

21. ročník matematické olympiády

Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); František Zítek (editor): 21. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1971-1972. 14. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1973.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404618>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

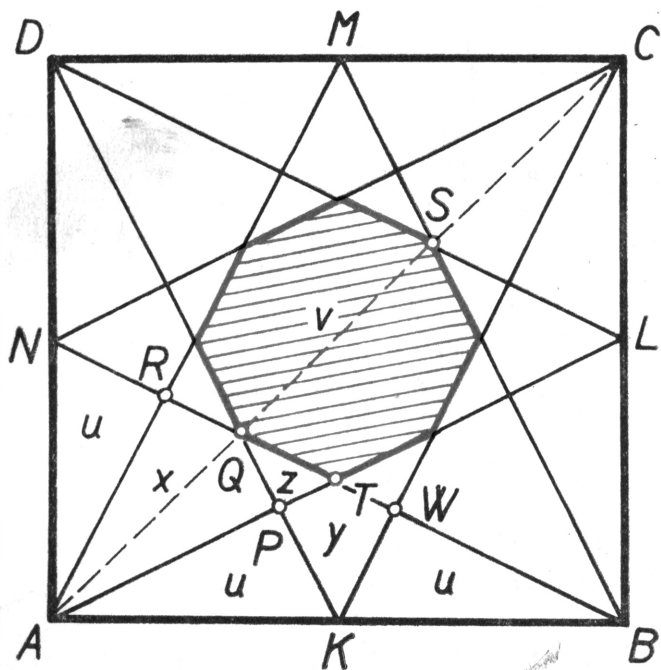


This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

M O

Ústřední výbor
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
 115 67 Praha 1, Žitná 25
 telefon 22 66 01-3

XXI. ročník matematické olympiády



SPN

DVACÁTÝ PRVNÍ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

*Zpráva a řešení úloh ze soutěže
konané ve školním roce 1971–1972*

ČTRNÁCTÁ MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ
OLYMPIÁDA

Ústřední výbor
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
115 67 Praha 1, Žitná 25
telefon 22 66 01 - 3

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ
PRAHA

Za přispění spolupracovníků zpracovali doc. Jan Vyšín, CSc.,
Vlastimil Macháček, Jiří Mída, dr. Jozef Moravčík, CSc.
a dr. František Zítek, CSc.

Slovenské části textu přeložil dr. Jozef Moravčík, CSc.

Recenzovali Jitka Kučerová a dr. Miroslav Šisler, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1973

Předmluva

Milí účastníci matematické olympiády,

věnujme předmluvu k brožuře XXI. ročníku matematické olympiády jedné pro vás velmi důležité otázce, a to *otázce přechodu z nižšího stupně školy na vyšší*. Podnětem k tomuto tématu je znovuzřízení *kategorie C* pro žáky prvního ročníku gymnasií a středních odborných škol. Kategorie *C* byla obnovena proto, že podle mnoha kritických hlasů žáci prvního ročníku škol II. cyklu nestačili na úlohy náročnější *kategorie B*, neměli šance na úspěch a ztráceli o soutěž zájem. Naše celostátní matematická olympiáda je přísně vázána na školský systém, neboť v podstatě každý ročník má svou vlastní soutěž. Nechceme uvažovat o tom, zda je toto pojetí správné; je však asi důsledkem naší tradice výchovy, která nevede mladé lidi k přílišné samostatnosti. Ostatně i nedostatek času pro zájmovou činnost, způsobovaný naším chápáním pětidenního pracovního týdne a přehruštěným učebním plánem našich škol, brzdí volnější pojetí olympiády.

Obnovení *kategorie C* samo o sobě nemůže způsobit zázraky. Žáci, kteří přešli ze základní školy na školu II. cyklu, musí postupně *změnit svůj postoj ke studiu matematiky* a snad ke studiu vůbec. A právě toto je problém přechodu: nejméně se projevuje při postupu z bývalé národní školy (5. ročník *ZDŠ*) do 6. ročníku *ZDŠ*. Ale už tady vznikají jisté potíže tím, že žáky vyučuje místo jediného třídního učitele několik učitelů odborných; však se možná na některé nesnáze pamatujete z vlastních zkušeností. Horší je to při přestupu z 9. ročníku nevýběrové *ZDŠ* na výběrovou školu střední. Tady vzrůstá náročnost, třídy se musí teprve konsolidovat, neboť se v jedné třídě sejdou žáci z různých

ZDŠ, často rozdílné úrovně. Také pracovní tempo je přirozeně vyšší a žáci musí umět aspoň trochu samostatně studovat. Ti, kdo si nenavykli na základní škole pracovat soustavně doma, doplácí na to velmi na gymnasiích a odborných školách.

Všecko to, o čem jsme se zmínili všeobecně, platí ve zvýšené míře o matematice, a v tom je právě problém znovuzřízení kategorie C. Úlohy kategorie Z mají často charakter propagační, řešení bývají poloexperimentální a mají žáky jen postupně přesvědčovat, že matematická dedukce (odvozování a dokazování) je účinný nástroj při řešení problémů. Úlohy kategorie C musí být výběrovější a složitější. Tematikou by se neměly úlohy I. kola kategorie C příliš lišit od úloh kategorie Z, ale myšlenkově by měly být náročnější. Uvědomte si, že v takové soutěži, jako je matematická olympiáda, nevystačíte asi jen s tím, čemu jste se naučili ve škole, ale že se budete musit tu a tam něčemu novému přiučit; to je ostatně i cílem soutěže. Víme také dobře, že na úlohy I. kola, studijního, nestačíte někdy sami; nejlepší je, když se včas (ne na poslední chvíli!) poradíte se svým učitelem matematiky. Opisovat řešení bez pochopení je nejen nepoctivé, ale hlavně nesmyslné; tak se totiž ničemu nepřiučíte, nezískáte zběhlost v řešení úloh a v dalším kole nebudete mít úspěch.

Přechodem ze základní školy na střední nejsou však potíže skončeny. Většinu žáků tzv. studijního typu čeká ještě přechod na vysokou školu. A zde je situace ještě napjatější: tempo studia je značně rychlé, předpokládá se, že studenti umějí samostatně studovat literaturu (učební texty, knihy a časopisecké články) a že mají skutečně jisté nadání pro zvolený obor. A právě v matematice se vyskytuje dosti politováníhodných případů, kdy student — dříve než se přizpůsobil vysokoškolským metodám studia — musí vysokou školu pro neúspěch opustit.

V zahraničí se pedagogové i matematikové zabývají soustavně a intenzívně otázkami přechodu na vysokou školu. Mluví se o nich téměř na každé konferenci, pořádají se zvláštní kongresy na toto téma, píšou články a vydávají se sborníky. Také v našem státě se nezahálí; tak např. v listopadu 1972 se konala v Brně

pracovní porada na toto téma; uspořádala ji *matematicko-pedagogická sekce Jednoty čs. matematiků a fyziků*.

Matematická olympiáda a její akce se snaží po dlouhou řadu let usnadnit našim abiturientům přechod do studia matematiky na vysoké škole. Je to nejen sama soutěž, která podněcuje žáky k samostatné práci, jsou to i prázdninová soustředění, je to i vydávání sbírky Škola mladých matematiků, jsou to i přednášky a semináře pro olympioniky a jiné menší akce.

Je na vás, abyste se snažili co nejvíc vytěžít z těchto příležitostí. Zbavte se při olympiádě svých školských zlovyků; jsme přesvědčeni, že to jde, protože účast v matematické olympiádě je dobrovolná, nikdo vás k ničemu nenutí. Co se naučíte, bude vaším ziskem. Přesto však máte jisté dvě morální povinnosti:

Ministerstva školství obou našich republik vynakládají na olympiády každoročně velké částky peněz. Kdo se dobrovolně rozhodne pro účast v matematické olympiádě, měl by si tuto skutečnost uvědomit a měl by pracovat poctivě a soustavně.

V období nastupující technické civilizace roste a poroste stále potřeba matematicky vzdělaných lidí.

Proto mladí lidé, kteří mají dispoice pro studium matematiky, by měli rozvíjet své nadání, neboť tím jsou povinni nejen sobě, ale i celé naší společnosti.

ÚV MO



I. O průběhu XXI. ročníku matematické olympiády

1. ORGANIZACE SOUTĚŽE

Pořadatelem soutěže v XXI. ročníku byla *ministerstva školství ČSR a SSR s Matematickým ústavem ČSAV v Praze (MÚ ČSAV)* a *Jednotou čs. matematiků a fyziků (JČSMF)* za spolupráce s orgány *Socialistického svazu mládeže (SSM)*. Také XXI. ročník se řídil statutem, uveřejněným ve *Věstníku MŠK*, roč. XIX, str. 126, 127, směrnice 37 ze dne 30. IV. 1963.

Žáci soutěžili opět ve 4 kategoriích; *kategorie A* byla určena pro žáky III. a IV. ročníků, *kategorie B* pro žáky II. ročníků a *kategorie C* pro žáky I. ročníků škol II. cyklu. V *kategorii Z* soutěžili žáci ZDŠ. Bylo možné, aby žák soutěžil i ve vyšší kategorii než do které studijně patřil; v příloze A je řada takových příkladů uvedena.

2. SLOŽENÍ ÚSTŘEDNÍHO VÝBORU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Ústřední výbor MO byl ministerstvy školství ČSR a SSR jmenován v lednu 1971 a prakticky beze změny působil i v celém XXI. ročníku v tomto složení:

Předseda: *Jan Vyšín, CSc.*, docent matematicko-fyzikální fakulty KU v Praze

I. místopředseda: *dr. Jozef Moravčík, CSc.*, docent VŠD v Žilině

II. místopředseda: *prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc.*, vedoucí vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

I. jednatel: *Vlastimil Macháček*, odb. asistent pedagogické fakulty KU v Praze

II. jednatel: *Jiří Mída*, odborný asistent pedagogické fakulty KU v Praze

Členové:

Zástupce MŠ ČSR: *Jaroslav Láník*, ústřední školní inspektor MŠ ČSR, Praha

Zástupce MŠ SSR: *Michal Zöldy*, ústřední školní inspektor MŠ SSR, Bratislava

Zástupce ÚV SSM: *Jana Pomazalová*, prof. gymnasia, Brno

Dr. František Běloun, vedoucí matematického kabinetu KPÚ v Praze

Miloš Franeš, profesor gymnasia, Prievidza

dr. Jozef Gruska, Matematický ústav SAV, Bratislava

dr. Milan Hejný, CSc., docent PFUK, Bratislava

František Hradecký, odb. asistent MFFKU v. v., Praha

prof. dr. Milan Kolibiar, DrSc., profesor PFUK, Bratislava

dr. Ivan Korec, odb. asistent, PFUK, Bratislava

akademik Josef Novák, vedoucí vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

Vítazoslav Repáš, ředitel gymnasia, Bratislava

dr. Jiří Sedláček, CSc., vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

Jiří Šídlo, zástupce ředitele gymnasia, Praha

Miroslav Šmerda, učitel ZDŠ, Bílovice nad Svitavou

František Veselý, odb. asistent v. v., Praha

dr. František Zítek, CSc., vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

Dalšími členy ÚVMO byli předsedové krajských výborů matematické olympiády:

prof. dr. Václav Pleskot, profesor ČVUT v Praze

Ludmila Tréglová, profesorka gymnasia, Říčany

Ing. dr. Lada Vaňatová, profesorka gymnasia, Strakonice

Věra Rádlová, profesorka gymnasia *Ľ. Fučíka*, Plzeň
Karel Hnyk, odb. asistent ped. fakulty, Ústí nad Labem
Jan Laštovka, vedoucí kabinetu matematiky *KPÚ*, Hradec
Králové

Petr Benda, odb. asistent *VUT FE*, Brno

Josef Andrys, docent ped. fakulty, Ostrava

Vladimír Jodas, odb. asistent *PF UK*, Bratislava

dr. Ladislav Berger, odb. asistent *VŠD*, Žilina

Kveta Hončarivová, odb. asistentka *PF UPJŠ*, Košice

Pracovní předsednictvo (*PÚVMO*) se scházelo v tomto složení (uvedeno v abecedním pořadí):

prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc.; *VL. Macháček, Ľ. Mida*;
dr. Ľ. Moravčík, CSc.; *dr. Ľ. Sedláček, CSc.*; *doc. Ľ. Vyšín, CSc.*;
dr. Fr. Zítek, CSc.; zástupci *MŠ ss. ústřední inspektoři Ľ. Láník*
a M. Zöldy.

3. SCHŮZE ÚVMO

Jako v každém ročníku, tak i ve *XXI. ročníku MO* se sešel ústřední výbor dvakrát.

Na *první plenární schůzi v Praze* ve dnech 9. a 10. prosince 1971 bylo vzpomenuo nejprve *prof. dr. Karla Hruši*, člena *ÚVMO*, který zemřel v listopadu 1971. Prof. dr. K. Hruša byl prvním předsedou oblastního výboru *MO* v Praze, působil neustále v *ÚVMO*, byl autorem úloh pro *MO* a jedné brožury v edici *Škola mladých matematiků*.

Předmětem jednání této plenární schůze byly tyto okruhy problémů: spolupráce s *SSM*, hodnocení dosavadního průběhu *XXI. ročníku MO* a zajištění organizace i náplně II. a III. kol soutěže, *XIII. mezinárodní matematická olympiáda* a závěrečné hodnocení jubilejního *XX. ročníku MO*, přičemž bylo konstatováno, že se podařilo připravit a vydat zajímavou brožuru k této příležitosti.

Plénium *ÚVMO* schválilo i zprávu komise pro návrhy odměn

zasloužilým pracovníkům v *MO* i návrh na udělení první tzv. *Zelinkovy ceny*. Jako vždy se schůze zabývala vydáváním edice „*Škola mladých matematiků*“, konkursem *ŽČSMF* na úlohy pro *MO* a *FO*, přípravným soustředěním pro *MMO* a celostátním soustředěním úspěšných řešitelů *MO* a *FO* v *Rajnochovicích*. Z kritiky délky, organizace a obsahového zaměření vyplynuly závěry pro další akce.

Pod vedením *dr. Bělouna* byla ustanovena komise *ÚV MO*, aby připravila na žádost matematické sekce *ŽSMF* návrhy témat pro činnost matematických kroužků na *ZDŠ*.

Na *druhé plenární schůzi ÚV MO*, která se konala ve dnech 14. a 15. dubna 1972 na *Kladně* při příležitosti konání celostátního III. kola kategorie *A*, byla vedle běžných pracovních otázek řešena problematika péče o nadané žáky v matematice. Dopis předsedy *ÚV MO* s. *doc. J. Vyšína* zaslaný *MŠ ČSR* a *SSR* vyvolal zájem tyto otázky řešit. Tak např. bylo *MŠ ČSR* umožněno uspořádat jedno přípravné soustředění před *MMO* již v březnu 1972 ve *Štíříně*, uvažuje se o zřízení několika *matematicky zaměřených gymnasií* v *ČSR* a *SSR* již od 1. IX. 1973. Dobrým podkladovým materiálem pro přípravu těchto škol mají být i zprávy *dr. L. Bergera* a *dr. E. Moravusové* ze studijní cesty do Maďarska, kde sledovali výuku na matematicky orientovaných školách. Obdobné zkušenosti se pokusíme získat i z ostatních zemí socialistického tábora (např. *SSSR* a *NDR*).

Dalšími body programu byla příprava soustředění úspěšných řešitelů kat. *B* a *C* v *Trenčíně* (viz bod 5 této kapitoly), zajišťování pomocné literatury a příprava *XXII. ročníku MO*. Bylo konstatováno, že roste počet *KV MO*, které pořádají krajské III. kolo v kategorii *Z*.

4. PRŮBĚH JEDNOTLIVÝCH KOL SOUTĚŽE

a) *Studijní část I. kola*, při níž účastníci řeší tzv. přípravné úlohy, proběhla na školách od září do konce listopadu 1971 pod vedením učitelů matematiky, kteří žakovských řešení využili jako podnětů k besedám.

Termíny odevzdání *soutěžních úloh* byly různé: v kategorii *A* a *Z* 15. leden, v kategoriích *B* a *C* 29. únor 1972. V kategoriích *A*, *B* a *C* měli žáci opět možnost volby úloh, a to čtyř ze šesti, uspořádaných ve dvě trojice. Podmínkou pro postup do II. kola bylo vyřešit na známku 1 nebo 2 aspoň 3 úlohy; přitom mezi těmito úlohami musela být zastoupena každá z trojic aspoň jednou úlohou.

Z přehledné tabulky P za I. kolo je patrný vzestup počtu jak účastníků, tak i úspěšných řešitelů v kategoriích *A*, *C* a *Z*. Přitom účast v kategorii *B* je na přibližně stejné úrovni jako byla v XVIII. ročníku, kdy naposled soutěžily kategorie *B* a *C* odděleně. Potěšitelný je zvláště počet úspěšných řešitelů kategorie *C*, na což měly bezesporu vliv i *komentáře k úlohám*, které dostaly k dispozici školy. Několikaletý vzestupný trend účasti v kategorii *Z* nadále trvá. Velká práce učitelů matematiky na *ZDŠ* i účast žáků v soutěži *MO* bude mít jistě i kladný vliv na zlepšení vyučovacích výsledků v matematice.

b) *Klauzurní II. kolo* proběhlo pod vedením *KVMO* v kategorii *A* dne 4. března a v kategoriích *B* a *C* v sobotu 22. dubna 1972 (tento druhý termín se později ukázal příliš pozdní). Soutěž II. kola kategorie *Z* v okresích se konala pod vedením *OVMO* dne 1. března 1972.

Také srovnání výsledků *MO* v posledních čtyřech ročnících (viz *tabulka P*) ukazuje, že XXI. ročník možno považovat za úspěšný. Z *tabulek 3* a *4* je však stále patrný velký rozdíl mezi jednotlivými kraji; v kategorii *Z* jsou obdobné rozdíly i mezi okresy jednotlivých krajů. Svědčí to nejen o rozdílné pozornosti, věnované *MO* na školách, ale i o velmi rozdílných vnějších podmínkách.

c) *Závěrečné celostátní III. kolo* soutěže v kategorii *A* se konalo 14. a 15. dubna 1972 na Kladně. Protože počet úspěšných řešitelů II. kola byl poměrně velký (viz tabulka 3), mohlo PÚVMO provést výběr účastníků a pozvat jich celkem 74 do Kladna.

Soutěž proběhla opět ve dvou dnech; každý den se řešily 3 úlohy 4 hodiny. Po opravě žákovských řešení komisí PÚVMO (každou úlohu opravovaly dvě osoby) bylo vyhlášeno celkem 19 vítězů a dalších 14 úspěšných řešitelů (viz příloha B). Uvedení žáci byli odměněni MŠ ČSR a MŠ SSR a jejich seznamy byly poslány děkanstvím všech vysokých škol jako materiál pro přijímací komise.

Reprezentační družstvo pro XIV. MMO v Polsku bylo vybráno na zasedání PÚVMO ve Zlatovciach dne 24. června 1972 po soustředění vybraných deseti úspěšných řešitelů III. kola kat. *A*. O MMO je zvláštní zpráva v kapitole VI.

V kompetenci KVMO se konala i *III. kolo soutěže MO* v kategorii *Z*, a to v Praze-městě (36 účastníků), Jiho-moravském (65), Západoslovenském (38) a Středoslovenském kraji (36). Termíny soutěže byly v rozmezí od 26. dubna do 16. května 1972. Podle potřeby rozdělily KVMO soutěž i na několik míst (např. v Jiho-moravském kraji byly tři oblasti) nebo soustředily účastníky na 2—3 dny do vhodného objektu (např. Západoslovenský kraj do rekreačního střediska ve Skalických horách, Středoslovenský kraj do Kunerádu, přičemž třetí den byl využit pro rozbor žákovských řešení).

Výběr úloh byl přibližně na úrovni úloh II. kola kategorie *Z*, někdy byly úlohy i obtížnější. Ve třetím krajském kole soutěžili zpravidla po koordinaci ze všech okresů vybraní nejlepší řešitelé II. kola; jen výjimečně byl pozván soutěžící tak, aby byly zastoupeny všechny okresy kraje.

Ze zpráv KVMO vyplývá, že přes finanční problémy věnovaly se KVMO soutěži III. kola kategorie *Z* rády a že výsledky pomohly porovnat stav péče o nadané žáky v jednotlivých okresech. Jen z jednoho KVMO jsme dostali vyjádření proti pořá-

dání III. kola kategorie *Z* v krajích; je prý to „jednak finančně nákladné a neúčelné a zbytečně by konáním III. krajského kola poklesla prestiž OVMO“.

5. POMOCNÉ AKCE

Ve spolupráci *KVMO* a poboček *JČSMF* byly pořádány četné přednášky s obsahem zeměřeným k *MO* jak pro učitele, tak i pro žáky. Zvláště bohatá činnost se týkala kategorie *Z*.

V kategorii *A* se opět konalo přípravné školení před *MMO*. V Praze mělo ráz školení v kroužku, na jiných místech bylo individuální podle sylabů připravených v Praze. *Pražský kroužek* vedli:

- a) *dr. Jiří Sedláček, CSc.*, vědecký pracovník MÚ ČSAV (Teorie čísel);
- b) *prof. dr. M. Fiedler, DrSc.*, vedoucí vědecký pracovník MÚ ČSAV (Kombinatorická geometrie);
- c) *dr. Josef Hojdar*, odborný pracovník MÚ ČSAV (Nerovnosti a rovnice);
- d) *dr. Antonín Vrba*, odborný pracovník MÚ ČSAV (Elementární a kombinatorická geometrie);
- e) *dr. Petr Liebl*, odborný pracovník MÚ ČSAV (Kombinatorika).

Hojně bylo využíváno sovětské sbírky doc. Morozovové-Petrjakova *Úlohy mezinárodních matematických olympiád*.

Ve dnech 12.—18. března 1972 se konalo *první přípravné soustředění před MMO ve Štiříně*, kam bylo povoláno celkem 20 nejlepších řešitelů I. kola kategorie *A* z krajů. Toto soustředění mělo pomoci vybrat a připravit družstvo pro XIV. *MMO* v Polsku.

Přednášející *dr. Fr. Zítek, CSc.*, z MÚ ČSAV, *Iva Rohličková* a *Jiří Mída*, z ped. f. UK v Praze, *dr. Petr Liebl* a *dr. Josef Hojdar* z MÚ ČSAV a *doc. Jan Vyšín, CSc.*, vedli soustředění seminární

formou, zadávali a řešili s posluchači úlohy s úrovní mezinárodních matematických olympiád.

Další pomocné akce MO zajišťovali slovenští členové ÚV MO, především *dr. Ivan Korec, CSc.* z MFF KU v Bratislavě.

Celoštátné sústreďenie účastníkov MO a FO kategórie B (a *A* z nematuritných ročníkov) sa v školskom roku 1971/72 konalo v *Trenčíně* v čase od 19. 6. 1972 do 8. 7. 1972. Boli, už tradične, zriadené tri triedy, matematická, matematicko-fyzikálna a fyzikálna.

V *matematickej triede* sa konali nasledujúce prednášky a semináre:

Anton Galan: Základy analytickej geometrie v priestore,

dr. Oldřich Odvárko: Kombinatorické úlohy a úvahy,

dr. Jaroslav Smítal, CSc.: Teória čísel,

doc. dr. Štefan Znam, CSc.: Teória grafov,

doc. dr. Beloslav Riečan, CSc.: Pravdepodobnosť,

dr. Ivan Korec, CSc.: Teória algoritmov.

V *matematicko-fyzikálnej triede* prednášali: *dr. O. Odvárko, doc. Š. Znam, doc. B. Riečan* a *dr. I. Korec* na rovnaké témy ako v *matematickej triede*, niektoré prednášky však odznali v skrátenom rozsahu.

Zvyšok programu v *matematicko-fyzikálnej triede* a celý program vo *fyzikálnej triede* zabezpečoval ÚV FO.

Súčasne s prvým týždňom celoštátneho sústreďenia účastníkov MO a FO kategórie B prebiehalo *sústreďenie pred medzinárodnou mat. olympiádou*, na ktorom sa konali nasledujúce semináre:

Jana Galanová, dr. Jaroslav Smítal, CSc.: Teória čísel,

Anton Legén: Komplexné čísla a trigonometria,

Jozef Božek: Úlohy zo stereometrie,

Jozef Božek: Výpočtové a konštrukčné úlohy z planimetrie,

doc. dr. Jozef Moravčík, CSc.: Nerovnosti, postupnosti, funkcie,

prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc.: Kombinatorika,

Jana Fetková: Trigonometrické rovnice a nerovnosti.

Predsednictvo *ÚV MO* vybralo na svojej schôdzi dňa 24. 6. 1972 v Trenčine z desiatich účastníkov sústredujúceho 8členného družstva na *MMO*.

6. *STUDIJNÍ LITERATURA*

Letáky pro kategorii *A*, *B* a *C* celostátně zajišťovalo *SPN v Praze*. *Letáky* pro kategorie *Z* vyšly česky, slovensky a maďarsky.

V nakladatelství *Mladá fronta* byly vydány další svazky edice *Škola mladých matematiků*:

č. 28 *Bruno Budinský–Stanislav Šmakal*: Vektory v geometrii

č. 29 *František Zitek*: Vytvořující funkce

č. 30 *Milan Koman–Jan Vyšín*: Malý výlet do moderní matematiky

Zvláště poslední svazek vyvolal značný kladný ohlas; škoda jen, že náklady uvedených svazků nestačí pokrýt poptávku. Další svazky jsou v tisku a v recenzním řízení.

7. *KONKURS JČSMF NA NÁVRHY ÚLOH PRO MO*

Od roku 1966 jsou úlohy pro *MO* mimo jiné získávány také konkursem. Tento konkurs vyhlásila *Jednota čs. matematiků a fyziků*. Od jeho zveřejnění na jaře roku 1966 do 30. září 1972 se ho zúčastnilo svými úlohami 81 autorů. Zasláno bylo celkem 765 úloh, přičemž recenzní řízení bylo dosud skončeno u 708 úloh, z nichž bylo přijato a odměněno 465.

Význam konkursu pro *MO* je vidět z toho, že ve *XXI.* ročníku z 66 zadaných úloh jich bylo 59 získaných v konkursu.

Podmínky konkursu byly již mnohokrát zveřejněny. Pro zájemce je znovu připomínáme.

Text a řešení každé úlohy je třeba zaslat napsané na listu formátu A4 (vždy originál a jeden opis) na adresu: *Ústřední*

výbor matematické olympiády, Praha 1, Nové Město, Žitná 25. Za každou přijatou úlohu je vyplácena odměna ve výši 50 Kčs v kategoriích *A*, *B* a *C* a 30 Kčs v kategorii *Z*. Při recenzi se přihlíží k původnosti úlohy a odměna může být popřípadě zvýšena, např. přijaté úlohy, s nimiž se počítá, že budou na některé *MMO* předloženy jako čs. návrh, jsou odměňovány částkou 80 Kčs. Úlohy, které neprojdou úspěšně konkursním řízením, se autorům vracejí. Přijaté úlohy jsou zařazeny do archívu *ÚV MO*. Vyplácením odměny autorovi získává *ÚV MO* dispoziční právo, zejména upravit text úlohy i autorské řešení a použít úlohy pro účely *MO* podle vlastní volby. Autor samozřejmě bere na sebe závazek, že přijatou úlohu utají, aby průběh olympiády nebyl narušen.

Návrhy úloh pro *MO* lze do konkursu zasílat neustále, neboť není časově omezen a probíhá nepřetržitě.

Přehledná tabulka P

Počet soutěžících v 18., 19., 20. a 21. ročníku MO

Kategorie		A		B		C		Z		Školní rok
kolo	roč.	P	Ú	P	Ú	P	Ú	P	Ú	
I.	18.	362	273	506	370	963	636	6 759	4264	68–69
	19.	565	447	842	612	*)	*)	8 230	5550	69–70
	20.	399	352	843	656	*)	*)	10 366	7376	70–71
	21.	554	445	476	354	1115	926	11 090	7870	71–72
II.	18.	267	37	317	34	585	35	3 876	1455	68–69
	19.	381	88	556	129	*)	*)	4 863	1790	69–70
	20.	341	58	613	162	*)	*)	6 770	3807	70–71
	21.	429	170	342	122	844	180	7 275	3063	71–72
III.	18.	35	23							68–69
	19.	44	24			Nekonají se celostátně				69–70
	20.	42	20							70–71
	21.	74	33							71–72

Poznámky:

P — počet všech účastníků

Ú — počet úspěšných řešitelů

*) — kategorie C byla zrušena, žáci I. a II. ročníku škol II. cyklu soutěžili ve společné kategorii B.

Tabulka 1

Přehled počtu účastníků I. kola podle krajů v kategoriích A, B, C *)

Kraj	Kategorie A			Kategorie B			Kategorie C			Celkem		
	P	Z toho divek	Ú	P	Z toho divek	Ú	P	Z toho divek	Ú	P	Z toho divek	Ú
Praha - město	92	11	57	44	12	34	135	45	115	271	68	206
Středočeský	49	12	45	20	5	13	57	14	53	126	31	111
Jihočeský	40	6	37	29	6	28	64	19	57	133	31	122
Západočeský	21	4	20	29	10	20	40	11	32	90	25	72
Severočeský	49	13	31	46	20	30	98	38	88	193	71	149
Východočeský	63	13	63	41	13	41	89	22	85	193	48	189
Jihomoravský	103	31	86	70	14	59	155	61	128	328	106	273
Severomoravský	43	8	36	24	6	20	113	38	107	180	52	163
Západoslovenský	37	6	25	78	15	46	145	39	101	260	60	172
Středoslovenský	35	5	35	58	10	49	141	37	114	234	52	198
Východoslovenský	22	3	10	28	2	14	78	18	46	128	23	70
Celkem	554	112	445	467	113	354	1115	342	926	2136	567	1725

*) P = celkový počet účastníků; Ú = počet úspěšných řešitelů

Tabulka 2

Přehled účastníků I. kola podle krajů v kat. Z

K R A J	K a t e g o r i e Z			
	P	Z toho dívek	Ú	Z toho dívek
Praha - město	1 046	502	757	321
Středočeský	684	312	478	231
Jihočeský	476	247	362	177
Západočeský	469	275	303	162
Severočeský	826	297	417	169
Východočeský	767	383	580	279
Jihomoravský	1 255	569	785	359
Severomoravský	983	453	556	234
Západoslovenský	1 966	1011	1736	860
Středoslovenský	1 454	641	974	475
Východoslovenský	1 209	600	922	453
Celkem	11 090	4990	7870	3720

P — celkový počet účastníků; Ú — počet úspěšných řešitelů

Tabulka 3

Přehled účastníků II. kola podle krajů v kategoriích A, B, C*)

K R A J	Kategorie A			Kategorie B			Kategorie C			Celkem		
	P	Z toho dívek	Ú	P	Z toho dívek	Ú	P	Z toho dívek	Ú	P	Z toho dívek	Ú
Praha - město	57	7	36	33	8	23	108	37	36	198	52	95
Středočeský	43	11	11	11	2	3	48	13	9	102	26	23
Jihočeský	36	5	12	27	6	10	51	15	9	114	26	31
Západočeský	20	4	14	20	7	7	31	5	6	71	16	27
Severočeský	30	8	9	27	9	7	68	24	14	125	41	30
Východočeský	63	13	22	41	13	7	85	20	12	189	46	41
Jihomoravský	78	18	34	59	11	33	106	43	28	243	72	95
Severomoravský	35	7	13	19	4	8	100	33	23	154	44	44
Západoslovenský	24	4	9	46	5	13	100	23	24	170	32	46
Středoslovenský	33	4	5	47	9	7	101	23	9	181	36	21
Východoslovenský	10	1	5	12	1	4	46	8	10	68	10	19
Celkem	429	82	170	342	75	122	844	244	180	1615	401	472

*) P - celkový počet účastníků; Ú - počet úspěšných řešitelů

Tabulka 4**Přehled počtu účastníků II. kola podle krajů v kategorii Z**

K R A J	K a t e g o r i e Z			
	P	Z toho dívek	Ú	Z toho dívek
Praha - město	698	276	436	166
Středočeský	410	190	289	131
Jihočeský	352	174	92	39
Západočeský	280	150	99	49
Severočeský	305	122	133	51
Východočeský	522	253	369	175
Jihomoravský	707	317	213	76
Severomoravský	534	222	257	96
Západoslovenský	1713	851	485	209
Středoslovenský	892	429	358	141
Východoslovenský	862	416	332	146
Celkem	7275	3400	3063	1279

P — celkový počet účastníků; Ú — počet úspěšných řešitelů

Příloha A

POŘADÍ ÚSPĚŠNÝCH ŘEŠITELŮ II. KOLA VE XXI. ROČNÍKU MO

(pokud není uveden typ školy, jde o gymnasium; z každého kraje je uvedeno nejvýše prvních deset úspěšných řešitelů)

PRAHA - MĚSTO

Kategorie A

Jan Brychta, 4.a, Pražačka, Praha 3; Pavel Ferst, 2.d, Sladkovského, Praha 3; Petr Hájek, 3. c, Štěpánská, Praha 1; Tomáš Chrz a Petr Jarolím, 3.f, Petr Sláčálek, 2.f, ul. W. Piecka, Praha 2; Jiří Měska, 2.d, Sladkovského, Praha 3; Miron Tegze, 3.f, ul. W. Piecka, Praha 2; Alexandr Franěk, 3.f, Parléřova ul., Praha; Jan Frynta, 3.f, ul. W. Piecka, Praha 2.

Kategorie B

Petr Sláčálek, 2.f, ul. W. Piecka, Praha 2; Jan Trlifaj, 2.d, Sladkovského nám., Praha 3; Aleš Drápal a Petr Malý, 2.f, U libeňského zámku, Praha 8; Jiří Měska, 2.d, Sladkovského nám., Praha 3; Alena Vencovská, 2.b, Štěpánská ul., Praha 1; Josef Stehno, 2.f, ul. W. Piecka, Praha 2; Václav Salač, 2.a, Ohradní ul., Praha 4.

Kategorie C

Martin Bauman, Michal Valášek a Jaroslav Fiala, 1.d, ul. W. Piecka, Praha 2; Jan Hugo, 1.c, Sladkovského nám., Praha 3;

Martin Šedivý, Dagmar Hášová a Jan Přívora, 1.d, ul. W. Piecka, Praha 2; Vlastimil Horák, 1.a, Pražáčka, Praha 3; Vladimír Bureš, 1.a, Nad Štolou, Praha 7.

STŘEDOČESKÝ KRAJ

Kategorie A

Jaromír Kukal, 3. roč., Benešov; Jiří Frýda, 4. roč., Kladno; Zdeněk Kosek, 4. roč., Beroun; Tomáš Fiala, 3. roč., Příbram; Jindřich Kareš, 3. roč., Říčany; Dag Jeger, 4. roč. Beroun; Miroslav Joukl, 3. roč., Kutná Hora; Ladislav Horáček, 4. roč., Mladá Boleslav; Zdeněk Kříž, 3. roč., Sedlčany; František Mastný, 4. roč., Beroun.

Kategorie B

František Pudil, 2. roč., Sedlčany; Vladimír Meier, 2. roč., Mladá Boleslav; Jitka Šimečková, 2. roč., Sedlčany.

Kategorie C

Jiří Sloup, 1. roč., Brandýs nad Labem; Ivan Řehoř, 1. roč., Radotín; Karel Breiter, 1. roč., Mnichovo Hradiště; Dagmar Štuksová, 1. roč., Říčany; Miroslav Ludwig, 1. roč., Čáslav; Jiří Uhendorfský, 1. roč., SPŠ, Kutná Hora; Jiří Bohuslavský, 1. roč., Kutná Hora; František Čížek, 1. roč., SPŠ, Kutná Hora; Jiří Sommer, 1. roč., Nymburk.

JIHOČESKÝ KRAJ

Kategorie A

Karel Horák, 3. roč., Strakonice; Josef Voldřich, 1. roč., Vimperk; Václav Kubart, 4. roč., Tábor; Pavel Kindelmann, 2. roč., České Budějovice; Jaroslav Krieg, Milan Rabiška a Karel Zítek, 3. roč., Tábor; Jiří Mikula, 3. roč., Strakonice;

Rudolf Bayer, 3. roč., Tábor; Jiří Hanzálek, Petr Špatenka a Josef Urban, 4. roč., České Budějovice.

Kategorie B

Pavel Kindelmann, 2. roč., České Budějovice; Zdeněk Rázek, Josef Kočí a Danuše Bervidová, 2. roč., Tábor; Petr Jovanovič, 2. roč., České Budějovice; Josef Louženský, 2. roč., Prachatice; Pavel Novák, 2. roč., České Budějovice; Pavel Nový, 2. roč., Strakonice; Vladimír Říha, 2. roč., Tábor; Jan Teska, 2. roč., Milevsko.

Kategorie C

Jan Vaňata, 1. roč., Strakonice; Josef Voldřich, 1. roč., Vimperk; Vladimír Drápalík, 1. roč., Strakonice; Zelenda, 1. roč., České Budějovice; Jana Libá, 1. roč. SPŠ stavební, České Budějovice, Pavel Jovanovič, 1. roč., České Budějovice; Jiří Sýkora, 1. roč., Písek; Karel Honzl, 1. roč., Kamenice n. Lipou; Jaroslav Kvíčala, 1. roč., České Budějovice.

ZÁPADOČESKÝ KRAJ

Kategorie A

Vladimír Pelikán, 4.a, Blovice; Magda Fořtová, Blanka Hnilicová, Stanislav Hála, Svatopluk Machalka a Josef Juřek, 3.d, Julia Fučíka, Plzeň; Miroslav Křížek, 3.a, Julia Fučíka, Plzeň; Otta Popovský, 4.a, Cheb; Josef Žezule, 3.b, Klatovy; Václav Kohout, 2.a, Blovice.

Kategorie B

Ladislav Peksa, Emil Pelikán a Jiří Zymák, 2.a, Julia Fučíka, Plzeň; Karel Tesař a Jan Klaschka, 2.a, Mar. Lázně; Václav Veselý, 2.b, Klatovy; Hubert Nasko, 2.a, Julia Fučíka, Plzeň.

Kategorie C

Pavel Rádl a František Pillmann, 1.a, Julia Fučíka, Plzeň; Michal Svrček, 1.b, Karlovy Vary; Vladimír Charvát a Pavel Odvárko, 1.a, Julia Fučíka, Plzeň; Jaroslav Krčmář, 1.a, Sušice.

SEVEROČESKÝ KRAJ

Kategorie A

Jasna Lupomechová, 4. roč., Frýdlant v Č.; Karel Hájek, 4.d, ul. Jeronýmova 27, Liberec; Michal Eben, 3.a, Ústí n. Labem; Jan Holub a Jiří Svoboda, 3.c, Čs. dobrovolců, Teplice v Č.; Vítězslav Švejdar, 3.b, Komenského nám., Děčín; Richard Lukáš a František Balcar, 4.d, ul. Jeronýmova 27, Liberec; Ivo Mrázek, 1.b, SPŠ stroj., Ústí n. L.-Střekov.

Kategorie B

Ivo Mrázek, 1.b, SPŠ stroj., Ústí n. L.; Richard Zimák, 2.b, Teplice; Martin Pešek, 2.b, Teplice; Jan Jánský, 2.c, Liberec; Milan Kalný, 2.a, Litoměřice; Jiří Březina, 2.a, Chomutov; Libuše Šefrnová, 2.a, Teplice; Eva Nesměráková, Blanka Vágnerová a Vladimíra Vorlíčková, 2.c, Liberec.

Kategorie C

Jan Malý, 1.a, Litoměřice; Emil Vlasák, 1. roč., SPŠ stroj., Ústí n. L.; Martin Müller, 1.a, Litvínov; Tomáš Sehnoutka, 1.a, Jablonec n. N.; Vojtěch Švehla, 1.c, Liberec; Alena Němcová, 1.a, Teplice; Jiří Maryška, 1.a, Jablonec n. N.; Hana Slámová a Libor Žanda, 1.c, Liberec; Jan Haras., 1. roč. SPŠ stroj., Liberec.

VÝCHODOČESKÝ KRAJ

Kategorie A

Jan Mandel, 3.b, Náchod; František Fendrych, 4.g, Hradec Králové; Libor Slezák a Igor Koropečký, 4.a, Pardubice; Vladimír Bergl, 3.a, Pardubice; František Rozsypal, 4.a, Litomyšl; Jiří Limpouch, 3.g, Hradec Králové; Pavel Drábek, 4.a, Pardubice; Josef Prouza, 3.a, Pardubice.

