

11. ročník matematické olympiády

Jan Vyšín (editor); Rudolf Zelinka (editor): 11. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1961-1962. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1963.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404506>

Terms of use:

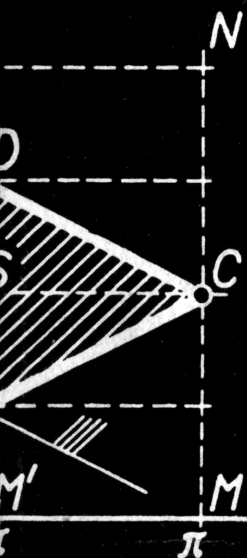
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Jedenáctý ročník matematické olympiády

SPN



Ustřední výbor
MATematické OLYMPIÁDY
115 67 Praha 1, Žitná 3
telefon 22 91 01 18

$x - 2r = 0$
 $1 - 3r^2 = 0$
 $r = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$
 $x =$

JEDENÁCTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

*Zpráva o řešení úloh ze soutěže,
konané ve školním roce 1961—1962*

ČTVRTÁ MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ
OLYMPIÁDA

Ústřední výbor
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

115 67 Praha 1, Žitná 25
telefon 22 63 01 - 3

PRAHA 1963

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ

Za přispění spolupracovníků zpracovali doc. Jan Vyšín a Rudolf
Zelinka. Slovenské části textu přeložil Jozef Moravčík
Recenzovali doc. Josef Holubář, dr. Zbyněk Nádeník CSc. a
Miroslav Šisler CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1963

I. K průběhu XI. ročníku Matematické olympiády

1. Jedenáctý ročník naší celostátní matematické soutěže, pořádané pro žáky středních a základních devítiletých škol, probíhal ve šk. roce 1961/62. Žáci středních škol všeobecně vzdělávacích a odborných byli zařazeni do tří kategorií: A (3., popř. 4. ročník), B (2.ročník) a C (1. ročník); žáci 9.ročníků základních devítiletých škol soutěžili v kategorii D. Výjimky v těchto zařazeních povolovaly výbory matematické olympiády.

2. Soutěž pořádalo *ministerstvo školství a kultury* (MŠK) ve spolupráci s *Matematickým ústavem ČSAV* (MÚ ČSAV), *Jednotou čs. matematiků a fyziků* (JČMF) a *ústředním výborem Československého svazu mládeže* (ÚVČSM). Soutěž se řídila organizačním řádem, který vyšel ve Věstníku MŠK, roč. XV, str. 289, instrukce č. 70 ze dne 31. 10. 1959.

Soutěž řídil *ústřední výbor Matematické olympiády* (ÚVMO) ve spolupráci s *krajskými a okresními výbory MO* (KV MO a OV MO); práce ve výborech se účastnili učitelé matematiky základních devítiletých škol, škol středních i vysokých, vědečtí pracovníci, členové ČSM aj.

Ústřední výbor Matematické olympiády (Praha 1-Nové Město, Žitná 25, tel. 24 11 93) měl toto složení:

Předseda: Akademik Josef Novák, vedoucí vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze.

Místopředseda: Jan Vyšín, docent matematicko-fyzikální fakulty Karlovy university v Praze.

Jednatel: Rudolf Zelinka, vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze.

Členové:

Dr. Fr. Běloun, vedoucí matematického kabinetu Krajského ústavu pro další vzdělávání učitelů a výchovných pracovníků v Praze.

Karel Hnyk, odb. asistent Pedagogického institutu v Liberci.

Doc. Josef Holubář, vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze.

Fr. Hradecký, odb. asistent matematicko-fyzikální fakulty Karlovy university v Praze.

Dr. Karel Hruša, docent Ústavu dálkového studia učitelů Karlovy university v Praze.

Miloš Jelinek, ústřední inspektor ministerstva školství a kultury v Praze.

Dr. Milan Kolibiar, docent přírodovědecké fakulty Komenského university v Bratislavě.

Dr. Josef Pírek, ředitel základní devítileté školy v Brně.

Fr. Veselý, odb. asistent Vysoké školy strojní a elektrotechnické v Plzni.

Dr. Miloslav Zedek, docent Palackého university v Olomouci.

Dr. Miroslav Fiedler DrSc., vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze.

Náhradník: Miroslav Šisler CSc., vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze.

Členové-předsedové KV MO:

Stanislav Horák, odb. asistent katedry matematiky a deskriptivní geometrie strojní fakulty ČVUT v Praze.

Dr. Václav Pleskot, profesor ČVUT v Praze.

František Vejsada, učitel střední všeobecně vzdělávací školy v Českých Budějovicích.

Věra Rádlová, učitelka střední všeobecně vzdělávací školy v Plzni.

Josef Porcal, učitel zdravotnické školy v Teplicích.

Jan Laštovka, vedoucí kabinetu matematiky Ústavu pro další vzdělávání učitelů a výchovných pracovníků v Pardubicích.

Petr Benda, odb. asistent Vysoké školy pedagogické v Brně.

Josef Andrys, odb. asistent Pedagogického institutu v Ostravě.

Dr. Cyril Palaj, docent Vysoké školy lesní a dřevařské ve Zvoleni.

Dr. Milan Kolibiar, docent přírodovědecké fakulty University J. Á. Komenského v Bratislavě.

Anna Kotuliaková, odborná asistentka katedry matematiky Vysoké školy technické v Košicích.

3. Soutěž měla dvě, popř. tři kola. V prvním kole, které proběhlo od začátku školního roku 1961/62 do konce února 1962, řešili žáci doma v každé soutěžní kategorii 6 přípravných a 6 soutěžních úloh. Musili svému učiteli matematiky předložit řešení všech šesti přípravných úloh (4 musela být správná) a nejméně 4 správná řešení soutěžních úloh. Úlohy opravoval a klasifikoval žákův učitel matematiky; koordinaci klasifikace prováděli členové KV MO, popř. OV MO. Stupnice klasifikace byla: výborné nebo vyhovující řešení,

nevyhovující řešení. Školní referent MO — jeden z učitelů matematiky na škole — organizoval olympiádu v rámci své školy.

O přijetí žáka do druhého kola soutěže na návrh ředitele školy a referenta MO rozhodovaly KVMO, popř. OVMO; II. kolo, které má povahu klauzurní zkoušky, se pro kategorie A, B, C konalo v neděli 8. dubna 1962 dopoledne v krajských městech, pro kategorii D se konalo v neděli 15. dubna 1962 dopoledne v okresních městech (výjimečně i v městech dalších). Žáci během čtyř hodin měli rozřešit ze 4 úloh alespoň dvě správně.

Soutěží II. kola skončila olympiáda pro kategorie B, C, D. V rámci soutěže II. kola se konaly se žáky tradiční besedy. Rozbíraly se tu např. typické nedostatky vyskytující se v žákovských řešeních olympijských úloh. Žáci se při té příležitosti seznámili s pamětihodnostmi svého krajského nebo okresního města, navštívili průmyslové závody, shlédli divadelní představení apod. Po provedené klasifikaci žákovských řešení úloh II. kola obdrželi nejlepší řešitelé různé hodnotné věcné ceny, studijní literaturu a pochvalná uznání. Některé výbory uspořádaly slavnostní rozdělení cen za účasti rodičů a přátel; tak např. v Praze nabývá toto setkání již tradičního rázu. Jinde uspořádaly týdenní rekreaci spojenou s instruktáží. 60 nejlepších úspěšných řešitelů II. kola kategorie A se účastnilo třetího kola, které je celostátní; konalo se v sobotu 26. května 1962 dopoledne v Liberci pod záštitou tamější pobočky Jednoty čs. matematiků a fyziků. Odpoledne téhož dne byla pro účastníky uspořádána beseda pod vedením předsedy ÚV MO aka-

demika Josefa Nováka. Na ní vedle členů ÚV MO byli přítomni školští a kulturní pracovníci Liberecka, učitelé Pedagogického institutu v Liberci a zástupci Vysoké školy strojní a textilní v čele s rektorem docentem inž. dr. Vojtěchem Drábem, který na besedě promluvil; poukázal zvláště na důležitost spolupráce mezi matematiky, fyziky a techniky pro další rozvoj našeho hospodářství. Dále k účastníkům soutěže hovořil doc. František Dušek z Pedagogického institutu v Liberci; vyzval je k diskusi o nesnázích, které se jim v průběhu středoškolského studia při studiu matematiky stavěly v cestu. Téhož dne večer navštívili účastníci soutěže představení v Divadle F. X. Šaldy v Liberci. Druhého dne, v neděli 27. května 1962, zajeli účastníci soutěže na Ještěd a po závěrečném obědě se rozjeli do svých domovů. U příležitosti III. kola se konala pracovní schůze ÚV MO, jehož členové se účastnili sobotní besedy se žáky a přispěli svými připomínkami k řešení problému, jak lépe zajistit úspěchy ve vyučování matematice.

Z 60 účastníků III. kola (z toho byly 2 dívky) bylo jen 23 úspěšných (z toho žádná dívka).

Na závěr uvádíme statistická data, která svědčí o opětně rostoucím počtu účastníků soutěže; avšak pokud jde o kvalitu řešení a celkovou úroveň, nejsme zcela spokojeni. Není však pochyby o tom, že žáci mají v mnohém směru obsáhlé a hlubší znalosti, než tomu bývalo dříve (např. znalost řešení nerovností); na druhé straně jim chybí znalosti z teorie čísel, z konstruktivní geometrie a zběhlost a obratnost v provádění úprav algebraických a jiných výrazů. K této problematice se vrátíme jinde.

4. Tabulky č. 1 a 2 podávají přehled o účasti a výsledcích I. kola, kde se zvláště v kategorii D jeví značný přírůstek. To svědčí i o tom, že znalost školské matematiky se stává záležitostí společenského zájmu a je jedním z předpokladů pro další žákovo studium. Proto se stále více o olympiádu, její působení i výsledky zajímají nejen političtí a školští pracovníci, ale i širší veřejnost, zvláště pak rodiče. To jsou velmi kladné momenty. Olympiáda si klade za cíl v tomto směru co nejvíce připravovat půdu pro získávání hlubšího zájmu o matematiku.

Tabulky č. 3 a 4 informují o výsledcích II. kola; doplňkem k tomu je *pořadí nejlepších* (deseti) *řešitelů II. kola v kategoriích B a C*, z nichž nám vyrůstají příští řešitelé kategorie A.

Pořadí úspěšných řešitelů II. kola v kategoriích B, C:

Pokud není jinak uvedeno, jedná se o žáka střední všeobecně vzdělávací školy.

P = průmyslová škola

D = základní devítiletá škola

Praha-město

B. Souček Vladimír, Na Zatlance, Praha 5; Fried Viktor, Na příkopě 16, Praha 1; Vít Zdeněk, W. Piecka 2, Praha 2; Marínek Ondřej, nám. Lidových milicí 19, Praha 9; Havlová Alena, W. Piecka 2, Praha 2; Raška Ivan, W. Piecka 2, Praha 2; Švejda Jan,

Tabulka č. 1

Přehled účastníků I. kola podle krajů v kategoriích A, B, C*)

Kraj	Kategorie A		Kategorie B		Kategorie C		Celkem	
	P	U	P	U	P	U	P	U
Praha-město	72	29	71	35	66	36	209	100
Středočeský	18	18	17	17	20	19	55	54
Jihočeský	61	48	32	25	61	39	154	112
Západočeský	21	19	33	28	44	31	98	78
Severočeský	71	38	50	23	74	52	195	113
Východočeský	33	29	64	56	96	82	193	167
Jihomoravský	87	9	96	74	120	97	303	240
Severomoravský	44	29	53	31	77	45	174	105
Západoslovenský	83	43	91	61	79	30	253	134
Středslovenský	109	52	117	62	133	65	399	179
Východoslovenský	24	12	32	14	46	14	102	40
Celkem	623	386	656	426	816	510	2095	1322

*) P = celkový počet účastníků, U = počet úspěšných řešitelů.

Tabulka č. 2

Přehled počtu účastníků I. kola podle krajů v kategorii D*)

Kraj	Kategorie D	
	P	U
Praha-město	1388	847
Středočeský	731	429
Jihočeský	1135	695
Západočeský	719	462
Severočeský	760	434
Východočeský	1009	758
Jihomoravský	1457	796
Severomoravský	1397	731
Západoslovenský	805	548
Středoslovenský	1515	830
Východoslovenský	786	551
Celkem	11702	7081

*) P = celkový počet účastníků, U = počet úspěšných řešitelů.

Tabulka č. 3

Přehled počtu účastníků II. kola podle krajů v kategoriích A, B, C*)

Kraj	Kategorie A		Kategorie B		Kategorie C		Celkem	
	P	U	P	U	P	U	P	U
Praha-město	28	9	31	21	34	20	93	50
Středočeský	18	2	14	4	19	9	51	15
Jihočeský	46	3	23	5	37	16	106	24
Západočeský	18	1	27	9	31	4	76	14
Severočeský	38	12	23	8	45	21	106	41
Východočeský	28	10	54	18	80	49	162	77
Jihomoravský	63	17	64	23	78	66	205	106
Severomoravský	27	6	31	5	37	21	95	32
Západoslovenský	41	6	61	11	29	3	131	20
Středslovenský	50	11	63	20	33	13	146	44
Východoslovenský	11	—	14	—	13	2	38	2
Celkem	368	77	405	124	436	224	1209	425

*) P = celkový počet účastníků, U = počet úspěšných řešitelů.

Tabulka č. 4

Přehled počtu účastníků II. kola podle krajů v kategorii D*)

Kraj	Kategorie D	
	P	U
Praha-město	680	507
Středočeský	375	263
Jihočeský	608	359
Západočeský	402	221
Severočeský	373	263
Východočeský	596	468
Jihomoravský	471	297
Severomoravský	628	370
Západoslovenský	494	314
Středoslovenský	705	418
Východoslovenský	509	414
Celkem	5841	3894

*) P = počet všech účastníků, U = počet úspěšných řešitelů.

W. Piecka 2, Praha 2; Vodičková Ludmila, W. Piecka 2, Praha 2; Vorlíček Jiří, W. Piecka 2, Praha 2; Čtyřoký Jiří, Žukovova 33, Praha 6.

C. Kaše Jaroslav, Budějovická 680, Praha 4; Kroha Petr, P, Ječná 30, Praha 2; Kutil Rudolf, Budějovická 680, Praha 4; Benda Václav, Dimitrovovo nám. 34, Praha 7; Neubauerová Kamila, Štěpánská 23, Praha 1; Kabele Jiří, Žukovova tř., Praha 6; Velímská Hana, Pražacka 1700, Praha 3; Gračko Pavel, Na Zatlance, Praha 5; Šmilauer Bohdan, Pionýrů 118, Praha 5; Friš Martin, Dimitrovovo nám 34, Praha 7.

Středočeský kraj

B. Gregora Ivan, Slaný; Procházka Jindřich, Čelakovice; Eysseltová Jitka, Slaný; Šimerka Ivan, Mladá Boleslav.

C. Václavek Josef, Radotín; Skočdoplová Hana, Votice; Nešetřil Jaroslav, Rakovník; Bednařík Karel, Český Brod; Kolín Jaroslav, Rakovník; Tourková Eva, Český Brod; Krob Emil, Nové Strašecí; Pich Josef, Mladá Boleslav.

Jihočeský kraj

B. Hájek Karel, Strakonice; Hora Jan, Tábor; Turek Zdeněk, P, Písek; Štědrý Stanislav, Kaplice; Fiala Karel, Kaplice.

C. Komrská Pavel, Týn nad Vltavou; Chyšková Helena, Strakonice; Macek Bohuslav, Strakonice; Karel Ludvík, Č. Budějovice; Proutkovský Petr, P, Písek; Chromý František, Strakonice; Vobr Jan, Č. Budějovice; Vazač Karel, Písek; Šohajová Vlasta, Pacov; Řehoušek Petr, Č. Budějovice.

Západočeský kraj

B. Švík Václav, Přeštice; Opatrný Jaroslav, Nepomuk; Pajdar Václav, P, Klatovy; Střihavková Anďela, Plasy; Mottl Josef, Plasy; Zemandl Milan, P, Klatovy; Mertl Petr, Plzeň; Karafiát Josef, P, Loket nad Ohří; Kašpárková Zdeňka, Cheb.

C. Chvátal Václav, P, Plzeň; Verner Břetislav, Rokycany; Lobovský Rudolf, P, Plzeň; Hutar Václav, Karlovy Vary-Drahovice.

Severočeský kraj

B. Rödling Pavel, Chomutov; Karásek Josef, Česká Lípa; Krejčí Pavel, Litvínov; Görlich Petr, P, Ústí n. Labem; Petráň, Teplice; Bárta Zdeněk, P, Varnsdorf; Bartoš Liberec; Kužel Karel, Ústí nad Labem-Na skřivánku; Kněžourková, Česká Lípa; Žďárský Rostislav, Ústí nad Labem-Na skřivánku.

C. Jirsa Miroslav, Ústí nad Labem, Jateční ul.; Vízková Zuzana, Liberec; Novák Václav, Varnsdorf; Kořínek Tomislav, P, Chomutov; Šváb Jiří, Chomutov; Měšťanová Eva, Liberec; Hromada Alexandr, P, Chomutov; Karous J., Teplice; Jára Vladimír, Lovosice; Kořínek, Liberec.

Východočeský kraj

B. Zima Miloslav, Trutnov; Semerád Václav, Přelouč; Kapička Aleš, Slov. povstání, Pardubice; Soukup Jan, Semily; Broul Miroslav, Turnov; Vaněk Vladimír, Turnov; Strnádek Josef, Semily; Vlk Petr, P, Rychnov nad Kněžnou; Franclová Jana, Ledec nad Sázavou; Sandler Karel, Česká Třebová.

C. Laštovka Jan, Slov. povstání, Pardubice; Václavík Ivan, Tylovo nábř., Hradec Králové; Moudrá Milena, Slov. povstání, Pardubice; Rykrová Jaroslava, Tylovo nábř., Hradec Králové; Jón Jan, Vrchlabí; Novák Antonín, Hořice v Podkrkonoší; Čermáková Regina, Tylovo nábř., Hradec Králové; Pelikán Emanuel, Kostelec nad Orlicí; Čihal Robert, Tylovo nábř., Hradec Králové; Vojtíšek Otakar, Slov. povstání, Pardubice.

jihomoravský kraj

B. Šimková Drahomíra, Znojmo; Hanzálek Petr, Znojmo; Kostelecký František, P, Žďár; Traupová Jana, Znojmo; Košinárová Božena, Žďár n. Sáz.; Juřík Jaroslav, Velké Meziříčí; Zábrž Pavel, P, Žďár n. S.

C. Čech Antonín, Třebíč; Peřina Václav, P, Žďár n. S.; Šonková Marie, Žďár n. Sáz.; Horáková Ladislava, Třebíč; Dvořáková Miluše, Třebíč; Pokorný Jan, Třebíč; Wasserbauerová Ivana, Třebíč; Bouška Dušan, Telč; Kotačka Petr, Třebíč; Bartek Zdeněk, P, Žďár nad Sázavou.

Severomoravský kraj

B. Severa Richard, P, Rožnov p. R.; Blaťák Jan, Přerov; Dobeš Ferdinand, Český Těšín; Poruba František, P, Valašské Meziříčí; Roch Jiří, P, Valašské Meziříčí.

C. Durčák Miloslav, Ostrava-Hladnov; Mamula Lubomír, P, Val. Meziříčí; Urbánek Milan, Ostrava-Hladnov; Ženčáková Libuše, Olomouc; Slaměník Jan, Havířov; Jánoš Petr, Ostrava; Charvát Josef, P,

Vsetín; Kubečka Jaromír, Nový Bohumín; Vrben-
ský Karel, Ostrava; Tkáč Vladimír, Opava.

Západoslovenský kraj

B. Pohanka Vladimír, Novohradská 2, Bratislava;
Randák Miloš, Novohradská 2, Bratislava; Božek Peter,
Novohradská 2, Bratislava; Žgrlík Marián, Hollého 2,
Trnava; Lachová Ľubica, Trenčín; Tóth Štefan,
Trnava; Žideková Viera, Trnava; Jamnická Tatiana,
Pezinok; Kedro Martin, Trenčín; Sokolík Marián, P,
Bánovce n. Bebr.

C. Klimo Pavol, Vazovova 6, Bratislava; Lupták
Ján, Vazovova 6, Bratislava; Kocsis Karol, Komárno.

Středoslovenský kraj

B. Fiby Rudolf, P, Banská Bystrica; Čunderlík
František, P, Tisovec; Barančok Drahoslav, Brezno;
Heissová Zdena, Zvolen; Szénasyová Helena, Zvolen;
Koleczányová Livia, Banská Štiavnica; Holá Ida,
Nová Baňa; Kmeť Július, Banská Bystrica; Kráľová
Ľubica, Banská Štiavnica; Černák Ondrej, Brezno.

C. Králik Jaroslav, Zvolen; Koller Ján, Lučenec;
Obrcián Jaroslav, P, Banská Bystrica; Paulík Ján,
Zvolen.

Východoslovenský kraj

C. Grich Vladimír, P, Prešov; Marton Dezider, P,
Spišská Nová Ves.

Na závěr uvádíme pořadí nejlepších sedmnácti
řešitelů III. kola kategorie A, kteří se stali *vítězi*
XI. ročníku Matematické olympiády; prvních osm
z nich se účastnilo za ČSSR IV. mezinárodní mate-

matické olympiády, kterou jsme tentokrát uspořádali v naší zemi (viz kapitolu IV na str. 125). Vítězové III. kola byli odměněni velmi hodnotnými věcnými cenami a poukázkami na odbornou studijní literaturu (obojí podle osobního přání); každý z nich dostal na památku umělecky provedený čestný diplom, který podepsal ministr školství a kultury a předseda ÚV MŮ.

POŘADÍ VÍTEŽŮ XI. ROČNÍKU MŮ

(Společná místa uvádíme v abecedním pořádku)

1. *Jaroslav Ježek*, Křesomyslova 2, Praha 4.
2. *Josef Daneš*, nám. Lidových milicí 19, Praha 9 (2. tř. SVVŠ).
3. *Pavol Voda*, Palisády 20/b, Bratislava.
4. až 6:
Svatopluk Fučík, Tylovo nábr., Hradec Králové.
Peter Hatala, Novohradská 2, Bratislava.
Jan Novotný, Olomouc-Staré Hodolany.
7. *Marián Mešina*, Prievidza.
8. *Karel Veselý*, Žukovova 33, Praha 6.
9. *Jiří Čmelík*, Liberec.
10. až 12:
Jiří Durdil, U libeňského gymnasia 3, Praha 8.
Jaromír Kolouch, SPŠS, Gottwaldov.
Lubor Košťál, Křenova 36, Brno.
13. až 14:
Ivan Bartůněk, Pražačka 1700, Praha 3.
Josef Podbrdský, Koněvova 47, Brno.
15. až 17.:
Václav Černý, Moravské Budějovice.
Ivan Netuka, Tylovo nábr., Hradec Králové.
Petr Starý, Ústí nad Labem.

5. Pořadatelé soutěže v čele s ÚV MO se snažili zvyšovat úroveň žáků a pomáhat jim v jejich růstu dalšími formami působení. Pobočky JČMF spolu s krajskými výbory MO pořádaly pro žáky (především pro kategorie A a B) přípravné přednášky zaměřené na určité tematické celky, především na tyto partie v rámci školské matematiky: teorie čísel, vyšetřování funkcí a jejich grafů, konstruktivní a početní úlohy z planimetrie a stereometrie. Přednášky byly přes různé nesnáze (jako je např. značná vzdálenost žákova bydliště od místa přednášky, pozdní odpolední doba konání přednášky aj.) hojně navštěvovány. Zkušenost ukazuje, že je bude třeba zaměřit především na žáky z kategorií A a B. Některé pobočky uspořádaly až 8 těchto přednášek (dvou až tříhodinových) v průběhu roku, přičemž se přednášející zaměřovali na aktivní řešení matematických úloh samými posluchači.

Koncem roku 1961 začala vycházet knihovnička „Škola mladých matematiků“, kterou pro olympioniky vydává nakladatelství Mladá Fronta v Praze. Edici řídí redakční komise, jejímiž členy jsou tito pracovníci ÚV MO: akademik *Josef Novák* jako předseda, dr. *M. Fiedler*, doc. *Jan Vyšín* a *Rud. Zelinka*. Počítá se s tím, že tu ročně vyjdou asi 3 brožurky kapesního formátu, každá do rozsahu 64 stran (cena 2–3 Kčs). Distribuci zatím provádějí jednatele poboček JČMF. Napříště bude část nákladu brožurek zakupovat ministerstvo školství a kultury a v několika exemplářích je přidělí žakovské knihovně každé střední školy; zbytek nákladu půjde na volný trh.

V únoru 1962 uspořádal ústřední výbor MO za podpory ministerstva školství a kultury a Jednoty

čs. matematiků a fyziků pro 28 nejlepších žáků kategorie A týdenní instruktáž v Klánovicích, na níž přednášeli pražští pracovníci. Předpokládáme, že podobné instruktáže spojené s rekreací budeme pořádát vždy koncem každého školního roku a na počátku hlavních prázdnin. Instruktáže by trvaly asi 3 týdny a byla by tu zpracována školská matematika a fyzika. Počítá se s účastí asi 30 žáků v každém soustředění; přitom by ÚVMO uspořádal ročně dvě taková soustředění a KVMO podle svých možností soustředění další; žáci by byli vybíráni především z úspěšných řešitelů II. kola kategorie B. Podobné instruktáže už po dva roky konají některé slovenské pobočky JČMF a KVMO; v Severomoravském kraji namísto věcných cen byla žákům odměnou takováto odborně a tělovýchovně zaměřená rekreace.

Ústřední výbor Matematické olympiády hledá další cesty, jak vzbuzovat u naší mládeže lásku k matematice. Uvítá na tomto poli všechny vhodné podněty. Nadáním žákům musíme poskytovat soustavné, spíše individuální než hromadné konzultace; ty by se konaly pravidelně na základě pevně vypracovaného individuálního studijního plánu zaměřeného na hlubší studium školské matematiky a na řešení úloh. Sama povaha matematiky si vyžaduje samostatné a individuální studium, k němuž žáka třeba soustavně vést a nabádat. Účelem konzultační péče o žáka je vedle sestavení jeho studijního plánu a poskytnutí odborné pomoci především záměrná výchova k tomu, aby si žák vypěstoval schopnosti a návyky pro samostatné studium, jež je základem pro úspěšnou práci v matematice vůbec. S tím souvisí i opatrování studijní litera-

tury pro žáky. Bude třeba nejen při pobočkách JČMF, ale i na každé střední škole zřídit matematicko-fyzikální oddělení učebnic (i starších typů), příruček a jiných pomůcek, které by byly k dispozici žákům zabývajícím se o matematiku a fyziku. Tato opatření budou pojata do organizačního rámce ministerstva školství a kultury a jeho orgánů. Všichni organizátoři Matematické olympiády a učitelé matematiky jistě pomohou při hledání dalších forem, jak v budoucnu zlepšit výchovu našich mladých matematiků. V tomto smyslu je třeba tyto zásady uplatňovat a prosazovat i na školských odborech národních výborů.

II. Texty přípravných úloh I. kola

1. Kategorie A

1. Sestrojte trojúhelník ABC , jsou-li dány: velikost c strany AB , velikost t_c těžnice příslušné k vrcholu C a velikost α úhlu $\sphericalangle CAB$.

Vyjádřete podmínku řešitelnosti pomocí daných čísel c , t_c , α a rozhodněte o počtu řešení.

2. Zistite počet prirodzených čísel menších než 1000, ktoré sú nesúdeliteľné s číslom 1000.

3. Jsou dány rovnice

$$x^2 + px + 1 = 0,$$

$$x^2 + x + p = 0,$$

kde p je dané reálné číslo. Určete všechna čísla p taková, aby obě rovnice měly společný reálný kořen.

4. Daná je funkcia

$$y = ax^2 + bx + c,$$

pričom a , b , c sú dané reálne čísla a platí $a \neq 0$.

Dokážte:

a) Ak je $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$, potom pre všetky reálne čísla x je $y > 0$.

b) Ak pre všetky reálne čísla x je $y > 0$, potom je $b^2 - 4ac < 0$, $a > 0$.

5. Řešte rovnici

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x.$$

6. Je dána koule κ o středu S a poloměru R .

Uvnitř koule v bodech hlavní kružnice se této koule dotýká 8 shodných menších koulí tak, že každá z nich se dotýká dvou sousedních. Dále uvnitř koule κ leží koule κ_1 o středu S_1 , která se dotýká koule κ i osmi menších koulí.

Určete poloměr koule κ_1 .

2. Kategorie B

1. V rovine je daná úsečka AB . Uvažujme o menlivom pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB a o kružnici k jemu zvonku vpísanej k odvesne BC . Zistite, čo tvorí množina stredov všetkých kružníc k .

2. Dokažte, že nerovnosti

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx &\geq 0, \\x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx &\geq 0\end{aligned}$$

jsou splněny pro každou trojici reálných čísel x, y, z .

Potom vyšetřete všechny trojice reálných čísel x, y, z , pro něž v prvním nebo ve druhém vztahu platí rovnost.

3. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}|x - y| + 2|y| &= 2, \\px + 2y &= 2p,\end{aligned}$$

kde p je dané reálné číslo.

4. Druhá mocnina párneho čísla zapísaná v desiatkovej sústave končí vždy jednou z čífer 0, 4, 6; dokažte to.

Na základe toho potom zistite, ktorou cifrou končí štvrtá mocnina párneho čísla.*)

*) Slovenské „párny“ je česky „sudý“.

5. Je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a na ní bod A ; ve vzdálenosti d od bodu A je vedena sečna p kružnice k , přičemž je $p \perp SA$.

Sestrojte čtverec $ABCD$, jehož vrchol B leží na přímkce p a vrchol D na kružnici k .

Proveďte diskusi úlohy vzhledem k číslům r, d . (Pokyn: Použijte otočení o středu A .)

6. Do rotačního kužele je vepsána krychle, jejíž jedna stěna leží v rovině podstavy kužele a zbývající 4 vrcholy leží na jeho plášti. Délka hrany krychle je rovna třetině výšky kužele.

Vypočtete velikost úhlu, který svírá osa kužele se stranou kužele.

3. Kategorie C

1. Do kruhové úseče o poloměru r a středovém úhlu 120° jsme vepsali kružnici tak, že se tětivy omezující úseč dotýká právě v jejím středu.

Dokažte, že délka této kružnice je rovna $\frac{3}{4}$ délky oblouku, který omezuje danou úseč.

