno přesvědčíme provedením.

Úloha b) dává podmínku $r_1 - r_2 \leq d$, čili

$$\frac{1}{2a} \sqrt{(u^2 + a^2)^2 - 4a^2t^2} \leq d,$$

t. j.

$$u^2 + a^2 \leq 2a \sqrt{d^2 + t^2};$$

s pomocí rovnice $c = \frac{a^2 + u^2}{2a}$ dostaneme $c \leq \sqrt{d^2 + t^2}$.

Nyní si všimneme nerovností $0 < a < u < t$. Musí být $0 < a$, protože se koule nedotýkají. V každém skutečném příkladě poloměry r_1, r_2 jsou kladná čísla a tedy nerovnost $u < t$ plyne z rovnice (3). Nerovnost $a < u$ odvodíme takto:

$$a = c - (r_1 + r_2) > 0,$$

$$a[c + (r_1 + r_2)] = c^2 - (r_1 + r_2)^2 = u^2;$$

avšak

$$c + (r_1 + r_2) > c - (r_1 + r_2) = a,$$

t. j.

$$a^2 < u^2,$$

čili

$$a < u.$$

15. Jsou dány body $A, A', B \neq A$. Otáčení, které převede bod A v bod A' , převede bod B v jistý bod B' . Co vyplní body B' , které dostaneme všemi takovými otáčeními?

Řešení. Předpokládejme nejprve, že $A \neq A'$. Každé otáčení, které převádí bod A v bod A' , lze rozložit ve dvě souměrnosti: první má za osu přímku o , která je osou úsečky AA' , druhá má za osu jistou přímku o' procházející bodem A' . První z těchto souměrností převádí bod B v určitý pevný bod B'' . Druhá souměrnost převede tento bod B'' v bod B' . Střed B_0 úsečky $B'B''$ je pata kolmice spuštěné z bodu B'' na přímku o' . Otáčí-li se přímka o' kolem bodu A' , vyplní bod B_0 (podle Thaletovy věty) kružnici k sestrojenou nad průměrem $A'B''$; z této kružnice ovšem musíme vyloučit bod ležící na přímce BB'' (neboť příslušná přímka o' je rovnoběžná s přímkou o a nevzniká otáčení). Bod B' vyplní kružnici k' stejnohlou ke kružnici k podle středu B'' s poměrem stejnohloulosti $\lambda = 2$. Kružnice k' bude procházet bodem B'' a jejím středem bude bod A' . Také z kružnice k' třeba vyloučit bod ležící na přímce BB'' .

Jestliže je $A' = A$ ($A \neq B$), potom bod A jako samodružný je středem otáčení a hledané geometrické místo je kružnice se středem v A a procházející bodem B , s vyloučením bodu B .

Případ $A \neq A' = B$ je zahrnut v naší úvaze.

16. Budiž D průsečík osy úhlu CAB trojúhelníka s jeho stranou BC . Budiž dále DE rovnoběžka vedená bodem D

k přímce CA a E její průsečík se stranou AB ; budiž konečně EF rovnoběžka vedená bodem E k přímce BC a F její průsečík se stranou CA . Dokažte, že platí:

$$\overline{AF} = \overline{AC} - \overline{AE}.$$

Řešení. Máme zřejmě dokázat, že $\overline{AE} = \overline{FC}$. Polopřímky DE , AC jsou nesouhlasně rovnoběžné a proto je $\sphericalangle EDA = \sphericalangle DAC = \frac{1}{2}\alpha$, takže v $\triangle ADE$ je $\sphericalangle EAD = \sphericalangle EDA = \frac{1}{2}\alpha$ a tím i $\overline{AE} = \overline{ED}$.

Z konstrukce plyne, že $CDEF$ je rovnoběžník a tedy $\overline{ED} = \overline{FC}$, t. j. $\overline{AE} = \overline{FC}$.

C. ÚLOHY II. KOLA, KATEGORIE A

1. Jestliže číslo n je celé, potom i výraz

$$V = \frac{n^5}{120} - \frac{n^3}{24} + \frac{n}{30}$$

je celé číslo. Dokažte!

Řešení. Je

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{120}(n^5 - 5n^3 + 4n) = \frac{1}{120}(n^4 - 5n^2 + 4)n = \\ &= \frac{1}{120}(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2). \end{aligned} \quad (1)$$

Máme tedy dokázat, že součin

$$K = k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$$

(kde k je celé číslo) pěti po sobě následujících celých čísel je dělitelný číslem $120 = 3 \cdot 5 \cdot 8$, neboli že číslo K je dělitelné třemi nesoudělnými čísly 3; 5; 8. To znamená, že máme dokázat tato tvrzení:

- (1) Jednoho z pěti činitelů čísla K lze psát ve tvaru $3p$;
- (2) jednoho z pěti činitelů čísla K lze psát ve tvaru $5q$;
- (3) číslo K lze psát ve tvaru $K = 8r$, při čemž p, q, r jsou čísla celá.