Kategorie B

Zdeněk Drábek, 2. roč., Lanškroun; Jiří Svoboda, 2.a, Pardubice; Jiří Honců, 2.a, Jilemnice; Sylvie Bukovská, 2.a, Přelouč; Olga Smetanová, 2.a, Jaroměř; Josef Ježek, Dobroslav Kindl, 2.a, Pardubice.

Kategorie C

Jiří Hůlka, 1.g, Hradec Králové; Josef Pavel, 7.a, ZDŠ Komenského, Rychnov n. Kněžnou; Miroslav Seiner, 1.a, Pardubice; Ivan Šup, 1.a, Přelouč; Petr Holan, 1.a, Nový Bydžov; Luděk Němec, 1.a, Pardubice; Stanislav Nožička, 1.a, Nová Paka; Josef Šimon, 1.a, SPŠ, Dobruška; Jan Blažek, 1.a, Chrudim; Pavel Bříza, 1.a, Žamberk; Rastislav Jakubík, 1.a, Polička; František Starý, 1.c, SPŠ el., Pardubice.

JIHOMORAVSKÝ KRAJ A BRNO - MĚSTO

Kategorie A

Miroslav Kmošek, 3.a, tř. kpt. Jaroše, Brno; Luboš Bauer, 3.b, Koněvova, Brno; Miloš Sobotka, 4.a, Žďár nad Sázavou; Jiří Binder, 4.b, Moravské Budějovice; Jaroslav Kuben a Josef Sorbi, 4.b, Prostějov; Karel Sázel, 4.a, Kroměříž; Jiří Malec, 3.a, Křenová, Brno; Jiří Mužík, 4.b, Třebíč; Pavel Brada, 3.a, Jihlava; Jiří Řezáč, 3.a, Lerchova, Brno.

Kategorie B

Zdeněk Burda, 2. roč., Křenová, Brno; Jaromír Novák, 2. roč., Koněvova, Brno; Irena Vavrysová, 2. roč., Hustopeče; Aleš Chramosta a Vladimír Drášil, 2. roč., tř. kpt. Jaroše, Brno; Michal Konečný, Milan Fikar, Stanislav Česka a Petr Dub, 2. roč., Křenová, Brno; Vladimír Žákovský, 2. roč., Koněvova, Brno.

Kategorie C

Josef Gebrich, 1. roč., tř. kpt. Jaroše, Brno; Darja Podroušková, 1. roč., Křenová, Brno; Hana Sládková, 1. roč., Třebíč; Zdenka Prokešová, 1. roč., Koněvova, Brno; Zdeněk Práček, 1. roč., Kroměříž; Jaroslav Nahodil a Libor Obrdlík, 1. roč., Třebíč; Ivana Fukačová, Marta Košťálová a Zdeněk Lustig, 1. roč., Znojmo.

SEVEROMORAVSKÝ KRAJ

Kategorie A

Jaromír Šimša, 2. roč. a Milan Menšík, 4. roč., Šmeralova ul., Ostrava 1; Václav Haniš, 3. roč., Rožnov p. R.; Jaroslav Švrček, 4. roč., Přerov; Pavla Růžicková, 4. roč., Frýdek-Místek; Jan Knytl, 4. roč., Nový Jičín; Bohumil Maceček, 4. roč., Rýmařov; Jan Podloucký, 3. roč., Přerov; Tadeus Feruga, 3. roč., Havlíčkova ul., Český Těšín; Igor Mačejovský, 4. roč., Šmeralova ul., Ostrava 1.

Kategorie B

Antonín Otáhal, 2. roč., Volgogradská ul., Ostrava-Zábřeh; Ivo Semrád, 2. roč., Opava; Radomír Kuchta, 2. roč., Tajovského ul., Havířov; Miroslav Dosoudil, 2. roč., Jiřího z Poděbrad, Olomouc; Jiří Konečný a Zdeněk Vaculík, 2. roč., Rožnov p. Radhoštěm.

Kategorie C

Lubomír Baland, Andrzej Kozikowski, 1. roč., Český Těšín; Karel Lický, 1. roč., Opava; Miloslav Prchal, 1. roč., Ostrava 1; Anna Tomová, 1. roč., Ostrava-Zábřeh; Lumír Gatnar, 1. roč., Opava; Jan Hula, 1. roč., Bílovec; Čestmír Ramík a Kateřina Lvová, 1. roč., Ostrava 1; Lubomír Zaorelek, 1. roč., Ostrava-Poruba.

ZÁPADOSLOVENSKÝ KRAJ A BRATISLAVA - MESTO

Kategória A

Marián Uherko, Jan Valášek, Peter Dobrota, Milan Kolibiar, Ľubor Kollár, Milan Lehotský a Jan Hanuš, 4. roč., J. Hronca, Bratislava; Tibor Kántor, 4. roč. maď., Komárno; Peter Hroššo, 2. roč., Topoľčany.

Kategória B

Pavol Meravý, Pavol Zlatoš a Ján Krajčík, 2. roč., J. Hronca, Bratislava; Peter Hroššo, 2. roč. Topoľčany; Teodor Kusý, 2. roč., Vazovova, 38, Bratislava; Ján Nížňanský, 2. roč., Trenčín; Ján Krč, Ľubor Kollár a Miroslav Brunclík, 2. roč., J. Hronca, Bratislava; Ján Kaňuk, 2. roč., Malacky.

Kategória C

Peter Štarke, 1. roč., Trenčín; Milan Potočár, 1. roč., Senec; Dušan Miklávek, Ivan Janetka, Ján Kučera, Ján Slodička a Martin Vojtko, 1. roč., J. Hronca, Bratislava; Peter Holub, 1. roč., Senec; Vladimír Chlebana, 1. roč., Trenčín; Katarína Kresáková, 1. roč., Metodova ul., Bratislava; Olga Malíková a Jozef Tóth, 1. roč., Vazovova 38, Bratislava.

STREDOSLOVENSKÝ KRAJ

Kategória A

Imrich Vrto, 4. roč., Rimavská Sobota; Jozef Tvarožek, 3. roč., SVŠ Horný Val, Žilina; Ján Haluška, 4. roč., Liptovský Mikuláš; Ivan Kulich, 3. roč., SVŠ Timravy, Lučenec; Marián Sedláček, 4. roč., Prievidza.

Kategória B

Valter Petrů, 2.b, Horný Val, Žilina; Jozef Širáň, 2.a, Kremnica; Ivan Mečiar, 2.e, Prievidza; Vlastimil Vrto, 2.a, Rimavská

Sobota; Marián Mikláš, 2.f, Prievidza; Miroslav Kaniansky, 2.b, Handlová; Juraj Lanko, 2.e, Prievidza.

Kategória C

Peter Husár, 1. roč., Horný Val, Žilina; Pavol Makovický, 9. roč., ZDŠ Konevova, Žilina; Ján Chovanec a Martin Jarina, 1. roč., Povážska Bystrica; Peter Maličský, 1. roč., Prievidza; Jana Skrivánková a Elena Šutá, 1. roč., Kysucké Nové Mesto; Ján Krchnavý, 1. roč., SVŠ Hliny, Žilina; Eva Bajnoková, 1. roč., Krupina.

VÝCHODOSLOVENSKÝ KRAJ

Kategória A

Karol Pelikán, 3.a, Šrobárova ul., Košice; Danica Jakubíková, 3.g, a Vladimír Lisý, 3.f, SVŠ, Šrobárova ul., Košice; Peter Višnyi, 3.a, Šrobárova ul., Košice; Ján Šomvárský, 2.e, SVŠ, Šmeralova ul., Košice.

Kategória B

Tibor Lefkovič, 2.h, SVŠ, Šrobárova 46, Košice; Ján Šomvárský a Ján Krivoš, 2.e, SVŠ, Šmeralova 9, Košice; Jan Surek, 2.a, Humenné.

Kategória C

Imrich Harbula, 1.b, Sečovce; Igor Valiga, 1.c, Kežmarok; Jozef Dunajský, 1.c, Poprad; Judita Fiedlerová, 1.a, maď., Košice; Dušan Kazar a Richard Veselý, 1.a, Šrobárova, Košice; Štefan Dopirák, 1.s, SPŠ-maď., Košice; Jaroslav Jaroš, 1.c, Poprad; Ján Pavlík, 1.b, Šrobárova ul., Košice.

III. KOLO KATEGORIE A – XXI. ROČNÍK MO

Vítězové

1. *Miroslav Kmošek*, 3.a, gymn., tř. kpt. Jaroše, Brno
2. *Karel Horák*, 3.b, gymn., Strakonice
3. *Imrich Vrto*, 3.a, gymn., Rimavská Sobota
4. *Jan Frynta*, 3.f, gymn., ul. W. Piecka, Praha 2
- 5.—8. *Jiří Binder*, 4.a, gymn., Moravské Budějovice
- 5.—8. *Jan Brychta*, 4.a, gymn., Pražáčka, Praha 3
- 5.—8. *Jan Knytl*, 4. roč., gymn., Palackého, Nový Jičín
- 5.—8. *Petr Sláčálek*, 2.f, gymn., ul. W. Piecka, Praha 2
- 9.—10. *František Drašnar*, 3.f, gymn., ul. W. Piecka, Praha 2
- 9.—10. *Pavel Ferst*, 2.d, gymn., Sladkovského, Praha 3
- 11.—12. *Jaroslav Švrček*, 4. roč., gymn., Komenského, Přerov
- 11.—12. *Dalibor Volný*, 3.f, gymn., ul. W. Piecka, Praha 2
- 13.—14. *Milan Menšík*, 4. roč., gymn., Šmeralova ul., Ostrava
- 13.—14. *Miron Tegze*, 3.f, gymn., ul. W. Piecka, Praha 2
- 15.—16. *Jaromír Šimša*, 2. roč., gymn., Šmeralova ul., Ostrava
- 15.—16. *Milan Kolibiar*, 3. roč., gymn., Novohradská, Bratislava
17. *Milan Lehotský*, 3. roč., gymn., Novohradská ul., Bratislava
- 18.—19. *Petr Hejl*, 3.c, gymn., Štěpánská ul., Praha 1
- 18.—19. *Ľozef Tvorožek*, 3.f, SVŠ, Horný Val, Žilina

Úspěšní řešitelé

- 20.—21. *Peter Hroško*, 2.d, SVŠ, Topoľčany
- 20.—21. *Pavel Kindelmann*, 2.a, gymn., S. Šátala, České Budějovice

- 22.—24. *Jaromír Kuben*, 4.b, gymn., Žďár nad Sázavou
22.—24. *Vladimír Pelikán*, 4.a, gymn., Blovice u Plzně
22.—24. *Miloš Sobotka*, 4.a, gymn., Žďár nad Sázavou
25. *Jan Trlifaj*, 2.d, gymn., Sladkovského, Praha 3
26.—27. *Vladimír Bergl*, 3.a, gymn., Kotkova ul., Pardubice
26.—27. *Václav Janiš*, 3. roč., gymn., Rožnov p. Radhoštěm
28. *Jiří Frýda*, 4.a, gymn., Kladno
29.—31. *Magda Fořtová*, 3.d, gymn., J. Fučíka, Plzeň
29.—31. *Karol Pelikán*, 3.a, gymn., Šrobárova ul., Košice
29.—31. *Jan Valášek*, 3.b, SVŠ, Novohradská ul., Bratislava
32. *Jiří Měska*, 2.d, gymn., Sladkovského, Praha 3
33. *Ivo Mrázek*, 1.b, SPŠ stroj., Ústí n. L. - Střekov

II. Přípravné úlohy I. kola

1. KATEGÓRIA A

A-P-1

1. Pre všetky kladné čísla a, b a všetky prirodzené čísla n platí

$$n \cdot a \cdot b^{n-1} \leq a^n + (n-1)b^n.$$

Dokážte.

RIEŠENIE. Je známe, že geometrický priemer kladných čísel nie je väčší ako ich priemer aritmetický. Špeciálne pre čísla

$$\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}, \underbrace{\frac{b}{a}, \frac{b}{a}, \dots, \frac{b}{a}}_{(n-1)\text{-krát}}$$

to znamená, že platí

$$\sqrt[n]{\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} \cdot \frac{b}{a} \cdot \dots \cdot \frac{b}{a}} \leq \frac{1}{n} \left[\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + \frac{b}{a} + \dots + \frac{b}{a} \right]$$

čiže

$$1 \leq \frac{a^{n-1}}{nb^{n-1}} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{b}{a},$$

z čoho už máme

$$n \cdot a \cdot b^{n-1} \leq a^n + (n-1)b^n.$$

2. Buďte α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC , označme $V = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$. Trojúhelník ABC je ostroúhlý (pravoúhlý, tupoúhlý), právě když $V < 1$ ($V = 1$, $V > 1$).

Dokažte.

ŘEŠENÍ. Podle kosinové věty v trojúhelníku platí

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma. \quad (1)$$

Podle sinové věty je $a = k \sin\alpha$, $b = k \sin\beta$, $c = k \sin\gamma$ (k je konst.). (2)

Dosažením (2) a (1) dostaneme po zjednodušení

$$\sin^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha \sin\beta \cos\gamma,$$

tj.

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\sin\alpha \sin\beta \cos\gamma$$

a cyklickou záměnou

$$\sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\alpha = 2\sin\beta \sin\gamma \cos\alpha, \quad (3)$$

$$\sin^2\gamma + \sin^2\alpha - \sin^2\beta = 2\sin\alpha \sin\gamma \cos\beta.$$

Sečtením těchto rovností dostaneme

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2[\sin\alpha \sin\beta \cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma \cos\alpha + \sin\alpha \sin\gamma \cos\beta].$$

Poněvadž

$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma - (\sin\alpha \sin\beta \cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma \cos\alpha + \sin\alpha \sin\gamma \cos\beta),$$

můžeme předcházející rovnost vzhledem k tomu, že

$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) = -1$$

psát

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2(1 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma).$$

Nahradíme-li siny kosiny, dostaneme

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = V. \quad (4)$$

Odtud plyne:

Je-li trojúhelník ostroúhlý, je $\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma > 0$ a $V < 1$,

je-li trojúhelník pravoúhlý, je $\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma = 0$ a $V = 1$,

je-li trojúhelník tupoúhlý, je $\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma < 0$ a $V > 1$.

Obráceně:

Je-li $V > 1$, musí být $-2\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma > 0$, což nastane,

je-li jeden z úhlů α, β, γ tupý; je-li $V = 1$, pak musí být právě

jeden z úhlů α, β, γ pravý (vzhledem, že $\alpha + \beta + \gamma = \pi$)

a trojúhelník je pravoúhlý; je-li $0 < V < 1$,

je $\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma > 0$ a všechny úhly jsou ostré.

JINÉ ŘEŠENÍ (bez užití věty sinové a kosinové)

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 + \cos 2\beta}{2} + \\ &+ \frac{1 + \cos 2\gamma}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma) = \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1 - 4\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) = \\ &= 1 - 2\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma, \end{aligned}$$

neboť

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma &= 2\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + \\ &+ \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma = -2\cos \gamma[\cos(\alpha - \beta) - \cos \gamma] - 1 = \\ &= -2\cos \gamma[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] - 1 = \\ &= -1 - 4\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \end{aligned}$$

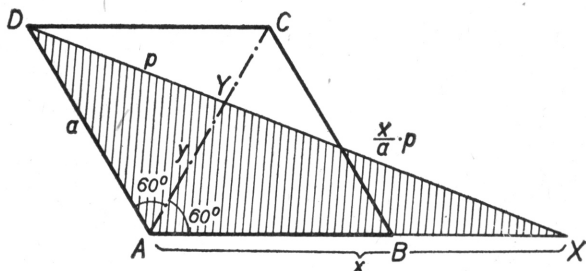
takže

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

a dále jako v prvním řešení.

3. Je dán kosočtverec $ABCD$ o straně délky a s úhlem $\angle ABC = 60^\circ$. Označme X libovolný bod polopřímky AB a Y průsečík přímky AC s přímkou DX . Vyjádřete délku y úsečky AY pomocí délky x úsečky AX . Řešte aspoň dvěma různými způsoby.

ŘEŠENÍ TRIGONOMETRICKÉ (obr. 1).



Obr. 1

Polopřímka $\vec{AC}$ je osou úhlu $\angle DAX$; podle známé věty je

$$XY = \frac{x}{a} \cdot DY = \frac{px}{a}.$$

Dále použijeme kosinové věty na $\triangle ADY$ a $\triangle AXY$; vyjde

$$p^2 = a^2 + y^2 - ay, \quad (1)$$

$$\frac{x^2}{a^2} p^2 = x^2 + y^2 - xy.$$

První rovnici (1) znásobíme číslem $\frac{x^2}{a^2}$ a porovnáme s druhou

rovnici; dostaneme

$$x^2 + \frac{x^2 y^2}{a^2} - \frac{x^2 y}{a} = x^2 + y^2 - xy. \quad (2)$$

Rovnici (2) znásobíme číslem $\frac{a^2}{y}$:

$$x^2 y - ax^2 = a^2 y - a^2 x.$$

A odtud za předpokladu $y \neq 0$, $x \neq a$ vyjde

$$y = \frac{ax}{a+x}. \quad (3)$$

Dodatečně ověříme, že vzorec (3) platí i pro $x = 0$, a .

ŘEŠENÍ METODOU SOUŘADNIC

Zvolíme polopřímku $\overrightarrow{AB}$ za kladnou poloosu x soustavy ortonormálních souřadnic; pak je $A = [0; 0]$, $X = [x; 0]$,

$D = \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \sqrt{3} \right]$, $Y = [t; t \sqrt{3}]$, $y = 2t$. Číslo t vypočteme z podmínky, že body D , X , Y leží v přímce. Vyjde

$$t = \frac{ax}{2(a+x)}$$

a odtud pro y opět vzorec (3).

Úloha A-P-3 je celkem nezajímavá; její řešení nevyžaduje žádný zvláštní vtíp.

A-P-4

4. V prostoru jsou dány body $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n = A_0$. Zvolme bod B_0 , k němuž sestrojme další body $B_1, B_2, \dots, B_n$

tak, aby pro každé $k = 1, 2, \dots, n$ střed dvojice $B_{k-1} B_k$ splynul se středem dvojice $A_{k-1} A_k$.

Určete nutné a postačující podmínky pro to, aby $B_n = B_0$.

ŘEŠENÍ. Nejlépe snad analyticky. Označme a_k , resp. b_k radiusvektor bodu A_k , resp. B_k pro $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Podle konstrukce bodů B_k je vždy

$$b_{k-1} + b_k = a_{k-1} + a_k.$$

Tyto rovnosti napíšeme pro $k = 1, 2, \dots, n$, opatříme střídavými znaménky a sečteme. Dostaneme

$$\left. \begin{array}{l} b_0 + b_1 = a_0 + a_1 \\ -b_1 - b_2 = -a_1 - a_2 \\ \dots\dots\dots \\ b_{n-1} + b_n = a_{n-1} + a_n \end{array} \right\} \begin{array}{l} n \\ \text{liché} \end{array}$$

$$b_0 + b_n = a_0 + a_n = 2a_0$$

$$\left. \begin{array}{l} b_0 + b_1 = a_0 + a_1 \\ -b_1 - b_2 = -a_1 - a_2 \\ \dots\dots\dots \\ -b_{n-1} - b_n = -a_{n-1} - a_n \end{array} \right\} \begin{array}{l} n \\ \text{sudé} \end{array}$$

$$b_0 - b_n = a_0 - a_n = 0$$

Při n lichém je $b_0 = b_n$ právě tehdy, jestliže $b_0 = a_0$, tj.

$$(B_n = B_0) \iff (B_0 = A_0).$$

Při n sudém je *vždy* $b_n = b_0$, tj. $B_n = B_0$.

POZNÁMKA. Slovem prostor rozumíme eukleidovský prostor dimenze $n \geq 1$.

2. KATEGÓRIA B

B-P-1

1. Je daná kubická rovnica

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0. \quad (1)$$

Určte vzťah medzi koeficientami a_0, a_1, a_2 , ktorý je nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby dva korene rovnice (1) boli dve reálne opačné čísla, obidve rôzne od nuly.

RIEŠENIE. Predpokladajme, že dva korene danej rovnice sú $\alpha, -\alpha, \alpha \neq 0$. Potom platí

$$\begin{aligned} \alpha^3 + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 &= 0, \\ -\alpha^3 + a_2\alpha^2 - a_1\alpha + a_0 &= 0. \end{aligned}$$

Po sčítaní a odčítaní týchto rovníc dostaneme

$$2a_2\alpha^2 + 2a_0 = 0, \quad 2\alpha^3 + 2a_1\alpha = 0,$$

z čoho po krátení oboch rovníc máme

$$a_2\alpha^2 + a_0 = 0, \quad \alpha^2 + a_1 = 0. \quad (2)$$

Vylúčením α^2 z (2) dostaneme

$$a_2(-a_1) + a_0 = 0 \quad \text{čiže} \quad a_0 = a_1a_2.$$

Nech je $a_0 = a_1a_2$. Potom rovnica (1) bude mať tvar

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_1a_2 = 0,$$

z ktorého postupne dostaneme

$$\begin{aligned} x^2(x + a_2) + a_1(x + a_2) &= 0, \\ (x + a_2)(x^2 + a_1) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Z rozkladu (3) je zrejmé, že nutnou a postačujúcou podmienkou

pre to, aby rovnica (1) mala dva nenulové navzájom opačné reálne korene je, aby platilo

$$a_0 = a_1 a_2 \quad \text{a} \quad a_1 < 0.$$

B-P-2

2. Ak je prirodzené číslo $m = 2^n - 7$ prvočíslo, kde n je prirodzené číslo, potom je $n > 3$ a n dáva pri delení štyrmi zvyšok 3. Obrátene, ak vyhovuje prirodzené číslo n uvedeným podmienkam, nemusí byť $m = 2^n - 7$ prvočíslo. Dokážte obidve vety.

RIEŠENIE. Pre prirodzené čísla $n = 1, 2, 3$ nájdeme z rovnice $m = 2^n - 7$ príslušné funkčné hodnoty $m = -5, -3, 1$, z ktorých žiadna nie je kladné prvočíslo. K tomu, aby prirodzené číslo m bolo kladným prvočísлом je teda nutné, aby platilo $n > 3$ čiže $n \geq 4$. To však znamená, že $m \geq 9$.

Každé prirodzené číslo n , ktoré je väčšie než 3, možno zapísať práve v jednom z tvarov $4k, 4k + 1, 4k + 2, 4k + 3$, kde k je číslo prirodzené. K tomu, aby sme dokázali vetu uvedenú v úlohe, stačí dokázať, že v prípadoch, keď $n = 4k, n = 4k + 1$ a $n = 4k + 2$, je m číslo zložené. To však ľahko dokážeme buď priamym použitím vzorca pre rozklad dvojčlena $a^n - b^n$ alebo použitím vety, ktorú pomocou tohto vzorca ľahko odvodíme:

(V) Pre každé zložené číslo $n = rs$, kde $r > 1$ a $s > 1$ sú prirodzené čísla, je $a^n - 1$, kde a je prirodzené číslo, deliteľné jednak číslom $a^r - 1$ a jednak číslom $a^s - 1$. Ak je $a > 1$, je tiež $a^r - 1 > 1, a^s - 1 > 1$.

a) Ak je $n = 4k$, potom $m = 2^{4k} - 7 = 2^{2 \cdot 2k} - 1 - 6$. Pretože číslo $2^{2 \cdot 2k} - 1$ je podľa vety (V) deliteľné číslom $2^2 - 1 = 3$ a aj číslo 6 je deliteľné číslom 3, je číslom 3 deliteľný aj ich rozdiel, t. j. číslo m . Ak však $m > 3$ je deliteľné číslom 3, nemôže byť prvočísлом.

b) Ak je $n = 4k + 1$, potom $m = 2^{4k+1} - 7 = 2(2^{4k} - 1) - 5$. Pretože podľa vety (V) je číslo $2^{4k} - 1$ deliteľné číslom $2^4 - 1 = 15 = 3 \cdot 5$, je číslo $2^{4k} - 1$ vždy deliteľné číslom 5. Potom je však číslom 5 deliteľný nielen jeho dvojnásobok, ale aj jeho dvojnásobok zmenšený o 5 čiže číslo m . Vzhľadom na to, že $m > 5$ a je deliteľné číslom 5, nie je prvočíslom.

c) Ak je $n = 4k + 2$, potom $m = 2^{4k+2} - 7 = 2^2(2^{4k+1}) - 1 - 6$. Pretože číslo $2^{2(2k+1)} - 1$ je deliteľné číslom $2^2 - 1 = 3$, rovnakou úvahou ako v a) dostaneme, že m je deliteľné číslom 3 a vzhľadom na to, že je väčšie než 3, nemôže byť prvočíslom.

K tomu, aby prirodzené číslo $m = 2^n - 7$ bolo prvočíslom, nestačí, aby pre n boli splnené podmienky $n > 3$ a $n = 4k + 3$, kde k je prirodzené číslo. K dôkazu tohto tvrdenia nám stačí nájsť príklad čísla m uvedených vlastností, ktoré bude zložené. Ak zvolíme $n = 7$, dostaneme $m = 2^7 - 7 = 121 = 11^2$. Podobne pre $n = 11$ dostaneme $m = 2^{11} - 7 = 2041 = 13 \cdot 157$, čo je taktiež číslo zložené.

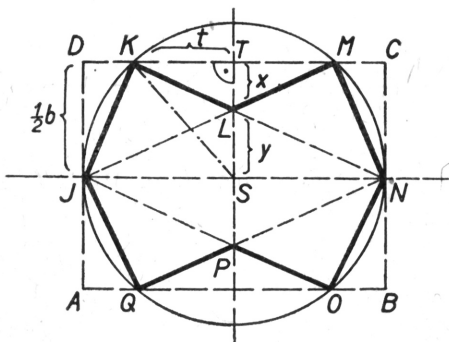
POZNÁMKA. Vzorce pre rozklad dvojčlena $a^n - b^n$, resp. $a^n + b^n$ sú žiakom škôl druhého cyklu iste známe. Sú uvedené tiež v zv. 14 Školy mladých matematikov (*Fr. Veselý: O dělitelnosti čísel celých*) na str. 16 a veta (V) na str. 93. Ďalšie vety o deliteľnosti prirodzených čísel sú obsiahnuté v učive aritmetiky pre 7. triedu ZDŠ.

B-P-3

3. Do daného obdĺžníka $ABCD$, kde $AB > BC$, je vepsán osmiuholník $JKLMNOPQ$, jak je naznačeno na obrázku 2; osmiuholník vznikl ze dvou obdĺžníků $JKNO$, $JMNQ$ o spoločné úhlopříčce JN , pričom bod J je středem úsečky AD a N středem úsečky BC .

Vypočítejte obsah osmiuholníka pomocí rozměrů $a = AB$, $b = BC$ daného obdĺžníka.

ŘEŠENÍ. Konstrukce osmiúhelníka je patrná z obr. 2. Při označení z obr. 2 položíme $LT = x$, $LS = y$, $KT = t$. Obsah p obdélníka $JKNO$ je $p = JN \cdot JN$ neboli



Obr. 2

$$p = \frac{1}{2} ab.$$

Obsah r kosočtverce $\mathcal{JLNP}$ je

$$r = ay,$$

takže obsah s osmiúhelníka je $s = 2p - r$ neboli

$$s = a(b - y). \quad (1)$$

Vypočítáme y . V trojúhelníku SKT je $\sphericalangle T = 90^\circ$, $SK = \frac{1}{2}a$;
podle Pythagorovy věty dostaneme

$$t^2 = SK^2 - ST^2$$

neboli

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}. \quad (2)$$

Ze stejnolehlosti o středu L trojúhelníků LNS , LKT plyne

$$\frac{TL}{TK} = \frac{SL}{SN}$$

neboli

$$\frac{x}{t} = \frac{y}{\frac{1}{2}a}.$$

Po dosazení ze (2) a snadné úpravě obdržíme

$$x = \frac{2yt}{a} = \frac{y\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

neboli

$$x = \frac{y\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \quad (3)$$

Vedle toho platí $TL + LS = \frac{1}{2}b$ neboli

$$x + y = \frac{b}{2};$$

dosadíme-li sem ze vztahu (3), dostáváme postupně

$$y \left(1 + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right) = \frac{b}{2},$$

$$y \cdot \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{b}{2},$$

$$y = \frac{ab}{2(a + \sqrt{a^2 - b^2})}.$$

Po dosazení do (1) dostaneme

$$s = a \left(b - \frac{ab}{2(a + \sqrt{a^2 - b^2})} \right)$$

neboli

$$s = \frac{ab(a + 2\sqrt{a^2 - b^2})}{2(a + \sqrt{a^2 - b^2})},$$

což lze popřípadě násobením $a - \sqrt{a^2 - b^2}$ v čitateli i jmenovateli upravit na tvar

$$s = \frac{a(2b^2 - a^2 + a\sqrt{a^2 - b^2})}{2b}.$$

Tím je řešení provedeno.

B-P-4

4. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky 1. Na polopřímce opačné k BA je zvolen bod M , pro který platí $0 < BM < \frac{1}{2}$.

a) Na straně BC určete body E, F ($BE < BF$) tak, aby přímky ME, MF rozdělily čtverec $ABCD$ na tři obrazce: trojúhelník, čtyřúhelník a pětiúhelník téhož obsahu. Vyjádřete délky BE, CF jako funkce délky BM .

b) Zjistěte, zda podmínka $BM < \frac{1}{2}$ není zbytečná a zda při jejím splnění je úloha řešitelná.

ŘEŠENÍ. a) Má-li jedna z částí (a to prostřední) být pětiúhelník, musí protnout přímka ME ještě stranu AD v bodě $G \neq D$ a přímka MF ještě stranu CD v bodě $H \neq D$. Části jsou pak lichoběžník $BEGA$, pětiúhelník $EFHDG$ a trojúhelník FCH (obr. 3). Označme podle obr. 3: $BM = x, BE = t, CF = y, AG = u, CH = z$. Podle podmínky úlohy o obsahích je pak

$$\frac{1}{2} (t + u) = \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{2} yz = \frac{1}{3}. \quad (1)$$

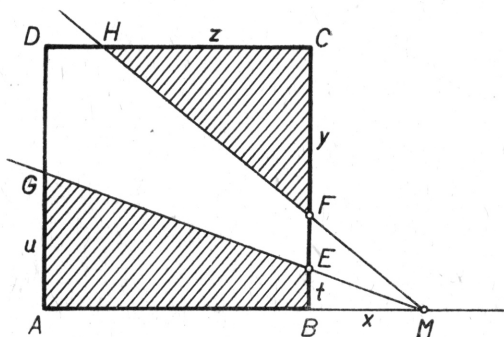
Mimoto plyne z podobnosti $\triangle MBE \sim \triangle MAG$ a $\triangle CHF \sim \triangle BMF$

$$\frac{t}{x} = \frac{u}{1+x}, \quad (2)$$

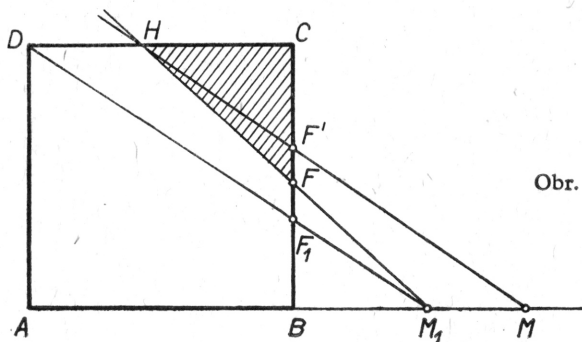
$$\frac{y}{z} = \frac{1-y}{x}.$$

Z první rovnice (1) a z první rovnice (2) dostaneme po vyloučení u

$$t = \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{1+2x}. \quad (3)$$



Obr. 3



Obr. 4

Z druhé rovnice (1) a druhé rovnice (2) dostaneme po vyloučení z kvadratickou rovnici pro y

$$3xy^2 + 2y - 2 = 0, \quad (4)$$

která má jediný kladný kořen (při daném x)

$$y = \frac{1}{3x} (\sqrt{1 + 6x} - 1). \quad (5)$$

b) Podmínka $x < \frac{1}{2}$ není zbytečná. Je-li totiž $x = \frac{1}{2}$, pak přímka M_1D oddělí trojúhelník F_1DC , jehož obsah je (viz obr.4) roven $\frac{1}{3}$, neboť $CD = 1$, $CF_1 = \frac{2}{3}$, $BF_1 = \frac{1}{3}$, $BM_1 = \frac{1}{2}$.

V tomto případě však nevznikne pětiúhelník $EFHDG$. Přímka M_1F , kde $BF > BF_1$, oddělí trojúhelník FCH o obsahu menším než $\frac{1}{3}$. Tím spíše to platí o trojúhelníku $F'CH$, který oddělí přímka MF' , kde $BM > \frac{1}{2}$.

c) Je-li $x < \frac{1}{2}$, plyne z (3) $t < \frac{1}{3}$, neboť $2x < 1 + 2x$, $\frac{2x}{1 + 2x} < 1$, $\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{1 + 2x} < \frac{1}{3}$. Z první rovnice (1) pak máme $u = \frac{2}{3} - t$, takže platí $u < 1$. Dále dokážeme, že pro y vypočtené podle vzorce (5) platí

$$y > \frac{2}{3}. \quad (6)$$

Kdyby totiž bylo $y \leq \frac{2}{3}$, platilo by

$3xy^2 + 2y - 2 \leq 3x \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{3} - 2 = \frac{2}{3} (2x - 1) < 0$, což by bylo ve sporu se (4). Z (6) však plyne podle druhé rovnice (1)

$$z = \frac{2}{3y} < 1.$$

Bod H tedy skutečně leží mezi C , D .

3. KATEGORIE C

C-P-1

1. Z letiště odlétá letadlo na lince I každý třetí den, na lince II každý pátý den a na lince III každou neděli a středu. Dne 4. ledna startovala letadla na všech třech linkách. Kolikrát ještě do konce roku budou letadla na všech třech linkách odlétat v týž den?

KOMENTÁŘ A ŘEŠENÍ. Jde o tzv. „slovní úlohu“ — prvním úkolem je sestavit matematickou formulaci úlohy. Vzhledem k textu bude asi třeba rozlišit dva případy:

- (a) 4. ledna je neděle;
- (b) 4. ledna je středa.

Každý z případů budeme řešit jako samostatnou úlohu.

(a) Zavedeme jakousi „soustavu souřadnic“. Pokládáme čtvrtého ledna za nultý den a označíme přirozeným číslem x den, kdy nastane společný start letadel všech tří linek.

- buď je číslo x násobkem čísel 3, 5, 7, tedy i čísla 105 (odlety v neděli);

- ● nebo je číslo x násobkem čísel 3, 5, tedy i čísla 15, a zároveň je číslo $x-3$ násobkem sedmi (odlety ve středu).

Mimoto je $x \leq 361$ ($= 365 - 4$) pro rok obyčejný, resp. $x \leq 362$ ($= 366 - 4$) pro rok přestupný.

Matematická formulace úlohy (a) zní:

Máme určit všechna přirozená čísla $x \leq 361$ (resp. 362), která splňují jednu z podmínek: x je násobkem 105 nebo x je násobkem 15 a zároveň $x - 3$ je násobkem 7.

Důrazně upozorňujeme, že je vždy třeba sestavit nejdříve matematickou formulaci slovní úlohy, než tuto úlohu začneme řešit. Tato formulace se může skládat z několika rovnic a nerovnic, ale může znít také tak, jak jsme výše uvedli.

ŘEŠENÍ matematické úlohy: Hledané násobky čísla 105 jsou tři: 105, 210, 315. Je-li x násobek 15 a $x-3$ násobkem 7, je $x = 15a$, $x - 3 = 7b$, kde a, b jsou nezáporná celá čísla. Čísla a, b vyhovují rovnici:

$$15a = 7b + 3. \quad (1)$$

I když jste se naučili řešit takovéto rovnice, můžete se zde snadno seznámit s principem jejich řešení (dáváme tomu přednost před experimentálním řešením, které bychom doporučovali pro kategorii Z). Z (1) plyne

$$14a - 7b = 3 - a.$$

Číslo $3 - a$ musí tedy být násobkem sedmi, tj. $a = 3, 10, 17, 24, 31, \dots$. Protože $x = 15a$, dostaneme $x = 45, 150, 255, 360, 465, \dots$. Naši úloze vyhovují jen první čtyři čísla. Úloha (a) má tudíž sedm řešení x

$$105, 210, 315, 45, 150, 255, 360. \quad (2)$$

Obdobně formulujeme a řešíme úlohu (b). Dostaneme opět řešení $x = 105, 210, 315$ a soustavu rovnic

$$x = 15a, \quad x - 4 = 7b,$$

odtud

$$15a = 7b + 4$$

čili

$$7(2a - b) = 4 - a$$

a dále $a = 4, 11, 18, \dots$, $x = 60, 165, 270$. Úloha (b) má tedy

jen šest řešení:

105, 210, 315, 60, 165, 270 . (3)

POZNÁMKY. 1. Je třeba překontrolovat, že nalezená možná řešení (2), (3) skutečně splňují podmínky úlohy. (2) a (3) jsme získali rozбором, ke kterému musíme připojit zkoušku.

2. Ukázalo se, že počet řešení nezáležel na tom, zda rok byl přestupný či obyčejný. Řešení (2) však ukazují, že kdybychom o málo posunuli výchozí den (6. ledna místo 4. ledna) byla by přestupnost roku rozhodující.

Můžete si snadno sestavit varianty úlohy C-P-1. Místo letadel můžete uvést vlaky (mezinárodní spoje), místo čísel 3, 5 u linek I, II zvolit čísla 2, 3, místo neděle a středy zvolit třeba úterý a čtvrtek. Velmi doporučujeme:

- znázornit situaci na číselné ose pomocí milimetrového měřítka,
- ● zopakovat některé vlastnosti dělitelnosti, které se potřebují při řešení rovnice (1).

C-P-2

2. Jsou-li p, q prvočísla větší než 3, pak $p^2 - q^2$ je dělitelné číslem 24. Dokažte.

KOMENTÁŘ A ŘEŠENÍ. Tematika této úlohy je z aritmetiky přirozených čísel. K tomu podotýkáme: je naprosto nezbytné cvičit se v tzv. algebraických úpravách; bez rutiny v tomto matematickém „řemesle“ ani nejtipnější a nejnápadi-
tější řešitel nedořeší řadu úloh. Je však nesympatické cvičit takovéto úpravy samoučelně; číselná teorie je jeden z úseků matematiky, který poskytuje dosti příležitostí k „algebraickému po-
čítání“ a navíc dává dosti zajímavé výsledky.

Nyní k naší úloze: Obě prvočísla p, q jsou větší než 3 a tedy lichá. Nabízí se rozklad

$$p^2 - q^2 = (p + q)(p - q). \quad (1)$$

Čísla $p + q$ i $p - q$ jsou sudá, proto z (1) plyne

$$\frac{p^2 - q^2}{4} = \frac{p + q}{2} \cdot \frac{p - q}{2}. \quad (2)$$

Číslo na levé straně (2) i oba činitele na pravé straně jsou celá. Dokážeme-li, že $\frac{p^2 - q^2}{4}$ je násobek šesti, bude úloha rozřešena. Je dobré uvědomit si větu, která se často v teorii čísel užívá:

Jsou-li p, q dvě nesoudělná lichá čísla, jsou i celá čísla $\frac{p + q}{2}$,

$\frac{p - q}{2}$ nesoudělná. Věta se dokáže sporem: kdyby platilo

$\frac{p + q}{2} = ka, \frac{p - q}{2} = kb$ ($k > 1$ celé), bylo by $p = k \cdot (a + b)$, $q = k(a - b)$, tj. čísla p, q by měla společného dělitele k .

Budeme-li se pokoušet dokázat dělitelnost čísla $\frac{p^2 - q^2}{4}$

šesti, musíme dokázat, že jedno z čísel $\frac{p + q}{2}, \frac{p - q}{2}$ je násobek tří, druhé, třeba totéž, je násobkem dvou. Je však zřejmé, že obě čísla $\frac{p + q}{2}, \frac{p - q}{2}$ nemohou být sudá nebo lichá, neboť by

jejich součet a rozdíl, tj. čísla p, q , byla dvě sudá čísla. Obdobně nahlédneme, že při dělení třemi nemohou tato čísla dávat zbytky 1; 1 nebo 1; 2 nebo 2; 2; v každém z těchto případů by totiž jejich součet nebo rozdíl byl násobkem tří, a to je nemožné (p, q jsou prvočísla větší než 3). Z toho plyne, že aspoň jedno z čísel $\frac{p + q}{2}, \frac{p - q}{2}$ je násobkem tří. Je vidět, že při dokazování jsme pomocnou větu vůbec nepotřebovali.

