

22. ročník matematické olympiády

Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); František Zítek (editor): 22. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1972-1973. 15. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1974.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404630>

Terms of use:

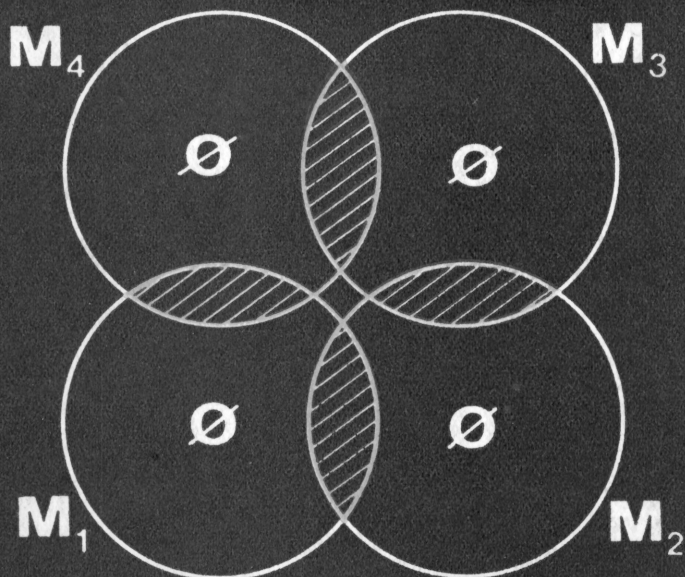
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Ústřední výbor
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
115 67 Praha 1, Žitná 25
telefon 22 66 01 - 3

XXII. ročník matematické olympiády



SPN

DVACÁTÝ DRUHÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

*Zpráva o řešení úloh ze soutěže
konané ve školním roce 1972—1973*

PATNÁCTÁ MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ
OLYMPIÁDA

Ústřední výbor
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
115 67 Praha 1, Žitná 25
telefon 22 66 01 - 3

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ
PRAHA

Za přispění spolupracovníků zpracovali doc. Jan Vyšín, CSc.,
Vlastimil Macháček, Jiří Mída, dr. Jozef Moravčík, CSc.,
a dr. František Zítek, CSc.

Slovenské části textu přeložil dr. Jozef Moravčík, CSc.
Recenzovali Jitka Kučerová a dr. Miroslav Šisler, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1974

Předmluva

Milí mladí přátelé, účastníci matematické olympiády,

v předmluvě k brožuře každého ročníku matematické olympiády se k Vám obrácíme s některou otázkou, která vás může zajímat. Letos chceme stručně pohovořit o komentářích k řešení soutěžních úloh.

Každá ze čtyř kategorií, v nichž je matematická olympiáda organizována, začíná prvním, *studijním kolem*. Účastníci tu dostanou jednak texty tzv. *přípravných úloh*, jednak text *soutěžních úloh*; řešení soutěžních úloh má mimo studijní cíle usnadnit i výběr účastníků pro postup do druhého kola. O poslání a významu prvního kola jsme už několikrát psali; sleduje se tu převážně velmi vážný cíl, aby se mladí zájemci přiučili v matematice něčemu novému, co jim bude užitečné nejen v další soutěži, ale i při dalším studiu a vzdělání. Řešení olympiádních úloh většinou není jen reprodukování naučených postupů, ale je to tvořivá práce, která potřebuje čas a někdy i pomoc. Času pro řešení úloh prvního kola máte poměrně dost; pomoc můžete žádat od svých učitelů matematiky. Aby oni mohli pomáhat vám, snažíme se pomoci my jim. Pomoc vám — účastníkům olympiády — nezáleží v tom, že se vám předvede úplné řešení úlohy, ale v tom, že jste uvedeni do metod řešení zadaných úloh, a to vhodnými podněty-impulsy. Pomoc ústředního výboru MO vašim učitelům spočívá v tom, že vydáváme už několik let ko-

mentáře, ve kterých je nejen naznačeno řešení (autorská řešení úloh se vydávala už od prvního ročníku *MO*), ale kde je i rozbor metod řešení, kde jsou zobecnění i varianty úloh apod. S vydáváním komentářů — nejprve jen pro kategorii *Z* — se začalo v *XIX.* ročníku; pak přistoupila kategorie *C*, a protože se tato akce osvědčila, vydávají se od *XXII.* ročníku *MO* komentáře ke všem úlohám prvního kola všech čtyř kategorií.

Zdalo se nám však, že by bylo škoda, aby po proběhnutí ročníku se komentáře odložily jako věc nepotřebná; mohou totiž i dále sloužit nejen učitelům, ale i účastníkům *MO* jako jakási „škola metod řešení matematických úloh“. Proto je po jistých úpravách textů zařazujeme do brožur jednotlivých ročníků *MO*. Najdete v nich ovšem i věci, které převyšují matematickou úroveň účastníka té které kategorie. Ale snad to nevádí: přečte-li si např. účastník kategorie *B* komentáře k úloze kategorie *C* nebo dokonce *Z*, vnikne hlouběji do elementární úlohy, uvědomí si možnosti jejího zobecnění či obměnění, které jsou už třeba na úrovni jeho kategorie nebo ji dokonce přesahují. UVědomte si totiž, že úlohy nižších kategorií vznikají často jako speciální nebo zjednodušené případy úloh obecnějších. A obrácený postup — generalizace (zobecnování) — je opravdu podstatnou složkou práce matematika. Konečně si ještě řekněme, že jistým stupněm tvořivého matematického vzdělání je nejen umět řešit předložené problémy, ale umět také zajímavé problémy tvořit; i tomu by se měli účastníci *MO* přiučovat.

Uveďme několik konkrétních případů z *XXII.* ročníku *MO*.

Úloha *Z—I—1* se týká tříčlenných aritmetických posloupností, jejichž členy jsou vesměs prvočísla. Je to v podstatě zvláštní případ problémové situace: vyšetřovat aritmetické posloupnosti prvočísel. Na toto téma můžete sami vymyslet mnoho úloh; řešení některých bude zcela

jednoduché, jiné budou obtížné. Obdobně najdete v XXII. ročníku problémovou situaci „schodové funkce“. Jsou to úlohy C—P—1, C—I—3, A—P—2, A—I—2, které se všechny týkají funkce „celá část z reálného čísla“, jež náleží mezi *schodové funkce*. Tyto čtyři úlohy snad stačí jako ukázky toho, jaké úlohy můžete na toto téma vymýšlet. Konečně v kategorii B se vyskytují dvě úlohy na téma početnost konečných množin, jejich průniků a sjednocení. Obě zadané úlohy se týkají nejvýše tří množin; ihned je zřejmé, jaké další problémy (podstatně složitější) by se daly vytvářet, kdybychom vyšli z většího počtu množin (obecně z n množin). Také úloha Z—I—1 je rozběhem do rozsáhlé, pro školu vhodné problémové situace: určenost funkce dané rodiny — zde lineární funkce lomené několika uspořádanými dvojicemi hodnot proměnných. V komentářích, které byly v podstatě převzaty do této brožury, najdete podrobnější vysvětlení.

Doufáme, že vám, našim čtenářům a řešitelům, bude tato koncepce brožury vítaná. Podaří-li se vám sestavit nějakou nevšední a zajímavou úlohu, pošlete ji do konkursu *ŤČSMF* na soutěžní úlohy *MO*; můžete tak získat i peněžitou odměnu.

Mnoho úspěchů v práci vám přeje

Ústřední výbor matematické
olympiády

1. ORGANIZACE SOUTĚŽE

Pořadatelem soutěže XXII. ročníku matematické olympiády byla opět *ministerstva školství ČSR a SSR s Matematickým ústavem ČSAV v Praze (MÚ ČSAV)* a s *Jednotou čs. matematiků a fyziků (JČSMF)* za spolupráce s orgány *Socialistického svazu mládeže (SSM)*. Protože připravovaný nový Statut MO nebyl dosud schválen, řídila se soutěž XXII. ročníku MO opět podle statutu, který byl uveřejněn ve *Věstníku MŠK*, roč. XIX, str. 126, 127, směrnice 37 ze dne 30. IV. 1963.

Žáci soutěžili celkem ve čtyřech kategoriích: *kategorie A* je určena pro žáky III. a IV. ročníků škol II. cyklu, *kategorie B* pro žáky II. ročníků a *kategorie C* pro žáky I. ročníků těchto škol. V *kategorii Z* soutěží žáci základních devítiletých škol, především žáci 9. ročníků. Bylo ovšem možné, aby žák soutěžil i ve vyšší kategorii, než do které patřil.

2. SLOŽENÍ ÚSTŘEDNÍHO VÝBORU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Ve složení ÚV MO, schváleném MŠ ČSR dne 18. ledna 1971 a MŠ SSR dne 3. prosince 1970, nedošlo k podstatným změnám; změnil se jen zástupce MŠ ČSR a

Západoslovenský kraj se rozdělil na dvě části: Bratislava - město a zbývající část Západoslovenského kraje.

Předseda: *doc. Jan Vyšín, CSc., vědecký pracovník MÚ ČSAV, Praha*

I. místopředseda: *dr. Jozef Moravčík, CSc., docent VŠD, Žilina*

II. místopředseda: *prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc., vedoucí vědecký pracovník MÚ ČSAV, Praha*

I. jednatel: *Vlastimil Macháček, odborný asistent pedagogické fakulty KU, Praha*

II. jednatel: *Jiří Mída, odborný asistent pedagogické fakulty KU, Praha*

Členové:

Zástupce MŠ ČSR: *Václav Šula, ústřední škol. inspektor MŠ ČSR, Praha*

Zástupce MŠ SSR: *Michal Zöldy, ústřední škol. inspektor MŠ SSR, Bratislava*

Zástupce ÚV SSM: *Jana Pomazalová, profesorka gymnasia, Brno*

dr. František Běloun, vedoucí matematického kabinetu KPÚ, Praha

Miloš Franek, profesor gymnasia, Prievidza

dr. Jozef Gruska, Matematický ústav SAV, Bratislava

dr. Milan Hejný, CSc., docent PF UK, Bratislava

František Hradecký, odborný asistent MFF KU v. v., Praha

prof. dr. Milan Kolibiar, DrSc., profesor PF UK, Bratislava

dr. Ivan Korec, odborný asistent PF UK, Bratislava

akademik Josef Novák, ředitel MÚ ČSAV, Praha

Vítazoslav Repáš, ředitel gymnasia, Bratislava

dr. Jiří Sedláček, CSc., vědecký pracovník MÚ ČSAV, Praha

Jiří Šídlo, zástupce ředitele gymnasia, Praha

Miroslav Šmerda, učitel ZDŠ, Bílovice n. Svitavou
František Veselý, odborný asistent v. v., Praha
dr. František Zítek, CSc., vědecký pracovník MÚ ČSAV,
Praha

Dalšími členy ÚV MO byli předsedové krajských výborů matematické olympiády:

prof. dr. Václav Pleskot, profesor ČVUT, Praha
Ludmila Tréglová, profesorka gymnasia, Říčany
dr. Ing. Lada Vaňatová, profesorka gymnasia, Strakonice
Věra Rádlová, profesorka gymnasia, Plzeň
Karel Hnyk, odborný asistent pedagogické fakulty,
Ústí n. L.
Jan Laštovka, vedoucí kabinetu matematiky KPÚ, Hradec
Králové
dr. Petr Benda, odborný asistent VUT, Brno
Josef Andrys, docent pedagogické fakulty, Ostrava
Katarina Hajtášová, odborná asistentka PF UK, Brati-
slava
dr. Oliver Ralík, odborný asistent pedagogické fakulty,
Nitra
dr. Ladislav Berger, odborný asistent VŠD, Žilina
Kveta Hončarivová, odborná asistentka PF UPJŠ, Košice

Pracovní předsednictvo ÚV MO (PÚV MO) tvořili (v abecedním pořadí): *prof. dr. Miroslav Fiedler*, DrSc.; *Vl. Macháček*; *Jiří Mída*; *dr. J. Moravčík*, CSc.; *dr. J. Sedláček*, CSc.; *doc. Jan Vyšín*, CSc.; *dr. Fr. Zítek*, CSc., a zástupci MŠ ČSR a SSR.

3. SCHŮZE ÚV MO

V uplynulém soutěžním roce se konala opět dvě plenární zasedání ústředního výboru MO. Na *první schůzi* dne 7. a 8. prosince 1972 v Praze byl hodnocen průběh XXI.

ročníku MO, prodiskutována příprava prázdninového soustředění kategorie B a upřesněny termíny II. a III. kol soutěže XXII. ročníku. Všichni přítomní uvítali znovu-zřízení kategorie C a velmi kladný vliv, který na jakost soutěže mají komentáře k úlohám. Tyto komentáře znamenají pro učitele při řízení soutěže velikou pomoc. Je to důležitá akce, která do jisté míry vyrovnává nepříznivou situaci, způsobenou tím, že většina poboček JČSMF nečerpá plně částky určené na přednáškovou činnost v rámci MO.

Dalšími body, projednávanými na plenární schůzi v prosinci 1972, bylo zhodnocení *soustředění v Trenčíně*, zpráva o *XIV. MMO v Polsku* a příprava na *XV. MMO*. Diskutovalo se rovněž o spolupráci s SSM a o doplňcích k novému statutu MO a FO, který připravil s. Zöldy z MŠ SSR. Návrh bude rozeslán všem KV MO k vyjádření. Byla podána též přehledná zpráva o situaci ve vydávání edice *Škola mladých matematiků* a o stavu *konkursu JČSMF* na úlohy pro MO. Doc. Vyšín podal informaci o návrhu osnov pro matematická gymnasia, která mají být zřízena na 3 až 4 místech v ČSSR. Komise složená z dr. Bělouna, s. Šmerdy a s. ředitele gymnasia Repáše připravila tento návrh témat, která by měla být probírána ve cvičení z matematiky v 7. a 8. ročníku ZDŠ: 1. Prvky logiky, 2. Úvod do množinového pojetí matematiky, 3. Nerovnosti a nerovnice, 4. Geometrie hranatých těles, 5. Kombinatorika na ZDŠ, 6. Logaritmické pravítko, 7. Řešení konstrukčních úloh, 8. Úlohy typu „zebra“, 9. Číselné soustavy. Je třeba najít autory pro sepsání vhodných brožur, které by byly jistě vzhledem k současnému nedostatku literatury tohoto druhu na ZDŠ ihned rozebrány.