Důkaz každého z těchto tří tvrzení provedeme zvlášť.

- (1) Číslo k lze psát ve tvaru

$$k = 3k' + z,$$

kde k' je číslo celé a číslo z je rovno jednomu z čísel 0; 1; 2. Pro $z = 0$ je činitel k dělitelný třemi, pro $z = 1$ je činitel $k + 2 = 3(k' + 1)$ a pro $z = 2$ je činitel $k + 1 = 3(k' + 1)$ dělitelný třemi, neboť $k' + 1$ je číslo celé.

- (2) Číslo k lze psát ve tvaru

$$k = 5k' + z,$$

kde k' je číslo celé a číslo z je rovno jednomu z čísel 0; 1; 2; 3; 4. Pro $z = 0$ je hledaným činitelem číslo k . Pro ostatní hodnoty z jsou to po řadě činitele $k + 4, k + 3, k + 2, k + 1$, jejichž hodnota je vždy rovna $5(k' + 1)$, kde $k' + 1$ je zřejmě číslo celé.

- (3) Jestliže je činitel k sudé číslo, jsou sudí i činitele $k + 2, k + 4$ a tvrzení je dokázáno.

Jestliže je činitel k liché číslo, t. j. platí-li $k = 2m + 1$, kde m je celé číslo, jsou činitele

$$k + 1 = 2(m + 1), \quad k + 3 = 2(m + 2)$$

čísla sudá; tu zbývá dokázat, že jedno z čísel $m + 1, m + 2$ je sudé. Je-li $m + 1$ sudé, je to dokázáno; je-li $m + 1$ liché, je $m + 2$ sudé a je to zase dokázáno.

Jiné řešení. Výraz (1) vpravo lze psát pro $n \geq 3$ ve tvaru

$$V = \binom{n+2}{5};$$

za této podmínky je V tedy jistě číslo celé. Ale V je zřejmě celé číslo i pro $n = 0; 1; 2$.

Jestliže je $n < 0$, potom položíme-li ve výrazu (1)

$$n = -m,$$

kde m je celé kladné, nabude výraz V tvaru

$$V = -\frac{1}{120} \cdot (m+2)(m+1)m(m-1)(m-2) = -V',$$

kde

$$V' = \frac{1}{120} (m-2)(m-1)m(m+1)(m+2).$$

Podle předchozího je V' celé číslo pro $m > 0$ a tím i výraz V pro $n < 0$.

2. Dokažte, že číslo $11^{100} - 1$ končí skupinou číslic 6000.

Řešení. Podle binomické poučky obdržíme:

$$\begin{aligned} x = 11^{100} &= (1 + 10)^{100} = 1 + 100 \cdot 10^1 + 100 \cdot 99 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^2 + \\ &+ 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \frac{1}{6} \cdot 10^3 + z. \end{aligned}$$

Při tom z je součet zbývajících členů tvaru $\binom{10}{k} \cdot 10^k$ pro $k \geq 4$; protože příslušné kombinační číslo je číslo přirozené, je hodnota každého takového členu v dekadické soustavě zapsána číslem končícím alespoň čtyřmi nulami. Ale ani o čtvrtém členu v našem výrazu není třeba uvažovat, neboť součin $99 \cdot 98 \cdot \frac{1}{6}$ je číslo přirozené a ten máme ještě zná-

sobit číslem 10^5 , takže jde opět o číslo končící alespoň čtyřmi nulami. Součet prvních tří členů je $1 + 1000 + 495\,000 = 496\,001$. Číslo x má tedy v dekadické soustavě na posledních čtyřech místech skupinu číslic 6001 a proto číslo $x - 1$ končí skupinou 6000.

3: Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, který lze vepsat do kružnice, jestliže jsou dány velikosti a, b, c, d jeho stran.

Řešení. V rovině, v níž budeme provádět všechny úlohy, zvolme kladný smysl otáčení. Jsou-li dány tři navzájem různé body A, B, C , budeme úhlem $A(BC)$ rozumět úhel, o který je nutno otočit polopřímku AB , abychom dostali polopřímku AC . Velikost tohoto úhlu je jednoznačně určena až na celistvý násobek 2π (v míře obloukové).

Vypuklý čtyřúhelník $ABCD$ nazýváme kladně orientovaný, když při obíhání jeho obvodu v kladném smyslu následují za sebou vrcholy pořádku A, B, C, D .