2. Narysujte trojúhelník SMN , keď $SM = 9$ cm, $SN = 4$ cm, $MN = 10$ cm.

Zostrojte kosoštvorec $ABCD$ so stredom S tak, aby platilo:

- (1) Uhol $\sphericalangle DAB$ kosoštvorca má veľkosť $67\frac{1}{2}^\circ$.
- (2) Priamka AB prechádza bodom M .
- (3) Priamka CD prechádza bodom N .

Dokažte, že úloha má dva vyhovujúce výsledky.

(Pokyn: Užijte souměrnosti o středu S .)

3. Řešte soustavu rovnic

$$\frac{b-z}{x} = \frac{b}{c}, \quad \frac{c-x}{y} = \frac{c}{a}, \quad \frac{a-y}{z} = \frac{a}{b},$$

kde x, y, z jsou neznámé a a, b, c jsou daná čísla.

Rozhodněte o řešitelnosti soustavy.

4. Sestrojte graf funkce

$$y = \frac{1}{2} (|x+1| - |x-1|).$$

(Pokyn: Rozeznávejte možnosti: $x \leq -1$; $-1 \leq x \leq 1$; $x \geq 1$.)

5. Keď p je celé číslo, potom je číslo $p^4 - p^2 - 24$ dělitelné číslem 12; dokažte.

6. Je dána kružnice k a na ní dva různé body A, B . Uvažujme trojúhelník ABX , kde X je bod kružnice k . Na prodloužení úsečky AX za bod X sestrojme bod Y tak, aby platilo $XY = BX$.

Vyšetřte geometrické místo bodů Y , když bod X probíhá kružnicí k (s výjimkou bodů A, B).

4. Kategorie D

1. Národní podnik měl zvýšit výrobu o 40 %. Vhodnou organizací práce se mu podařilo zvýšit výrobu o 50 %.

Na kolik procent tým splnil plán?

2. Zistite všetky delitele (prirodzené čísla) čísla 270. Uveďte postup, ako ste úlohu riešili.

3. Narýsujte dvě různoběžky p, q o průsečíku M tak, aby svíraly úhel 60° . Na přímce p zvolte bod P tak, aby $MP = 7,4$ cm.

Kolem bodu P opište kružnici k takovou, aby na přímce q vytínala tětivu délky 7,2 cm.

Rozhodněte, zda bod M padne na kružnici k nebo leží vně nebo uvnitř kružnice k . Odůvodněte.

4. Je dán výraz

$$V = \left(\frac{a+b}{2a-2b} - \frac{a-b}{2a+2b} + \frac{2b^2}{a^2-b^2} \right) : \frac{4b}{(a^2+b^2)(a-b)}.$$

a) Výraz V zjednodušte a udejte, pro která čísla a, b nemá smysl.

b) Vypočítejte všechny dvojice přirozených čísel a, b , pro která je $V = 10$.

5. Zostrojte rovnoramenný lichobežník $ABCD$ s větší základňou $AB = 8,3$ cm, výškou $v = 3,5$ cm, a to taký, že z obidvoch bodů C, D úsečku AB vidno pod pravými úhly.

6. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby platilo: $AB = 4,9$ cm, $AC = 7$ cm, výška příslušná ke straně AB je $v_c = 5$ cm.

Výpočtem rozhodněte, zda pata P výšky v_c vedené ke straně AB leží uvnitř této strany či nikoli. (Třeba rozlišovat dvě možnosti: úhel $\sphericalangle CAB$ je ostrý nebo tupý.)

III. Texty a řešení úloh ze soutěže

1. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE A

1. Jsou dány dvě kolmé roviny ϱ_1, ϱ_2 o průsečnici O_1O_2 . V rovině ϱ_1 je sestrojena polokružnice k_1 se středem O_1 a krajním bodem O_2 . V rovině ϱ_2 je sestrojena polokružnice k_2 se středem O_2 a krajním bodem O_1 .

Po polokružnici k_1 se pohybuje bod X_1 a po polokružnici k_2 se pohybuje bod X_2 tak, že pro vzdálenosti platí vztah $O_2X_1 = O_1X_2$.

Vyšetřte geometrické místo středů úseček X_1X_2 .

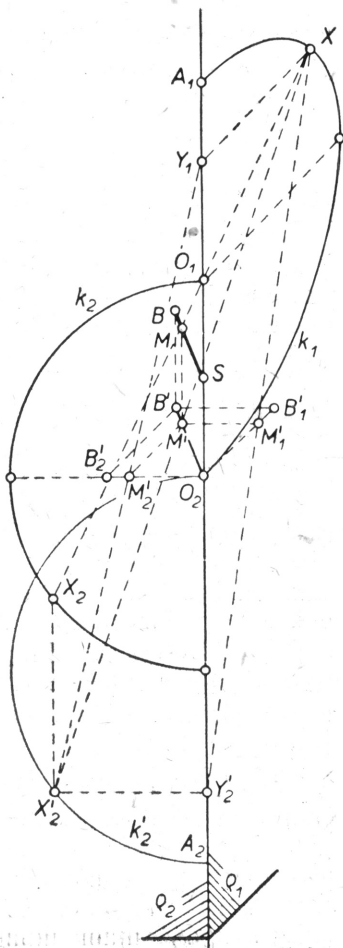
Řešení. Je zcela přirozené zkoumat nejdříve jednodušší případ vzájemné polohy polokružnic k_1, k_2 , než je uvedeno v textu úlohy, a z něho pak odvodit řešení dané úlohy. Takový jednodušší případ je situace, kdy obě polokružnice náleží téže kulové ploše nebo kdy mají společný krajní bod. Vyšetřujme např. druhou situaci (viz obr. 1).

a) Posuneme polokružnici k_2 o vektor $\vec{O_1O_2}$ do polohy k'_2 ; polokružnice k_1, k'_2 mají pak společný krajní bod O_2 , jejich zbývající krajní body označíme A_1, A_2 podle obr. 1. Při posunutí $\vec{O_1O_2}$ přejde proměnný bod X_2 polokružnice k_2 v bod X'_2 polokružnice k'_2 a podle podmínky z textu úlohy je $O_2X_1 = O_2X'_2$. Označíme dále Y_1, Y'_2 pravoúhlé průměty bodů X_1, X'_2 na přímku O_1O_2 ; názor ukazuje, že je $O_2Y_1 = O_2Y'_2$.

Skutečně z věty Ssuply-
ne vztah $\triangle O_2 X_1 Y_1 \cong$
 $\cong \triangle O_2 X'_2 Y'_2$ a z něho
 $O_2 Y_1 = O_2 Y'_2$.

Označme M' střed
úsečky $X_1 X'_2$ (která
může být též nulová,
je-li $X_1 \equiv X'_2 \equiv O_2$),
 M'_1 jeho pravouhlý prů-
mět do roviny ϱ_1 , M'_2
jeho pravouhlý průmět
do roviny ϱ_2 . Bod M'_1
je zřejmě středem úseč-
ky $X_1 Y'_2$; je tedy (pokud
je $M'_1 \neq O_2$) $M'_1 O_2 \perp$
 $O_1 O_2$, $M'_1 O_2 = \frac{1}{2} X_1 Y_1$.
Všechny body M'_1 ná-
leží tedy jistě úsečce
 $O_2 B'_1$, která leží v ro-
vině ϱ_1 , je kolmá k
přímce $O_1 O_2$ a má dél-
ku $\frac{1}{2} r$ ($r = O_1 O_2$ je
společný poloměr obou
polokružnic k_1, k_2).
Snadno se dokáže, že
každý bod úsečky $O_2 B'_1$
je jedním z bodů M'_1 .

Geometrické místo
bodů M'_2 je obdobně
jistá úsečka $O_2 B'_2$, která



Obr. 1

leží v rovině ϱ_2 , je kolmá k přímce O_1O_2 a má délku $\frac{1}{2}r$. Geometrické místo bodů M' je jistá úsečka O_2B' , která leží v jedné rovině souměrnosti rovin ϱ_1, ϱ_2 , je kolmá k přímce O_1O_2 a má délku $\frac{1}{2}r\sqrt{2}$.

b) Nyní snadno odvodíme geometrické místo středů M úseček X_1X_2 . V trojúhelníku $X_1X_2X'_2$ (který vznikne vždy, když je $X_1 \neq A_1, O_2$) je úsečka MM' střední příčkou. Proto platí pro posunutí (vektory) $\vec{M'M} = \frac{1}{2}\vec{X'_2X_2} = \frac{1}{2}\vec{O_2O_1}$. Geometrickým místem bodů M je tedy úsečka SB , v níž převede posunutí $\frac{1}{2}\vec{O_2O_1}$ úsečku O_2B' ; úsečka SB leží v jedné rovině souměrnosti rovin ϱ_1, ϱ_2 , obsahuje střed S úsečky O_1O_2 , je kolmá k přímce O_1O_2 a má délku $\frac{1}{2}r\sqrt{2}$.

2. Dané sú veľkosti a, b susedných strán rovnobežníka a veľkosť ω uhla zovretého jeho uhlopriečkami.

Zostrojte tento rovnobežník a zistite podmienky riešiteľnosti vzhľadom na dané čísla a, b, ω .

Řešení (obr. 2). Buď $ABCD$ hledaný rovnoběžník o středu S , ve kterém je $a \geq b$, kde $a = AB, b = AD$.

[1] Pro $a = b$ je $AS \perp BS$, tj. nutně $\omega = 90^\circ$ (jinak úloha nemá řešení); rovnoběžník je tedy v tomto případě rovnostranný (tj. kosočtverec anebo čtverec). Úloha pak má nekonečně mnoho řešení; při konstrukci zvolíme polohu úsečky AB délky a , nad ní jako průměrem sestrojíme Thaletovu polokružnici k , na ní zvolíme bod S (je $B \neq S \neq A$) a určíme po řadě obrazy C, D bodů A, B v souměrnosti o středu S . Potom $ABCD$ je hledaný rovnoběžník.

[2] V dalším nechť je $a > b$. Trojúhelníky SAD, SAB se shodují ve dvou dvojicích stran (SA je jim

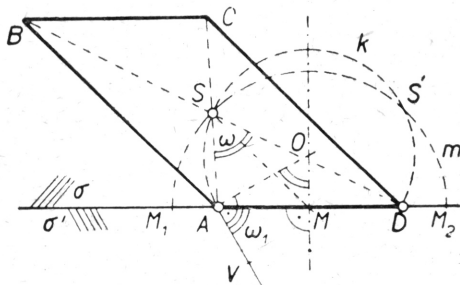
společná, dále je $SD = SB$); protože však $AD < AB$ (neboli $b < a$), vyplývá z toho $\sphericalangle ASD < \sphericalangle ASB$ (známá poučka). Z této nerovnosti vyplývá $\sphericalangle ASD < 180^\circ - \sphericalangle ASD$, neboli

$$\sphericalangle ASD < 90^\circ.$$

Zvolme označení tak, aby bylo $\sphericalangle ASD = \omega$; pak je

$$\sphericalangle ASD = \omega < 90^\circ. \quad (1)$$

Sestrojíme tedy trojúhelník ASD z těchto prvků: z délky strany $AD = b$, z délky těžnice $MS = \frac{1}{2}a$, kde M je střed strany AD , a z velikosti ostrého úhlu $\sphericalangle ASD = \omega$; potom snadno trojúhelník ASD doplníme s jediným výsledkem na rovnoběžník $ABCD$, čímž bude úloha rozřešena.



Obr. 2

Konstrukce (obr. 2). Zvolme polohu úsečky AD velikosti b ; dále zvolme polorovinu σ vyřatou přímkou AD (v ní bude ležet střed S hledaného rovnoběžníka $ABCD$ a tím i tento rovnoběžník). Provedeme v σ známou konstrukci geometrického místa bodů,

z nichž je úsečku AD vidět pod daným úhlem ω . Je to větší oblouk $k \equiv \widehat{AD}$ kružnice o středu O , přičemž bod O leží uvnitř poloroviny σ , neboť je $\omega < 90^\circ$ (pomocný úhel $\sphericalangle DAV \equiv \omega_1 = \omega$ leží v σ' a je $AV \perp AO$); přitom MO je osa úsečky AD a M střed této úsečky. Body A, D k tomuto geometrickému místu nepatří.

Dále sestrojíme v polorovině σ oblouk $m \equiv \widehat{M_1M_2}$ kružnice o středu M a o poloměru $\frac{1}{2}a$ (neboť má být $2 \cdot MS = AB$).

Je-li S společný bod oblouků k, m (nutně leží uvnitř poloroviny σ), je úloha rozřešena.

Důkaz správnosti konstrukce vyplývá z předchozího.

Diskuse. Úloha je řešitelná právě tehdy, když polokružnice m má s obloukem k společný aspoň jeden bod ležící mimo přímku AD . Je-li $a > b$, nemají obě křivky žádný společný bod na přímce AD ; v tomto případě stačí hledat podmínku, aby obě příslušné kružnice měly společný aspoň jeden bod. Nechť pro takový společný bod S platí $90^\circ = \sphericalangle M_1SM_2 > \sphericalangle ASD$; úhel $\sphericalangle ASD$ je tedy ostrý, tj. bod S náleží většímu oblouku nad tětivou AD a tím je oblouk k .

Středy O, M obou kružnic mají vzdálenost $OM = \frac{b}{2} \cotg \omega$ (p'lyne z $\triangle AMO$) a jejich poloměry jsou $\frac{a}{2}, \frac{b}{2\sin \omega}$. Podmínka pro existenci aspoň jednoho společného bodu zní

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2\sin \omega} \geq \frac{1}{2}b \cotg \omega \geq \left| \frac{a}{2} - \frac{b}{2\sin \omega} \right|,$$

po úpravě

$$a \sin \omega + b \geq b \cos \omega \geq |a \sin \omega - b|.$$

Protože je $b \geq b \cos \omega$, je levá nerovnost splněna vždy. Prává nerovnost se dá nahradit dvěma nerovnostmi

$$\begin{aligned} b \cos \omega + b &\geq a \sin \omega, \\ a \sin \omega &\geq b - b \cos \omega \end{aligned}$$

neboli

$$2b \cos^2 \frac{\omega}{2} \geq 2a \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2},$$

$$2a \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2} \geq 2b \sin^2 \frac{\omega}{2},$$

po úpravě

$$b \cotg \frac{\omega}{2} \geq a, \quad a \cotg \frac{\omega}{2} \geq b. \quad (*)$$

Protože je $\frac{\omega}{2} \leq \frac{R}{2}$, je $\cotg \frac{\omega}{2} \geq 1$, tj. $a \cotg \frac{\omega}{2} \geq a > b$; druhá nerovnost (*) je tedy splněna vždy a zbývá jen podmínka

$$b \cotg \frac{\omega}{2} \geq a.$$

Závěr. V případě $a = b$, $\omega \neq 90^\circ$ je úloha neřešitelná; v případě $a = b$, $\omega = 90^\circ$ má nekonečně mnoho řešení. V případě $a > b$, $\omega \geq 90^\circ$ je úloha neřešitelná; v případě $a > b$, $\omega < 90^\circ$ má konečný počet řešení, a to jediné nebo dvě.

3. Je dána funkce

$$y = \frac{px}{x^2 + p^2 + 1}, \quad (1)$$

kde p je reálný parametr. Dokažte, že tato funkce nabývá jen takových hodnot y , pro něž platí $|y| < \frac{1}{2}$.

Zvolte parametr p tak, aby funkce měla největší hodnotu $\frac{1}{4}$; v tomto případě vyšetřte její průběh a načrtněte její graf.

Řešení. Pro všechna reálná x a p je $x^2 + p^2 + 1 > 0$, takže pro každé p ke zvolenému x obdržíme jisté reálné číslo y pomocí (1). Při dalším vyšetřování se omezíme na případ, že je $p \neq 0$. V případě $p = 0$ totiž je funkce $y = 0$, jejímž grafem je reálná osa x pravoúhlých souřadnic; druhá otázka pro tento případ nemá smysl.

Graf dané funkce (1) je souměrný podle počátku $O \equiv [0, 0]$ pravoúhlých souřadnic, jak ihned dokážeme: Necht' je bod $A = [x \geq 0, y]$ bodem, který náleží grafu funkce (1); potom bod $A' = [x' = -x, y' = -y]$ je též bodem tohoto grafu, neboť k danému $x \geq 0$ dostaneme z (1) hodnotu y , k danému $x' = -x$

dostaneme z (1) hodnotu $y' = \frac{-px}{x^2 + p^2 + 1} = -y$.

Přitom body A, A' jsou souměrně sdružené podle bodu O .

Danou funkci (1) tedy stačí vyšetřovat jen pro $x \geq 0$, kdy pro $p > 0$ je pak stále $y \geq 0$, pro $p < 0$ je stále $y \leq 0$; budeme tedy předpokládat, že je $x \geq 0$.

[1] Nyní dokážeme, že je $|y| < \frac{1}{2}$. Důkaz: Máme dokázat, že platí

$$\left| \frac{px}{x^2 + p^2 + 1} \right| < \frac{1}{2}$$

neboli

$$\frac{2|p|x}{x^2 + p^2 + 1} < 1,$$

kde $x^2 + p^2 + 1 > 0$. Tento vztah je proto ekvivalentní se vztahem

$$2|p|x < x^2 + p^2 + 1$$

neboli

$$0 < (x - |p|)^2 + 1.$$

Avšak na pravé straně této nerovnosti je součet nezáporného a kladného čísla, takže nerovnost platí pro všechna p a všechna x ; obrácením postupu dojdeme k (1). Tím je důkaz proveden.

[2] Máme zvolit p tak, aby pro všechna x platilo $y \leq \frac{1}{4}$ neboli

$$\frac{px}{x^2 + p^2 + 1} \leq \frac{1}{4}. \quad (2)$$

Protože je jmenovatel kladný, dostaneme ekvivalentními úpravami postupně

$$\begin{aligned} 4px &\leq x^2 + p^2 + 1, \\ 0 &\leq (x - 2p)^2 + 1 - 3p^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Tato nerovnost je splněna při libovolném x právě tehdy, jestliže platí $1 - 3p^2 \geq 0$ neboli $|p| \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Přitom ve (3) nastane rovnost právě tehdy, je-li

$$x - 2p = 0, \quad 1 - 3p^2 = 0$$

neboli

$$p = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

kde současně platí znaménka plus nebo minus.

Pro $p = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ rovnice (1) zní $y = \frac{\pm \sqrt{3}x}{3x^2 + 4}$.

Vyšetřme jen průběh a graf první funkce. Graf funkce

$$y = \frac{-\sqrt{3}x}{3x^2 + 4}$$

dostaneme jako obraz grafu funkce

$$y = \frac{\sqrt{3}x}{3x^2 + 4} \quad (4)$$

v souměrnosti podle osy x .

Nyní dokážeme, že pro

$$0 \leq x \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (4')$$

je funkce (4) rostoucí a že pro

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \leq x \quad (4'')$$

je funkce (4) klesající.

Důkaz. Označme y_1, y_2 hodnoty funkce (4), které přísluší po řadě k hodnotám x_1, x_2 , pro něž platí

$$0 \leq x_1 < x_2 \leq \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad (5)$$

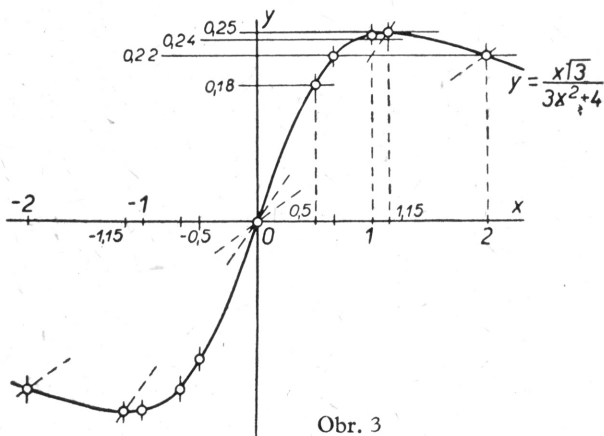
Pak je

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= \frac{x_2 \sqrt{3}}{3x_2^2 + 4} - \frac{x_1 \sqrt{3}}{3x_1^2 + 4} = \\ &= \frac{(x_2 - x_1) \sqrt{3}}{(3x_1^2 + 4)(3x_2^2 + 4)} \cdot (4 - 3x_1x_2). \end{aligned} \quad (6)$$

První činitel (zlomek) výrazu (6) je kladný. Z (5) plyne $x_1 < \frac{2}{\sqrt{3}}$, $x_2 \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ a tedy $x_1 x_2 < \frac{4}{3}$ neboli $4 - 3x_1 x_2 > 0$; je tedy i druhý činitel výrazu (6) kladný a tím $y_2 - y_1 > 0$ neboli $y_2 > y_1$. Stejně se dokáže, že pro ta x , která splňují nerovnost (4''), je funkce (4) klesající. Tím je důkaz proveden. Graf funkce (4) sestrojíme užitím této tabulky:

x	0	0,5	1	$\frac{2}{3}$	2
y	0	$\frac{2\sqrt{3}}{19} \doteq 0,182$	$\frac{\sqrt{3}}{7} \doteq 0,247$	$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{\sqrt{3}}{8} \doteq 0,216$

Dále užijeme středové souměrnosti grafu vzhledem k bodu $O \equiv [0; 0]$; viz obr. 3.



Obr. 3

Výsledek. Existují právě dvě funkce:

$$y = \frac{\sqrt{3}x}{3x^2 + 4}, \quad y = -\frac{\sqrt{3}x}{3x^2 + 4},$$

které splňují druhý požadavek úlohy. První z funkcí nabývá maxima $\frac{1}{4}$ pro $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$, druhá pro $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$; ostatní hodnoty těchto funkcí jsou menší než $\frac{1}{4}$.

Jiné myšlenky při řešení této úlohy užil jeden z žáků: Nerovnost $\frac{px}{x^2 + p^2 + 1} \leq \frac{1}{4}$ upravil na tvar

$$x^2 - 4px + (p^2 + 1) \geq 0 \quad (*)$$

a rozložil trojčlen na levé straně v součin kořenových činitelů:

$$[x - (2p + \sqrt{3p^2 - 1})][x - (2p - \sqrt{3p^2 - 1})] \geq 0. \quad (**)$$

Z nerovnosti (**) vyplývá, že buď oba činitelé jsou nezáporní, nebo oba nekladní. Pro každé x musí pak platit aspoň jeden ze vztahů

$$x \geq 2p + \sqrt{3p^2 - 1}, \quad x \leq 2p - \sqrt{3p^2 - 1}.$$

Pro $x = 2p$ plyne z prvního nebo druhého vztahu $\sqrt{3p^2 - 1} = 0$ neboli $p = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Tento částečný výsledek je však nesprávně odvozen, neboť např. pro $p = \frac{1}{2}$ je splněna nerovnost (*) pro všechna x ; platí totiž

$$x^2 - 2x + \frac{1}{4} + 1 = (x - 1)^2 + \frac{1}{4} > 0.$$

Čím je tato chyba spôsobena? Řešitel neoprávněně předpokládal, že trojčlen na levé straně vztahu (*) lze rozložit v reálné kořenové činitele, jak ukazuje vztah (**); to však není pravda např. pro $p = \frac{1}{2}$, kdy je $3p^2 - 1 = -\frac{1}{4} < 0$. Proto také pro (2) nemohlo vyjít číslo $p = \frac{1}{2}$, ačkoli pro $p = \frac{1}{2}$ je také splněna nerovnost (*) pro všechna x .

4. Ak sú α, β, γ veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka, potom platí

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geq \frac{3}{4}; \quad (1)$$

dokážte.

Nájdite všetky trojuholníky, pre ktoré v predchádzajúcom vzťahu platí rovnosť.

Riešenie. O uvažovaných uhloch platí

$$\gamma = 2R - (\alpha + \beta),$$

a teda

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= -\cos(\alpha + \beta) = \\ &= -(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta). \end{aligned} \quad (2)$$

Preto je ďalej

$$\begin{aligned} \cos^2 \gamma &= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \\ &\quad - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned} \quad (3)$$

Zo známeho vzorca vyplývajú vzťahy

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha, \sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta.$$

Po dosadení do (3) dostaneme

$$\begin{aligned} \cos^2 \gamma &= 1 + 2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \\ &\quad - 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta, \end{aligned}$$

čiže

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= \\ &= 1 + 2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned} \quad (4)$$

Posledné dva členy pravej strany vzťahu (4) možno však upraviť takto:

$$\begin{aligned} 2\cos^2\alpha \cos^2\beta - 2\cos\alpha \cos\beta \sin\alpha \sin\beta &= \\ &= 2\cos\alpha \cos\beta (\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta) = \\ &= 2\cos\alpha \cos\beta \cos(\alpha + \beta) = \\ &= -2\cos\alpha \cos\beta \cos[2R - (\alpha + \beta)] = \\ &= -2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma. \end{aligned}$$

Po dosadení tohto výsledku do vzťahu (4) dostávame $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$, (5) čo platí pre každý trojuholník.

Pre tupouhlý alebo pravoúhlý trojuholník sú dve z čísel $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ kladné a tretie je nekladné. Potom je však aj výraz $2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$ číslo nekladné, a preto platí

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geq 1. \quad (5')$$

Uvažujme ďalej len o ostrouhlom trojuholníku. Označenie trojuholníka možno zvoliť tak, aby platilo

$$90^\circ > \alpha \geq \beta \geq \gamma > 0^\circ. \quad (6)$$

V tomto prípade je každé z čísel $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ kladné, ale menšie než jedna; špeciálne je

$$0 < \cos\gamma < 1. \quad (6')$$

Všimnime si vzťahu

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2\cos\alpha \cos\beta.$$

Pritom je $\cos(\alpha + \beta) = -\cos\gamma$ [viď (2)], $90^\circ > \alpha - \beta \geq 0^\circ$, a teda je $0 < \cos(\alpha - \beta) \leq 1$ (kde rovnosť platí práve pre $\alpha = \beta$). Platí teda

$$2\cos\alpha \cos\beta \leq 1 - \cos\gamma,$$

pričom rovnosť platí práve pre $\alpha = \beta$. Vynásobme

obidve strany poslednej nerovnosti číslom $-\cos\gamma$, kde $-1 < -\cos\gamma < 0$ [podľa (6')]. Dostaneme

$$-2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \geq \cos^2\gamma - \cos\gamma.$$

Použitím tohto výsledku vo vzťahu (5) dostaneme

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geq 1 + \cos^2\gamma - \cos\gamma$$

čiže

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geq (\cos\gamma - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}. \quad (7)$$

Pre ostrouhlý trojuholník je teda číslo $y = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$ väčšie než $\frac{3}{4}$; iba vtedy, keď platí $\cos\gamma - \frac{1}{2} = 0$, je $y = \frac{3}{4}$. To však nastane jedine pre $\gamma = 60^\circ$.

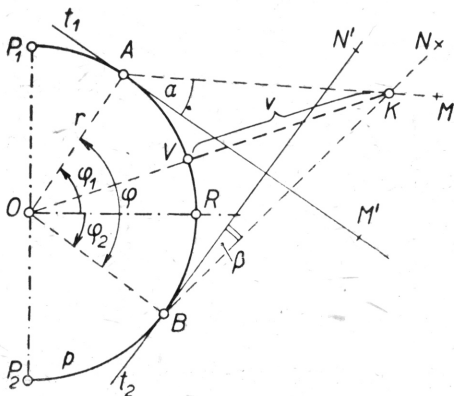
Lahko sa zistí, že vzťah (5) pre $\gamma = 60^\circ$ platí jedine pre $\alpha = \beta = \gamma$.

Tým je platnosť vzťahu (1) dokázaná. Rovnosť v ňom nastane jedine pre rovnostranný trojuholník.

5. Dvë místa A, B leží na témž zeměpisném poledníku p ; místo A má severní zeměpisnou šířku φ_1 a místo B má jižní zeměpisnou šířku φ_2 . Kosmická loď při přeletu nad poledníkem p byla z místa A pozorována na jižní straně ve výšce α stupňů nad obzorem; v témže okamžiku byla z místa B pozorována na severní straně ve výšce β stupňů nad obzorem. Jak daleko byla loď od povrchu země?

Řešení (obr. 4). Buďte P_1, P_2 severní a jižní pól, O střed země, $p \equiv \widehat{P_1P_2}$ uvažovaný zemský poledník míst A, B , t_1, t_2 po řadě jeho tečny v bodech A, B a $\varphi_1 \equiv \sphericalangle AOR$, $\varphi_2 \equiv \sphericalangle BOR$ zeměpisné šířky míst A, B , přičemž R je společný bod zemského rovníku a

poledníku p ; platí tedy pro dutý úhel $\sphericalangle AOB$ vztah

$$\varphi = \sphericalangle AOB = \varphi_1 + \varphi_2. \quad (1)$$


Obr. 4

V rovině poledníku p leží výškové úhly $\alpha = \sphericalangle M'AM$, $\beta = \sphericalangle N'BN$, pod nimiž je po řadě z bodů A, B vidět kosmickou loď K ve chvíli, kdy se nachází nad poledníkem p . Platí

$$\sphericalangle OAK = 90^\circ + \alpha, \quad \sphericalangle OBK = 90^\circ + \beta, \quad (2)$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

(kde $\alpha, \beta, \varphi_1, \varphi_2$ jsou vesměs ostré úhly), takže jsou všechny tři uvedené úhly duté. Dále je

$$\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi; \quad (3)$$

proto je [viz (2), (3)]:

$$\begin{aligned} \sphericalangle BAK &= \sphericalangle OAK - \sphericalangle OAB = \alpha + \frac{1}{2}\varphi, \\ \sphericalangle ABK &= \sphericalangle OBK - \sphericalangle OBA = \beta + \frac{1}{2}\varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

Má-li nastat popsaná situace, musí existovat průsečík K polopřímek AM , BN v polorovině opačné k polorovině ABO ; podle Euklidova axiómu to nutně vyžaduje, aby součet obou úhlů (4) byl menší než 180° neboli

$$0 < \alpha + \beta + \varphi < 180^\circ. \quad (5)$$

Pak nutně čtyřúhelník $BOAK$ je konvexní, neboť jeho úhel $\sphericalangle K = 180^\circ - (\alpha + \beta + \varphi)$ je dutý a zbývající jeho tři úhly jsou úhly (2). Dále v něm známe strany $OA = OB = r$ (zemský poloměr).