Druhá plenární schůze ÚV MO XXII. ročníku se konala u příležitosti celostátního III. kola MO, kategorie A, v Žilině ve dnech 13. a 14. dubna 1973. Mimo obvyklé

body jednání, jako jsou připomínky k průběhu soutěže, ediční záležitosti (letáky, brožura se zprávou o uplynulém ročníku, edice *Škola mladých matematiků*), konkurs na úlohy *MO* a příprava soustředění kategorie *B* i družstva pro *XV. MMO*, se opět diskutovalo o náplni matematických gymnasií a o návrhu na nový statut *MO* a *FO*. Ústřední výbor matematické olympiády upozornil zástupce *MŠ ČSR* a *SSR*, že v prosinci 1973 uplyne jeho tříleté funkční období a že je tedy nutné začít přemýšlet o složení nového *ÚV MO*.

Při diskusi o spolupráci s *SSM* se rovněž hovořilo o putovním poháru, který věnovala *Mladá fronta* vítězům III. kola kategorie *A*. K 25. výročí *MO* by měla být věnována obdobná cena, např. plastika, apod. *Mladá fronta* bude o to požádána a současně bude požádána i o to, aby v edici *ŠMM* vydala jubilejní publikaci.

4. PRŮBĚH JEDNOTLIVÝCH KOL SOUTĚŽE

Organizace jednotlivých kol soutěže nebyla v *XXII.* ročníku *MO* nijak podstatně změněna; byly upraveny jen dílčí termíny odevzdání úloh žáky, resp. posunuty termíny II. kola.

I. kolo, tzv. *studijní*, proběhlo opět ve dvou etapách. Čtyři přípravné úlohy odevzdávali soutěžící všech kategorií svým učitelům (referentům *MO*) do 15. listopadu 1972. Úlohy byly opraveny, ale neklasifikovány, takže každý žák měl možnost se zúčastnit soutěžní části prvního kola. V této části soutěže, končící pro kategorii *A* 15. ledna 1973 a pro kategorii *B* a *C* 15. února 1973, museli žáci dle vlastního výběru vyřešit ze 6 úloh aspoň 3 na známku aspoň „dobrou“, aby mohli být navrženi do II. kola. V kategorii *Z* bylo podmínkou pro navržení do II. kola vyřešení aspoň tří úloh ze čtyř na známku aspoň „dobrou“.

Podrobné výsledky I. kola ve všech kategoriích jsou uvedeny v *tabulkách 1 a 2*. Z nich je opět patrné, že sou-
těže *MO* se zúčastňují v kategoriích *A*, *B* a *C* velkou
většinou samí vážní zájemci o matematiku, neboť počet
úspěšných řešitelů činí více než 80 % všech účastníků.
Toto procento úspěšných řešitelů v kategorii *Z* je přiro-
zeně nižší, neboť mnoho účastníků ze *ZDŠ* bývá získáno
„nábořem“; to však nijak nesnižuje velký význam *MO*
pro kvalitu vyučování matematice na *ZDŠ*.

Na přehledné *tabulce P* za poslední čtyři ročníky *MO*
potěší neobyčejně vysoký vzrůst účasti v kategoriích
A a *B*. V kategorii *A* lze tento jev přičíst tomu, že do ní
přísluší III. a IV. ročníky škol II. cyklu, avšak v kate-
gorii *B* účast, před lety tradičně nízká, dosáhla již téměř
počtu spojených kategorií *B* a *C* v XIX. a XX. ročníku
MO.

V obnovené kategorii *C* ustálil se počet účastníků na
výši odpovídající průměru dřívějších ročníků.

II. kolo kategorie *A* se konalo 3. března 1973 za po-
měrně vysoké účasti (*tabulka P a 3*); v hlavní klauzurní
práci však uspělo jen asi 20 % účastníků. Po obvyklé
přísné koordinaci klasifikace těchto vítězů II. kola vybralo
PÚV MO ve smyslu ustanovení statutu o *MO* a *FO*
celkem 75 účastníků celostátního III. kola kategorie *A*.

V kategorii *B* a *C* proběhla klauzurní II. kola v krajích
dne 7. dubna 1973 (sobota). V kategorii *B* (viz *tabulka P*
a *3*) je patrný též potěšitelný vzrůst, a to jak účastníků,
tak i úspěšných řešitelů, ovlivněný bezpochyby vysokou
účastí v obnovené kategorii *C* v předcházejícím ročníku.
I v kategorii *C* je účast poměrně vysoká a odpovídá nej-
vyššímu počtu dosaženému v ní před jejím zrušením.

Klauzurní II. kolo kategorie *Z* pořádaly *OV MO*
v okresech ve středu dne 7. března 1973. Počet účastníků
i úspěšných řešitelů poněkud poklesl oproti maximu do-
saženému ve XXI. ročníku *MO*. Vzrostl však počet

KV MO, které ve své kompetenci uspořádaly celokrajská III. kola kategorie *Z*. Byly to kraje *Praha* (35), *Západočeský* (13), *Středočeský* (36), *Východočeský* (44), *jihomoravský* (47), *Západoslovenský* (42) a *Východoslovenský* (36). (V závorkách je uveden počet účastníků — vyhlášení vítězové a úspěšní řešitelé tvoří jednu až dvě třetiny.) V některých krajích, jako např. v kraji Středoslovenském, byla soutěž III. kola kategorie *Z* vlastně přípravným soustředěním nejlepších zástupců okresů před jejich postupem do vyšší kategorie soutěže *MO*. Tak *KV MO* začíná pečovat o projevené talenty, eviduje je a upozorňuje na ně školy II. cyklu, kam tito žáci postoupí.

Celostátní III. kolo kategorie *A* se pořádalo 13. a 14. dubna 1973 z technických příčin na dvou místech — v *Žilině* a v *Bratislavě*. Obou soutěžních dnů se zúčastnilo všech vybraných 75 žáků. Vyhlášeno bylo 20 vítězů a 17 dalších úspěšných řešitelů (viz příloha **B**).

Na přípravné soustředění před *XV. MMO* v *Malešicích* od 25. do 30. června 1973 bylo povoláno 10 vítězů III. kola, kteří i vzhledem k výsledkům dosaženým ve II. kole měli nejlepší předpoklady pro úspěšnou reprezentaci; soustředění se zúčastnili ještě další 3 náhradníci. Na soustředění přednášeli: *prof. dr. M. Fiedler, DrSc., L. Herrmann, dr. J. Hojdar, dr. J. Moravčík, CSc., dr. A. Vrba, CSc., doc. J. Vyšín, CSc., a dr. Fr. Zítek, CSc.* Na závěr soustředění vybralo *PÚV MO* osmičlenné družstvo pro *XV. MMO* v *Moskvě* (podrobnosti ve zprávě v kapitole VI).

5. POMOCNÉ AKCE

Centrum přípravy vybraných úspěšných řešitelů *MO* jako možných reprezentantů na *XV. MMO* bylo opět v semináři, konaném na gymnasiu v Praze 2, ul. W. Piecka.

Na tomto školení přednášel *prof. dr. M. Fiedler, DrSc., doc. J. Vyšín, CSc., dr. J. Sedláček, CSc., dr. J. Hojdar a dr. A. Vrba, CSc.*, všichni z *Matematického ústavu ČSAV v Praze*. K přednáškám byly vypracovány sylaby s texty úloh, které byly dávány k dispozici i ostatním KV MO pro školení v jejich střediscích.

Od 25. do 30. června 1973 se konalo *přípravné soustředění* celkem 12 nejúspěšnějších vítězů III. kola kategorie A. Z nich bylo dne 29. června na schůzi PÚV MO vybráno osmičlenné reprezentační družstvo pro *XV. Mezinárodní matematickou olympiádu v Moskvě*. Na soustředění byla probírána tato témata: *Úlohy z geometrie* (prof. dr. M. Fiedler, DrSc., doc. J. Vyšín, CSc.), *Rovnice a nerovnosti* (dr. J. Hojdar), *Kombinatorika, trigonometrické funkce* (dr. A. Vrba, CSc.), *Posloupnosti a matematická indukce* (dr. Fr. Zítek, CSc.), *Delitelnost celých čísel a diofantické rovnice* (dr. J. Moravčík, CSc.) a *Funkce* (L. Herrmann).

Soustředění úspěšných řešitelů MO a FO kategorie B a C se konalo od 18. června 1973 do 7. července 1973 *ve Žďáru n. Sázavou*. Byly opět vytvořeny tři třídy — matematická, fyzikální a matematicko-fyzikální. Matematický obsah školení byl zajištěn těmito přednáškami:

- a) *Dr. Antonín Vrba, CSc.*: Vybrané úlohy z kombinatoriky
- b) *Jozef Šramo*: Geometrické konstrukce
- c) *Doc. dr. A. Kufner, CSc.*: Nerovnosti a odhady
- d) *Dr. Rudolf Fiby*: Geometrické konstrukce
- e) *Dr. Jiří Jarník, CSc.*: O funkcích
- f) *Dr. J. Hojdar*: Řešení rovnic a soustav rovnic

6. STUDIJNÍ LITERATURA

SPN v Praze vydalo celkem včas potřebné letáky jak

pro kategorie *A*, *B*, *C*, tak i pro kategorii *Z*, takže bylo možno vypomoci v kategorii *Z* i slovenským *KV MO*, které dostaly letáky opožděně. *Rozhledy matematicko-fyzikální* otiskly rovněž včas texty úloh *MO*.

V *Mladé frontě* pokračovalo vydávání edice *Škola mladých matematiků*; vyšly tyto další svazky:

č. 30: *M. Koman — J. Vyšín*: Malý výlet do moderní matematiky

č. 31: *Oldřich Odvárko*: Booleova algebra

č. 32: *J. Vyšín — J. Kučerová*: Druhý výlet do moderní matematiky

Byly recenzovány a do výroby předány další svazky této edice.

7. KONKURS JČSMF NA NÁVRHY ÚLOH PRO MO

Tento konkurs je téměř výhradním zdrojem úloh pro *MO*. Ve XXII. roč. *MO* bylo zadáno celkem 66 úloh, z nichž jich jen 5 nebylo získáno konkursem. Také československá úloha na *XV. MMO* v Moskvě byla z konkursu.

Od vyhlášení tohoto nepřetržitě probíhajícího konkursu v roce 1966 došlo do 1. XI. 1973 celkem 905 úloh od 86 autorů. Recenze byla k témuž datu ukončena u 810 úloh, z nichž přijato a odměněno bylo 525.

Podmínky konkursu jsou od XXIII. ročníku *MO* uveřejňovány v letácích s úlohami.

Zájemce o konkurs upozorňujeme, že se začíná měnit tematika úloh *MO*. Objevují se úlohy z modernizované školské matematiky. Těchto úloh bude jistě v *MO* stále přibývat. Původní úlohy z moderní matematiky mají v konkursu značnou naději, že budou přijaty a odměněny.

Přehledná tabulka P

Počet soutěžících v 19., 20., 21. a 22. ročníku MO

Kategorie		A		B		C		Z		Školní rok
kolo	roč.	P	Ú	P	Ú	P	Ú	P	Ú	
I.	19.	565	447	842	612	*)	*)	8230	5550	69–70
	20.	399	352	843	656	*)	*)	10366	7376	70–71
	21.	554	445	476	354	1115	926	11090	7870	71–72
	22.	979	858	808	667	1194	975	10965	6989	72–73
II.	19.	381	88	556	129	*)	*)	4863	1790	69–70
	20.	341	58	613	162	*)	*)	6770	3807	70–71
	21.	429	170	342	122	844	180	7275	3063	71–72
	22.	802	152	637	225	897	418	6226	2423	72–73
III.	19.	44	24							69–70
	20.	42	20			Nekonají se celostátně				70–71
	21.	74	33							71–72
	22.	75	37							72–73

P ... počet všech účastníků

Ú ... počet úspěšných řešitelů

*) ... kategorie C byla zrušena, žáci I. a II. ročníku škol II. cyklu soutěžili ve společné kategorii B

Tabulka 1
Přehled počtu účastníků I. kola podle krajů v kategoriích A, B, C*)

Kraj	Kategorie A			Kategorie B			Kategorie C			Celkem		
	P	Z toho dívky	Ú	P	Z toho dívky	Ú	P	Z toho dívky	Ú	P	Z toho dívky	Ú
Praha - město	136	31	111	119	31	101	98	17	88	353	79	300
Středočeský	63	15	60	58	17	48	67	17	61	188	49	169
Jihočeský	66	15	49	35	10	32	65	18	57	166	43	138
Západočeský	59	18	52	23	0	23	61	24	43	143	42	118
Severočeský	81	26	66	53	15	40	145	58	96	279	99	202
Východočeský	96	22	96	36	5	36	80	29	78	212	56	210
Jihomoravský	174	50	167	135	51	111	165	55	137	474	156	415
Severomoravský	90	26	65	82	31	62	123	38	101	295	95	228
Bratislava - město	51	4	50	33	4	30	57	14	54	141	22	134
Západoslovenský	72	23	56	98	37	85	121	62	106	291	122	247
Středoslovenský	74	20	73	82	24	71	113	39	100	269	83	244
Východoslovenský	17	1	13	54	2	28	99	34	54	170	37	95
Celkem	979	251	858	808	227	667	1194	405	975	2981	883	2500

*) P = celkový počet účastníků; Ú = počet úspěšných řešitelů

Tabulka 2
Přehled účastníků I. kola podle krajů v kategorii Z

KRAJ	Kategorie Z			
	P	Z toho dívek	Ú	Z toho dívek
Praha - město	1064	537	666	316
Středočeský	663	367	409	219
Jihočeský	556	291	352	165
Západočeský	408	236	286	156
Severočeský	661	297	342	142
Východočeský	633	315	465	219
Jihomoravský	1287	647	769	388
Severomoravský	1027	507	602	292
Bratislava - město	652	287	390	160
Západoslovenský	1501	875	1073	600
Středoslovenský	1189	552	826	391
Východoslovenský	1324	641	809	412
Celkem	10965	5543	6989	3465