Naše úloha se redukuje v podstatě na úlohu: sestrojte tětivový čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány jeho vrcholy A, B (ovzdálenosti a) a úsečky $\overline{BC} = b, \overline{CD} = c, \overline{DA} = d$. O všech číslech a, b, c, d předpokládáme, že jsou kladná.

Provedeme nejprve rozbor této úlohy a ukážeme, že takový čtyřúhelník existuje nejvýše jeden. Dejme tomu, že takový čtyřúhelník $ABCD$ existuje. Sestrojme podobný čtyřúhelník $D'C'B'A'$ (při této podobnosti odpovídají bodům A, B, C, D postupně body A', B', C', D') tak, že $A' \equiv C, B' \equiv D$.

Podle věty o obvodových úhlech víme, že $A(BD) + C(DB) = \pi$, a z podobnosti plyne (pozor na orientaci), že $A'(D'B') = A(BD)$; tedy bod C leží na úsečce BD . Podobně zjistíme, že bod D leží na úsečce AC .

Stejně $A(BD) + C'(B'D') = A(BD) + C(DB) = \pi$, tedy úsečky AB a $C'D'$ jsou rovnoběžné. Z popsanych vlastností okamžitě plyne, že body A, B, D', C' jsou navzájem různé

a tvoří lichoběžník o základnách AB , $C'D'$ a ramenech AC' , BD' . Z podobnosti dále plyne: $a' = \overline{A'B'} = \lambda a$, $b' = \overline{B'C'} = \lambda b$, $c' = \overline{C'D'} = \lambda c$, $d' = \overline{D'A'} = \lambda d$, kde $\lambda = \frac{c}{a}$ (neboť $\overline{A'B'} = \overline{CD}$). Náš kladně orientovaný lichoběžník $ABD'C'$ má tedy základny $\overline{AB} = a$, $\overline{D'C'} = \frac{c^2}{a}$ a ramena $\overline{BD'} =$

$$= \overline{BC} + \overline{A'D'} = b + \frac{c}{a}d = \frac{ab + cd}{a}, \overline{AC'} = \overline{AD} + \overline{B'C'} =$$

$$= d + \frac{c}{a}b = \frac{ad + bc}{a}.$$

Takový lichoběžník o daných stranách, o dané orientaci a daných dvou vrcholech na základně (v našem případě jsou to vrcholy A , B) existuje nejvýše jeden v případě $c \neq a$ a sestrojí se známým způsobem rozkladem na rovnoběžník o sousedních stranách AC' , $C'D'$ a na trojúhelník o stranách $|\overline{AB} - \overline{C'D'}| = \left| a - \frac{c^2}{a} \right| = \left| \frac{a^2 - c^2}{a} \right|$, $\overline{AC'} = \frac{ad + bc}{a}$,

$$\overline{BD'} = \frac{ab + cd}{a}.$$

Existuje tedy též nejvýše jeden hledaný čtyřúhelník, neboť uvedeným lichoběžníkem a stranami $\overline{BC} = b$, $\overline{DA} = d$ je náš čtyřúhelník určen jednoznačně.

Současně z uvedeného postupu vyplývá konstrukce tohoto čtyřúhelníku v případě $c \neq a$: Sestrojíme úsečky velikosti $a' = \lambda a = c$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$, $d' = \lambda d$, dále trojúhelník o stranách $|a - c'|$, $b + d'$, $d + b'$. K němu připojíme rovnoběžník o stranách $d + b'$, c' . Tím obdržíme náš lichoběžník, na jehož ramena naseme úsečky velikosti b resp. d ; pozor na okolnost, že může být $c > a$.

Případ $c = a$, $b \neq d$ převedeme na předcházející cyklickou záměnou stran. Případ $c = a$, $b = d$ je jasný. Dále z uvedeného postupu vyplývá, že nutná podmínka pro existenci hle-

daného čtyřúhelníka je, aby existoval trojúhelník o stranách $a - c'$, $b + d'$, $d + b'$. Dokážeme si nyní, že tato podmínka je též postačující. Jestliže tato podmínka je splněna a je-li $c \neq a$, můžeme snadno sestrojít kladně orientovaný lichoběžník $ABD'C'$ o základnách $\overline{AB} = a$, $\overline{C'D'} = c'$, a ramenech $\overline{BD'} = b + d'$, $\overline{AC'} = d + b'$ (při tom $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$, $d' = \lambda d$, kde $\lambda = \frac{c}{a}$). Na ramenech BD' ,

resp. AC' najdeme body D , resp. C tak, že $\overline{BC} = b$ a že $\overline{AD} = d$. To je možné, neboť $b < \overline{BD'}$, $d < \overline{AC'}$.