Hledáme výšku lodi (nad povrchem zemským — viz obr. 4). Označíme

$\sphericalangle AOK = \omega_1$, $\sphericalangle BOK = \omega_2$,
přičemž

$$\omega_1 + \omega_2 = \varphi. \quad (6)$$

Platí

$$\frac{OK}{OA} = \frac{OK}{OB} = \frac{r + v}{r};$$

pomocí sinové věty dostaneme postupně

$$\frac{r + v}{r} = \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{\cos(\alpha + \omega_1)} = \frac{\sin(90^\circ + \beta)}{\cos(\beta + \omega_2)}$$

neboli

$$\frac{r + v}{r} = \frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha + \omega_1)}, \quad \frac{r + v}{r} = \frac{\cos \beta}{\cos(\beta + \omega_2)}$$

neboli

$$\cos \alpha \cos \omega_1 - \sin \alpha \sin \omega_1 = \frac{r \cos \alpha}{r + v}, \quad (7)$$

$$\cos \beta \cos \omega_2 - \sin \beta \sin \omega_2 = \frac{r \cos \beta}{r + v}. \quad (8)$$

Z rovnosti (6) plyne $\omega_2 = \varphi - \omega_1$ a po dosazení do levé strany (8) máme

$$\begin{aligned} & \cos \beta \cos \varphi \cos \omega_1 + \cos \beta \sin \varphi \sin \omega_1 - \\ & - \sin \beta \sin \varphi \cos \omega_1 + \sin \beta \cos \varphi \sin \omega_1 \end{aligned}$$

neboli (8) lze uvést na tvar

$$\begin{aligned} \cos \omega_1 \cos (\beta + \varphi) + \sin \omega_1 \sin (\beta + \varphi) = \\ = \frac{r \cos \beta}{r + v}. \end{aligned} \quad (9)$$

Rovnice (7), (9) tvoří soustavu lineárních rovnic pro neznámé $\cos \omega_1$, $\sin \omega_1$. Řešení této soustavy je

$$\cos \omega_1 = \frac{Ar}{r + v} \cdot \frac{1}{\sin (\alpha + \beta + \varphi)}, \quad (10)$$

$$\sin \omega_1 = \frac{Br}{r + v} \cdot \frac{1}{\sin (\alpha + \beta + \varphi)},$$

kde

$$A = \cos \alpha \sin (\beta + \varphi) + \sin \alpha \cos \beta, \quad (11)$$

$$B = \cos \alpha \cos \beta - \cos \alpha \cos (\beta + \varphi). \quad (12)$$

Přitom je

$$\begin{aligned} & \sin (\alpha + \beta + \varphi) = \\ & = \sin [4R - (R + \alpha) - (R + \beta) - \varphi] = \sin \kappa, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} \kappa &= \sphericalangle AKB = \\ &= 4R - (R + \alpha) - (R + \beta) - \varphi. \end{aligned} \quad (13)$$

Z rovnic (10) vyloučíme ω_1 tím, že rovnice umocníme na druhou a sečteme; vyjde

$$(r + v)^2 \cdot \sin^2 \kappa = (A^2 + B^2) r^2. \quad (14)$$

Z (11), (12) dostaneme

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= \cos^2 \beta (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \\ &+ \cos^2 \alpha [\sin^2 (\beta + \varphi) + \cos^2 (\beta + \varphi)] + \\ &+ 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta \sin (\beta + \varphi) - \\ &- 2 \cos^2 \alpha \cos \beta \cos (\beta + \varphi) = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \\ &- 2 \cos \alpha \cos \beta \cos (\alpha + \beta + \varphi). \end{aligned} \quad (15)$$

Dosaďme z (15) do (14); po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} (r + v)^2 &= \\ = r^2 \cdot \frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos (\alpha + \beta + \varphi)}{\sin^2 (\alpha + \beta + \varphi)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Vzhledem k (5) je

$$\sin (\alpha + \beta + \varphi) > 0.$$

Čitatel zlomku na pravé straně v (16) lze psát ve tvaru $(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + 2 \cos \alpha \cos \beta [1 - \cos (\alpha + \beta + \varphi)]$; to je kladné číslo, neboť výraz v lomené závorce je kladný [viz (5)]. Ze (16) dostaneme tedy

$$\begin{aligned} v &= \\ = r \left[\frac{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos (\alpha + \beta + \varphi)}}{\sin (\alpha + \beta + \varphi)} - 1 \right]. \end{aligned}$$

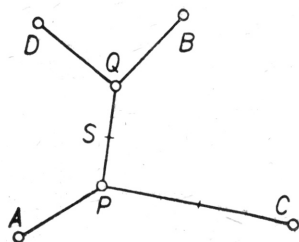
Tím je úloha rozřešena.

Poznámka. Pro $\alpha = \beta$ obdržíme pro výšku výraz

$$v = r \frac{\cos \alpha}{\cos (\alpha + \frac{1}{2} \varphi)} - 1.$$

6. Náčrtek znázorňuje dvě trati pouliční dráhy $APQB$ a $CPQD$, které mají společný úsek PQ (viz obr. 5).

Kterýkoli vůz projede (nehledě na směr) každý z úseků AP , BQ , DQ , PQ za 20 minut, ale úsek CP za 40 minut; přitom nebereme zřetel na dobu strávenou čekáním na zastávkách a konečných stanicích.



Obr. 4

Určité dva vozy vyjedou z konečných stanic A , C v 8 hodin.

a) V kolik hodin se tyto vozy potkají poprvé mezi místy P , Q ?

b) V kolik hodin se tyto vozy potkají mezi místy P , Q v době od 12 do 14 hodin?

Řešení. Pro stručnost zvolme dobu 20 minut za časovou jednotku. V ní jsou vyjádřeny všechny další časové údaje; přitom čas začínáme v těchto jednotkách počítat od 8 hodin. Vůz M první trati projede úsek z A do B a zpět za dobu 6, vůz N druhé trati projede úsek z C do D a zpět za dobu 8. Situace tedy bude vždy za dobu 24 (nejmenší společný násobek čísel 6, 8) táž jako při počátečním stavu. Přitom vůz M se do místa P dostane v lichých časových údajích (1; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23), takže v místě Q je v sudých časových údajích (dráhu PQ urazí za jednotku); vůz N je v místě P v sudých časových údajích (2; 6; 10; 14; 18; 22) a tím v místě Q v lichých časových údajích. Setkání je proto možné jedině ve středu S úsečky PQ (za předpokladu rovnoměrného pohybu), přičemž se vozy pohybují proti sobě.

Vůz M projíždí místem S v těchto časových údajích:

$\frac{3}{2} + 6m$ (při jízdě z P do Q); $\frac{9}{2} + 6m$ (při jízdě z Q do P); vůz N je v místě S v těchto časových údajích:

$\frac{5}{2} + 8n$ (při jízdě z P do Q); $\frac{11}{2} + 8n$ (při jízdě z Q do P).

Přitom jsou m, n celá nezáporná čísla.

Rovnosti $\frac{3}{2} + 6m = \frac{5}{2} + 8n$, $\frac{9}{2} + 6m = \frac{11}{2} + 8n$ nelze splnit žádnou dvojicí čísel m, n , což ostatně plyne z dřívější úvahy (vozy by se nepotkaly). Zbývají právě dvě možnosti:

Případ [1]. Necht' je $\frac{9}{2} + 6m = \frac{5}{2} + 8n$ neboli

$$m = n + \frac{1}{3}(n - 1). \quad (1)$$

Nejmenší vyhovující n je $n = 1$ a pak $m = n = 1$. Setkání tedy nastává v časovém údaji $\frac{9}{2} + 6 \cdot 1 = \frac{5}{2} + 8 \cdot 1 = 10\frac{1}{2}$, tedy za 210 minut neboli za $3\frac{1}{2}$ hodiny po osmé hodině, tj. o $11\frac{1}{2}$ hodině. Přitom vůz M jede z Q do P .

Případ [2]. Necht' je $\frac{3}{2} + 6m = \frac{11}{2} + 8n$ neboli

$$m = n + \frac{1}{3}(n + 2). \quad (2)$$

Nejmenší n , které vyhovuje požadavkům, je $n = 1$ a k němu přísluší $m = 2$; setkání tedy nastává v časovém údaji $\frac{3}{2} + 6 \cdot 2 = \frac{11}{2} + 8 \cdot 1 = 13\frac{1}{2}$, tj. za 270 minut neboli $4\frac{1}{2}$ h po osmé hodině, tedy o $12\frac{1}{2}$ hodině. Přitom vůz M jede z P do Q .

Tím je zodpověděna otázka a).

b) Doba mezi 12. a 14. hodinou je vyjádřena intervalem (12, 18) v smluvené časové jednotce, přičemž časový údaj $t = 0$ je v 8 hodin. Abychom zodpověděli otázku b), musíme řešit nerovnosti

$$12 < \frac{3}{2} + 6m < 18, \quad 12 < \frac{9}{2} + 6m < 18 \quad (3)$$

celými nezápornými čísly m . První nerovnost (3)

dává vztah

$$1,7 < m < 2,8,$$

který má jediné celočíselné řešení $m = 2$. Ze vztahu (2) dostaneme $n = 1$; příslušná doba $\frac{3}{2} + 6 \cdot 2 = 13\frac{1}{2}$, tj. 270 minut = 4 hodiny 30 minut. Doba setkání je tedy 12 hodin 30 minut.

Druhá nerovnost (3) dává vztah

$$1,2 < m < 2,3,$$

který má jediné celočíselné řešení $m = 2$. Ze vztahu (1) dostaneme $n = \frac{7}{4}$, což není celé číslo; nedostaneme tedy žádné další řešení.

Při řešení této úlohy užívali někteří účastníci tabulky (což je vlastně řešení experimentální) nebo grafického jízdního řádu, jako např. Leopold Vrána, žák třídy III.b SVVŠ v Novém Jičíně.

2. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE A

1. Číslo $17^{19} + 19^{17}$ je dělitelné číslem $17 + 19$. Dokažte.

Řešení. Je znám vzorec

$a^n + b^n = (a + b) [a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}]$,
který platí pro lichá $n > 1$, jehož v dalším použijeme.

O čísle $x = 17^{19} + 19^{17}$ nyní platí

$$\begin{aligned} x &= (17^{19} - 17^{17}) + (19^{17} + 17^{17}) = \\ &= 17^{17}(17^2 - 1) + (19 + 17)(19^{16} - 19^{15} \cdot 17 + \dots \\ &\dots + 17^{16}) = 17^{17} \cdot 16 \cdot 18 + 36 \cdot B = 36(A + B), \end{aligned}$$

kde $A = 17^{17} \cdot 8$, $B = 19^{16} - 19^{15} \cdot 17 + \dots + 17^{16}$ jsou přirozená čísla.

Z výsledku $x = 36(A + B)$ vyplývá, že číslo x je dělitelné třicetišesti.

Jiné řešení. Platí

$$\begin{aligned}
 x &= (18 - 1)^{19} + (18 + 1)^{17} = \\
 &= \left[18^{19} - \binom{19}{1} 18^{18} + \dots + \binom{19}{18} 18 - 1 \right] + \\
 &+ \left[18^{17} + \binom{17}{1} 18^{16} + \dots + \binom{17}{16} 18 + 1 \right] = \\
 &= 18 \left[18^{18} - \binom{19}{1} 18^{17} + \dots + \binom{19}{1} \right] + \\
 &+ 18 \left[18^{16} + \binom{17}{1} 18^{15} + \dots + \binom{17}{1} \right] = \\
 &= 18 \left[18^{18} - \binom{19}{1} 18^{17} + \dots + \binom{19}{1} + 18^{16} + \right. \\
 &\quad \left. + \binom{17}{1} 18^{15} + \dots + \binom{17}{1} \right].
 \end{aligned}$$

Členy obsažené v lomené závorce jsou až na $\binom{19}{1}$, $\binom{17}{1}$ čísla všemřes dělitelná osmnácti a tudíž sudá; z toho plyne, že výraz v lomené závorce je číslo sudé, takže platí

$$x = 18 \cdot 2k,$$

kde k je celé číslo. Je tedy číslo x dělitelné číslem 36.

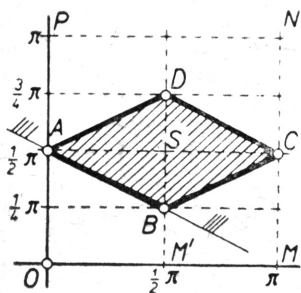
2. V rovině je dána soustava pravoúhlých souřadnic. Vyšetřte množinu všech bodů, jejichž souřadnice x, y

v této soustavě splňují nerovnosti

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \pi, \\ 1 + |\cos x| \leq 2\sin^2 y. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Řešení. Máme najít všechna řešení, jejichž obrazy náleží čtverci $OMNP$ (viz obr. 6):

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x \leq \pi, \\ 0 \leq y \leq \pi. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$



Obr. 6

Je-li x_0, y_0 řešení soustavy (1), je také

$$\pi - x_0, y_0$$

řešení soustavy (1), a také

$$x_0, \pi - y_0$$

je řešení soustavy (1).

To znamená, že množina obrazů řešení, které leží ve čtverci (2), je souměrná podle přímek o rovnicích

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad y = \frac{\pi}{2}.$$

Stačí tedy najít řešení ve čtverci skládajícím se z bodů $[x, y]$, pro něž platí

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Potom však platí, že s třetí nerovností (1) je ekvivalent-

ní nerovnost

$$2\sin^2 y - 1 \geq |\cos x|.$$

Poněvadž je

$$\cos x \geq 0,$$

dostaneme dále

$$-\cos 2y \geq \cos x \quad (4)$$

čili

$$\cos(\pi - 2y) \geq \cos x.$$

Jak číslo $\pi - 2y$, tak i číslo x leží v intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$,

v němž je funkce kosinus klesající. Proto je nerovnost (4) ekvivalentní s nerovností

$$\pi - 2y \leq x,$$

tj.

$$x + 2y \geq \pi.$$

Avšak rovnice $x + 2y = \pi$ vyjadřuje v rovině přímku, která prochází body

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ a } \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right].$$

Body společné polorovině $x + 2y \geq \pi$ a čtverci (3) tvoří trojúhelník ABS (viz obr. 6) s vrcholy

$$A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad B = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right], \quad S = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

V důsledku zmíněných souměrností je hledaná množina bodů kosočtverec $ABCD$; viz obr. 6.

3. Daná je rovnice

$$x^2 + 2px + 2p^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

s neznámou x , kde p je reálné číslo. Nájďte všechny

čísla p , pre ktoré má daná rovnica reálne korene, z ktorých žiaden nemá absolútnu hodnotu väčšiu než jedna.

Riešenie. Ak má daná rovnica (1) reálne korene, potom je jej diskriminant nutne nezáporné číslo. Teda nutne platí

$$(-p)^2 - (2p^2 - 1) = 1 - p^2 \geq 0$$

čiže

$$-1 \leq p \leq 1. \quad (2)$$

Korene x_1, x_2 danej rovnice (1) sú

$$x_{1,2} = -p \pm \sqrt{1 - p^2}.$$

Podľa požiadaviek vyslovených v texte úlohy platí o nich

$$-1 \leq -p - \sqrt{1 - p^2} \leq -p + \sqrt{1 - p^2} \leq 1.$$

Z toho vyplýva (stredná nerovnosť zrejme platí), že súčasne musia byť splnené nerovnosti

$$\sqrt{1 - p^2} \leq 1 - p, \quad \sqrt{1 - p^2} \leq 1 + p; \quad (3)$$

pričom sú na základe vzťahu (2) čísla $1 - p, 1 + p$ nezáporné. Po umocnení oboch strán nerovností (3) a ďalšej úprave dostaneme, že číslo p musí súčasne vyhovovať vzťahom

$$0 \leq p(p - 1), \quad 0 \leq p(p + 1). \quad (4)$$

Je teda nutne buď

$$p = 0, \quad (5)$$

alebo platí súčasne [pozri (4)]

$$p > 0, \quad p \geq 1, \quad (6)$$

alebo platí súčasne [pozri (4)]

$$p < 0, \quad p \leq -1. \quad (7)$$

Kombináciou vzťahov (6), (2) dostávame, že je nutne

$$p = 1; \quad (8)$$

kombináciou vzťahov (7), (2) dostávame, že je nutne

$$p = -1. \quad (9)$$

Výsledky (5), (8), (9) vedú k tomu, že daná rovnica (1) musí byť jednou z rovníc

$$\begin{aligned}x^2 - 1 &= 0, \\x^2 + 2x + 1 &= 0, \\x^2 - 2x + 1 &= 0.\end{aligned}$$

Tieto rovnice skutočne všetky vyhovujú požiadavkám úlohy. O tom sa ľahko presvedčíme vypočítaním ich koreňov. Tým je úloha vyriešená.

4. Je dána krychle $ABCD A'B'C'D'$ o hraně délky 1 a číslo d , pro něž platí $1 \leq d \leq \sqrt{2}$. Úsečka XY délky d je umístěna tak, že bod X leží ve stěně $ABCD$ a bod Y ve stěně $A'B'C'D'$; mimoto obsahuje úsečka XY pevný bod M tělesové úhlopříčky AC' , pro který platí $C'M = 2AM$. Vyšetřte geometrické místo bodů X ; jaký útvar vznikne pro různé hodnoty d ?

Řešení (viz obr. 7). Bodem M vedeme kolmici na rovnoběžné roviny ABC , $A'B'C'$ a její průsečíky s těmito rovinami po řadě označíme P , Q ; je $PQ = AA' = 1$. Ze stejnosti trojúhelníků AMP , $AC'C$ podle bodu A vyplývá $MP = \frac{1}{3}PQ = \frac{1}{3}$, takže $MQ = \frac{2}{3}$. Ze stejnosti trojúhelníků MPX , MQY podle bodu M vyplývají vztahy (je $XY = d$)

$$MX = \frac{1}{3}d, \quad MY = \frac{2}{3}d.$$

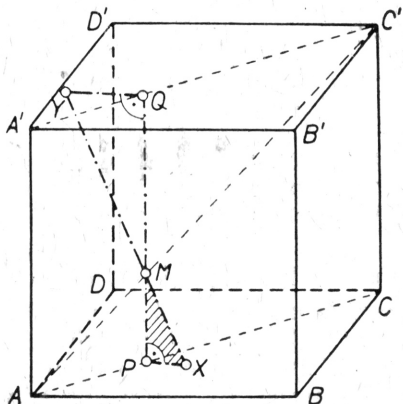
Proto z pravoúhlého trojúhelníka MPX plyne podle

Pythagorovy věty

$$PX^2 = MX^2 - MP^2 = \frac{1}{9}(d^2 - 1) \leq \frac{1}{9},$$

tudíž $PX = \frac{1}{3}\sqrt{d^2 - 1}$ a dále

$$PX \leq \frac{1}{3}.$$



Obr. 7.

Pro dané d je PX konstanta, a proto všechny body X leží na kružnici $k \equiv (P; \frac{1}{3}\sqrt{d^2 - 1})$, popř. dostaneme pro $d = 1$ jediný bod $X \equiv P$. Tato kružnice k leží celá ve čtverci $ABCD$, neboť vzdálenost bodu P od přímek AB , AD je $\frac{1}{3}$, od přímek BC , CD je $\frac{2}{3}$.

Avšak celá kružnice k není hledaným geometrickým místem bodů X , neboť ne ke každému bodu X kružnice k lze sestavit bod Y , aby náležel čtverci $A'B'C'D'$; této otázce si ihned blíže všimneme.

Z pravoúhlého trojúhelníka MYQ podle Pythagorovy věty dostaneme

$$QY^2 = MY^2 - MQ^2 = \frac{4}{9}(d^2 - 1),$$

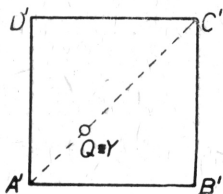
tj.

$$QY = \frac{2}{3} \sqrt{d^2 - 1} \leq \frac{2}{3};$$

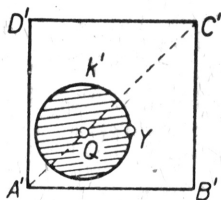
body Y pro dané číslo d leží na kružnici $k' \equiv \equiv(Q; \frac{2}{3}\sqrt{d^2 - 1})$, popř. pro $d = 1$ je $Y \equiv Q$. Kružnice k' však pro dané číslo d nemusí náležet celá čtverci $A'B'C'D'$. Rozlišme 5 případů, které snadno pomocí náčrtků vyšetříme; nechtě je

[1] $1 = d$ (obr. 8); pak platí $Y = Q$ a $X \equiv P$;

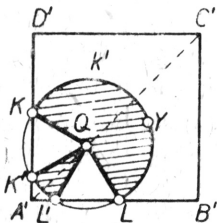
[2] $1 < d \leq \frac{1}{2}\sqrt{5}$ (obr. 9); potom celá kružnice k' leží ve čtverci $A'B'C'D'$;



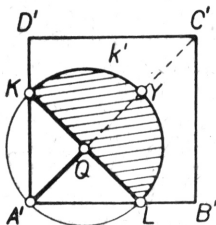
Obr. 8



Obr. 9

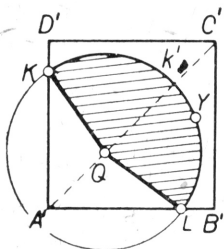


Obr. 10



Obr. 11

[3] $\frac{1}{2}\sqrt{5} < d < \frac{1}{2}\sqrt{6}$ (obr. 10). Kružnice k' protíná stranu $A'B'$ ve dvojici bodů L, L' ležících mezi A', B' ; podobně je tomu i se stranou $A'D'$.



Obr. 12

[4] $d = \frac{1}{2}\sqrt{6}$ (obr. 11). Kružnice k' prochází bodem A' a vedle toho protíná stranu $A'B'$ v dalším bodu L ležícím mezi A', B' ; podobně je tomu se stranou $A'D'$.

[5] $\frac{1}{2}\sqrt{6} < d \leq \sqrt{2}$ (obr. 12). Kružnice k' se rozpadá ve dva oblouky, z nichž jeden leží vně čtverce $A'B'C'D'$, druhý náleží tomuto čtverci.

Bod Q má od stran $A'B', A'D'$ vzdálenosti $\frac{1}{3}$, od stran $B'C', C'D'$ vzdálenosti $\frac{2}{3}$; protože pak je $QY \leq \frac{2}{3}$, leží ten oblouk KL kružnice k' v obr. 10 až 12, který protíná úsečku QC' , celý ve čtverci $A'B'C'D'$; o poloměru $\varrho = QY$ této kružnice v jednotlivých obrázcích 9 až 12 po řadě platí:

$$\varrho \leq \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3} < \varrho < \frac{1}{3}\sqrt{2}, \quad \varrho = \frac{1}{3}\sqrt{2}, \quad \frac{1}{3}\sqrt{2} < \varrho \leq \frac{2}{3}.$$

Z těchto podmínek a ze vzorce $MY^2 = MQ^2 + QY^2$ neboli

$$\left(\frac{2}{3}d\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \varrho^2$$

dostaneme vztahy uvedené v případech [2] až [5].

Nyní snadno vyšetříme hledané geometrické místo bodů X . Jestliže bod Y leží na kružnici k' a zároveň ve čtverci $A'B'C'D'$ (popř. je-li $Y \equiv Q$), pak příslušný bod X úsečky $XY = d$ náleží hledanému geometrickému

kému místu bodů. Hledané geometrické místo bodů pro dané d je tedy v případě:

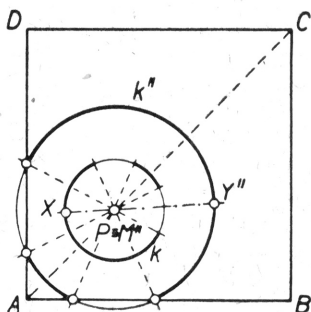
- [1] jediný bod P ;
- [2] kružnice k ;
- [3] dva oblouky kružnice k , které jsou bez společného bodu;

[4] jeden oblouk kružnice k a izolovaný další bod (průsečík kružnice k s úsečkou PC);

[5] jeden oblouk kružnice k .

Graficky tyto oblouky nejrychleji sestrojíme takto: V pravoúhlém promítání na rovinu ABC sestrojíme průmět k'' kružnice k' a průmět XY'' úsečky XY (viz obr. 13, pro případ [3] porovnej

s obr. 10). Průměty Y'' bodů na kružnici k'' a hledané geometrické místo bodů X na kružnici k jsou stejnohlé podle bodu $P \equiv M''$ při konstantě stejnohllosti $-\frac{1}{2}$ (viz silně narysované části kružnice k'' a kružnice k v obr. 13).



Obr. 13

3. TEXTY ÚLOH III. KOLA KATEGORIE A

1. Je dán trojčlen

$$2x^2 - x - 36.$$

Určete všechna celá čísla x , pro která se hodnota

daného trojčlenu rovná druhé mocnině prvočísla.

2. V rovině je dána soustava pravoúhlých souřadnic x, y .

Vyšetřte množinu všech bodů, jejichž souřadnice v této soustavě splňují nerovnost

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi,$$

$$\sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{1 + \sin 2x} \leq y \leq \sqrt{1 - \cos 2x} - \sqrt{1 + \cos 2x}.$$

Načrtněte obraz této množiny.

3. Jsou dány dvě navzájem kolmé mimoběžky PM, QN , kde přímka PQ je kolmá ke každé z obou mimoběžek. V rovině σ kolmé k úsečce PQ a procházející jejím středem S je dána kružnice $k \equiv (S, r)$.

Dokažte, že každá úsečka XY , jejíž krajní body X, Y leží po řadě na mimoběžkách PM, QN a která obsahuje bod kružnice k , má touž délku; vyjádřete tuto délku pomocí poloměru r a délky $v = PQ$.

Jaký útvar vyplní krajní body X všech takových úseček XY ?

4. V rovině je dána kružnice $k \equiv (S, r)$. Kromě toho je dán bod $A \neq S$, který leží uvnitř kružnice k . Světelný paprsek vycházející z daného bodu A se odráží od kružnice k v jistém bodě B , pak se odráží od kružnice k v jistém bodě C a odtud se vrací nazpět do bodu A .

Vypočítejte sinus dutého úhlu $\sphericalangle SAB$ pomocí čísel $r, d = SA$ a rozhodněte o řešitelnosti úlohy.

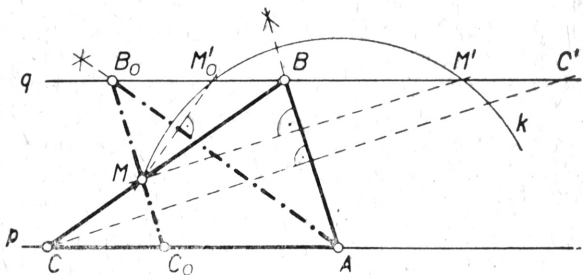
Poznámka. Řešení těchto úloh najdete v této brožurě na str. 111 v článku „Něco o metodách řešení úloh.“

4. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE B

1. Jsou dány dvě různé rovnoběžky p, q a bod A ležící na p ; dále je dán bod M ležící uvnitř pásu s hranicemi p, q .

Šestrojte takový rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB , aby vrcholy B, C ležely po řadě na přímkách q, p a bod M na ramenu BC .

Proveďte diskusi vzhledem k vzdálenosti v rovnoběžek p, q a vzdálenosti bodů A, M .



Obr. 14

Řešení (obr. 14). Pokusíme se určit směr přímky AB . Souměrnost podle této přímky převede hledaný trojúhelník ABC v rovnoramenný trojúhelník ABC' , jehož rameno BC' leží v přímce q . Táž souměrnost převede bod M v jistý bod M' , který leží jednak na přímce q , jednak na kružnici $k \equiv (A; AM)$. Sestrojíme-li bod M' jako společný bod čar q, k a vedeme-li osu o úsečky MM' , protne osa o přímku q v bodě B ; přímka BM protne přímku p v jistém bodě C ; bod s ním souměrně sdružený podle přímky o (který leží

na q) označíme C' . Obrazec $ACBC'$ je rovnoběžník, neboť $AC \parallel BC'$, $BC \parallel AC'$; jeho úhlopříčky leží v přímkách o , CC' navzájem kolmých, a je to tedy kosočtverec. Proto je trojúhelník ABC skutečně rovno-ramenný se základnou AB .

Úloha má dvě různá řešení, je-li $AM > v$; jediné řešení, je-li $AM = v$; je neřešitelná, je-li $AM < v$.

2. Druhá mocnina přirozeného čísla n má v dekadickém zápise poslední dvojčíslie 56. Aké je poslední dvojčíslie čísla n ? (Sú 4 možnosti.)

Řešení. Protože poslední cifra n^2 je 6, je poslední cifra čísla n buď 4, nebo 6. Číslo n lze tedy napsat v jednom z tvarů

$$n = 10x + 4, \quad (1)$$

$$n = 10x + 6. \quad (2)$$

V případě (1) je

$$\begin{aligned} n^2 &= 100x^2 + 80x + 16 = \\ &= 100x^2 + 10 \cdot (8x + 1) + 6. \end{aligned}$$

Na předposlední číslici má vliv jedině člen $10(8x + 1)$. Podle podmínky úlohy musí číslo $8x + 1$ končit číslicí 5, tj. $8x$ musí být číslo končící čtyřkou. Mezi násobky osmi jsou to čísla 24, 64, 104, 144, ..., tj. číslo $8x$ pro $x = 3, 13, 23, 33, \dots$ a $x = 8, 18, 28, 38, \dots$. První dvě řešení úlohy jsou tedy čísla, jejichž poslední dvojčíslí je 34 nebo 84.

V případě (2) je

$$\begin{aligned} n^2 &= 100x^2 + 120x + 36 = \\ &= 100x^2 + 10(12x + 3) + 6. \end{aligned}$$

Jako v případě (1) zjistíme, že číslo $12x$ musí končit dvojkou. Takové násobky dvanácti dostaneme jen

pro $x = 1, 11, 21, 31, \dots$ a $x = 6, 16, 26, 36, \dots$.
 Tak dostáváme další dvě řešení úlohy: poslední dvojčíslí hledaných čísel je 16 nebo 66.

3. Je dáno kladné číslo p . Množina všech bodů v rovině, jejichž pravoúhlé souřadnice x, y vyhovují rovnici

$$p|x| + |x + y| = 4, \quad (1)$$

je obvod jistého rovnoběžníka; dokažte.

Potom zjistěte, pro které číslo p je tento rovnoběžník obdélníkem.

Řešení. Rozlišíme čtyři případy:

- a) $x \geq 0, x + y \geq 0$, b) $x \geq 0, x + y \leq 0$,
 c) $x \leq 0, x + y \geq 0$, d) $x \leq 0, x + y \leq 0$.