Naše úloha má však i jiná řešení. Víme, že každé prvočíslo větší než 3 se dá vyjádřit ve tvaru $6x \pm 1$, x je přirozené číslo.

Důkaz je snadný; prvočíslo dává při dělení šesti některý ze zbytků 1, 2, 3, 4, 5. Avšak

$6x + 2 = 2(3x + 1)$, $6x + 3 = 3(2x + 1)$, $6x + 4 = (3x + 2) \cdot 2$ nejsou prvočísla. Zbývá tedy jen $6x + 1$, $6x + 5 = 6(x + 1) - 1$.

Použijeme-li této *pomocné věty*, je

$$p^2 - q^2 = (6a \pm 1)^2 - (6b \pm 1)^2 = 36a^2 \pm 12a \mp 12b - 36b^2 =$$

$$= 12[(3a^2 \pm a) - (3b^2 \pm b)] = 12[a(3a \pm 1) - b(3b \pm 1)]. \quad (3)$$

Snadno nahlédneme, že pro libovolné celé číslo t je $t \cdot (3t \pm 1)$ sudé. Je tedy

$$a(3a \pm 1) - b(3b \pm 1)$$

sudé a podle (3) je $p^2 - q^2$ násobkem čísla 24.

Uvedeme ještě jedno řešení, v němž se užívá pojmu kongruence. (Viz brožura č. 21 z edice *Škola mladých matematiků* od Al. Apfelbecka.)

Připomeňme *definici*:

Celé číslo a je kongruentní s celým číslem b podle modulu m , kde m je celé číslo, právě když m je dělitelem rozdílu $a - b$. Tuto relaci zapisujeme

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Platí

$$p^2 - q^2 = (p - q)(p + q).$$

Je-li $p \equiv q \pmod{3}$, pak $3/p - q$; není-li $p \equiv q \pmod{3}$, je např. $p = 3k + 1$, $q = 3l + 2$ (nebo obráceně), takže $3/p + q$. Vždy tedy platí $3/p^2 - q^2$.

Obě čísla $p - q$, $p + q$ jsou sudá. Kdyby žádné z nich nebylo dělitelné čtyřmi, bylo by $p - q \equiv p + q \equiv 2 \pmod{4}$, takže číslo $(p + q) - (p - q) = 2q$ bylo by dělitelné 4, což není možné. Tedy vždy platí $8/p^2 - q^2$.

Poněvadž čísla 3 a 8 jsou nesoudělná, je tím dokázáno, že pro libovolná dvě prvočísla p , q větší než tři platí

$$24/p^2 - q^2.$$

Přípravnou úlohou k úloze č. 2 je např. tato *úloha*: Dokažte,

že rozdíl druhých mocnin libovolných dvou lichých čísel je násobkem čísla 8. (Zde nelze tvrdit, že je násobkem 24, neboť např. $7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40$.) *Důkaz* tvrzení této úlohy je zcela elementární:

$$\begin{aligned}(2n_1 + 1)^2 - (2n_2 + 1)^2 &= 4n_1^2 + 4n_1 - 4n_2^2 - 4n_2 = \\ &= 4[n_1(n_1 + 1) - n_2(n_2 + 1)].\end{aligned}$$

Každé z čísel $n_1(n_1 + 1)$, $n_2(n_2 + 1)$ je sudé.

Pravděpodobně by bylo vhodnější formulovat místo *důkazové úlohy* raději *úlohu určovací* asi takto: určete největší násobek čtyř, kterým je dělitelný rozdíl druhých mocnin dvou prvočísel větších než 3.

C-P-3

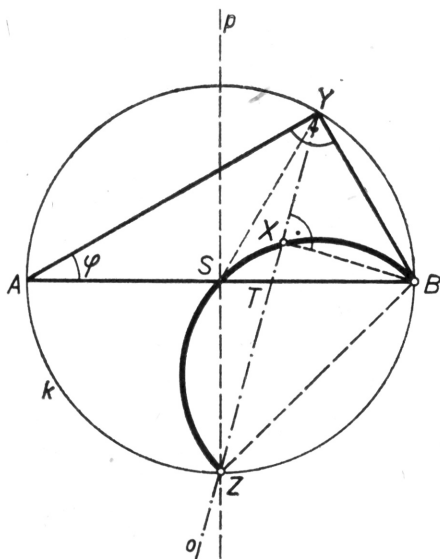
3. V rovine je daná úsečka AB . V jedné z polrovín vyřatých přímkou AB uvažujme všechny pravouhlé trojúhelníky ABC s přeponou AB . Označme X pātu kolmice vedenej bodom B k osi uhla $\star BCA$.

Dokážte, že všetky takéto osi uhlov BCA prechádzajú pevným bodom a vyšetrite množinu všetkých bodov X .

KOMENTÁŘ. Tato úloha se skládá ze dvou částí, z nichž druhá navazuje na první. První část je zvláštním případem obecnější úlohy; ta se opírá o jednu vlastnost osy úhlu trojúhelníka a dokazuje se pomocí obvodových úhlů. Domníváme se, že je pro olympioniky užitečné přiučít se těmito poznatkům.

První část úlohy se dá řešit bez obvodových úhlů. Budiž ABY nerovnostranný pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB (obr. 5). Označme S střed úsečky AB , p osu přepony AB , o osu úhlu $\star AYB$, Z průsečík přímky p s polopřímkou o (bod Z leží v polorovině opačné k ABY) a označme konečně T průsečík úseček AB , YZ . Zvolíme označení bodů A , B tak, aby platilo $\star BAY = \varphi < 45^\circ$. Pak se z příslušných trojúhelníků výpočte

$$\begin{aligned} \star ABY &= 90^\circ - \varphi, \star BTY = \star ATZ = 45^\circ + \varphi, \\ \star SZT &= 45^\circ - \varphi, \star AYS = \varphi, \star AYT = 45^\circ, \\ \star SYT &= 45^\circ - \varphi. \end{aligned}$$



Obr. 5

Odtud odvodíme, že trojúhelník YZS je rovnoramenný. Bod Z je tedy průsečík kružnice k se středem S a poloměrem SA s přímkou p . Tak se dokáže tvrzení první části úlohy.

Druhá část je téměř evidentní. Body X vyplní podle *obrácení Thaletovy věty* polokružnici nad průměrem BZ , která prochází bodem S . Krajní body B, Z nepatří množině všech bodů X (obr. 5).

Úlohu lze zobecnit tak, že se požaduje, aby $\star AYW$ byl konstantní, třeba ostrý nebo tupý. Přitom budeme užívat *věty*:

Je-li k kružnice opsaná trojúhelníku ABY a je-li $AY \neq BY$, pak osa úhlu $\sphericalangle AYB$ protíná osu p úsečky AB v tom průsečíku C přímky p s kružnicí k , který náleží polorovině opačné k ABY .

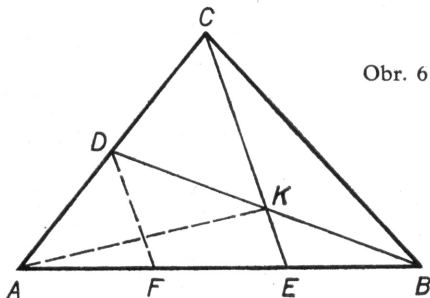
Odůvodnění pomocí obvodových úhlů: oblouky AC, BC ležící v polorovině opačné k ABY jsou shodné, proto jsou shodné i příslušné středové úhly $\sphericalangle ASC, \sphericalangle BSC$ (S je střed kružnice k) i příslušné obvodové úhly $\sphericalangle AYC, \sphericalangle CYB$, tj. polopřímka YC je osa úhlu $\sphericalangle AYB$.

Úlohu lze doplnit dodatečnou otázkou: Proběhne-li bod Y oblouk Y_1Y_2 , proběhne bod X oblouk X_1X_2 ; jaký je podíl délek obou těchto oblouků?

Zřejmě stačí zabývat se obloukem BY_1 a příslušným obloukem BX_1 . Protože je $\sphericalangle BAY_1 = \sphericalangle BZY_1 = \sphericalangle BZX_1$, je i $\sphericalangle BSY_1 = \sphericalangle BRX_1$, kde R je střed úsečky BZ . Z toho vyplývá, že podíl délek oblouků BY_1, BX_1 je týž, jako je podíl poloměrů příslušných kružnic, tj. $BS : BR = \sqrt{2}$.

C-P-4

4. V trojúhelníku ABC označme D střed strany AC a E ten bod strany AB , pro který platí $AE = 2 \cdot BE$. Průsečík příček BD a CE označme K (obr. 6).



Obr. 6

- a) Vypočtete, v jakém poměru dělí bod K úsečky BD , CE .
 b) Vypočtete, jaké části obsahu daného trojúhelníku jsou obsahy čtyř obrazců, na něž dělí úsečky BD , CE daný trojúhelník ABC .

KOMENTÁŘ. Je to typová úloha, s jejímiž metodami řešení by se měli řešitelé seznámit; její jednodušší verze je přípravná úloha č. 3 kategorie Z XXI. ročníku MO . V komentáři k přípravným úlohám kategorie Z je analyzována nejen úloha č. 3, ale i její složitější verze, obdobná úloze č. 4 kategorie C .

Kdyby šlo jen o část a) (dělení úseček), mohla by se úloha řešit pomocí příček trojúhelníků, což je v podstatě použití podobnosti trojúhelníků. Protože však část b) se týká obsahů trojúhelníků a čtyřúhelníka, bude snad výhodnější řešit celou úlohu $C-P-4$ pomocí obsahů. Ostatně víme, že téměř každá úloha, která se dá řešit pomocí podobnosti, se dá řešit také pomocí obsahů.

Při řešení naší úlohy a) označme obsahy trojúhelníků ABC , BCK , CDK , BEK , DAK , EAK po řadě P , P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 . Dále označme x , y podíly délek úseček:

$$DK = x \cdot BK, \quad EK = y \cdot CK. \quad (1)$$

Z (1) plyne

$$P_2 = xP_1, \quad P_3 = yP_1, \quad (2)$$

neboť trojúhelníky BKC , DKC mají společnou výšku na strany BK , DK ; obdobně se dostane druhá rovnost (2).

Dále je

$$P_1 + P_2 = \frac{1}{2} P, \quad P_1 + P_3 = \frac{1}{3} P, \quad (3)$$

tj.

$$2P_1 + 2P_2 = 3P_1 + 3P_3,$$

tj. podle (2)

$$2xP_1 = P_1 + 3yP_1$$

a odtud

$$2x = 1 + 3y. \quad (4)$$

Obdobně dostaneme

$$P_4 = P_2, \quad P_5 = 2P_3, \quad (5)$$

tj.

$$P_4 = xP_1, \quad P_5 = 2yP_1,$$

$$P_1 + P_2 = \frac{1}{2} P, \quad P_3 + P_4 + P_5 = \frac{1}{2} P,$$

$$P_1 + xP_1 = yP_1 + xP_1 + 2yP_1,$$

a tedy

$$1 + x = y + x + 2y,$$

odtud

$$y = \frac{1}{3}. \quad (6)$$

Po dosazení z (6) do (4) vyjde

$$x = 1. \quad (7)$$

b) Nyní vypočteme $P_1, P_2, P_3, P_4 + P_5$. Z (2), (5), (6), (7) dostaneme

$$P_1 = \frac{1}{4} P, \quad P_2 = \frac{1}{4} P, \quad P_3 = \frac{1}{12} P, \quad P_4 + P_5 = \frac{5}{12} P.$$

Pokud jde jen o podíly délek úseček, je výhodné užít aparátu trochu obecnějšího — *věty Menelaovy*. Pro ekonomické vyslovení Menelaovy věty ovšem potřebujeme pojem dělicího poměru, který je jedním ze základních pojmů afinní geometrie. Označíme-li (XYZ) dělicí poměr tří různých kolineárních bodů

$$[(XYZ) = \frac{XZ}{YZ}, \text{ když bod } Z \text{ neleží mezi } X, Y, (XYZ) = \\ = -\frac{XZ}{YZ}, \text{ když bod } Z \text{ leží mezi } X, Y], \text{ pak můžeme vyslovit}$$

Menelaovu větu takto:

Budiž PQR trojúhelník, m přímka jeho roviny, která neprochází žádným z vrcholů P , Q , R a protíná přímky PQ , QR , RP po řadě v bodech R' , P' , Q' . Pak pro dělicí poměry (cyklicky tvořené) platí

$$(PQR') \cdot (QRP') \cdot (RPQ') = 1.$$

V úloze č. 4 aplikujeme Menelaovu větu nejprve na trojúhelník ABD a na přímku CE ; dostaneme

$$(ABE) \cdot (BDK) \cdot (DAC) = 1,$$

neboli

$$(-2) \cdot (BDK) \cdot \frac{1}{2} = 1,$$

odtud

$$(BDK) = -1, \quad BK = DK.$$

Za druhé aplikujeme Menelaovu větu na trojúhelník AEC a přímku BD ; dostaneme

$$(AEB) \cdot (ECK) \cdot (CAD) = 1,$$

neboli

$$3 \cdot (ECK) \cdot (-1) = 1,$$

odtud

$$(ECK) = -\frac{1}{3}, \quad EK = \frac{1}{3} CK.$$

Poměry obsahů je pak ovšem třeba počítat zvlášť.

4. KATEGORIE Z

Z-P-1

1. Ciferný součet kladného trojčíferného prvočísla p_1 je dvojčíferné prvočíslu p_2 . Ciferný součet prvočísla p_2 je jednocíferné prvočíslu $p_3 > 2$. Najděte všechny takové trojice prvočísel p_1, p_2, p_3 .

KOMENTÁŘ A ŘEŠENÍ. První úloha je typický příklad úlohy, která se dá sice neobratně řešit experimentálně, ale která zároveň ukazuje význam matematické dedukce. Řešitelé by se měli seznámit s tabulkou prvočísel; v této tabulce najdou 143 trojciferných prvočísel. Vypočtou-li jejich ciferné součty, vyberou-li mezi těmito součty všechna dvojciferná prvočísla a vypočtou opět ciferné součty a mezi nimi zjistí ty, které jsou prvočísla, je úloha řešena. Můžeme vypočítat, kolik času by asi na tento postup potřebovali.

Ukáže se tak, že bude výhodné pomoci si několika jednoduchými úsudky:

(1) Ciferný součet trojciferného čísla je nejvýše $3 \cdot 9 = 27$. Mezi přirozenými čísly do 27 je jen pět dvojciferných prvočísel; jejich ciferné součty ukazuje tabulka:

Prvočíslo	11	13	17	19	23
Jeho ciferný součet	2	4	8	10	5

Mezi nimi je jen jedno prvočíslo větší než 2; je to 5. Hledané prvočíslo p_2 je tedy 23.

(2) Nyní musí řešitel v určitém systému rozložit číslo 23 v součet tří celočíselných kladných sčítanců, z nichž žádný není větší než 9 (23 je ciferný součet trojciferného čísla!). Rozklady jsou čtyři:

$$\begin{aligned} 9 + 9 + 5 \\ 9 + 8 + 6 \\ 9 + 7 + 7 \\ 8 + 8 + 7. \end{aligned}$$

Zde je plno příležitostí k drobným dedukcím: Aspoň jeden ze sčítanců je 8 nebo 9 (proč?); nejvýše dva sčítanci jsou ≥ 8 (proč?); všechny tři sčítance si nejsou rovny (proč?). Zdůrazňujeme, že v této fázi řešení nezáleží na pořádku sčítanců; teprve

v další fázi, až z nich budeme tvořit trojčiferná čísla, budeme musít přihlížet k jejich uspořádání.

(3) Také při tvoření trojčiferných čísel se učí řešitel systematickému postupu. Systém zaručuje, že žádné číslo nevynecháme a že žádné nebude uvedeno více než jednou.

Následující *tabulka* uvádí přehledně všechna možná řešení:

Rozklad čísla 23	Trojčiferná čísla
$9 + 9 + 5$	995 , 959, 599
$9 + 8 + 6$	986, 968, 896, 869, 689, 698
$9 + 7 + 7$	977, 797, 779
$8 + 8 + 7$	887, 878, 788

Tato tabulka je opět sestavena podle zásad kombinatoriky (v prvním, třetím a čtvrtém řádku jsou to tzv. permutace s opakováním, v druhém řádku permutace bez opakování). Z uvedených 15 čísel odpadají všechna škrtnutá, která zřejmě nejsou prvočísla. Ostatní přezkoumáme buď podle tabulky prvočísel, nebo výpočtem. Při výpočtu užíváme *věty*, kterou je vhodné si připomenout:

Je-li přirozené číslo n složené, pak existuje aspoň jedno prvočísl $p \leq \sqrt{n}$, které je dělitelem čísla n .

Této věty užijeme takto: Zjistíme-li např., že žádné prvočísl $p \leq \sqrt{599} < 25$ není dělitelem čísla 599, je 599 prvočísl. K tomu účelu stačí tedy jen přezkoumat dělitelnost čísla 599 prvočísl 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

Jedním z uvedených způsobů zjistíme, že úloha má čtyři řešení: 599, 977, 797, 887.

Obměna úlohy může být např. tato: Určete všechna trojčiferná prvočísla, jejichž ciferný součet je dělitelný číslem 21.

2. Dokažte, že výraz

$$V = a^2 - ab + b^2 - a + b + 1$$

nabývá pro každá dvě čísla a, b kladné hodnoty.

KOMENTÁŘ A ŘEŠENÍ. Tato úloha je příkladem na složitější úpravu algebraického výrazu, tj. celistvé racionální funkce o dvou proměnných a, b . Bylo by třeba vysvětlit, že obvykle se snažíme dokázat „nezápornost“ takového výrazu tím, že jej upravíme na součet, v němž každý sčítanec je buď druhá (sudá) mocnina reálného čísla, nebo součin činitelů, který je nezáporný, nebo určité kladné číslo. Jako příklad můžeme uvést třeba tuto *úlohu*: Pro všechna reálná čísla a, b, c je

$$s = (a - b)(a - c) + (b - a)(b - c) + (c - a)(c - b) \geq 0. \quad (\text{x})$$

Protože levá strana dokazované nerovnosti je symetrická funkce proměnných a, b, c , můžeme volit označení tak, že je

$$a \geq b \geq c. \quad (\text{xx})$$

Toto je pro mladé řešitele velmi obtížný myšlenkový proces, usnadní se jim konkrétními numerickými příklady, z nichž dedukují, že „nezáleží na tom“, které z čísel je označeno a , které b a které c . Přes obtížnost úvahy bychom se jí neměli vyhýbat, neboť jde o důležitý prvek matematické erudice. Rozhodně volba označení proměnných a, b, c představuje vyšší nívó myšlení než fráze: dokážeme větu za předpokladu (xx), obdobně by se dokázala, kdyby platilo např. $b \geq a \geq c$ apod.

Upravíme (x):

$$s = (a - b)[(a - c) - (b - c)] + (c - a)(c - b) = (a - b)^2 + (c - a)(c - b).$$

Podle (xx) je však $c - a \leq 0, c - b \leq 0$, tj. $(c - a)(c - b) \geq 0$, a tedy i $s \geq 0$.

Přípravná úloha vyžaduje jistý trik: pokusíme se zahrnout do jednoho nezáporného členu všechny členy obsahující např. proměnnou a ; zbývající členy — které obsahují jen proměnnou b — se pokusíme také upravit v součet dvou nezáporných členů. Konkrétně:

$$V = a^2 + b^2 - ab - a + b + 1,$$

$$V = \left(a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 + \frac{1}{2}b + \frac{3}{4}. \quad (1)$$

Člen $\left(a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}\right)^2$ je nezáporný a obsahuje skutečně členy

a^2 , $-ab$, $-a$ z výrazu V . Zbývající tři členy (1) upravíme takto:

$$\frac{3}{4}b^2 + \frac{1}{2}b + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(b + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}. \quad (2)$$

Spojíme-li (1), (2), vyjde

$$V = \left(a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(b + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} > 0$$

pro všechna a, b .

Doplníme-li tento trik ještě malým kouzlem, tj. budeme-li zkoumat výraz $2V$, dostaneme řešení, které šokuje svou krátkostí a elegancí, ale také svou smělostí. Takováto řešení nedoporučujeme.

$$2V = 2a^2 + 2b^2 - 2ab - 2a + 2b + 2,$$

$$2V = (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 + 2b + 1),$$

$$2V = (a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b + 1)^2.$$

Čtenáři, kteří znají aspoň trochu afinní geometrii kuželoseček, mohou nahlédnout důkladněji do kuchyně, kde se úlohy přípra-

vují, a mohou si podle obecného receptu sestavit jiné obdobné úlohy.

Pokládáme-li a, b za afinní souřadnice bodu v rovině, je rovnice

$$k_{11}a^2 + 2k_{12}ab + k_{22}b^2 + 2k_{13}a + 2k_{23}b + k_{33} = 0 \quad (3)$$

rovnici kuželosečky, jejíž diskriminant je

$$\Delta = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Přitom k_{ij} jsou pevná reálná čísla, z nichž aspoň jedno je různé od nuly. Levá strana (3) je tzv. pozitivně definitní funkcí proměnných a, b , tj. nabývá jen kladných hodnot, právě když rovnice (3) vyjadřuje regulární imaginární elipsu a když je $k_{33} > 0$. Algebraická geometrie nás učí, že rovnice (3) vyjadřuje regulární imaginární elipsu, právě když platí

$$\Delta \neq 0, \Delta_{33} > 0, \Delta_{22}\Delta_{33} - \Delta_{23}^2 > 0, \quad (5)$$

kde Δ_{22}, Δ_{23} a Δ_{33} jsou tzv. minory determinantu (4):

$$\begin{aligned} \Delta_{22} &= k_{11}k_{33} - k_{13}^2, \Delta_{23} = k_{11}k_{23} - k_{12}k_{13}, \\ \Delta_{33} &= k_{11}k_{22} - k_{12}^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Determinant Δ se počítá podle vzorce

$$\Delta = k_{11}k_{22}k_{33} + 2k_{12}k_{13}k_{23} - k_{11}k_{23}^2 - k_{22}k_{13}^2 - k_{33}k_{12}^2. \quad (7)$$

Přezkoumejme tímto „vyšším aparátem“ znovu součet

$$V = a^2 - ab + b^2 - a + b + 1,$$

kde je $k_{11} = k_{22} = k_{33} = 1, k_{12} = k_{13} = -\frac{1}{2}, k_{23} = \frac{1}{2}$, a te-

dy podle (6), (7): $\Delta = \frac{1}{2}, \Delta_{22} = \frac{3}{4}, \Delta_{23} = \frac{1}{4}, \Delta_{33} = \frac{3}{4}$.

Jsou tedy splněny podmínky (5) a zároveň je $k_{33} = 1 > 0$. Tím je dokázáno, že pro všechna a, b platí $V > 0$.

Jak můžeme sestavit podle (5) jinou obdobnou úlohu, ukazuje tento příklad: Zvolíme $k_{11} = 2, k_{23} = 0, k_{22} = k_{12} = k_{13} = 1$; podle (6), (7) vyjde

$$\Delta = k_{33} - 1, \Delta_{22} = 2k_{33} - 1, \Delta_{23} = -1, \Delta_{33} = 1,$$

tj.

$$\Delta_{22}\Delta_{33} - \Delta_{23}^2 = 2(k_{33} - 1).$$

Zvolíme-li $k_{33} > 1$ (např. $k_{33} = 3$), jsou splněny podmínky (5) i $k_{33} > 0$ a funkce

$$s' = 2a^2 + 2ab + b^2 + 2a + 3$$

nabývá jen kladných hodnot. Skutečně je

$$s' = (a + b)^2 + a^2 + 2a + 3 = (a + b)^2 + (a + 1)^2 + 2 > 0$$

pro všechna a, b .

Z-P-3

3. Necht' A, B, C, D jsou po řadě vrcholy vypuklého čtyřúhelníka a necht' X, Y, Z, U jsou po řadě středy stran AB, BC, CD, DA . Necht' R je průsečík přímek AZ a UC , T průsečík přímek AY a XC .

Vypočítejte poměr obsahů čtyřúhelníků $ABCD$ a $ATCR$.

KOMENTÁŘ A ŘEŠENÍ. Tato úloha je téměř běžná školská úloha, která nevyžaduje zvláštní vtíp. Je nepodstatné, že čtyřúhelník $ABCD$ je konvexní, místo čtyřúhelníka $ABCD$ se můžeme zabývat odděleně trojúhelníky ABC a CDA . Úsečky AY a CX jsou těžnice trojúhelníka ABC , jejich průsečík T je jeho těžiště. Pokládáme-li za známou větu, že těžiště dělí každou těžnici v poměru $2 : 1$, je $AT = 2TY$ a pro obsahy trojúhelníků platí tedy

$$\triangle ATC = 2 \triangle YTC, \quad (1)$$

neboť tyto dva trojúhelníky mají společný vrchol C . Protože $BY = CY$, je

$$\triangle BYA = \triangle CYA = \frac{1}{2} P, \quad (2)$$

kde P značí obsah $\triangle ABC$. (Také trojúhelníky BYA , CYA mají společný vrchol A). Protože dále

$$\triangle CYA = \triangle ATC + \triangle YTC,$$

dostaneme z (1), (2)

$$\frac{1}{2} P = \triangle ATC + \frac{1}{2} \triangle ATC = \frac{3}{2} \triangle ATC,$$

neboli

$$\triangle ATC = \frac{1}{3} P. \quad (3)$$

Úvodem k této úloze by mohlo být opakování základní vlastnosti těžnic a těžiště, které jsme v předchozím použili. Také tato vlastnost se dá odvodit pomocí obsahů. Nechť je $TX = k \cdot CT$, $TY = m \cdot AT$; čísla k , m udávají, v jakém poměru dělí bod T úsečku CX a úsečku AY . Prozatím nevíme, že

$k = m = \frac{1}{2}$; to chceme dokázat. Pro obsahy platí

$$\triangle AXT = k \triangle ACT, \triangle CYT = m \triangle ACT. \quad (4)$$

Protože

$$\begin{aligned} \triangle ACX &= \triangle ACY = \frac{1}{2} \triangle ABC; \\ \triangle ACX &= \triangle AXT + \triangle ACT, \\ \triangle ACY &= \triangle CYT + \triangle ACT, \end{aligned} \quad (5)$$

dostaneme z (4), (5)

$$(k + 1) \triangle ACT = (m + 1) \triangle ACT,$$

a odtud $k = m$. Dále je podle (4)

$$\triangle AXT = \triangle BXT = \triangle CYT = \triangle BYT = k \cdot \triangle ACT.$$

Platí

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \triangle AXT + \triangle BXT + \triangle CYT + \triangle BYT + \\ &+ \triangle ACT = (4k + 1) \triangle ACT \end{aligned} \quad (6)$$

a mimo to

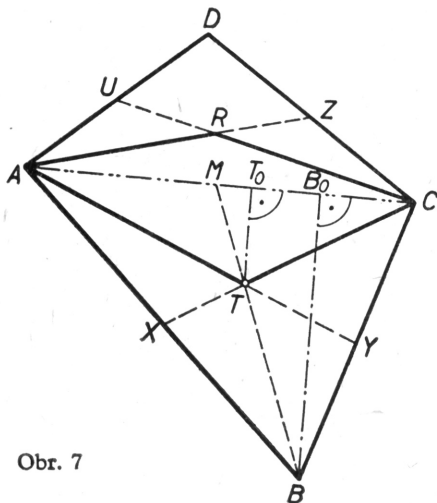
$$\begin{aligned} \triangle ABC &= 2 \triangle ACX = 2(\triangle AXT + \triangle ACT) = \\ &= 2(k + 1) \triangle ACT. \end{aligned} \quad (7)$$

Spojením (6), (7) dostaneme

$$(4k + 1) \triangle ACT = 2(k + 1) \triangle ACT$$

a odtud $4k + 1 = 2k + 2$, $k = \frac{1}{2}$. Tím je základní vlastnost těžnice odvozena.

Úlohu Z-P-3 lze řešit také podobností trojúhelníků. Vede-me-li body B , T (obr. 7) kolmice k přímce AC (tj. výšky na



Obr. 7

stranu AC v trojúhelnících $\triangle ABC$, $\triangle ATC$) a označíme-li B_0 , T_0 jejich paty a M střed úsečky AC , zjistíme snadno, že

$$\triangle BB_0M \sim \triangle TT_0M; \quad (8)$$

přítom užíváme té vlastnosti, že body B , T , M leží v přímce (těžnici $\triangle ACB$). Z (8) plyne

$$BB_0 : TT_0 = BM : TM = 3 : 1 \quad (9)$$

a odtud dostaneme vztah (3) pro obsahy trojúhelníků. Vztah (9) platí i v případě, že neplatí (8), tj. když nevzniknou trojúhelníky BB_0M , TT_0M . To nastane právě když je $BM \perp AC$. Pak je $B_0 = T_0 = M$ a (9) vyjadřuje známou vlastnost těžnice.

Oba způsoby řešení jsou docela přirozené: zpravidla vlastnost, která se dá odvodit pomocí obsahů obrazců, se dá odvodit také pomocí podobnosti a obráceně. Tuto zkušenost by měli získat postupně i čtenáři např. při odvozování *věty Pythagorovy*, později i *věty Eukleidovy* a při jiných příležitostech.

Zajímavější je úloha obdobná k úloze č. 3. Jejím řešením získají čtenáři klíč k řešení celé kategorie obdobných úloh, mezi něž patří i známá *úloha Steinhausova*.

Úloha zní takto: Je dán trojúhelník ABC , na stranách AB , BC jsou zvoleny body X , Y tak, že platí $BX = 2AX$, $CY = 2BY$. Průsečík úseček AY , CX je označen T . Máme určit, v jakém poměru dělí bod T úsečky CX , AY a jaký je poměr obsahů trojúhelníků ACT , ABC .

Uvedeme jen *stručné řešení*. Položíme $TX = k \cdot CT$, $TY = m \cdot AT$. Pro obsahy trojúhelníků platí (vynecháváme znak $\triangle$)

$$\begin{aligned} ATX &= k \cdot ACT, & CTY &= m \cdot ACT, \\ ACT + CTY &= 2(ACT + ATX), \\ ACT + m \cdot ACT &= 2ACT + 2k \cdot ACT, \\ 1 + m &= 2 + 2k, \end{aligned}$$

a tedy $m = 2k + 1$, tj.

$$ATX = k \cdot ACT, \quad CTY = (2k + 1) \cdot ACT. \quad (10)$$

Dále je $ABT = 3 \cdot ATX$, $CBT = \frac{3}{2} CTY$,

a tedy podle (10)

$$ABC = ABT + CBT + ACT = 3k \cdot ACT + \\ + \frac{3}{2} (2k + 1) ACT + ACT,$$

neboli

$$\frac{ABC}{ACT} = 6k + \frac{5}{2}. \quad (11)$$

Ale platí také

$$ABC = 3ACX = 3(ATX + ACT) = 3(k + 1) ACT$$

neboli

$$\frac{ABC}{ACT} = 3(k + 1). \quad (12)$$

Spojením (11), (12) vyjde lineární rovnice pro k , jejímž řešením je $k = \frac{1}{6}$. Pomocí k pak vypočteme podle (11)

$$TX = \frac{1}{6} CT, \quad TY = \frac{4}{3} AT$$

$$ACT = \frac{2}{7} ABC.$$

Použijeme-li obrázku, je celé toto odvození snadné.

Z-P-4

4. Je dán rovnoběžník $ABCD$. Potom pro každý bod X roviny rovnoběžníka platí

$$AX < BX + CX + DX;$$

dokažte.

KOMENTÁŘ A ŘEŠENÍ. Řešení této úlohy záleží v jednoduchém a vtipném použití *neostré trojúhelníkové nerovnosti*. Tato nerovnost, která je jednou ze základních geometrických vět, zní:

Jsou-li U, V, T libovolné tři body v prostoru (v rovině), různé nebo splývající, platí pro jejich vzdálenosti

$$UV \leq UT + VT.$$

Přitom rovnost nastane právě tehdy, když bod T náleží úsečce (nenulové či nulové) UV .

Ostrá trojúhelníková nerovnost zní: Jsou-li U, V, T tři body, které neleží v přímce (a samozřejmě jsou různé), platí

$$UV < UT + VT.$$

Pomocí trojúhelníkové nerovnosti můžeme např. porovnat délky dvou vhodných lomených čar, které mají společný počáteční i koncový bod, nebo dokázat větu:

Jsou-li A, B dva různé body a pohybuje-li se bod X po přímce $p \parallel AB$, pak součet vzdáleností $AX + BX$ je nejmenší, právě když leží bod X na ose úsečky AB .

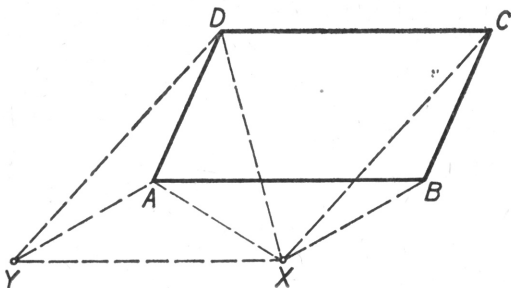
Trojúhelníkovou nerovnost nebudeme dokazovat, neboť je to vlastně *axióm*, který je mnohem závažnější a účinnější než věty, pomocí nichž se obvykle odvozuje.

Nyní k řešení úlohy č. 4. Klíčem je sestrojení bodu Y tak, že buď $BXYA$ nebo $CXYD$ (nebo obě čtveřice) jsou vrcholy rovnoběžníků. Leží-li bod X mimo přímky AB, CD , vzniknou dva rovnoběžníky, leží-li X na přímce AB nebo CD , vznikne jen jeden. Je užitečné sestrojit situaci pro různé polohy bodu X : uvnitř i vně rovnoběžníka $ABCD$ i na přímkách AB, BC, CD, DA , dokonce i ztotožnit X s vrcholy rovnoběžníka (na obr. 8 leží bod X vně rovnoběžníka $ABCD$).

Neostré trojúhelníkové nerovnosti užijeme dvakrát:

$$XA \leq XD + DA, \quad (1)$$

$$DA \leq DY + YA. \quad (2)$$



Obr. 8

Dále použijeme vztahů $DY = XC$, $YA = XB$. Z (1) a (2) pak plyne (bez znalosti operací s nerovnostmi)

$$XA \leq XD + XC + XB. \quad (3)$$

Úloha by mohla být uvedena ne jako důkazová, ale jako impuls k experimentování, tj. ve formulaci:

V rovině rovnoběžníka $ABCD$ volte bod X různým způsobem a porovnávejte délky XA , $XB + XC + XD$.

Zajímavá je doplňková otázka: Pro které body X roviny ABC nastane v (3) rovnost? Je zřejmé, že to bude právě pro ty body X , pro něž nastane rovnost v (1) a zároveň v (2). Rovnost v (1) nastane, právě když D náleží úsečce AX , tj. když X leží na polopřímce opačné k DA . Rovnost (2) nastane, právě když Y náleží úsečce AD , tj. právě když X náleží úsečce BC . Ale žádný bod X nemůže splňovat zároveň obě podmínky, neboť nemůže ležet zároveň na přímkách AD , BC . Zpřesníme tedy (3) takto: pro všechny body X roviny rovnoběžníka ABC platí

$$XA < XB + XC + XD.$$

JINÉ ŘEŠENÍ. Pro každý bod X roviny rovnoběžníka $ABCD$ (obr. 8) podle trojúhelníkové nerovnosti platí

$$AX \leq AD + DX, \quad (1)$$

$$BC \leq BX + CX. \quad (2)$$

Čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník, a proto

$$AD = BC. \quad (3)$$

Podle (3) a (1) plyne

$$AX \leq BC + DX. \quad (4)$$

Podle nerovnosti (2) pak ze (4) dostáváme

$$AX \leq BX + CX + DX. \quad (5)$$

Rovnost v (5) nastává, právě když platí současně rovnost v (1) a (2), tj. právě když bod X leží zároveň na polopřímce opačné k polopř. DA a na úsečce BC . To však není možné, neboť přímky AD a BC jsou různé rovnoběžky, a proto pro každý bod X roviny rovnoběžníka $ABCD$ platí

$$AX < BX + CX + DX.$$

III. Soutěžní úlohy I. kola

1. KATEGORIE A

A-I-1

1. Utvoříme všechny možné konečné posloupnosti

$$1.e_1, 2.e_2, \dots, n.e_n,$$

kde každé z čísel $e_1, e_2, \dots, e_n$ je buď 1, nebo -1 . Součet všech členů takovéto posloupnosti označme $s(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Dokažte větu:

Ke každému přirozenému číslu k se dá nalézt takové přirozené číslo p , že pro každé $n > p$ je mezi součty $s(e_1, e_2, \dots, e_n)$ aspoň $k + 1$ čísel, která jsou si rovna.

ŘEŠENÍ. Protože je

$$-1 -2 -\dots -n \leq s(e_1, e_2, \dots, e_n) \leq 1 + 2 + \dots + n,$$

je mezi součty $s(e_1, e_2, \dots, e_n)$ nejvýše $2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 1 = n^2 +$

$+ n + 1$ různých čísel; přitom všech možných součtů $s(e_1, e_2, \dots, e_n)$ je 2^n . Kdyby se každé z čísel $-\frac{n(n+1)}{2}, \dots,$

$-1, 0, 1, \dots, \frac{n(n+1)}{2}$ vyskytlo mezi čísly $s(e_1, e_2, \dots, e_n)$

nejvýše k -krát (kde k je další přirozené číslo), platilo by

$$k \cdot (n^2 + n + 1) \geq 2^n.$$

Abychom dokončili důkaz sporem, postačí dokázat, že pro každé přirozené číslo k platí od určitého indexu n počínaje

$$a_n = \frac{2^n}{n^2 + n + 1} > k. \quad (1)$$

Vypočteme podíl

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2^n}{n^2 + n + 1} \cdot \frac{n^2 - n + 1}{2^{n-1}} = 2 \cdot \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1}$$

a dále

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= 2 \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n + 1} - \frac{2n}{n^2 + n + 1} \right) = \\ &= 2 \cdot \left(1 - \frac{2}{n + 1 + \frac{1}{n}} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Pro všechna $n > 5$ je

$$\frac{2}{n + 1 + \frac{1}{n}} < \frac{2}{5 + 1 + \frac{1}{5}},$$

neboť $5 + \frac{1}{5} < 6 < n + \frac{1}{n}$, když $n > 5$. Podle (2) je tedy

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &> 2 \cdot \left(1 - \frac{2}{5 + 1 + \frac{1}{5}} \right) = \\ &= 2 \cdot \left(1 - \frac{10}{31} \right) > 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Je tedy

$$a_n > \frac{4}{3} a_{n-1},$$

$$a_{n-1} > \frac{4}{3} a_{n-2},$$

.....

$$a_6 > \frac{4}{3} a_5,$$

tj.

$$a_n > \left(\frac{4}{3}\right)^{n-5} \cdot a_5 = \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot a_5,$$

tj. pro všechna $n > 5$ platí

$$a_n > b \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n, \quad (3)$$

kde b je pevné kladné číslo. Protože čísla $b \left(\frac{4}{3}\right)^n$ tvoří rostoucí geometrickou posloupnost s kvocientem $\frac{4}{3} > 1$, lze nalézt ke každému přirozenému číslu k přirozené číslo q tak, že pro každé $n > q$ je $a_n > k$; je-li $p = \max(5, q)$, pak pro všechna $n > p$ platí (1) a věta je dokázána.

A-I-2

2. Komplexní číslo z není nezáporné, právě když existuje přirozené číslo n a kladná čísla $a_0, a_1, \dots, a_n$ tak, že platí

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = 0.$$

Dokažte.

ŘEŠENÍ. Především je jasné, že nezáporné číslo z nemůže být kořenem polynomu, jehož všechny koeficienty jsou kladné.

Buď tedy z libovolné komplexní číslo, které není nezáporné.