Předpokládejme nejprve, že $c < a$ (tedy též $c' < a$) a prodlužme strany AC' a BD' , až se protnou v bodě E . Trojúhelníky $EC'D'$ a EAB jsou podobné s poměrem podobnosti $c' : a = \lambda c : a = \lambda^2$. Tedy $\overline{EC'} = \lambda^2 \overline{EA}$, $d + b' = \overline{C'A} = \overline{EA} - \overline{EC'} = (1 - \lambda^2) \overline{EA}$, tedy $\overline{EA} = \frac{d + b'}{1 - \lambda^2}$.

Podobně $\overline{EB} = \frac{b + d'}{1 - \lambda^2}$. Jsou tedy též podobné trojúhelníky EAB a ECD , neboť úhly u vrcholu E mají společné a platí

$$\overline{EC} = \overline{EB} - \overline{BC} = \frac{b + d'}{1 - \lambda^2} - b = \frac{\lambda d + \lambda^2 b}{1 - \lambda^2},$$

$$\overline{ED} = \overline{EA} - \overline{AD} = \frac{d + b'}{1 - \lambda^2} - d = \frac{\lambda b + \lambda^2 d}{1 - \lambda^2};$$

tedy $\overline{EC} : \overline{ED} = (d + \lambda b) : (b + \lambda d) = \overline{EA} : \overline{EB}$.

Úhly u vrcholů A a C ve čtyřúhelníku $ABCD$ jsou tedy výplňkové a proto bod C leží na kružnici procházející body ABD (body C , A jsou přímkou BD odděleny).

Případ $c > a$ převede se snadno na předcházející (stačí sestrojít tětivový čtyřúhelník o stranách $\overline{a} = c$, $\overline{b} = d$, $\overline{c} = a$, $\overline{d} = b$; předcházející podmínka pro existenci takového čtyřúhelníka je totiž splněna: z délek $|a^2 - c^2|$, $ab + cd$, $ad + bc$

jakožto stran, lze sestavit trojúhelník; tyto délky rovnají se postupně délkám $|\bar{c}^2 - \bar{a}^2|$, $\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}$, $\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{d}$ a přitom je $\bar{c} < \bar{a}$. Tedy existuje tětíivový čtyřúhelník o stranách (postupně vzatých) $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$.

Je-li $c = a$, je řešením naší úlohy lichoběžník o základnách b , d , o ramenech $a = c$ v případě, že $b \neq d$, a obdélník, když $a = c$, $b = d$.

Poznámka. Z trojúhelníkových nerovností pro trojúhelník o stranách $|a^2 - c^2|$, $ab + cd$, $ad + bc$ se snadno zjistí, že tento trojúhelník existuje právě tehdy, platí-li současně

$$a < b + c + d,$$

$$b < c + d + a,$$

$$c < d + a + b,$$

$$d < a + b + c.$$

To je tedy nutná a postačující podmínka pro existenci hledaného čtyřúhelníka.

4: Rovina je pokryta sítí shodných rovnostranných trojúhelníků. Dokažte, že neexistuje čtverec, jehož všechny vrcholy by ležely ve vrcholech sítě (t. j. ve vrcholech trojúhelníků sítě).

Řešení. Zvolíme jeden mřížový bod za počátek O souřadnic a osu x položíme do přímky obsahující strany trojúhelníků.

Je-li velikost strany rovnostranného trojúhelníka rovna jedné, jsou souřadnice každého mřížového bodu sítě ve tvaru $\left(\frac{1}{2}n_1; \frac{1}{2}n_2\sqrt{3}\right)$, kde n_1 , n_2 jsou celá čísla téže parity. Obráceně každý bod $\left(\frac{1}{2}n_1; \frac{1}{2}n_2\sqrt{3}\right)$, kde n_1 , n_2 jsou celá čísla téže parity, je mřížovým bodem sítě.

Předpokládejme, že máme čtverec žádané vlastnosti, jehož jeden vrchol je v počátku souřadnic (toho lze vždy dosáhnout vhodnou volbou počátku). Jsou-li A, B dva vrcholy tohoto čtverce sousední k bodu O , a má-li bod A souřadnice $(x; y)$, má bod B souřadnice buď $(-y; x)$ nebo $(y; -x)$.*) Jsou-li body A, B mřížovými body sítě, je $x = \frac{1}{2}n_1, y = \frac{1}{2}n_2\sqrt{3}$,

$y = \frac{1}{2}n_3, x = \frac{1}{2}n_4\sqrt{3}$, kde n_1, n_2, n_3, n_4 jsou celá čísla, ne všechna rovna nule. To je však nemožné.