V případě a) platí $|x| = x, |x + y| = x + y$; proto přepíšeme rovnici (1) do tvaru

$$(p + 1)x + y = 4. \quad (1a)$$

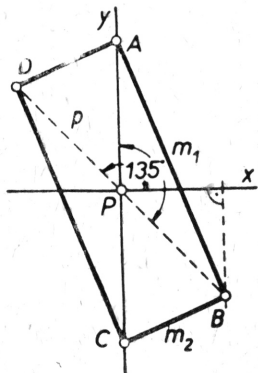
Grafem rovnice (1a) je přímka m_1 , která protíná osu y v bodě $A = [0, 4]$ a přímku p o rovnici $x + y = 0$ v bodě $B = \left[\frac{4}{p}, -\frac{4}{p}\right]$, jak zjistíme snadným výpočtem z (1a). Graf rovnice (1) však neobsahuje celou přímku m_1 , nýbrž jen její část, pro kterou platí současně $x \geq 0, x + y \geq 0$. Všecky body $[x, y]$, pro něž platí $x \geq 0$, vyplní polorovinu yB , tj. pravou polorovinu s hranicí v ose y ; všechny body $[x, y]$, pro něž platí $x + y \geq 0$, vyplní polorovinu pA . Společná část obou těchto polorovin je úhel $\sphericalangle APB$ (P je počátek souřadnic). V tomto úhlu leží jen část přímky m_1 , a to úsečka AB .

V případě b) postupujeme obdobně jako v případě a). Zde platí $|x| = x$, $|x + y| = -x - y$; proto přepíšeme rovnici (1) do tvaru

$$(p - 1)x - y = 4. \quad (1b)$$

Grafem rovnice (1b) je přímka m_2 , která protíná osu y v bodě $C = [0, -4]$ a přímku p v bodě B . Všecky body $[x, y]$, pro něž platí současně $x \geq 0$, $x + y \leq 0$, vyplní společnou část polorovin yB , pC , což je úhel $\angle BPC$. Část přímky m_2 ležící v tomto úhlu je úsečka BC .

Případy c) a d) vyšetříme snadno na základě středové souměrnosti. Z rovnice (1) je patrné: Jestliže této rovnici vyhovuje dvojice čísel x, y , vyhovuje jí též dvojice $-x, -y$; to znamená, že graf rovnice (1) je útvar souměrný podle středu P (viz obr. 15).



Obr. 15

Mimo nalezené úsečky AB , BC náleží tomuto grafu tedy také úsečky AD , CD , kde D je bod souměrně sdružený s bodem B podle středu P a ležící ovšem na přímce p . Čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník, neboť je souměrný podle středu P . Graf rovnice (1) je obvod tohoto rovnoběžníka.

Odpověď na druhou otázku úlohy. Rovnoběžník $ABCD$ je obdélníkem jen tehdy, když platí $AC = BD$, neboli $AP = BP$. Z předchozího víme, že

$AP = 4$; snadno vypočítame podľa Pythagorovej vety, že

$$BP = \sqrt{\left(\frac{4}{p}\right)^2 + \left(\frac{4}{p}\right)^2} = \frac{4}{p} \sqrt{2}.$$

Dostaneme teda pre p podmínku

$$4 = \frac{4}{p} \sqrt{2}$$

a odtiaľ $p = \sqrt{2}$.

4. Nech sú a, b, c dĺžky strán trojuholníka a P jeho obsah. Potom platí

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4P\sqrt{3}; \quad (1)$$

dokážte.

Zistite, kedy nastáva rovnosť.

Riešenie I. Vzhľadom na geometrický význam sú čísla a, b, c všetky kladné. Podľa Heronovho vzorca $P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, kde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, platí

$$\begin{aligned} 16P^2 &= (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c) \cdot (a+b-c) = [-a^2 + (b+c)^2][a^2 - (b-c)^2] = \\ &= -a^4 + a^2[(b-c)^2 + (b+c)^2] - (b^2 - c^2)^2 = \\ &= -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2. \end{aligned}$$

Teda je

$$16P^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2. \quad (2)$$

Nech teraz platí nerovnosť (1), ktorej obidve strany sú kladné čísla. Potom platí tiež nerovnosť

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq (4P\sqrt{3})^2$$

čiže

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 \geq 16 \cdot 3P^2.$$

Do pravej strany poslednej nerovnosti dosadíme zo vzťahu (2). Po úprave dostaneme

$$4(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2) \geq 0$$

čiže

$$(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \geq 0. \quad (3)$$

Tento vzťah platí pre všetky čísla a, b, c . Pretože úpravy, ktoré sme previedli, sú za daných predpokladov o číslach a, b, c ekvivalentné, vyplýva z nerovnosti (3) nerovnosť (1). Vzhľadom na vzťah (3) nastane v (1) rovnosť práve pre $a^2 = b^2 = c^2$, čiže pre $a = b = c$, tj. pre rovnostranný trojuholník. Tým je úloha vyriešená.

Riešenie II. Do vzťahu (1) dosadíme z kosinusovej vety

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$$

kde $\gamma = \sphericalangle BCA$. Dostaneme

$$2(a^2 + b^2 - ab \cos \gamma) \geq 4 \cdot \frac{1}{2} ab \sin \gamma \cdot \sqrt{3},$$

pričom sme použili $P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$.

Prevedme ekvivalentné úpravy:

$$2 \left[a^2 + b^2 - 2ab \left(\cos \gamma \cdot \frac{1}{2} + \sin \gamma \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \geq 0,$$

$$2 [a^2 + b^2 - 2ab \cos (\gamma - 60^\circ)] \geq 0. \quad (4)$$

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že je $a \geq b \geq c > 0$ čiže

$$180^\circ > \alpha \geq \beta \geq \gamma > 0^\circ.$$

Pritom je nutne $\gamma \leq 60^\circ$. Ak by totiž bolo $\gamma > 60^\circ$,

potom $\alpha + \beta + \gamma > 3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$, čo je v spore s tým, že ide o uhly α, β, γ trojuholníka.

Je teda $-2ab \cos(\gamma - 60^\circ) \geq 0$ pre všetky γ a preto pre každý trojuholník platí i vzťah (4), ktorý je so vzťahom (1) ekvivalentný. Tým je dôkaz prevedený.

5. Je dána soustava rovnic

$$x + y + z = 1, \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = c, \quad (2)$$

$$xy = z^2, \quad (3)$$

kde c je dané kladné číslo.

a) Udejte podmínky pro číslo c , aby soustava měla reálné řešení x, y, z .

b) Udejte všechna čísla c , pro něž alespoň jedna trojice čísel x, y, z (řešících soustavu) je složena z kladných a navzájem různých čísel.

Řešení. Umocněme obě strany rovnice (1) na druhou a do výsledku, který tak dostaneme, dosadíme ze (2) a (3); obdržíme postupně

$$c + 2(xy + yz + xz) = 1,$$

$$c + 2z(x + y + z) = 1.$$

Nyní sem dosadíme z (1), čímž dostáváme

$$z = \frac{1}{2}(1 - c). \quad (1')$$

Tento výsledek dosadíme do (1) a (3); dostaneme pro neznámé x, y soustavu

$$x + y = \frac{1}{2}(1 + c), \quad (2')$$

$$xy = \frac{1}{4}(1 - c)^2. \quad (3')$$

Podle známé věty o koeficientech kvadratické rovnice jsou čísla x, y splňující rovnice (2') a (3') kořeny ná-

sledující rovnice s neznámou t :

$$t^2 - \frac{1}{2}(1+c)t + \frac{1}{4}(1-c)^2 = 0,$$

neboli

$$4t^2 - 2(1+c)t + (1-c)^2 = 0. \quad (4)$$

Diskriminant D této rovnice je

$$D = 4[(1+c)^2 - 4(1-c)^2] = 4(3c-1)(3-c).$$

Rovnice (4) má tedy reálné řešení právě tehdy, platí-li $D \geq 0$ neboli

$$\frac{1}{3} \leq c \leq 3; \quad (5)$$

kořeny t_1, t_2 rovnice (4) pak jsou

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{4}(1+c + \sqrt{(3c-1)(3-c)}), \\ t_2 &= \frac{1}{4}(1+c - \sqrt{(3c-1)(3-c)}). \end{aligned} \right\} \quad (5')$$

Jsou-li splněny podmínky (5), a jen v tomto případě, jsou čísla t_1, t_2 reálná; pak je buď $x = t_1, y = t_2$, nebo $x = t_2, y = t_1$; číslo z je podle (1') vždy reálné. Řešením úlohy a) jsou tedy nerovnosti (5).

Aby byly splněny podmínky z úlohy b), musí platit

$$t_1 \neq t_2, t_1 \neq z, t_2 \neq z, z > 0, t_2 > 0 \text{ (pak je i } t_1 > 0 \text{)}.$$

Nerovnost $t_1 \neq t_2$ dává podmínku $D \neq 0$, tj.

$$c \neq \frac{1}{3}, c \neq 3. \quad (5a)$$

Rovnice $t_1 = z$ i rovnice $t_2 = z$ dává po snadné úpravě řešení $c = \frac{1}{3}, c = -1$. Číslo $c = \frac{1}{3}$ skutečně vede k rovnostem $z = t_1 = t_2$, číslo $c = -1$ nevyhovuje ani rovnici $z = t_1$, ani $z = t_2$ (pro $c = -1$ je $D < 0$). Nerovnosti $t_1 \neq z, t_2 \neq z$ nevedou tedy k další podmínce. Nerovnost $z > 0$ vede k vztahu $1 - c > 0$,

neboli

$$c < 1. \quad (5b)$$

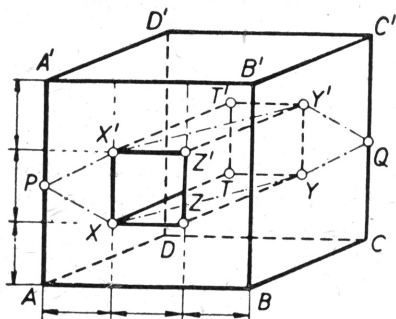
Konečně nerovnost $t_2 > 0$ vede k podmínce $c + 1 > \sqrt{(3c - 1)(3 - c)}$, neboli $4(c - 1)^2 > 0$, neboli $c \neq 1$, která je zahrnuta v podmínce (5b).

Spojením (5), (5a), (5b) dostaneme tedy odpověď na otázku z druhé úlohy: hledané hodnoty parametru c jsou dány nerovnostmi $\frac{1}{3} < c < 1$.

6. Z kocky $ABCD A' B' C' D'$ s hranou délky d je vyrezaný pravidelný štvorboký hranol $XZYTX'Z'Y'T'$ (pozri obr. 16a). Tým vznikne duté těleso K , kterého povrch sa skladá z desiatich rovinných obrazcov. Označme postupne P , Q stredy úsečíek AA' , CC' .

Vypočítajte dĺžku lomenej čiary $PXYQ$ a nájdite kratšiu lomenú čiaru spájajúcu body P, Q a idúcu po povrchu telesa K .

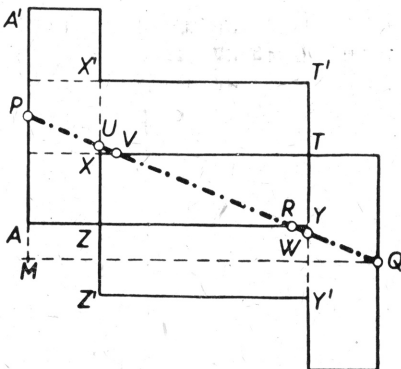
Riešenie (pozri obr. 16a). Zvoľme hranu kocky za



Obr. 16a

jednotkovú úsečku. Potom je $XX' = YY' = x = \frac{1}{3}$.
 Ďalej je $PX = QY = PX' = \frac{x}{2}\sqrt{5}$, $XY = X'Y' = \sqrt{(3x)^2 + x^2} = x\sqrt{10}$. Teda

$$\begin{aligned} PXYQ &= PX'Y'Q = 2 \cdot \frac{x}{2}\sqrt{5} + x\sqrt{10} = \\ &= \frac{1}{3}(\sqrt{5} + \sqrt{10}). \end{aligned} \quad (1)$$



Obr. 16b.

Zostrojme teraz časť siete vyrezaného telesa (pozri obr. 16b): Body P, Q v sieti spojíme úsečkou, ktorá na povrchu telesa K je vlastne lomenou čiarou $PUVRWQ$. Jej dĺžku vypočítame z pravouhlého trojuholníka PMQ . Dĺžky jeho odvesien sú: $PM = 2x$, $MQ = 5x$. Je teda

$$PQ = \sqrt{4x^2 + 25x^2} = x\sqrt{29} = \frac{1}{3}\sqrt{29}. \quad (2)$$

Vzhľadom na vzťahy (1) a (2) porovnajme čísla $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{10}$ a $\sqrt[3]{29}$. Je

$$(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{10})^3 = 15 + 10\sqrt[3]{2} \doteq 29,14 > 29 = (\sqrt[3]{29})^3.$$

Preto je druhá spojnice kratšia než prvá.

5. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE B

1. V rovině je dána soustava pravoúhlých souřadnic. Vyšetřte množinu všech bodů, jejichž souřadnice x, y v této soustavě splňují rovnici

$$|x - 1| + |y - 2| = |x - 5| + |y - 6|. \quad (1)$$

Řešení. Rozlišíme případy

$$\begin{array}{lll} x \leq 1, & 1 \leq x \leq 5, & x \geq 5, \\ y \leq 2, & 2 \leq y \leq 6, & y \geq 6, \end{array}$$

které kombinujeme všemi devíti možnými způsoby; dostáváme 9 případů:

Případ [1]. Je-li $x \leq 1, y \leq 2$, pak platí

$$\begin{array}{ll} |x - 1| = 1 - x, & |x - 5| = 5 - x, \\ |y - 2| = 2 - y, & |y - 6| = 6 - y. \end{array}$$

Případ [2]. Je-li $x \leq 1, 2 \leq y \leq 6$, pak platí

$$\begin{array}{ll} |x - 1| = 1 - x, & |x - 5| = 5 - x, \\ |y - 2| = y - 2, & |y - 6| = 6 - y. \end{array}$$

Případ [3]. Je-li $x \leq 1, y \geq 6$, pak platí

$$\begin{array}{ll} |x - 1| = 1 - x, & |x - 5| = 5 - x, \\ |y - 2| = y - 2, & |y - 6| = y - 6. \end{array}$$

Případ [4]. Je-li $1 \leq x \leq 5$, $y \leq 2$, pak platí

$$\begin{aligned} |x - 1| &= x - 1, & |x - 5| &= 5 - x, \\ |y - 2| &= 2 - y, & |y - 6| &= 6 - y. \end{aligned}$$

Případ [5]. Je-li $1 \leq x \leq 5$, $2 \leq y \leq 6$, pak platí

$$\begin{aligned} |x - 1| &= x - 1, & |x - 5| &= 5 - x, \\ |y - 2| &= y - 2, & |y - 6| &= 6 - y. \end{aligned}$$

Případ [6]. Je-li $1 \leq x \leq 5$, $y \geq 6$, pak platí

$$\begin{aligned} |x - 1| &= x - 1, & |x - 5| &= 5 - x, \\ |y - 2| &= y - 2, & |y - 6| &= y - 6. \end{aligned}$$

Případ [7]. Je-li $x \geq 5$, $y \leq 2$, pak platí

$$\begin{aligned} |x - 1| &= x - 1, & |x - 5| &= x - 5, \\ |y - 2| &= 2 - y, & |y - 6| &= 6 - y. \end{aligned}$$

Případ [8]. Je-li $x \geq 5$, $2 \leq y \leq 6$, pak platí

$$\begin{aligned} |x - 1| &= x - 1, & |x - 5| &= x - 5, \\ |y - 2| &= y - 2, & |y - 6| &= 6 - y. \end{aligned}$$

Případ [9]. Je-li $x \geq 5$, $y \geq 6$, pak platí

$$\begin{aligned} |x - 1| &= x - 1, & |x - 5| &= x - 5, \\ |y - 2| &= y - 2, & |y - 6| &= y - 6. \end{aligned}$$

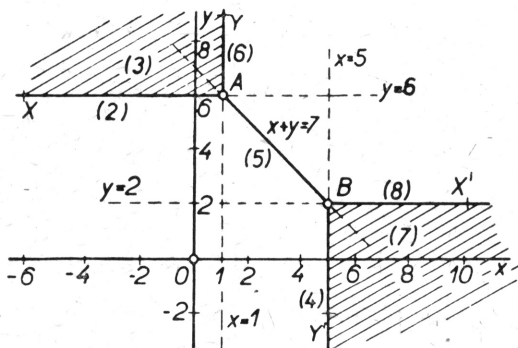
Dosaďme po řadě výsledky z jednotlivých případů do dané rovnice (1); obdržíme tyto rovnice pro hledané geometrické místo bodů (viz obr. 17):

- | | |
|-------------------------------------|----------------------------|
| (1) $0 \cdot x + 0 \cdot y + 8 = 0$ | (prázdná množina) |
| (2) $y = 6$ | (polopřímka AX) |
| (3) $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 = 0$ | (pravý úhel $\angle XAY$) |
| (4) $x = 5$ | (polopřímka BY') |
| (5) $x + y = 7$ | (úsečka AB) |

- (6) $x = 1$ (polopřímka AY)
 (7) $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$ (pravý úhel $\sphericalangle X'BY'$)
 (8) $y = 2$ (polopřímka BX')
 (9) $0 \cdot x + 0 \cdot y + 8 = 0$ (prázdná množina)

Přitom je $A = [1; 6]$, $B = [5; 2]$, $X = [-6; 6]$,
 $X' = [10; 2]$, $Y = [1; 9]$, $Y' = [5; -2]$.

Hledaná množina bodů tedy vyplní dva pravé úhly $\sphericalangle XAY$, $\sphericalangle X'BY'$ a úsečku AB . Tím je řešení úlohy provedeno.



Obr. 17

2. Jsou dány tři lineární rovnice s neznámými x, y

$$px + (p - 1)y = 7, \quad (1)$$

$$(p - 5)x + py = 4, \quad (2)$$

$$(4p + 5)x - py = 2p - 4. \quad (3)$$

Zjistěte, zda lze zvolit číslo p tak, aby všechny tři rovnice měly společné řešení.

Řešení. Jestliže je $p \neq 0$, plyne ze (2)

$$y = \frac{4 - (p - 5)x}{p}$$

a po dosazení do (1) máme

$$(6p - 5)x = 3p + 4. \quad (4)$$

Dále z (1) plyne

$$x = \frac{7 - (p - 1)y}{p}$$

a po dosazení do (2) obdržíme

$$(6p - 5)y = 35 - 3p. \quad (5)$$

Je-li $6p - 5 = 0$ neboli $p = \frac{5}{6}$, pak rovnice (4), (5) jsou podle x, y neřešitelné, neboť pak je $3p + 4 \neq 0$, $35 - 3p \neq 0$; soustava (1) až (3) je pro $p = \frac{5}{6}$ zřejmě neřešitelná.

Je-li však $6p - 5 \neq 0$, neboli $p \neq \frac{5}{6}$, $p \neq 0$, pak ze (4) a (5) dosadíme za x, y do (3); po úpravě dostáváme

$$(4p + 5)(3p + 4) - p(35 - 3p) = (2p - 4)(6p - 5),$$

neboli

$$p(p + 10) = 0.$$

Protože je $p \neq 0$, plyne odtud, že musí být $p + 10 = 0$, neboli

$$p = -10.$$

Daná soustava (1) až (3) pak zní

$$-10x - 11y = 7,$$

$$-15x - 10y = 4,$$

$$-35x + 10y = -24$$

a má vzhledem ke (4), (5) zřejmě řešení $x = \frac{2}{5}$, $y = -1$.

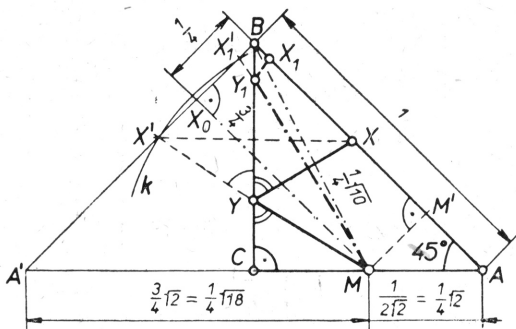
Jestliže je $p = 0$, má soustava (1) až (3) tvar

$$-y = 7, \quad -5x = 4, \quad 5x = -4;$$

její řešení pak je $x = -\frac{4}{5}, y = -7$.

Závěr. Daná soustava tří rovnic má řešení jen ve dvou případech, a to je-li $p = 0$ anebo $p = -10$; v obou případech má jediné řešení. Pro všechna ostatní reálná p nemá soustava řešení.

3. Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s přeponou AB délky 1 a kladné číslo d . Světelný paprsek vyslaný z bodu X ležícího mezi A, B se zrcadlově odrazí na odvěsni BC v bodě Y a dopadne do středu M odvěsny AC . Určete bod X tak, aby dráha $XY + YM$ paprsku měla délku d . Proveďte diskusi vzhledem k číslu d .



Obr. 18

Řešení (obr. 18). *Rozbor.* Jestliže bod X ležící mezi A, B je řešením úlohy a odraz paprsku se děje

v bodě Y mezi body B, C , potom platí

$$d = XY + YM, \quad \sphericalangle XYB = \sphericalangle MYC.$$

Označme A' obraz bodu A v souměrnosti o ose BC , takže $A'BC$ je v této souměrnosti obrazem trojúhelníka ABC a bod X' uvnitř úsečky $A'B$ je obrazem bodu X . Tu ze souměrnosti plyne

$$d = X'Y + YM, \quad \sphericalangle X'YB = \sphericalangle XYB,$$

tj. $\sphericalangle X'YB = \sphericalangle MYC$; oba tyto úhly jsou vrcholové, takže body M, Y, X' leží v téže přímce a $d = X'Y + YM = X'M$. Je tedy

$$MX' = d.$$

Odtud *konstrukce* (obr. 18): V souměrnosti o ose BC sestrojíme obraz A' bodu A a opíšeme kružnici $k \equiv (M, d)$. Je-li X' společný bod kružnice k a vnitřku úsečky $A'B$, potom určíme průsečík Y přímek MX' a BC ; dále označíme X obraz bodu X' v souměrnosti o ose BC . Pak XY je hledaný paprsek, který se odráží v bodě Y od BC a míří do bodu M . Důkaz je patrný z rozboru.

Diskuse. Z požadavku, že bod X má ležet mezi body A, B , vyplývá, že bod X' nutně musí padnout mezi body A', B (všimněme si též, že body přímky $A'B$ s výjimkou vnitřku úsečky $A'B$ nevedou k fyzikálnímu řešení úlohy).

Podle textu je $AB = 1$, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 45^\circ$. Proto po řadě platí

$$CB = CA = CA' = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$CM = AM = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{4} AA' = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$MA' = \frac{3}{2} CA = \frac{3}{4} \sqrt{2} = \frac{1}{4} \sqrt{18}. \quad (1)$$

Podle Pythagorovy věty pro trojúhelník BMC ($\sphericalangle C = 90^\circ$) je

$$MB = \sqrt{CB^2 + CM^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{5}{8}} = \frac{1}{4} \sqrt{10}, \quad (2)$$

takže je $MB < MA'$ [viz (2) a (1)].
Je-li X_0 pata kolmice vedené bodem M k přímkce BA' , je $MX_0 \parallel BA$, neboť je $\sphericalangle ABA' = 90^\circ$; je tedy

$$\frac{BX_0}{BA'} = \frac{AM}{AA'} = \frac{1}{4},$$

tj.

$$BX_0 = \frac{1}{4}.$$

Dále je

$$MX_0 = \frac{3}{4} AB = \frac{3}{4}. \quad (3)$$

Na základě toho provedeme diskusi řešitelnosti úlohy. Jestliže je:

$$[1] \quad d = MX_0 = \frac{3}{4},$$

má úloha jediné řešení [viz (3)];

$$[2] \quad MX_0 < d < MB$$

neboli

$$\frac{3}{4} < d < \frac{1}{4} \sqrt{10},$$

má úloha dvě řešení [viz (3) a (2)];

$$[3] \quad MB \leq d \leq MA'$$

neboli

$$\frac{1}{4} \sqrt{10} \leq d \leq \frac{3}{4} \sqrt{2},$$

má úloha jediné řešení [viz (2) a (1)]; přitom pro $d = \frac{3}{4} \sqrt{2}$ je $X \equiv A$ a jedná se o kolmý odraz paprsku XC od přímky BC .

... Neplatí-li pro číslo d žiadny z vztahů [1] až [3], nemá úloha řešení.

4. Daný je kváder $ABCD A' B' C' D'$, ktorého podstavou je štvorec so stranou dĺžky 1 a jeho výška je v . Bod X prebieha hranu CC' . Vyšetrite geometrické miesto bodov, ktoré sú pätami kolmíc spustených z bodu B na priamku AX . Možno zvolit výšku v tak, aby toto geometrické miesto obsahovalo aspoň jeden bod, ktorého vzdialenosť od podstavy kvádra je $\frac{1}{3}$?

Riešenie. Všetky trojuholníky ABX sú pravouhlé s preponou AX (obr. 19). Prepony všetkých týchto trojuholníkov ležia v rovine ACC' . Označme Y päť kolmice spustenej z bodu B na priamku AX . Pretože je uhol $\sphericalangle AYB$ pravý, ležia podľa Thaletovej vety všetky body Y na guľovej ploche K zostrojenej nad priemerom AB . Okrem toho ležia všetky body Y v rovine ACC' . Musia teda ležať na prieseku roviny ACC' s guľovou plochou K . Týmto priesekom je kružnica k s priemerom AS , kde bod S je stredom podstavy $ABCD$ a je jedným z bodov Y (dostaneme ho pre $X \equiv C$). Stred M kružnice k je pritom päť kolmice spustenej zo stredu plochy K na rovinu ACC' . Preto bod M leží na priamke AC a je teda stredom úsečky AS .

Na obr. 20 je znázornená situácia v rovine ACC' . Bod Y neprebíha celú kružnicu k , ale len jej oblúk ohraničený bodom S a priesečníkom H kružnice k s polpriamkou AC' . Poloha bodu H na k teda závisí od veľkosti úsečky CC' (v obr. 20 je vzhľadom na ďalšie zvolené $HM \perp AC$). Pritom ku každému bodu Y oblúku HS dokážeme nájsť na úsečke CC' príslušný bod X , pri ktorom je Y pätou kolmice vedenej bo-

75

6. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE C

1. Je-li x celé číslo, potom číslo $x^3 + 2x$ je dělitelné třemi; dokažte.

Řešení. Máme-li zkoumat dělitelnost čísla třemi, užijeme té skutečnosti, že každé celé číslo děleno třemi dává zbytek buď 0, nebo 1, nebo 2. Lze tedy psát číslo x v jednom z těchto tří tvarů

$$x = 3y, \quad (1)$$

$$x = 3y + 1, \quad (2)$$

$$x = 3y + 2, \quad (3)$$

kde y značí celé číslo. V každém z těchto případů nyní vypočteme $x^3 + 2x$.

V případě (1) je

$$x^3 + 2x = 27y^3 + 6y = 3(9y^2 + 2y),$$

což je číslo dělitelné třemi.

V případě (2) je

$$x^3 + 2x = 27y^3 + 27y^2 + 9y + 1 + 6y + 2 = 3a,$$

kde a je číslo celé; číslo $x^3 + 2x$ je tedy opět dělitelné třemi.

V případě (3) je

$$x^3 + 2x = 27y^3 + 54y^2 + 36y + 8 + 6y + 4 = 3b,$$

kde b je číslo celé; číslo $x^3 + 2x$ je tedy i v tomto případě dělitelné třemi.

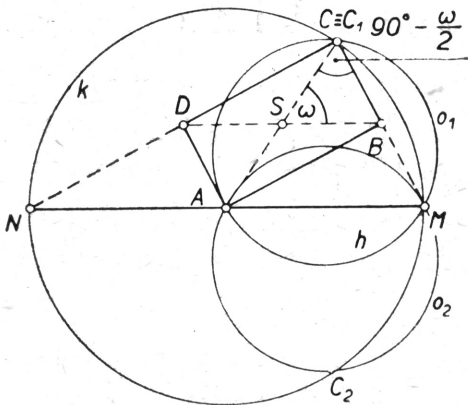
Tím je věta dokázána.

2. Je dána úsečka MN a uvnitř této úsečky je dán bod A ; dále je dán ostrý úhel ω .

Sestrojte obdélník $ABCD$ těchto vlastností:

- (1) Přímky CB , CD po řadě procházejí body M , N ;
- (2) je $AB > AD$;
- (3) úhel úhlopříček obdélníka je shodný s daným úhlem ω .

Řešení (obr. 21). Je třeba sestrojit tři neznámé vrcholy obdélníka, a to body B , C , D ; zřejmě postačí sestrojit bod C ; oba zbývající vrcholy B , D pak snadno doplníme jako paty kolmic spuštěných z bodu A na přímky CM , CN . Z této konstrukce vyplývá, že bod B leží mezi body C , M a bod D mezi body C , N .



Obr. 21

Pro bod C určíme dvě geometrická místa bodů. Předně protože $\sphericalangle MCN$ je pravý, leží bod C na Thaletově kružnici k sestrojené nad průměrem MN .

Za druhé vypočteme velikost úhlu $\sphericalangle ACM$. Je-li S středem hledaného obdélníka $ABCD$, je $\sphericalangle ASB > \sphericalangle ASD = \sphericalangle BSC$, neboť podle předpokladu je $AB > AD$. Z rovnoramenného trojúhelníka BCS zjistíme, že

$$\sphericalangle SCB = 90^\circ - \frac{\omega}{2}.$$

Protože body B, D, S leží po řadě uvnitř úseček CM, CN, CA , platí

$$\sphericalangle ACM = \sphericalangle SCB = 90^\circ - \frac{\omega}{2}. \quad (1)$$

Geometrickým místem bodů X , pro něž platí

$$\sphericalangle AXM = 90^\circ - \frac{\omega}{2},$$

jsou dva oblouky o_1, o_2 sestrojené nad třetivou AM ; oblouky o_1, o_2 jsou souměrně sdruženy podle přímky AM .

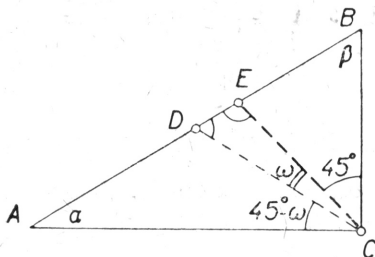
Každý z obou oblouků o_1, o_2 protne kružnici k mimo bod M ještě v jednom bodě. Skutečně kružnice h , již náleží oblouk o_1 , se nedotýká v bodě M kružnice k ; jinak by totiž měly kružnice k, h v bodě M společnou tečnu, která by byla kolmá k přímce AM , a oblouk o_1 by byl polokružnice. To však není možné, neboť obvodový úhel $\sphericalangle AXM$ je podle (1) ostrý.

Sestrojíme tedy dva průsečíky $C_1 \neq M, C_2 \neq M$ kružnice k s oblouky o_1, o_2 . Protože přímka AC_1 není kolmá k C_1M ani k C_1N (A leží mezi M, N a $C_1M \perp C_1N$), lze sestavit obdélník $AB_1C_1D_1$. Obdobně se sestaví obdélník $AB_2C_2D_2$.