P = celkový počet účastníků; Ú = počet úspěšných řešitelů

Tabulka 3

Přehled počtu účastníků II. kola podle krajů v kategoriích A, B, C*)

KRAJ	Kategorie A			Kategorie B			Kategorie C			Celkem		
	P	Z toho dívky	Ú	P	Z toho dívky	Ú	P	Z toho dívky	Ú	P	Z toho dívky	Ú
Praha - město	106	20	46	95	26	59	82	14	63	283	60	168
Středočeský	57	15	9	42	11	9	47	8	16	146	34	34
Jihočeský	47	10	6	27	10	10	54	15	23	128	35	33
Západočeský	49	12	2	23	0	8	37	14	14	109	26	24
Severočeský	59	18	17	35	8	17	71	28	20	165	54	54
Východočeský	89	18	17	36	5	20	78	29	28	203	52	65
Jihomoravský	142	43	19	111	36	29	137	44	56	390	123	104
Severomoravský	64	19	4	62	19	20	97	28	50	223	66	74
Bratislava - město	48	4	12	29	4	9	52	13	35	129	21	56
Západoslovenský	56	15	8	85	26	33	102	48	60	243	89	101
Středoslovenský	72	18	6	64	16	7	90	33	33	226	67	46
Východoslovenský	13	1	6	28	2	4	50	17	20	91	20	30
Celkem	802	193	152	637	163	225	897	291	418	2336	647	795

*) P = celkový počet účastníků; Ú = počet úspěšných řešitelů

Tabulka 4

Přehled počtu účastníků II. kola podle krajů v kategorii Z

KRAJ	Kategorie Z			
	P	Z toho dívek	Ú	Z toho dívek
Praha-město	589	278	342	155
Středočeský	346	181	203	102
Jihočeský	321	149	113	50
Západočeský	190	96	35	17
Severočeský	294	119	134	51
Východočeský	426	193	286	134
Jihomoravský	692	345	153	63
Severomoravský	541	255	183	80
Bratislava-město	373	150	135	49
Západoslovenský	965	475	336	161
Středoslovenský	687	325	144	75
Východoslovenský	802	407	359	185
Celkem	6226	2973	2423	1122

P = celkový počet účastníků; Ú = počet úspěšných řešitelů

Příloha A

SEZNAM ÚSPĚŠNÝCH ŘEŠITELŮ II. KOLA MO VE XXII. ROČNÍKU

(pokud není uveden typ školy, jde o gymnasium, resp. SVVŠ)

PRAHA — MĚSTO

Kategorie A

Jan Trlifaj, 3.d, Praha 3, Sladkovského nám.; Aleš Drápal, 3.e, Praha 8, U libeňského zámku; Jan Frynta, 4.f, Tomáš Chrz, 4.f, oba Praha 2, ul. W. Piecka; Milena Šídlová, 3.a, Praha 7, Nad štolou; Pavel Ferst, 3.d, Praha 3, Sladkovského nám.; Alexander Fuchs, 3.a, Praha 10, Přípotoční; Petr Jarolím, 4.f, František Drašnar, 4.f a Petr Slačálek, 3. f, všichni Praha 2, ul. W. Piecka.

Kategorie B

Richard Gürtler a Jiří Obenberger, oba 2.d, Praha 2, ul. W. Piecka; Ludvík Reichert, 2.a, Praha 4, Ohradní; Vladimír Kopp, 2.b, SPŠ strojní, Praha 5, Preslova; Jiří Štěrba, Jaroslav Fiala, Dana Límová, Martin Baumann, Nina Karpinská a Michael Valášek, všichni 2.d, Praha 2, ul. W. Piecka.

Kategorie C

Karel Suchomel, 1.d, Praha 1, Štěpánská; Václav Koťšovec, 1.d, Praha 2, ul. W. Piecka; Jaroslav Dostál, 1.a, Praha 4, Modřany; Zuzana Bartáková, 1.a a Jana Dudková, 1.b, obě Praha 7, Nad štolou; Mojmír Churavý, 1.d, Praha 2, ul. W. Piecka; Vlastislav Maixner, 1.d, Praha 3, Sladkovského nám.; Čestmír Štuka, 1.g, Praha 8, U libeňského zámku; Erik Štěrba a Jaroslav Zápotocký, oba 1.d, Praha 1, Štěpánská.

STŘEDOČESKÝ KRAJ

Kategorie A

Tomáš Fiala, 4. roč., Příbram; Jaromír Kukal, 4. roč., Benešov; Ivo Šafařík, 4. roč., Slaný; Hana Krbušková, 4. roč., Mnichovo Hradiště; Ivo Marek, 4. roč., Radotín; Miloslav Joukl, 4. roč., Kutná Hora; Jan Větrovský, 4. roč., Poděbrady; Vladimír Meier, 3. roč., Mladá Boleslav; Zdeněk Kříž, 4. roč., Sedlčany.

Kategorie B

Karel Breiter, 2. roč., Mnichovo Hradiště; Jiří Sommer, 2. roč., Nymburk; Ivan Řehoř, 2. roč., Radotín; Dagmar Štuksová, 2. roč., Říčany; Jan Procházka, 2. roč., Mladá Boleslav; Karel Karlík, 2. roč., Čáslav; Vlastimil Klíma, 1. roč., Benešov; Jaromír Stránský, 2. roč., Brandýs n. L.; Jaroslav Hrášek, 2. roč., Beroun.

Kategorie C

Hana Janoušková, 1. roč., Sedlčany; Jaroslav Vožeh, 1. roč., Hořovice; Vojtěch Zadražil, 1. roč., Český Brod; Zdeněk Töpfer, 1. roč., Mladá Boleslav; Ivan Vinš,

1. roč., Radotín; Miroslav Krob, 1. roč., Beroun; Miroslav Krejčí, 1. roč., Mnichovo Hradiště; Miroslav Šmejkal, 1. roč., Sedlčany; Petr Kučera, 1. roč., Kutná Hora; Ivo Drahorád, 1. roč., Brandýs n. L.

JIHOČESKÝ KRAJ

Kategorie A

Karel Horák, 4.b, Strakonice; Pavel Kindlmann, 3.a, K. Š., České Budějovice; Josef Voldřich, 2. roč., Vimperk; Jiří Hanzálek, 4.a, K. Š., České Budějovice; Jan Teska, 3.b, Milevsko; J. Čanda, 4.a, Písek.

Kategorie B

Josef Voldřich, 2. roč., Vimperk; Zdeňka Bervidová, 2.c, Tábor; Jana Chaloupková, 2.a, Prachatice; Jan Vaňata, 2.b, Strakonice; Miroslav Vácha, 2.b, Tábor; Miroslava Kochová, 2.a, K. Šatala, České Budějovice; Karel Markvart, 2.b, Tábor; Jan Kozelka, SPŠ strojní, Písek; Alena Rubešová, 2.a, K. Šatala, České Budějovice; Vladimír Drápalík, 2.a, Strakonice.

Kategorie C

Jiří Hofman, 1. roč., K. Šatala, České Budějovice; Eva Snížková, 1. roč., SPŠ stavební, České Budějovice; J. Vyhnaň, 1. roč., K. Šatala, České Budějovice; Vladimír Hůna, 1. roč., Prachatice; Věra Černá, 1. roč., Prachatice; Zbyněk Brtna, 1. roč., Prachatice; Martin Bartoš a Pavel Žampach, oba 1. roč., Třeboň; Ladislav Soukup, 1. roč., Vimperk; Emil Pitter, 1. roč., K. Šatala, České Budějovice; Ladislav Slípka, 1. roč., Jindřichův Hradec.

ZÁPADOČESKÝ KRAJ

Kategorie A

Magda Fořtová, 4.d, J. Fučíka, Plzeň; Jan Klaschka, 3.a, Mariánské Lázně.

Kategorie B

František Pillmann, 2. a, J. Fučíka, Plzeň; Josef Pruner, Václav Šmrha, Luboš Odvárka, Vladimír Krásný a Petr Matas, všichni 2.a, J. Fučíka, Plzeň; Jaroslav Krčmář, 2.a, Sušice; Michal Svrček, 2.b, Karlovy Vary.

Kategorie C

Milan Studený, 1.a, Mariánské Lázně; František Stanněk, 1.a, J. Fučíka, Plzeň; Zuzana Martínková, 1.b, Sokolov; Karel Kubát a Pavel Sedlák, oba 1.a, J. Fučíka, Plzeň; Rudolf Ottis, Jiří Šmejkal a Josef Bürger, všichni 1.e, Plzeň, ul. Pionýrů; Vladimír Sedlák, Jaroslav Šťastný a Daniela Řezníčková, 1.a, J. Fučíka, Plzeň.

SEVEROČESKÝ KRAJ

Kategorie A

Václav Špaček, 4.c, ul. Čs. dobrovolců, Teplice; Ivo Mrázek, 2.b, SPŠ chem., Ústí n. L.-Střekov; Jan Palacký, 4.c, Jeronýmova, Liberec; Jan Holub, 4.c, ul. Čs. dobrovolců, Teplice; Jiří Svoboda, 4.c, ul. Čs. dobrovolců, Teplice; Vítězslav Švejdar, 4.b, Komenského nám., Děčín; Jiří Hora, 4.a, Žatec.

Kategorie B

Ivo Mrázek, 2.b, SPŠ chemická, Ústí n. L.; Václav

Soukup, 2.c, Liberec; Pavel Koberle, 2.a, Lovosice; Martin Müller, 2.a, Litvínov; René Hladík, 2.b, SPŠ chemická, Ústí n. L.; Jiří Maryška, 2. roč., Jablonec n. N.; Jan Malý, 2.a, Litoměřice; Jiří Škutchan, 2.a, Litvínov; Jiří Svoboda, 2.c, Liberec; Martin Kapoun, 2.a, Ústí n. L.

Kategorie C

Jiří Sluka, 1.b, Jablonec n. N.; Pavel Vondrák, 1.a, Ústí n. L., Leoš Tomíček, 1. c, Liberec; Milan Ďurana, Miroslav Oktábec, Jiří Dlouhý a Jiří Cipín, všichni 1.c, Teplice; Věra Švarcbachová, 1.b, Litoměřice; Jaroslav Holomek, 1.c, Liberec; Ivan Chudomel, 1.a, Litvínov.

VÝCHODOČESKÝ KRAJ

Kategorie A

Vladimír Bergl, 4.a, Pardubice-Spořilov; Jan Mandel, 4.b, Náchod; Jiří Limpouch, 4.g, J. K. Tyla, Hradec Králové; Jiří Svoboda, 3.a, Pardubice-Spořilov; Jaroslav Šulc, 4. a, Turnov; Josef Ježek, 3.a, Pardubice-Spořilov; Zdeněk Drábek, 3. roč., Lanškroun; Miroslav Šíkal, 4.a, Přelouč; Pavel Kouba, 3.a, Vysoké Mýto.

Kategorie B

Jiří Hůlka, 2.g, Hradec Králové; Vladimír Fedr, 2.a, Polička; Tomáš Blažek, 2.a, Pardubice; Josef Pavel, 9.a, ZDŠ Rychnov n. Kn., Komenského; Pavel Kubát, 2.a, Havlíčkův Brod; Stanislav Nožička, 2. g, Nová Paka; Petr Holan, 2.a, Nový Bydžov; Rastislav Jakubíček, 2. roč., Polička; Luděk Němec, 2.a, Pardubice; František Starý, 2.c, SPŠ elektrotechnická, Pardubice; Ivan Šup, 2.a, Přelouč.

Kategorie C

Miloslav Kalous, 1.a, Rychnov n. Kn.; Petr Novák, 1.a, Pardubice; Miloš Ferjenčík, Jiří Dvořák a Radim Ptáčník, všichni 1.a, Pardubice; Zdeněk Rudolf, 1.a, Trutnov; Miroslav Pátek, 1.a, Trutnov; Jan Šugl, 1.a, Rychnov n. Kn.; Jiří Salač, 1.a, Pardubice; Josef Nosek, 1.roč., Semily; František Rozkot, 1.a, Rychnov n. Kn.; Pavel Štoviček, 1.a, Pardubice.

JIHOMORAVSKÝ KRAJ A BRNO—MĚSTO

Kategorie A

Miroslav Kmošek, 4. roč., Brno, tř. kpt. Jaroše; Aleš Moravec, 4. roč., Brno, tř. kpt. Jaroše; Jiří Pavel, 3. roč., Jihlava; Pavel Šandera, 4. roč., Brno, Křenová; Jiří Brabec, 3. roč., Žďár n. S.; Karel Kozmík, 4. roč., Kroměříž; Petr Pištěk, 4. roč., Brno, Křenová; Aleš Chramosta, 3. roč., Brno, tř. kpt. Jaroše; Karel Meduna, 3. roč., Brno, Lerchova; Vít Ticháček, 4. roč., Kroměříž.

Kategorie B

Jan Hollan, 2. roč., Brno, tř. kpt. Jaroše; Josef Geb-rich, 2. roč., Brno, tř. kpt. Jaroše; Zora Vlčková 2. roč., Brno, Lerchova; Zdenka Prokešová, 2. roč., Brno, Koněvova; Zdeněk Ptáček, 2. roč., Kroměříž; Jiří Havel, 2. roč., Jihlava; Vladimír Pisk, 2. roč., Třebíč; Jaroslav Červenka, 2. roč., Uherský Brod; Alena Malá, 2. roč., Brno, Koněvova; Jaromír Trubelík, 2. roč., Kroměříž.

Kategorie C

Zdeněk Ondrák, 1. roč., Třebíč; Jindřich Petruška, 1. roč., Brno, Elgartova; Milan Trnka, 1. roč. Brno,

Křenová; Jan Jirků, 1. roč., Žďár n. S.; Eva Pivničková, 1. roč., Znojmo; Jana Hladká, 1. roč., Brno, Křenová; Luděk Tomek, 1. roč., Brno, Lerchova; Zuzana Brázdová, 1. roč., Brno, tř. kpt. Jaroše; Zdeněk Marczy-niszin, 1. roč. Břeclav; Pavel Knébl, 1. roč., Gottwaldov; Josef Zielinski, 1. roč., Znojmo.