Jiné řešení úlohy. Zvolme vrchol jednoho trojúhelníka sítě o straně $2a$ (kde $a \neq 0$) za počátek O roviny komplexních čísel; budiž OA jedna ze stran tohoto trojúhelníka, potom budiž OA kladná poloosa x roviny komplexních čísel. Pak každý vrchol sítě je vyjádřen komplexním číslem tvaru

$$ka + lai\sqrt{3}, \quad (1)$$

kde k, l jsou celá čísla.

Protože strany čtverce jsou si rovny, je možno jednu z nich otočením převést v sousední stranu; středem otáčení je vrchol společný oběma stranám, úhel otočení je 90° .

Zvolme vrchol předpokládaného čtverce v počátku O roviny komplexních čísel, což není na újmu obecnosti úlohy. Druhý a sousední vrchol Q může být kterýkoli jiný bod sítě; tento vrchol je určen komplexním číslem tvaru (1), kde čísla k_1, l_1 nejsou současně rovna nule.

Otočení o 90° převede bod Q v bod Q' a jemu přísluší komplexní číslo

$$\pm i(k_1a + l_1ai\sqrt{3}) = \mp l_1a\sqrt{3} \pm k_1ai, \quad (2)$$

*) Skutečně, je-li $B \equiv [x', y']$, platí $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2, xx' + yy' = 0$. Aspoň jedno z čísel x, y je různé od nuly; budiž na př. $y \neq 0$.

Položme $x' = ty$ (t. j. $t = \frac{x'}{y}$) a dosaďme za x' do rovnice $xx' + yy' = 0$; vyjde $y' = -tx$. Z první rovnice pak dostaneme $t^2 = 1$, t. j. $t = \pm 1$.

neboť násobení číslem $\pm i$ znamená rotaci kolem bodu O o $\pm 90^\circ$. Aby bod Q' byl bodem sítě, musí být reálná část čísla (2) celistvým násobkem čísla a . To je splněno jedinečně pro $l_1 = 0$, t. j. bod Q leží na ose x a strana čtverce $\overline{OQ} = k_1 a$, neboť $k_1 \neq 0$. Ale na ose y neleží žádný bod Q' takový, aby bylo $\overline{OQ'} = k_1 a$ a aby to byl bod sítě. (Upravené řešení s. Boh. Cenkla, 3b tř. Slovanského gymnasia v Olomouci.)

D. ÚLOHY II. KOLA, KATEGORIE B

1. Jsou dány dvě různé přímky p, q a bod A . Každé otáčení které převádí přímku p v přímku q , převádí bod A v jistý bod A' . Co vyplní všechny tyto body A' ?

Řešení. Střed každého otáčení, které převádí přímku p v přímku q , je stejně vzdálen od obou těchto přímek; leží tedy na jedné z os souměrnosti přímek p, q , jsou-li různoběžné, nebo na ose souměrnosti přímek p, q , jsou-li rovnoběžné. Obráceně každý bod osy souměrnosti přímek p, q je zřejmě středem aspoň jednoho otáčení, které převádí p v q .

Budiž X střed otáčení, který leží na ose o přímek p, q . Otáčení rozložíme na dvě osové souměrnosti tak, aby první měla osu v přímce o ; tato souměrnost převádí přímku p v q , proto musí druhá souměrnost převádět přímku q v samu sebe. Nyní jsou možné dva případy:

a) leží-li bod X mimo přímku q , je osa o' druhé souměrnosti kolmá k přímce q ;

b) leží-li bod X na přímce q (a to nastane jedinečně pro průsečík přímek p, q , jsou-li různoběžné), je buď $o' \perp q$, nebo $o' \equiv q$.

Označme A'' obraz bodu A v osové souměrnosti (o).

Případ A. Je-li $p \parallel q$, vyplní body A' přímku r rovnoběžnou s přímkou q a procházející bodem A'' . Každá souměr-

nost (o') totiž převede bod A'' v nějaký bod přímky r a obráceně ke každému bodu P přímky r existuje souměrnost (o'), která převádí A'' v P . Přímka r může splynout s přímkou $q(p)$, leží-li bod A'' na $q(p)$, t. j. leží-li bod A na $p(q)$.

Případ B. Jsou-li p, q dvě různoběžky, označíme o_1, o_2 jejich osy, A''_1, A''_2 obrazy bodu A v souměrnostech (o_1), (o_2). Body A' vyplní dvě přímky r_1, r_2 rovnoběžné s q a procházející body A''_1, A''_2 . Pro $o' \equiv q$ leží rovněž obrazy bodů A''_1 , resp. A''_2 na přímkách r_2 , resp. r_1 , neboť body A''_1, A''_2 jsou souměrně sdružené podle průsečíku přímek p, q . Přímky r_1, r_2 splynou navzájem a tedy i s přímkou q tehdy a jen tehdy, leží-li oba body A''_1, A''_2 na přímce q , t. j. leží-li bod A na přímce p .