Je-li $\operatorname{Re} z < 0$, pak můžeme položit

$$a_0 = z\bar{z}, \quad a_1 = -(z + \bar{z}), \quad a_2 = 1$$

a číslo z splňuje rovnici

$$z^2 + a_1 z + a_0 = 0,$$

v níž všechny koeficienty jsou kladné.

V případě $\operatorname{Re} z \geq 0$ můžeme předpokládat, že $\operatorname{Im} z > 0$ (jinak bychom přešli k číslu $\bar{z}$, které rovněž musí být kořenem hledaného polynomu). Pak obraz čísla z leží v I. kvadrantu roviny komplexních čísel, nikoli na reálné ose. Proto (vzhledem k *Moivreově větě*) pro vhodné přirozené číslo n bude $\operatorname{Re} z^n < 0$. Podobně jako v předchozím odstavci najdeme kladná čísla a_0, a_1 taková, že platí

$$z^{2n} + a_1 z^n + a_0 = 0.$$

Číslo z splňuje samozřejmě i rovnici

$$(z^{2n} + a_1 z^n + a_0)(z + 1)^n = 0.$$

Úpravou levé strany (postupným násobením trojčlenů $z^{2n} + a_1 z^n + a_0$ výrazem $z + 1$) se dostane polynom (stupně $3n$), jehož všechny koeficienty jsou kladné.

Tím je věta dokázána.

A-I-3

3. Jsou-li čísla a, b, c délky stran trojúhelníka T_1 , pak existuje trojúhelník T_2 , jehož strany mají délky

$$\frac{a}{a+1}, \quad \frac{b}{b+1}, \quad \frac{c}{c+1}. \quad (1)$$

Dokažte.

Může být trojúhelník T_1 podobný trojúhelníku T_2 ?

ŘEŠENÍ. a) Zvolíme označení tak, aby platilo $a \leq b \leq c$, a dokážeme, že pak platí

$$\frac{a}{a+1} \leq \frac{b}{b+1} \leq \frac{c}{c+1}. \quad (2)$$

Podle předpokladu je $b - a \geq 0$; dále je

$$\frac{b}{b+1} - \frac{a}{a+1} = \frac{b-a}{(a+1)(b+1)} \geq 0,$$

záměnou písmen dostaneme druhou nerovnost (2).

b) Protože a, b, c jsou délkami stran trojúhelníka, platí

$$c < a + b. \quad (3)$$

K tomu, aby čísla (1) byla délkami stran trojúhelníka, stačí, aby největší z nich, tj. $\frac{c}{c+1}$ podle (2), bylo menší než součet obou ostatních, tj. aby platilo

$$\frac{c}{c+1} < \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}. \quad (4)$$

Provedeme výpočet

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} - \frac{c}{c+1} = \frac{M}{(a+1)(b+1)(c+1)},$$

kde

$M = a(b+1)(c+1) + b(a+1)(c+1) - c(a+1)(b+1)$; vyšetříme, zda je $M > 0$ nebo $M \leq 0$.

Platí

$$\begin{aligned} M &= c(2ab + a + b - ab - a - b - 1) + 2ab + a + b, \\ M &= c(ab - 1) + 2ab + a + b. \end{aligned} \quad (5)$$

Rozlišíme dva případy: I) $ab - 1 \geq 0$, II) $ab - 1 < 0$.

V případě I) je

$$c(ab - 1) \geq b(ab - 1),$$

neboť podle volby označení je $b \leq c$. Je tedy podle (5)

$$M \geq b(ab - 1) + 2ab + a + b = ab^2 + 2ab + a > 0.$$

V případě II) je vzhledem k (3)

$$c(ab - 1) > (a + b)(ab - 1),$$

a tedy podle (5)

$$\begin{aligned} M &> (a + b)(ab - 1) + 2ab + (a + b) = \\ &= (a + b) \cdot ab + 2ab > 0. \end{aligned}$$

V každém případě je tedy $M > 0$ a platí (4).

c) Vzhledem k (2) je $T_1 \sim T_2$, právě když

$$a : b : c = \frac{a}{a+1} : \frac{b}{b+1} : \frac{c}{c+1}.$$

Z rovnice $\frac{a}{b} = \frac{a}{a+1} : \frac{b}{b+1}$ plyne $a = b$, záměnou písmen dostaneme $b = c$. Je tedy $T_1 \sim T_2$, právě když oba trojúhelníky jsou rovnostranné.

A-I-4

4. Označme α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka, $s = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$. Dokážte tieto vety:

a) Ak nie je trojuholník rovnoramenný, nemôže byť príslušné číslo s maximálne.

b) Medzi rovnoramennými trojuholníkmi má najväčší súčet s trojuholník rovnostranný.

RIEŠENIE. a) Nech je $\alpha \neq \beta$. Zvoľme označenie tak, aby bolo $\alpha > \beta$. Potom je

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} < 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2}. \quad (1)$$

Je totiž $0 < \frac{\alpha - \beta}{2} < \pi$ a teda $-1 < \cos \frac{\alpha - \beta}{2} < 1$. Z (1)

vyplýva $s = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma < \sin \frac{\alpha + \beta}{2} + \sin \frac{\alpha + \beta}{2} +$

$+\sin \gamma$. Čísla $\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{\alpha + \beta}{2}, \gamma$ sú veľkosti uhlov rovnoramenného trojuholníka.

b) Nech je teda $\alpha = \beta, \gamma = \pi - (\alpha + \beta) = \pi - 2\alpha$. Potom je

$$s = 2 \sin \alpha + \sin 2\alpha.$$

Postupnými úpravami dostaneme:

$$\begin{aligned} s &= \sin \alpha + (\sin \alpha + \sin 2\alpha) = \sin \alpha + 2 \sin \frac{3\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \sin \frac{3\alpha}{2} \right) = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2} = 8 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Ak označíme $x = \cos^2 \frac{\alpha}{2}$, potom z poslednej rovnosti dostaneme

$$s^2 = 64x^3(1 - x). \quad (2)$$

Vzhľadom na to, že $x > 0$, bude nadobúdať s maximálnu hodnotu práve vtedy, keď s^2 bude maximálne.

Budeme teda hľadať maximum funkcie $y = x^3 - x^4$ (bez

použitia matematickej analýzy*) a to v intervale $0 < x < 1$.

Pri hľadaní maxima tejto funkcie možno použiť tiež vetu 12 na str. 93, zv. 17 *Školy mladých matematikov* (Hroník: Úlohy o maximech a minimech funkcií). Tu podáme dôkaz, ktorý sa opiera len o priebeh kvadratickej funkcie:

Rovnostranný trojuholník dostaneme pre $\alpha = 60^\circ$, $\frac{\alpha}{2} = 30^\circ$,

$$x = \cos^2 30^\circ = \frac{3}{4}. \text{ Príslušné hodnoty } s^2 \text{ a } s \text{ sú: } s^2 = 64 \cdot \frac{27}{64}.$$

$\cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{4}, s = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Dokážeme, že funkcie $f(x) = \frac{s^2}{64} = x^3 - x^4$ nadobúda maximum pre $x = \frac{3}{4}$. Urobíme nasledujúci výpočet:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{4}\right) - f\left(\frac{3}{4} + \varepsilon\right) &= \left(\frac{3}{4}\right)^3 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 - \left(\frac{3}{4} + \varepsilon\right)^3 + \\ &+ \left(\frac{3}{4} + \varepsilon\right)^4 = -\frac{27}{16}\varepsilon - \frac{9}{4}\varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \frac{27}{16}\varepsilon + \frac{27}{8}\varepsilon^2 + \\ &+ 3\varepsilon^3 + \varepsilon^4 = \varepsilon^2\left(\varepsilon^2 + 2\varepsilon + \frac{9}{8}\right). \text{ Teda} \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) - f\left(\frac{3}{4} + \varepsilon\right) = \varepsilon^2\left[(\varepsilon + 1)^2 + \frac{1}{8}\right].$$

Keďže pri každej voľbe $\varepsilon \neq 0$ je $(\varepsilon + 1)^2 + \frac{1}{8} > 0$, je $f\left(\frac{3}{4}\right) > f\left(\frac{3}{4} + \varepsilon\right)$, čím je dôkaz skončený.

*) S použitím matematickej analýzy dostaneme $y' = 3x^2 - 4x^3$. Pre $y' = 0, x \neq 0$ vyjde $x = \frac{3}{4}$ čiže $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$, z čoho $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, čo dáva $\frac{\alpha}{2} = 30^\circ, \alpha = 60^\circ$. Ľahko sa presvedčíme, že príslušná hodnota s je skutočne maximálna.

5. M je množina všetkých mrežových bodov roviny, t. j. tých bodov, ktorých kartézské súradnice sú celé čísla. Dokážte tieto vety:

a) Ak obsahuje priamka p dva body množiny **M**, potom ich obsahuje nekonečne mnoho.

b) Ak obsahuje priamka p dva body množiny **M**, potom všetky body množiny **M** ležia na sústave rovnobežiek obsahujúcej priamku p , pričom každé dve susedné rovnobežky majú rovnakú vzdialenosť.

RIEŠENIE. a) Nech priamka p obsahuje dva rôzne body P , Q množiny **M**. Kartézsku sústavu súradníc zvolíme tak, aby bod P bol jej počiatkom. Bod Q má potom celočíselné súradnice $[m, n] \neq [0, 0]$. Priamka $PQ = p$ má rovnicu

$$nx - my = 0. \quad (1)$$

Ak je najväčší spoločný deliteľ $D(m, n)$ čísel m, n rovný d , potom $m = kd$, $n = hd$, kde $D(k, h) = 1$. Ak dosadíme za m, n do rovnice (1), dostaneme rovnicu

$$hx - ky = 0,$$

ktorej všetky celočíselné riešenia majú tvar $x = kq$, $y = hq$, kde q je celé číslo. Na priamke p leží teda nekonečne mnoho mrežových bodov $[kq, hq]$.

b) Nech priamka p , ktorá obsahuje aspoň dva body množiny **M**, je daná rovnicou (1). Ak je $[x, y]$ ľubovoľný bod množiny **M**, potom

$$nx - my = hdx - kdy = d(hx - ky) = ds,$$

kde s je celé číslo. Daný bod množiny **M** leží teda na priamke

$$nx - my = ds, \quad (2)$$

ktorá je rovnobežná s priamkou p . Ak zvolíme, obrátene, ľubovoľnú priamku tvaru (2), potom všetky celočíselné riešenia rov-

nice (2) udávají tie body množiny $\mathbf{M}$, ktoré ležia na priamke (2). Táto rovnica má celočíselné riešenie pre každé celé číslo s .

Všetky priamky (2) tvoria sústavu rovnobežiek, z ktorých každé dve susedné dostaneme pre hodnotu parametrov $s, s + 1$. Vzdialenosť v priamky

$$nx - my = d(s + 1)$$

od priamky (2) je

$$v = \frac{|d(s + 1) - ds|}{\sqrt{n^2 + m^2}} = \frac{d}{\sqrt{n^2 + m^2}}$$

a nezávisí teda na čísle s .

A-I-6

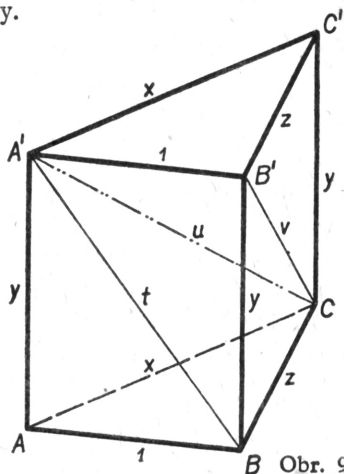
6. Trojboký hranol $ABCA'B'C'$ s podstavou ABC , jehož hrany majú dĺžky $AB = 1$, $AC = x$, je rozdelen rovinami $A'BC$ a $A'B'C$ ve tri shodné čtyřstěny.

a) Vyjádřete dĺžky všech jeho hran pomocí x .

b) Ukažte, že existuje trojboký hranol této vlastnosti.

Poznámka. Dva čtyřstěny jsou shodné, právě když existuje shodné zobrazení v prostoru, které převádí jeden v druhý.

ŘEŠENÍ. a) Obr. 9. Zavedeme tato označení délek $AC = A'C' = x$, $AA' = BB' = CC' = y$, $BC = B'C' = z$, $A'B = t$,



$A'C = u$, $B'C = v$. Tetraedry $A'BCA$, $A'BCB'$, $A'B'C'C$, které jsou po dvou navzájem shodné, mají tyto délky hran:

$$\begin{aligned} A'BCA &: t, y, 1, x, z, u; \\ A'BCB' &: t, y, 1, v, z, u; \\ A'B'C'C &: x, z, 1, y, v, u. \end{aligned} \quad (1)$$

Z (1) plyne porovnáním:

$$v = x, \quad t = x. \quad (2)$$

Stěny uvedených tří tetraedrů jsou trojúhelníky s těmito délkami stran:

$$\begin{array}{lll} AA'B & x, y, 1; & A'BC & x, z, u; & A'B'C' & 1, x, z; \\ AA'C & x, y, u; & A'BB' & 1, x, y; & A'B'C & 1, x, u; \\ A'BC & x, z, u; & A'CB' & 1, x, u; & A'C'C & x, y, u; \\ ABC & 1, x, z; & BCB' & x, y, z; & B'CC' & x, y, z. \end{array} \quad (3)$$

Z (3) dostaneme porovnáním buď $z = u$ nebo $y = 1$ a dále buď $u = 1$ nebo $y = z$. Kombinováním dostaneme tyto čtyři případy

I) $z = u = 1$, II) $y = u = 1$, III) $y = z = u$, IV) $y = z = 1$. Případy I) a III) lze řešit společně, obdobně II) a IV). V případě I) je situace v rovině ABA' tato (obr. 10a). Kosinová věta pro $\triangle BB'C_0$, $\triangle A'B'C_0$ (kde C_0 je pravoúhlý průmět bodu C do roviny ABA') dá

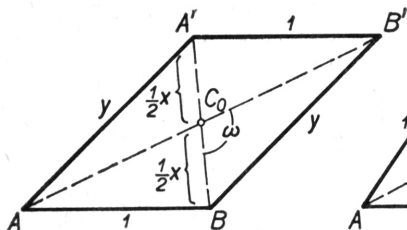
$$y^2 = d^2 + \frac{x^2}{4} - dx \cdot \cos \omega, \quad 1 = d^2 + \frac{x^2}{4} + dx \cdot \cos \omega.$$

Sečtením

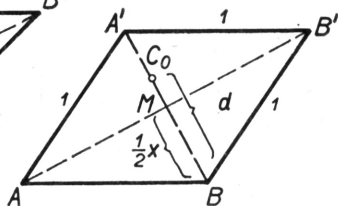
$$y^2 + 1 = 2d^2 + \frac{x^2}{2}. \quad (4)$$

Z $\triangle B'CC_0$, $\triangle A'CC_0$ dostaneme

$$x^2 - d^2 = 1 - \frac{x^2}{4},$$



Obr. 10a



Obr. 10b

odtud

$$d^2 = \frac{5x^2}{4} - 1. \quad (5)$$

Dosadíme-li z (5) do (4), vyjde

$$y^2 + 1 = \frac{5}{2}x^2 - 2 + \frac{1}{2}x^2,$$

tj.

$$y^2 = 3(x^2 - 1).$$

Délky hran jsou tedy $x, \sqrt{3(x^2 - 1)}, 1, x, 1, x$.

V případě III) dostaneme obdobně

$$3y^2 = 3x^2 - 1,$$

dále je $z = u = y, v = t = x$.

V případě II) dostaneme (viz obr. 10b) z $\triangle A'CC_0, \triangle BCC_0, \triangle ACC_0, \triangle A'M$:

$$1 - (x - d)^2 + \left(d - \frac{x}{2}\right)^2 + 1 - \frac{x^2}{4} = x^2,$$

tj. po úpravě

$$dx = 2x^2 - 2. \quad (6)$$

Dále je

$$z^2 = d^2 + 1 - (x - d)^2,$$

tj.

$$z^2 = 1 - x^2 + 2dx. \quad (7)$$

Dosadíme-li ze (6) do (7), vyjde

$$z^2 = 1 - x^2 + 4x^2 - 4,$$

tj.

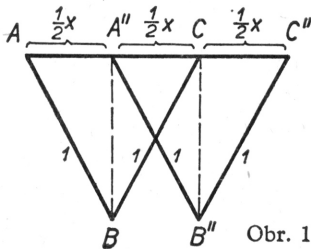
$$z^2 = 3(x^2 - 1).$$

Délky hran jsou tedy

$$x, 1, \sqrt{3(x^2 - 1)}, x, 1, x.$$

V případě IV) se vymění u, z .

b) Existence hranolu. Zvolíme $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ *). Pak je $\sqrt{3(x^2 - 1)} = 1$ a lze sestavit trojúhelník o stranách délek $1, 1, \frac{2}{\sqrt{3}}$. Sestrojíme rovnoramenný trojúhelník ABC o stranách $AB = BC = 1$, $AC = \frac{2}{\sqrt{3}}$ a doplníme jej na hranol $ABCA'B'C'$ tak, aby bylo $AA' = BB' = CC' = 1$, $A'C = 1$ a aby body A', C' ležely v rovině kolmé k ABC procházející přímkou AC . Situace v rovině ABC je na obr. 11; přitom A'', B'', C'' jsou pravouhlé průměty bodů A', B', C' do roviny ABC .



Obr. 11

*) Obecnější volba by byla x z intervalu $1 < x < 2$.

Body A'' , C'' padnou pak na přímku AC a je $AC = A''C'' = \frac{2}{\sqrt{3}}$; pak bod A'' je středem úsečky AC ($AA'' = A'C'' = 1$) a je tedy $AA'' = A''C'' = \frac{x}{2}$. Vypočteme $A'B$, $B'C$. Platí

$$A'A'' = A''B = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

a dále

$$A'B = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = x.$$

Dále je obdobně

$$B'C = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = x.$$

Na základě délek hran snadno ověříme shodnost každých dvou ze čtyřtětů $A'BAC$, $A'B'BC$, $A'B'C'C$.

2. KATEGORIE B

B-I-1

1. Najděte všechna přirozená čísla n , pro něž se ciferný součet čísla 2^n rovná číslu 5.

ŘEŠENÍ. Je-li n hledané číslo, pak 2^n může končit buď číslicí 2, nebo číslicí 4 (jinak by součet jeho cifer byl > 5).

Končí-li 2^n číslicí 2, pak má 2^n nejvýše ještě tři další nenulové číslice. Má-li jen jedinou, je to číslice 3 a 2^n má tedy tvar $3 \cdot 10^k + 2$. Nemůže být $k > 1$, neboť pak by bylo též $n > 1$. Číslo 2^n by bylo dělitelné čtyřmi, ale číslo $3 \cdot 10^k + 2$ nikoli. Je tedy $k = 1$ a $n = 5$ vyhovuje úloze. Má-li 2^n právě dvě další

nenulové číslice, jsou to 1 a 2. Číslo 2^n nemůže mít na místě desítek číslici 2; jinak bychom zase odvodili spor s dělitelností čtyřmi. Je nutně $n \geq 3$ a číslo 2^n může končit dvojčíslem buď 02 nebo 12; obě možnosti pak vedou ke sporu s dělitelností čtyřmi, popř. osmi. Má-li 2^n právě tři další nenulové číslice, jsou to 1, 1, 1. Číslo 2^n je tedy aspoň čtyřciferné, a proto je $n \geq 10$. Jeho poslední možná trojčíslí jsou 002, 012, 102, 112. Prvé tři možnosti opět vedou ke sporu s dělitelností osmi. Dále čísla 1 112, 10 112 nejsou celočíselné mocniny čísla 2, a proto naše číslo 2^n je ve tvaru $10^k + 112$, kde $k \geq 5$. Z toho však plyne spor s dělitelností číslem 32, neboť 32 nedělí 112.

Končí-li číslo 2^n číslicí 4, pak má právě jednu další nenulovou číslici, a to 1. Protože čísla 14 ani 104 nejsou celočíselnou mocninou čísla 2, stojí tato číslice 1 alespoň na místě tisícovek, což zase vede ke sporu s dělitelností osmi.

ZÁVĚR. Daná úloha má jediné řešení $n = 5$.

B-1-2

2. Určete všechny společné kořeny rovnic

$$2x^5 - 13x^4 + 24x^3 - x^2 - 28x + 12 = 0, \quad (1)$$

$$2x^4 - 9x^3 + x^2 + 36x - 36 = 0. \quad (2)$$

ŘEŠENÍ. Stupeň rovnice (1) při zachování jejich společných kořenů s rovnicí (2) lze snížit, odečteme-li od ní rovnici (2), jejíž pravou i levou stranu vynásobíme x . Dostaneme tak rovnici

$$-4x^4 + 23x^3 - 37x^2 + 8x + 12 = 0. \quad (1a)$$

Stupeň rovnice (1a) snížíme ještě dále přičtením rovnice (2) znásobené 2. Obdržíme rovnici

$$5x^3 - 35x^2 + 80x - 60 = 0. \quad (1b)$$

Rovnice (1b) a (2) mají zřejmě tytéž společné kořeny jako rov-

nice (1) a (2), pokud tyto společné kořeny existují. Dvojice rovnic (1b) a (2) je zcela obdobná dvojici rovnic (1) a (2), a proto budeme dále postupovat obdobně. Z rovnice (1b) vyplývá rovnice (násobením $\frac{2}{5}x$)

$$2x^4 - 14x^3 + 32x^2 - 24x = 0,$$

kterou odečteme od rovnice (2). Dostáváme tak rovnici

$$5x^3 - 31x^2 + 60x - 36 = 0, \quad (2a)$$

od níž odečteme rovnici (1b), abychom dále snížili její stupeň. Touto úpravou plyne rovnice

$$x^2 - 5x + 6 = 0. \quad (2b)$$

Rovnice (2b) má kořeny $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, které přicházejí v úvahu jako společné kořeny rovnic (1) a (2). Dosazením se přesvědčíme, že čísla 2 a 3 jsou skutečně společnými kořeny rovnic (1) a (2).

Levou stranu rovnice (2) můžeme rozložit

$$(x - 2)(x - 3)(2x^2 + x - 6) = 0.$$

Zbývající kořeny rovnice (2) jsou kořeny rovnic

$$2x^2 + x - 6 = 0,$$

tj. $x_3 = \frac{3}{2}$, $x_4 = -2$, které však rovnici (1) nevyhovují.

Rovnice (1) a (2) mají společné kořeny 2 a 3 a žádné jiné.

B-I-3

3. Určete délky stran pravoúhelníka $ABCD$ tak, aby to byla přirozená čísla a aby se obsah pravoúhelníka rovnal p -násobku

obvodu trojúhelníka ABC ; přitom p je vhodné prvočíslo. Proveďte diskusi počtu řešení vzhledem k číslu p .

ŘEŠENÍ. Označíme-li strany obdélníka $ABCD$ a, b , má pro tato čísla platit

$$a \cdot b = p(a + b + \sqrt{a^2 + b^2}).$$

To je ekvivalentní s podmínkami

$$a \cdot b - p(a + b) > 0 \quad (1)$$

$$a^2b^2 - 2abp(a + b) + p^2 \cdot 2ab = 0.$$

Má tedy platit (1) a

$$a \cdot b - 2p(a + b) + 2p^2 = 0. \quad (2)$$

Z (2) dosadíme do (1) za $a \cdot b$ a současně (2) upravíme. Dostaneme

$$a + b - 2p > 0, \quad (a - 2p)(b - 2p) = 2p^2. \quad (3)$$

Vzhledem k tomu, že je p prvočíslo a že nezáleží na pořadí stran a, b , je splněna poslední rovnice pouze v těchto případech (předpokládáme $a \leq b$):

1) $a - 2p = 1$	$b - 2p = 2p^2$	a tedy $a + b - 2p = 2p + 2p^2 + 1$
2) 2	p^2	$2p + p^2 + 2$
3) p	$2p$	$5p$
4) $-2p^2$	-1	$2p - 2p^2 - 1$
5) $-p^2$	-2	$2p - p^2 - 2$
6) $-2p$	$-p$	$-p$

Vzhledem k nerovnosti v (3) splňují úlohu jen dvojice

1) $a = 2p + 1$	$b = 2p + 2p^2$
2) $2p + 2$	$2p + p^2$
3) $3p$	$4p$

Kdyby se první dvě řešení sobě rovnala, muselo by být

$$2p + 1 = 2p + 2 \quad \text{a} \quad 2p + 2p^2 = 2p + p^2,$$

což nemůže nastat. Podobně se zjistí, že také dvojice 1) a 3) jsou různé pro každé prvočíslo p .

Řešení 2) a 3) jsou stejná právě tehdy, když je

$$2p + 2 = 3p \quad \text{a} \quad 2p + p^2 = 4p,$$

což nastane jen v případě $p = 2$.

Úloha má tedy pro $p = 2$ dvě různá řešení, jinak vždy tři různá řešení.

B-1-4

4. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ (kde $AB \parallel CD$); jsou dány délky jeho úhlopříček $AC = e$, $BD = f$ a velikost $\sphericalangle BAD = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$. Proveďte diskusi.

ŘEŠENÍ. ROZBOR. Jestliže $\alpha = \beta$, pak je lichoběžník $ABCD$ rovnoramenný a také $e = f$. Zřejmě i *obráceně*: Jestliže $e = f$, pak $\alpha = \beta$.

Předpokládejme, že $\alpha \neq \beta$ a $e \neq f$ a že $\alpha + \beta < \pi$ (obr. 12). Z podobnosti trojúhelníků $\triangle ASB \sim \triangle CSD$ plyne

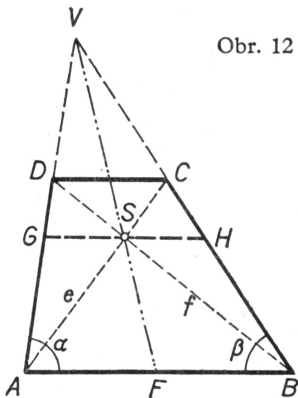
$$\frac{SC}{SA} = \frac{SD}{SB},$$

takže

$$\frac{SC + SA}{SA} = \frac{SD + SB}{SB}, \quad (1)$$

z čehož vyplývá

$$\frac{SA}{SB} = \frac{e}{f}.$$



Obr. 12

Protože je $e \neq f$, leží bod S na Apolloniově kružnici l , jejíž body mají od bodů A a B stálý poměr vzdáleností rovný číslu $\frac{e}{f}$.

Vedeme-li průsečíkem S úhlopříček příčku $GH \parallel AB$, je

$$\frac{DC}{GS} = \frac{AC}{AS} = \frac{BD}{BC} = \frac{DC}{SH}$$

a odtud plyne

$$GS = SH.$$

Bod S tedy leží na těžnici VF trojúhelníka ABV , kde V je průsečík přímek AD a BC a F je střed strany AB .

KONSTRUKCE. I. Necht' $\alpha + \beta < \pi$. Rozlišme dva případy:

a) Je-li $\alpha = \beta$ a také $e = f$, pak $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Zvolíme úsečku

$BD = f$ a sestrojíme kružnici k procházející body BD takovou, že z každého bodu jejího menšího oblouku BD je vidět úsečku BD pod úhlem $\pi - \alpha$. Na tomto oblouku zvolíme bod C . Bodem B pak vedeme rovnoběžku s CD a její průsečík s k označíme A .

Čtýřúhelník $ABCD$ je potom hledaný lichoběžník.

b) Je-li $\alpha \neq \beta$ a tedy také $e \neq f$, pak použijeme následujícího postupu (obr. 13, kde $e = 6$, $f = 9$, $\alpha = 105^\circ$, $\beta = 45^\circ$):

1. Zvolíme úsečku AB' . V jedné z polovin určených přímkou AB' sestrojíme $\triangle AB'V'$ takový, že $\sphericalangle B'AV' = \alpha$ a

$$\sphericalangle AB'V' = \beta.$$

2. Sestrojíme těžnici $V'F'$, kde F' je střed strany AB' .

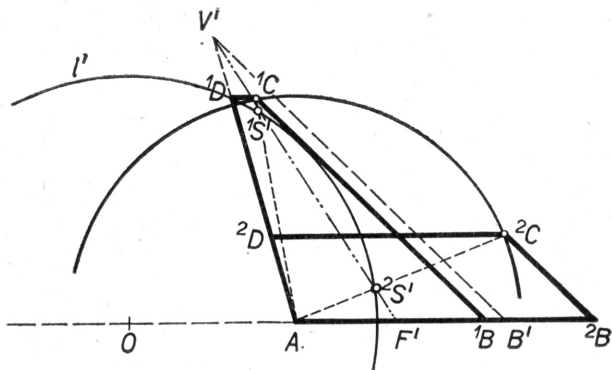
3. Sestrojíme Apolloniovu kružnici l' , jakožto geom. místo bodů majících od bodů A a B' poměr vzdáleností $\frac{e}{f}$.

4. Určíme průsečíky $^tS'$ kružnice l' s těžnicí $V'F'$.

5. Na polopřímce A^tS' sestrojíme bod tC takový, že $A^tC = e$.

6. Bodem tC vedeme rovnoběžku s AB' a její průsečík s AV' označíme tD .

7. Bodem iC vedeme rovnoběžku s $V'B'$ a její průsečík s AB' označíme iB .
8. Čtyřúhelník $A^iB^iC^iD$ je hledaný lichoběžník.



Obr. 13

II. Necht $\alpha + \beta > \pi$ ($\alpha < \pi, \beta < \pi$). Označme $A^* = D$, $B^* = C$, $C^* = B$, $D^* = A$. Pak na konstrukci lichoběžníka $A^*B^*C^*D^*$ lze použít buď postupu a), nebo b) z případu I., neboť $\alpha^* + \beta^* < \pi$ ($\alpha^* = \pi - \alpha$, $\beta^* = \pi - \beta$).

III. Je-li $\alpha + \beta = \pi$, pak hledaný čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník. Ke konstrukci tohoto rovnoběžníka je třeba umět sestrojit $\triangle ABD$. Jde však o známou úlohu — dána je strana

$BD = f$, $\sphericalangle BAD = \alpha$ a těžnice na stranu DB je $AS = \frac{e}{2}$.

V případě $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ bude řešením pravoúhelník.

ZKOUŠKA. Zabývat se budeme jen případem I.

a) Body A a C leží vždy v opačných polorovinách určených přímkou BD , a proto $ABCD$ je čtyřúhelník. Z konstrukce dále plyne, že čtyřúhelník $ABCD$ je osově souměrný podle osy

úsečky DC , a proto je rovnoramenný a $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = \alpha$ a $DB = AC = e$.

b) Podle 5. bodu je bod iC vnitřním bodem $\sphericalangle {}^iDA{}^iB$, podle 6. bodu je $A{}^iB // {}^iD{}^iC$, takže $A{}^iB{}^iC{}^iD$ je lichoběžník. Podle bodů 1., 7. je $\sphericalangle {}^iBA{}^iD = \alpha$, $\sphericalangle A{}^iB{}^iC = \beta$. Z 5. bodu vyplývá, že $A{}^iC = e$. Dále ${}^iB{}^iD = f$, což plyne z toho, že podle konstrukce je $\triangle AB{}^iS' \sim \triangle A{}^iB{}^iS$, kde iS je průsečík úhlopříček lichoběžníka $A{}^iB{}^iC{}^iD$; totiž $A{}^iS : {}^iB{}^iS = A{}^iS' : B{}^iS' = e : f$ a podle (1) z rozboru je $A{}^iS : {}^iB{}^iS = e : {}^iB{}^iD$.

DISKUSE. Samozřejmě $\alpha < \pi$ a $\beta < \pi$, neboť v textu úlohy se užívá symbolu $\sphericalangle$.

I. a) Je-li $\alpha = \beta$ a $e = f$, má úloha nekonečně mnoho řešení. Za bod C lze totiž zvolit libovolný vnitřní bod menšího oblouku $\widehat{DB}$ kružnice k .

b) Je-li $\alpha \neq \beta$ a také $e \neq f$, je počet řešení úlohy roven počtu společných bodů vnitřku úsečky $V'F'$ a Apolloniovy kružnice ze 3. bodu. Počet řešení je tedy 0,1 nebo 2.

V případech II a III je tomu obdobně jako v případě I. (V případě III je ovšem třeba považovat rovnoběžník za zvláštní případ lichoběžníka.)

ZÁVĚR DISKUSE:

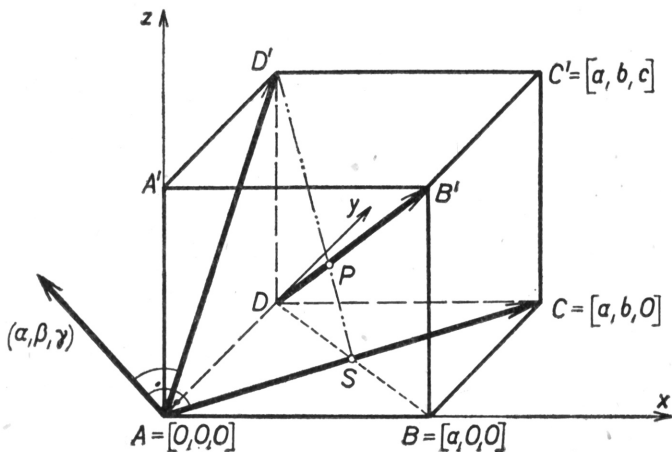
1. Je-li $\alpha = \beta$ a $e = f$, pak má úloha nekonečně mnoho řešení.
2. Je-li $\alpha \neq \beta$ a $e \neq f$, pak má úloha 0,1 nebo 2 řešení.
3. Je-li $\alpha \neq \beta$ a $e = f$ nebo $\alpha = \beta$ a $e \neq f$, pak úloha nemá řešení.

B-I-5

5. Dĺžky strán kvádra $ABCD A'B'C'D'$ označme $a = AB = A'B' = CD = C'D'$, $b = BC = B'C' = DA = D'A'$, $c = AA' = BB' = CC' = DD'$. Vypočítajte odchýlku priamky $B'D$ od roviny ACD' pomocou jej sínusu.

RIEŠENIE. Zavedme kartézsku súradnicovú sústavu tak ako na obr. 14. Priamka DB' je rovnobežná s vektorom

$$\vec{DB'} = B' - D = (a, -b, c). \quad (1)$$



Obr. 14

Ďalej určíme vektor kolmý k rovine ACD' . Nech (α, β, γ) je taký vektor. Potom musí platiť

$$(\alpha, \beta, \gamma) \cdot (C - A) = 0 \text{ a } (\alpha, \beta, \gamma) \cdot (D' - A) = 0$$

čiže

$$(\alpha, \beta, \gamma) \cdot (a, b, 0) = \alpha a + \beta b = 0, \quad (2)$$

$$(\alpha, \beta, \gamma) \cdot (0, b, c) = \beta b + \gamma c = 0. \quad (3)$$

Rovnosti (2) a (3) možno splniť napr. vtedy, keď položíme

$$\alpha = \frac{1}{a}, \quad \beta = -\frac{1}{b}, \quad \gamma = \frac{1}{c},$$

t. j. hľadaný vektor kolmý k rovine ACD' je napr.

$$\left(\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right). \quad (4)$$

Ak je ω odchýlka priamky DB' a kolmica k rovine ACD' , potom podľa definície skalárneho súčinu je vzhľadom na (1) a (4)

$$\cos \omega = \frac{\left| (a, -b, c) \cdot \left(\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right) \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}},$$

t. j.

$$\cos \omega = \frac{3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}.$$

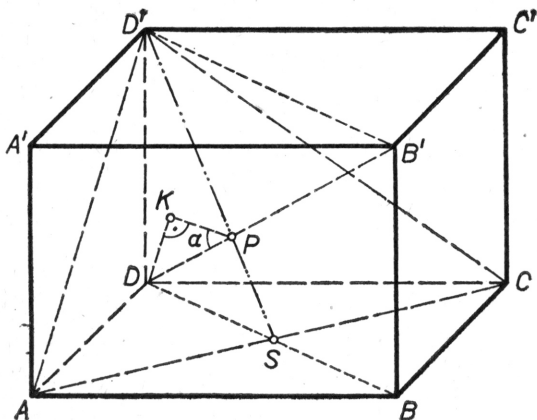
Pre odchýlku φ priamky DB' od roviny ACD' potom platí

$$\sin \varphi = \sin(90^\circ - \omega) = \cos \omega = 3(a^2 + b^2 + c^2)^{-1/2} \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

POZNÁMKY. 1. Pri hľadaní vektora kolmého k rovine ACD' možno použiť tiež vektorový súčin vektorov.

2. Základné poznatky o počítaní s vektormi a ich použitie pri riešení geometrických úloh čitateľ nájde v zv. 28 *Školy mladých matematikov* (Budinský, Šmakal: *Vektory v geometrii*).

INÉ RIEŠENIE. Nech α je hľadaná odchýlka, S stred $ABCD$, P priesečník priamky $B'D$ s rovinou ACD' , K kolmý priemet bodu D do roviny ACD' . Potom P je priesečníkom priamok $B'D$ a SD' , čo sa ľahko zistí, ak pretneme rovinu ACD' rovinou DBB' , ktorá obidve spomínané priamky obsahuje (obr. 15).



Obr. 15

Z podobnosti trojuholníkov PDS , $PB'D'$ vyplýva

$$PD : PB' = DS : B'D' = 1 : 2, \text{ čiže } PB' = 2 DP.$$

To však znamená, že platí

$$DP = \frac{1}{3} DB' = \frac{1}{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (1)$$

Ak $K \neq P$, je podľa definície bodu $K \star DKP = 90^\circ$ a preto

$$\sin \alpha = DK : DP. \quad (2)$$

Keď $K = P$, je $\alpha = 90^\circ$, $\sin \alpha = 1 = DK : DP$ a teda aj v tomto prípade platí vzťah (2). Stačí nám preto vypočítať dĺžku úsečky DK , ktorá je výškou ihlana $ACD'D$. Pre objem V tohto ihlana platí

$$V = \frac{1}{6} abc = \frac{1}{3} P_{ACD'} \cdot DK,$$

z čoho

$$DK = \frac{abc}{2 P_{ACD'}}, \quad (3)$$

kde $P_{ACD'}$ znamená plošný obsah trojuholníka ACD' .

Vypočítame $P = P_{ACD'} = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$, kde $s = \frac{1}{2}(x+y+z)$, $x = \sqrt{b^2 + c^2}$, $y = \sqrt{a^2 + c^2}$, $z = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Zrejme platí:

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{1}{16} [(x+y)+z] \cdot [(x+y)-z] \cdot [z+(x-y)] \cdot \\ &\cdot [z-(x-y)] = \frac{1}{16} [(x+y)^2 - z^2] \cdot [z^2 - (x-y)^2] = \\ &= \frac{1}{16} [2xy + (x^2 + y^2 - z^2)] \cdot [2xy - (x^2 + y^2 - z^2)] = \\ &= \frac{1}{16} (2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 - x^4 - y^4 - z^4). \end{aligned}$$

Po dosadení za x , y , z a úprave dostaneme

$$P = \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}. \quad (4)$$

Zo vzťahov (2), (3), (4), (1) vyplýva

$$\sin \alpha = \frac{3abc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

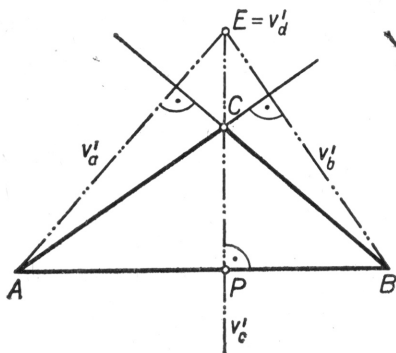
B-I-6

6. a) Ak všetky štyri výšky štvorstena prechádzajú tým istým bodom, potom aspoň jeden z jeho vrcholov má tú vlastnosť, že päta výšky z neho spustenej leží vo vnútri protilahlej steny. Dokážte.

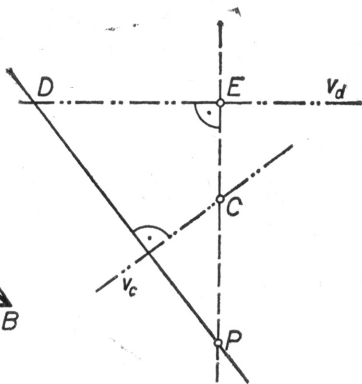
b) Zostrojte sieť takého štvorstena, ktorého každá výška má päťu mimo príslušnej steny.