Úloha má tedy vždy dvě řešení.

3. V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB označme D stred prepony a E priesečník osi uhla $\sphericalangle ACB$ s preponou AB . Zostrojte tento trojuholník, ak je daná dĺžka úsečky CE a veľkosť uhla $\sphericalangle DCE$. Zistite podmienky riešiteľnosti.

Řešení. Podaří-li se sestrojít trojúhelník CDE , doplníme snadno trojúhelník ABC , neboť podle známé vlastnosti pravoúhlého trojúhelníka je $DA = DB = DC$ (obr. 22).



Obr. 22

Z prvků trojúhelníka CDE je dána délka strany CE a velikost úhlu $\sphericalangle DCE = \omega$. Vypočteme velikost vnitřního úhlu $\sphericalangle CED$. Zvolme označení vrcholů A, B tak, aby bod E ležel mezi body B, D , a označme $\beta = \sphericalangle CBA$. Úhel $\sphericalangle CED$ určíme jako vnější úhel trojúhelníka BCE

$$\sphericalangle CED = 45^\circ + \beta. \quad (1)$$

Protože trojúhelník BCD je rovnoramenný, je

$$\beta = \sphericalangle CBD = \sphericalangle BCD = 45^\circ + \omega. \quad (2)$$

Spojením (1) a (2) dostaneme

$$\sphericalangle CED = 90^\circ + \omega.$$

Trojúhelník CDE sestrojíme ze strany CE a z obou přilehlých úhlů $\sphericalangle DCE = \omega$ a $\sphericalangle CED = 90^\circ + \omega$. Obě ramena těchto úhlů, která neleží v přímce CE , se protnou podle Euklidova axiómu (v bodě D) právě tehdy, je-li $\omega + 90^\circ + \omega < 180^\circ$ neboli

$$\omega < 45^\circ. \quad (3)$$

Když máme doplnit trojúhelník CDE na trojúhelník ABC , je třeba, aby bylo $DA = DB = DC > DE$. Porovnáme tedy délky stran CD, DE trojúhelníka CDE pomocí protějších úhlů. Nerovnost $DE < CD$ skutečně platí, neboť je

$$\omega = \sphericalangle DCE < \sphericalangle CED = 90^\circ + \omega.$$

Vztah (3) je tedy podmínkou řešitelnosti úlohy.

4. Nájďte všetky prirodzené čísla, ktoré nie je možné vyjadriť ako súčet dvoch zložených čísel (prirodzených).

Riešenie. V ďalšom budeme rozumiť pod číslom prirodzené číslo. Párne číslo môžeme napísať ako súčet dvoch párných čísel. Nepárne číslo možno zapísať ako súčet nepárneho a párneho čísla. Najmenšie párne zložené číslo sú 4, kým najmenšie nepárne zložené číslo je 9.

Najskôr nájdeme všetky prirodzené čísla, ktoré možno vyjadriť ako súčet dvoch zložených čísel. Rozoznávajme v ďalšom dva prípady:

Prípad [1]. Nech N je párne číslo. Potom možno

nájsť jediné číslo p tak, že platí $N = 2p$ čiže $N = 4 + 2(p - 2)$.

Ak je $p - 2 \geq 2$ čiže $p \geq 4$, potom číslo N možno zrejme rozložiť na súčet dvoch zložených čísel. To znamená, že žiadne párne číslo $N \geq 8$ nevyhovuje požiadavke úlohy, zatiaľ čo čísla

$$4, 6 \quad (1)$$

zrejme túto požiadavku spĺňajú.

Prípád [2]. Nech N je nepárne číslo. Potom existuje jediné číslo p tak, že platí $N = 2p + 1$ čiže $N = 9 + 2(p - 4)$.

Ak je $p - 4 \geq 2$ čiže $p \geq 6$, potom číslo N možno zrejme rozložiť na súčet dvoch zložených čísel. To znamená, že žiadne nepárne číslo $N \geq 13$ nevyhovuje požiadavke úlohy, zatiaľ čo čísla

$$3, 5, 7, 9, 11 \quad (2)$$

požiadavky úlohy spĺňajú.

Záver. Čísla (1) a (2) sú všetky prirodzené čísla, ktoré spĺňajú požiadavky danej úlohy.

5. Daná je železná kocka s hranou dĺžky h . Z nej boli vyrezané rovnaké otvory tvaru pravidelného štvorbokého hranola s podstavnou hranou dĺžky x . Bočné hrany všetkých otvorov sú rovnobežné s určitou hranou kocky. Tak vzniklo teleso s dutinami, ktorého povrch je približne rovný dvojnásobku povrchu pôvodnej kocky a jeho váha sa približne rovná $\frac{3}{4}$ váhy pôvodnej kocky.

Určite počet otvorov a dĺžku x .

Riešenie. Označme $V = h^3$, $P = 6h^2$ objem a povrch kocky. Objem jednej dutiny je $V_1 = x^2h$ a po-

vrch P jednou dutinou vzrastie o $P_1 = 4xh - 2x^2$.
 Nech n je prirodzené číslo, ktoré znamená počet dutín.
 Ďalej nech je V', P' objem a povrch telesa, ktoré z danej
 kocky vzniklo tak, že sme v nej vytvorili n dutín. Podľa
 textu úlohy má platiť:

$$P' \doteq 2P, \quad (1)$$

$$V' \doteq \frac{3}{4} V. \quad (2)$$

Povrch P vzrastie o nP_1 na $P' \doteq 2P$, tj. $nP_1 \doteq P$
 čiže

$$n(4xh - 2x^2) \doteq 6h^2.$$

Teda

$$n \doteq \frac{3h^2}{x(2h - x)}. \quad (3)$$

O objeme vzniklého telesa platí podľa vzťahu (2)

$$h^3 - nx^2h \doteq \frac{3}{4} h^3$$

čiže

$$n \doteq \frac{h^2}{4x^2}. \quad (4)$$

Porovnaním vzťahov (3) a (4) dostaneme

$$\frac{3h^2}{2hx - x^2} \doteq \frac{h^2}{4x^2}.$$

Postupnými úpravami stadiaľ dostaneme (je $h \neq 0$,
 $x \neq 0$):

$$\begin{aligned} \frac{3}{2h - x} &\doteq \frac{1}{4x}, \\ 12x &\doteq 2h - x, \\ 13x &\doteq 2h, \\ x &\doteq \frac{2}{13} h. \end{aligned} \quad (5)$$

Po dosadení do (4) máme pre n približnú rovnosť:

$$n \doteq h^2 : (4 \cdot \frac{4}{169} h^2) = \frac{169}{16}.$$

Je teda

$$10 < n < 11.$$

Skúška. Pre $n = 11$ je:

$$\begin{aligned} \text{a) } P' &= 6h^2 + 4xhn - 2nx^2 = 6h^2 + 2nx(2h - x) = \\ &= 6h^2 + \frac{2 \cdot 11 \cdot 2h}{13} \left(2h - \frac{2h}{13}\right) = \\ &= 6h^2 + \frac{88}{13} \cdot \frac{12h^2}{13} = \frac{6h^2}{13^2} \cdot (169 + 176) = \\ &= \frac{6h^2}{169} \cdot (2 \cdot 169 + 7) = 6h^2 \cdot \left(2 + \frac{7}{169}\right) > 2P. \end{aligned}$$

Teda $P' > 2P$, pričom P' je len o málo väčšie než $2P$.

b) Má byť $V' = h^3 - n \cdot x^2 \cdot h \doteq \frac{3}{4} h^3$.

Po dosadení z (5) pri $n = 11$ je

$$\begin{aligned} V' &= h^3 \left(1 - \frac{44}{169}\right) = \frac{125}{169} h^3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{125 \cdot 4}{169 \cdot 3} h^3 = \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{500}{507} h^3. \end{aligned}$$

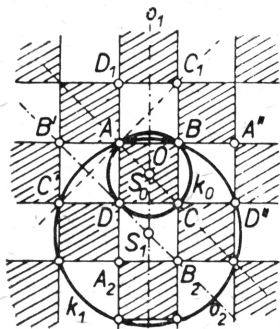
Teda V' je o málo menšie ako $\frac{3}{4} V$.

Záverom treba konštatovať, že do kocky s hranou h možno skutočne umiestniť 11 otvorov tvaru kvádra s rozmermi $\frac{2}{13}h$, $\frac{2}{13}h$, h tak, ako to text úlohy vyžaduje.

6. Na šachovnici se 64 poli byly sestrojeny všechny kružnice, jejichž průměr není menší než délka jednoho

pole a které neprocházejí vnitřkem žádného černého pole. Určete počet těchto kružnic.

Řešení. Užijeme označení z obr. 23. Čtvercová pole šachovnice budeme krátce nazývat poli; vrcholy polí tvoří čtvercovou síť, délku strany pole označme $2d$. Podle textu úlohy platí o průměru x hledaných kružnic vztah $x \geq 2d$. Pro $x = 2d$ dostaneme zřejmě 32 kružnic vepsaných do bílých polí. V dalším předpokládáme, že je $x > 2d$.



Obr. 23

Buď $ABCD$ černé pole a ABC_1D_1 , $AB'C'D$, A_2B_2CD , $A''BCD$ bílá bezprostředně s ním sousedící pole. Mějme kružnici k , která splňuje požadavky úlohy. Tato kruž-

nice nemůže zřejmě ležet v jediném poli, takže prochází několika poli. Z jednoho pole do druhého (jde vesměs o bílá pole) může přejít jedině ve vrcholu pole (v bodu sítě). Nechť tedy k jde vrcholem A , takže prochází polem ABC_1D_1 ; potom musí procházet ještě buď vrcholem B , anebo vrcholem C_1 (vrchol D_1 při této úvaze můžeme vynechat; situace, kdy kružnice jde body A, D_1 , se dostane ze situace, kdy kružnice jde body A, B , a to pomocí osově souměrnosti podle přímky AC_1).

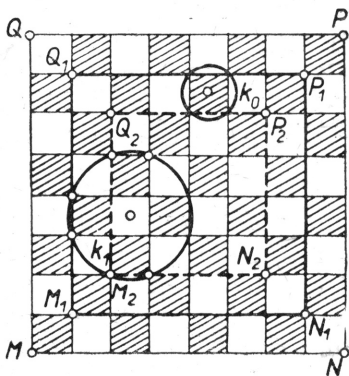
Uvažujme nejprve případ, kdy kružnice k prochází body A, B . Nyní v poli $AB'C'D$ kružnice k prochází

buď bodem D , anebo bodem C' (bodem B' neprochází, neboť body B , A , B' leží v téže přímce).

Případ [1]. Nechť kružnice k prochází bodem D , neboli je opsána černému čtverci $ABCD$; označme ji $k_0 \equiv (S_0, r_0)$, kde $r_0 = d\sqrt{2}$. Těchto kružnic je tolik jako černých polí, které nepatří k okrajovým řadám polí šachovnice; je jich tedy $\frac{1}{2}(8-2)(8-2) = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18$ (viz v obr. 24 čtverec $M_1N_1P_1Q_1$ o délce strany $6 \cdot 2d$).

Případ [2]. Nechť kružnice k prochází bodem C' , neboli je opsána trojúhelníku ABC' ; označme ji $k_1 \equiv (S_1, r_1)$. Přitom S_1 je průsečíkem přímek o_1, o_2 , kde o_1 je osa úsečky AB a $o_2 \equiv DB'$; bod S_1 je tedy středem bílého čtverce A_2B_2CD . Z trojúhelníka AS_1O (tj. $\sphericalangle O = 90^\circ$) pro její poloměr $r_1 = S_1A$ dostaneme pomocí Pythagorovy věty $AS_1^2 = OA^2 + OS_1^2$, neboli $r_1 = d\sqrt{10}$, kde $3d < r_1 < 4d$.

Střed S_1 kružnice k_1 je středem bílého pole; kružnice k_1 probíhá těmi bílými poli, jejichž nejvzdálenější strany mají od S_1 vzdálenost nejvýše $5d$ (např. vzdálenost bodu S_1 od přímky C_1D_1). Počet kružnic typu k_1 je roven počtu bílých polí, která dostaneme, když vynecháme z dané šachovnice $MNPQ$ nejprve všechny okrajové řady šachovnice a ve vzniklé šachovnici $M_1N_1P_1Q_1$



Obr. 24

o $6 \cdot 6 = 36$ polích opět vynecháme všechny okrajové řady; zbude nám čtverec $M_2N_2P_2Q_2$, který má $4 \cdot 4 = 16$ polí, z něhož 8 je bílých. Kružnic typu k_1 je tedy 8. Tím je případ [2] vyřízen.

Nyní budeme uvažovat případ, že kružnice k prochází body A, C_1 (bodem C' neprochází, neboť body C_1, A, C' leží v téže přímce); potom ze čtverce $AB'C'D$ tato kružnice vychází buď ve vrcholu D , anebo ve vrcholu B' . Platí však

$$\triangle DAC_1 \cong \triangle ABC' \cong \triangle B'AC_1,$$

takže jde o kružnici typu k_1 , která je opsána trojúhelníku ABC' , a kterou jsme právě vyšetřovali.

Tím jsou všechny možnosti vyčerpány.

Závěr. Jsou tři typy kružnic vyhovujících úloze. První typ jsou kružnice opsané těm černým polím, které nejsou v okrajových řadách šachovnice (pole čtverce $M_1N_1P_1Q_1$); těchto kružnic je 18. Druhý typ jsou kružnice opsané ze středů osmi bílých polí čtverce $M_2N_2P_2Q_2$ na obr. 24 poloměrem $d/\sqrt{10}$, kde $2d$ je délka strany pole; těchto kružnic je 8. Třetím typem jsou kružnice vepsané bílým polím, kterých je 32. Hledaný počet kružnic je tedy $18 + 8 + 32 = 58$.

7. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE C

1. Přirozené číslo x je dělitelné šestnácti, jeho ciferný součet v desítkové soustavě je 7, součin jeho číslic je 6. Určete všechna taková čísla x .

Řešení. Vzhledem k tomu, že ciferný součet hledaného čísla x je 7, kdežto součin cifer je 6, jsou

jedině možné tyto dva rozklady čísla 6 v součin:

$$6 = 6 \cdot 1, \quad (1)$$

$$6 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1. \quad (2)$$

První rozklad vede k dvojčífernému, druhý ke čtyřčífernému číslu. Přitom musí být hledaná čísla dělitelná šestnácti a tedy i čtyřmi; vyhledáme proto nejprve čísla dělitelná čtyřmi; ta mají nutně poslední dvojčíslí dělitelné čtyřmi.

Případ [1]. Rozklad (1) vede jediné k číslu 16, které splňuje požadavky úlohy.

Případ [2]. Poslední dvojčíslí hledaného čísla musí mít na konci cifru 2, a může tedy to být buď 12, anebo 32.

a) Před dvojčíslí 12 musíme vzhledem k rozkladu (2) napsat cifry 1 a 3, což lze učinit dvěma způsoby, a to:

1312, 3112.

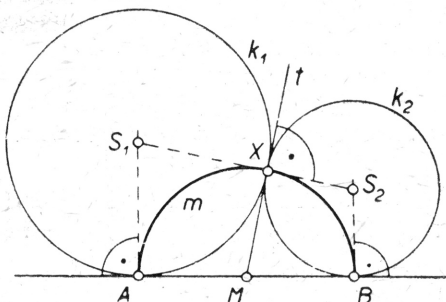
Z obou čísel je jediné číslo 1312 dělitelné šestnácti.

b) Před dvojčíslí 32 musíme vzhledem k rozkladu (2) napsat dvě cifry 1, což vede k jedinému číslu 1132, které zřejmě není dělitelné šestnácti (dokonce ani osmi).

Závěr. Úloze vyhovují právě dvě přirozená čísla, a to 16 a 1312.

2. Daná je priamka AB . Kružnice k_1, k_2 sa dotýkajú priamky AB po rade v bodoch A, B a majú navzájom vonkajší dotyk v bode X . Vyšetrite, aký útvar vyplnia všetky body dotyku X pre všetky možné také dvojice kružníc k_1, k_2 .

Riešenie (obr. 25). Zostrojme spoločnú dotýčnicu t kružníc k_1, k_2 v bode X . Priamka t nie je rovnobežná s priamkou AB , lebo je $t \perp S_1S_2$ (S_1, S_2 sú stredy kružníc k_1, k_2) a S_1S_2 nie je kolmicou k AB (je totiž



Obr. 25

$S_1A \perp AB, S_2B \perp AB, S_1A \neq S_2B$). Priamka t pretne teda priamku AB v nejakom bode M . Dotýčnice vedené z bodu M ku kružnici k_1 sú priamky $AM \equiv AB$ a t . Body dotyku sú A a X , preto je

$$AM = MX.$$

Z podobného dôvodu je

$$BM = MX.$$

Z toho vyplýva $AM = BM = \frac{1}{2}AB$. Bod M je preto stredom úsečky AB , takže bod X leží na kružnici m zostrojenej nad priemerom AB v danej polrovine s hranicou AB .

Obrátene, každým bodom X (rôznym od bodov A, B) kružnice m prechádza jediná kružnica k_1 , ktorá sa dotýka priamky AB v bode A a jediná kružnica k_2 ,

ktorá sa dotýká priamky AB v bode B . Pretože je $MA = MX$, je X bodom dotyku dotýčnice vedenej z bodu M ku kružnici k_1 a z podobného dôvodu je X tiež bodom dotyku dotýčnice vedenej z bodu M ku kružnici k_2 . Priamka MX sa teda dotýka oboch kružníc k_1, k_2 v bode X . Dotyk oboch kružníc je vonkajší, pretože kružnica k_2 obsahuje bod B ležiaci mimo kružnice k_1 (na jej dotýčnici) a kružnica k_1 obsahuje bod A ležiaci mimo k_2 (na jej dotýčnici).

Záver. Hľadané geometrické miesto bodov je kružnica m bez bodov A, B . Úsečka AB je jej priemerom.

3. Řešte podle neznámých x, y, z soustavu rovnic s reálným parametrem p :

$$x - py + p^2z = 1, \quad (1)$$

$$-p^3x + y - pz = 1, \quad (2)$$

$$p^2x - p^3y + z = 1. \quad (3)$$

Proveďte diskusi vzhledem k parametru p .

Řešení. Obě strany rovnice (2) znásobíme číslem p a přičteme ji k rovnici (1); dostaneme

$$x(1 - p^4) = 1 + p. \quad (4)$$

Nyní znásobíme obě strany rovnice (3) číslem p a přičteme ji k rovnici (2); obdržíme

$$y(1 - p^4) = 1 + p. \quad (5)$$

Konečně znásobíme rovnici (1) číslem $-p^2$ a přičteme ji k rovnici (3); dostaneme

$$z(1 - p^4) = 1 - p^2. \quad (6)$$

Protože platí $1 - p^4 = (1 - p)(1 + p)(1 + p^2)$, je $1 - p^4 = 0$ jedině pro $p = 1$ a $p = -1$. Je-li $p \neq \pm 1$, potom ze (4) až (6) dostáváme jediné řešení, a to

$$x = y = \frac{1}{(1-p)(1+p^2)}, z = \frac{1}{1+p^2}. \quad (7)$$

Tato čísla x, y, z skutečně jsou řešením rovnic (1) až (3), jak se zjistí dosazením.

Pro $p = 1$ soustava (1) až (3) zní

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1, \\ -x + y - z &= 1, \\ x - y + z &= 1 \end{aligned}$$

a nemá řešení; sečtením prvních dvou rovnic dostaneme spor $0 = 2$.

Pro $p = -1$ soustava (1) až (3) zní

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x + y + z &= 1, \\ x + y + z &= 1, \end{aligned}$$

takže každé řešení rovnice $x + y + z = 1$ je řešením soustavy. Můžeme např. volit čísla y, z ; pak je $x = 1 - y - z$. Soustava má nekonečně mnoho (různých) řešení.

Závěr. Daná soustava má pro každé reálné číslo p různé od 1 nebo -1 řešení dané vztahy (7). Pro $p = 1$ nemá žádné řešení a pro $p = -1$ má nekonečně mnoho řešení $[x = 1 - y - z, y, z]$, při čemž y, z jsou libovolná čísla.

4. Je daný ústrižok plechu v tvare rovnoramenného trojuholníka s podstavou dĺžky 22 cm a ramenom dĺžky 35 cm. Zistite, či možno z tohto plechu vystrihnúť sieť kocky s hranou dĺžky 6 cm tak, aby táto sieť mala tvar písmena T.

Výsledok odôvodnite výpočtom.

Riešenie. (Dĺžky úsečiek sú v cm.) Sieť danej kocky voľme v tvare nevypuklého osemuholníka $ABCDEFGH$

Strány štvorcov siete majú dĺžku $d = 6$. Teraz sa budeme zaoberať pravouhlými trojuholníkmi CLB , ECD , EMP (kde po rade $\sphericalangle B = \sphericalangle D = \sphericalangle P = 90^\circ$ a $\sphericalangle L = \sphericalangle C = \sphericalangle E$). Z podobnosti týchto troch trojuholníkov, ktoré sa okrem pravých uhlov zhodujú tiež v ostrých uhloch $\sphericalangle L$, $\sphericalangle C$, $\sphericalangle E$, vyplý-


$$3 = \frac{BC}{BL} = \frac{6}{BL}; \quad 3 = \frac{PM}{PE} = \frac{PM}{3}.$$
$$\begin{aligned} BL &= 2, \quad MP = 9, \\ MN &= MP + PN = MP + 24 = 33. \end{aligned} \quad (1)$$

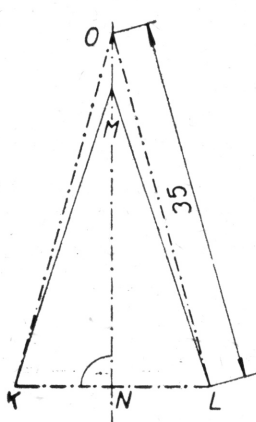
91

$$CL = \sqrt{BC^2 + BL^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10},$$

$$EC = \sqrt{DE^2 + DC^2} = \sqrt{18^2 + 6^2} = 6\sqrt{9 + 1} = 6\sqrt{10},$$

$$ME = \sqrt{MP^2 + PE^2} = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{9 + 1} = 3\sqrt{10}.$$

Sčítaním týchto troch úsečiek dostaneme



Obr. 27

$$ML = 11\sqrt{10},$$

kde $\sqrt{10} < 3,17$, a teda

$$ML < 35. \quad (2)$$

Pritom podľa (1) je

$$KL = KA + AB + BL =$$

$$= 2 \cdot BL + AB =$$

$$= 2 \cdot 2 + 18 = 22.$$

Teda

$$KL = 22. \quad (3)$$

Pomocný rovnoramenný trojuholník MKL so základňou $KL = 22$ a s ramenom $ML < 35$, do ktorého sa celá sieť kocky vojde, má s daným trojuholníkom KLO

(tvaru ústrižku) zhodnú základňu, ale rameno ML je menšie ako rameno daného trojuholníka KLO . Celý trojuholník MLK sa teda vojde do trojuholníka KLO ako na obr. 27. Preto sa tam vojde aj nami pôvodne narysovaná sieť kocky, t.j. sieť kocky sa dá skutočne vystrihnúť z daného ústrižku plechu. Tým je riešenie úlohy prevedené.

8. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE D

1. Dielňa v 1. týždni splnila plán, t.j. vyrobila n kusov výrobkov. V 2. týždni poklesla výroba oproti 1. týždňu o p %.

O koľko percent musela dielňa zvýšiť svoj výkon z druhého týždňa v treťom týždni, aby na konci týždňa bol splnený trojtýždenný plán?

Na záver prevedte výpočet pre $p = 10$.

Riešenie. V prvom týždni vyrobila dielňa n výrobkov. V druhom týždni vyrobila dielňa

$$v = n - \frac{np}{100} = \frac{n(100 - p)}{100} \quad (1)$$

výrobkov. V treťom týždni musí zvýšiť výrobu z druhého týždňa o x percent, takže musí vyrobiť

$$v + \frac{vx}{100} \quad (2)$$

výrobkov. Toto číslo sa rovná súčtu jednak tých n výrobkov, ktoré boli pôvodne plánované na tretí týždeň, jednak tých $\frac{np}{100}$ výrobkov, ktoré neboli vyrobené v druhom týždni, t.j. číslu

$$n + \frac{np}{100} \quad (3)$$

výrobkov.

Porovnaním (2) a (3) dostávame lineárnu rovnicu pre neznámu x :

$$v + \frac{vx}{100} = n + \frac{np}{100}.$$

Po vynásobení tejto rovnice číslom $\frac{100}{v}$ a po úprave dostaneme:

$$x = \frac{n(100 + p)}{v} - 100. \quad (4)$$

Po dosadení za v z (1) do (4) postupne dostaneme:

$$\begin{aligned} x &= n(100 + p) \cdot \frac{100}{n(100 - p)} - 100, \\ x &= \frac{100(100 + p)}{100 - p} - 100 = \\ &= 100 \cdot \frac{100 + p - (100 - p)}{100 - p} = \frac{200p}{100 - p}. \end{aligned}$$

Dielňa musí teda svoj výkon z druhého týždňa zvýšiť o

$$x = \frac{200p}{100 - p} \text{ percent.}$$

Příklad. V prípade, keď je $p = 10$ (to znamená, že v druhom týždni podala dielňa 90-percentný výkon), dostávame

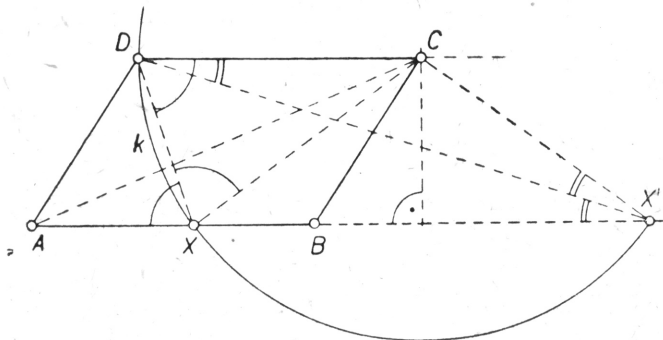
$$= x \cdot \frac{2000}{90} = \frac{200}{9} = 22 \frac{2}{9} < 22,3.$$

Ak chce teda dielňa dohnať svoje oneskorenie z druhého týždňa, musí svoj výkon z tohto týždňa v treťom týždni zvýšiť asi o 22,3 %.

2. Daný je rovnobežník $ABCD$, v ktorom $AB > BC$ a uhol $\sphericalangle DAB$ je ostrý. Na priamke AB zostrojte ten bod X , z ktorého vidno úsečky AD , CD pod zhodnými uhlami.

Vyšetrite polohu bodu X vzhľadom na úsečku AB .

Řešení (obr. 28). Podle podmínky úlohy je $\sphericalangle AXD = \sphericalangle DXC$. Podle věty o střídavých úhlech je $\sphericalangle AXD = \sphericalangle XDC$. Trojúhelník DXC je tedy rovnoramenný se základnou DX . Odtud vyplývá konstrukce bodu X : je to společný bod přímky AB a kružnice $k \equiv (C; CD)$.



Obr. 28

Kružnice k má s přímkou AB společný aspoň jeden bod náležející polopřímce BA právě tehdy, je-li $CD \geq CB$ neboli $AB \geq BC$; tato podmínka je však splněna podle znění textu úlohy. Tento bod náleží úsečce AB , neboť podle předpokladu je $\sphericalangle DAB$ ostrý, tj. úhel $\sphericalangle ADC$ je tupý a z trojúhelníka ACD pak vyplývá $AC > CD$. Přitom kružnice k protne úsečku AB v jediném bodě X , neboť $\sphericalangle ABC$ je tupý; proto bod X' souměrně sdružený s X podle kolmice

$p \perp AB$ vedené bodem C padne na prodloužení úsečky AB za bod B , přičemž X' leží též na k . Oba body X, X' tedy zřejmě vyhovují požadavkům úlohy, která má dvě řešení.

3. Určete všechny dvojice přirozených čísel x, y , které vyhovují rovnici

$$5x + 7y^2 = 1600. \quad (1)$$

Řešení. Jestliže dvojice přirozených čísel x, y splňuje rovnici (1), potom platí

$$x = 320 - y^2 - \frac{2y^2}{5}. \quad (2)$$

Číslo $2y^2$ musí být dělitelné pěti; to znamená, že i číslo y^2 musí být dělitelné pěti (tj. musí končit nulou nebo pětkou). To znamená dále, že i číslo y musí být dělitelné pěti (snadno se přesvědčíme, že druhé mocniny těch přirozených čísel, která nekončí nulou nebo pětkou, nikdy nekončí nulou nebo pětkou). Číslo y je tedy násobkem pěti, tj. má tvar

$$y = 5z, \quad (3)$$

kde z je přirozené číslo. Po dosazení do (2) dostaneme

$$x = 320 - 35z^2$$

neboli

$$x = 5(64 - 7z^2). \quad (4)$$

Číslo $64 - 7z^2$ je celé a kladné (jinak by nebylo číslo x přirozené); sestavme tabulku tak, že budeme volit číslo $z = 1, 2, 3$ (pro $z \geq 4$ je $64 - 7z^2$, a tedy i číslo x záporné). Určíme ze (3) a (4) čísla x, y :

z	1	2	3
$64 - 7z^2$	57	36	1
x	285	180	5
y	5	10	15

Proveďme nyní zkoušku; skutečně platí:

- a) $5 \cdot 285 + 7 \cdot 5^2 = 1425 + 175 = 1600$;
- b) $5 \cdot 180 + 7 \cdot 10^2 = 900 + 700 = 1600$;
- c) $5 \cdot 5 + 7 \cdot 15^2 = 25 + 1575 = 1600$.

Jsou právě tři dvojice přirozených čísel, které splňují rovnici (1); jsou to dvojice: $x = 285, y = 5$; $x = 180, y = 10$; $x = 5, y = 15$.

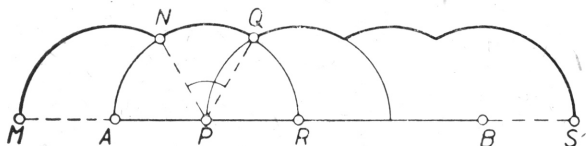
Jiné řešení. Rovnici (1) postupně upravujeme takto

$$x = \frac{1600 - 7y^2}{5},$$

$$x = \frac{7(228 - y^2) + 4}{5}. \quad (5)$$

Nyní $228 - y^2$ musí být přirozené číslo, tj. nejvýše může být $y^2 = 225 = 15^2$. Vyzkoušejme čísla od $y = 1$ do $y = 15$ dosazením do (5); snadno zjistíme, že jediné čísla $y = 5, y = 10, y = 15$ vedou k vyhovujícím dvojicím $[x = 285, y = 5], [x = 180, y = 10], [x = 5, y = 15]$.