2. Najděte všechna čtyřciferná čísla tvaru $aabb$ (kde $a \neq 0$ a b jsou arabské cifry), která jsou čtverci celého čísla!

Řešení. Předpokládejme, že takové číslo*) $c = n^2$ existuje. Pak

$$c = 1100a + 11b,$$

kde

$$0 < a \leq 9, \quad 0 \leq b \leq 9. \quad (1)$$

Protože $n^2 = 11(100a + b)$, je n dělitelné jedenácti, t. j.

$$n = 11m$$

a

$$11m^2 = 100a + b = 99a + (a + b). \quad (2)$$

Je tedy i $a + b$ dělitelné jedenácti. Avšak ze vztahů (1) vyplývá

$$0 < a + b \leq 18,$$

*) V celém řešení píšeme místo „celé číslo“ stručně „číslo“.

takže

$$a + b = 11. \quad (3)$$

Dosazením do (2) dostaneme po zkrácení jedenácti

$$m^2 = 9a + 1.$$

Z čísel 1, 2, ..., 9 má právě $a = 7$ vlastnost, že $9a + 1$ je čtverec, a to čísla 8. Z rovnice (3) je pak $b = 4$. Existuje-li tedy řešení c , je $c = 7744$. Je však $7744 = (11 \cdot 8)^2$, takže číslo 7744 je skutečně řešení.

3. Dokažte, že pro všechna reálná čísla a, b platí

$$(a^2 + b^2)ab \leq a^4 + b^4.$$

Rozhodněte, kdy platí rovnost!

Řešení. Abychom toto tvrzení dokázali, stačí ukázat, že hodnota výrazu $V = (a^4 + b^4) - ab(a^2 + b^2)$ je pro všechna reálná a, b číslo nezáporné.

Upravujeme postupně výraz

$$\begin{aligned} V &= (a^4 + b^4) - ab(a^2 + b^2) = a^3(a - b) - b^3(a - b) = \\ &= (a - b)(a^3 - b^3) = (a - b)^2(a^2 + ab + b^2) = \\ &= (a - b)^2 \left[\left(\frac{1}{2}a + b \right)^2 + \frac{3}{4}a^2 \right]. \end{aligned}$$

1. Hodnota výrazu V je zřejmě číslo nezáporné, neboť první činitel je čtverec reálného čísla (což je vždy číslo nezáporné), druhý činitel je roven součtu dvou nezáporných čísel, tedy také číslo nezáporné; protože ani jeden z činitelů není záporný, je součin číslo nezáporné.

2. Aby bylo $V = 0$, je nutné a stačí, aby jeden z obou činitelů byl roven nule.

a) Buď je $(a - b)^2 = 0$, t. j. $a = b$;

b) nebo je druhý činitel, jímž je součet dvou nezáporných čísel, roven nule; tu je nutné a stačí, aby platilo současně $\left(\frac{1}{2}a + b\right)^2 = 0$, $\frac{3}{4}a^2 = 0$. Z druhé podmínky plyne $a = 0$

a po dosazení do první podmínky je $b^2 = 0$, t. j. $b = 0$, neboli musí tedy platit $a = b = 0$. Ale tento vztah je už zahrnut v případě a).

Výraz V je tedy roven nule tehdy a jen tehdy, je-li $a = b$.

4. Čtyřstěn $MNPQ$ nechť má nejdelší hranu délky d . Dokažte, že pro každé dva body A, B povrchu čtyřstěnu platí nerovnost $\overline{AB} \leq d$, kde AB je vzdálenost bodů A, B .

Řešení. V důkazu použijeme věty (viz úlohu B 9 I. kola): *Trojúhelník TUV nechť má nejdelší stranu délky v . Pak pro každé dva body X, Y obvodu trojúhelníka platí nerovnost $\overline{XY} \leq v$, kde XY je vzdálenost bodů X, Y .* Je-li $A \equiv B$, je tvrzení zřejmé. Předpokládejme tedy že $A \neq B$. Pak aspoň jeden z vrcholů M, N, P, Q neleží na přímce AB . Zvolme označení tak, aby bod M neležel na přímce AB . Rovina ABM protne čtyřstěn v trojúhelníku MKL , neboť průsečnice rovin ABM, NPQ musí protnout obvod trojúhelníka NPQ ve dvou různých bodech K, L , jinak by totiž ležely body A, B, M v přímce.