SEVEROMORAVSKÝ KRAJ

Kategorie A

Jaromír Šimša, 3. roč., Ostrava I, Šmeralova; Antonín Otáhal, 3. roč., Ostrava-Zábřeh, Volgogradská; Vladislav Mačejovský, 3. roč., Ostrava I, Šmeralova; Rostislav Mezihorák, 4. roč., Rýmařov, Jelínkova.

Kategorie B

Leszek Gajdzica, 2. roč., polský vyuč. jazyk, Český Těšín, Havlíčkova; Miroslav Lýčka, 2. roč., Vsetín; Marie Kuzníková, 2. roč., Havířov, Tojovského; Daneš Červinka, 2. roč., Opava, Komenského; Michal Novotný, 2. roč., Olomouc-Hejčín, Tomkova; Karel Lichý, 2. roč., Opava, Komenského; Vladimír Hruška, 2. roč., Valašské Meziříčí; Lumír Gatnar, 2. roč., Opava; Jiří Kožusznik, 2. roč., Třinec; Miroslav Prchal, 2. roč., Ostrava I, Šmeralova; Lubomír Balanda, 2. roč., Český Těšín.

Kategorie C

Václav Keral, 1. roč., Uničov; Jiří Navrátil, 9. roč., ZDŠ, Olomouc-Řepčín; Ladislav Šenkyřík, 1. roč., Olomouc, Jiřího z Poděbrad; Jan Vopatecký, 1. roč., Opava; Tomáš Hudec, 1. roč., Ostrava-Zábřeh, Volgogradská; Kristián Walach, 1. roč., Ostrava-Zábřeh, Volgogradská;

Zdeněk Krchák, 1. roč., Vsetín; Hana Münzová, 1. roč.,
Valašské Meziříčí; Josef Krmela, 1. roč., Ostrava-Zábřeh,
Vologradská; Josef Přeček, 1. roč., Olomouc-Hejčín.

BRATISLAVA — MESTO

Kategória A

Ján Krajčík, 2. roč., Pavol Zlatoš, 3. roč., Ľubor Kolár, 3. roč., Milan Kolibiar, 4. roč., Pavol Meravý, 3. roč., Jozef Širáň, 3. roč., Ján Krč, 3. roč., Pavol Poliak, 3. roč. a Vladimír Rajčák, 4. roč., všetci Bratislava, Novohradská; Martin Breza, 3. roč., Bratislava, Červenej armády.

Kategória B

Ján Krajčík a Ján Slodička, oba 2. roč., Bratislava, Novohradská; Tibor Bednárík, 2. roč., Bratislava, Červenej armády; Ján Kučera a Peter Krajčí, oba 2. roč., Bratislava, Novohradská; Miroslav Poliak, 2. roč. SPŠ elektrotechnická, Bratislava, Zochova; Ivan Janetka a Milan Kiaček, oba 2. roč., Bratislava, Novohradská; Ľubomír Šesták, 2. roč., Bratislava, Červenej armády.

Kategória C

Michal Jančina, 1. roč., Bratislava, Metodova; Ondrej Náther, 1. roč., Bratislava, Novohradská; Eva Gondová, 1. roč., Bratislava, Červenej armády; Michal Zika, Igor Kossaczký, Pavol Krchnák, Juraj Waller, Pavol Kossey, Jozef Kiss a Miroslav Drkoš, všetci 1. roč., Bratislava, Novohradská.

ZÁPADOSLOVENSKÝ KRAJ

Kategória A

Kamil Hanuliak, 4. roč., Trnava; František Šindler, 4. roč., Zlaté Moravce; Peter Hroššo, 4. roč., Topolčany; Štefan Knutelský, 3. roč., Nitra, Párovská; Tibor Kántor, 4. roč., maď., Komárno; Ján Helbich a Karol Palacka, oba 4. roč., Peter Peťovský, 3. roč., všetci slov., Komárno.

Kategória B

Peter Štarke, 2. roč., Trenčín; Jozef Kočan, 2. roč., Trnava; Ivan Ošťádal, 2. roč., Nové Mesto nad Váhom; Viera Zajacová, 2. roč., Bánovce n. Bebravou; Vladimír Dzurák, 2. roč., Nové Mesto n. V.; Roman Ormandy, 2. roč., Trnava; František Palkovič, 2. roč., Holíč; Pavol Kristl a Ivan Kubík, oba 2. roč., Nové Mesto n. V.; Karol Ďurenec a Miloš Mikula, oba 2. roč., Trenčín; Milan Potočár, 2. roč., Senec; Zoltán Téglás, 2. roč., maď., Komárno.

Kategória C

Milan Svetozár, 1. roč., SPŠ elektrotechnická, Piešťany; Daniel Madleňák, 1. roč., E. Gudernu, Nitra; Janka Hožáková, 1. roč., Nitra, Párovská; Jiří Král, 1. roč., Trenčín; Hana Stachová, 1. roč., Nové Mesto n. V.; Ján Brezovický, 1. roč., E. Gudernu, Nitra; Ľubomír Škriečka, 1. roč., Trenčín; Ildikó Holocsyová, 1. roč., maď., Šamorín; Edita Horváthová, 1. roč., maď., Šamorín; Miroslav Bebjak, 1. roč., Partizánske; Ján Sudek, 1. roč., Senec; Jana Tokárová, 1. roč., Trnava; Dušan Uhrín, 1. roč., E. Gudernu, Nitra.

STREDOSLOVENSKÝ KRAJ

Kategória A

Imrich Vrto, 4. roč., Rimavská Sobota; Marian Mikláš, 3. roč., Prievidza; Marian Kanianský, 3. roč., Handlová; Valter Petrú, 3. roč., Žilina, Horný Val; Ivan Mečiar, 3. roč., Prievidza; Jozef Dalžuffo, 3. roč., SVŠ, Lučenec.

Kategória B

Peter Maličský, 2. roč., Prievidza; Martin Valovič, 2. roč., Vrútky; G. Györgyová, 2. roč., Velký Krtíš; J. Kordík, 2. roč., Prievidza; Vilo Mlích, 2. roč., SPŠ elektrotechnická, Lipt. Hrádok; Zoltán Rafa, 2. roč., SPŠ strojná, Kys. Nové Mesto; V. Technovský, 1. roč., Zvolen.

Kategória C

V. Technovský, 1. roč., Zvolen; Karol Pekár, 1. roč., Ružomberok; Anna Rojková, 1. roč., Povážska Bystrica; Pavol Hmíra, 1. roč., Kysucké Nové Mesto; Jozef Kobza, 1. roč., Ilava; Vl. Hládek, 1. roč., Martin; Ľub. Sotulár, 1. roč., Martin; P. Makovický, 1. roč., Žilina, Horný Val; Milan Čermák, 1. roč., Zvolen; Štefan Bračok, 1. roč., Ružomberok.

VÝCHODOSLOVENSKÝ KRAJ

Kategória A

Karol Pelikán, 4. roč., Tibor Lefkovič, 3. roč., Peter Vyšňyi, 4. roč., všetci Košice, Šrobárova 46; Ján Šomvársky, 3. roč., Košice, Šmeralova 9; Ján Smrek, 3. roč., Humenné; Ján Krivoš, 3. roč., Košice, Šmeralova 9.

Kategória B

Peter Kopčanský, 2. roč., Humenné; Vladimír Matej, 2. roč., Košice, Kováčska 28; Imrich Harbula, 2. roč., Sečovce; Tibor Kollár, 2. roč., T. Ševčenka, Prešov.

Kategória C

Ondrej Cako, 1. roč., Košice, Šmeralova 9; Vojtech Bardiovský, 1. roč., SPŠ elektrotechnická, Košice; Valéria Bariličová, 1. roč., Vranov; Viera Kačúrová, T. Ševčenka, Prešov; Dušan Malenčík, 1. roč., Košice, Šmeralova 9; Stanislav Adzima, 1. roč., Košice, Šrobárova 46; Marián Pilát a Tibor Tejgiszer, oba 1. roč., SPŠ elektrotechnická, Košice; Svetlana Krajňáková, 1. roč., T. Ševčenka, Prešov; Marta Mlynarčíková, 1. roč., Poprad.

SEZNAM VÍTĚZŮ A ÚSPĚŠNÝCH ŘEŠITELŮ III. KOLA KATEGORIE A VE XXII. ROČNÍKU MO V ROCE 1973

Vítězové

1. *Jaromír Šimša*, 3. b, Šmeralova, Ostrava 1
2. *Karel Horák*, 4.b, Strakonice
3. *Miroslav Kmošek*, 4.a, tř. kpt. Jaroše, Brno
- 4.—5. *Pavel Ferst*, 3.d, Sladkovského, Praha 3
- 4.—5. *Petr Slačálek*, 3.f, ul. W. Piecka, Praha 2
- 6.—8. *Tomáš Chrz*, 4.f, ul. W. Piecka, Praha 2
- 6.—8. *Pavel Kindlmann*, 3. a, České Budějovice
- 6.—8. *Imrich Vrto*, 4. roč., Rimavská Sobota
- 9.—11. *Eubor Kollár*, 3. roč., Novohradská ul., Bratislava
- 9.—11. *Aleš Moravec*, 4.d, tř. kpt. Jaroše, Brno
- 9.—11. *František Šindler*, 4. roč., Zlaté Moravce
- 12.—13. *Pavol Meravý*, 3. roč., Novohradská ul., Bratislava
- 12.—13. *Pavol Zlatoš*, 3. roč., Novohradská ul., Bratislava
- 14.—17. *František Drašnar*, 4. f, ul. W. Piecka, Praha 2
- 14.—17. *Jan Frynta*, 4. f, ul. W. Piecka, Praha 2
- 14.—17. *Tibor Lefkovič*, 3. roč., Šrobárova ul., Košice
- 14.—17. *Peter Višnyi*, 3. roč., Šrobárova ul., Košice
- 18.—20. *Magda Fořtová*, 4.d, nám. Odborářů, Plzeň

- 18.—20. *Josef Širáň*, 3. roč., Novohradská, Bratislava
18.—20. *Ondřej Steffl*, 4. f, ul. W. Piecka, Praha 2

Další úspěšní řešitelé

- 21.—24. *Tomáš Fiala*, 4. roč., Příbram
21.—24. *Jan Mandel*, 4.b, Řezníčkova ul., Náchod
21.—24. *Ivo Mrázek*, 2.b, SPŠ chem., Ústí n. L.-Střekov
21.—24. *Karol Pelikán*, 4. roč., Šrobárova ul., Košice
25. *Josef Voldřich*, 2. roč., Vimperk
26.—30. *Petr Jarolím*, 4.f, ul. W. Piecka, Praha 2
26.—30. *Ján Krajčík*, 3. roč., Novohradská ul., Bratislava
26.—30. *Jiří Měska*, 3.d, Sladkovského, Praha 3
26.—30. *Petr Paukner*, 4.f, ul. W. Piecka, Praha 2
26.—30. *Dalibor Volný*, 4.f, ul. W. Piecka, Praha 2
31.—35. *Jaroslav Fiala*, 2.d, ul. W. Piecka, Praha 2
31.—35. *Petr Hejl*, 4.c, Štěpánská ul., Praha 1
31.—35. *Tomáš Šimáček*, 4.f, ul. W. Piecka, Praha 2
31.—35. *Vítězslav Švejdar*, 4.b, Komenského nám.,
Děčín
31.—35. *Jan Trlifaj*, 3.d, Sladkovského nám., Praha 3
36.—37. *Tomáš Burian*, 4.a, Nad školou, Praha 7
36.—37. *Milan Kolibiar*, 4. roč., Novohradská ul., Bratislava

Poznámka. Pokud v adrese není uveden druh školy, jedná se o *gymnasium*, popř. na Slovensku o *SVŠ*.

II. Přípravné úlohy I. kola

(Komentář a řešení)

1. KATEGÓRIA A

A-P-1

Určíte všechny prirodzené čísla x , pre ktoré je výraz $x^4 - 23x^2 + 42$ delitelný čísлом 83.



Tato úloha má tematiku na prvni pohled běžnou, ale je tu přece něco nového, totiž tzv. *kvadratické zbytky*. Daný trojčlen

$$x^4 - 23x^2 + 42 \tag{1}$$

rozložíme v součin

$$(x^2 - 21)(x^2 - 2);$$

protože 83 je prvočíslo, je číslo (1) násobkem 83, právě když je aspoň jedno z čísel $x^2 - 21$, $x^2 - 2$ násobkem 83. Zřejmě stačí vyšetřovat čísla $x = 0$ až $x = 82$, tj. hledat, jaké zbytky dává číslo x^2 při dělení číslem 83. Mohli bychom pomocí tabulky druhých mocnin přezkoušet všech 83 případů. To je však příliš pracné, proto se snažíme počet vyšetřovaných případů snížit; tím zároveň vnikneme trochu do teorie tzv. *kvadratických zbytků*.

Předně dokážeme pomocnou větu (*lemma* L_1):

(L_1) Jsou-li x_1, x_2 dvě různá celá čísla z intervalu $\langle 0; 82 \rangle$ taková, že $x_1^2 - 21$, $x_2^2 - 21$ jsou násobky prvočísla 83, pak je $x_1 + x_2 = 83$.

Obráceně: Je-li x celé číslo z intervalu $\langle 0; 82 \rangle$, pro které je $x^2 - 21$ násobkem 83, pak je také $(83 - x)^2 - 21$ násobkem 83.

DŮKAZ: a) Nechť je $x_1^2 - 21 = 83k_1$, $x_2^2 - 21 = 83k_2$, kde $0 \leq x_2 < x_1 \leq 82$. Pak je

$$(x_1^2 - 21) - (x_2^2 - 21) = 83(k_1 - k_2),$$

tj.