4. Úsečka AB délky d je rozdělena na n zhodných úsečiek; z koncových bodov týchto úsečiek sú opísané kružnice polomerom $\frac{d}{n}$. Vypočítajte dĺžku čiary, ktorá sa skladá z hrubo vytiahnutých oblúkov kružníc, a dokažte, že pre každé číslo n je dĺžka tejto čiary väčšia ako d (pozri obr. 29).



Obr. 29

Řešení (obr. 29). Zaveďme označení podle obrázku; přitom je $AP = \frac{d}{n}$, kde n je libovolné přirozené číslo.

Označme x délku silně narýsované čáry.

Poloměry shodných kružnic mají velikost $r = \frac{d}{n}$.

Oblouky, s výjimkou prvního a posledního oblouku čáry, přísluší ke středovým úhlům velikosti 60° ; např. je $\sphericalangle NPQ = 60^\circ$, neboť trojúhelníky APN , PRQ a tím i NPQ jsou rovnostranné. Délka y každého z těchto oblouků, jichž je celkem $n - 1$, je

$$y = \frac{1}{6} \cdot 2 \pi r = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{d}{n} = \frac{\pi d}{3n}.$$

První a poslední oblouk naší čáry přísluší ke středovým úhlům 120° (je $\sphericalangle MAN = 120^\circ$), tj. každý má délku $2y$.

Je tedy

$$\begin{aligned}x &= (n-1)y + 2 \cdot 2y = (n+3)y \\ \text{neboli} \quad x &= \frac{\pi(n+3)}{3n} \cdot d.\end{aligned}\quad (1)$$

Ještě dokážeme, že je $x > d$ pro každé přirozené číslo n .

Vzorec (1) napíšeme ve tvaru

$$x = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{n+3}{n} \cdot d = \frac{\pi}{3} \cdot \left(1 + \frac{3}{n}\right) \cdot d.$$

Víme, že je $\frac{\pi}{3} > 1$, $1 + \frac{3}{n} > 1$, proto je $\frac{\pi}{3} \left(1 + \frac{3}{n}\right) > 1$,
 $x > d$.

5. Je dán čtverec $ABCD$ o délce strany a a čtverec $MNPQ$ o délce strany b , přičemž je $a > b$; vrcholy M, N, P, Q leží na úhlopříčkách AC, BD (viz obr. 30).

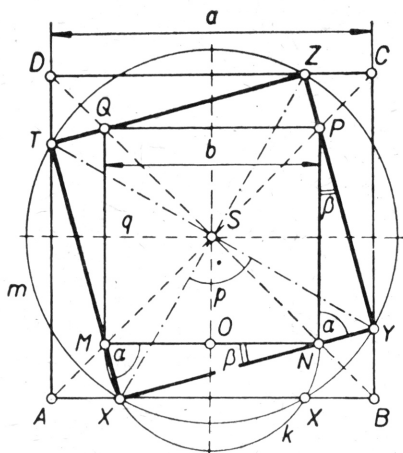
Sestrojte čtverec $XYZT$ tak, aby jeho vrcholy ležely na obvodu čtverce $ABCD$ a aby body M, N, P, Q ležely na obvodu čtverce $XYZT$.

Stanovte počet řešení úlohy vzhledem k daným číslům a, b .

Řešení. *Rozbor* (viz obr. 30). Označme S společný střed čtverců $ABCD, MNPQ$ a $p \parallel BC, q \parallel AB$ rovnoběžky vedené bodem S ke stranám obou čtverců.

Předpokládejme, že jsme sestrojili hledaný čtverec $XYZT$. Potom je trojúhelník MNX pravoúhlý s přeponou MN o středu O ; Thaletova kružnice $k \equiv (O, \frac{1}{2}b)$ nutně obsahuje vrchol X pravého úhlu $\sphericalangle MXN$.

Odtud plyne *konstrukce*: Sestrojme kružnici $k \equiv$



Obr. 30

$\equiv (O, r = \frac{1}{2}b)$ nad úsečkou MN jako průměrem a označme X jeden z jejich společných bodů s přímkou AB .

Opišme kružnici $m \equiv (S; SX)$; na ní leží další vrcholy Y, Z, T hledaného čtverce $XYZT$, přičemž je např. $BY = AX$ atd.

Důkaz. Otočme celý útvar okolo bodu S o pravý úhel tak, že bod A přejde v B , bod M v N a bod B v C atd. (víme, že je to možné, neboť $SA = SB, SM = SN$). Přitom úsečka AB přejde v úsečku BC a bod X v bod Y ; je tedy $SX = SY$. Pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník $XY S$ snadno doplníme na čtverec $XYZT$ pomocí souměrnosti o středu S , podle něhož oba dané čtverce jsou souměrné.

Ještě musíme dokázat, že bod N leží na přímce XY . Označme α, β ostré úhly $\sphericalangle M, \sphericalangle N$ v pravoúhlém

trojúhelníku MXN ; víme, že je

$$\alpha + \beta = 90^\circ. \quad (1)$$

Víme dále, že je

$$\triangle MNX \cong \triangle NPY,$$

neboť při otáčení, které jsme při konstrukci bodu Y prováděli, přešel první trojúhelník ve druhý. Je tedy $\sphericalangle YNP = \alpha$. A nyní vzhledem k (1) platí

$$\sphericalangle XNM + \sphericalangle MNP + \sphericalangle YNP = \beta + 90^\circ + \alpha = 180^\circ;$$

proto polopřímky NX , NY tvoří přímý úhel, tj. body X , N , Y leží v přímce. Tím je důkaz proveden.

Diskuse. Počet řešení závisí na vzájemné poloze přímky AB a kružnice k . Vzdálenost v jejího středu O od AB je $v = \frac{1}{2}(a - b)$, její poloměr je $r = \frac{1}{2}b$. Podle známé věty o vzájemné poloze přímky a kružnice dospějeme k tomuto výsledku:

Je-li $v < r$ neboli $a - b < b$, tj.

$$b < a < 2b,$$

jsou dvě různá řešení $XYZT$, $X'Y'Z'T'$, souměrně sdružená podle středních příček čtverců $ABCD$, $MNPQ$.

Je-li $v = r$ neboli

$$a = 2b,$$

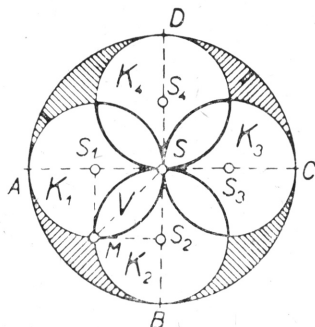
je jediné řešení $XYZT$, kde X je střed úsečky AB .

Je-li $v > r$ neboli

$$a > 2b,$$

nemá úloha řešení.

6. Je daný kruh K so stredom S a polomerom r . Bodom S vedieme dva kolmé priemery AC , BD tohto kruhu. Nad úsečkami SA , SB , SC , SD ako



Obr. 31.

priemermizostrojímekruhy K_1 , K_2 , K_3 , K_4 (pozri obr. 31). Vypočítajte obsah P štvorlístka, ktorého každý lístok je spoločnou časťou niektorých dvoch kruhov.

Ďalej vypočítajte obsah Q vyšrafovanej časti roviny, ktorá vznikne oddelením kruhov K_1 , K_2 , K_3 , K_4 od kruhu K .

Riešenie. Označme (pozri obr. 31) po rade S_1 , S_2 , S_3 , S_4 stredy kruhov K_1 , K_2 , K_3 , K_4 , ktorých polomery sú $\frac{1}{2}r$. Kružnice $k_1 \equiv (S_1, \frac{1}{2}r)$, $k_2 \equiv (S_2, \frac{1}{2}r)$ majú okrem bodu S spoločný bod M , pričom je $\frac{1}{2}r = S_1S = S_2S = S_1M = S_2M$, $\sphericalangle S_1SS_2 = 90^\circ$. SS_1MS_2 je tedy štvorec a platí

$$\sphericalangle SS_1M = \sphericalangle SS_2M = 90^\circ.$$

Označme V obsah spoločnej časti kruhov K_1 , K_2 . Úseč kruhu K_1 prislúchajúca pravému stredovému uhlu SS_1M má obsah $\frac{1}{2}V$. Obsah x tejto úseče však vieme vypočítať. Číslo x je rozdiel štvrtiny obsahu kruhu K_1 a obsahu trojuholníka SMS_1 , v ktorom je $S_1M = S_1S = \frac{1}{2}r$, $\sphericalangle S_1 = 90^\circ$. Platí teda

$$x = \frac{1}{4} \pi \left(\frac{1}{2} r \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} r \right)^2 = \frac{\pi - 2}{16} r^2.$$

Pre obsah V dostávame teda

$$V = \frac{\pi - 2}{8} r^2,$$

a preto, že $P = 4V$, je

$$P = \frac{\pi - 2}{2} r^2 \doteq 0,571 r^2,$$

čo sme mali vypočítať.

Obsah Q dostaneme z obsahu πr^2 kruhu K , keď od neho odčítame obsah $\frac{1}{4}\pi r^2$ každého z kruhov K_1 , K_2 , K_3 , K_4 čiže číslo πr^2 a pripočítame obsah P . Je teda

$$P = Q.$$

Záver. Vyšrafovaná časť obrazca má ten istý obsah ako štvorlístok.

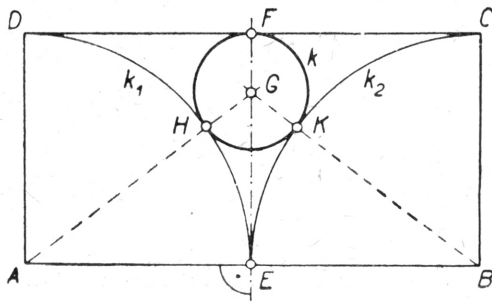
9. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE D

1. Narysujte obdĺžnik $ABCD$ s rozmermi $AB = 12$ cm a $BC = 6$ cm. V tomto obdĺžniku narysujte štvrtkružnice k_1 , k_2 so stredmi A , B a s polomeri 6 cm.

Vypočítajte polomer kružnice k , ktorá sa dotýka priamky CD i oboch štvrtkružníc k_1 , k_2 a potom kružnicu k zostrojte.

Riešenie (obr. 32). Označme x polomer hľadanej kružnice k . Dotyk kružnice k s k_1 i s k_2 je nutne vonkajší, pričom kružnica k musí ležať v polrovine CDA , kde ležia aj obe kružnice, ktorých časťami sú štvrtkružnice k_1 , k_2 (kružnica leží vždy celá na jednej

strane svojej dotýčnice). Stred G kružnice k leží nutne na strednej pričke EF obdĺžnika $ABCD$. To preto, že je $GA = 6 + x = GB$, takže bod G padne nutne na os úsečky AB .



Obr. 32

Z pravouhlého trojuholníka AGE s preponou $AG = 6 + x$ dostaneme

$$\text{čiže} \quad AG^2 - AE^2 = GE^2,$$

$$AG^2 - (EF - FG)^2 = AE^2$$

a po dosadení

$$(6 + x)^2 - (6 - x)^2 = 6^2.$$

Po úpravách dostaneme

$$x = \frac{3}{2}.$$

Zostrojíme teda os EF úsečky AB (pozri obr. 32) a na polpriamku FE nanesieme úsečku $FG = \frac{3}{2}$ (je to $\frac{1}{4}AD$), opíšeme kružnicu $k \equiv (G, \frac{3}{2})$ a na úsečkách AG , BG a štvrtkružniciach k_1 , k_2 zostrojíme dotykové

body H , K . Správnost konstrukcie vyplýva z toho, že

$$\begin{aligned} AE^2 + EG^2 &= 6^2 + \left(6 - \frac{3}{2}\right)^2 = 6^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{144 + 81}{4} = \frac{225}{4} = \left(\frac{15}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

a ďalej je $AG = 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$, ako má byť podľa Pythagorovej vety použitej na trojuholník AGE . Tým je úloha vyriešená.

2. Dĺžna plnila plán na 100 %. Kedyž niekoľik dělníků onemocnělo chřipkou, zvýšili ostatní dělníci pracovní výkon o 20 %; avšak i potom plnila dílna denní plán jen na 90 %. Po onemocnění dalších čtyř dělníků se podařilo zbývajícím dělníkům dosáhnout původního výkonu dílny, když svůj pracovní výkon zvýšili o 25 % jednou již zlepšeného výkonu.

Vypočtete, kolik bylo původně v dílně dělníků a kolik jich celkem onemocnělo.

Řešení. Označme x původní počet dělníků v dílně a y počet dělníků, kteří prvně onemocněli; myslíme si, že jeden dělník původně v dílně vyrobil např. v kusů výrobků. Pak platí v prvním období chřipky:

$$v(x - y) \cdot 1,2 = 0,9 xv, \quad (1)$$

neboť za 1 den každý z dělníků plnil denní plán na 120 % a vyrobil $v \cdot \frac{120}{100}$ výrobků; vyráběli však celkem jen 90 % denního výkonu původních x dělníků, tj. $vx \cdot 0,9$.

V druhém období zbylo $x - y - 4$ dělníků; každý z nich vyráběl 125 % denního výkonu z prvního období chřipky, tj. $v \cdot 1,2 \cdot 1,25$, tedy $x - y - 4$ dělníků

vyrábilo

$$v(x - y - 4) \cdot 1,2 \cdot 1,25,$$

což je původní denní výkon celé dílny, tj. vx . Platí tedy

$$v(x - y - 4) \cdot 1,2 \cdot 1,25 = vx. \quad (2)$$

Obě strany rovnic (1), (2) znásobíme číslem $\frac{1}{v}$; dostaneme po snadné úpravě soustavu

$$\begin{aligned} 0,3x &= 1,2y, \\ 0,5x - 1,5y &= 6. \end{aligned}$$

Soustavu upravíme na tvar

$$\begin{aligned} x &= 4y, \\ x - 3y &= 12. \end{aligned}$$

Odtud snadno dostaneme

$$y = 12, \quad x = 48;$$

všech dělníků bylo 48, nejdříve jich onemocnělo 12, později se počet nemocných zvýšil na 16.

Zkouška. 48 dělníků denně vyrábělo $48v$ výrobků. Denní výroba po prvním onemocnění byla

$$v \cdot 36 \cdot \frac{120}{100} = 36 \cdot 1,2v = 43,2v;$$

přitom 90 % ní denní výkon dá $v \cdot 48 \cdot 0,9$ výrobků, což je vskutku $43,2v$.

Po druhém onemocnění zbylo 32 dělníků, kteří vyráběli

$$v \cdot 32 \cdot \frac{120}{100} \cdot \frac{125}{100} = v \cdot 4 \cdot \frac{120}{100} \cdot \frac{125 \cdot 8}{100} = v \cdot 4 \cdot 12 = 48v,$$

což je původní denní výkon dílny.

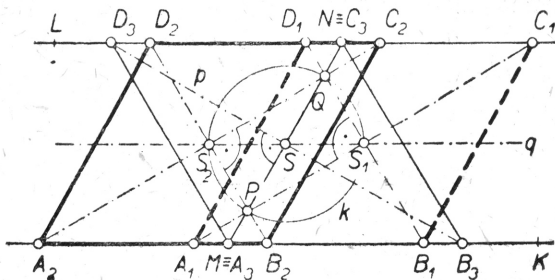
3. Je dán úhel $\sphericalangle KMN = 60^\circ$, přičemž je $MN = 6$ cm. Bodem N sestrojíme přímku $NL \parallel MK$ a na úsečce MN sestrojíme body P, Q tak, aby platilo $MP = NQ = 1$ cm.

Sestrojte tři různé kosočtverce, z nichž každý má tyto vlastnosti:

(1) Dvě protější strany kosočtverce leží po řadě na přímkách MK, NL .

(2) Každý z bodů P, Q leží na některé z úhlopříček hledaného kosočtverce.

Řešení (obr. 33). Narýsujeme úhel $\sphericalangle KMN = 60^\circ$, přičemž je $MN = 6$ cm; sestrojíme přímku $NL \parallel MK$ a uvnitř úsečky MN sestrojíme body P, Q , o nichž platí $MP = NQ = 1$ cm.



Obr. 33

Jsou dvě možnosti: Oba body P, Q padnou na touž úhlopříčku hledaného kosočtverce anebo každý padne na jinou z úhlopříček hledaného kosočtverce. Podle známé věty má hledaný kosočtverec úhlopříčky navzájem kolmé.

Případ [1]. Označme S společný střed úseček MN , PQ a považujme MN za úhlopříčku hledaného rovnoběžníka $A_3B_3C_3D_3$, kde $A_3 \equiv M$, $C_3 \equiv N$ a body B_3 , D_3 jsou po řadě průsečíky přímky $p \perp MN$, vedené bodem S , s danými rovnoběžkami MK , NL .

Případ [2]. Je-li S_1 střed rovnostranného rovnoběžníka $A_1B_1C_1D_1$ druhého typu, potom bod S_1 nutně leží na ose q pásu rovnoběžek MK , NL , a to spolu s bodem S ; bodem S tedy vedeme přímku $q \parallel MK$. Necht' bod P leží na úhlopříčce S_1A_1 a bod Q na úhlopříčce S_1D_1 (body P , Q jsou zřejmě přímkou q odděleny), přičemž je úhel $\sphericalangle PS_1Q = 90^\circ$. Bod S_1 proto nutně leží na Thaletově kružnici $k \equiv (S, SP)$. Odtud *konstrukce*:

Středem S úsečky PQ sestrojíme rovnoběžku $q \parallel MK$ a nad úsečkou PQ jako průměrem opíšeme Thaletovu kružnici k ; protože přímka q prochází středem této kružnice, má s ní dva různé společné body S_1 , S_2 , takže PS_1QS_2 při vhodné volbě označení bodů S_1 , S_2 je obdélník.

Kolmice S_1P , S_1Q vytínají na přímce MK body A_1 , B_1 a na přímce NL body C_1 , D_1 ; čtyřúhelník $A_1B_1C_1D_1$ splňuje požadavky úlohy (je to rovnoběžník, neboť se jeho úhlopříčky vzájemně půlí, a je rovnostranný, což vyplývá z kolmosti jeho úhlopříček).

Bod S_2 vede k druhému rovnoběžníku $A_2B_2C_2D_2$, o němž se snadno usoudí, že vznikne posunutím rovnoběžníka $A_1B_1C_1D_1$ o úsečku S_1S_2 , takže oba sestrojené rovnostranné rovnoběžníky $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ jsou shodné.

Tím je úloha rozřešena.

4. Žák měl řešit rovnici

$$\frac{x+2}{7x+23} = \frac{x-2}{7(x+1)}.$$

Opsal ji však s chybami: v čitateli na levé straně rovnice napsal chybně druhý člen a ve jmenovateli na pravé straně místo znaménka plus napsal znaménko minus. Přesto při správném řešení chybně opsané rovnice obdržel kořen dané rovnice.

Jak zněla chybně opsaná rovnice?

Řešení. Nejprve najdeme řešení dané rovnice; znásobíme obě strany dané rovnice číslem $7(x+1)(7x+23)$; dostaneme postupně

$$7(x+1)(x+2) = (7x+23)(x-2),$$

$$7(x^2 + 3x + 2) = 7x^2 + 9x - 46,$$

$$21x - 9x = -46 - 14,$$

$$12x = -60,$$

$$x = -\frac{60}{12} = -5.$$

Proveďme hned zkoušku správnosti. Označme L , P výsledek dosazení $x = -5$ do levé a do pravé strany dané rovnice. Dostáváme

$$L = \frac{-5+2}{-35+23} = \frac{-3}{-12} = \frac{1}{4},$$

$$P = \frac{-5-2}{7(-5+1)} = \frac{-7}{7 \cdot (-4)} = \frac{1}{4},$$

takže je $L = P$.

Špatně napsaná rovnice vypadala takto:

$$\frac{x+p}{7x+23} = \frac{x-2}{7(x-1)},$$

kde p je nějaké známé číslo. Tato rovnice však má rovněž řešení $x = -5$; dosadíme do ní toto číslo. Dostaneme

$$\frac{-5 + p}{-35 + 23} = \frac{-5 - 2}{7(-5 - 1)}$$

neboli

$$\frac{-5 + p}{-12} = \frac{-7}{7 \cdot (-6)};$$

po zkrácení zlomku na pravé straně dostaneme

$$\frac{-5 + p}{-12} = \frac{1}{6}.$$

Je to rovnice pro neznámé číslo p ; řešme ji. Znásobme obě strany rovnice číslem -12 ; dostaneme postupně

$$\begin{aligned} -5 + p &= -2, \\ p &= -2 + 5, \\ p &= 3. \end{aligned}$$

Žák tedy chybně napsal místo dané rovnice tuto rovnici:

$$\frac{x + 3}{7x + 23} = \frac{x - 2}{7(x - 1)}.$$

Ta má řešení $x = -5$, neboť dosazení do levé a do pravé strany jsou:

$$L = \frac{-5 + 3}{-35 + 23} = \frac{-2}{-12} = \frac{1}{6},$$

$$P = \frac{-5 - 2}{7(-5 - 1)} = \frac{-7}{7 \cdot (-6)} = \frac{1}{6},$$

takže vskutku je $L = P$.

Tím jsme úlohu rozřešili.

10. NĚCO O METODÁCH ŘEŠENÍ ÚLOH

V brožurách matematické olympiády najdete každý rok tzv. vzorová řešení soutěžních úloh. Jsou to buď řešení autorská, která vypracovali autoři úloh, nebo některá pěkná řešení účastníků soutěže. Otištěná řešení však mají zpravidla jeden nedostatek: předvádějí sice pěkné, přesné — někdy i elegantní a vtipné způsoby řešení úloh, ale obvykle neříkají, jak se na takový způsob řešení přijde. Domníváme se, že čtete naše brožury proto, abyste se naučili řešit matematické úlohy; a to půjde ztěžka, budete-li jen studovat hotová, třebaš vybroušená řešení úloh. Proto vám chceme v této brožuře ukázat aspoň na několika příkladech, jak je možné hledat metodu řešení. Metody, které uvádíme, nejsou ovšem jediné možné; jistě sami objevíte jiné. Ale snad si při našich ukázkách aspoň uvědomíte, že metodu řešení se vždy pokoušíme vyhledat tím, že úlohu zařadujeme do skupiny úloh, které se řeší jistými nám známými způsoby.

Jako první ukázkou uvedeme úlohu **B-I-1**, tj. úlohu č. 1, I. kolo, kategorie B); text úlohy nebudeme opakovat (viz str. 55), začneme přímo s úvahami.

Abychom sestrojili hledaný trojúhelník ABC , musíme sestrojit neznámé vrcholy B , C . Pro každý z nich máme jedno geometrické místo bodů (přímky q , p); mimoto víme, že úsečka BC prochází bodem M a je jím dělena v známém poměru: Platí totiž $MB : MC = MX : MY$, kde X , Y jsou průsečíky přímek q , p s libovolnou přímkou procházející bodem M .

Konstruktivní úloha tohoto typu se obvykle řeší stejnolehlostí: najde se obraz q' přímky q v stejno-

lehlosti se středem M a koeficientem $-MY:MX$ a určí se společné body čar p, q' ; mezi nimi musí být bod C . Bohužel v našem případě je $q' \equiv p$, a proto tato metoda nevede k cíli.

Jiný nápad: pokusíme se pro bod B určit další geometrické místo bodů, a to přímku AB . Pro tuto přímku je třeba určit jen směr, protože bod A je dán. Úsečka AB je úhlopříčkou kosočtverce, který vznikne, překlopíme-li trojúhelník ABC kolem přímky AB do polohy ABC' . Přímka AB je pak osou úsečky CC' a také osou úsečky MM' , kde M' je bod vzniklý překlopením bodu M kolem přímky AB . Protože je zřejmé $BC' \equiv q$, leží bod M' na přímce q a dovedeme jej sestrojit, neboť je $AM' = AM$. Přenecháváme čtenářům, aby si řešení dokončili sami.

Jiný nápad: místo rovnoramenného trojúhelníka ABC budeme sestrojovat rovnoramenný lichoběžník $ABMN$ se základnami AB, MN ; neznámé jsou vrcholy B, N . Pro každý z nich máme jedno geometrické místo bodů: pro bod B přímku q , pro bod N přímku p . Obě úhlopříčky AM, BN se protínají v bodě Q a platí $BQ:NQ = AQ:MQ$. Tento poměr je však znám, neboť podle jisté vlastnosti lichoběžníka je $AQ:MQ = BC:MC = XY:XM$ (viz první způsob řešení). Dovedeme tedy sestrojit bod Q a pak i body B, N, C . Při tomto způsobu řešení jsme použili vlastně pro lichoběžník $ABMN$ metody, která selhala v prvním případě pro trojúhelník ABC .

Druhá ukázka se týká úlohy **C-I-1** (viz str. 76). Nebudeme vycházet z formulace důkazové úlohy, ale zadáme úlohu raději takto: máme nalézt všechna

přirozená čísla x , pro něž je číslo $x^3 + 2x$ dělitelné třemi.

Je zřejmé: je-li x dělitelné třemi, je také číslo $x^3 + 2x$ dělitelné třemi. Není-li x dělitelné třemi, dává po dělení třemi zbytek buď 1, nebo 2; lze je tedy napsat v jednom z tvarů

$$x = 3n + 1, \quad x = 3n + 2, \quad (1)$$

kde n je celé číslo nezáporné. Takovéto vyjádření čísla x vzhledem k děliteli 3 se zpravidla vždy osvědčí při zkoumání dělitelnosti třemi u složitějších výrazů závislých na x .

Vypočteme pro obě vyjádření (1) výraz $x^3 + 2x$ a úloha bude rozřešena; vyjde totiž

$$\begin{aligned} x^3 + 2x &= (3n + 1)^3 + 2(3n + 1) = 27n^3 + 27n^2 + \\ &\quad + 9n + 1 + 6n + 2 = 3k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 + 2x &= (3n + 2)^3 + 2(3n + 2) = 27n^3 + 54n^2 + \\ &\quad + 36n + 8 + 6n + 4 = 3l. \end{aligned}$$

Tento postup je možná méně elegantní než řešení autorské, ale zato je přirozenější a ukazuje obecnou metodu pro řešení úloh tohoto druhu.

Jako další ukázky uvádíme úlohy III. kola.

Úloha A-III-1. Je dán trojčlen

$$2x^2 - x - 36.$$

Určete všechna celá čísla x , pro něž je hodnota daného trojčlenu rovna druhé mocnině prvočísla.

Řešení. První pokus směřuje k zjištění, zda lze daný trojčlen rozložit v součin lineárních dvojčlenů, které nabývají pro celočíselná x celočíselných hod-

not. V tom případě bude řešení jednoduché. Každý z těchto dvojčlenů musí totiž nabývat pro hledané x hodnoty buď ± 1 , nebo $\pm p$, nebo $\pm p^2$ (kde p je prvočíslo) a hledané x se určí řešením lineární rovnice. Je ovšem třeba hned uvážit toto: nezdaří-li se rozložit trojčlen uvedeným způsobem, nemusí být úloha neřešitelná. Tak např. trojčlen $2x^2 - x + 21$ nelze rozložit v součin lineárních činitelů s reálnými koeficienty, a přesto pro $x = 4$ nabývá hodnoty $49 = 7^2$. Trojčlen $2x^2 - x - 17$ lze sice rozložit v lineární činitele, ale s koeficienty iracionálními

$$2x^2 - x - 17 = 2 \left(x - \frac{1 + \sqrt{137}}{4} \right) \left(x - \frac{1 - \sqrt{137}}{4} \right);$$

přesto pro $x = 6$ nabývá tento trojčlen hodnoty $49 = 7^2$. V těchto případech vede naše úloha na neurčitou rovnici druhého stupně, např. $2x^2 - x - 17 = y^2$, kterou upravíme na tvar $(4x - 1)^2 - 8y^2 = 137$; tuto rovnici máme řešit celými čísly x , y a vybrat navíc ta řešení, kde y je prvočíslo. To je ovšem úloha značně složitější.

Tímto způsobem řešil danou úlohu Peter Hatala, žák třídy III.a SVVŠ v Bratislavě v Novohradské ulici. Označil si $4x - 1 = A$ a po úpravě dospěl k rovnici $A^2 - 289 = 8p^2$, neboli

$$8p^2 = (A + 17)(A - 17). \quad (*)$$

Dále uvažoval takto: Je-li p sudé, je $p = 2$, vyjde $A^2 = 321$, což je nemožné, neboť A je číslo celé. Je-li p liché, je také A liché a čísla $A + 17$, $A - 17$ jsou sudá. Je tedy třeba rozložit číslo $8p^2$ v součin dvou sudých činitelů; protože je p liché, je to možné jen šesti způsoby $8p^2 = (\pm 2p) \cdot (\pm 4p) = (\pm 2p^2) \cdot (\pm 4) =$

$= (\pm 4p^2) \cdot (\pm 2)$. Nyní zkoumá jednotlivé případy (např. $A + 17 = 2p$, $A - 17 = 4p$ atd.) a po vyloučení neznámé A dostane p ($p = -17$). Po vynechání nevyhovujících čísel p dostane všechna řešení úlohy: nejprve p a pak x . Výhodnější by ovšem bylo vyloučit p , určit A , pak x a provést zkoušku, zda p , které vyjde z rovnice (*), je skutečně prvočíslo.

V úloze A-III-1 však je trojčlen rozložitelný žádaným způsobem. Kvadratická rovnice $2x^2 - x - 36 = 0$ má kořeny $\frac{9}{2}$, -4 a rozklad zní

$$2x^2 - x - 36 = (2x - 9)(x + 4).$$

Nyní musí být buď

$$[1] \quad 2x - 9 = \pm 1, \quad x + 4 = \pm p^2,$$

nebo

$$[2] \quad x + 4 = \pm 1, \quad 2x - 9 = \pm p^2,$$

nebo

$$[3] \quad x + 4 = \pm p, \quad 2x - 9 = \pm p.$$

V případě [1] dostaneme z první rovnice buď $x = 5$, nebo $x = 4$; druhá rovnice dá buď $x + 4 = 9$, nebo $x + 4 = 8$. Dostáváme tedy jedno řešení

$$x_1 = 5.$$

V případě [2] dostaneme z první rovnice buď $x = -3$, nebo $x = -5$; druhá rovnice dá buď $2x - 9 = -15$, nebo $2x - 9 = -19$. Nevychází tedy žádné další řešení, neboť čísla 15 ani 19 nejsou druhé mocniny prvočísel.

V případě [3] musí být $x + 4 = 2x - 9$; odtud vychází $x = 13$, $(x + 4)(2x - 9) = 17^2$; máme tedy druhé řešení úlohy

$$x_2 = 13.$$

Tím je úloha A-III-1 úplně rozřešena.