Podle citované věty je úsečka AB menší nebo rovna největší z úseček KL, LM, MK . Avšak podle téže věty je každá z úseček KL, LM, MK menší nebo rovna největší straně té stěny čtyřstěnu, v níž leží. Proto je $\overline{KL} \leq d$, $\overline{LM} \leq d$, $\overline{MK} \leq d$, a tudíž i $\overline{AB} \leq d$.

1. Jsou-li a, b kladná racionální čísla, dokažte, že ze vztahu

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = c$$

kde c je racionální číslo, plyne, že $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ jsou rovněž racionální čísla.

Řešení. Podle předpokladu je $a > 0$, $b > 0$ a proto je i racionální číslo $c > 0$, neboť odmocnina z kladného čísla je kladná a součet dvou kladných čísel $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ je číslo opět kladné.

Z daného vztahu plyne, že $\sqrt{b} = c - \sqrt{a}$, $b = c^2 + a - 2c\sqrt{a}$, takže

$$\sqrt{a} = \frac{c^2 + a - b}{2c}, \quad \sqrt{b} = \frac{c^2 - a + b}{2c},$$

což jsou čísla racionální. Vedle toho je $a + 2\sqrt{ab} + b = c^2$, takže je

$$c^2 > a + b;$$

odtud plyne, že $c^2 + a - b > 2a > 0$, $c^2 - a + b > 2b > 0$, takže čísla $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ jsou kladná.

2. Tabulka čísel

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & & \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 & g_3 \\ . & . & . & . & . & . & . \end{array}$$

je sestavena takto: První řádek obsahuje tři lichá čísla. Každé číslo dalších řádků je rovno součtu tří sousedních

čísel předcházejícího řádku, z nichž prostřední je nad uvažovaným číslem; schází-li v tabulce některé z těchto tří čísel, doplní se nulou. Dokažte, že počínaje druhým řádkem každý řádek obsahuje aspoň jedno sudé číslo.

Řešení. Pišme místo sudého čísla s , místo lichého l . Pak počínajíc druhým řádkem lze první čtyři čísla v každém řádku zapsat schematicky takto:

2. řádek $l s l s \dots$

3. řádek ... $l l s l \dots$

4. řádek .. $l s s s \dots$

5. řádek . $l l l s \dots$

Z prvních tří čísel pátého řádku je patrné, že ve třech dalších řádcích se budou první čtyři čísla opakovat co do parity (sudost, lichost) jako v řádcích druhém, třetím a čtvrtém; toto schema se tedy po každém čtvrtém řádku opakuje. Protože se v našem schematu mezi prvními čtyřmi čísly od 2. řádku počínajíc vyskytuje alespoň jedno sudé číslo, je tvrzení úlohy dokázáno.

3. Budiž $ABCD$ vypuklý různoběžník, v němž $\overline{AB} = \overline{CD}$ a buďtež R, S středy stran AD, BC . Sestrojte polopřímky AU, DV souhlasně rovnoběžné s polopřímkou RS . Dokažte, že platí vztah

$$\sphericalangle B A U = \sphericalangle C D V.$$

Řešení. Označme $\overline{AR} = \overline{RD} = x$. Veďme úsečku RM tak, aby platilo $RM \uparrow\uparrow AB$, $\overline{RM} = \overline{AB}$, takže je $M \equiv B$ ($BM \uparrow\uparrow AR$, $\overline{BM} = x$; čtyřúhelník $ARMB$ je rovnoběžník podle poučky: Jestliže ve čtyřúhelníku $UVXY$ je $UV \uparrow\uparrow YX$, $\overline{UV} = \overline{XY}$, je to rovnoběžník).

Dále veďme úsečku RN tak, aby platilo $RN \uparrow\uparrow DC$, $\overline{RN} = \overline{DC}$, takže je $N \equiv C$ a $NC \uparrow\uparrow RD$, $\overline{NC} = \overline{RD} = x$.

Je tedy $\overline{BM} = \overline{NC} = x$, $BM \uparrow\uparrow NC$ (je totiž $AR \uparrow\uparrow RD$). Přímký BM , NC nesplývají, jinak by bylo $AD \parallel BC$, což je proti předpokladu. Také úsečky RM , RN nesplývají, neboť není $AB \parallel CD$, a tedy RMN je trojúhelník, v němž je $\overline{RM} = \overline{AB} = \overline{DC} = \overline{RN}$, t. j. $\overline{RM} = \overline{RN}$.