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 83(k_1 - k_2).$$

Protože je $0 < x_1 - x_2 \leq 82$, je 83 dělitelem čísla $x_1 + x_2$; protože je $x_1 + x_2 < 2 \cdot 82 = 164$, je $x_1 + x_2 = 83$.

b) Nechť je $x^2 - 21 = 83k$, kde $0 \leq x \leq 82$. Pak platí $(83 - x)^2 - 21 = 83^2 - 2 \cdot 83 \cdot x + x^2 - 21 = 83(83 - 2x) + 83k = 83m$,

tj. $(83 - x)^2 - 21$ je násobkem čísla 83.

Je zřejmé, že v *lemmatu* (L_1) můžeme nahradit číslo 21 libovolným přirozeným číslem, např. číslem 2; také prvočíslo 83 můžeme nahradit jiným prvočíslem.

Druhé *lemma* zní:

(L_2) Platí-li pro přirozená čísla x, x_1, x_2 vztah $x = x_1 x_2$ a dávají-li při dělení číslem 83 čísla x^2, x_1^2, x_2^2 po řadě zbytky z, z_1, z_2 , je číslo $z - z_1 z_2$ násobkem čísla 83*).

DŮKAZ: Nechť je $x_1^2 = 83k_1 + z_1$, $x_2^2 = 83k_2 + z_2$, $x^2 = 83k + z$; pak je $x^2 = x_1^2 \cdot x_2^2 = 83(83k_1 k_2 + k_1 z_2 + k_2 z_1) + z_1 z_2$, tj.

*) Obě *lemmata* se vysloví mnohem přehledněji, užijeme-li pojmu „kongruence“.

$$83k + z = 83m + z_1 z_2,$$

tj.

$$83(m - k) = z - z_1 z_2.$$

Z lemmatu (L_1) vyplývá, že stačí vyšetřovat kvadratické zbytky čísel 0 až 41. Další možné zjednodušení dostaneme tak, že vypočteme kvadratické zbytky prvočísel menších než 42 při dělení číslem 83. Jsou uvedeny v tabulce:

(T_1)

x	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
z	4	9	25	49	38	3	40	29	31	11	48	41	21

(z je zbytek při dělení čísla x^2 číslem 83). Pak můžeme (s použitím tabulky T_1) počítat zbytky zbývajících složených čísel od 1 do 20, takže dostaneme tabulku (T_2):

(T_2)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
z	1	4	9	16	25	36	49	64	81	17	38	61	3	30	59	7	40	75	29	68

A dále s pomocí tabulky (T_2) určíme ostatní kvadratické zbytky. Např. $36 = 2 \cdot 18$, tj. $36^2 = 2^2 \cdot 18^2$; zbytek z je týž jako pro $4 \cdot 75 = 300$, tj. 51. Anebo $26 = 2 \cdot 13$, $26^2 = 2^2 \cdot 13^2$; zbytek z je týž jako pro $4 \cdot 3 = 12$. Nebo $39 = 3 \cdot 13$, $39^2 = 3^2 \cdot 13^2$; zbytek je týž jako pro $9 \cdot 3 = 27$ atd.

ZÁVĚR: Kvadratický zbytek 2 nedostaneme pro žádné číslo x z intervalu $\langle 0, 82 \rangle$ a kvadratický zbytek 21 dostaneme jen pro čísla $x = 41, 42$.

Úloha má tedy dvě třídy řešení:

$$\begin{aligned} x_1 &= 41 + 83n, \\ x_2 &= 42 + 83n, \end{aligned} \quad (2)$$

kde n probíhá všechna nezáporná celá čísla. Je třeba ještě provést ZKOUŠKU, že všechna čísla (2) skutečně mají tu vlastnost, že číslo (1) je násobkem čísla 83.

Pro předvedení postupu by bylo asi vhodné zvolit místo prvočísla 83 menší prvočíslo, např. 41. Pak by se ovšem měl změnit i daný trojčlen; ÚLOHA by mohla znít např. takto:

Určete všechna přirozená čísla x , pro která je výraz $x^4 - 35x^2 + 66$ dělitelný číslem 41.

A-P-2

Určete všechna reálná čísla x , která splňují rovnici

$$\left[\frac{2x - 1}{3} \right] + \left[\frac{4x + 1}{6} \right] = \frac{5x - 4}{3},$$

přičemž symbol $[a]$ znamená *celou část* reálného čísla a , to je celé číslo, pro které platí

$$[a] \leq a < [a] + 1.$$



Tato úloha patří do skupiny úloh o funkci „*celá část z čísla*...“. Úloha téže tematiky je také mezi přípravnými úlohami kategorie C (C-P-1). Při řešení úlohy A-P-2 uvažte, že číslo $\frac{5x - 4}{3}$ je celé; řešení x lze tedy hledat jen mezi racionálními čísly. Použijeme substituce

$$\frac{5x - 4}{3} = y; \quad (y \text{ celé}) \tag{3}$$

z (3) dostaneme

$$x = \frac{3y + 4}{5}. \tag{4}$$

Vyjádríme

$$\frac{2x-1}{3} = \frac{2y+1}{5}, \quad \frac{4x+1}{6} = \frac{4y+7}{10}.$$

Místo dané rovnice pro x máme pak řešit rovnici

$$\left[\frac{2y+1}{5} \right] + \left[\frac{4y+7}{10} \right] = y, \quad (5)$$

a to v množině $\mathbf{C}$ všech celých čísel. Při řešení můžeme kombinovat (tak jako při C-P-1) pokusy s deduktivní úvahou. Pokusy nám dají tuto tabulku:

y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\left[\frac{2y+1}{5} \right]$	-2	-1	-1	-1	0	0	1	1	1	2	2
$\left[\frac{4y+7}{10} \right]$	-1	-1	-1	0	0	1	1	1	2	2	3

Tabulka nám dá pět řešení rovnice (5), která jsou tlustě zarámována. Rovnice (4) dá pět řešení dané rovnice (o správnosti výpočtu se přesvědčíme zkouškou)

$$x_1 = -0,4; \quad x_2 = 0,2; \quad x_3 = 0,8; \quad x_4 = 1,4; \quad x_5 = 2.$$

Zbývá dokázat to, co naznačuje horní tabulka, že totiž daná rovnice, resp. rovnice (5), nemá jiné řešení. Tabulku doplníme úvahou: Pro $y \geq 5$ je

$$\left[\frac{2y+1}{5} \right] \leq \frac{2y+1}{5} = \frac{4y+2}{10} \quad \text{a} \quad \left[\frac{4y+7}{10} \right] \leq \frac{4y+7}{10}$$

a dále

$$\left[\frac{2y+1}{5} \right] + \left[\frac{4y+7}{10} \right] \leq \frac{8y+9}{10} = \frac{4}{5}y + \frac{9}{10} <$$

$$< \frac{4}{5}y + \frac{1}{5}y = y.$$

Rovnice (5) tedy skutečně nemá žádné řešení $y \geq 5$. Obdobný důkaz provedeme pro $y \leq -5$.

Doporučujeme, abyste řešili rovnici (5) graficky. K tomu účelu je výhodné odvodit POMOCNOU VĚTU:

(L) Pro každé $c \in \mathbf{C}$ a $t \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{C}$ (tj. pro každé celé číslo c a reálné nikoli celé číslo t) platí vzorec:

$$c - [t] = [c + 1 - t].$$

DŮKAZ: Vyjdeme z definice „celé části z A “. Lze to zapsat dvojím způsobem; buď $[A] \leq A < [A] + 1$, nebo $A - 1 < [A] \leq A$. Z této definice plyne

$$c - t < [c + 1 - t] \leq c - t + 1. \quad (6)$$

Na druhé straně však platí

$$-[t] - 1 < -t \leq -[t],$$

tj.

$$c - t \leq c - [t] < c - t + 1. \quad (7)$$

Vzhledem k předpokladu o čísle t nemůže nastat rovnost ani v (6) ani (7); obě tyto podmínky jsou tedy totožné. Protože však v otevřeném intervalu $(c - t, c - t + 1)$ leží právě jedno celé číslo, je lemma (L) dokázáno.

Při řešení rovnice (5) rozlišíme nyní dva případy:

$$\text{a) } \frac{2y+1}{5} \in \mathbf{C}, \quad \text{b) } \frac{2y+1}{5} \notin \mathbf{C}.$$

V případě a) zjistíme, že musí být $y = 5n + 2$ ($n \in \mathbf{C}$).

$$\text{Vypočteme } \frac{2y+1}{5} = 2n+1, \quad \frac{4y+7}{10} = 2n + \frac{3}{2}.$$

Rovnici (5) pak přepíšeme do tvaru

$$[2n + 1] + \left[2n + \frac{3}{2}\right] = 5n + 2.$$

Odtud dostaneme $n = 0$, což dává jedno řešení $y = 2$.
V případě b) užijeme pomocné věty (L) a dostaneme místo (5)

$$\left[\frac{4y + 7}{10}\right] = \left[y + 1 - \frac{2y + 1}{5}\right],$$

čili

$$\left[\frac{4y + 7}{10}\right] = \left[\frac{3y + 4}{5}\right]; \quad (8)$$

odtud dostaneme zbývající řešení $y = -2, -1, 0, 1$.

Rovnici (8) si snadno rozřešíte sami.

A-P-3

Ak platí v trojúhelníku ABC vztah $\alpha = 2\beta$, potom platí $a^2 = b^2 + bc$. Dokážte a zjistěte, či platí aj obrácená věta.



Úloha A-P-3 je v pravém slova smyslu „cvičná“; nevyžaduje v podstatě žádný nápad. Z podmínky $\alpha = 2\beta$ odvodíme ihned $\gamma = \pi - 3\beta$ a podle známých vět

$$\frac{a}{b} = 2\cos\beta, \quad \frac{c}{b} = \frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} = 3 - 4\sin^2\beta = 4\cos^2\beta - 1.$$

Odtud dostaneme eliminací

$$\frac{a^2}{b^2} - 1 = \frac{c}{b}, \quad (9)$$

neboli

$$a^2 = b^2 + bc. \quad (10)$$

Obráceně z podmínky (10) plyne (9) a odtud podle sinové věty

$$\sin(\alpha + \beta) \sin\beta = (\sin\alpha + \sin\beta)(\sin\alpha - \sin\beta)$$

neboli

$$\begin{aligned} & \sin(\alpha + \beta) \sin\beta = \\ & = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cos\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cos\frac{\alpha + \beta}{2} \end{aligned}$$

neboli

$$\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin\beta = \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta).$$

Protože $\sin(\alpha + \beta) = \sin\gamma \neq 0$, je

$$\sin\beta = \sin(\alpha - \beta).$$

Odtud plyne buď $\beta = \alpha - \beta$, nebo $\pi - \beta = \alpha - \beta$. Druhá rovnost vede ke sporu $\alpha = \pi$; je tedy $\beta = \alpha - \beta$, tj. $\alpha = 2\beta$.

Tuto úlohu můžete řešit bez pomoci. Bylo by vhodné doplnit ji otázkou: *Které trojúhelníky s celočíselnými délkami stran mají vlastnost „ $\alpha = 2\beta$ “?*

Ze vztahu $a^2 = b^2 + bc$ neboli $a^2 = b(b + c)$ snadno dokážeme, že číslo b je druhá mocnina celého čísla, pokud ovšem předpokládáme, že čísla a, b, c nemají společného dělitele většího než 1. (Je-li p prvočinitel čísla a , pak $p/b \vee \vee p/(b + c)$; kdyby bylo $p/b \wedge p/(b + c)$ *, bylo by p dělitelem všech tří čísel a, b, c . Je tedy

$$b = u^2, \quad b + c = v^2,$$

tj.

$$a = uv, \quad b = u^2, \quad c = v^2 - u^2. \quad (11)$$

*) Symbol p/b se čte „ p dělí b “, tj. číslo p je dělitelem čísla b .

Obráceně zvolíme-li dvě nesoudělná čísla u, v , pro která platí

$$1 \leq u < v < 2u,$$

dají vzorce (11) řešení úlohy. Podmínka $v < 2u$ vyplývá z trojúhelníkové nerovnosti $a + b > c$. Podrobné řešení doplňkové úlohy je velmi poučné.

A-P-4

Na průměru MN kružnice $k = (S; r)$ jsou dány body $A \neq S, B \neq S$, které leží na opačných polopřímkách vytáčených na MN bodem S . Na kružnici k určete všechny body X takové, aby osa úhlu AXB procházela bodem S .



Také tato úloha je velmi jednoduchá a má jediné poslání: připomenout řešitelům tzv. *Apolloniovu kružnici* (Apolloniovo vytvoření kružnice) spolu s jistou vlastností osy úhlu trojúhelníka. Tato vlastnost je vyslovena *větou*:

(L_1) Je-li U takovým bodem strany AB trojúhelníka ABC , že $\sphericalangle ACU = \sphericalangle BCU$, pak platí $\frac{AU}{BU} = \frac{AC}{BC}$.

Věta o Apolloniově kružnici zní:

(L_2). Jsou-li P, Q dva různé body roviny ϱ a $\lambda \neq 1$ kladné číslo, pak množina všech bodů $X \in \varrho$, pro které platí $\frac{PX}{QX} = \lambda$, je kružnice, jejíž střed leží na přímce PQ .

Věta (L_1) se dokáže snadno sinovou větou nebo z podobných trojúhelníků. Na obr. 1 je CU osa úhlu $\sphericalangle ACB$;

V je takový bod, že $\sphericalangle CAV =$
 $= \sphericalangle CBU$, pak je

$$\sphericalangle CUB = \sphericalangle AUV =$$

$$= \sphericalangle AVU = \varphi.$$

Z podobnosti trojúhelníků
 $\triangle ACV \sim \triangle BCU$ plyne

$$\frac{AC}{AV} = \frac{BC}{BU};$$

protože $AV = AU$, je $\frac{AC}{BC} =$
 $= \frac{AU}{BU}$. Jinak je věta (L_1)

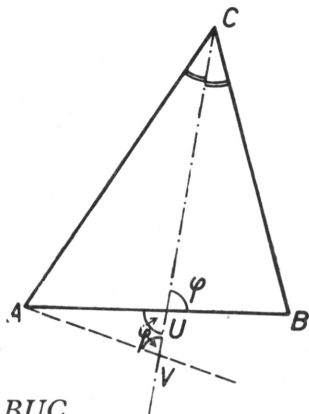
evidentním důsledkem použití
 sinové věty na $\triangle AUC$, $\triangle BUC$.