RIEŠENIE. a) Nech ABC je stena, ktorej vnútro neobsahuje päťu E výšky spustenej z vrcholu D . Výška v_a (priamka) spustená z vrcholu A na rovinu BCD je kolmá na priamku BC . Preto priamkou v_a možno viesť rovinu α kolmú k BC . Rovina α pretne rovinu ABC v priamke $v'_a \perp BC$ a prechádzajúcej vrcholom A , t. j. vo výške trojuholníka ABC . Analogicky zostrojíme výšky v'_b, v'_c trojuholníka ABC ako pravouhlé priemety výšok v_b, v_c štvorstena $ABCD$.

Výšky v'_a, v'_b, v'_c sa pretínajú v bode, ktorý je podľa dokazovanej vety päťou E výšky v_d . Pretože bod E nepatrí do vnútra $\triangle ABC$, je $\triangle ABC$ tupouhlý alebo pravouhlý. Nech je napr. $\angle ACB$ tupý (obr. 16). Situácia v rovine $\varrho \perp AB$ a obsahujúcej výšku $v_d = DE$ na obr. 17. Pritom P označuje priesečník ϱ, AB . Pretože bod P leží medzi bodmi A, B , patrí vnútro úsečky DP do vnútra trojuholníka ABD . Pretože bod C patrí do vnútra odvesny PE trojuholníka DEP , leží päťa výšky v_c , t. j. kolmice



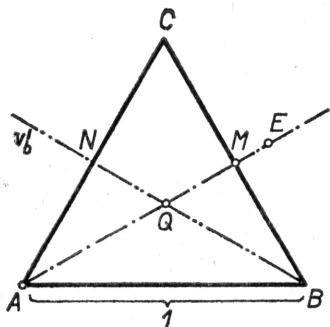
Obr. 16



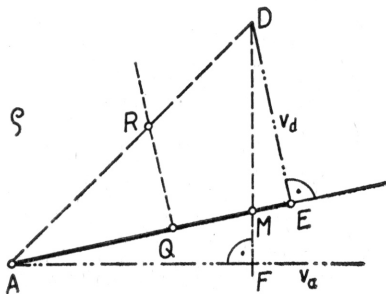
Obr. 17

spustenej z bodu C na preponu DP vo vnútri úsečky DP , t. j. vo vnútri trojuholníka ABD .

b) Zvoľme za $\triangle ABC$ rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky 1. Bod E (päťu výšky v_a) zvoľme na osi uhla $\sphericalangle BAC$ tak, aby bolo $AE = 1$. Kladnú dĺžku výšky v_a označme $DE = v$ (obr. 18). Označme ešte M stred strany BC . Situácia v rovine $\varrho \perp BC$ a prechádzajúcej bodom D je znázornená na obr. 19.

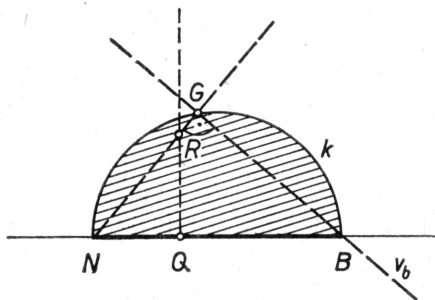


Obr. 18



Obr. 19

Pretože bod M leží medzi A a E a pretože $\sphericalangle AED$ je pravý, je $\sphericalangle AMD$ tupý a päťa F výšky v_a , t. j. kolmice spustenej z bodu A na priamku DM , leží mimo úsečky DM , t. j. mimo $\triangle BCD$.



Obr. 20

Zostáva ešte dokázať, že päťa G výšky v_b leží mimo $\triangle ACD$ a v dôsledku symetrie štvorstena $ABCD$ podľa roviny ϱ , že i päťa výšky v_c leží mimo $\triangle ABD$. Pravoúhlý priemet výšky v_b

do roviny ABC je výška v_b' trojúhelníka ABC procházející středem N strany AC . Situace v rovině $\sigma \perp AC$ a procházející vrcholem B je znázorněna na obr. 18, 19 a 20. Pritom Q je průsečík výšek AM , BN . Označme R bod roviny ACD , který leží na kolmici vztýčené v bodě Q na rovinu ABC . Bod G leží na polkružnici k zestrojené nad průměrem BN . Ak zvolíme bod R vo vnútri vyšrafovaného polkruhu (čo znamená voľbu výšky v), leží bod G mimo úsečky NR , t. j. mimo $\triangle ACD$.

Tým je žiadaný štvorsten zestrojený.

3. KATEGORIE C

C-I-1

1. Je dán čtverec, jehož strana má velikost a . Přímký, spojující středy stran s vrcholy protějších stran, dělí čtverec na 25 obrazců, mezi nimiž je celkem 5 navzájem neshodných druhů. Vypočítejte obsah každého z těchto pěti navzájem neshodných obrazců.

KOMENTÁŘ A ŘEŠENÍ. Úloha je příkladem, který vyžaduje jistou dávku představivosti a kombinačního smyslu. V podstatě jde při řešení úloh tohoto typu o uplatnění některé z následujících složek nebo o jejich kombinaci:

- určení velikosti určitých úseček a úhlů metodami ryze geometrickými nebo trigonometricky nebo pomocí souřadnic;
- použití vztahů mezi obsahy obrazců, z nichž jsou sestaveny hledané obrazce.

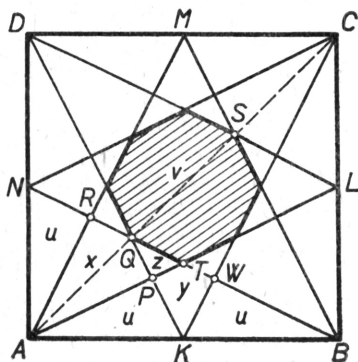
Při postupu b) často užíváme věty (V): Jsou-li p_1 , p_2 obsahy dvou překrývajících se obrazců, q obsah jejich průniku, s obsah jejich sjednocení, pak platí

$$p_1 + p_2 = s + q.$$

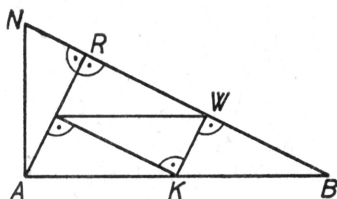
V naší úloze budete postupovat asi polointuitivně; pravděpodobně nedokážete exaktně shodnost určitých obrazců — rozumný důkaz se opírá o užití shodných zobrazení (otočení) a ta vám nejsou asi v potřebné míře běžná. Ovšem těžiště úlohy je jinde; přesto bychom měli provést aspoň náznak důkazu shodnosti. Výsledek zkoumání je tento:

Čtverec $ABCD$ je rozdělen v 25 nepřekrývajících se obrazců, a to (viz obr. 21):

- (1) v 4 shodné čtyřúhelníky, z nichž jeden je $APQR$; jeho obsah je označen x ;
- (2) v 4 shodné čtyřúhelníky, z nichž jeden je $KWTP$; jeho obsah je označen y ;
- (3) v 8 shodných trojúhelníků, z nichž jeden je PTQ ; jeho obsah je označen z ;
- (4) v 8 shodných trojúhelníků, z nichž jeden je ARN ; jeho obsah je označen u ;
- (5) v jeden osmiúhelník (na obr. 21 vyšrafovaný), jehož obsah je označen v .



Obr. 21



Obr. 22

Prvním krokem může být např. určení obsahu u . Obr. 22 ukazuje, jak lze trojúhelník ABN rozdělit v 5 navzájem shodných trojúhelníků, z nichž jeden je ARN ; je proto

$$u = \frac{1}{5} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{20}. \quad (1)$$

Dále je např. možno rozdělit trojúhelník ABN ve dva trojúhelníky ABT , ANT , které mají obsahy sobě rovné (je totiž $BT = NT$, neboť úsečky AL , BN se navzájem půlí). Je tedy

$$2u + y = \frac{a^2}{8}, \quad (2)$$

$$x + z + u = \frac{a^2}{8}. \quad (3)$$

Z (2) a (1) se vypočte y ; vyjde

$$y = \frac{a^2}{40}. \quad (4)$$

Pro x , z máme pak jen jednu rovnici; potřebujeme ještě rovnici další. Můžeme ji získat třeba dvojím vyjádřením obsahu čtyřúhelníka $AKQN$, jehož úhlopříčky jsou navzájem kolmé; přitom je $KN = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, $AQ = \frac{a\sqrt{2}}{3}$, neboť body Q , S dělí úhlopříčku AC čtverce $ABCD$ na tři shodné úsečky, jak plyne z trojúhelníků CDQ a ABS .

$$\text{Je tedy } AKQN = x + 2u = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{3} = \frac{a^2}{6},$$

tj.

$$x + 2u = \frac{a^2}{6}. \quad (5)$$

Z (5) a (1) vypočteme

$$x = \frac{a^2}{15} \quad (6)$$

a konečně z (3)

$$z = \frac{a^2}{120}. \quad (7)$$

Zbývá obsah v ; z rozdělení čtverce $ABCD$ dostaneme

$$4x + 4y + 8z + 8u + v = a^2$$

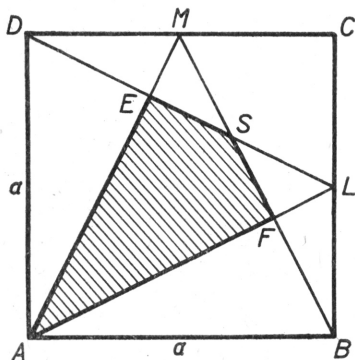
a odtud

$$v = \frac{a^2}{6}. \quad (8)$$

Vzorce (1), (4), (6), (7), (8) dávají řešení úlohy.

Jinak je možno zvolit polopřímky $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ za kladné poloosy souřadnic a vypočítat souřadnice některých bodů, např. P , Q , R , T , pomocí nichž pak určíme hledané obsahy. Zpravidla přitom potřebujeme vzorec pro vzdálenost dvou bodů; je to jednoduchá aplikace Pythagorovy věty.

Řešení je dost trikové, jistý systém se do něho vnese použitím metody souřadnic. Rozhodně byste se měli při řešení úlohy C-I-1 seznámit s větou (V) a jejím použitím. Zde je třeba zdůraznit, že zpravidla známe čísla p_1, p_2 . V tomto případě vypočteme to číslo z čísel q, s , pro něž je výpočet jednodušší, a zbývající z čísel q, s určíme podle věty (V).



Obr. 23

Ukázka související se situací úlohy C-I-1. Je dán čtverec $ABCD$ (obr. 23) a máme určit obsah sjednocení a průniku trojúhelníků ABM , ADL . Zde je $p_1 = p_2 = \frac{a^2}{2}$. Bude asi pohodlnější určit obsah q průniku vyšrafovaného čtyřúhelníka $AFSE$ než obsah s sjednocení $\triangle ABM \cup \triangle ADL$.

Zvolíme-li polopřímky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ za poloosy, určíme-li rovnice přímk AL , AM , DL , BM , vyjde $S = \left[\frac{2}{3}a; \frac{2}{3}a \right]$, $E = \left[\frac{2}{5}a; \frac{4}{5}a \right]$, $F = \left[\frac{4}{5}a; \frac{2}{5}a \right]$ (všimněme si symetrie podle přímk AC a jejích důsledků!). Podle vzorce pro vzdálenost dvou bodů vypočteme

$$AS = \frac{2}{3}a\sqrt{2}, \quad EF = \frac{2}{5}a\sqrt{2},$$

a tedy

$$AESF = \frac{1}{2} AS \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}a\sqrt{2} \cdot \frac{2}{5}a\sqrt{2} = \frac{4}{15}a^2.$$

V každém případě vyžaduje tato úloha dosti času.

C-I-2

2. Dokážte, že každé prirodzené číslo $n > 10$ sa dá rozložit aspoň dvomi spôsobmi na súčet dvoch prirodzených čísel tak, že prvý sčítanec je prvočíslo a druhý sčítanec je číslo zložené.

KOMENTÁŘ A ŘEŠENÍ. Jde o jednoduchou úlohu z číselné teorie. Snad by bylo vhodné uvést ji některou obměnou, která by vám napověděla zejména to, že se doporučuje rozlišit lichá a sudá n .

Varianta: Dokážte, že každé přirozené číslo $n > 10$ lze vy-

jádrít aspoň jedním způsobem jako součet tří přirozených čísel, z nichž dvě jsou prvočísla a třetí je číslo složené.

Pokusíme se zachovat prvočísla konstantní (pak ovšem musí být malá).

a) Je-li n liché, zvolíme prvočísla 2, 3; protože je $n > 10$, je $n - 2 - 3 = n - 5 > 5$. Mimoto je $n - 5$ číslo sudé, a tudíž složené.

b) Je-li n sudé, zvolíme prvočísla 3, 5; protože je $n > 10$, je $n - 3 - 5 = n - 8 > 2$. Mimoto je $n - 8$ číslo sudé, a tudíž složené.

Při řešení soutěžní úlohy je ovšem třeba hledat dva rozklady čísla n ; pro n liché je snadno dostaneme pomocí čísel $n - 3$, $n - 5$, $n - 7$. Pro n sudé dostaneme jeden rozklad pomocí čísel $n - 2$; druhý najdeme z faktu, že právě jedno z čísel $n - 3$, $n - 5$, $n - 7$ je násobek tří; nápad dokázat tuto pomocnou větu je jedním z klíčů k řešení úlohy.

C-I-3

3. Stejně velké utěrky čtvercového tvaru pokrývají obdélník $ABCD$, aniž se navzájem překrývají. Pověsí-li se jedna těsně vedle druhé na šňůru, je potřebná délka šňůry rovna obvodu trojúhelníka ABC . Kolik je utěrek?

KOMENTÁŘ A ŘEŠENÍ. Tato úloha náleží svou tematikou do číselné teorie, i když má náter geometrický, popř. je to slovní úloha, kterou lze formulovat geometricky.

Snad nejvhodnějším uvedením do úlohy C-I-3 by byla její trochu složitější *varianta*:

Délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníka jsou přirozená čísla a , b ; jeho obsah je roven jeho obvodu. Určete délky jeho stran.

Z textu úlohy plyne

$$\frac{1}{2}ab = a + b + \sqrt{a^2 + b^2};$$

odtud

$$\frac{a^2b^2}{4} - a^2b - ab^2 + 2ab + a^2 + b^2 = a^2 + b^2$$

a nadále

$$ab(ab - 4a - 4b + 8) = 0.$$

Protože je $a \neq 0$, $b \neq 0$, je $ab - 4a - 4b + 8 = 0$, tj.

$$(a - 4)(b - 4) = 8. \quad (1)$$

Upozorňujeme na způsob, jak se upravuje bilineární funkce $ab - 4a - 4b + 8$ na součin dvou lineárních dvojčlenů doplněný absolutním členem.

Protože a, b jsou čísla přirozená, jsou $a - 4, b - 4$ sdružení dělitelé čísla 8 (ne nutně kladní). Přehled o všech možných řešeních dává tabulka:

$a-4$	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8
$b-4$	-1	-2	-4	-8	8	4	2	1
a	-4	0	2	3	5	6	8	12
b	3	2	0	-4	12	8	6	5

Úloha má tedy dvě řešení: 6; 8; 10 a 5; 12; 13.

V soutěžní úloze č. 3, která je jednodušší, zní základní rovnice $ab = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$. Její řešení je $a = 3, b = 4$ nebo $a = 4, b = 3$; počet utěrek je tedy vždy $ab = 12$.

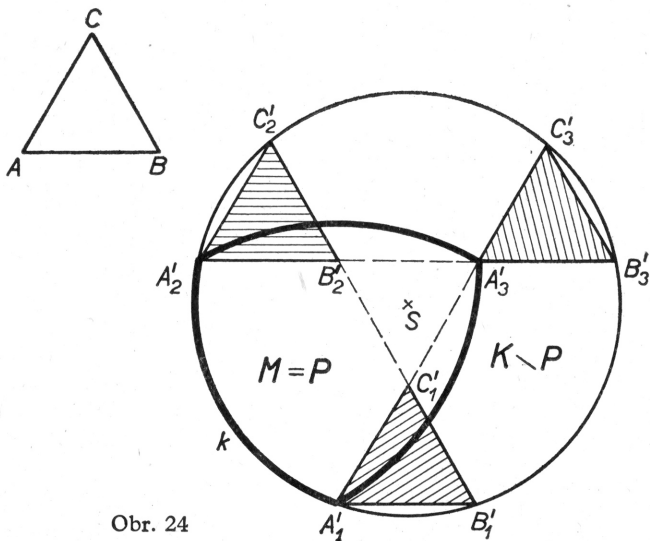
C-I-4

4. Je daný kruh K so stredom S a polomerom r ; mimo kruhu K je daný rovnostranný trojuholník ABC , ktorého strany majú dĺžku a . Označme $A'B'C'$ trojuholník, ležiaci v kruhu K ,

ktorý vznikol posunutím trojuholníka ABC . Určte a narysujte množinu M všetkých takto zostrojených bodov A' .

KOMENTÁŘ. Řešení úlohy vyžaduje nezbytně experimentování. Doporučujeme narysovat kruh K o poloměru $r = 6$ cm a z tuhého papíru vystříhnout rovnostranné trojúhelníky $A'B'C'$ o straně 4 cm a $A''B''C''$ o straně 9 cm; trojúhelník $A''B''C''$ bude sloužit k opakování pokusu.

Posouváním trojúhelníka $A'B'C'$ vyexperimentujeme „extrémní“ polohy $A_1'B_1'C_1'$, $A_2'B_2'C_2'$, $A_3'B_3'C_3'$ takové, že body A_1' , B_1' , B_3' , C_3' , C_2' , A_2' leží na obvodu kruhu K , body C_1' , A_3' , B_2' v jeho vnitřku a že úsečky $A_1'B_1'$, $B_3'C_3'$ a $C_2'A_2'$ vzniknou postupně posunutím stran AB , BC , CA . Intuitivně zjistíme, že proměnný bod A' vyplní trojúhelníkový obrazec P , omezený shodnými kruhovými oblouky $\widehat{A_1'A_2'}$, $\widehat{A_2'A_3'}$, $\widehat{A_3'A_1'}$



Obr. 24

(obr. 24). Přitom oblouk $\widehat{A_1'A_2'}$ náleží obvodu kruhu $\mathbf{K}$, oblouk $\widehat{A_2'A_3'}$ vznikne posunutím oblouku $\widehat{C_2'C_3'}$, které je dáno dvojicí $C_2' \rightarrow A_2'$, oblouk $\widehat{A_3'A_1'}$ vznikne posunutím oblouku $\widehat{B_3'B_1'}$, které je dáno dvojicí $B_3' \rightarrow A_3'$.

Snadno se i dokáže, že každý bod oblasti $\mathbf{P}$, omezené tlustě narysovanými kruhovými oblouky, je vrcholem A' některého z trojúhelníků $A'B'C'$ a že žádný bod z $\mathbf{K} \setminus \mathbf{P}$ není vrcholem A' takového trojúhelníka. Je tedy $\mathbf{P} = \mathbf{M}$.

C-I-5

5. V rovině jsou dány body A, M, N , které neleží v přímce. Sestrojte pravoúhelník $ABCD$ tak, aby přímky BC, CD procházely po řadě body M, N a aby platilo $AB : BC = 2 : 5$.

KOMENTÁŘ. Jeden z principů řešení této úlohy (a snad nejjednodušší) je použití obvodových úhlů. Úlohu lze uvést obdobnou úlohou (U): Jsou dány tři body A, P, Q , které leží v přímce, a to tak, že A odděluje body P, Q . Máme sestrojit čtverec $ABCD$ tak, aby přímky BC, CD procházely po řadě body P, Q .

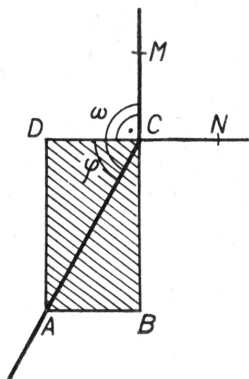
Princip řešení: Je zřejmé, že bod C náleží třem množinám bodů: kružnici $\mathbf{M}_1$ sestrojené nad průměrem PQ , množině $\mathbf{M}_2$ složené ze dvou oblouků kružnic, definované takto:

$$\mathbf{M}_2 = \{X; X \neq A, P \wedge \sphericalangle AXP = 45^\circ\},$$

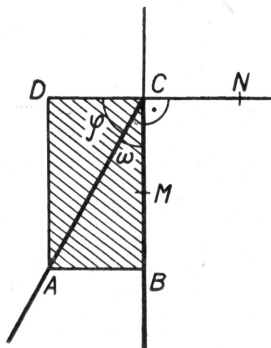
a množině $\mathbf{M}_3$ vytvořené obdobně nad úsečkou AQ .

Při řešení soutěžní úlohy C-I-5 hledáme opět dvě množiny bodů, jimž náleží vrchol C . Jedna z nich je kružnice k sestrojená nad průměrem MN . Druhá je množina $\mathbf{M}$ bodů X , z nichž je vidět úsečku AM pod daným úhlem ω . Je-li $\varphi = \sphericalangle ACD$, je buď $\omega = 90^\circ + \varphi$, nebo $\omega = 90^\circ - \varphi$. Množina $\mathbf{M}$ se tedy bude skládat ze dvou shodných kružnic k_1, k_2 (bez bodů A, M)

se společnou tětivou AM ; každá z kružnic k_1, k_2 má mimo bod M s kružnicí k ještě jeden další společný bod. Diskusi úlohy nebudou asi řešitelé provádět exaktně, spokojíme se s náznakem. Musí si ovšem uvědomit obě možnosti $\omega = 90^\circ + \varphi$, $\omega = 90^\circ - \varphi$; jsou načrtnuty na obr. 25 ab.



Obr. 25a



Obr. 25b

Jde ještě o určení úhlu φ . Ten zjistíme, narýsujeme kdekoli pravoúhlý trojúhelník KLP s přeponou KP , pro který platí $KL : LP = AB : BC$.

Impulsy, které vedou k řešení úlohy C-I-5, budou asi tyto:

- a) pomocná úloha (U);
- b) vyšetření situací: bod M náleží polopřímce $\overrightarrow{CB}$ nebo polopřímce opačné;
- c) určení úhlu φ .

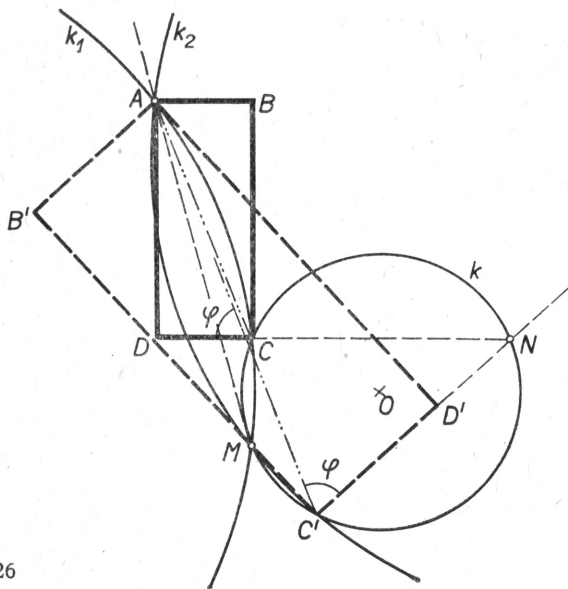
Nezapomeňme na kontrolu: jako v úloze (U) máme i zde třetí množinu bodů pro vrchol C ; jsou to dvě kružnice se společnou tětivou AN .

Uvedeme nyní ještě podrobné ŘEŠENÍ ÚLOHY č. 5:

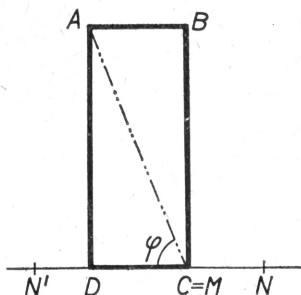
ROZBOR. Předpokládejme, že úloha je vyřešena a že $C \neq M$, $C \neq N$ (obr. 26). V komentáři k úloze je uvedeno, že vrchol C pak náleží dvěma množinám bodů. Jedna z nich je kružnice k (bez bodů M, N) sestrojená nad průměrem MN . Druhá je množina $\mathbf{M}$ bodů X , z nichž je vidět úsečku AM pod úhlem $\omega = 90^\circ - \varphi$ nebo $\omega = 90^\circ + \varphi$, kde $\varphi = \sphericalangle ACD$. Množina $\mathbf{M}$ se skládá ze dvou shodných kružnic k_1, k_2 (bez bodů A, M) se společnou tětivou AM .

Je-li $C = M$, pak podle obr. 27 je $\sphericalangle AMN$ buď φ , nebo $180^\circ - \varphi$.

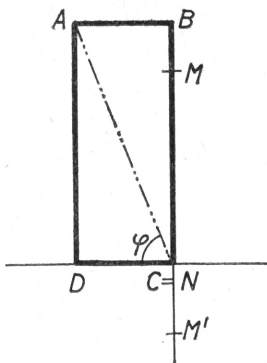
Je-li $C = N$, pak podle obr. 28 je $\sphericalangle ANM$ buď $90^\circ - \varphi$, nebo $90^\circ + \varphi$.



Obr. 26



Obr. 27



Obr. 28

KONSTRUKCE. Úhel φ se sestrojí v pomocném pravoúhlém trojúhelníku, neboť z textu úlohy víme, že $\cotg \varphi = \frac{2}{5}$.

1. Vrchol C určíme jako bod průniku $(k \setminus \{M, N\}) \cap \mathbf{M}$. Na přímce CN pak sestrojíme bod D tak, aby bylo $AD \parallel MC$; na přímce CM určíme bod B tak, aby bylo $AB \parallel CN$. Čtyřúhelník $ABCD$ je hledaný pravoúhelník.

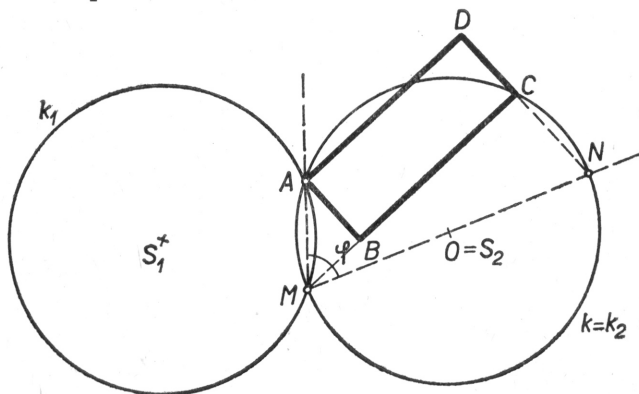
2. Pokud $\angle AMN$ je φ nebo $180^\circ - \varphi$ a nebo $\angle ANM$ je $90^\circ - \varphi$ nebo $90^\circ + \varphi$, dostaneme další řešení podle obr. 27 a obr. 28.

ZKOUŠKA. Ad bod 1. konstrukce. Čtyřúhelník $ABCD$ je pravoúhelník, neboť byl sestrojen jako rovnoběžník a $\angle DCB = \angle MCN = 90^\circ$, neboť $C \in k$, $C \neq M$, $C \neq N$. Podle konstrukce též přímky BC , CD procházejí po řadě body M , N . Pro $\angle ACM$ jsou dvě možnosti:

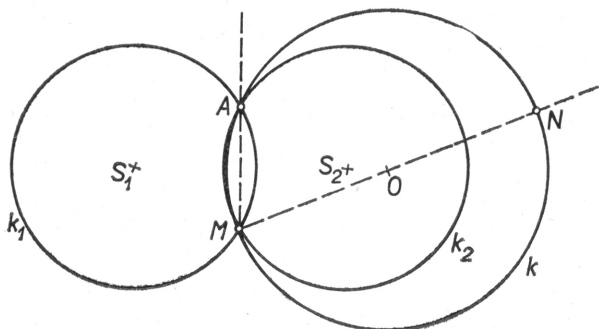
a) Je-li $\angle ACM = 90^\circ + \varphi$, pak $\angle ACM > 90^\circ$, a proto M leží na polopřímce opačné k polopřímce CB , takže $\angle ACD = \varphi$, tj. $AB : BC = 2 : 5$.

b) Je-li $\angle ACM = 90^\circ - \varphi$, pak $\angle ACM < 90^\circ$, tj. bod M leží na polopřímce CB , takže $\angle ACD = \varphi$, tj. $AB : BC = 2 : 5$.

K bodu 2. konstrukce. Z obr. 27 a 28 je vidět, že v těchto případech mají sestrojené pravouhelníky $ABCD$ všechny vlastnosti požadované úlohou.



Obr. 29



Obr. 30

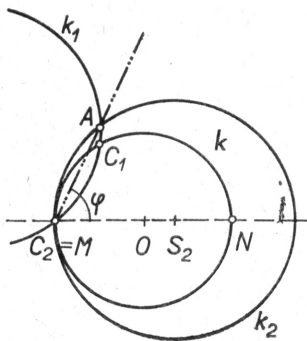
DISKUSE.

I. Leží-li bod A na k , pak jsou dvě možnosti:

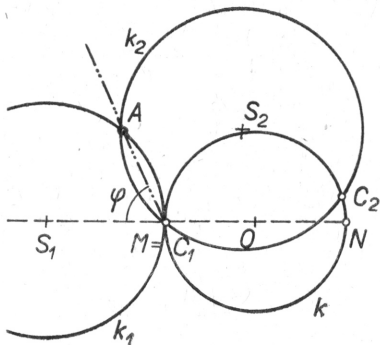
- $\angle AMN = \varphi$ (tj. $\angle ANM = 90^\circ - \varphi$), pak jedna z kružnic k_1, k_2 splyne s k (viz obr. 29). Pak má úloha *neko-
nečně mnoho řešení*. Za vrchol C lze zvolit každý bod
kružnice k různý od bodu A .
- $\angle AMN \neq \varphi$ (tj. $\angle ANM \neq 90^\circ - \varphi$ a také $\angle AMN \neq
180^\circ - \varphi$, $\angle ANM \neq 90^\circ + \varphi$), pak úloha *ne-
má řešení*, protože kružnice k, k_1, k_2 mají společné
jen body A, M (viz obr. 30).

II. Neleží-li bod A na k , pak má úloha *vždy dvě řešení*. Průnik
($k \setminus \{M, N\}\} \cap \mathbf{M}$ obsahuje nejvýše dva body. Počet bodů
tohoto průniku se zmenšuje ze dvou vždy o 1 bod právě
když:

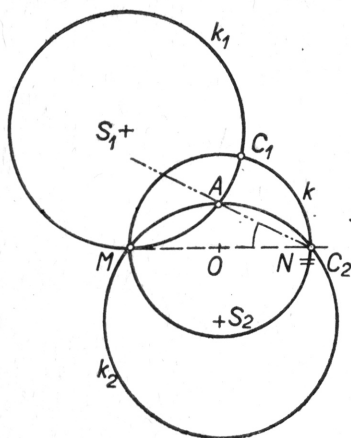
- Kružnice k má s jednou z kružnic k_1, k_2 dotyk v bodě M .
Pak ovšem $\angle AMN$ je roven φ , nebo $180^\circ - \varphi$ (obr. 31a,
31b) a lze najít další jedno řešení takové, že $C = M$.
- Jedna z kružnic k_1, k_2 prochází bodem N . Pak však
 $\angle ANM$ je buď $90^\circ - \varphi$, nebo $90^\circ + \varphi$ (obr. 32a, b),
tj. lze najít další jedno řešení takové, že $C = N$.



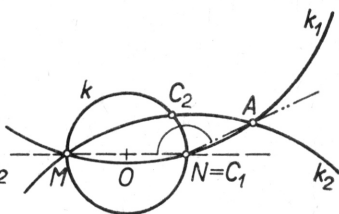
Obr. 31a



Obr. 31b



Obr. 32a



Obr. 32b

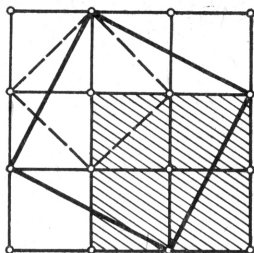
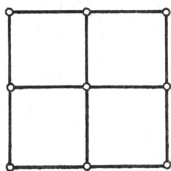
C-I-6

6. Je dána čtvercová šachovnice o 25 polích. Určete počet všech čtverců, z nichž každý má všechny své vrcholy ve vrcholech čtverců šachovnice.

KOMENTÁŘ. Úloha nevyžaduje nic jiného než určitý systém sčítání čtverců. Tento systém můžeme s žáky probrat na šachovnici s n^2 poli pro $n < 5$, tedy $n = 1, 2, 3, 4$; příslušné počty čtverců označíme s_n . Je zřejmě $s_1 = 1, s_2 = 6$ (viz obr. 33). Pro $n = 3$ dostaneme mimo devět malých čtverců a jeden základní čtverec o straně 3, čtyři čtverce o straně $\sqrt{2}$, čtyři čtverce o straně 2 (šrafovaný) a dva čtverce o straně $\sqrt{5}$; celkem tedy je

$$s_3 = 1 + 4 + 4 + 2 + 9 = 20.$$

Pro $n = 4$ už se začíná objevovat systém. Nejprve spočteme



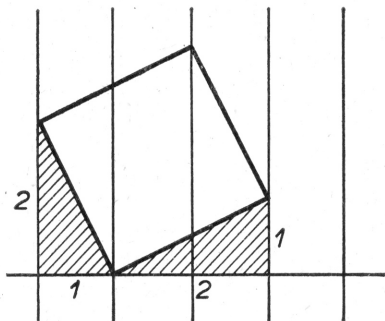
Obr. 33

čtverce složené z polí šachovnice. Čtverce složené z k^2 polí ($k = 1, 2, \dots, n$) leží v $n - k + 1$ různých pásech složených z k sloupců a zároveň v $n - k + 1$ různých pásech složených z k řad (zde můžeme uvažovat zcela obecně pro libovolné n a $k \leq n$). Počet těchto čtverců je tedy

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

V případě $n = 4$ dostaneme

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30. \quad (1)$$



Obr. 34

Ostatní čtverce nemají strany rovnoběžné se stranami polí šachovnice. Zvolíme-li stranu pole za jednotku délky, pak délky průmětu dvou sousedních stran čtverce jsou přirozená čísla a, b , pro která platí (viz obr. 34)

$$a + b \leq 4.$$

V úvahu tedy přicházejí jen dvojice čísel 3; 1, dále 2; 2, 2; 1 a konečně

1; 1. Pokud je $a \neq b$, určíme dva čtverce této vlastnosti a posouváme je ve směru přímek šachovnice. Je-li $a = b$, stačí jeden výchozí čtverec. Celkem tak dostaneme další čtverce podle tabulky:

(a, b)	$(3,1)$	$(2,2)$	$(2,1)$	$(1,1)$
Počet čtverců	2	1	8	9

Celkem dalších 20 čtverců. Spolu s (1) dostaneme

$$s_4 = 20 + 30 = 50$$

čtverců. Podle tohoto návodu mohou řešitelé vypočítat samostatně s_5 .

Lze odvodit obecnou rekurentní formuli pro s_n a z ní indukci dokázat explicitní vzorec pro s_n .

Podrobné ŘEŠENÍ ÚLOHY č. 6:

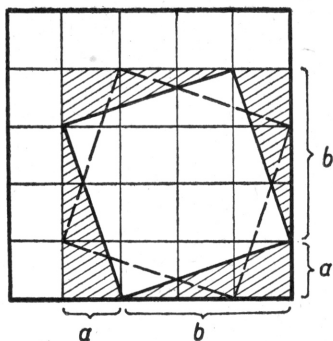
Pro případy šachovnice s n^2 polí, kde $n = 1, 2, 3, 4$, bylo řešení provedeno v komentáři. Při řešení soutěžní úlohy budeme postupovat obdobně.

Nejdříve určíme počet čtverců skládajících se z polí šachovnice. Těchto čtverců je celkem

$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55. \quad (1)$$

Ostatní čtverce nemají strany rovnoběžné se stranami polí šachovnice. Zvolíme-li stranu pole za jednotku délky, pak délky průmětů dvou sousedních stran čtverce jsou přirozená čísla a, b , pro která platí (viz obr. 35)

$$a + b \leq 5.$$



Obr. 35

Je-li $a \neq b$, pak čtverců tohoto druhu je dvojnásobek počtu čtverců skládajících se z $(a + b)^2$ polí šachovnice (viz obr. 35). Je-li $a = b$, pak čtverců tohoto druhu je stejný počet jako čtverců skládajících se z $(a + b)^2 = (2a)^2$ polí šachovnice. Počty všech těchto čtverců zachycuje tabulka:

(a, b)	(4,1)	(3,2)	(3,1)	(2,2)	(2,1)	(1,1)
Počet čtverců	$2 \cdot 1 = 2$	$2 \cdot 1 = 2$	$2 \cdot 2^2 = 8$	$2^2 = 4$	$2 \cdot 3^2 = 18$	$4^2 = 16$

Počet všech čtverců z tabulky je 50. Spolu s (1) je celkem všech čtverců

$$s_5 = 55 + 50 = 105.$$

4. KATEGORIE Z

Z-I-1

1. Ve sklepě *ĴZD* jsou dva sudy vína; v jednom je 80 litrů vína po 10,— Kčs, v druhém 120 litrů vína po 8,— Kčs.

a) Jaké stejné množství vína je třeba vzít z každého sudu a nalít do druhého sudu tak, aby v obou sudech vzniklo víno téže ceny za jeden litr a jaká bude cena za jeden litr směsi při zachování celkové ceny vína?

b) Řešte tuto úlohu obecně: V sudě A je a litrů vína po m Kčs, v druhém sudě B je b litrů vína po n Kčs.

KOMENTÁŘ A ŘEŠENÍ. Úloha náleží do rozsáhlé a oblíbené kategorie tzv. *slovních úloh o směsi*. Často vám asi působí potíže už pochopení samotné formulace textu (také text úlohy Z-I-1 není právě nejjasnější); nesnáze působí i matematická formulace úlohy, která je klíčem k řešení; matematická formulace se obvykle skládá z několika rovnic a dále z nerovnic, které vyjadřují případné omezující podmínky. Domníváme se, že by se při řešení měly více zdůraznit grafické metody; i když grafické metody nedávají zpravidla numerické řešení s potřebnou přesností, poskytnou řešiteli přehled o situaci — předvádějí mu totiž grafický model reálné situace, podobně jako je tomu např. u grafických jízdních řádů.

Konkrétně v úloze Z-I-1 jde o toto: z množství a litrů vína ceny c_1 Kčs za litr se ubere x litrů a přidá se stejné množství jiného vína ceny c_2 Kčs za litr. Tato situace se vyskytuje v úloze b), kde je označení m, n místo c_1, c_2 . Základní úloha formulovaná z této situace je asi tato: *Jaká je cena y Kčs za litr směsi?*

Dvojice $[x; y]$ tvoří část lineární funkce

$$y = \frac{1}{a}(c_1(a - x) + c_2x)$$

neboli

$$y = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{a}x; \quad (1)$$

říkáme „část“ proto, že x, y jsou vázány podmínkami $0 \leq x \leq a$, $y \geq 0$. Zde je vhodná příležitost zamyslet se nad definičním oborem funkce a nad oborem funkčních hodnot. Jistě by bylo užitečné sestavit grafy funkcí (1) pro různé hodnoty „konstant – parametrů a, c_1, c_2 “ a zkoumat případy $c_1 > c_2$ i $c_1 < c_2$.

Chceme-li řešit úlohu b), užíjeme mimo funkci (1) ještě funkce

$$y = c_2 + \frac{c_1 - c_2}{b} x, \quad (2)$$

která vznikne z (1), vyměníme-li zároveň a , b a c_1 , c_2 . Z (1), (2) vyjde podle textu úlohy b)

$$c_1 + \frac{c_2 - c_1}{a} \cdot x = c_2 + \frac{c_1 - c_2}{b} x$$

neboli

$$(c_1 - c_2) x \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = c_1 - c_2. \quad (4)$$

Je-li $c_1 = c_2$, jsou řešením rovnice (4) všechna x z intervalu $0 \leq x \leq \min(a, b)$ (proč?). Je-li $c_1 \neq c_2$, má rovnice (4) jediné řešení

$$x = \frac{ab}{a + b}. \quad (5)$$

Spojením (5), (1) nebo (5), (2) dostaneme společnou cenu y směsi vín

$$y = \frac{ac_1 + bc_2}{a + b}. \quad (6)$$

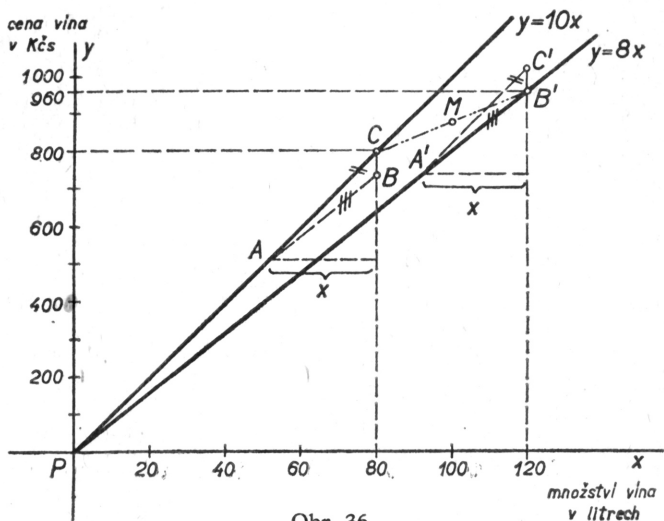
Vzorec (6) platí i v případě $c_1 = c_2$.