Úsečky BM , CN jsou podle naší úvahy nesouhlasně rovnoběžné a proto si navzájem odpovídají ve středové souměrnosti o středu S , v které je bod C obrazem bodu B . V téže souměrnosti si tedy odpovídají body M , N , takže bod S je středem základny MN rovnoramenného trojúhelníka RMN . Tudíž je

$$\sphericalangle BAU = \sphericalangle MRS = \sphericalangle NRS = \sphericalangle CDV.$$

4: Rozměry obdélníka $ABCD$ jsou přirozená čísla p , q ; obdélník je rozdělen na pq jednotkových čtverců. Určete počet těch jednotkových čtverců, jejichž vnitřkem prochází úhlopříčka AC , a to v případě, že čísla p , q jsou a) nesoudělná, b) soudělná.

Řešení. (Výrokem „úhlopříčka protíná čtverec sítě“ rozumíme v dalším, že taková úhlopříčka obsahuje alespoň jeden bod ležící uvnitř čtverce.)

a) Označení zvolme tak, aby bylo $p > q$. Uvažovaná úhlopříčka AC daného obdélníka $ABCD$ neobsahuje mezi body A , C žádný vrchol sítě. Neboť jinak by existovala přirozená čísla $p_1 < p$, $q_1 < q$ tak, že by platilo $\frac{q}{p} = \frac{q_1}{p_1}$ (podobnost trojúhelníků), čili $p_1q = pq_1$. Ježto p , q jsou čísla nesoudělná, bylo by číslo p dělitelem čísla p_1 , a to je ve sporu se vztahem $p_1 < p$.

Úhlopříčka AC protíná jeden čtverec v každém z p „sloupců“, které jsou mezi A , B . Dva čtverce protíná jen v tom sloupci, kde překračuje jednu z $q - 1$ přímek sítě, které jsou

rovnoběžné s AB . Více než dva čtverce v sloupci nemůže protínat, neboť by pak platilo $\frac{q}{p} > 1$, a to je ve sporu s naším předpokladem $p > q$.

Celkový počet čtverců, které protíná úhlopříčka AC , je tedy

$$p + q - 1. \quad (1)$$

b) Budťe p, q čísla soudělná a d jejich největší společný dělitel; pak čísla $\frac{p}{d}, \frac{q}{d}$ jsou nesoudělná. Pro obdélník čtvercové sítě o stranách velikosti $\frac{p}{d}, \frac{q}{d}$ dostaneme podle (1), že jeho úhlopříčka u prochází celkem

$$x = \frac{p}{d} + \frac{q}{d} - 1 \quad (2)$$

čtverci sítě.

Úhlopříčka AC daného obdélníka $ABCD$ obsahuje celkem $d + 1$ bodů čtvercové sítě (včetně bodů A, C) a rozpadá se tedy na d úseček velikosti u , které nemají žádný společný vnitřní bod. Každou z těchto úseček považujeme za úhlopříčku obdélníka o rozměrech $\frac{p}{d}, \frac{q}{d}$. Pak každá z těchto d úhlopříček prochází podle (2) právě x čtverci sítě; jde tedy úhlopříčka AC celkem $x \cdot d$, neboli

$$xd = p + q - d \quad (3)$$

čtverci sítě. Výraz (1) je speciální případ výrazu (3) pro $d = 1$.

OBSAH

1. Ke vzniku a organizaci matematické olympiady	3
2. Zpráva o průběhu a výsledcích jednotlivých kol	
A. Soutěž I. kola	8
B. Soutěž II. kola	11
C. Soutěž III. kola	12
3. Zhodnocení prvního ročníku matematické olympiady	15
4. Řešení úloh ze soutěže	
A. Úlohy I. kola, kategorie A	21
B. Úlohy I. kola, kategorie B	49
C. Úlohy II. kola, kategorie A	65
D. Úlohy II. kola, kategorie B	73
E. Úlohy III. kola, kategorie A.	77



Jan Vyšín, Rudolf Zelinka a pracovní kolektiv

PRVNÍ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIADY

Edice Pedagogické aktuality č. 34

Vedoucí redakce pedagogické literatury Sáva Racek

Odpovědný redaktor Marie Vašková

Obálka Antonín Homolka

Technický redaktor Václav Kotek

Korektoři Viktor Hejsek a Maria Soukupová

Plánovací skupina 301.02/57. Povoleno MIO č. j. 34517/5/52/III/2. 1174/Čkm DK 54.
Státní pedagogické nakladatelství. Do sazby 13. 9. 1952. Do tisku 1. 2. 1953. Vy-
dání 1. Náklad 3300. PA 1,82. AA 4,08. VA 4,20. Papír 221—10, 70×100, 80 g
Vytiskly a knihařsky zpracovaly Brněnské knihtiskárny, n. p., Brno. Písmo borgis
Antiqua. Druh tisku knihtisk. Všeobecná daň 4%.

Cena brož. 33 Kčs

Cena 33 Kčs

301-02-57