Lemna (L_2) se dokáže metodou souřadnic nebo použitím věty (L_1) . Důkaz obou vět (L_1) , (L_2) i doplnění (L_2) otázkou o případě $\lambda = 1$ přenecháváme čtenářům.

Při řešení úlohy A-P-4 rozlišíme dva případy; bod S je středem úsečky AB ; bod S není středem úsečky AB . V druhém případě užijeme věty (L_2) , hledané body jsou průsečíky dané kružnice s Apolloniiovou kružnicí. V prvním případě je Apolloniiova kružnice nahražena přímkou. Musíme ovšem v obou případech dokázat, že vzniknou dva průsečíky.

Přehlédneme-li tedy soubor přípravných úloh pro kategorii A, vidíme, že se tu klade důraz na číselnou teorii (úlohy A-P-1, A-P-2 a doplněk k úloze A-P-3); geometrické úlohy jsou zcela jednoduché.

Obr. 1



2. KATEGORIE B

B-P-1

Tři konečné množiny $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$ mají po řadě n_1, n_2, n_3 prvků; množina $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_3$ má s prvků.

Dokažte: a) Je-li $n_1 + n_2 + n_3 \geq 2s + 1$, má průnik všech tří množin alespoň jeden prvek.

b) Má-li průnik všech tří množin alespoň jeden prvek, je $n_1 + n_2 + n_3 \geq s + 2$.

Dokažte dále, že podmínka b) není postačující pro to, aby tři množiny měly neprázdný průnik.

Tato úloha zahajuje sérii úloh, jejichž tematika je čerpána z nového obsahu učiva. Již několik let se učí na gymnasiích podle komentářů k učebnicím matematiky, a tím proniká nové učivo ze strukturální matematiky do vyučování. Začínáme proto zařazovat úlohy s tematikou z naivní teorie množin, která poskytuje mnoho příležitosti k manipulacím s Vennovými diagramy. Pokud jde o konečné množiny, narážíme velmi často na vzorce o počtu prvků konečných množin, jež jsou speciálními případy vzorců z teorie míry. Zvyknete-li si s nimi pracovat, absolvujete tak propedeutiku pro výpočet obsahů a objemů geometrických útvarů i pro základy pravděpodobnosti. Máme na mysli zejména tyto tři vzorce: Necht jsou $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$ tři konečné množiny, které mají po řadě n_1, n_2, n_3 prvků. Označíme $s_{12}, s_{23}, s_{31}, s_{123}$ počty prvků množin $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_3 \cup \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_3$ a dále $p_{12}, p_{23}, p_{31}, p_{123}$ počty prvků množin $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_3 \cap \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}_3$. Pak platí

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 &= s_{12} + p_{12}, \\ s_{123} &= s_{12} + s_{23} + s_{31} - (n_1 + n_2 + n_3) + p_{123}, \\ s_{123} &= n_1 + n_2 + n_3 - (p_{12} + p_{23} + p_{31}) + p_{123}. \end{aligned} \quad (1)$$

Příslušný Vennův diagram, pomocí kterého si můžeme ověřit vzorce (1), je znázorněn na obr. 2; počty prvků s_{12} , s_{23} , s_{31} , s_{123} nejsou k příslušným množinám připsány.

Při řešení úloh B-P-1 a) i b) potřebujeme ještě nerovnosti

$$s_{12} \leq s_{123}, \quad s_{23} \leq s_{123}, \quad s_{31} \leq s_{123}. \quad (2)$$

Je-li $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}_3 \neq \emptyset$, je $p_{123} \geq 1$ a obráceně.

V úloze a) tedy vyjádříme p_{123} , např. z druhé formule (1), a pokusíme se dokázat, že $p_{123} \geq 1$. Skutečně je

$$p_{123} = (s_{123} - s_{12}) + (s_{123} - s_{23}) + (s_{123} - s_{31}) + n_1 + n_2 + n_3 - 2s_{123}.$$

Podle (2) je tedy

$$p_{123} \geq n_1 + n_2 + n_3 - 2s_{123} \geq 1.$$

V úloze b) vycházíme z před-

Obr. 2

pokladu $p_{123} \geq 1$ a užijeme třetího vzorce (1) a vzorců

$$p_{12} \geq p_{123}, \quad p_{23} \geq p_{123}, \quad p_{31} \geq p_{123}. \quad (3)$$

Dostaneme

$$s_{123} = n_1 + n_2 + n_3 + (p_{123} - p_{12}) + (p_{123} - p_{23}) + (p_{123} - p_{31}) - 2p_{123}.$$

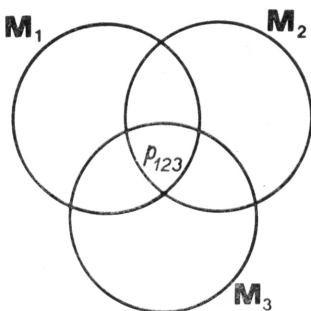
Podle (3) vyjde

$$s_{123} \leq n_1 + n_2 + n_3 - 2p_{123};$$

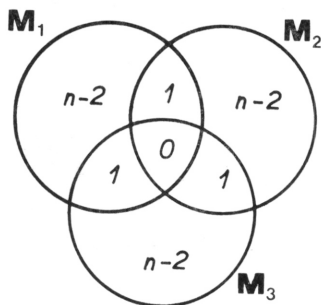
a tedy za předpokladu, že $p_{123} \geq 1$, platí

$$2 \leq 2p_{123} \leq n_1 + n_2 + n_3 - s_{123}.$$

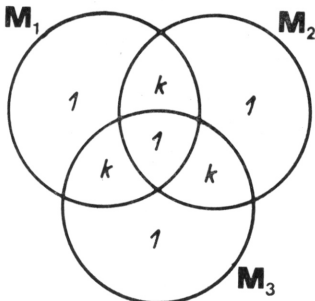
Protipříklad v úloze b) najdete sami, poradíme-li vám, abyste se snažili použít takové trojice množin, u kterých mají průniky co nejmenší počet prvků; všechny tři mno-



žiny mohou mít dokonce stejný počet prvků. Ale i na to vše můžete přijít sami. Příslušný Vennův diagram pak je znázorněn na obr. 3. Zde je $n_1 = n_2 = n_3 = n$:



Obr. 3



Obr. 4

$$p_{123} = 0, s_{123} = 3n - 3, \text{ tj.}$$

$$n_1 + n_2 + n_3 = 3n > 3n - 1 = s_{123} + 2.$$

Doplňkem k úloze B-P-1 může být zjištění, zda podmínka

$$n_1 + n_2 + n_3 = 2s_{123} + 1$$

je nutná pro to, aby bylo $p \geq 1$. Protipříklad zde vyžaduje situaci, za které mají průniky co největší počet prvků, např. (obr. 4): pak je $n_1 = n_2 = n_3 = 2k + 2$, $p_{123} = 1$, $s_{123} = 3k + 4$, a tedy

$$n_1 + n_2 + n_3 = 6k + 6 < 6k + 9 = 2s_{123} + 1.$$

B-P-2

Je dána funkcia

$$V_p(x) = \frac{(p+4)x^2 + 4x + 1}{x^2 - 4x + 2p}$$

reálnej premennej x . Nájdete všetky celé čísla p , pre ktoré funkcia $V_p(x)$ nadobúda každú z hodnot -2 , -1 a 0 .

Úloha B-P-2 je dost obtížná; týká se množiny funkcí o jedné proměnné x s parametrem p nebo funkce o dvou proměnných x, p . V textu úlohy nejsou explicitně uvedeny kvantifikátory, na nichž však velmi záleží. Bylo by asi užitečné formulovat úlohu množinově s příslušnými kvantifikátory. Označme $\mathbf{M}_0$ množinu všech celých čísel p ,

pro které funkce $V_p(x) = \frac{(p+4)x^2 + 4x + 1}{x^2 - 4x + 2p}$ nabývá

hodnoty 0, tj. pro které existuje aspoň jedno reálné číslo x tak, že $V_p(x) = 0$.

Symbolicky:

$$\mathbf{M}_0 = \{p \in \mathbf{C}; \exists x \in \mathbf{R}; V_p(x) = 0\}.$$

Obdobně zavedeme množiny $\mathbf{M}_{-1}$, $\mathbf{M}_{-2}$. Řešením úlohy je množina

$$\mathbf{M}_0 \cap \mathbf{M}_{-1} \cap \mathbf{M}_{-2}.$$

Hledejme nejprve množinu $\mathbf{M}_0$. Číslo $p \in \mathbf{C}$ náleží do $\mathbf{M}_0$, právě když existuje aspoň jedno číslo $x \in \mathbf{R}$ tak, že platí

$$(p+4)x^2 + 4x + 1 = 0 \quad (4)$$

a zároveň neplatí

$$x^2 - 4x + 2p = 0. \quad (5)$$

Snadno se lze přesvědčit, že $-4 \in \mathbf{M}_0$. Předpokládejme, že $p \neq -4$. Pak (4) je kvadratická rovnice a má aspoň jedno reálné řešení x , právě když je jejím diskriminantem nezáporné číslo, tj. když

$$16 - 4(p+4) \geq 0,$$

neboli když

$$p \leq 0.$$

Je-li $p < 0$ a $p \neq -4$, má rovnice (4) vždy dva různé kořeny, z nichž aspoň jeden není kořenem rovnice (5); jinak by totiž bylo $p+4 = -1 \wedge 1 = -2p$, což je nemožné.

Je-li $p = 0$, má rovnice (4) jediný kořen $x = -\frac{1}{2}$ a ten

není kořenem rovnice (5). Z toho vyplývá, že všechna nekladná celá čísla tvoří množinu $\mathbf{M}_0$;

$$\mathbf{M}_0 = \{p \in \mathbf{C}; p \leq 0\}.$$

Vyšetříme množinu $\mathbf{M}_{-1}$. Číslo $p \in \mathbf{C}$ náleží do $\mathbf{M}_{-1}$, právě když existuje aspoň jedno číslo $x \in \mathbf{R}$ tak, že platí

$$(p + 4)x^2 + 4x + 1 = -x^2 + 4x - 2p \quad (6)$$

a zároveň neplatí (5). Z (6) dostaneme

$$(p + 5)x^2 + 2p + 1 = 0. \quad (6')$$

Rovnice (6') má aspoň jeden reálný kořen, právě když $(p + 5)(2p + 1) \leq 0$ a zároveň $p + 5 \neq 0$, neboli když

$$2p^2 + 11p + 5 \leq 0,$$

neboli když

$$-5 < p \leq -\frac{1}{2}. \quad (7)$$

Je-li p z intervalu (7), má rovnice (5) vždy dva různé kořeny $\star$), z nichž aspoň jeden není kořenem rovnice (6') neboli (6). Z toho vyplývá, že všechna celá čísla z intervalu (7) tvoří množinu $\mathbf{M}_{-1}$;

$$\mathbf{M}_{-1} = \{-1, -2, -3, -4\}.$$

Nakonec vyšetříme množinu $\mathbf{M}_{-2}$. Číslo $p \in \mathbf{C}$ náleží do $\mathbf{M}_{-2}$, právě když existuje aspoň jedno číslo $x \in \mathbf{R}$ tak, že platí

$$(p + 4)x^2 + 4x + 1 = -2x^2 + 8x - 4p \quad (8)$$

a zároveň neplatí (5). Z (8) dostaneme

$$(p + 6)x^2 - 4x + 4p + 1 = 0. \quad (8')$$

Rovnice (8') má aspoň jeden reálný kořen, právě když $16 - 4(p + 6)(4p + 1) \geq 0$, neboli když

$$4p^2 + 25p + 2 \leq 0,$$

$\star$) Kořeny splynou jedině pro $p = 2$.

neboli když

$$-6,2 \doteq \frac{-25 - \sqrt[3]{593}}{8} \leq p \leq \frac{-25 + \sqrt[3]{593}}{8} \doteq -0,08. \quad (9)$$

Je-li p z intervalu (9) a je-li $p + 6 \neq 0$, má rovnice (5) vždy dva různé kořeny*), z nichž aspoň jeden není kořenem rovnice (8'), neboli (8). Je-li $p = -6$, má rovnice (8') jediný kořen $x = -\frac{23}{4}$, který není kořenem rovnice (5). Z toho vyplývá, že všechna celá čísla z intervalu (9) tvoří množinu $\mathbf{M}_{-2}$;

$$\mathbf{M}_{-2} = \{-1, -2, -3, -4, -5, -6\}.$$

Je tedy

$$\mathbf{M}_0 \cap \mathbf{M}_{-1} \cap \mathbf{M}_{-2} = \{-1, -2, -3, -4\}.$$

Postup, kterého jsme použili, dává vlastně řešení obecnější úlohy. Jestliže v textu úlohy nahradíme slova „celá čísla p “ slovy „reálná čísla p “ a označíme-li příslušné množiny $\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_{-1}, \mathbf{K}_{-2}$ místo $\mathbf{M}_0, \mathbf{M}_{-1}, \mathbf{M}_{-2}$, zůstane postup řešení beze změny jen s tím rozdílem, že místo množin $\mathbf{M}_0, \mathbf{M}_{-1}, \mathbf{M}_{-2}$ dostaneme intervaly $\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_{-1}, \mathbf{K}_{-2}$;

$$\mathbf{K}_0 = \{p \in \mathbf{R}; p \leq 0\}, \quad \mathbf{K}_{-1} = \left\{p \in \mathbf{R}; -5 < p \leq -\frac{1}{2}\right\},$$
$$\mathbf{K}_{-2} = \left\{p \in \mathbf{R}; \frac{-25 - \sqrt[3]{593}}{8} \leq p \leq \frac{-25 + \sqrt[3]{593}}{8}\right\}.$$

Zřejmě je

$$\mathbf{K}_0 \cap \mathbf{K}_{-1} \cap \mathbf{K}_{-2} = \mathbf{K}_{-1} = (-5; -0,5)$$

a to je řešení zobecněné úlohy.