Je pravděpodobné, že by bylo nejučelnější studovat jako průpravu lineární funkci (1), pak rozřešit úlohu b) a teprve nakonec úlohu a). Zdá se totiž, že v tomto případě numerické řešení celý postup spíše zatemňuje než zjednodušuje. Zejména se přitom zcela ztrácí fakt, že množství x závisí jen na a , b a nikoli na cenách c_1 , c_2 . Úlohu a) pak řešíme dosazením $a = 80$, $b = 120$, $c_1 = 10$, $c_2 = 8$. Podle (5), (6) vyjde $x = 48$, $y = 8,8$.

Při grafickém řešení sestojíme v soustavě pravoúhlých sou-

řadnic grafy obou druhů vína podle obr. 36. Počáteční stavy obou druhů vína a jejich ceny jsou znázorněny body B' , C . Uebereme-li v obou případech totéž množství vína x a doplníme-li je stejným množstvím druhého druhu, dostaneme stavy znázorněné body B , C' . Tak vzniknou dva trojúhelníky ABC , $A'B'C'$, pro něž platí $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CA \parallel C'A'$ a mimoto jejich výšky na strany BC , $B'C'$ mají tutéž délku x . Trojúhelník $A'B'C'$ vznikne tedy z ABC rovnoběžným posunutím ($A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$, $C \rightarrow C'$). Z toho plyne, že střed dvojice BC' a dvojice $B'C$ je týž bod M , neboť $BCC'B'$ je rovnoběžník. Má-li podle textu úlohy vzniknout v obou sudech směs téže ceny za litr, musí ležet body P (počátek soustavy souřadnic), B , C' v přímce. Tato přímka se dá snadno sestavit: je to přímka PM . Přímkou PM jsou pak určeny body B , C' .

Grafické řešení je tak jako i u jiných úloh o směsích zajíma-



Obr. 36

vou ukázkou použití konstrukce při řešení úloh z funkční teorie, tj. při manipulaci s grafy funkcí, což je v tradiční výuce neobvyklé. Účastníci olympiády by si zasloužili, aby se s těmito postupy blíže seznámili.

Z-I-2

2. Dokažte, že pro každá dvě čísla a, b nabývá výraz

$$V = a^4 + b^4 - 2ab(b^2 - ab - a^2)$$

nezáporné hodnoty.

V kterém případě je tento výraz roven nule?

KOMENTÁŘ A ŘEŠENÍ. Jde o typovou úlohu na úpravu tzv. *algebr. výrazů*, kde se směřuje k tomu, aby se daný výraz vyjádřil jako součet druhých mocnin polynomů; na rozdíl od obdobné přípravné úlohy je daný výraz V čtvrtého stupně v proměnných a, b , ale je homogenní. Autorské řešení je toto (upravujeme postupně):

$$V = a^4 + b^4 - 2ab^3 + 2a^2b^2 + 2a^3b, \quad (1)$$

$$V = (a^4 + 2a^3b + a^2b^2) + (a^2b^2 - 2ab^3 + b^4),$$

$$V = a^2(a^2 + 2ab + b^2) + b^2(a^2 - 2ab + b^2),$$

$$V = a^2(a + b)^2 + b^2(a - b)^2. \quad (2)$$

Je tedy $V \geq 0$ pro všechna a, b . V předcházejících úpravách je jeden trochu umělý obrat – rozdělení členu $2a^2b^2 = a^2b^2 + a^2b^2$ a sdružení šesti členů do dvou trojčlenů.

Zjištění nutné a postačující podmínky pro to, aby bylo $V = 0$, je stereotypní. Platí podle (2):

$V = 0$ právě když $a^2(a + b)^2 = 0$ a zároveň $b^2(a - b)^2 = 0$. Z obou součinů dostáváme tyto čtyři možné kombinace

$$\text{I) } a^2 = 0, b^2 = 0; \quad \text{III) } (a + b)^2 = 0, b^2 = 0$$

$$\text{II) } a^2 = 0, (a - b)^2 = 0; \quad \text{IV) } (a + b)^2 = 0, (a - b)^2 = 0.$$

Ve všech čtyřech případech vyjde $a = b = 0$; to je skutečně jediná dvojice a, b , pro kterou je $V = 0$.

Bylo by však záhodno vrátit se ještě jednou ke vztahu (1), který vznikl roznásobením daného výrazu. Při prvním pohledu na (1) nás asi napadne spíše jiná úprava, než je ta, kterou jsme uvedli jako autorské řešení; je to sdružení

$$V = (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) + 2ab(a^2 - b^2)$$

neboli

$$V = (a^2 + b^2)^2 + 2ab(a^2 - b^2). \quad (3)$$

První člen (3) je nezáporný, druhý může být záporný. Bude-li však absolutní hodnota druhého členu menší nebo rovna absolutní hodnotě prvního členu, bude určitě $V \geq 0$. Místo porovnávání absolutních hodnot můžeme vypočítat rozdíl

$$\begin{aligned} V' &= (a^2 + b^2)^4 - 4a^2b^2(a^2 - b^2)^2 = \\ &= (a^4 + 2a^2b^2 + b^4)^2 - 4a^2b^2(a^4 - 2a^2b^2 + b^4). \end{aligned}$$

Po nedlouhém výpočtu dostaneme

$$V' = a^8 + 14a^4b^4 + b^8.$$

Zřejmě je vždy $V' \geq 0$, tedy i $V \geq 0$. Je-li $V = 0$, je $V' = 0$, tj. $(a^4 + b^4)^2 + 12a^4b^4 = 0$ a odtud plyne $a = b = 0$. Dostáváme tedy opět *jedinou možnou dvojici* $a = b = 0$, pro kterou je $V = 0$.

Uvedený způsob porovnání absolutních hodnot obou členů (3) je v tomto případě trochu složitý, ale velmi často se ho používá. Výpočet lze však zjednodušit: dokážeme-li, že je

$$|a^2 + b^2| \geq |2ab|, \quad |a^2 + b^2| \geq |a^2 - b^2|, \quad (4)$$

bude platnost nerovnice $V \geq 0$ dokázána. Místo nerovnic (4) můžeme psát

$$a^2 + b^2 \geq 2|ab|, \quad a^2 + b^2 \geq |a^2 - b^2|. \quad (5)$$

První z nerovnic (5) je ekvivalentní s nerovnicemi $(a + b)^2 \geq 0$, $(a - b)^2 \geq 0$, druhá je evidentní. Rovnost $V = 0$ nastane podle (5), právě když bude platit buď $a = 0$, nebo $b = 0$ (z druhé nerovnice (5)) a přitom zároveň $a + b = 0$ nebo $a - b = 0$ (z první nerovnice (5)).

Domníváme se, že byste se měli více zabývat různými možnostmi algebraických úprav (a to ovšem v I. kole), abyste získali větší počtářskou rutinu.

Z-I-3

3. Jsou dána čísla p, q ($p > q > 0$). Vypočtěte objem tělesa $ABCA'B'C'$ ohraničeného trojúhelníkem ABC se stranami $BC = p^2 + q^2$, $CA = p^2 - q^2$, $AB = 2pq$, dále trojúhelníkem $A'B'C'$ a lichoběžníkovými stěnami $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CAA'C'$, které jsou kolmé na rovinu ABC a mají základny o délkách

$$AA' = p - q, \quad BB' = p, \quad CC' = p + q.$$

KOMENTÁŘ A ŘEŠENÍ. Tato stereometrická úloha je opět ukázkou toho, že se vyplatí často řešit úlohu obecnější, neboť její řešení bývá jednodušší a mimoto odhaluje podstatu situace. A zde jde skutečně o malou problémovou situaci: seřiznutí kolmého hranolu rovinou a výpočet objemu torza hranolu. Doporučujeme tedy řešit tuto *průpravnou úlohu*:

Je dán trojboký hranol $ABCA'B'C'$, jehož podstava ABC má obsah P . Na jeho pobočných hranách AA' , BB' , CC' jsou zvoleny po řadě body A'' , B'' , C'' tak, že $AA'' = a$, $BB'' = b$, $CC'' = c$, $a \leq b \leq c$. Máme vypočítat objem torza hranolu $ABCA''B''C''$, které oddělí od hranolu řez rovinou $A''B''C''$ (obr. 37). Budeme předpokládat, že je $a < b < c$; výsledný vzorec pak snadno ověříme i pro zbývající případy.

Na hranách BB' , CC' sestrojíme body K , L tak, aby platilo

$BK = CL = a$. Torzo hranolu je sjednocením kolmého trojbokého hranolu $ABCA''KL$ a čtyřbokého jehlanu $B''KLC''A''$, jehož podstavou je čtyřúhelník (lichoběžník) $B''KLC''$ a jehož výška v vedená na podstavu má tutéž délku jako výška trojúhelníka $A''KL$ nebo ABC vedená bodem A'' , resp. A . Označme ještě V objem torza, V_1 objem hranolu $ABCA''KL$, V_2 objem jehlanu $B''KLC''A''$, h délku $BC = KL$. Pak platí

$$V_1 = aP, \quad (1)$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{B''K + C''L}{2} \cdot h \cdot v. \quad (2)$$

Protože je $B''K = b - a$, $C''L = c - a$, $\frac{1}{2}hv = P$, plyne z (2)

$$V_2 = \frac{P}{3} (b + c - 2a). \quad (3)$$

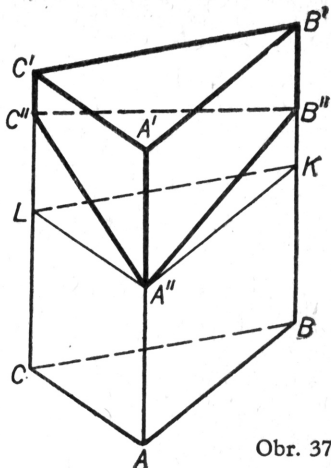
Spojíme-li (1), (3), dostaneme

$$V = V_1 + V_2 = \frac{P}{3} (a + b + c), \quad (4)$$

což je výsledný vzorec.

Rozřešená průpravná úloha je dosti těžká; předpokládá připravený model, zopakování vzorců pro objem jehlanu, obsah lichoběžníka, trojúhelníka a intuitivní ověření rovnosti výšek trojúhelníků $A''KL$, ABC a výšky jehlanu $B''KLC''A''$.

Úplné řešení průpravné úlohy předpokládá i ověření vzorce



Obr. 37

(4) v případech $a = b < c$, $a < b = c$, $a = b = c$. Vhodným doplňkem je výpočet objemu torza čtyřbokého hranolu, jehož podstava je rovnoběžník; při označení obdobném předchozímu dostaneme vzorec

$$V = \frac{P}{4}(a + b + c + d),$$

který je možno dále zobecňovat pro libovolný kolmý hranol.

Po rozřešení průpravné úlohy je **ROZŘEŠENÍ SOUTĚŽNÍ ÚLOHY Z-I-3** hračkou. Buď může řešitel sledovat předchozí postup, tj. odvodit znovu vzorec (4) ve speciálním případě, nebo může prostě dosadit do vzorce (4). Podle textu úlohy je

$$a = p - q, \quad b = p, \quad c = p + q; \quad (5)$$

zde je skutečně $a < b < c$, neboť p, q jsou kladná čísla, pro něž platí $p > q$. Protože platí

$$(p^2 - q^2)^2 + 4p^2q^2 = (p^2 + q^2)^2,$$

je podle *obrácení Pythagorovy věty* trojúhelník ABC pravoúhlý s přeponou BC a jeho obsah je $P = \frac{1}{2}AB \cdot AC$, neboli

$$P = pq(p^2 - q^2). \quad (6)$$

Spojením (4), (5), (6) vyjde

$$V = p^2q(p^2 - q^2).$$

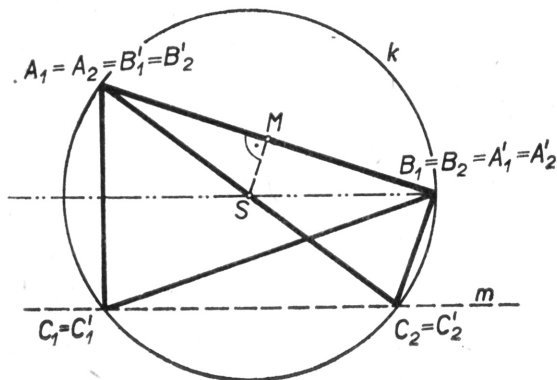
Úloha Z-I-3 je studijně vhodná nejen proto, že cvičí prostorovou představivost, ale také proto, že dává i ř ležitoost k algebraickým výpočtům, které mají geometrický význam.

Z-I-4

4. V rovině je dána kružnice $k \equiv (S; r = 6 \text{ cm})$ a bod M , pro který platí $MS = d = 2 \text{ cm}$.

Sestrojte trojúhelník ABC s vrcholy na kružnici k tak, aby bod M byl středem strany AB a přímka BS byla těžnicí trojúhelníka ABC . Kolik má úloha řešení?

KOMENTÁŘ A ŘEŠENÍ. Úloha je v zadané podobě tzv. *úloha záchytná*, kterou mohou rozřešit i slabší řešitelé bez pomoci. Sestrojí nejprve tětivu AB kružnice k , jejímž středem je bod $M(AB \perp SM)$. Třetí vrchol C trojúhelníka ABC leží na přímce $m \parallel BS$, jejíž vzdálenost od přímky BS je táž jako vzdálenost bodu A od přímky BS . Pro daná čísla d, r protne přímka m kružnici k ve dvou různých bodech C_1, C_2 a tak dostaneme dvě řešení úlohy: rovnoramenný trojúhelník ABC_1 se základnou AC_1 ($AB = BC_1$) a pravoúhlý trojúhelník ABC_2 s přeponou AC_2 ($\sphericalangle ABC_2$ je pravý). Oba tyto trojúhelníky jsou navzájem různé a tvoří I. skupinu řešení. Vyměníme-li označení vrcholů A, B , dostaneme další dvě řešení úlohy, která tvoří II. skupinu; v daném numerickém případě má tedy úloha čtyři různá řešení (obr. 38).



Obr. 38

Úloha je zajímavá teprve tehdy, když určitá čísla $r = 6$, $d = 2$, nahradíme parametry. Pak se ukáže, že je vždy řešitelná, že pro $d = \frac{r}{\sqrt{2}}$ splynou obě řešení I. skupiny v pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s přeponou AC ; právě tak splynou obě řešení II. skupiny; úloha má tedy dvě řešení. Je-li $d \neq \frac{r}{\sqrt{2}}$, jsou obě řešení I. skupiny i obě řešení II. skupiny navzájem různá. Zbývá otázka, zda může splynout některé řešení I. skupiny s některým řešením II. skupiny; to může nastat jen tehdy, je-li $\triangle ABC$ rovnoramenný se základnou AC i BC , tj. je-li rovnostranný; pak je ovšem $d = \frac{r}{2}$. V tomto případě má úloha tři řešení: trojúhelník rovnostranný a dva trojúhelníky pravoúhlé s úhly 30° , 60° .

Doporučujeme provést diskusi jako doplněk řešení soutěžní úlohy nebo aspoň vyšetřit případy $d = \frac{r}{\sqrt{2}}$ a $d = \frac{r}{2}$.

IV. Súťažné úlohy II. kola

1. KATEGÓRIA A

A-II-1a

1a. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla $n > 1$ platí

$$\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{27}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right) = \frac{(n+1)^2}{4n}. \quad (6 \text{ bodov})$$

RIEŠENIE. Označme $p_n = \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^3}\right)$.

Zrejme platí:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^3} &= \left(1 + \frac{1}{k}\right) \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Preto je } p_n &= \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \\ &= \left[\prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) \right]^2 \cdot \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right). \end{aligned}$$

Označme $r_n = \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)$, $s_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Platí: } r_n &= \prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k} = \frac{\prod_{k=2}^n (k+1)}{\prod_{k=2}^n k} = \frac{\prod_{k=3}^{n+1} k}{\prod_{k=2}^n k} = \\ &= \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

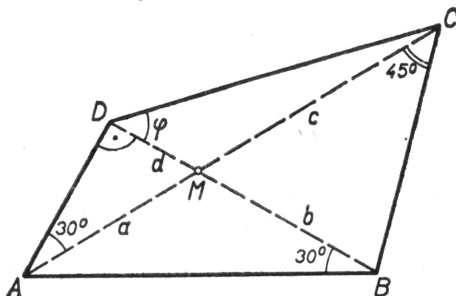
Analogickým výpočtem dostaneme $s_n = \frac{1}{n}$. Z toho konečně máme

$$p_n = r_n^2 \cdot s_n = \frac{(n+1)^2}{4n},$$

čo sme mali dokázať.

A-II-1b

1b. Úhlopříčky konvexního čtyřúhelníka $ABCD$ se protínají v bodě M . Jsou dány velikosti úhlů $\angle DAM = 30^\circ$, $\angle ADM = 90^\circ$, $\angle ABM = 30^\circ$, $\angle BCM = 45^\circ$. Vypočítejte velikosti všech vnitřních úhlů čtyřúhelníka $ABCD$. (6 bodů)



Obr. 39

ŘEŠENÍ (obr. 39). Označíme délky úseček $AM = a$, $BM = b$, $CM = c$, $DM = d$. Dále označíme $\sphericalangle CDM = \varphi$ a vypočteme $\sphericalangle DCM = 60^\circ - \varphi$, $\sphericalangle CBM = 75^\circ$, $\sphericalangle BAM = 30^\circ$.
 $Z \triangle ADM$, $\triangle ABM$ plyne

$$a = 2d, \quad b = a. \quad (1)$$

Sinová věta pro $\triangle CDM$ dá

$$\frac{d}{c} = \frac{\sin(60^\circ - \varphi)}{\sin \varphi}. \quad (2)$$

Sinová věta pro $\triangle BCM$ dá

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ}. \quad (3)$$

Znásobením (2), (3) dostaneme vzhledem k (1)

$$\frac{d}{a} = \frac{\sin(60^\circ - \varphi)}{\sin \varphi} \cdot \frac{\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ}$$

a dále vzhledem k (1)

$$\frac{1}{2} = (\sin 60^\circ \cdot \cotg \varphi - \cos 60^\circ) \cdot \frac{\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ}$$

čili

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cotg \varphi - \frac{1}{2} \right) (\sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ)$$

čili

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} = (\sqrt{3} \cdot \cotg \varphi - 1)(1 + \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

čili

$$\sqrt{3}(1 + \sqrt{3}) \cotg \varphi = 1 + \sqrt{3} + 2$$

$$(3 + \sqrt{3}) \cotg \varphi = 3 + \sqrt{3}.$$

Protože je $0 < \varphi < 180^\circ$ a $\cotg \varphi = 1$, je $\varphi = 45^\circ$. Velikosti vnitřních úhlů jsou $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 105^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, $\delta = 135^\circ$.

A-II-2a

2a. V rovině je dán kruh **K**. Určete množinu vrcholů A všech vypuklých čtyřúhelníků $ABCD$, o nichž platí, že $AC \leq BD$ a že celá úhlopříčka BD leží v kruhu **K**. (5 bodů)

ŘEŠENÍ. Nejprve dokážeme *pomocnou větu*:

Nechť $ABCD$ je vypuklý čtyřúhelník takový, že $AC \leq BD$. Nechť X je nejbližší bod úsečky BD k vrcholu A [podrobněji: je-li pata Y kolmice spuštěné z bodu A na přímku BD na úsečce BD , je $X = Y$; padne-li Y na prodloužení úsečky BD za bod B (popř. D), je $X = B$ (popř. $X = D$).] Potom je $AX < BD$.

Důkaz. Je-li P průsečík úhlopříček AC a BD , pak je $AX \leq AP < AC \leq BD$.

Je-li nyní $ABCD$ čtyřúhelník splňující podmínky úlohy, je $BD \leq 2r$, kde r je poloměr kruhu **K**. Protože celá úhlopříčka BD leží v **K**, je bod X z pomocné věty v kruhu **K**. Má proto podle této věty bod A od obvodu kruhu **K** vzdálenost menší než $2r$, tedy od středu S kruhu **K** vzdálenost menší než $3r$.

Je-li *obráceně* A takový bod, že $AS < 3r$, pak sestrojíme čtyřúhelník $ABCD$ splňující podmínky úlohy např. takto: Pro $A = S$ stačí zvolit čtverec o straně $\frac{1}{2}r$ s vrcholem v A . Nechť

nyní $A \neq S$. Kruh **K'** se středem A a poloměrem $2r$ má s **K** společný nějaký bod P , který je vnitřní i pro **K** i pro **K'** a který neleží na přímce AS . Přímka SP protne hranici kruhu **K** ve dvou protějších bodech B a D , polopřímka AP protne hranici kruhu **K'** v bodě C . Je pak $ABCD$ vypuklý čtyřúhelník s průsečíkem úhlopříček P , zřejmě splňující podmínky úlohy.

ZÁVĚR. Hledaná množina je vnitřek kruhu, který je soustředný s **K** a má trojnásobný poloměr.

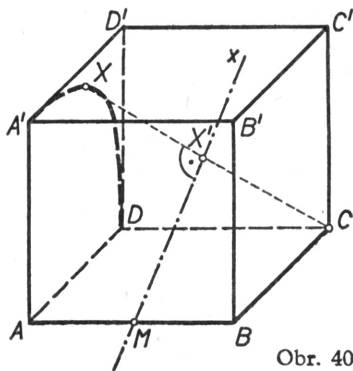
A-II-2b

2b. Je dána krychle $ABCD A' B' C' D'$. Určete množinu **M** všech bodů na povrchu krychle, které jsou souměrně sdružené s vrcholem *C* podle některé přímky, která prochází středem úsečky *AB* a je kolmá k *AB*. (5 bodů)

ŘEŠENÍ (obr. 40). Označme *M* střed hrany *AB*, *x* přímkou procházející bodem *M* a kolmou k *AB*. Bod *X* sestrojíme tak, aby střed *X'* úsečky (dvojice) *CX* ležel na přímce *x*, a aby bylo $x \perp CX$; pak $MC = MX$. Body *X* leží tedy na kulové ploše κ se středem *M* a poloměrem $CM = \frac{a}{2} \sqrt{5}$, kde *a* značí délku

hrany dané krychle. Přímkou *x* vyplňují rovinu souměrnosti úsečky *AB*. Body *X* proto leží v rovině ADA' , tedy na kružnici se středem *A* a poloměrem *a* v rovině ADA' . Protože *X* má ležet na povrchu krychle, je *X* na čtvrtkružnici DA' této kružnice.

Ukažme, že *obráceně* každý bod *X* této čtvrtkružnice vyhovuje úloze.



Obr. 40

Je totiž skutečně $MX = \frac{a}{2} \sqrt{5} = MC$, takže trojúhelník *MXC* je rovnoramenný. O středu *X'* úsečky *CX* tedy platí, že *MX'* je kolmé k *XC* a je tedy *MX'* osa souměrnosti úsečky *CX*.

Protože X leží v rovině ADA' a $CX' = \frac{1}{2} CX$, leží střed X' v rovině souměrnosti úsečky AB . Proto MX' ($X' \neq M$, protože X leží ve stěně $ADD'A'$) je kolmá k AB . Bod X tedy leží v hledané množině $\mathbf{M}$.

ZÁVĚR. Množina $\mathbf{M}$ je čtvrtkružnice s krajními body A' a D kružnice o středu A a s poloměrem AD ve stěně $ADD'A'$.

A-II-3a

3a. Dokážte, že neexistuje trojica reálných čísel a, b, c taká, aby rovnica

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

mala práve dva rôzne korene x_1, x_2 a súčasne rovnica

$$bx^2 + cx + a = 0 \quad (2)$$

mala práve dva rôzne korene x_2, x_3 a rovnica

$$cx^2 + ax + b = 0 \quad (3)$$

práve dva rôzne korene x_3, x_1 . (7 bodov)

RIEŠENIE. Predpokladajme, že existuje trojica reálných čísel a, b, c taká, že (1) má korene $x_1, x_2, x_1 \neq x_2$; (2) má korene $x_2, x_3; x_2 \neq x_3$ a (3) má korene $x_3, x_1; x_3 \neq x_1$. Z toho vyplýva, že musí byť $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$. Ďalej stadiaľ vyplýva, že čísla x_1, x_2, x_3 musia byť reálne. Ak by napr. x_1 bolo nereálne komplexné číslo, potom musí byť $x_2 = \overline{x_1}$ ($\overline{x}$ znamená číslo komplexne združené k číslu x), pretože sú koreňmi rovnice s reálnymi koeficientami. Potom však tiež $x_3 = \overline{x_2} = \overline{\overline{x_1}} = x_1$, čo je v spore s tým, že $x_3 \neq x_1$.

Zo známych vzťahov medzi koreňmi a koeficientami kvadratickej rovnice pre reálne čísla x_1, x_2, x_3 dostaneme:

$$\begin{aligned} b &= -a(x_1 + x_2), & c &= a x_1 x_2, & c &= -b(x_2 + x_3), \\ a &= b x_2 x_3, & a &= -c(x_3 + x_1), & b &= c x_3 x_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Vylúčením čísel a, b, c vždy z dvoch rovníc, ktoré sú v (4) napísané pod sebou, dostaneme

$$\begin{aligned}x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3 + 1 &= 0, \\x_1 x_2 x_3 + x_1^2 x_2 + 1 &= 0, \\x_1 x_2 x_3 + x_3^2 x_1 + 1 &= 0.\end{aligned}\tag{5}$$

Vynásobením druhej, štvrtej a šiestej rovnice zo (4) dostaneme $x_1^2 x_2^2 x_3^2 = 1$ čiže buď $x_1 x_2 x_3 = 1$, alebo $x_1 x_2 x_3 = -1$.

Ak do (5) dosadíme $x_1 x_2 x_3 = 1$, dostaneme, že musí byť $x_3 < 0, x_2 < 0, x_1 < 0$, z čoho $x_1 x_2 x_3 < 0$, ale to je spor.

Ak do (5) dosadíme $x_1 x_2 x_3 = -1$, dostaneme, že aspoň jedno z čísel x_1, x_2, x_3 sa rovná nule, čo opäť vedie k sporu.

Tým sme dokázali, že trojica reálnych čísel a, b, c uvedených vlastností nemôže existovať.

A-II-3b

3b. Určete všechny nekonečné aritmetické posloupnosti celých čísel

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

takové, aby posloupnost

$$a_0, -a_1, a_2, -a_3, \dots, (-1)^n a_n, \dots$$

obsahovala právě 1972 dvojic stejných členů (čísel). (7 bodů)

ŘEŠENÍ. Poněvadž $\{a_n\}$ je aritmetická posloupnost, platí $a_n = a_0 + nd$, kde d je difference.

Budiž p, q ($p \neq q$) dvojice indexů taková, že

$$(-1)^p a_p = (-1)^q a_q,$$

tj.

$$(-1)^p [a_0 + pd] = (-1)^q [a_0 + qd].\tag{1}$$

Kdyby bylo $p + q$ sudé, plynulo by z (1)

$$pd = qd,$$

což je možné, jen když $d = 0$ (neboť $p \neq q$). Potom však jsou všechna a_n sobě rovna a tedy v posloupnosti čísel $(-1)^n a_n$ existuje *nekonečně mnoho* dvojic stejných čísel.

Nechť tedy $p + q = s$ je liché. Z (1) pak plyne

$$a_0 + pd = -a_0 - qd,$$

tj.

$$2a_0 = -(p + q)d = -sd.$$

Poněvadž s je liché, musí $a_0 = rs$, kde r je celé, takže

$$d = -2r.$$

Přitom nutně $a_0 \neq 0$, a tedy i $r \neq 0$, jinak by bylo $d = 0$; viz předchozí případ.

Budiž (j, k) jiná dvojice indexů taková, že

$$(-1)^j a_j = (-1)^k a_k.$$

Stejně jako výše dostaneme

$$2a_0 = -(j + k)d,$$

a tedy

$$j + k = s.$$

Dvojic přirozených čísel p, q s daným součtem s je $\frac{s+1}{2}$, to má být 1972 — tedy

$$s + 1 = 3944,$$

$$s = 3943.$$

Máme tak

$$a_0 = 3943r, \quad d = -2r.$$

Všechny posloupnosti $\{a_n\}$ s požadovanými vlastnostmi mají tedy tvar

$$a_n = 3943r - 2rn,$$

kde r je libovolné celé číslo.

2. KATEGORIE B

B-II-1a

1a. Do jednotkové kružnice je vepsán vypuklý pětiúhelník, pro jehož délky stran platí

$$a \leq b \leq c \leq d \leq e$$

a zároveň $a = 1$, $d = \sqrt{2}$. Vypočtěte b, c, e a zjistěte, zda takový pětiúhelník existuje.

ŘEŠENÍ. Označme $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ velikosti středových úhlů příslušných po řadě k tětivám a, b, c, d, e . Podle textu úlohy je

$$\alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \delta \leq \varepsilon, \quad (1)$$

neboť všechny tyto úhly jsou duté. Zároveň platí

$$\alpha = 60^\circ, \delta = 90^\circ. \quad (2)$$

Je tedy podle (1), (2)

$$60^\circ \leq \beta \leq \gamma \leq 90^\circ \leq \varepsilon < 180^\circ, \quad (3)$$

a mimoto

$$\beta + \gamma + \varepsilon = 360^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 210^\circ. \quad (4)$$

Kdyby aspoň jeden z úhlů β, γ měl velikost $> 60^\circ$, bylo by $\beta + \gamma > 120^\circ$, tj. podle (3)

$$\beta + \gamma + \varepsilon > 120^\circ + 90^\circ = 210^\circ,$$

což je ve sporu s (4). Je tedy

$$\beta = \gamma = 60^\circ.$$

Z (4) pak plyne $\varepsilon = 90^\circ$. Délky stran jsou $b = c = 1$, $e = \sqrt{2}$.

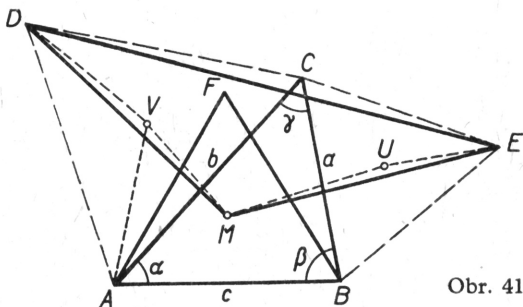
Existenci pětiúhelníka prokážeme konstrukcí. Sestrojíme rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ s délkami stran $AB = BC =$

$= CD = 1$, $AD = 2$ (průměr kružnice) a v polovině opačné k ADB k němu připojíme rovnoramenný trojúhelník ADE s pravým úhlem AED .

B-II-1b

1b. Je daný trojuholník ABC a nad jeho stranami AC , BC v polrovinách opačných k polrovinám ACB , BCA sú zostrojené rovnostranné trojuholníky ACD , BCE . Nad stranou AB v polrovine ABC je zostrojený rovnostranný trojuholník ABF .

Ak je M stred trojuholníka ABF , je trojuholník DME rovno-
ramenný a $\sphericalangle DME = 120^\circ$. Dokážte. (6 bodov)



Obr. 41

RIEŠENIE (obr. 41). Označme obvyklým spôsobom dĺžky strán a veľkosti uhlov: $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$. Nech V je ťažisko (stred) trojuholníka ACD a U ťažisko trojuholníka BCE . Otočenie okolo bodu A o uhol veľkosti α prevedie polpriamku $\vec{AV}$ do polpriamky $\vec{AM}$. Otočenie okolo bodu B o uhol veľkosti β prevedie polpriamku $\vec{BU}$ do polpriamky $\vec{BM}$. Preto je

$$\sphericalangle VAM = \alpha, \quad \sphericalangle MBU = \beta. \quad (1)$$

Ďalej platí

$$DV = AV = \frac{b}{\sqrt{3}}, AM = BM = \frac{c}{\sqrt{3}},$$

$$BU = EU = \frac{a}{\sqrt{3}}. \quad (2)$$

Podľa vety $\frac{s}{s}$ u $\frac{s}{s}$ o podobnosti trojuholníkov vyplýva z (1), (2)

$$\triangle ABC \sim \triangle AMV \sim \triangle MBU. \quad (3)$$

Z (3) dostaneme

$$VM = \frac{a}{\sqrt{3}} = EU, \quad MU = \frac{b}{\sqrt{3}} = DV. \quad (4)$$

Ďalej je $\angle AVD = 120^\circ$, $\angle AVM = \gamma$, $\angle EUB = 120^\circ$,
 $\angle BUM = \gamma$ (pozri (3)). Sú tri možnosti:

I. $\gamma = 60^\circ$. Potom leží V medzi D, M , U medzi E, M a platí podľa (4)

$$DM = DV + VM = EU + MU = EM.$$

Okrem toho je

$$\begin{aligned} \angle EMD &= 360^\circ - \angle AMV - \angle BMU - \angle AMB = \\ &= 360^\circ - \alpha - \beta - 120^\circ = 240^\circ - (\alpha + \beta) = \\ &= 240^\circ - 180^\circ + \gamma = 120^\circ. \end{aligned}$$

II. $\gamma < 60^\circ$ (pozri obr. 41). Potom je

$$\angle DVM = 120^\circ + \gamma < 180^\circ, \quad \angle EUM = 120^\circ + \gamma < 180^\circ. \quad (5)$$

Zo (4) a (5) vyplýva podľa vety *sus*

$$\triangle DVM \cong \triangle MUE \quad (6)$$

a z toho $EM = DM$. Trojuholník DME je teda rovnoramenný, ako sme mali dokázať. Ďalej je

$$\begin{aligned} \angle EMD &= 360^\circ - \angle AMV - \angle BMU - \angle AMB + \\ &+ (\angle DMV + \angle EMU) = 360^\circ - \alpha - \beta - 120^\circ + \\ &+ (180^\circ - 120^\circ - \gamma) = 120^\circ. \end{aligned}$$

III. $\gamma > 60^\circ$. Postupujeme ako v prípade II s tým rozdielom, že je $\sphericalangle DVM = \sphericalangle EUM = 360^\circ - (120^\circ + \gamma) = 240^\circ - \gamma < 180^\circ$. Dokážeme opäť, že platí (6), z čoho hneď máme $EM = DM$. Ďalej počítame $\sphericalangle EMD$. Pritom však odčítame $\sphericalangle DMV + \sphericalangle EMU = 180^\circ - (240^\circ - \gamma) = -60^\circ + \gamma$, t. j. pripočítame $60^\circ - \gamma$, ako v prípade II. Výsledok je preto rovnaký ako v prípade II.

B-II-2a

2a. Nalezněte všechna taková reálná čísla a , která mají tu vlastnost, že pro každé reálné číslo x platí

$$\left| \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1} \right| < a. \quad (1)$$

(7 bodů)

ŘEŠENÍ. Z definice absolutní hodnoty plyne, že (1) lze přepsat jako dvě nerovnosti:

$$-a < \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1} < a. \quad (2)$$

Pro každé x je $x^2 - x + 1 > 0$, a proto (2) je ekvivalentní současně platnosti nerovností:

$$x^2(a - 2) - x(a + 1) + (a + 1) > 0, \quad (3)$$

$$x^2(a + 2) - x(a - 1) + (a - 1) > 0. \quad (4)$$

Nyní rozlišme tři případy:

a) Nechť $a - 2 = 0$, tj. $a = 2$. Pak (3) má tvar

$$-3x + 3 > 0,$$

což neplatí pro každé x . Tedy hledané $a \neq 2$.

b) Necht $a + 2 = 0$, tj. $a = -2$. Pak (4) má tvar

$$3x - 3 > 0,$$

což neplatí pro každé x . Tedy hledané $a \neq -2$. (Podíváme-li se na (1), vidíme, že $a \neq -2$ je samozřejmé, neboť je zřejmě $a > 0$.)

c) Necht $a \neq 2$ a $a \neq -2$. Pak na levých stranách nerovností (3) a (4) jsou kvadratické trojčleny proměnné x . Nerovnosti (3) a (4) jsou splněny pro každé reálné číslo x , právě když

$$a - 2 > 0 \text{ a } (a + 1)^2 - 4(a - 2)(a + 1) < 0 \quad (5a, b)$$

a zároveň

$$a + 2 > 0 \text{ a } (a - 1)^2 - 4(a + 2)(a - 1) < 0. \quad (6a, b)$$

Z (5a) a (6a) plyne, že

$$a > 2. \quad (7)$$

Pak z (5b) plyne

$$(a + 1) - 4(a - 2) < 0,$$

tj.

$$a > 3. \quad (8)$$

Dále z (6b) dostáváme

$$(a - 1) - 4(a + 2) < 0,$$

tj.

$$a > -3. \quad (9)$$

Z podmínek (7), (8), (9) plyne, že nerovnost (1) platí pro každé x právě když $a > 3$.

2b. Najděte řešení soustavy lineárních rovnic

$$x - a^3y + a^2z = 1, \quad (1)$$

$$a^3x - y + az = -1, \quad (2)$$

$$a^2x - ay + z = 1 \quad (3)$$

s neznámými x, y, z a reálným parametrem a . Proveďte diskusi řešitelnosti soustavy vzhledem k parametru a . (7 bodů)

ŘEŠENÍ. Eliminujeme z rovnic (1), (2), (3); z (3) plyne $z = 1 - a^2x + ay$. Po dosazení do (1), (2) dostaneme

$$(1 - a^4)x = 1 - a^2, \quad (1')$$

$$(1 - a^2)y = 1 + a. \quad (2')$$

Platí $1 - a^4 = (1 + a^2)(1 - a^2)$; protože je $1 + a^2 > 0$ pro všechna reálná a , rozlišíme dva případy

$$\text{I) } 1 - a^2 \neq 0, \quad \text{II) } 1 - a^2 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1.$$

V případě I) vypočteme z (1'), (2')

$$x = \frac{1}{1 + a^2}, \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{1 - a} \quad (5)$$

a dále z (3)

$$z = \frac{a^3 + 1}{(1 - a)(1 + a^2)}. \quad (6)$$

ZKOUŠKA ukáže, že (4), (5), (6) dává řešení soustavy (1), (2), (3) pro každé reálné a , pro které je $1 - a^2 \neq 0$.

V případě II) dostaneme soustavy pro

$$\begin{array}{ll} a = 1: & x - y + z = 1, & a = -1: & x + y + z = 1, \\ & x - y + z = -1, & & x + y + z = 1, \\ & x - y + z = 1; & & x + y + z = 1. \end{array}$$

Z nich první je *neřešitelná*, druhá má *nekonečně mnoho řešení*.

B-II-3a

3a. Jsou-li a, b, c tři taková přirozená čísla, že $a^3 + b^3 + c^3$ je násobek sedmi, je aspoň jedno z nich násobkem sedmi. Dokažte. (6 bodů)

ŘEŠENÍ. Dělíme-li přirozené číslo x sedmi, je zbytek některé z čísel 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Dělíme-li číslo x^3 sedmi, je zbytek týž jako při dělení čísel $0^3, 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3$, tj. některé z čísel 0, 1, 6.

Dělíme-li součet $a^3 + b^3 + c^3$ sedmi, jsou pro zbytky jednotlivých členů tyto možnosti

$$\begin{array}{l} 0; 0; 0; \quad 0; 0; 1; \quad 0; 0; 6; \quad 0; 1; 1; \quad 0; 6; 6; \\ 0; 1; 6; \quad 1; 1; 1; \quad 1; 1; 6; \quad 1; 6; 6; \quad 6; 6; 6. \end{array}$$

Poslední čtyři případy jsou nemožné, neboť pak by zbytek při dělení sedmi byl týž jako u součtu

$$1 + 1 + 1, \text{ tj. } 3,$$

$$1 + 1 + 6, \text{ tj. } 1,$$

$$1 + 6 + 6, \text{ tj. } 6,$$

$$6 + 6 + 6, \text{ tj. } 4.$$

Nastane tedy některý z prvních šesti případů, tj. aspoň jedno z čísel a, b, c je násobkem sedmi.