Úloha A-III-2 zní: V rovině je dána soustava pravoúhlých souřadnic x, y . Vyšetřte množinu všech bodů, jejichž souřadnice v této soustavě splňují nerovnosti:

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi, \quad (1a)$$

$$\sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{1 + \sin 2x} \leq y \leq \sqrt{1 - \cos 2x} - \sqrt{1 + \cos 2x}. \quad (1b)$$

Načrtněte obraz této množiny.

K **řešení** této úlohy není třeba mnoho důvtipu. Jde zřejmě jen o úpravu druhé dvojice nerovností, aby vztahy mezi x, y byly jednodušší, tj. aby na pravé i levé straně byl pokud možno jen jeden člen. Pokud jde o pravou nerovnost (1b), nabízejí se přirozeně vzorce z goniometrie

$$\sqrt{2} |\cos x| = \sqrt{1 + \cos 2x}, \quad \sqrt{2} |\sin x| = \sqrt{1 - \cos 2x}. \quad (2)$$

Protože platí (1a), je $\cos x \geq 0$, $\sin x \geq 0$ a absolutní hodnoty ve vzorcích (2) lze vynechat. Dále upravíme

$$\begin{aligned} \sqrt{2} (\sin x - \cos x) &= \sqrt{2} \left[\sin x - \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right] = \\ &= \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right] = -2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Dále upravíme levou nerovnost (1b) podle vzorců

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \sin 2x} &= \sqrt{1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right)} = \\ &= \sqrt{2} \left| \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right|, \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \sin 2x} &= \sqrt{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right)} = \\ &= \sqrt{2} \left| \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right|. \quad (4b)\end{aligned}$$

Také ve vzorcích (4a) a (4b) chceme odstranit absolutní hodnoty. Protože platí (1a), je

$$-\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} - x \leq \frac{\pi}{4};$$

bude tedy nutné rozlišit dva případy :

[1] Je-li $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, je

$$0 \leq \frac{\pi}{4} - x \leq \frac{\pi}{4}, \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \geq 0,$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \geq 0,$$

tj.

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{1 + \sin 2x} &= \\ &= \sqrt{2} \left[\sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) - \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right] = \\ &= \sqrt{2} \left[\sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) - \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \right] = \\ &= \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin x) = -2\sin x,\end{aligned}$$

neboli

$$\sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{1 + \sin 2x} = -2\sin x. \quad (5)$$

$$[2] \text{ Je-li } \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ je}$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} - x \leq 0,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \leq 0, \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \geq 0,$$

tj.

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{1 + \sin 2x} = \\ &= -\sqrt{2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \right] = \\ &= -\sqrt{2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \right] = \\ &= -\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = -2\cos x, \end{aligned}$$

neboli

$$\sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{1 + \sin 2x} = -2 \cos x. \quad (6)$$

Pro interval $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ dostáváme tedy podle (3),

(5) nerovnosti

$$-2\sin x \leq y \leq -2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right); \quad (7)$$

pro interval $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ dostáváme podle (3), (6) nerovnosti

$$-2\cos x \leq y \leq -2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right). \quad (8)$$

Nerovnosti (7) přepíšeme do tvaru

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \leq -\frac{y}{2} \leq \sin x, \quad (7')$$

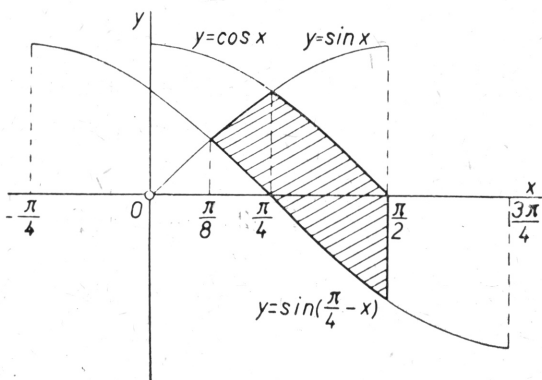
nerovnosti (8) přepíšeme do tvaru

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \leq -\frac{y}{2} \leq \cos x. \quad (8')$$

Zobrazíme funkce

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right);$$

viz obr. 34. Body $\left[x, \frac{y}{2}\right]$ vyplní vyšrafovaný obrazec; hledaný obrazec bodů $[x, y]$ dostaneme překlopením kolem osy x a dvojnásobným zvětšením všech souřadnic y .



Obr. 34

Podstatné kroky našeho postupu byly tyto: použití vzorců pro „funkce polovičního úhlu“ k odstranění odmocnin v (1b); použití vzorců pro „součet sinů“ k získání jediného členu na pravé i levé straně nerovností (1b); v obou případech bylo nutno nahradit někde funkci sinus funkcí kosinus a naopak. Další podstatné kroky byly: rozdělení intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ na dva intervaly, abychom se zbavili absolutních hodnot, a konečně úprava nerovností na tvar (7') a (8'), abychom získali jednodušší funkce, jejichž průběh lze snadno zakreslit.

Většina správných řešení užívala v podstatě tohoto postupu.

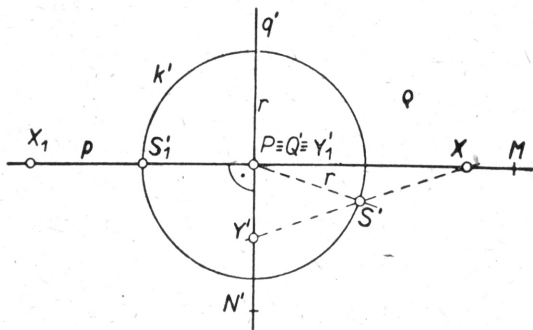
Úloha A-III-3 má tento text: Jsou dány dvě navzájem kolmé mimoběžky PM , QN , kde přímka PQ je kolmá ke každé z obou mimoběžek. V rovině σ kolmé k úsečce PQ a procházející jejím středem O je dána kružnice $k \equiv (O, r)$.

Dokažte, že každá úsečka XY , jejíž krajní body X , Y leží po řadě na mimoběžkách PM , QN a která obsahuje bod kružnice k , má touž délku; vyjádřete tuto délku pomocí poloměru r a délky $v = PQ$.

Jaký útvar vyplní krajní body X všech takových úseček XY ?

Řešení. První část úlohy bude rozřešena, vypočteme-li délku úsečky XY . Každou úsečku XY lze pokládat za přeponu pravoúhlého trojúhelníka $Y'XY$, který zkonstruujeme takto: přímkou p vedeme rovinu $\varrho \parallel \sigma$ a označíme Y' pravoúhlý průmět bodu Y do

roviny ϱ . Zřejmě je $YY' = PQ = v$; zbývá vypočítat délku odvěsny XY' . K tomu je třeba uplatnit ještě podmínku, že střed S úsečky XY leží na kružnici k . Proto promítneme pravoúhle také kružnici k do roviny ϱ ; tak dostaneme kružnici $k' \equiv (P, r)$. Střed S



Obr. 35

úsečky XY se promítne pravoúhle do roviny ϱ do středu S' úsečky XY' ; bod S' leží na kružnici k' . Situace v rovině ϱ je naznačena na obr. 35; přitom q' značí pravoúhlý průmět přímky q do roviny ϱ . Na obr. 35 je zakreslena tzv. „obecná poloha“ úsečky XY' , kdy žádný z bodů X , Y' nesplyne s bodem P ; proto vznikne pravoúhlý trojúhelník $XY'P$ s přeponou XY' . Protože její střed S' leží na kružnici k' , je $PS' = r$. Střed S' je však středem kružnice opsané trojúhelníku $XY'P$, proto je $S'X = S'Y' = S'P = r$ a $XY' = XS' + S'Y' = 2r$. Zbývá dokázat, že úsečka XY' má délku $2r$ také v případě, když jde o „zvláštní po-

lohu“, kdy je buď $X \equiv P$, nebo $Y' \equiv P$; to je však zřejmé, jak ukazuje na obr. 35 příklad úsečky $X_1Y'_1$. Je tedy

$$XY^2 = YY'^2 + XY'^2 = v^2 + 4r^2.$$

Tím je úplně rozřešena první část úlohy. Odpověď na druhou otázku dáme zcela snadno. Předchozí úvahy vám jistě připomněly jedno známé geometrické místo bodů v rovině: geometrické místo středů S' úseček XY' , které mají stálou délku $2r$ a jejichž krajní body X, Y' leží na kolmicích p, q' , je kružnice $k' \equiv (P, r)$. Každý z bodů X, Y' vyplní tedy úsečku délky $4r$, která leží v přímce $p(q')$ a má střed v bodě P . Tím je vyšetřeno geometrické místo bodů X ; protože lze v textu úlohy zaměnit přímky p, q (body X, Y), je tím vyšetřeno i geometrické místo bodů Y .

Rada řešitelů úlohy A-III-3 užila částečně metody souřadnic, ovšem jen kartézských souřadnic v rovině. Tak např. Jiří Durdil, žák třídy III.b SVVŠ v Praze 8-Libni, zvolil za osy souřadnic přímky p, q' a užil rovnice kružnice k' k tomu, aby dokázal vztah $XY' = 2r$. Pro výpočet délky úsečky XY však už užil opět Pythagorovy věty a doplňující úvahy pro „zvláštní“ polohy této úsečky vynechal. Zde se ukazuje, jak bylo výhodné užít důsledně metody souřadnic (analytické geometrie) pro řešení celé úlohy [i otázky b)]. Tu by ovšem bylo třeba zavést soustavu prostorových souřadnic, která se na střední škole neprobírá. Zároveň si uvědomíme při této příležitosti, jak účinným prostředkem pro vyšetřování geometrických míst bodů je právě metoda analytické geometrie.

Úloha A-III-4 zní: V rovině je dána kružnice $k \equiv (S; r)$. Kromě toho je dán bod $A \neq S$, který leží

uvnitř kružnice k . Světelný paprsek vycházející z daného bodu A se odráží od kružnice k v jistém bodě B , dále se odráží od kružnice k v jistém bodě C a pak se vrací nazpět do bodu A .

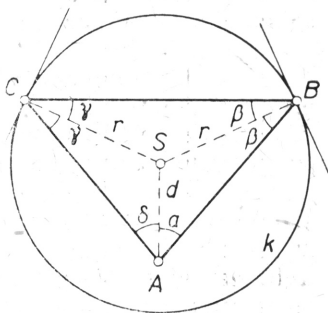
Vypočítejte sinus dutého úhlu $\sphericalangle SAB$ pomocí čísel r , $d = SA$ a rozhodněte o řešitelnosti úlohy.

Při řešení stačí uplatnit známý fyzikální zákon o úhlu dopadu a odrazu světelného paprsku; přitom je třeba uvážit, že kolmice ke křivce odrazu v daném bodě je kolmice k tečně či-li tzv. normála křivky. U kružnice prochází normála každého jejího bodu středem kružnice. Dráha světelného paprsku je zakreslena na obr. 36. Dráha je obvod trojúhelníka ABC ; bod S je podle podmínek úlohy průsečíkem os úhlů $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ tohoto trojúhelníka a polopřímka AS je osou úhlu $\sphericalangle A$.

Hledaný $\sin \alpha$ vyjádříme z trojúhelníka SAB pomocí sinové věty

$$d \sin \alpha = r \sin \beta. \quad (1)$$

Abychom z rovnice (1) určili $\sin \alpha$ pomocí r , d , je třeba vyjádřit β pomocí α . Protože polopřímka AS je osou úhlu $\sphericalangle CAB$, je $\delta = \alpha$ (označení úhlů podle obr. 36); protože trojúhelník BCS je rovno-



Obr. 36

ramenný, je $\beta = \gamma$. Pro velikost vnitřních úhlů $\sphericalangle ABC$ platí tedy $2\alpha + 4\beta = 180^\circ$ neboli $\alpha = 90^\circ - 2\beta$. Dosadíme za α do rovnice (1), vyjádříme nejprve $\sin \beta$ a pak dosadíme zpět

do (1); dostaneme

$$d \sin (90^\circ - 2\beta) = r \sin \beta ,$$

neboli

$$d \cos 2\beta = r \sin \beta ,$$

neboli

$$d(1 - 2 \sin^2 \beta) = r \sin \beta ,$$

neboli

$$2d \sin^2 \beta + r \sin \beta - d = 0 .$$

Odtud vychází ($d \neq 0$ podle předpokladu)

$$\sin \beta = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + 8d^2}}{4d} . \quad (2)$$

Diskriminant je zřejmě číslo kladné; protože úhel β je dutý, je $\sin \beta > 0$ a ve vzorci (2) přichází v úvahu jen znamení plus. Je tedy

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{r^2 + 8d^2} - r}{4d} . \quad (2')$$

Můžeme se ještě přesvědčit, že zlomek na pravé straně je číslo kladné a menší než 1. Skutečně je $\sqrt{r^2 + 8d^2} > \sqrt{r^2} = r$; kdyby platilo $\frac{\sqrt{r^2 + 8d^2} - r}{4d} \geq 1$, bylo by $\sqrt{r^2 + 8d^2} \geq 4d + r$, tj. po úpravě $8d(d + r) \leq 0$, což je nemožné.

Nyní dosadíme z (2') do (1) a dostaneme

$$\sin \alpha = r \frac{\sqrt{r^2 + 8d^2} - r}{4d^2} .$$

Tím je úloha úplně rozřešena.

IV. Čtvrtá Mezinárodní matematická olympiáda

1. O PRŮBĚHU SOUTĚŽE

Mezinárodní matematická soutěž pro žáky středních všeobecně vzdělávacích a středních odborných škol vznikla v r. 1959 na popud rumunských matematiků. Již tehdy čs. zástupce v mezinárodní komisi I. mezinárodní matematické olympiády měl zmocnění ministerstva školství a kultury i Jednoty čs. matematiků a fyziků k předběžnému příslibu, že by tato každoročně proponovaná soutěž mohla být uspořádána v r. 1962 v Československu, a to v rámci oslav 100. výročí založení Jednoty čs. matematiků a fyziků. A tak skutečně v první polovině července 1962 byla v ČSSR uspořádána *Jednotou čs. matematiků a fyziků* (JČMF) a pod záštitou *ministerstva školství a kultury* (MŠK) *IV. mezinárodní matematická olympiáda* (MMO).

Soutěž připravoval od podzimu 1961 *organizační komitét* MMO (zkratkou OK). Jeho předsedou byl akademik *Josef Novák*, místopředsedy *doc. Jan Vyšín* a *Rud. Zelinka* a sekretářem *dr. Miroslav Fiedler Dr.Sc.*; dalšími členy byli *Miloš Jelinek*, ústřední inspektor MŠK jako zástupce ministerstva školství a kultury a *František Vejsada* jako zástupce pobočky JČMF v Českých Budějovicích a jako jednatel *Organizačního výboru* MMO, který se pro potřeby soutěže ustavil v Českých Budějovicích.

Vedle organizačního zajištění a řízení celé akce připravil OK návrh statutu, kterým by se mezinárodní soutěž měla řídit. Ve statutu jsou shrnuty dosavadní zkušenosti ze soutěží. Statut vstoupí v platnost po projednání v ministerstvech školství (osvěty) jednotlivých zúčastněných zemí; IV. MMO se v podstatě jeho zásadami již řídila.

Vlastním řídicím orgánem soutěže byla *mezinárodní komise* (MK), ve které byla každá zúčastněná země zastoupena svým vedoucím delegace; komisi předsedal akademik *Josef Novák*.

Každá zúčastněná země vyslala na soutěž osmičlenné družstvo (viz přílohu 2), dále vedoucího delegace a pedagogického průvodce družstva; oba tito delegáti byli povinni opravovat žákovská řešení a pracovat v organizačních intencích mezinárodní komise. IV. mezinárodní matematické olympiády se účastnilo 7 zemí socialistického tábora, jak je patrné z příloh 1 a 2 (jmenný seznam delegátů a jmenný seznam zúčastněných žáků).

Vedoucí delegací se sjeli do Prahy ještě před příjezdem žáků, aby ve dnech 5.—6. července 1962 zajistili nejzávažnější záležitosti soutěže, především volbu soutěžních úloh. Podle předběžné dohody zaslala do května 1962 každá zúčastněná země organizačnímu komitétu několik návrhů soutěžních úloh, včetně náčrtu řešení. Trojčlenná komise při OK (oba místopředsedové a sekretář) provedla analýzu došlých úloh, navrhla úpravy některých z došlých úloh, připravila výběr z těchto úloh a dala je přeložit do světových jazyků a rozmnožit tak, aby je mohli členové MK předem řádně prostudovat; tato práce

byla přísně důvěrná, takže jen 4 čl. pracovníci byli seznámeni před zahájením soutěže s texty úloh. Tuto práci velmi uvážlivě řídil doc. Jan Vyšín. Překlada-telské a další práce obětavě konali pracovníci Mate-matického ústavu ČSAV. Z takto připraveného mate-riálu byl po dvoudenním detailním jednání proveden výběr úloh pro dvě soutěžní písemné práce žáků (texty úloh a jejich řešení jsou na str. 138); pro 1. den soutěže byly zvoleny 3 úlohy na 4 hodiny čistého času, na 2. den 4 úlohy na 5 hodin čistého času. Přek-lad textů úloh do mateřských jazyků zúčastněných zemí provedli vedoucí delegací v rámci prací MK; texty byly rozmnoženy, takže každý žák obdržel od předsedy MK vlastní text v zapečetěné obálce na po-čátku každého soutěžního dne.

Dále byly v MK stanoveny některé zásady pro po-suzování žákovských prací, i když krátký čas, který byl k dispozici, nedovolil stanovit přesnější požadavky; ty pak byly určovány až v průběhu provádění oprav a hodnocení soutěžních prací. Jmenovitě však MK sta-novila předem maximální počet bodů za dokonalá řešení jednotlivých úloh.

Žákovské delegace se svými pedagogickými průvodci se sjely do Prahy v sobotu 7. července 1962 a po krátké prohlídce Prahy odjely příštího dne v ne-děli odpoledne do Českých Budějovic, kde byly slavnostně uvítány budějovickými pracovníky v čele s *Josefem Vodákem*, předsedou školské a kulturní komise *Jihočeského krajského národního výboru* (JK NV); při uvítání byli přítomni zvláště zástupci KSČ, ČSM a pobočky JCMF v Českých Budějovicích. Po dobu pobytu hostů v Jihočeském kraji pečoval o ně

tamější *organizační výbor* MMO. Tento výbor se ustavil již v lednu 1962 na základě dohody organizačního komitétu MMO s pracovníky Jihočeského kraje, reprezentovanými odborem školství a kultury JKNV, stranickými pracovníky, ČSM a pobočkou JČMF v Českých Budějovicích. Žáci byli ubytováni v pěkném žákovském internátě v Holečkově ulici a delegáti v hotelích.

V pondělí 9. července 1962 navštívili hosté tužkárnu Koh-i-noor, n. p., v Českých Budějovicích a odpoledne si prohlédli památky zámku Hluboká i umělecké poklady tamější Alšovy galerie, aby se tu předem seznámili s prostředím, ve kterém budou po oba soutěžní dny žáci pracovat.

V úterý 10. července 1962 předseda MK akademik Josef Novák v sále Alšovy galerie na Hluboké slavnostně zahájil soutěž; první písemná práce trvala od 8.30 hod. do 12.30 hod. Ve středu 11. července 1962 byla na téže místě v době od 8 do 13 hodin provedena druhá písemná práce.

Jinak všechnen volný čas žáků byl věnován rekreaci a prohlídkám historických, kulturních a přírodních památek Jihočeského kraje, exkurzím do závodů atd.

Po celou dobu od 10. do 14. července 1962 zajišťovala mezinárodní komise se štábem spolupracovníků opravy a hodnocení žákovských řešení. Žákovo řešení opravovali oba příslušní delegáti za spolupráce s čs. koordinátorem; byl to vysokoškolský pracovník v matematice a jeho úkolem bylo zajistit jednotné oceňování vždy jedné ze sedmi zadaných úloh. Pro hodnocení řešení čs. žáků určila mezinárodní komise pro každou úlohu oba členy jedné z delegací jako kontro-

lory správného hodnocení; byli to právě ti dva členové, jejichž země úlohu zaslala (pro čs. úlohu pak to byli oba delegáti NDR). Instituce koordinátorů měla zajistit mezinárodní úroveň hodnocení žákovských řešení a celkem úspěšně splnila své poslání, i když v konečné fázi měla MK řadu svízelných jednání; přitom zvláště sekretář OK jako vedoucí skupiny koordinátorů vždy delikátně, ale důsledně se snažil plně zajistit mezinárodní úroveň hodnocení, což se celkem podařilo provést.

V úterý 14. července 1962 odpoledne přijal členy MK předseda JKNV s. *Jindřich Kouba*. Pohovořil s nimi o jejich úkolech, seznámil je s některými otázkami, které se snaží v kraji řešit, a přál jim hodně pracovních úspěchů; vyslovil potěšení, že se jim v jižních Čechách skutečně líbí.

Ve středu 15. července 1962 uspořádal ministr školství a kultury *dr. František Kahuda* v Českých Budějovicích pro účastníky soutěže slavnostní večeři, na níž k nim promluvil. Ocenil důležitost matematiky pro rozvoj socialistické společnosti a vyslovil radost z tohoto setkání mládeže zemí socialistického tábora, přičemž zvláště uvítal, že může mezi zahraničními hosty uvítat také naše milé sovětské přátele.

Po provedeném hodnocení žákovských řešení rozhodla dne 13. července 1962 MK o udělení cen nejúspěšnějším řešitelům. Na návrh předsedy MK udělila 4 první, 12 druhých a 15 třetích cen, a to vzhledem k počtu bodů, které žák získal celkem svými řešeními sedmi soutěžních úloh; celkem bylo uděleno 31 cen.

Absolutním vítězem soutěže se stal *Josif Bernštejn*,

žák střední školy v Moskvě, který jediný získal maximální počet bodů (46). Mezi těmi, kteří získali jednu ze čtyř prvních cen, je tentokrát i dívka *Lidiya Gončarovová*, žákyně střední školy v Moskvě. I když jde o soutěž jednotlivců, musíme konstatovat, že největšího úspěchu dosáhli žáci maďarští a těsně za nimi žáci sovětské, avšak i žáci rumunští mají pěkné umístění. Z našich žáků byl nejlepším *Peter Hatala*, žák střední všeobecně vzdělávací školy v Bratislavě; získal druhou cenu. Přehled o výsledcích jednotlivých žáků a zvláště pak našich je v přílohách č. 3a,b, 4 a 5. Není pochyb o tom, že se pracovníci školští i vědečtí budou nad těmito výsledky zamýšlet a že budou hledány cesty, jak nynější naši situaci v této otázce uvést na příznivější stupeň. To bude v nejbližších letech úkolem organizátorů nejen našeho školství, ale i naší celostátní Matematické olympiády.

Slavnostní rozdělení cen provedl předseda MK akademik Josef Novák opět v sále Alšovy galerie na Hluboké v sobotu 14. července 1962 o 10. hod. dopoledne. Přítomni byli náměstek ministra školství a kultury *Václav Hendrych* se svými spolupracovníky, straničtí a školští pracovníci Jihočeského kraje, předseda školské a kulturní komise JKNV Josef Vodák a řada veřejných a kulturních pracovníků. Slavnostní projev předsedy MK tlumočili vedoucí delegací do svých mateřských jazyků. Jménem ministerstva školství a kultury promluvil *Václav Hendrych*, náměstek ministra školství a kultury. Za odměněné žáky, kteří vedle uměleckých a památkových předmětů dostali diplom podepsaný ministrem školství a kultury a předsedou OK, poděkovala sovětská

žákyně Lidija Gončarovová. Jménem zahraničních delegátů pořadatelům soutěže vřele poděkoval jeden z jejích zakladatelů, *prof. Gh. D. Simionescu* z Bukurešti. Slavnostní oběd na ukončení olympiády se konal v internátu v Holečkově ulici v Českých Budějovicích za přítomnosti náměstka Václava Hendrycha a pracovníků Jihočeského kraje.

Účastníci soutěže a mezinárodní hosté mimo jiné navštívili Krumlov, Lipno, Rožmberk a jiná pamětihodná místa jižních Čech.

V neděli 15. července 1962 dopoledne se celá výprava vrátila autobusy přes Tábor do Prahy a večer zhlédla v Národním divadle Smetanovu Libuši.

V pondělí 16. července si zahraniční hosté prohlédli Prahu a odpoledne a večer se rozjížděli do svých vlastí; zdržela se jediné rumunská delegace, která odcestovala ve čtvrtek 19. července.

Organizátoři věnovali hladkému průběhu všech akcí velkou pozornost. To platí zvláště o pracovnících OV v Českých Budějovicích, který se svých úkolů zhostil k mimořádné spokojenosti všech zahraničních hostů, kteří odjížděli s radostnou náladou; tu dlužno ocenit obětavou činnost jak předsedy OV Josefa Vodáka, tak jednatele OV i pobočky JČMF v Českých Budějovicích; za zmínku stojí i nevšední ochota, s níž nám všichni zaměstnanci různých podniků Jihočeského kraje vycházeli vstříc. Rovněž ústředí JČMF a pracovníci Matematického ústavu ČSAV vykonali pro zdar akce vše, co mohli. Ministerstvo školství a kultury se zasloužilo o realizaci a soustavné sledování průběhu přípravných prací i vlastní soutěže a o to, že se akci podařilo tak úspěšně dovést až do konce. Nejlepším

vyjádřením této péče je přijetí členů MK ministrem školství a kultury a jeho návštěva v Českých Budějovicích v průběhu soutěže, jakož i účast náměstka ministra školství a kultury na slavnostním rozdělení cen. Tato fakta všichni zahraniční delegáti také vysoce ocenili a netajili se tím, že je budou ve svých vlastech s patřičnou váhou konstatovat.

Pokud jde o politický dosah mezi mládeží, lze říci, že se všichni žáci záhy velmi sblížili, a to tím spíše, že jim budějovičtí svazáci připravili na tamějších závodech družbu, která vyvrcholila ve veselících, konaných v sobotu 14. července odpoledne a večer na několika místech.

Po stránce odborné nám umožnila IV. MMO porovnávat výkony nejlepších žáků jednotlivých zemí i konstatovat, že se dnes všude těmto žákům a výuce matematice věnuje nejen pozornost, ale přímo mimořádná a trvalá péče. Rovněž jsme měli příležitost porovnávat zaměření vyučování matematice v těchto zemích a důraz, který se klade na určité partie nebo na některé matematické metody. Rok od roku lze pozorovat i ve vlastní soutěži zvyšování nároků, zvláště pokud jde o přesnost a úplnost řešení; je zajímavé, že názory, které se při hodnocení žákovských řešení při I. MMO v této otázce jen těžko probojovaly, jsou dnes již samozřejmým požadavkem.

Pro informaci čtenářů uvádíme i texty a stručná řešení všech sedmi soutěžních úloh (viz článek 2 na str. 138).

Příloha č. 1
Jmenný seznam vedoucích delegátů

Země (zkratka)	Vedoucí delegace (členové mezinárodní komise)	Pedagogický vedoucí
Bulharsko (BLR)	Alipi Mateev, profesor university v Sofii	Stojan Budurov, in- spektor ministerstva osvěty BLR, Sofie
ČSSR	Rudolf Zelinka, pra- covník MÚ ČSAV, Praha	Jan Vyšín, docent ma- tematicko-fyzikální fa- kulty KU, Praha
Maďarsko (MLR)	Endré Hódi, vědecký pracovník Ústavu op- tiky, Budapešť	Ferenc Késedi, ústřed- ní inspektor minister- stva kultury MLR, Bu- dapešť
Německá de- mokratická republika (NDR)	Doc. Herbert Titze, vědecký pracovník pe- dagogického ústavu, Berlín	Johannes Gronitz, uči- tel střední školy, Karl- Marx-Stadt
Polsko (PLR)	Dr. Edward Otto, pro- fesor polytechniky, Varšava	Andrzej Mąkowski, odborný asistent, Var- šava
Rumunsko (RLR)	Gheorghe D. Simio- nescu, profesor poly- techniky v Bukurešti	Petrisor Mihailescu, inspektor matematiky ministerstva osvěty RLR, Bukurešť
SSSR	Jelena Aleksandrovna Morozovová CSc., docentka Lomonoso- vovy státní university v Moskvě	Ivan Semjonovič Petr- jakov, učitel střední školy v Moskvě

Příloha č. 2

Jmenný seznam zúčastněných žáků

Bulharská lidově demokratická republika

Танушев Мирослав Светлославов; Бонев Боян Маринов; Кацаров Божидар Димитров; Велелев Никола Иванов; Иванова Миленка Младенова; Минасян Гарабел Ардашец; Касабов Димитър Захариев; Димитров Димо Белчев.

Československá socialistická republika

Daneš Josef, Dolní Počernice; Fučík Svatopluk, Hradec Králové; Hatala Peter, Bratislava; Ježek Jaroslav, Praha; Mešina Marián, Nováky; Novotný Jan, Olomouc; Veselý Karel, Praha; Voda Pavol, Bratislava.

Maďarská lidově demokratická republika

Kéry Gerzson, Sopron; Kóta József, Tatabánya; Gálfi László, Budapest; Siminovits Miklós, Budapest; Benczur András, Budapest; Gyárfás András, Budapest; Sebestyén Zoltán, Gelldömölk; Szidarovszky Ferenc, Budapest.

Německá demokratická republika

Görke Katharina, Berlin; Bölling Reinhard, Berlin; Goize Friedrich, Klettwitz/Niederlausitz; Görgens Walter, Schönebeck/Elbe; Lehman Wolfgang, Leipzig; Michel Claus, Bautzen; Tetsch Karl-Heinz, Sonneberg; Weller Stefan, Berlin.

Polská lidově demokratická republika

Gabryjanczyk Paweł, Łódź; Hensz Ewa, Łódź;
Kuczma Marcin, Katowice; Rempała Jan, Warszawa;
Sztachelski Jerzy, Warszawa; Urbański Paweł,
Lublin; Wołęjszo Jacek, Toruň; Żytkow Jan, War-
szawa.

Rumunská lidově demokratická republika

Badescu Lucian; Buimovici Alexandru; Eckstein
Gheorghe; Giergea Viorel; Hantila Florea; Lustig
Gheorghe; Puha Radu; Zsido László.

Svaz sovětských socialistických republik

Бернштейн Иосиф, Москва; Гончарова Лидия,
Москва; Куранов Геннадий, Москва; Маргулис
Григорий, Москва; Муштари Дания, Казань;
Панкрашьев Евгений, Н. Тура, Свердловская
область; Потепун Алексей, Ленинград; Перме-
нев Александр, Москва.