Domníváme se, že vhodným uvedením do řešení úlohy by bylo např. řešení této varianty:

*) Kořeny splynou jedině pro $p = 2$.

Je dána funkce

$$V_p(x) = \frac{(p+4)x^2 + 4x + 1}{x^2 - 4x + 2p}$$

reálné proměnné x . Najděte všechna reálná čísla p , pro která funkce $V_p(x)$ nabývá každé z hodnot 0 a 1.

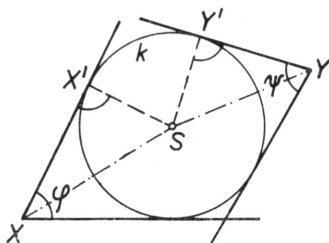
B-P-3

Najdlhšou a nejkratšou stranou dotýčnicového lichobežníka sú jeho základne. Dokážte.

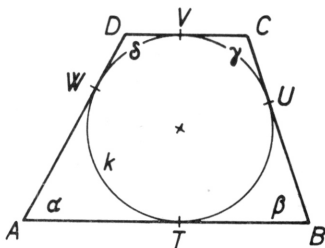
Úloha B-P-3 je svým výsledkem málo zajímavá; po sestrojení několika náčrtků lze nejen z názoru zjistit, že tvrzení věty je pravdivé, ale lze objevit i princip důkazu, který se opírá o následující *pomocnou větu*:

Nechť vidíme kružnici k se středem S z bodu X jejího vnějšku pod úhlem φ a z bodu Y jejího vnějšku pod úhlem ψ (obr. 5). Pak platí

$$SX > SY \Leftrightarrow \varphi < \psi. \star)$$



Obr. 5



Obr. 6

*) Při označení podle obr. 5.

Domníváme se, že toto lemma je postačujícím impulsem pro řešení úlohy. Důkaz lemmatu lze provést trigonometricky nebo s použitím pravoúhlých trojúhelníků SXX' , SYY' se shodnými odvěsnami $SX' = SY'$. Při vlastním odůvodnění (označení podle obr. 6) volíme označení úhlů při větší základně AB tak, aby platilo

$$\alpha \leq \beta. \quad (10)$$

Mimo to je (protože $AB > CD$)

$$\alpha + \beta < \pi, \gamma = \pi - \beta, \delta = \pi - \alpha. \quad (11)$$

Z (10) a (11) plyne dále

$$\alpha < \pi - \beta = \gamma, \beta < \pi - \alpha = \delta. \quad (12)$$

Podle lemmatu dostaneme z (10) a (12)

$$\begin{aligned} AT &= AW \geq BT = BU, \\ AT &= AW > CU = CV, \\ BT &= BU > DV = DW. \end{aligned} \quad (13)$$

Z nerovností (13) plyne

$$\begin{aligned} AB &= AT + BT > AW + DW = AD, \\ AB &= AT + BT > CU + BU = BC, \\ CD &= CV + DV < CU + BU = BC, \\ CD &= CV + DV < DW + AW = AD. \end{aligned} \quad (14)$$

Z (14) dostaneme

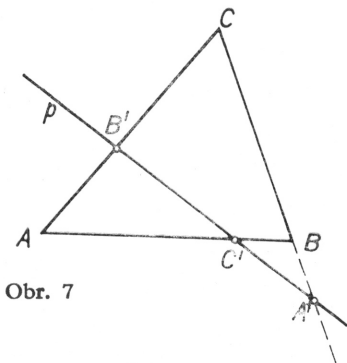
$$CD < BC < AB, \quad CD < AD < AB. \quad (15)$$

Nerovnosti (15) vyjadřují tvrzení úlohy B-P-3.

B-P-4

Je dán čtyřstěn $ABCD$. Body B' , C' jsou po řadě středy hran BD , CD . Označme R bod polopřímky opačné k polopřímce AB , pro který platí $AR = n \cdot AB$, kde n je

přirozené číslo. Dále označme A' průsečík hrany AD s rovinou $B'C'R$. Vyjádřete objem čtyřstěnu $A'B'C'D$ pomocí objemu čtyřstěnu $ABCD$ a pomocí čísla n .



Obr. 7

Úlohu B-P-4 lze řešit na základě *Menelaovy věty*. Snad by bylo vhodné, abyste se s touto větou seznámili, neboť má velmi široké uplatnění v mnoha geometrických úlohách. VĚTA zní (obr. 7):

Je dán trojúhelník ABC , v jeho rovině přímka p , která protíná přímky AB , BC , CA po řadě v bodech C' , A' , B' ,

z nichž žádný nesplyne s žádným z vrcholů A , B , C . Pak pro dělicí poměry platí:

$$(ABC') \cdot (BCA') \cdot (CAB') = 1. \quad (16)$$

(Stojí za upozornění, že dělicí poměry jsou „tvořeny cyklicky“.)

Nejelegantnější DŮKAZ Menelaovy věty se opírá o *Mongeovu větu* o skládání stejnoolehlostí. Je třeba si ovšem uvědomit, že konstantu homotetie se středem S , která převádí bod $X \neq S$ do bodu $X' \neq S$, je dělicí poměr $(X'XS)$ (v tomto uspořádání bodů). Jak je vidět, předpokládá tato partie geometrie pevné zakotvení pojmu dělicího poměru a jeho vlastností.

Sestrojíme tedy dvě stejnoolehlosti H_1, H_2 dané středy a dvojicemi:

$$\mathbf{H}_1(C' \rightarrow C', B \rightarrow A), \mathbf{H}_2(B' \rightarrow B', A \rightarrow C);$$

jejich konstanty jsou $\kappa_1 = (ABC')$, $\kappa_2 = (CAB')$. Složením těchto dvou homotetií vznikne podle Mongeovy věty zobrazení $\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2$, které je stejnoolehlostí, neboť platí

$$\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 (A' \rightarrow A', B \rightarrow C).$$

($\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2$ nemůže být ani identitou ani posunutím.)

Stejnoolehlost $\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2$ má konstantu $\kappa_3 = (CBA')$, pro kterou podle Mongeovy věty platí

$$\kappa_1 \cdot \kappa_2 = \kappa_3.$$

Je tedy

$$(ABC') \cdot (CAB') = (CBA').$$

Protože však

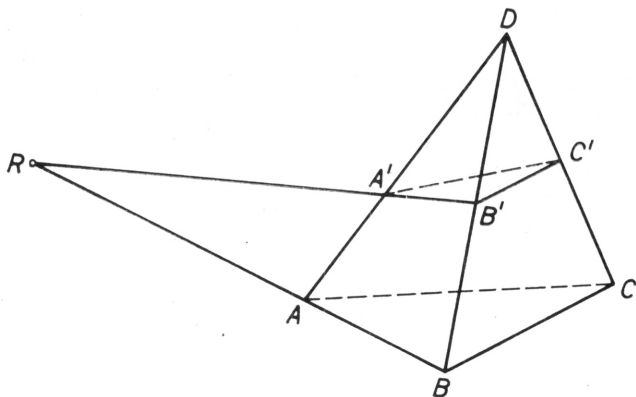
$$(CBA') = \frac{1}{(BCA')},$$

platí (16).

Důkaz Mongeovy věty lze provést snadno metodou souřadnic (nejlépe s komplexními čísly); méně vhodné jsou jiné důkazy, při kterých je třeba rozlišovat různé případy podle vzájemné polohy bodů (např. všechny tři body A' , B' , C' mohou ležet vně trojúhelníka ABC).

V dané stereometrické úloze vyjdeme při řešení z rozboru; viz obr. 8. Vyjdeme z takové stěny čtyřstěnu $A'B'C'D$, aby na ni kolmá výška byla v jednoduchém vztahu k některé z výšek daného čtyřstěnu $ABCD$. Je snadné přijít na to, že taková stěna je $A'B'D$. Označíme-li totiž v' velikost na ni kolmé výšky čtyřstěnu $A'B'C'D$ a označíme-li v velikost výšky čtyřstěnu $ABCD$ spuštěné z vrcholu C na stěnu ABD , platí

$$v' = \frac{1}{2} v, \quad (17)$$



Obr. 8

neboť C' je střed úsečky CD . Vzorec (17) si dokážete snadno z podobných trojúhelníků.

Označíme-li po řadě V , V' objemy čtyřstěnu $ABCD$, $A'B'C'D$, platí

$$V = \frac{1}{3} \Delta ABD \cdot v, \quad V' = \frac{1}{3} \Delta A'B'D \cdot v',$$

tj. podle (17)

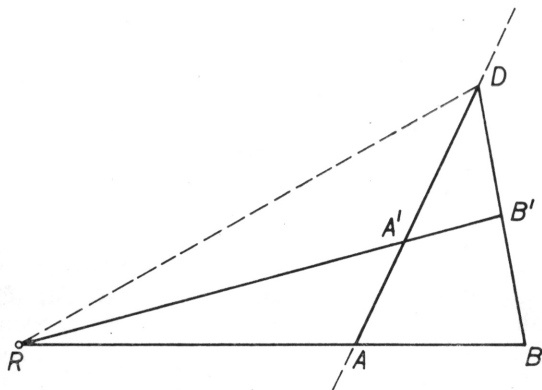
$$\frac{V'}{V} = \frac{\Delta A'B'D}{2\Delta ABD}; \quad (18)$$

přítom ΔABD , $\Delta A'B'D$ značí obsahy příslušných trojúhelníků. Použijeme věty Menelaovy (obr. 9), a to na $\Delta RBB'$ a přímkou AD . Pak platí pro dělicí poměry:

$$(RBA) \cdot (BB'D) \cdot (B'RA') = 1,$$

tj.

$$(-n) \cdot 2 \cdot (B'RA') = 1,$$



Obr. 9

tj. podle vlastností dělicího poměru postupně

$$(B'RA') = -\frac{1}{2n}, \quad (RB'A') = -2n,$$

$$(RA'B') = 1 + 2n,$$

$$RB' = (2n + 1) \cdot A'B'. \quad (19)$$

Dále je podle (19)

$$\frac{\Delta A'B'D}{\Delta RB'D} = \frac{A'B'}{RB'} = \frac{1}{2n + 1},$$

$$\begin{aligned} \Delta A'B'D &= \frac{1}{2n + 1} \cdot \Delta RB'D = \frac{1}{2(2n + 1)} \Delta RBD = \\ &= \frac{n + 1}{2(2n + 1)} \Delta ABD, \end{aligned}$$

neboli

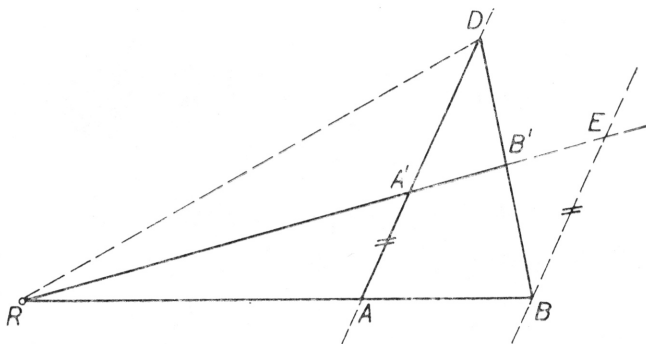
$$\frac{\Delta A'B'D}{\Delta ABD} = \frac{n+1}{2(2n+1)}. \quad (20)$$

Přitom užíváme stále VĚTY: Mají-li dva trojúhelníky strany délek s_1, s_2 ležící v téže přímce a mají-li společný vrchol proti těmto stranám, pak jejich obsahy jsou v poměru $s_1 : s_2$.

Spojením vzorců (18), (20) dostaneme výsledek.

Chceme-li se vyhnout Menelaově větě, odvodíme vztah (19) způsobem obdobným odvození vlastností těžnic trojúhelníka; je užitečné provést ještě další zobecnění.

V naší situaci je postup následující (obr. 10)*): Protože je $AD \parallel BE$, $BB' = DB'$, je také $A'B' = B'E$. Na druhé



Obr. 10

*) Bod B nemusí být středem strany BD ; středovou symetrií pak vystřídá homotetie.

straně plyne z předpokladu a z podobnosti trojúhelníků $\triangle RAA'$, $\triangle RBE$ vztah

$$\frac{RA'}{A'E} = \frac{RA}{AB} = n,$$

$$RA' = n \cdot A'E = 2n \cdot A'B',$$

$$RB' = RA' + A'B' = (2n + 1) \cdot A'B',$$

což je vzorec (19).

Způsobem, který je naznačen na obr. 10, můžeme odvodit Menelaovu větu.

3. KATEGORIE C

C-P-1

a) Sestrojte graf funkce

$$y = [x + 2] + [2x - 1].$$

b) Určete všechna řešení rovnice

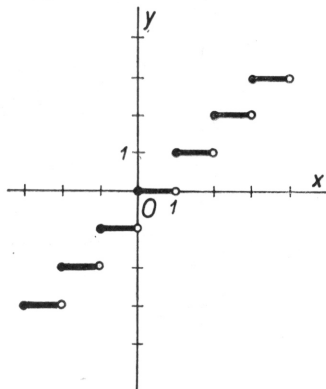
$$[x + 2] + [2x - 1] = [x].$$

Přitom symbol $[a]$ značí „celou část z čísla a “, tj. takové celé číslo b , pro které platí $b \leq a < b + 1$.



Tato úloha otvírá tematiku funkce „celá část z reálného čísla“. Je to tematika, která je na hranici funkční a číselné teorie.

Promyslete si definici funkce $x \mapsto [x]$; $[x]$ je celé číslo, pro které platí $[x] \leq x < [x] + 1$. Tímto předpisem je každému reálnému číslu x přiřaděno jediné číslo $[x]$. Jde tedy o *relaci*, která je *funkcí* (zobrazením). Její definiční obor je $\mathbf{R}$ (tj. množina všech reálných čísel), obor jejích funkčních hodnot je množina všech celých čísel. Kartéz-



ský graf funkce $x \mapsto [x]$ jsou známé „schody“ (obr. 11).