3b. a) Necht' α, β, γ jsou velikosti vnitřních úhlů daného trojúhelníka. Dokažte, že platí

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \beta \cdot \sin \gamma} + \frac{\cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma} + \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = 2. \quad (1)$$

b) Necht' α, β, γ jsou velikosti dutých úhlů a necht' platí (1). Existuje trojúhelník, jehož vnitřní úhly mají velikosti α, β, γ ? (6 bodů)

ŘEŠENÍ. Jestliže žádné z čísel α, β, γ není násobkem π , pak vždy platí:

$$\begin{aligned} V(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{\cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} + \frac{\cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma} + \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} = \\ &= \frac{1}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} \cdot [(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) + \sin 2\gamma] = \\ &= \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} \cdot [\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) + \sin \gamma \cdot \cos \gamma]. \quad (2) \end{aligned}$$

a) Jestliže α, β, γ jsou velikosti vnitřních úhlů daného trojúhelníka, pak

$$\gamma = \pi - (\alpha + \beta),$$

takže z (2) plyne

$$\begin{aligned} V(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{1}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} \cdot (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) = \\ &= \frac{2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = 2, \end{aligned}$$

tj. (1) platí.

b) Necht' α, β, γ jsou velikosti dutých úhlů a necht' platí (1). Podle (2) pak

$$\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) + \sin \gamma \cdot \cos \gamma = 2 \sin \alpha \sin \beta \cdot \sin \gamma,$$

tj.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) + \sin \gamma \cdot \cos \gamma &= \\ &= [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \cdot \sin \gamma. \end{aligned}$$

Po úpravě odtud plyne

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) \cdot [\sin(\alpha + \beta) - \sin \gamma] + \sin \gamma [\cos \gamma + \\ + \cos(\alpha + \beta)] = 0, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} \cos \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \cdot \left[\cos(\alpha - \beta) \cdot \sin \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} + \right. \\ \left. + \sin \gamma \cdot \cos \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \right] = 0. \end{aligned}$$

Tato rovnost zřejmě platí v případě, že $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Ovšem tato rovnost platí také pro čísla α, β, γ , která jsou řešením soustavy rovnic

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} (\alpha + \beta - \gamma) = \frac{\pi}{2}.$$

Soustava (3) má např. řešení

$$\alpha = \frac{5}{6} \pi, \quad \beta = \frac{1}{3} \pi, \quad \gamma = \frac{1}{6} \pi. \quad (4)$$

Úhly mající tyto velikosti jsou zřejmě duté. Snadno se lze přesvědčit, že (1) pro ně skutečně platí. Součet čísel (4) je však větší než π . Lze tedy vyslovit závěr:

Platí-li pro velikosti α, β, γ dutých úhlů rovnost (1), pak nemusí existovat trojúhelník, jehož vnitřní úhly by měly velikosti α, β, γ .

3. KATEGÓRIA C

C-II-1a

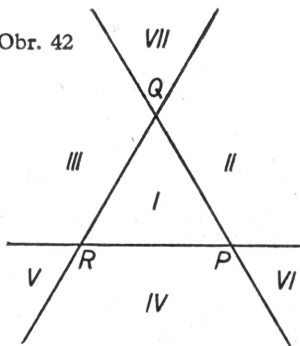
1a. Je daný rovnostranný trojuholník PQR . Určte množinu všetkých vrcholov A takých trojuholníkov ABC , ktorých strany AB , BC , CA obsahujú v uvedenom poradí vrcholy P , Q , R a pre dĺžky ich strán platí $AB \geq AC \geq BC$. (5 bodov)

RIEŠENIE. Priamky strán trojuholníka PQR rozdeľujú rovinu (okrem týchto priamok) na sedem častí (obr. 42). Ak by bod A ležal v časti I, ležal by B v VI, C v III a bod A v IV, čo je spor. Analogicky sa zistí, že v I nemôže ležať ani bod B , ani bod C .

Ak by bod A ležal v časti II, ležal by B v IV, C v VII a A v IV (I je podľa predchádzajúcej úvahy vylúčená), čo je spor. Napíšme výsledok tejto úvahy do tabuľky a analogicky preberme prípady, keď A leží v časti III, IV, V, VI, VII. Dostaneme:

A	B	C	A
II	IV	VII	IV
III	VI	III	IV
IV	II	III	IV
V	II	III	IV
VI	III	II	V
VII	IV	VII	IV

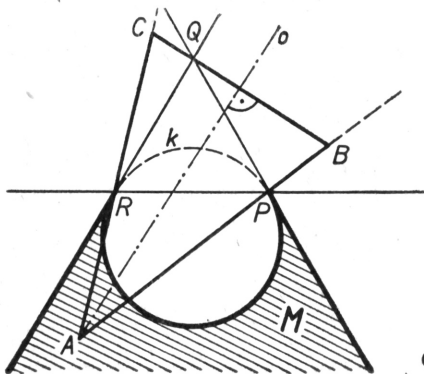
Obr. 42



Z tabuľky vyplýva, že je možný len prípad, že A leží v časti IV. Analogicky sa zistí, že ak leží bod A na niektorej z priamok — strán trojuholníka PQR , ale nie vo vrchole, potom A leží buď na opačnej polpriamke k PQ alebo na opačnej polpriamke

k RQ . Ak je konečne A niektorým z vrcholov $\triangle PQR$, potom môže byť buď $A = P$ alebo $A = R$, ale nemôže byť $A = Q$.

Z tejto úvahy vyplýva, že bod A môže ležať len v oblasti IV a jej dvoch hraničných polpriamkach (včítane začiatočných bodov).



Obr. 43

Ak vyhovuje $\triangle ABC$ ďalším požiadavkám úlohy, potom z $AB \geq AC \geq BC$ vyplýva, že $\gamma \geq \beta \geq \alpha$. Teda

$$3\alpha \leq \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ, \text{ t. j. } \alpha \leq 60^\circ.$$

Leží teda bod A v oblasti IV mimo kružnice k prechádzajúcej bodmi P a R a dotýkajúcej sa priamok QR a PQ alebo na väčšom oblúku tejto kružnice (obr. 43).

Označme **M** množinu tých bodov časti IV so započítanými oboma hraničnými polpriamkami, ktoré ležia mimo kružnice k alebo na oblúku PR . Ako sme vyššie ukázali, leží bod A vždy v množine **M**.

Ukážme obrátene, že každý bod množiny **M** je vrcholom A nejakého trojuholníka ABC vyhovujúceho podmienkam úlohy.

Ak je $A = P$, zvolíme $B = Q$, $C = R$ a $\triangle ABC$ vyhovuje. Ak je $A = R$, zvolíme $B = P$ a $C = Q$. Ak je $A \neq P$ i $A \neq R$,

ale A leží v M , obsahuje dutý uhol $\angle PAR$ bod Q a jeho veľkosť $\alpha \leq 60^\circ$. Priamka vedená bodom Q kolmo k osi tohto uhla pretne polpriamku AP v bode, ktorý označíme B a polpriamku AR v bode, ktorý označíme C . Trojuholník ABC opäť splňuje požiadavky úlohy.

ZÁVER. Hľadaná množina je množina M vyšrafovaná v obr. 43.

C-II-1b

1b. Je dán pravoúhlý $\triangle ABC$, bod D je stredom jeho prepony AB a bod S je stredom jemu vepsané kružnice.

Dokažte: Jestliže $CS = DS$, pak jeden vnútorný uhol $\triangle ABC$ má veľkosť 30° .

ŘEŠENÍ. Označme M, N, P po řadě body dotyku vepsané kružnice a stran BC, AC a AB . Pak

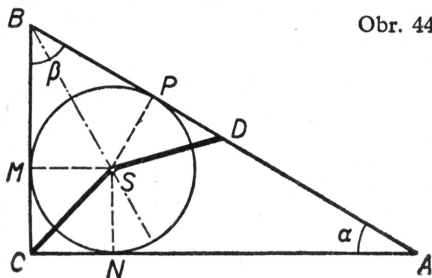
$$SM = SN = SP. \quad (1)$$

Z pravoúhlého $\triangle CNS$ plyne, že $CS > NS$, a proto též $DS > PS$, takže $P \neq D$. Bod S je vnútorným bodom $\triangle ABC$, a proto body S, D, P jsou vrcholy trojúhelníka. Podle předpokladu $CS = DS$, podle (1) je $NS = PS$, dále $\angle CNS = \angle DPS = 90^\circ$, takže trojúhelníky CNS a DPS jsou shodné (SSU). Přímka CS je osou $\angle ACB = 90^\circ$, a proto $\angle SCN = 45^\circ$, tj. také $\angle SDP = 45^\circ$.

Bod P je vnútorným bodem úsečky AB a přitom $P \neq D$. Pro bod P tedy mohou nastat dvě možnosti: bod P leží buď mezi body B, D , nebo mezi body A, D .

Nechť P je vnútorným bodem úsečky BD (viz obr. 44). Pak $\angle BDS = 45^\circ = \angle BCS$, dále $\angle CBS = \angle DBS = \frac{\beta}{2}$, neboť BS je osou $\angle ABC$. Podle předpokladu $CS = DS$, takže

$$\triangle CSB \cong \triangle DSB,$$



tj.

$$BC = BD = \frac{1}{2} AB.$$

Pak $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, takže $\sphericalangle BAC = \alpha = 30^\circ$.

Leží-li bod P mezi body D a A , pak se zcela obdobně dokáže, že

$$\triangle CSA \cong \triangle DSA,$$

odtud plyne

$$AC = AD = \frac{1}{2} AB,$$

takže

$$\sphericalangle ABC = 30^\circ.$$

C-II-2a

2a. Je dán mnohočlen $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ s celočíselnými koeficienty. Necht' existuje celé číslo m tak, že čísla $f(m)$, $f(m+1)$, $f(m+2)$ jsou násobky tří. Dokažte, že pro každé celé číslo x je pak $f(x)$ násobek tří. (6 bodů)

ŘEŠENÍ. Buď m takové celé číslo, že $f(m)$, $f(m+1)$, $f(m+2)$

jsou násobky tří. Budiž x libovolné celé číslo různé od $m, m + 1, m + 2$. Pro každé číslo z platí

$$x^2 - z^2 = (x - z)(x + z), \quad x^3 - z^3 = (x - z)(x^2 + xz + z^2),$$

takže čísla

$$f(x) - f(m), \quad f(x) - f(m + 1), \quad f(x) - f(m + 2) \quad (1)$$

jsou po řadě násobky čísel

$$x - m, \quad x - (m + 1), \quad x - (m + 2). \quad (2)$$

Protože (2) jsou tři po sobě bezprostředně následující čísla, je právě jedno z nich násobkem tří a k němu příslušné číslo (1) je tedy násobkem tří. Protože však také čísla $f(m), f(m + 1), f(m + 2)$ jsou podle předpokladu násobky tří, je i $f(x)$ násobkem tří.

Tím je věta dokázána.

C-II-2b

2b. Určete všechny dvojice reálných čísel x, y , pro které platí

$$|x + 1| + |y + 1| = |x + y + 1|.$$

Řešte úlohu graficky i výpočtem. (6 bodů)

ŘEŠENÍ. Umocněním rovnice dostaneme:

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + 2|(x + 1)(y + 1)| = \\ = x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y,$$

po úpravě

$$2|(x + 1)(y + 1)| = 2xy - 1. \quad (1)$$

a) Pro $x + 1 \geq 0$ a $y + 1 \geq 0$ nebo $x + 1 \leq 0$ a $y + 1 \leq 0$ dostaneme $|(x + 1)(y + 1)| = (x + 1)(y + 1)$, tj. (1) nabude tvaru

$$2(x + 1)(y + 1) = 2xy - 1,$$

po úpravě

$$2x + 2y + 3 = 0. \quad (2)$$

K této rovnici ještě patří nerovnice

$$x + 1 \geq 0, y + 1 \geq 0 \text{ nebo } x + 1 \leq 0, y + 1 \leq 0. \quad (2')$$

Z obráceného postupu vyplývá, že (2), (2') udávají skutečně řešení dané rovnice.

b) Pro $x + 1 \geq 0$ a $y + 1 \leq 0$ nebo $x + 1 \leq 0$ a $y + 1 \geq 0$ dostaneme $|(x + 1)(y + 1)| = -(x + 1)(y + 1)$, tj. (1) nabude tvaru

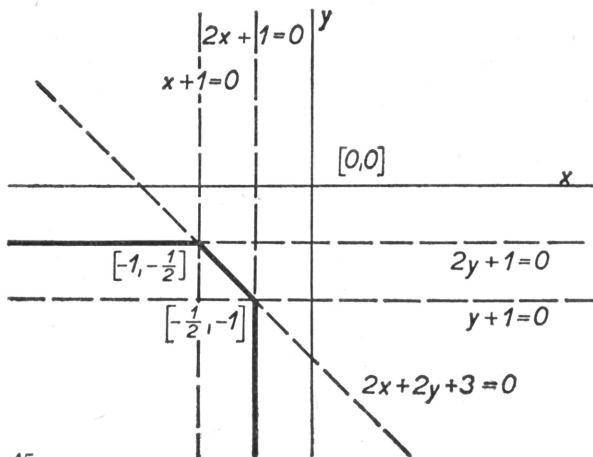
$$-2(x + 1)(y + 1) = 2xy - 1,$$

tj.

$$4xy + 2x + 2y + 1 = 0$$

neboli

$$(2x + 1)(2y + 1) = 0. \quad (3)$$



Obr. 45

Rovnice (3) však ve spojení s první i druhou soustavou nerovnic $x + 1 \geq 0$ a $y + 1 \leq 0$ nebo $x + 1 \leq 0$ a $y + 1 \geq 0$ (3') dává řešení

$$x = -\frac{1}{2}, \quad y \leq -1, \quad \text{resp. } x \leq -1, \quad y = -\frac{1}{2}. \quad (4)$$

c) Graficky (viz obr. 45). Řešení jsou znázorněna všemi body tlustě vytažené čáry.

C-II-3a

3a. Národný podnik má vyrobiť určitý tovar v troch rôznych typoch v celkovom množstve 10 000 kusov. Celkové výrobné náklady majú byť 4 300 000 Kčs. Z každého typu sa má vyrobiť aspoň 2400 kusov. Výrobné náklady jedného kusa typu *A* sú 450,— Kčs, typu *B* 420,— Kčs a typu *C* 400,— Kčs. Ceny výrobkov sú stanovené tak, že zisk podniku činí pri type *A* 16 %, pri type *B* 17 % a pri type *C* 18 % výrobných nákladov. Koľko kusov tovaru z jednotlivých typov má podnik vyrobiť, aby dosiahol maximálny zisk? (7 bodov)

RIEŠENIE. Označme x, y, z v uvedenom poradí počet výrobkov typu *A, B, C*. Potom platí

$$x + y + z = 10\,000, \quad (1)$$

$$45x + 42y + 40z = 430\,000.$$

Čísla x, y, z sú čísla prirodzené a platí o nich

$$\begin{aligned} 2\,400 &\leq x < 10\,000, \\ 2\,400 &\leq y < 10\,000, \\ 2\,400 &\leq z < 10\,000. \end{aligned} \quad (2)$$

Vylúčením neznámej z zo sústavy (1) dostaneme

$$5x + 2y = 30\,000.$$

Druhý člen na ľavej strane a pravá strana sú deliteľné dvoma, a preto aj číslo x musí byť nutne párne, t. j.

$$x = 2t,$$

kde t je zatiaľ bližšie neurčené prirodzené číslo. Pre y a z potom dostaneme

$$y = 15\,000 - 5t, \quad z = 3t - 5\,000.$$

Po dosadení do (2) a jednoduchých úpravách dostaneme

$$1\,200 \leq t < 5\,000,$$

$$1\,000 < t \leq 2\,520,$$

$$2\,466 < t < 5\,000.$$

Všetkým trom vyššie uvedeným nerovnostiam vyhovujú len tie čísla t , pre ktoré platí

$$2\,466 < t \leq 2\,520.$$

Počítajme teraz zisk Z podniku:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{450 \cdot 16}{100} 2t + \frac{420 \cdot 17}{100} (15\,000 - 5t) + \\ &+ \frac{400 \cdot 18}{100} (3t - 5\,000) = 3t + 711\,000. \end{aligned}$$

Je zrejmé, že zisk bude maximálny pri $t = 2\,520$ a činí vtedy 718 560 Kčs. V takom prípade treba vyrobiť 5 040 kusov výrobkov typu A , 2 400 kusov výrobkov typu B a 2 560 kusov výrobkov typu C .

C-II-3b

3b. Je dán trojúhelník $A_1A_2A_3$ o stranách délek a_1, a_2, a_3 . Sestrojte množinu všech takových bodů M trojúhelníka $A_1A_2A_3$, že pro obsahy platí

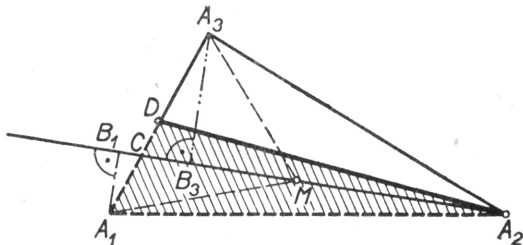
$$\triangle A_1A_2M \leq \triangle A_2A_3M \leq \triangle A_3A_1M. \quad (7 \text{ bodů})$$

ŘEŠENÍ. Hledanou množinu označme **M**. Zřejmě **M** obsahuje jen vnitřní body $\triangle A_1A_2A_3$, neboť jinak by aspoň jeden z trojúhelníků A_1A_2M , A_2A_3M , A_3A_1M neexistoval.

Řešme nejdříve *dílčí úlohu*: Určete množinu **N** všech vnitřních bodů M trojúhelníka $A_1A_2A_3$ takových, že pro obsahy platí

$$\triangle A_1A_2M \leq \triangle A_2A_3M. \quad (1)$$

Trojúhelníky A_1A_2M a A_2A_3M mají společnou stranu A_2M



Obr. 46

(viz obr. 46). Označme B_1, B_3 paty kolmic spuštěných z vrcholů A_1, A_3 na A_2M . Nerovnost (1) zřejmě platí, právě když

$$A_1B_1 \leq A_3B_3. \quad (2)$$

Označme C průsečík A_2M a strany A_1A_3 . Zřejmě je C vnitřní bod úsečky A_1A_3 . Nechť $B_1 \neq B_3$. Pak vznikne $\triangle A_1CB_1$ a $\triangle A_3CB_3$. Podle věty *uu* je $\triangle A_1CB_1 \sim \triangle A_3CB_3$, takže

$$\frac{A_1B_1}{A_3B_3} = \frac{A_1C}{A_3C}.$$

Nerovnost (2) tedy platí, právě když

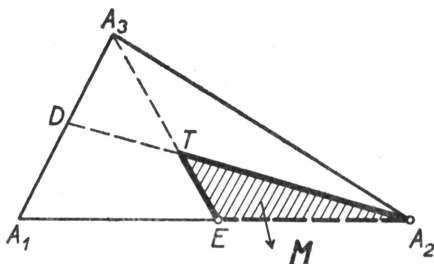
$$A_1C \leq A_3C. \quad (3)$$

Ke stejnému závěru dojdeme i v případě, že $B_1 = B_3$.

Výše formulovaná *dílčí úloha* je tak převedena na *úlohu*:

Určete množinu $\mathbf{N}$ všech vnitřních bodů M trojúhelníka $A_1A_2A_3$ takových, že polopřímka A_2M protíná úsečku A_1A_3 v takovém bodě C , že platí (3). Množinou $\mathbf{N}$ je zřejmě vnitřek $\triangle A_1A_2D$ a vnitřek úsečky A_2D , kde D je střed strany A_1A_3 .

Na základě řešení dílčí úlohy se snadno zjistí, že hledaná množina $\mathbf{M}$ je množina všech bodů trojúhelníka A_2TE s výjimkou bodů jeho strany A_2E , kde E je střed strany A_1A_2 a T je těžiště $\triangle A_1A_2A_3$, tj. $\mathbf{M} = \triangle A_2TE \setminus \text{ús. } A_2E$ (obr. 47).



Obr. 47

4. KATEGORIE Z

Z-II-1

1. a) Vyšetřete, kterou číslicí končí zápis druhé mocniny prvočísla v desítkové soustavě.

b) Je-li p prvočíslo větší než 3, pak čísla $p^2 + 14$ a $p^2 - 14$ nejsou obě zároveň prvočísla. Dokažte.

ŘEŠENÍ. a) Pro prvočíslo 2 máme $2^2 = 4$, a tedy poslední číslice je 4. Zvláštní postavení v našem vyšetřování má též prvočíslo 5. Platí $5^2 = 25$ a poslední číslice je tedy 5. Každé jiné prvočíslo končí buď číslicí 1, 3, 7, nebo 9. Končí-li číslicí 1, pak druhá mocnina též končí číslicí 1. Končí-li číslicí 3, je poslední

číslice druhé mocniny 9. Končí-li číslicí 7, poslední číslice je též 9. Konečně končí-li číslicí 9, druhá mocnina má na konci 1.

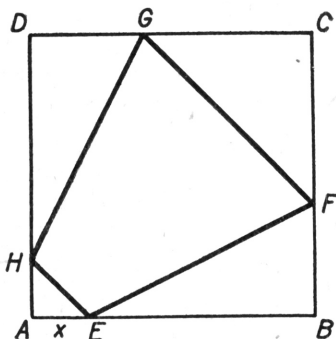
Můžeme shrnout: ve dvou případech končí druhá mocnina číslicí 4, resp. 5, jinak druhá mocnina prvočísla končí buď číslicí 1, nebo 9.

b) Nyní ke druhé otázce. Je-li $p = 5$, pak $p^2 + 14 = 39$, což není prvočíslo. Zvolíme-li libovolné prvočíslo p větší než 5, pak p^2 končí buď číslicí 1, nebo 9. Končí-li číslicí 1, pak $p^2 + 14$ končí číslicí 5 a je to číslo větší než 5. Tedy je $p^2 + 14$ složené. Končí-li p^2 číslicí 9, pak $p^2 - 14$ končí číslicí 5 a je větší než 5. Proto $p^2 - 14$ je číslo složené. Tím je důkaz podán.

Z-II-2

2. Je dán čtverec $ABCD$. Uvnitř stran AB , BC , CD , DA sestrojte po řadě body E , F , G , H tak, aby platilo

$$AE = \frac{1}{2} BF = \frac{1}{3} CG = \frac{1}{4} DH$$



Obr. 48

a aby čtyřúhelník $EFGH$ byl lichoběžník.

ŘEŠENÍ. Pro jednoduchost označme $AB = a$, $AE = x$, kde

$$0 < x < \frac{a}{4} \quad (\text{obr. 48}).$$

a) Předpokládejme nejprve, že $EH \parallel FG$. Potom

$$\sphericalangle AEH = \sphericalangle FGC,$$

takže z podobnosti $\triangle AEH$ a $\triangle CGF$ je ($x \neq 0$)

$$\frac{a - 4x}{x} = \frac{a - 2x}{3x}.$$

To vede k řešení

$$x = \frac{a}{5}.$$

b) Předpokládáme nyní, že $EF \parallel GH$. Potom je

$$\sphericalangle BEF = \sphericalangle HGD,$$

což vede k rovnici

$$\frac{2x}{a - x} = \frac{4x}{a - 3x}.$$

Tato rovnice má jediné nenulové řešení

$$x = -a,$$

které ovšem nevyhovuje.

ZÁVĚR. Jediné řešení je $AE = \frac{1}{5} AB$. Konstrukce je pak snadná.

Z-II-3

3. Dokážte, že pro každú trojicu čísel a, b, c je výraz

$$V = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - abc(a + b + c)$$

nezáporný. Pre ktoré hodnoty čísel a, b, c sa tento výraz rovná nule?

RIEŠENIE. Zrejme platí

$$\begin{aligned}
 V &= a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - a^2bc - ab^2c - abc^2 = \\
 &= \frac{1}{2}(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - 2a^2bc - 2ab^2c - 2abc^2) = \\
 &= \frac{1}{2}[(a^2b^2 - 2a^2bc + a^2c^2) + (a^2b^2 - 2ab^2c + b^2c^2) + \\
 &\quad + (a^2c^2 - 2abc^2 + b^2c^2)] = \\
 &= \frac{1}{2}[a^2(b - c)^2 + b^2(c - a)^2 + c^2(a - b)^2],
 \end{aligned}$$

čo je zrejme nezáporné pre každú trojicu čísel a, b, c .

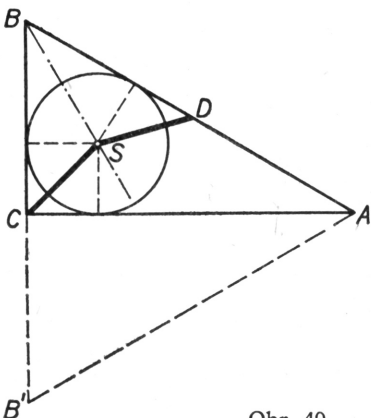
Rovnosť $V = 0$ nastane vtedy a len vtedy, keď súčasne platí:

$$a(b - c) = 0, \quad b(c - a) = 0, \quad c(a - b) = 0.$$

Kombináciou podmienok, ktoré vyplývajú z týchto troch rovností, dostaneme celkom osem prípadov, z ktorých vyplýva, že

$V = 0$ platí vtedy a len vtedy, keď je splnená niektorá z týchto podmienok:

- a) $a = b = c$,
- b) $a = b = 0$, c ľubovoľné,
- c) $b = c = 0$, a ľubovoľné,
- d) $c = a = 0$, b ľubovoľné.



Obr. 49

Z-II-4

4. Je daný pravouhlý trojuholník ABC . Bod D je stredom jeho prepony AB a bod S je stredom vpísanej kružnice.

Dokážte: Ak $\sphericalangle BAC = 30^\circ$, potom platí $CS = DS$.

RIEŠENIE. Strana AB je prepona, a preto $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ a uhly $\sphericalangle BAC$ a $\sphericalangle ABC$ sú ostré. Podľa predpokladu $\sphericalangle BAC = 30^\circ$ (obr. 49). Ak zostrojíme na polpriamke opačnej k polpriamke CB bod B' tak, že $CB' = CB$, potom $\triangle BB'A$ je rovnostranný a teda

$$BC = \frac{1}{2} BB' = \frac{1}{2} AB = BD. \quad (1)$$

Ak vezmeme ďalej do úvahy, že priamka BS je osou uhla $\sphericalangle ABC$, potom dostaneme

$$\sphericalangle CBS = \sphericalangle DBS. \quad (2)$$

Trojuholníky CBS a DBS majú spoločnú stranu BS , a preto podľa vety *sus* z (1) a (2) vyplýva

$$\triangle CBS \cong \triangle DBS,$$

takže

$$CS = DS,$$

čo sme mali dokázať.

POZNÁMKA. Rovnosť $BC = \frac{1}{2} AB$ dostaneme aj bez pomocného trojuholníka $BB'A$, ak použijeme to, že

$$\sin \sphericalangle BAC = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

V. Soutěžní úlohy III. kola kategorie A

A-III-1

1. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla $n > 1$ platí

$$\left(1 - \frac{1}{8}\right) \left(1 - \frac{1}{27}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^3}\right) > \frac{1}{2}. \quad (1)$$

(5 bodů)

ŘEŠENÍ. Pro všechna přirozená čísla $n > 1$ je

$$n^3 > n^2,$$

odkud vyplývá

$$1 - \frac{1}{n^3} > 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Proto také platí

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{8}\right) \left(1 - \frac{1}{27}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^3}\right) &> \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \\ &\dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{i=2}^n \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \\ &= \prod_{i=2}^n \frac{(i+1)(i-1)}{i^2} = \frac{(n+1)! \cdot (n-1)!}{2 \cdot (n!)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}; \end{aligned}$$

protože $n > 1$, je $\frac{n+1}{n} > 1$, a tudíž

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} > \frac{1}{2}.$$

Tím je dokázáno, že pro každé přirozené číslo $n > 1$ platí (1).

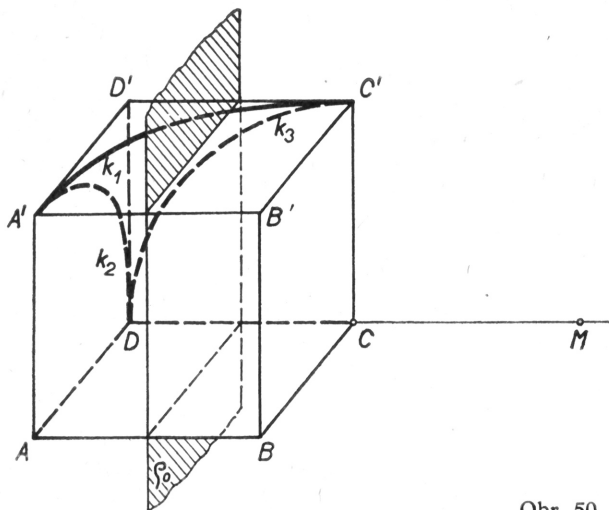
Řešil JAN KNYTL

žák 4.a gymnasia v Novém Jičíně

A-III-2

2. Je dána krychle $ABCD A' B' C' D'$. Budiž X obraz bodu C v některém otočení kolem osy, které převede vrchol A ve vrchol B . Určete množinu všech takových bodů X , které leží na povrchu dané krychle. (8 bodů)

ŘEŠENÍ. Použijeme věty, že každé otočení kolem osy o v prostoru lze složit ze dvou rovinových souměrností, jejichž



Obr. 50

roviny jsou různoběžné a protínají se v přímce o ; za rovinu souměrnosti jedné z nich lze zvolit libovolnou rovinu svazku o . Otočení, které převádí vrchol A ve vrchol B (obr. 50), má osu o (prostorově) kolmou k přímce AB . Proto přímka o leží v rovině souměrnosti ϱ_0 úsečky AB . Souměrnost φ_0 podle roviny ϱ_0 převede bod C v bod D . Všechna otočení převádějící A v B dostaneme, složíme-li φ_0 se souměrností (proměnnou) φ podle roviny ϱ ; ϱ je libovolná rovina trsu (B) , pro niž platí $\varrho \nparallel \varrho_0$. Je tedy vyloučena rovina BCB' . Paty všech kolmic spuštěných z bodu D na roviny trsu (B) vyplní (podle *obrácení Thaletovy věty*) kulovou plochu Γ sestrojenou nad průměrem BD . Z plochy Γ je třeba vyloučit bod C . Obrazy bodu C ve všech uvedených otočeních vyplní kulovou plochu Γ' , která je obrazem plochy Γ v stejnolehlosti se středem D a koeficientem 2. Je tedy Γ' kulová plocha se středem B a poloměrem BD . Z této plochy Γ' je vyloučen bod $M \neq D$ přímky CD , pro který platí $DC = MC$.

Kulová plocha Γ' , která má střed B a poloměr BD , protne povrch krychle ve třech čtvrtkružnicích: čtvrtkružnici k_1 ležící v rovině $A'B'C'$ a omezené body A' , C' , čtvrtkružnici k_2 v rovině ADA' omezené body A' , D a čtvrtkružnici k_3 v rovině CDC' omezené body C' , D . Je $\mathbf{M} = k_1 \cup k_2 \cup k_3$.

A-III-3

3. Nech pre postupnosť mnohočlenov

$$P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), \dots$$

plati

$$P_0(x) = 2, \quad P_1(x) = x$$

a pre všetky $n \geq 1$ vzťah

$$P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = xP_n(x). \quad (1)$$

a) Nájdite mnohočlen

$$Q_n(x) = P_n^2(x) - xP_n(x)P_{n-1}(x) + P_{n-1}^2(x), \quad (2)$$

pre $n = 1972$.

b) Vyjadrite mnohočlen $[P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)]^2$ pomocou mnohočlenov $P_n(x)$ a $Q_n(x)$.

RIEŠENIE*).

a) Použitím vzťahu (1), ktorý platí pre všetky $n \geq 1$, dostaneme

$$P_2 = x^2 - 2, \quad P_3 = x^3 - 3x. \quad (3)$$

Ďalej vypočítajme priamo z definície mnohočlena Q_n a zo vzťahov (3) mnohočleny Q_1, Q_2, Q_3 . Dostaneme

$$Q_1 = x^2 - x \cdot x \cdot 2 + 4 = 4 - x^2,$$

$$Q_2 = (x^2 - 2)^2 - x(x^2 - 2) \cdot x + x^2 = 4 - x^2,$$

$$Q_3 = (x^3 - 3x)^2 - x(x^3 - 3x)(x^2 - 2) + (x^2 - 2)^2 = 4 - x^2.$$

Tieto výsledky nás vedú k domnienke, že platí

$$Q_n = 4 - x^2$$

pre každé $n \geq 1$. Pravdivosť tejto domnienky potvrdíme použitím *matematickej indukcie*:

1° Pre $n = 1$ zrejme platí $Q_1 = 4 - x^2$.

2° Nech pre nejaké $n = k \geq 1$ platí $Q_k = 4 - x^2$. Dokážeme, že potom platí $Q_{k+1} - Q_k = 0$, t. j. $Q_{k+1} = Q_k$.

Dôkaz. Podľa vzťahu, ktorým bol mnohočlen Q_n definovaný, platí pre každé $k \geq 1$

$$\begin{aligned} Q_{k+1} - Q_k &= P_{k+1}^2 - x P_{k+1} P_k + P_k^2 - P_k^2 + \\ &\quad + x P_k P_{k-1} - P_{k-1}^2, \end{aligned}$$

*) Argument x v označení mnohočlenov budeme kvôli zjednodušeniu zásadne vynechávať. Riešiteľ ho však písal.

z čoho dostaneme po úpravách

$$Q_{k+1} - Q_k = (P_{k+1} - P_{k-1}) \cdot (P_{k+1} + P_{k-1} - xP_k).$$

Použitím (1) pre $n = k$ (čo môžeme urobiť, pretože $k \geq 1$) ľahko dostaneme $Q_{k+1} - Q_k = 0$, čo sme mali dokázať.

Z predchádzajúceho je zrejmé, že platí

$$Q_n = 4 - x^2$$

pre každé $n \geq 1$. Je teda

$$Q_{1972} = 4 - x^2.$$

b) Označme

$$R_n = P_{n+1} - P_{n-1}.$$

Podľa (1) je pre každé $n \geq 1$

$$R_n = x P_n - 2 P_{n-1}.$$

Teda

$$R_n^2 = x^2 P_n^2 - 4x P_n P_{n-1} + 4 P_{n-1}^2. \quad (4)$$

Zo vzťahu (2) je zrejmé

$$Q_n - P_n^2 = -x P_n P_{n-1} + P_{n-1}^2.$$

Dosadením posledného vzťahu do (4) dostaneme

$$R_n^2 = x^2 P_n^2 + 4(Q_n - P_n^2) = (x^2 - 4)P_n^2 + 4 Q_n.$$

Pretože pre každé $n \geq 1$ platí $Q_n = 4 - x^2$, ako sme zistili v a), bude

$$R_n^2 = (P_{n+1} - P_{n-1})^2 = Q_n(4 - P_n^2)$$

pre každé $n \geq 1$.

Riešil MILAN KOLIBIAR,
žiak 3. tr. gymnázia Jura Hronca
v Bratislave

4. Dokážte, že existuje nekonečne mnoho prirodzených čísel a , ktoré majú túto vlastnosť:

Pre každé prirodzené číslo n je $n^4 + a$ číslo zložené. (V)

Udajte päť čísel a , ktoré majú uvedenú vlastnosť. (6 bodov)

RIEŠENIE. Nech je a kladné číslo. Potom platí

$$\begin{aligned} x &= n^4 + a = n^4 + 2n^2 \sqrt[4]{a} + a - 2n^2 \sqrt[4]{a} = \\ &= (n^2 + \sqrt[4]{a})^2 - (n\sqrt{2} \sqrt[4]{a})^2 \end{aligned}$$

čiže

$$x = (n^2 + \sqrt[4]{a} + n\sqrt{2} \sqrt[4]{a})(n^2 + \sqrt[4]{a} - n\sqrt{2} \sqrt[4]{a}). \quad (1)$$

Označme $\sqrt{2} \sqrt[4]{a} = 2b$. Potom je

$$a = 4b^4. \quad (2)$$

Rozklad (1) potom nadobudne tvar

$$x = (n^2 + 2b^2 + 2bn)(n^2 + 2b^2 - 2bn). \quad (3)$$

Oboch činiteľov súčinu (3) upravíme

$$\begin{aligned} x_1 &= n^2 + 2b^2 + 2bn = (n + b)^2 + b^2, \\ x_2 &= n^2 + 2b^2 - 2bn = (n - b)^2 + b^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Ak zvolíme prirodzené číslo $b > 1$, sú podľa (2), (4) čísla a , x_1 , x_2 prirodzené a platí $x_1 \geq 13$, $x_2 \geq 4$ a teda číslo $x = x_1 x_2$ je pre každé prirodzené číslo n zložené. Dokázali sme tak, že prirodzených čísel a , ktoré majú vlastnosť (V) je nekonečne mnoho.

Ak dosadíme do (2) $b = 2, 3, 4, 5, 6$, dostaneme päť čísel

$$a = 64, 324, 1\,024, 2\,500, 5\,184,$$

ktoré všetky majú uvedenú vlastnosť (V).

5. Kolik dvojic navzájem disjunktních podmnožin má množina o n prvcích? (7 bodů)

ŘEŠENÍ. Nejprve je třeba určit počet všech *uspořádaných dvojic* navzájem disjunktních podmnožin dané množiny, která má n prvků. Účastníci soutěže řešili tento problém celkem třemi způsoby.

1. *způsob* (takto postupovali téměř všichni řešitelé).

Z dané množiny **M** o n prvcích máme vybrat dvě disjunktní podmnožiny **A** a **B**. Nejprve vybereme první z nich, **A**. Ta může mít 0, 1, 2, ..., n prvků; označme k jejich počet. Při daném k pak druhá množina **B** může mít 0, 1, ..., $n-k$ prvků; jejich počet označme j .

Množinu **A** o k prvcích lze z dané množiny **M** o n prvcích vybrat $\binom{n}{k}$ způsoby. Množinu **B** o j prvcích lze ze zbývajících $n-k$ prvků sestavit $\binom{n-k}{j}$ způsoby. Celkem tedy bude

$$\sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} \cdot \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} \right]$$

způsobů, jak vybrat nejprve množinu **A** a pak množinu **B**. Podle známého vzorce

$$\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} = 2^m$$

je však

$$\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} = 2^{n-k}.$$

Potom podle binomického vzorce je

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n,$$

tj. uspořádaných dvojic navzájem disjunktních podmnožin množiny **M** je

$$3^n.$$

2. *způsob.* (Použil ho PAVEL FERST, žák 2. d gymnasia na Sladkovského náměstí v Praze 3 - Žižkov.)

Představme si, že vytváříme uspořádané dvojice disjunktních podmnožin množiny **M**. Vezmeme-li libovolný prvek množiny **M**, pak pro něj máme právě tři možnosti. Buď se stane prvkem první podmnožiny, nebo prvkem druhé podmnožiny, nebo nebude patřit ani do jedné z těchto podmnožin. Má-li množina **M** n prvků, pak tedy uspořádaných dvojic navzájem disjunktních podmnožin množiny **M** je

$$3^n.$$

3. *způsob.* (Použil jej MIROSLAV KMOŠEK, žák 3. a gymnasia, tř. kpt. Jaroše v Brně.)