Příloha č. 3a

Celkový počet bodů, které získali žáci jednotlivých zemí

BLR	ČSSR	MLR	NDR	PLR	RLR	SSSR
33	30	45	14	20	32	46
37	19	39	21	30	38	42
32	35	39	18	39	39	31
26	33	32	18	32	28	36
25	20	32	21	11	32	30
13	23	23	21	19	35	22
15	29	41	34	33	30	37
15	23	38	6	28	23	19

Příloha č. 3b

Klasifikace řešení jednotlivých úloh čs. žáků

Úloha číslo	1	2	3	4	5	6	7	Žák získal celkem bodů
V řádce je klasifikace jednotlivého žáka	6	6	8	4	0	0	6	30
	6	5	3	1	4	0	0	19
	6	6	8	4	7	4	0	35
	6	6	8	5	4	4	0	33
	1	4	6	4	5	0	0	20
	6	4	7	2	4	0	0	23
	2	6	7	5	6	2	1	29
	5	5	8	5	0	0	0	23
Maximální počet bodů za řešení	6	6	8	5	7	6	8	46

Příloha č. 4

Počet cen, které získali žáci jednotlivých zemí

Cena	BLR	ČSSR	MLR	NDR	PLR	RLR	SSSR	Celkem
první	0	0	2	0	0	0	2	4
druhá	1	1	3	1	1	3	2	12
třetí	2	3	2	0	3	3	2	15
Počet cen družstva	3	4	7	1	4	6	6	31

**Jmenný seznam žáků odměněných cenami na
IV. Mezinárodní matematické olympiádě**

I. cena

*Josif Bernštejn (SSSR); Kéry Gerzson (MLR);
Lidija Gončarovová (SSSR); Sebestyén Zoltán (MLR).*

II. cena

*Köta József (MLR); Gálfi László (MLR); Marcin
Kuczma (PLR); Gheorghe Eckstein (RLR); Szida-
rovszky Ferenc (MLR); Alexandru Buimovici (RLR);
Bojan Marinov Bonev (BLR); Alexej Potěpun (SSSR);
Grigorij Margulis (SSSR); Peter Hatala (ČSSR);
Gheorghe Lustig (RLR); Karl-Heinz-Tetsch (NDR).*

III. cena

*Miroslav Světoslavov Tanušev (BLR); Jaroslav
Ježek (ČSSR); Jacek Wolejszo (PLR); Božidar Di-
mitrov Kacarov (BLR); Benczur András (MLR);
Siminovits Miklós (MLR); Jan Rampala (PLR);
Lucian Badescu (RLR); Florea Hantila (RLR);
Gennadij Kuranov (SSSR); Josef Daneš (ČSSR);
Eva Hensz (PLR); Radu Puha (RLR); Danijar
Muštari (SSSR); Karel Veselý (ČSSR).*

2. SOUTĚŽNÍ ÚLOHY IV. MMO

Určete (Texty a nástin řešení.)

1. Vypočítejte nejmenší přirozené číslo n , které má tyto vlastnosti:

(1) jeho vyjádření v desítkové soustavě končí cifrou 6;

číslicí (2) jestliže před číslo n napíšeme *číslicí* cifru 6 a poslední cifru 6 škrtneme, dostaneme čtyřnásobek hledaného čísla n .

(Úlohu navrhl Polsko a správné řešení bylo hodnoceno 6 body.)

Řešení. Položme $n = 10x + 6$ (x celé nezáporné); označme y počet cifer čísla n . Pak platí

$$4(10x + 6) = 6 \cdot 10^{y-1} + x,$$

tj. po úpravě

$$13x = 2 \cdot (10^{y-1} - 4). \quad (1)$$

Je tedy třeba vyšetřovat celá čísla 6, 96, 996, 9 996, ..., která mají tvar $10^{y-1} - 4$, a najít mezi nimi první číslo dělitelné třinácti. Zkusmo určíme, že je to číslo

$$99\,996 = 13 \cdot 7\,692.$$

Je tedy $y - 1 = 5$, $y = 6$; ze vztahu (1) dostaneme $x = 15\,384$. Hledané číslo je $n = 153\,846$; zkouška skutečně dává $4 \cdot 153\,846 = 615\,384$.

Jiné řešení. Končí-li hledané číslo n cifrou 6, končí číslo $k = 4n$ cifrou 4 (je $6 \cdot 4 = 24$), končí tedy n dvojčíslím 46. Avšak $46 \cdot 4 = 184$, proto končí k dvojčíslím 84 a číslo n trojčíslím 846; takto postupujme dále, přehled posledních cifer dekadického zápisu zachycuje tabulka:

Číslo $k = 4n$	Číslo n
..... 4	 6
.....84	46
.....384	846
..... 5 384	 3 846
..... 15 384	 53 846
..... 615 384	 153 846

Dokažme, že číslo 153 846 splňuje požadavky úlohy: Především platí $153\,846 \cdot 4 = 615\,384$. Z tabulky a z naznačeného postupu je patrné, že číslo 153 846 je nejmenší číslo toho druhu. Tím je řešení provedeno.

2. Určete všechna reálná čísla x , která splňují nerovnost

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}. \quad (2)$$

(Úlohu navrhl Maďarsko; její správné řešení bylo hodnoceno 6 body.)

Řešení. Budiž x kořenem nerovnosti (2); nerovnost upravíme na tvar

$$\sqrt{3-x} > \frac{1}{2} + \sqrt{x+1}.$$

Protože na obou stranách této nerovnosti jsou kladná čísla, dostaneme po umocnění a úpravě

$$\frac{7}{4} - 2x > \sqrt{x+1}.$$

Nové umocnění a úprava dá nerovnost

$$64x^2 - 128x + 33 > 0. \quad (3)$$

Rovnice $64x^2 - 128x + 33 = 0$ má reálné kořeny

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{31}}{8};$$

proto můžeme rozložit trojčlen na levé straně (3) v součin kořenových činitelů a dostaneme

$$(8x - 8 + \sqrt{31})(8x - 8 - \sqrt{31}) > 0. \quad (4)$$

Součin obou činitelů je kladný jedině v tom případě, je-li menší z obou činitelů, tj. $8x - 8 - \sqrt{31}$, kladný nebo je-li větší z obou činitelů, tj. $8x - 8 + \sqrt{31}$, záporný.

Odtud dostaneme dvě skupiny možných řešení:

$$x < 1 - \frac{1}{8}\sqrt{31}, \quad (5)$$

$$x > 1 + \frac{1}{8}\sqrt{31}. \quad (6)$$

Nyní provedeme *zkoušku*. a) Z (5) dostaneme

$$3 - x > 2 + \frac{1}{8}\sqrt{31} > 0, \quad x + 1 < 2 - \frac{1}{8}\sqrt{31}. \quad (7)$$

Aby odmocnina $\sqrt{x+1}$ měla smysl, musí být $x+1 \geq 0$; proto musí platit $x \geq -1$, tedy celkem musí být

$$-1 \leq x < 1 - \frac{1}{8}\sqrt{31}. \quad (8)$$

Umocněním na druhou si ověříme snadno rovnost

$$\sqrt{2 + \frac{1}{8}\sqrt{31}} - \sqrt{2 - \frac{1}{8}\sqrt{31}} = \frac{1}{2}; \quad (9)$$

vzhledem k (7), (9) je tedy

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2},$$

což je nerovnost (2).

Z (6) dostaneme

$$\sqrt{3-x} > \sqrt{2 - \frac{1}{8}\sqrt{31}},$$

$$\sqrt{x+1} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \sqrt{2 + \frac{1}{8}\sqrt{31}}.$$

Protože je zřejmé

$$\sqrt{2 - \frac{1}{8}\sqrt{31}} < \frac{1}{2} + \sqrt{2 + \frac{7}{8}\sqrt{31}},$$

nedává vztah (6) žádné řešení úlohy.

Všecka řešení nerovnosti (2) jsou tedy dána nerovnostmi (8).

Poznámka. Uvedené řešení neužívá metody ekvivalence, zkouška se vykonala bez obrácení postupu z rozboru. Většina účastníků však řešila nerovnost (2) pomocí ekvivalentních úprav.

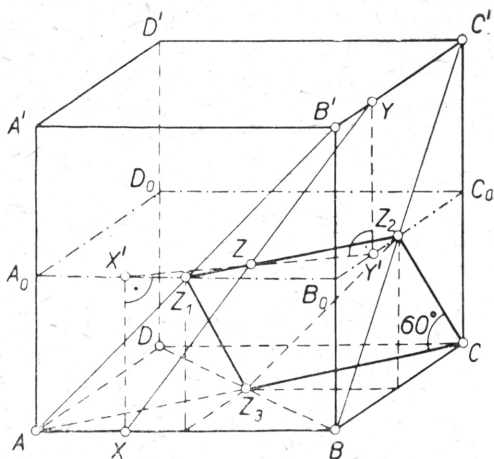
3. Je dána krychle $ABCD A'B'C'D'$ (protější stěny jsou $ABCD$, $A'B'C'D'$ a platí $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$). Proměnný bod X probíhá stálou rychlostí obvod čtverce $ABCD$ (v napsaném pořádku), proměnný bod Y probíhá touž rychlostí obvod čtverce $B'C'CB$ (v napsaném pořádku). Oba body X , Y se počnou pohybovat v témž okamžiku, přičemž výchozí polohy jsou A a B' .

Vyšetřte geometrické místo středů Z úseček XY a sestrojte náčrtek.

(Úlohu navrhlo Československo a její správné řešení bylo hodnoceno 8 body.)

Řešení (obr. 37). Označme σ rovinu souměrnosti hrany AA' ; rovina σ je rovnoběžná s rovinou ABC a protne danou krychli ve čtverci $A_0B_0C_0D_0$ (A_0 je střed úsečky AA' atd.). Označme po řadě Z_1 , Z_2 středy úseček A_0B_0 , B_0C_0 .

a) Když bod X probíhá úsečku AB , probíhá bod Y touž rychlostí úsečku $B'C'$; střed Z úsečky XY leží podle známé věty v rovině σ . Bod Z je tedy také středem úsečky $X'Y'$, která je pravoúhlým průmětem



Obr. 37

úsečky XY do roviny σ . Geometrickým místem středů Z je v tomto případě zřejmě úsečka Z_1Z_2 .

b) Když bod X probíhá úsečku BC a bod Y úsečku $C'C$, jsou přímky XY rovnoběžné s úhlopříčkou BC' . Geometrickým místem bodů Z je v tomto případě zřejmě úsečka Z_2C .

c) Když bod X probíhá úsečku CD a současně bod Y úsečku CB , jsou přímky XY rovnoběžné s úhlopříčkou BD a body Z vyplní úsečku CZ_3 , kde Z_3 je střed čtverce $ABCD$ (úhlopříčky BD).

d) Když se konečně bod X vrací do bodu A po úsečce DA a současně bod Y se vrací do bodu B' po úsečce $B'B$, je situace obdobná jako v případě a): bod Z pak probíhá úsečku Z_3Z_1 , jak snadno dokážeme vhodnou výměnou hran krychle.

Patrně je $Z_1Z_2 = Z_2C = CZ_3$ (každá z těchto úsečků je shodná s polovinou stěnové úhlopříčky dané krychle); mimo to je $Z_1Z_2 \parallel CZ_3$. Čtyřúhelník $Z_1Z_2CZ_3$ je tedy rovnoběžník, a to kosočtverec.

Tím je úloha rozřešena.

4. Řešte rovnici

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1. \quad (10)$$

(Úloha byla navržena Rumunskem; správné řešení bylo hodnoceno 5 body.)

Řešení. Užijeme známých vzorců

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x, \quad 2 \cos^2 2x = 1 + \cos 4x$$

a dosadíme do prvních dvou členů rovnice (10); po úpravě vyjde

$$\cos 2x + \cos 4x + 2 \cos^2 3x = 0. \quad (11)$$

Na první dva členy rovnice (11) užijeme vzorce pro součet $\cos \alpha + \cos \beta$; dostaneme

$$2 \cos 3x \cos x + 2 \cos^2 3x = 0,$$

neboli

$$2 \cos 3x (\cos x + \cos 3x) = 0.$$

Na dvojčlen v závorkách užijeme znovu vzorce pro $\cos \alpha + \cos \beta$; vyjde

$$4 \cos x \cos 2x \cos 3x = 0. \quad (12)$$

Všecka řešení rovnice (12) jsou

$$\begin{aligned} x &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ, & 2x &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ, \\ 3x &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ, \end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned}x &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ, & x &= 45^\circ + k \cdot 180^\circ, \\x &= 30^\circ + k \cdot 120^\circ,\end{aligned}$$

kde k je libovolné celé číslo.

Zkouškou snadno zjistíme, že tyto tři soustavy čísel skutečně vyhovují rovnici (10).

5. Je dána kružnice k a na ní tři různé body A, B, C . Sestrojte (pravítkem a kružítkem) na kružnici k další bod D tak, aby vznikl čtyřúhelník $ABCD$, jemuž lze vepsat kružnici.

(Úlohu navrhlo Bulharsko; nejvyšší možný počet bodů za správné řešení byl 7.)

Řešení. Pro hledaný tečnový čtyřúhelník platí podle známé věty

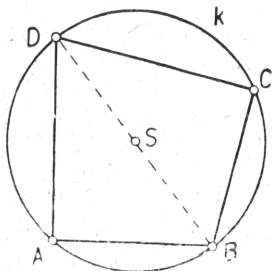
$$AD + BC = AB + CD. \quad (13)$$

Zvolme označení bodů A, B, C tak, aby platilo $BC \geq AB$ (je-li $BC < AB$, vyměníme označení bodů A, C). Vztah (13) upravíme na tvar

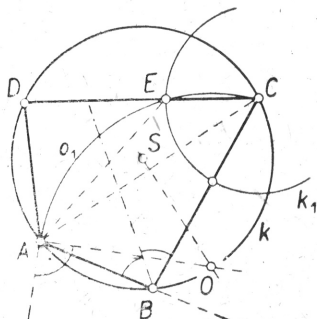
$$BC - AB = CD - AD. \quad (14)$$

Hledaný vrchol D náleží tedy jednak kružnici k , jednak hyperbole, která má ohniska A, C a jejíž hlavní osa má délku $BC - AB$. Jde tedy o sestrojení společných bodů obou křivek euklidovskou konstrukcí.

a) Je-li $AB = BC$, musí podle (14) být $AD = CD$; bod D leží na ose úsečky AC , která protne kružnici k mimo bod B v jediném dalším bodě. Vznikne konvexní čtyřúhelník $ABCD$, který je deltoidem a jemuž lze tedy skutečně vepsat kružnici (obr. 38).

$$CE = CD - DE = CD - AD = BC - AB. \quad (15)$$


Obr. 38



Obr. 39

$$\begin{aligned} \angle AEC &= 180^\circ - \angle AED = \\ &= 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2} \angle ADC) = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle ADC = \\ &= 90^\circ + \frac{1}{2} (180^\circ - \angle ABC) = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle ABC. \end{aligned} \quad (16)$$

Pro pomocný bod E máme tedy dvě geometrická místa bodů: předně podle (15) je to kružnice $k_1 \equiv (C; BC - AB)$, za druhé podle (16) je to oblouk σ_1 , který leží v polorovině opačné k $\angle ACB$ a z jehož bodů

je vidět úsečku AC pod úhlem velikosti $180^\circ - \frac{1}{2} \angle ABC$.

Když oblouk o_1 protne kružnici k_1 v bodě E , který leží uvnitř kružnice k , pak polopřímka CE protne oblouk $\widehat{AC}$ kružnice k , který neobsahuje bod B , v bodech $D \neq A, C$. Pro čtyřúhelník $ABCD$ platí podle jeho sestrojení $\angle DEA = \frac{1}{2} \angle ABC$ a dále $\angle EDA = 180^\circ - \angle ABC$, tudíž $\angle DAE = 180^\circ - \angle DEA - \angle EDA = \frac{1}{2} \angle ABC$. Trojúhelník AED je tedy rovnoramenný se základnou AE , tj. platí $AD = DE$. Je tedy $CD - AD = DE + CE - AD = CE = BC - AB$, neboli pro čtyřúhelník $ABCD$ platí vztahy (14), (13); protože je tento čtyřúhelník konvexní, je tečnový. Tím je provedena zkouška řešení.

Diskuse. Protože platí $180^\circ - \frac{1}{2} \angle ABC > 180^\circ - \angle ABC$, leží oblouk o_1 uvnitř kružnice k (s výjimkou bodů A, C). Průsečík E křivek k_1, o_1 vznikne jen v případě, je-li $CE < AC$, tj. když platí

$$BC - AB < AC.$$

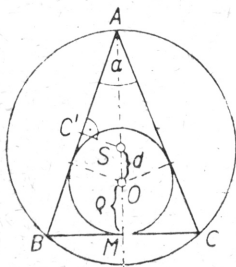
Tato nerovnost (trojúhelníková) je splněna pro každou trojici bodů A, B, C kružnice k ; úloha má tedy vždy jediné řešení.

6. Je dán rovnoramenný trojúhelník. Kružnice jemu opsaná má poloměr r , kružnice vepsaná má poloměr ρ . Dokažte, že vzdálenost d středů obou těchto kružnic je

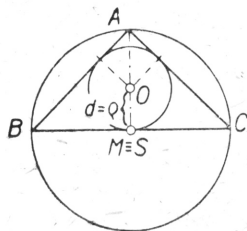
$$d = \sqrt{r(r - 2\rho)}.$$

(Úloha byla navržena Německou demokratickou republikou a správné řešení hodnoceno 6 body.)

Řešení. Budiž ABC daný rovnoramenný trojúhelník se základnou BC . Střed O kružnice jemu vepsané leží v polorovině BCA a jeho vzdálenost od přímky BC je ϱ (obr. 40 až 42).



Obr. 40



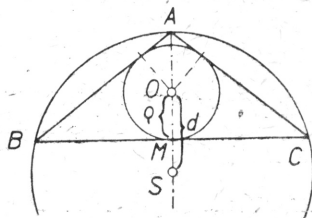
Obr. 41

Je-li úhel $\alpha = \sphericalangle BAC$ ostrý, leží střed S opsané kružnice také v polorovině BCA a jeho vzdálenost od přímky BC je $r \cos \alpha$; je tedy v tomto případě

$$d = SO = |\varrho - r \cos \alpha|.$$

Je-li $\alpha = 90^\circ$, splyne bod S se středem M úsečky BC a platí

$$\begin{aligned} d = SO = \varrho = \\ = |\varrho - r \cos \alpha|. \end{aligned}$$



Obr. 42

Je-li úhel α tupý, leží střed S v polorovině opačné k BCA ; jeho vzdálenost od přímky BC je $-r \cos \alpha$ a platí opět

$$d = SO = \varrho - r \cos \alpha = |\varrho - r \cos \alpha|.$$

Ve všech případech je tedy

$$d = |\varrho - r \cos \alpha|. \quad (17)$$

Zbývá vypočítat $\cos \alpha$ pomocí r , ϱ ; označme M střed úsečky BC a vyjádřeme délku úsečky BM dvojitým způsobem. Předně platí

$$BM = r \sin \alpha, \quad (18)$$

ať je úhel α ostrý, pravý nebo tupý. Za druhé vyplývá z trojúhelníka BMO vztah

$$BM = \varrho \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\alpha}{4} \right), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{neboť } \sphericalangle BOM &= \frac{1}{2} \sphericalangle BOC = \frac{1}{2} \left(90^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= 45^\circ + \frac{\alpha}{4}. \end{aligned}$$

Porovnáním (18) a (19) dostaneme

$$r \sin \alpha = \varrho \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}} = \varrho \frac{\cos \frac{\alpha}{4} + \sin \frac{\alpha}{4}}{\cos \frac{\alpha}{4} - \sin \frac{\alpha}{4}}.$$

Rozšíříme-li poslední zlomek číslem $\cos \frac{\alpha}{4} + \sin \frac{\alpha}{4}$,
vyjde

$$r \sin \alpha = \varrho \frac{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}},$$

neboli

$$2r \sin \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \varrho \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

Nahradíme-li $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ a dělíme-li kladným číslem $1 + \sin \frac{\alpha}{2}$, dostaneme

$$2r \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 2r \sin \frac{\alpha}{2} + \varrho = 0. \quad (20)$$

Ježto $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, je podle (20)

$$\varrho - r \cos \alpha = \varrho - r + 2r \sin^2 \frac{\alpha}{2} =$$

$$= \varrho - r + 2r \sin \frac{\alpha}{2} - \varrho = r \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} - 1 \right)$$

a dále podle (17), (20)

$$d^2 = r^2 \left(4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 4 \sin \frac{\alpha}{2} + 1 \right) =$$

$$= r^2 \left(4 \sin \frac{\alpha}{2} - \frac{2\varrho}{r} - 4 \sin \frac{\alpha}{2} + 1 \right) = r^2 - 2r\varrho,$$

což jsme měli dokázat.

7. Je dán čtyřstěn $SABC$. K tomuto čtyřstěnu existuje pět kulových ploch, z nichž každá se dotýká šesti přímek SA, SB, SC, AB, BC, CA . Tento čtyřstěn je pravidelný. Obráceně ke každému pravidel-

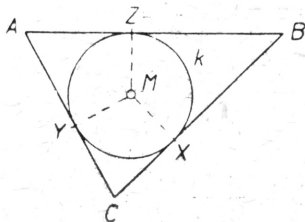
viz papír

nému čtyřstěnu lze sestavit pět takových kulových ploch.

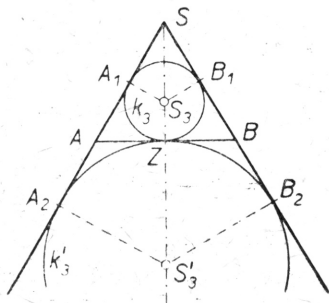
Dokažte obě tyto věty a sestavte náčrtek.

(Úloha byla navržena z SSSR a správné řešení bylo hodnoceno nejvýše 8 body.)

Řešení. I. Předně je třeba zjistit, v kterých bodech se dotýkají kulové plochy prodloužených hran čtyřstěnu $SABC$. Každá z 5 kulových ploch protne rovinu ABC v kružnici, která je trojúhelníku ABC buď vepsaná, nebo vně vepsaná.



Obr. 43



Obr. 44

a) Předpokládejme nejprve, že kulová plocha K protne rovinu ABC v kružnici k vepsané trojúhelníku ABC (obr. 43). Táž plocha K protne rovinu SAB buď v kružnici k_3 vepsané trojúhelníku SAB , nebo v kružnici k'_3 , která je trojúhelníku SAB vně vepsaná ke straně AB (obr. 44). V prvním případě protne plocha K rovinu SBC v kružnici, která se dotýká dvou stran

trojúhelníka SBC ve vnitřních bodech (totiž stran SB , BC); proto je tato kružnice vepsána trojúhelníku SBC a dotýká se i strany SC v jejím vnitřním bodě. Kulová plocha K se tedy dotýká všech hran čtyřstěnu ve vnitřních bodech; označíme ji K_0 a nazveme ji vepsanou kulovou plochou.

V druhém případě plocha K protíná rovinu SBC v kružnici, která se dotýká strany BC ve vnitřním bodě a prodloužené strany SB ve vnějším bodě; tato kružnice je tedy vně vepsána trojúhelníku SBC ke straně BC a dotýká se prodloužené strany SC v jejím vnějším bodě. Tuto kulovou plochu označíme K_S a nazveme ji vně vepsanou.

b) Protíná-li kulová plocha K rovinu ABC v kružnici k_1 vně vepsané trojúhelníku ABC např. ke straně BC , protíná SAB v kružnici vně vepsané trojúhelníku SAB , a to zřejmě ke straně SB . Rovinu SBC protíná plocha K v kružnici, která se dotýká stran SB a BC ve vnitřních bodech; je to tedy kružnice vepsaná trojúhelníku SBC . Tím je tento případ převeden na případ a), přičemž jsou vrcholy S , A , B , C nahrazeny postupně vrcholy A , B , C , S .

II. Kulová plocha K_0 se dotýká přímk SA , SB , SC po řadě v bodech A_1 , B_1 , C_1 , kulová plocha K_S se dotýká týchž přímk po řadě v bodech A_2 , B_2 , C_2 . Obě plochy protínají rovinu ABC v téže kružnici k vepsané trojúhelníku ABC ; proto se obě dotýkají přímk (hran) AB , BC , CA po řadě v týchž bodech Z , X , Y . Podle vlastností tečen kulové plochy platí

$$AA_1 = AA_2 = AZ = AY; BB_1 = BB_2 = BZ = BX; CC_1 = CC_2 = CX = CY. \quad (21)$$

Mimoto platí (opět podle vlastností tečen kulové plochy)

$$SA_1 = SB_1 = SC_1; \quad SA_2 = SB_2 = SC_2. \quad (22)$$

Protože je $SA_2 = SA_1 + AA_1 + AA_2$ a obdobně $SB_2 = SB_1 + BB_1 + BB_2$, $SC_2 = SC_1 + CC_1 + CC_2$, platí podle (21), (22)

$$AA_1 = BB_1 = CC_1; \quad (23)$$

protože je $SA = SA_1 + AA_1$, $SB = SB_1 + BB_1$, $SC = SC_1 + CC_1$, je podle (22), (23)

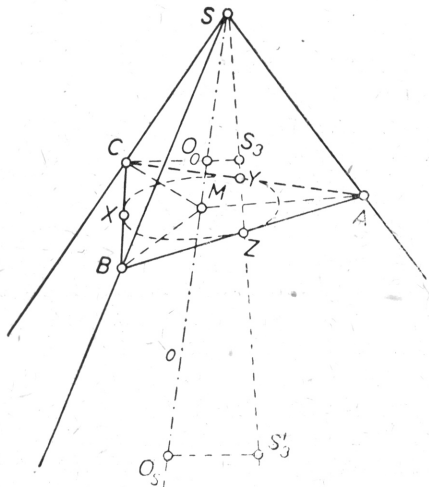
$$SA = SB = SC. \quad (24)$$

Výměnou vrcholů zjistíme z (24), že všechny tři hrany vycházející z kteréhokoli vrcholu daného čtyřstěnu mají touž délku; proto mají všechny hrany čtyřstěnu $SABC$ touž délku a čtyřstěn je pravidelný.

Tím je dokázána první věta z úlohy 7.

III. Budiž $SABC$ pravidelný čtyřstěn, M střed kružnice opsané i vepsané trojúhelníku ABC (obr. 45). Otočení o 120° kolem přímky $o \equiv SM$ převedou roviny SAB v roviny SBC a SAC . Označme opět k_3 kružnici vepsanou trojúhelníku SAB , S_3 její střed, dále označme k'_3 kružnici vně vepsanou trojúhelníku SAB , a to ke straně AB ; její střed označme S'_3 . Protože rovina SAB obsahuje přímku AB kolmou k CM i SM , je $SAB \perp SCM$; proto kolmice vztyčená v bodě S'_3 k rovině SAB protne přímku o v jistém bodě O_0 . Obdobně protne kolmice vztyčená k rovině SAB v bodě S'_3 přímku o v jistém bodě O_S . Kulová plocha K_0 , která má střed v bodě O_0 a obsahuje kružnice k_3 , obsahuje i kružnice vepsané trojúhelníkům

SBC , SCA , jak zjistíme otáčením roviny SAB kolem osy o o 120° . Kulová plocha K_0 je tedy jednou z uvedených pěti kulových ploch.



Obr. 45

Obdobně kulová plocha K_S se středem O_S , která obsahuje kružnici k'_3 , protíná roviny SBC , SCA v kružnicích vně vepsaných trojúhelníkům SBC , SCA , jak zjistíme opět otočením kolem osy o . Plocha K_S je tedy druhá z uvedených pěti ploch. Nahradíme-li bod S postupně body A , B , C , dostaneme další tři plochy.

Tím bude dokázána i druhá věta z úlohy 7.

• *Závěrečná poznámka k řešení úloh IV. MMO.* Předcházející řešení soutěžních úloh nejsou všude provedena do podrobnosti; také neukazují všude, jak se přijde na metodu řešení úlohy; o tom nechť uvažuje čtenář sám.

Připomínáme jen, že účastníci MMO, zejména z některých států, řešili mnohé soutěžní úlohy několika způsoby, že si úlohy sami zobecňovali (např. úlohu 6 řešili pro libovolný trojúhelník) a řešili tyto zobecněné úlohy.

Tyto zkušenosti jsou pro nás velmi poučné. Ukázalo se totiž, že účastníci z některých států byli více vedeni k řešení tzv. otevřených problémů, které jsou první etapou v samostatné tvořivé práci v matematice. V tomto směru máme ještě mnoho co dohánět v našich domácích soutěžích. Proto jsme zařadili ve XII. ročníku čs. celostátní matematické olympiády zatím pokusně mimo rámec soutěže několik takových problémů; chceme věnovat takovýmto úlohám více pozornosti i v seminářích pro účastníky MO a v soustředěných olympioniků. Je třeba vynaložit všechno úsilí, aby se zvýšila úroveň žáků nadaných pro matematiku a aby si naši žáci vybojovali v příštích mezinárodních matematických olympiádách lepší umístění, než tomu bylo dosud; tento i politicky závažný úkol jistě pomohou řešit učitelé matematiky všech typů našich škol.

Obsah

<i>I. K průběhu XI. ročníku Matematické olympiády</i>	3
<i>II. Texty přípravných úloh I. kola</i>	21
<i>III. Texty a řešení úloh ze soutěže</i>	
1. Úlohy I. kola kategorie A	26
2. Úlohy II. kola kategorie A	46
3. Texty úloh III. kola kategorie A	55
4. Úlohy I. kola kategorie B	57
5. Úlohy II. kola kategorie B	67
6. Úlohy I. kola kategorie C	76
7. Úlohy II. kola kategorie C	86
8. Úlohy I. kola kategorie D	93
9. Úlohy II. kola kategorie D	103
10. Něco o metodách řešení úloh	111
<i>IV. Čtvrtá Mezinárodní matematická olympiáda</i>	
1. O průběhu soutěže	125
2. Soutěžní úlohy IV. MMO.	138

*Edice Pomocné knihy pro žáky
Za přispění spolupracovníků zpracovali
doc. Jan Vyšín a Rudolf Zelinka*

JEDENÁCTÝ
ROČNÍK
MATEMATICKÉ
OLYMPIÁDY

Obálku a vazbu navrhla Jana Laudová
Vydání 1. — Praha 1963 — Počet stran 154
Odpovědná redaktorka: Květoslava Brázdová
Technická redaktorka: Jana Týlová

Vytiskla Svoboda, grafické závody, n. p., závod 4, Ostrov-
ní 30, Praha 1 — AA 5,42 (text 4,95 — grafika 0,47) —
VA 5,71 — D-06*30591 — Náklad 3 200 výtisků — Te-
matická skupina a podskupina 02/57

Cena brož. výtisku Kčs 4,—
63/II-13

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze
jako svou publikaci č. 35-0-06

14—033—63 Kčs 4,—

SPN 35-0-06

14-033-63
02 57 Kčs 4,-