Množina **M** o n prvcích má právě $\binom{n}{k}$ k -prvkových podmnožin. Vezmeme jednu z nich a uvažujme množinu všech jejích podmnožin. Libovolná podmnožina a její doplněk v oné k -prvkové množině tvoří uspořádanou dvojici disjunktních podmnožin množiny **M**. Pro danou k -prvkovou podmnožinu existuje 2^k jejích podmnožin, tedy i 2^k uspořádaných dvojic jejích disjunktních podmnožin, sjednocením jejichž prvků dostaneme tuto k -prvkovou množinu. Je tedy hledaný počet uspořádaných dvojic disjunktních podmnožin roven

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n.$$

ZÁVĚR ŘEŠENÍ. Každá *neuspořádaná* dvojice navzájem disjunktních podmnožin **A**, **B** množiny **M** je v počtu 3^n započtena dvakrát — jednou jako **[A, B]** a podruhé jako **[B, A]**. Výjimku tvoří případ **A** = ∅, **B** = ∅, kdy jediné je **A** = **B**. Tedy $3^n + 1$ je právě dvojnásobek počtu všech dvojic disjunktních podmnožin množiny **M**. Hledaný počet je tedy

$$\frac{3^n + 1}{2}.$$

A-III-6

6. V rovine ϱ sú dané dva rôzne body *A*, *S*. Ďalej sú dané kladné čísla d, ω ; $\omega < 180^\circ$. Zostrojte všetky body *X* roviny ϱ , ktoré majú túto vlastnosť:

Pri otočení v rovine ϱ okolo stredu *S* v kladnom zmysle o uhol veľkosti ω° prejde bod *X* do takého bodu *X'*, že $XX' = d$ a bod *A* leží na úsečke XX' . Akú podmienku musia splňovať čísla d, ω , aby taký bod *X* existoval? (7 bodů)

ŘEŠENÍ. ROZBOR. Podle obr. 51 předpokládejme, že bod *X* je řešením úlohy. Pak platí $XX' = d$. Je-li *S'* střed úsečky XX' , je

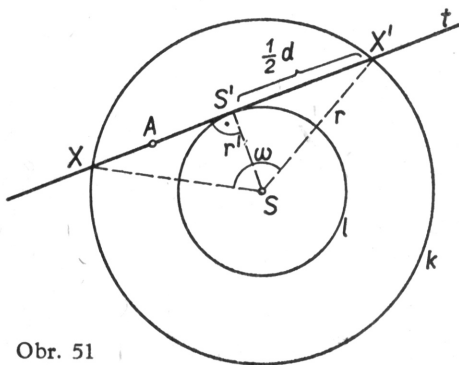
$$S'X = \frac{d}{2}, \quad \angle XSS' = \frac{\omega}{2}, \quad SX = SX' = r = \frac{d}{2 \sin \frac{\omega}{2}},$$

$$SS' = r' = r \cdot \cos \frac{\omega}{2} = \frac{d}{2} \cdot \cotg \frac{\omega}{2}.$$

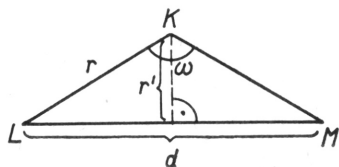
Bod *X* tedy leží na kružnici $k = (S; r)$ a zároveň leží na tečně *t* vedené bodem *A* ke kružnici $l = (S, r')$.

Odtud plyne KONSTRUKCE. Sestrojíme pomocný rovnostranný trojúhelník *KLM* se základnou $LM = d$ a úhlem

* $LKM = \omega$. Pak je zřejmě $KL = KM = r$ a výška z vrcholu K na základnu má velikost r' (obr. 52). V rovině ϱ sestrojíme kružnice $k = (S; r)$ a $l = (S; r')$. Bodem A vedeme tečnu t ke kružnici l . Průsečíky tečny t s kružnicí k označíme X, X' tak, aby bylo $\widehat{XSX'} = \omega$. Potom pokud bod A leží na úsečce XX' , je bod X hledaný bod.



Obr. 51



Obr. 52

ZKOUŠKA. Z rozboru plyne, že $XX' = d$ a že $\angle XSX' = \omega$. Podle posledního bodu konstrukce platí $\widehat{XSX'} = \omega$. Je tedy bod X' obrazem bodu X v otočení okolo středu S v kladném smyslu o úhel velikosti ω° . Podle konstrukce je též splněna podmínka, že bod A leží na úsečce XX' .

DISKUSE. Kružnice k a l lze sestrojit vždy a platí $r' < r$, neboť $r' = r \cdot \cos \frac{\omega}{2}$ a $0 < \frac{\omega}{2} < 90^\circ$. K tomu, aby bod A ležel na tětivě XX' kružnice k a aby bylo možno jím vést tečnu ke kružnici l , je nutné a stačí, aby platilo

$$r' \leq SA \leq r,$$

tj.

$$\frac{d}{2} \cdot \cotg \frac{\omega}{2} \leq SA \leq \frac{d}{2 \sin \frac{\omega}{2}}, \quad (P)$$

odkud plyne

$$2 \cdot SA \cdot \sin \frac{\omega}{2} \leq d \leq 2 \cdot SA \cdot \tg \frac{\omega}{2}. \quad (P')$$

Tedy (P) , resp. (P') , je podmínka řešitelnosti úlohy. Pro $d = 2SA \tg \frac{\omega}{2}$ existuje jedno řešení, neboť $A \in l$ a tedy existuje právě jedna tečna t ke kružnici l ; pro

$$2SA \sin \frac{\omega}{2} \leq d < 2 \cdot SA \cdot \tg \frac{\omega}{2}$$

existují dvě řešení, neboť bodem A lze vést dvě různé tečny ke kružnici l .

Řešil KAREL HORÁK,
žák 3. b gymnasia ve Strakonících

VI. Zpráva o XIV. mezinárodní matematické olympiádě

XIV. mezinárodní matematická olympiáda (MMO) se konala ve dnech 5.—18. VII. 1972 v *Polsku*, ve *Varšavě* a v *Toruni*. Jejím pořadatelem bylo polské ministerstvo osvěty a výchovy.

Průběh *XIV. MMO* odpovídal v podstatných rysech tradičnímu programu *MMO*, jak se v minulých letech již ustálil. Nejprve se 5. VII. sjela do *Varšavy* mezinárodní jury složená z vedoucích delegací zúčastněných zemí, aby pod vedením svého předsedy, jímž byl *prof. S. Balcerzyk* z toruňské university, vybrala úlohy, připravila soutěž a řídila pak její další průběh. Přípravné práce skončily 8. VII. Mezitím přijeli do *Varšavy* také zástupci vedoucích a osmičlenná družstva soutěžících žáků. Žáci však byli ihned od svých vedoucích odděleni a přísně izolováni; péči o ně převzali polští průvodci — tlumočníci. Již 8. VII. odjeli žáci do *Toruně*. Tam je později — oklikami a ve stálé izolaci — následovala také jury.

Vlastní soutěž se konala v *Toruni* ve dnech 10. a 11. VII. Po ní měli žáci již volno a mohli se na velkém autobusovém výletě do severních částí Polska (*Olštýn, Frombork, Malbork*) seznamovat s přírodními krásami a historickými památkami tohoto kraje. Jury mezitím hodnotila žákovská řešení soutěžních úloh; hodnocení vedoucích delegací sjednocovali jako obvykle koordinátoři z řad mladých polských matematiků, většinou bývalých olympioniků. Na závěrečném zasedání jury dne 14. VII. bylo pak dohodnuto konečné rozdělení cen.

Po návratu žáků z výletu odjeli všichni účastníci *MMO* na druhý, společný výlet do *Poznaně*. Cestou navštívili též praslovanskou osadu v *Biskupíně* a město *Hněždno*. Z *Poznaně* se pak

16. VII. všichni vrátili znovu *do Varšavy*, kde se 17. VII. konalo slavnostní zakončení *XIV. MMO* spojené s rozdělením cen.

V průběhu let vyrostla *MMO* postupně v rozsáhlou mezinárodní akci, jejíž význam daleko přesahuje rámec samotné matematiky. Svědčila o tom též kulturní a společenská část programu *XIV. MMO*. Velkou pozornost věnovaly *MMO* polské orgány školské správy. Ministr osvěty a výchovy *Ź. Kuberski* přijal 6. VII. vedoucí delegací a na zakončení uspořádal 17. VII. v paláci *v Łazienkách* druhé přijetí pro vedoucí i jejich zástupce. Na zahájení soutěže *v Toruni* dne 10. VII. byl přítomen náměstek ministra *Ź. Wolczyk*. Také představitelé města *Toruně* plně oceňovali význam *MMO*; setkali se s celou jury na přijetí uspořádaném 11. VII. v prostorách historické toruňské radnice.

MMO se dostalo také patřičné publicity v polském tisku. Toruňský denník *Nowości* věnoval *MMO* při zahájení značnou část své titulní strany dne 11. VII.; varšavské deníky přinesly 18. VII. po zakončení *MMO* zprávu o jejích výsledcích.

XIV. MMO se zúčastnily delegace ze 14 zemí, a to:

Rakouska (A), *Bulharska (BG)*, *Kuby (C)*, *Československa (CS)*, *NDR (D)*, *Velké Británie (GB)*, *Maďarska (H)*, *Mon-golska (M)*, *Holandska (NL)*, *Polska (PL)*, *Rumunská (R)*, *Švédská (S)*, *Sovětského svazu (SU)* a *Źugoslávie (YU)*. Kromě toho byla od 14. VII. přítomna též pozorovatelka z *NSR*.

Zúčastněné země vyslaly k soutěži vesměs osmičlenná žákovská družstva, pouze z *Kuby* přijeli jen tři žáci; celkem bylo 107 soutěžících. *Československo* vyslalo družstvo osmi žáků gymnasií, byli to:

1. *Źan Brychta*, Praha (Pražáčka),
2. *Pavel Ferst*, Praha (Sladkovského),
3. *Źan Frynta*, Praha (W. Piecka),
4. *Karel Horák*, Strakonice,
5. *Miroslav Kmošek*, Brno (kpt. Jaroše),

6. *Petr Slačálek*, Praha (W. Piecka),
7. *Ľaromír Šimša*, Ostrava (Šmeralova),
8. *Imrich Vrto*, Rimavská Sobota.

Vedoucím čs. delegace byl *dr. František Zíteš*, CSc., vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze, zástupcem vedoucího byl *dr. Ľozef Moravčík*, CSc., docent Vysoké školy dopravní v Žilině.

Vlastní soutěž *XIV. MMO* spočívala jako obvykle v řešení šesti matematických úloh, které mezinárodní jury vybrala z materiálů připravených polskými pořadateli na základě návrhů došlých ze zúčastněných zemí. Na rozdíl od některých minulých let jury tentokrát výslovně opustila zásadu, že z jedné země může být přijata nejvýše jedna úloha, a dala přednost kvalitě úloh. To se nesporně příznivě odrazilo v konečném výběru. I když dobrých návrhů, zvláště ze stereometrie, nebylo mnoho, podařilo se poměrně brzy sestavit soubor šesti úloh dosti vyvážený, přiměřeně obtížný a odpovídající vcelku tradicím *MMO*.

Přijaté úlohy byly rozděleny do dvou skupin; *první* tři úlohy řešili žáci dne 10. VII., *druhé* tři úlohy 11. VII. *První den* měli na řešení úloh k dispozici 4 hodiny čistého času, *druhý den* o půl hodiny více, neboť poslední, šestá úloha byla považována za zvláště obtížnou.

Návrhy těchto úloh došly ze *Sovětského svazu* (úloha 1), *Holandska* (úlohy 2 a 4), *Velké Británie* (úlohy 3 a 6) a *Bulharska* (úloha 5); původní znění šesté úlohy však bylo v průběhu přípravných prací jury dosti pozměněno (zjednodušeno).

Obtížnost úloh ohodnotila jury body: za řešení první úlohy mohli soutěžící získat 5 bodů, za druhou úlohu 6 bodů, za úlohy 3, 4 a 5 po 7 bodech a za šestou úlohu 8 bodů; celkem tedy 40 bodů.

O kvalitě soutěžících svědčí, že *osm žáků* získalo maximální počet 40 bodů; ti byli ovšem odměněni *prvními cenami*. Ostatní ceny rozdělila jury takto: 16 *druhých cen* žákům, kteří získali 30—39 bodů a 30 *třetích cen* žákům, kteří získali 19—29 bodů.

Kromě toho byly uděleny 3 *zvláštní ceny* (za elegantní, resp. originální řešení některých úloh).

Čtyři českoslovenští žáci získali třetí ceny; byli to *Jan Brychta* (26 bodů), *Imrich Vrto* (21 bodů), *Jaromír Šimša* (20 bodů) a *Miroslav Kmošek* (19 bodů). Celkem získalo celé československé družstvo 130 bodů, což v neoficiální klasifikaci družstev podle počtu bodů znamenalo deváté místo.

Celkové výsledky dosažené zúčastněnými družstvy jsou shrnuty v *tabulce na str. 171*.

ÚLOHY XIV. MMO

V této části zprávy přinášíme české texty úloh XIV. MMO a jejich řešení. V některých případech jde o upravená řešení autorská, jindy zase o upravené verze řešení, jak je podali soutěžící. Na rozdíl od minulých let tedy nereprodukuje řešení předložená československými účastníky MMO, a to z důvodů technických a věcných.

O našem družstvu jako celku lze říci, že (poměrně) uspělo v úloze 1, 2 a 4, bylo slabší v úloze 3 a 6 a vůbec si nevědělo rady s úlohou 5. Při přípravě účastníků olympiády v příštím roce 1972/73 bude nutno vyvodit z této situace některé závěry, jako např. to, že bude třeba věnovat více času přípravě elementů analýzy. Stálým problémem je i — jak se letos znovu projevilo — psychická kondice a taktická příprava.

MMO-1

1. Dokažte, že v libovolné množině deseti různých dvojciferných přirozených čísel existují dvě neprázdné disjunktní podmnožiny takové, že součty jejich prvků jsou stejné.

ŘEŠENÍ. Libovolná množina o deseti prvcích má 1023 ne-

Tabulka

Družstva	Počet cen				Celkem bodů
	I	II	III	zvl.	
<i>A</i>			5		136
<i>BG</i>			2		120
<i>C *</i>)					14
<i>CS</i>			4		130
<i>D</i>	1	3	4	1	239
<i>GB</i>		2	4		179
<i>H</i>	3	3	2		263
<i>M</i>					49
<i>NL</i>					51
<i>PL</i>	1	1	1	1	160
<i>R</i>	1	3	1	1	206
<i>S **</i>)			2		60
<i>SU</i>	2	4	2		270
<i>YU</i>			3		136

*) V družstvu *Kuby* byli jen tři žáci.

**) Jeden *švédský žák* se nezúčastnil druhého dne soutěže a nebyl klasifikován.

prázdných podmnožin. Součet nejvýše deseti dvojčiferných čísel je nejvýše roven 990. Podle *Dirichletova principu* existují tedy vždy dvě neprázdné podmnožiny dané množiny deseti čísel, takové, že součty jejich prvků jsou stejné. Vynecháním eventuálních společných prvků z obou množin dostaneme dvě disjunktní neprázdné množiny s požadovanou vlastností.

POZNÁMKA. Bývá zvykem na *MMO*, že první úloha je poměrně lehká; žáci také většinou tuto úlohu vyřešili s maximálním ziskem bodů. Ztroskotali (zato úplně) jen ti, kterým nenapadlo použít *Dirichletova principu* (nebo jej neznali).

MMO-2

2. Dokažte, že pro každé přirozené $n \geq 4$ platí:

Každý tětívový čtyřúhelník lze rozdělit na n tětívových čtyřúhelníků, kde $n \geq 4$ je libovolné přirozené číslo.

ŘEŠENÍ. Rozlišíme několik případů jednak podle tvaru daného tětívového čtyřúhelníka, jednak podle čísla n .

I. Nechť daným čtyřúhelníkem je rovnoramenný lichoběžník. Ten lze snadno — pomocí $(n - 1)$ rovnoběžek se základnami — rozdělit na n rovnoramenných lichoběžníků, a to dokonce pro každé přirozené n . Poněvadž každý rovnoramenný lichoběžník je tětívový, je tím v tomto případě úloha rozřešena.

II. Nechť $n \geq 5$; daný tětívový čtyřúhelník může být libovolný. Jeho vrcholy označme po řadě A, B, C, D , a to tak, aby bylo

$$\sphericalangle DAB \leq \sphericalangle ABC.$$

Na straně AD najdeme bod E a na straně BC bod F ($A \neq E \neq D, B \neq F \neq C$) tak, aby $EF \parallel AB$. Potom čtyřúhelník $EFCD$ je opět tětívový, neboť má stejné úhly jako čtyřúhelník $ABCD$.

Jestliže

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC,$$

je $ABFE$ rovnostranný lichoběžník; ten rozdělíme podle I na $n-1$ tětiových čtyřúhelníků. Spolu s $EFCD$ budeme tedy mít n tětiových čtyřúhelníků.

Jestliže však

$$\sphericalangle DAB < \sphericalangle ABC,$$

pak na straně AB existuje bod $G (A \neq G \neq B)$ takový, že

$$\sphericalangle DGB = \sphericalangle GBC.$$

Je zřejmé, že $GBFE$ je rovnoramenný lichoběžník.

Budiž nyní S střed kružnice vepsané trojúhelníku AGD . Spustíme z S kolmice na strany trojúhelníku AGD , který tak rozdělíme na tři čtyřúhelníky, z nichž každý má dva protější úhly pravé, takže je tětiový.

Nyní už stačí jen rozdělit rovnoramenný lichoběžník $GBFE$ na $n-4$ tětiových čtyřúhelníků (způsobem popsaným v I), abychom dostali rozdělení čtyřúhelníka $ABCD$ na

$$1 + 3 + (n - 4) = n$$

tětiových čtyřúhelníků.

III. Nechť $n = 4$. Nechť S je střed kružnice opsané danému tětiovému čtyřúhelníku a nechť S leží uvnitř tohoto čtyřúhelníka. Spustíme-li z S kolmice na všechny čtyři strany čtyřúhelníka, rozdělí jej na čtyři čtyřúhelníky, z nichž každý má dva protější úhly pravé a je tedy tětiový.

IV. Nechť $n = 4$ a nechť střed S kružnice opsané danému čtyřúhelníku neleží uvnitř něho. Vrcholy čtyřúhelníka označme po řadě A, B, C, D tak, aby AB byla nejdelší strana čtyřúhelníka $ABCD$. Poněvadž S neleží uvnitř $ABCD$, jsou oba úhly $\sphericalangle BCD, \sphericalangle CDA$ tupé. Lze tedy najít uvnitř $ABCD$ dva body E, F s těmito vlastnostmi:

$$(i) EC \perp BC, \quad FD \perp AD;$$

$$(ii) EF \parallel AB;$$

$$(iii) ECDF \text{ je konvexní čtyřúhelník.}$$

Z bodů E, F spustíme kolmice na AB , jejich paty označme G, H tak, aby $EFGH$ byl obdélník.

Tím máme daný čtyřúhelník $ABCD$ rozdělen na čtyři čtyřúhelníky

$$AGFD, EFGH, BHEC, CEFD.$$

Avšak:

- 1) $EFGH$ je obdélník, je tedy tětivový.
- 2) Je $EH \perp BH$, $EC \perp BC$, takže čtyřúhelník $BCEH$ má dva protější úhly pravé — je tedy tětivový.
- 3) Obdobně z $FG \perp AG$, $FD \perp AD$ plyne, že čtyřúhelník $AGFD$ je tětivový.
- 4) Daný čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, takže
$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = \pi.$$

Ale

$$EF \parallel AB, EC \perp BC, \text{ takže}$$

$$\sphericalangle CEF = \sphericalangle ABC + \frac{1}{2} \pi$$

a zároveň

$$\sphericalangle FDC = \sphericalangle ADC - \frac{1}{2} \pi.$$

Odtud vyplývá rovnost

$$\sphericalangle CEF + \sphericalangle FDC = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = \pi;$$

čtyřúhelník $EFDC$ je tedy také tětivový.

Tím je úloha řešena ve všech případech.

POZNÁMKA. Na první pohled se tato úloha jeví jako časově velmi náročná. Je tomu skutečně tak; to je ovšem osud téměř všech úloh z geometrie, kdy se mají slovně popisovat konstrukce a podrobně vypisovat geometrické úvahy. To se však týká hlavně čistopisu — vlastní řešení hledají a odvozují žáci přirozeně na narýsovaném obrázku, což jde rychleji. Kromě toho byla úloha zařazena na první den soutěže spolu se snadnou

úlohou první, na jejíž řešení se naopak spotřebovalo méně času.

Z našich žáků jen dva podali úplné řešení druhé úlohy. Většinou zapomínali na to, že konstrukce uvedené v III. nelze použít v případě IV.

Uvedené řešení není ovšem jediné. Ve skutečnosti se v soutěži objevilo téměř tolik variant a úprav, kolik bylo řešitelů. Proto také tato úloha kladla největší nároky na koordinátory. Výsledné bodové ohodnocení žákovských řešení bylo spravedlivé ve smyslu rovnosti všech soutěžících, méně už ve smyslu ocenění objektivní obtížnosti rozřešených či nerozřešených případů. Přispěla k tomu i zásada nedělitelnosti bodů při bodování.

MMO-3

3. Pro každá dvě celá nezáporná čísla m, n je

$$\frac{(2m)! (2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

celé číslo; dokažte.

ŘEŠENÍ. Důkaz provedeme *indukcí*. Tvrzení platí pro $n = 0$, neboť

$$\frac{(2m)!0!}{m!0!(m+0)!} = \frac{(2m)!}{m!m!} = \binom{2m}{m}$$

je binomický koeficient, a tedy celé číslo (pro každé $m \geq 0$).

Předpokládejme, že jsme tvrzení dokázali již pro všechna $n < k$, kde k je přirozené číslo a všechna $m \geq 0$. Označme

$$\frac{(2m)! (2n)!}{m!n!(m+n)!} = f(m, n).$$

Přímým výpočtem snadno ověříme, že pro každé $m \geq 0$ platí

$$f(m, k-1) = f(m, k) \frac{m+k}{2(2k-1)},$$

$$f(m+1, k-1) = f(m, k) \frac{2m+1}{2k-1},$$

takže

$$f(m, k) = 4f(m, k-1) - f(m+1, k-1).$$

Avšak čísla $f(m, k-1)$ a $f(m+1, k-1)$ jsou podle indukčního předpokladu celá, tedy také $f(m, k)$ je celé číslo.

JINÉ ŘEŠENÍ je založeno na použití vzorce známého z elementární teorie čísel. Je-li n přirozené číslo a p prvočíslo, pak p^α dělí $n!$ právě když

$$(x) \quad \alpha \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k} \right].$$

Pomocí tohoto vzorce se pak dokáže pro každé prvočíslo p , že maximální α takové, že p^α dělí číslo $(2m)!(2n)!$ není nikdy menší nežli maximální β takové, že p^β dělí číslo $m!n!(m+n)!$

POZNÁMKA. Zdá se, že i tato úloha byla pro naše žáky obtížná. Rozřešili ji jen dva, a to druhým způsobem, neboť znali vzorec (x).

Idea prvního způsobu řešení založeného na odvození pomocného rekurentního vzorce našim žákům zřejmě nebyla dost blízká. Někteří se sice tímto směrem vydali, ale zapletli se do složitých výpočtů různých numerických hodnot a neuvědomili si včas, že se žádá jen důkaz toho, že jde o celá čísla. Stálo by snad za pokus posílit přípravu olympioniků v problematice tzv. *metody neurčitých součinitelů*.

MMO-4

4. Najděte všechna řešení $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, kde $x_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ jsou kladná reálná čísla, soustavy nerovností

176

Najděte všechny pětice x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 kladných reálných čísel, pro něž platí

$$(1) \quad (x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \leq 0,$$

$$(2) \quad (x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \leq 0,$$

$$(3) \quad (x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \leq 0,$$

$$(4) \quad (x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \leq 0,$$

$$(5) \quad (x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \leq 0.$$

ŘEŠENÍ. Levé strany nerovností (1) — (5) roznásobíme a pak všechny nerovnosti sečteme. Dostaneme tak jedinou nerovnost

$$\begin{aligned} & x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_4^2 + x_4^2x_5^2 + x_5^2x_1^2 + \\ & + x_3^2x_5^2 + x_4^2x_1^2 + x_5^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 - \\ & - x_1^2x_3x_5 - x_2^2x_4x_1 - x_3^2x_5x_2 - x_4^2x_1x_3 - x_5^2x_2x_4 - \\ & - x_2^2x_3x_5 - x_3^2x_4x_1 - x_4^2x_5x_2 - x_5^2x_1x_3 - x_1^2x_2x_4 \leq 0, \end{aligned}$$

které ovšem musí každé řešení soustavy (1)—(5) také vyhovovat. Novou nerovnost vynásobíme dvěma a upravíme na tvar

$$\begin{aligned} & (x_1x_2 - x_1x_4)^2 + (x_1x_2 - x_2x_4)^2 + (x_2x_3 - x_2x_5)^2 + \\ & + (x_2x_3 - x_3x_5)^2 + (x_3x_4 - x_1x_3)^2 + (x_3x_4 - x_1x_4)^2 + \\ & + (x_4x_5 - x_2x_4)^2 + (x_4x_5 - x_2x_5)^2 + (x_1x_5 - x_1x_3)^2 + \\ & + (x_1x_5 - x_3x_5)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Avšak součet čtverců může být nekladný jen v tom případě, jsou-li všechny sčítance rovny 0. Platí tedy současně všechny rovnosti

$$x_1x_2 = x_1x_4 = x_2x_4,$$

$$x_2x_3 = x_2x_5 = x_3x_5,$$

$$x_3x_4 = x_1x_3 = x_1x_4,$$

$$x_4x_5 = x_2x_4 = x_2x_5,$$

$$x_1x_5 = x_1x_3 = x_3x_5.$$

Poněvadž však hledáme jen taková řešení, v nichž jsou všechna $x_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ kladná, vidíme, že musí být

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5. \quad (x)$$

Obráceně je však ihned vidět, že každá pětice $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ kladných čísel splňující (x) je řešením soustavy (1) — (5).

JINÉ ŘEŠENÍ, které se rovněž v soutěži objevilo, spočívá v postupném systematickém vyšetřování všech možných uspořádání podle velikosti kladných čísel x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 vyhovujících nerovnostem (1) — (5). Lze přitom využít toho, že daná soustava je zjevně invariantní vůči cyklickým permutacím neznámých, tzn. že platí

Je-li (a, b, c, d, e) řešením soustavy (1) — (5), je také (b, c, d, e, a) jejím řešením.

Můžeme tedy bez újmy obecnosti předpokládat, že platí

$$x_k \leq x_1, \quad k = 2, 3, 4, 5. \quad (6)$$

Potom ovšem v důsledku (1) bude

$$x_2^2 \leq x_3 x_5 \quad (7)$$

a obdobně podle (5) bude

$$x_5^2 \leq x_2 x_4. \quad (8)$$

Dále rozlišíme dva případy.

I. Nechť $x_4 \leq x_5$. Potom ze (4) a (8) plyne nerovnost

$$x_4^2 \leq x_1 x_3 \leq x_5^2 \leq x_2 x_4,$$

takže nutně $x_4 \leq x_2$. To však spolu s (8) dává

$$x_5^2 \leq x_2 x_4 \leq x_2^2,$$

takže také $x_5 \leq x_2$. Ze (7) potom snadno plyne

$$x_2^2 \leq x_3 x_5 \leq x_3 x_2,$$

a tedy $x_2 \leq x_3$. Celkem tedy máme

$$x_4 \leq x_5 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_1. \quad (9)$$

Z nerovnosti (4) potom dostáváme

$$x_4^2 \leq x_1x_3 \leq x_5^2 \leq x_3^2, \quad (10)$$

takže $x_1 \leq x_3$, což spolu s (6) dává $x_1 = x_3$. Dosazením zpět do (10) vyplyne $x_1^2 \leq x_5^2$, čili $x_1 \leq x_5$, a tedy podle (6) znovu $x_1 = x_5$. Kombinací (9) a (6) dostaneme rovnosti

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_5.$$

Nerovnost (2) má pak tvar

$$(x_1^2 - x_1x_4)^2 \leq 0,$$

což je při (6) možné jen když $x_1 = x_4$. Musí tedy opět platit

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5. \quad (\text{x})$$

II. Nechť $x_5 < x_4$. Potom (4) a (6) dává

$$x_5^2 \leq x_1x_3 \leq x_4^2 \leq x_1x_4,$$

a tedy $x_3 \leq x_4$. Ze (7) plyne pak

$$x_2^2 \leq x_3x_5 < x_3x_4 \leq x_4^2,$$

takže $x_2 < x_4$, tzn.

$$x_2^2 < x_2x_4 \leq x_1x_4.$$

Avšak odtud a z (2) dostaneme

$$x_3^2 \geq x_1x_4 \geq x_4^2,$$

tzn. $x_3 \geq x_4$, takže je nutně $x_3 = x_4$. Dosazením do (3) dostaneme nerovnost

$$(x_3^2 - x_2x_5)^2 \leq 0,$$

je tedy

$$x_3^2 = x_2x_5.$$

Poněvadž však, jak již víme, je $x_2 < x_4 = x_3$, musí být $x_5 \geq x_3 = x_4$, ale to je spor s předpokladem $x_4 > x_5$. Příklad II není tedy možný a podle I nutně platí (x). (Postačitelnost (x) je opět zřejmá.)

POZNÁMKA. Při řešení této čtvrté úlohy byli českoslovenští žáci poměrně velmi úspěšní; z 56 možných bodů získali celkem 44 body, přitom šest z nich podalo úplné a správné řešení. Je vidět, že jim tato tematika není cizí a že dovedou najít cesty k řešení.

Relativně častou chybou, která se objevovala v žákovských řešeních, byl (nesprávný) předpoklad, že soustava (1) — (5) je invariantní vůči všem permutacím neznámých, nejenom vůči permutacím cyklickým. Konečný výsledek je sice stejný, avšak mezera v úvaze je podstatná a bodové ocenění na MMO tomu odpovídalo.

MMO-5

5. Nechť f a g jsou dvě reálné funkce definované v intervalu $(-\infty, +\infty)$ tak, že pro všechna x a y platí

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y). \quad (x)$$

Dokažte: Jestliže f není identicky rovna nule a jestliže $|f(x)| \leq 1$ pro všechna reálná x , potom také $|g(y)| \leq 1$ pro všechna reálná y .

ŘEŠENÍ. Označme $A = \sup |f(x)|$; podle předpokladů je $A \leq 1$ (stačilo by ovšem $A < \infty$). Nechť pro některé reálné y_0 je $|g(y_0)| = 1 + h > 1$. Potom však pro každé reálné x platí

$$f(x) \cdot g(y_0) = \frac{1}{2} [f(x+y_0) + f(x-y_0)],$$

a tedy

$$|f(x)| \leq \frac{|f(x+y_0)| + |f(x-y_0)|}{2|g(y_0)|} \leq \frac{A}{1+h},$$

což je v rozporu s definicí A . Není tedy možné, aby takové y_0 existovalo, je tedy $|g(y)| \leq 1$ pro všechna reálná y .

JINÉ ŘEŠENÍ. Označme opět $A = \sup |f(x)|$. Poněvadž pro každé reálné x, y je

$2|f(x)| \cdot |g(y)| \leq |f(x+y)| + |f(x-y)| \leq 2A$,
je také

$$|g(y)| \leq \frac{A}{|f(x)|}$$

pro každé x , pro které je $f(x) \neq 0$ (a taková x podle předpokladu existují) a pro všechna reálná y . Podle definice suprema lze ke každému $\varepsilon > 0$ najít x_ε tak, aby

$$|f(x_\varepsilon)| > A - \varepsilon;$$

pro takové x_ε tedy platí

$$|g(y)| \leq \frac{A}{A - \varepsilon}$$

pro všechna reálná y . Poněvadž ε lze zvolit libovolně malé, musí být $|g(y)| \leq 1$ pro všechna y , c. b. d.

Ještě JINÉ ŘEŠENÍ je založeno na této *pomocné úvaze*:
Nechť y je libovolné reálné číslo. Pak ke každému reálnému x lze najít x' tak, že platí

$$|f(x')| \geq |f(x)| \cdot |g(y)|.$$

Skutečně z rovnosti (x) plyne nerovnost

$$2|f(x)| \cdot |g(y)| \leq |f(x+y)| + |f(x-y)|,$$

to však znamená, že platí aspoň jedna z nerovností

$$|f(x+y)| \geq |f(x)| \cdot |g(y)|,$$

$$|f(x-y)| \geq |f(x)| \cdot |g(y)|.$$

V prvním případě stačí položit $x' = x + y$, ve druhém případě pak $x' = x - y$.

Budiž nyní x_0 takové, že $f(x_0) \neq 0$ — takové x_0 existuje podle předpokladu — a budiž y libovolné reálné číslo. Postupem odvozeným v pomocné úvaze sestrojíme nyní posloupnost reálných čísel $x_0, x_1, x_2, \dots$, tak, aby pro $k = 1, 2, 3, \dots$ platilo

$$|f(x_k)| \geq |f(x_{k-1})| \cdot |g(y)|.$$

Bude pak zřejmě (důkaz indukcí)

$$|f(x_k)| \geq |f(x_0)| \cdot |g(y)|^k$$

pro všechna přirozená k . Poněvadž však $f(x_0) \neq 0$ a $|f(x_k)| \leq 1$ pro $k = 1, 2, 3, \dots$, platí pro všechna $k \geq 1$ nerovnost

$$|g(y)|^k = \frac{|f(x_k)|}{|f(x_0)|} \leq \frac{1}{|f(x_0)|}.$$

To je ovšem možné jenom když je

$$|g(y)| \leq 1,$$

což jsme měli dokázat.

POZNÁMKA. I když tato úloha není v podstatě nijak zvlášť těžká, je její tematika v matematických olympiádách zatím ne právě obvyklá. Žáci středních škol (např. našich) většinou ještě neovládají tak dokonale základní pojmy matematické analýzy. Neznají, popř. neuvědomují si např. podstatu rozdílu mezi supremem a maximem funkce. Krátké řešení (za obecnějších předpokladů) uvedené zde jako první podal pouze jeden polský žák; bylo odměněno zvláštní cenou. Původní autorské řešení je tu uvedeno jako třetí.

6. Jsou dány čtyři ~~vesměš~~ různé rovnoběžné roviny. Dokažte, že existuje pravidelný čtyřstěn, který má v každé z daných rovin jeden vrchol.

ŘEŠENÍ. Dané čtyři roviny označme π , ϱ , σ , τ tak, aby ϱ ležela mezi π a σ a aby σ ležela mezi ϱ a τ . Dále označme a vzdálenost π od ϱ , b vzdálenost ϱ od σ a c vzdálenost σ od τ .

Vezměme si nyní pravidelný čtyřstěn $A'B'C'D'$ s hranou délky 1. Na hraně $A'C'$ nalezneme bod E' ve vzdálenosti

$$A'E' = \frac{a}{a+b}$$

a na hraně $A'D'$ bod F' ve vzdálenosti

$$A'F' = \frac{a}{a+b+c}.$$

Body B' , E' , F' neleží na přímce a určují tedy rovinu, označme ji ϱ' . Body A' , C' , D' vedme po řadě roviny π' , σ' , τ' rovnoběžné s rovinou ϱ' .

Označme a' vzdálenost rovin π' a ϱ' , b' vzdálenost rovin ϱ' a σ' a c' vzdálenost rovin σ' a τ' . Platí ovšem zřejmě

$$a' : b' : c' = a : b : c.$$

Na čtyřstěn $A'B'C'D'$ a roviny π' , ϱ' , σ' , τ' aplikujeme nyní dvě zobrazení. První z nich bude *homotetie* (se středem např. A'), která ze čtyřstěnu $A'B'C'D'$ vytvoří pravidelný čtyřstěn

$A''B''C''D''$ ($A'' \equiv A'$) s hranou délky $\frac{a}{a'}$. Roviny π' , ϱ' , σ' , τ'

přejdou přitom ve čtyři rovnoběžné roviny π'' , ϱ'' , σ'' , τ'' ; jejich vzdálenosti jsou zřejmě a (π'' a ϱ''), b (ϱ'' a σ''), c (σ'' a τ'').

Druhým zobrazáním bude *translace a otočení* (přímé shodné) takové, aby π'' přešla v π , ϱ'' v ϱ , σ'' v σ a τ'' v τ . Čtyřstěn $ABCD$, který tímto zobrazáním dostaneme z $A''B''C''D''$, bude již vyhovovat podmínkám úlohy.

POZNÁMKA. Toto jednoduché řešení není ovšem jediné možné. Někteří soutěžící řešili úlohu poměrně složitými úvahami o spojitých pohybech v prostoru, při nichž postupně umísťovali jednotlivé vrcholy pravidelného čtyřřtěnu (s proměnlivou délkou hrany) do daných rovin. Jiní se zase pokoušeli řešit úlohu analyticky.

Není přitom bez zajímavosti skutečnost, že z osmi našich účastníků XIV. MMO připadl na prosté řešení na základě podobnosti právě ten nejmladší — žák 2. ročníku, který se ještě se stereometrií ve škole nesetkal.

Jinak byl slabší výkon čs. družstva u této úlohy překvapením, neboť stereometrie a speciálně pak geometrie čtyřřtěnu patří již tradičně k oborům, z nichž se zadávají úlohy v našich matematických olympiádách. Také při přípravě olympioniků se stereometrii věnuje vždy plná pozornost.

MEZINÁRODNÍ JURY XIV. MMO

Předseda: *Stanislav Balcerzyk*, Toruň

Členové (vedoucí delegací):

A.	<i>Thomas Mühlgassner</i> , Eisenstadt
BG	<i>I. R. Prodanov</i> , Sofie
C.	<i>Luis J. Davidson</i> , Havana
CS	<i>František Zítek</i> , Praha
D.	<i>Helmuth Bausch</i> , Berlín
GB	<i>R. C. Lyness</i> , Blackpool
H	<i>Endre Hódi</i> , Budapešť
M	<i>U. Sanžmjatav</i> , Ulánbátar
NL	<i>A. van Tooren</i> , Leusden
R	<i>Dimitrie Dragicescu</i> , Bukurešť
S	<i>K. Halisteová Anierová</i> , Umeå
SU	<i>Valentin A. Skvorcov</i> , Moskva
YU	<i>Vladimír Mičić</i> , Bělehrad

ZÁSTUPCI VEDOUCÍCH

A	<i>Wolfgang Ratzinger, Linec</i>
BG	<i>Z. D. Karagjosov, Burgas</i>
C	<i>Felix Recio, Havana</i>
CS	<i>Ľozef Moravčík, Žilina</i>
D	<i>G. Burosch, Roztoky</i>
GB	<i>M. Brownová, Londýn</i>
H	<i>István Reiman, Budapešť</i>
M	<i>Gombyn Zagdragčaa, Ulánbátar</i>
NL	<i>A. A. Hoogendoorn, Nijmegen</i>
R	<i>Constantin Ottescu, Bukurešť</i>
S	<i>T. Claesson, Lund</i>
SU	<i>Ivan S. Petrjakov, Reuto</i>
YU	<i>Tomo Pisanski, Lublaň</i>

OBSAH

Předmluva	3
I. O průběhu XXI. ročníku matematické olympiády	7
II. Přípravné úlohy I. kola	32
1. Kategorie A	32
2. Kategorie B	38
3. Kategorie C	46
4. Kategorie Z	56
III. Soutěžní úlohy I. kola	70
1. Kategorie A	70
2. Kategorie B	83
3. Kategorie C	97
4. Kategorie Z	114
IV. Soutěžní úlohy II. kola	125
1. Kategorie A	125
2. Kategorie B	133
3. Kategorie C	142
4. Kategorie Z	151
V. Soutěžní úlohy III. kola kategorie A	156
VI. Zpráva o XIV. mezinárodní matematické olympiádě	167

Edice Pomocné knihy pro žáky

Za přispění spolupracovníků zpracovali doc. Jan Vyšín, CSc.,
Vlastimil Macháček, Jiří Mída, dr. Jozef Moravčík, CSc.
a dr. František Zítek, CSc.

DVACÁTÝ PRVNÍ ROČNÍK
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Obálku a vazbu navrhl Jaromír Jarkovský
Vydání 1. — Praha 1973 — Počet stran 186
Odpovědná redaktorka: Květoslava Brázdová
Výtvarná redaktorka: Milada Slaninová
Technický redaktor: Milan Jaroš

Vytiskla Státní tiskárna, n. p., závod 2, Praha 2, Slezská 13
AA 7,24/6,57 AA textu, 0,67 AA grafiky/ — VA 7,64
Náklad 3550 výtisků
Tematická skupina a podskupina 03/2
Cena brožovaného výtisku Kčs 9,50
505/21,852

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze
jako svou publikaci č. 35-0-06

14-609-73	Kčs 9,50
-----------	----------

matematická olympiáda



SPN 35-0-06

14-609-73
03/2

Kčs 9,50