Levý krajní bod každé úsečky náleží grafu funkce $x \mapsto [x]$, pravý nikoli. Ještě si uvědomíme, že moderní výklad matematické analýzy na střední škole by měl vycházet z topologických pojmů a zejména ze dvou důležitých typů funkcí: *schodových funkcí* (fonctions en escalier), které jsou zobecněním funkce $x \mapsto [x]$,

a z nich odvozených *etážových funkcí* (fonctions étagées). Představa budoucího vyučování matematice nás nutí, abychom — aspoň v matematické olympiádě — věnovali pozornost funkci $x \mapsto [x]$.

Úlohy a), b) z C-P-1 na sebe navazují. V úloze a) nepředpokládáme, že byste uměli napsat formuli pro funkci $x \mapsto [x + 2] + [2x - 1]$ v intervalu $\left\langle \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha + 1}{2} \right\rangle$. Je

ovšem patrné, že „schody“ budou mít délku $\frac{1}{2}$ a že v uvedených intervalech bude funkce konstantní. První úkol bude formulován asi takto: určete funkční hodnoty vyšetřované funkce v intervalech

$$\left\langle -\frac{5}{2}; -2 \right\rangle, \left\langle -2; -\frac{3}{2} \right\rangle, \left\langle -\frac{3}{2}; -1 \right\rangle, \\ \left\langle -1; -\frac{1}{2} \right\rangle, \left\langle -\frac{1}{2}; 0 \right\rangle,$$

$$\left\langle 0; \frac{1}{2} \right\rangle, \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle, \left\langle 1; \frac{3}{2} \right\rangle, \left\langle \frac{3}{2}, 2 \right\rangle, \left\langle 2; \frac{5}{2} \right\rangle.$$

Snad bychom ještě mohli určit, kdy je „*skok*“ funkčních hodnot 1, kdy 2.

Pro řešení úlohy b) sestrojíme ještě do téhož obrázku graf funkce $x \mapsto [x]$ a zjistíme průnik obou grafů. Dostaneme všechny body $[x; -1]$ příslušící k intervalu $-\frac{1}{2} \leq x < 0$.

Pak bychom měli dokázat, že mimo uvedený interval není žádné řešení rovnice z úlohy b). Výpočet vychází z definice funkce $x \mapsto [x]$ a je asi následující:

$$\begin{aligned} \Phi &= [x + 2] + [2x - 1] - [x] > \\ &> x + 1 + 2x - 2 - x = 2x - 1, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} -\Phi &= [x] - [x + 2] - [2x - 1] > \\ &> x - 1 - (x + 2) - (2x - 1) = -2x - 2. \end{aligned} \quad (2)$$

Podle (1) pro všechna $x > \frac{1}{2}$ je $2x - 1 > 0$, tj. $\Phi > 0$.

Podle (2) pro všechna $x < -1$ je $-2x - 2 > 0$, tj. $-\Phi > 0$.

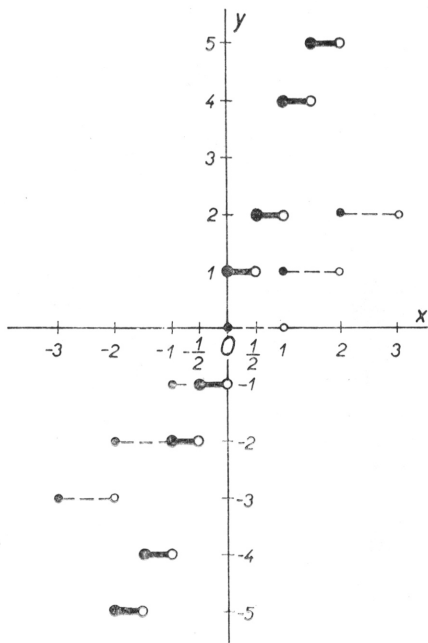
Řešení můžeme tedy hledat jen v intervalu $\left\langle -1; \frac{1}{2} \right\rangle$.

Grafické provedení je na obr. 12.

C-P-2

Určíte všetky také kvadratické funkcie $f(x)$, ktoré pre všetky reálne čísla x splňujú podmienku

$$f(2x + 1) = 4f(-x).$$



Obr. 12

Úloha C-P-2 se týká další důležité kategorie funkcí — funkcí polynomických. Máme nalézt všechny kvadratické funkce $f(x)$, vyhovující funkcionální rovnici

$$f(2x + 1) = 4f(-x). \quad (3)$$

Impulsem k řešení je zopakování věty o rovnosti dvou polynomických funkcí. Rovnost

$$\begin{aligned} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \\ = b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

platí pro všechna x , právě když

$$n = p, \quad a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \dots, \quad a_n = b_p.$$

Budiž $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Podmínka (3) zní pak po úpravě (nahradíme x postupně výrazy $2x + 1$, $-x$)

$$(4a + 6b)x + (a + b - 3c) = 0.$$

Řešením je množina funkcí $x \mapsto c \cdot (9x^2 - 6x + 1)$, $c \neq 0$.

Nezapomeňte na ZKOUŠKU! Bylo by užitečné řešit i variantu funkcionální rovnice (3), např. $f(2x + 1) = f(x - 1) + x^2$.

C-P-3

a) Zjistěte, kolikrát připadl, resp. připadne, v letech 1601 až 2000 Nový rok na jednotlivé dny týdne.

b) Najděte stejné údaje pro léta 1801–2200. (Předpokládáme, že nedojde k reformě kalendáře.)



Tato úloha je v podstatě hrou s kalendářem — matematicky se zbytkovými třídami *modulo* 7. Označme x den v týdnu, na který připadl 1. leden 1601 (rok 1601 je už po zavedení gregoriánského kalendáře, tj. 15. 10. 1582). Další dny v týdnu budeme označovat $x + 1, \dots, x + 6$. Např. je-li x pondělí (a tak tomu skutečně bylo), platí tabulka:

x	$x + 1$	$x + 2$	$x + 3$	$x + 4$	$x + 5$	$x + 6$
Po	Ú	St	Č	Pá	So	N

Počet dní v nepřestupném roce je $365 = 7 \cdot 52 + 1$, v přestupném roce $366 = 7 \cdot 52 + 2$. Proto „umístění“ Nového roku v letech 1601 až 1628 bylo následující:

(T_1)

1601	x	1605	$x+5$	1609	$x+3$	1613	$x+1$	1617	$x+6$	1621	$x+4$	1625	$x+2$
1602	$x+1$	1606	$x+6$	1610	$x+4$	1614	$x+2$	1618	x	1622	$x+5$	1626	$x+3$
1603	$x+2$	1607	x	1611	$x+5$	1615	$x+3$	1619	$x+1$	1623	$x+6$	1627	$x+4$
1604	$x+3$	1608	$x+1$	1612	$x+6$	1616	$x+4$	1620	$x+2$	1624	x	1628	$x+5$

Doporučujeme vypsát tuto tabulku. Pro další skupiny po 28 letech 17. století se „umístění“ Nového roku opakuje. Protože $100 = 3 \cdot 28 + 16$, dostali bychom při rozepsání pro celé 17. století tři shodné tabulky (T_1) a ještě první čtyři sloupce — ovšem s upravenými zápisy letopočtů. (Poslední čtyři sloupce by zahrnovaly roky 1685 až 1700.)

V každé tabulce (T_1) se vyskytuje každý z dní x až $x + 6$ právě čtyřikrát; připojíme-li ještě první čtyři sloupce tabulky (T_1), tj. léta 1685 až 1700 — je výskyt dní x , $x + 1, \dots, x + 6$ jako Nových roků v 17. století dán tabulkou (T_2).

(T_2)

	x	$x + 1$	$x + 2$	$x + 3$	$x + 4$	$x + 5$	$x + 6$
1601—1684	12	12	12	12	12	12	12
1685—1700	2	3	2	3	2	2	2
1601—1700	14	15	14	15	14	14	14

Začíná-li rok 1601 dnem x , začíná rok 1701 dnem $x + 5$, rok 1801 dnem $x + 3$, rok 1901 dnem $x + 1$; to vyčteme z tabulky (T_1). Je tedy umístění Nového roku v letech 1601 až 2000 toto (x je Nový rok 1601):

(T_3)

Nový rok Století	x	$x + 1$	$x + 2$	$x + 3$	$x + 4$	$x + 5$	$x + 6$
17.	14	15	14	15	14	14	14
18.	14	15	14	14	14	14	15
19.	14	14	14	14	15	14	15
20.	14	14	15	14	15	14	14
Celkem	56	58	57	57	58	56	58

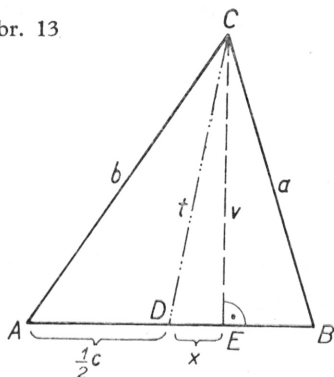
Zbývá zjistit, který den v týdnu je x . Určíme 1.1. 1901; je to den $x + 1$. Proto také 1. 1. 1957 je $x + 1$. Podle tabulky (T_1) jsou Novými roky 1957 až 72 postupně dny: $x + 1, x + 2, x + 3, x + 4 | x + 6, x, x + 1, x + 2 | x + 4, x + 5, x + 6, x | x + 2, x + 3, x + 4, x + 5$. Protože podle kalendáře pro rok 1972 je $x + 5$ sobota, je x pondělí.

ODPOVĚĚ podle tabulky (T_3): V letech 1601 až 2000 je Nový rok 56krát v pondělí a v sobotu, 57krát ve středu a ve čtvrtek a 58krát v úterý, pátek a v neděli.

Domníváme se, že úloha, která se řeší spojením pokusů a dedukce je velmi vhodná pro kategorii C. Impulsy bylo třeba dát pro tabelování částečných výsledků (viz tabulky T_1, T_2, T_3). Snad by bylo i užitečné seznámit se

s mechanismem, pomocí něhož můžeme určit den v týdnu, na který padne libovolné datum v minulosti i budouc-

Obr. 13



C-P-4

Ak pre dĺžky strán a uhlopriečok konvexného štvoruholníka $ABCD$ platí

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2,$$

potom je tento štvoruholník rovnobežníkom. Dokážte.

Průpravou pro řešení této úlohy by asi mělo být uvedení formule pro délku těžnice trojúhelníka, což je zvláštní případ *věty Stuartovy*. Na obr. 13 je $a < b$, úsečkami CD , CE jsou znázorněny těžnice a výška trojúhelníka ABC . Platí

$$AE = \frac{c}{2} + x, BE = \left| \frac{c}{2} - x \right|. \quad (4)$$

Vztahy (4) platí, i když je $\sphericalangle ABC \geq 90^\circ$. Podle Pythagorovy věty je

$$t^2 = v^2 + x^2, a^2 = v^2 + \left(\frac{c}{2} - x\right)^2, b^2 = v^2 + \left(\frac{c}{2} + x\right)^2. \quad (5)$$

Sečtením druhé a třetí rovnosti (5) dostaneme

$$a^2 + b^2 = 2v^2 + \frac{c^2}{2} + 2x^2. \quad (6)$$

Spojením první rovnosti (5) a (6) vyjde

$$a^2 + b^2 = 2t^2 + \frac{c^2}{2}$$

a odtud hledaná formule

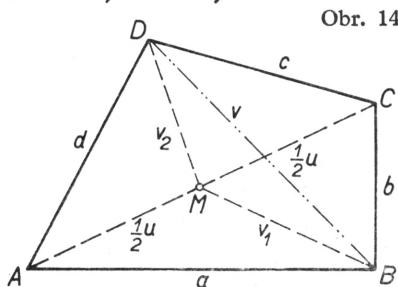
$$t^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{1}{4}c^2. \quad (7)$$

Ověříme ještě, že (7) platí i pro $a > b$, $a = b$ (výměna a, b , resp. výška rovnoramenného trojúhelníka).

Pomocí formule (7) můžeme např. vyšetřovat množinu všech bodů v rovině, které mají od dvou pevných bodů (A, B) stálý součet druhých mocnin vzdáleností.

Formule (7) a obr. 14 mohou být dostatečným podnětem pro

řešení úlohy C-P-4. Na obr. 14 je $AM = CM = \frac{u}{2}$,



Obr. 14

$BM = v_1, DM = v_2, BD = v$. Podle (7) dostaneme

$$v_1^2 = \frac{1}{2} (a^2 + b^2) - \frac{1}{4} u^2, \quad v_2^2 = \frac{1}{2} (c^2 + d^2) - \frac{1}{4} u^2;$$

sečtením

$$v_1^2 + v_2^2 = \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - \frac{1}{2} u^2. \quad (8)$$

Podle předpokladu je

$$u^2 + v^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2; \quad (9)$$

spojením (8) a (9)

$$v_1^2 + v_2^2 = \frac{1}{2} v^2. \quad (10)$$

Podle neostré trojúhelníkové nerovnosti je $v_1 + v_2 \geq v$, tj.

$$v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \geq v^2. \quad (11)$$

Spojením (10), (11) dostaneme

$$(v_1 - v_2)^2 \leq 0,$$

tj. $v_1 - v_2 = 0$, a dále podle (10)

$$v_1 = v_2 = \frac{v}{2}.$$

Dokázali jsme, že úhlopříčky konvexního čtyřúhelníka $ABCD$ se navzájem půlí; $ABCD$ je tedy rovnoběžník. Měli byste sami zjistit, kterou charakteristickou vlastnost rovnoběžníka je třeba zvolit, abyste dokázali, že konvexním čtyřúhelníkem splňujícím podmínku (9) je rovnoběžník. Zjednodušení důkazu se dosáhne kosinovou větou, která však nepřichází v úvahu pro kategorii C.

Dejme si ještě otázku, zda platí *věta obrácená*, tj. zda každý rovnoběžník splňuje podmínku (9). Možná, že by bylo vhodné, začít touto otázkou.

4. KATEGORIE Z

Z-P-1

Nejmenší přirozené číslo x , pro které je $1260x$ třetí mocninou přirozeného čísla, je

a) 1470, b) 1260^2 , c) 7350.

Rozhodněte, která z odpovědí a), b), c) je správná.

Úloha Z-P-1 má připomenout význam rozkladu přirozeného čísla v součin prvočinitelů pro řešení některých jednoduchých úloh z číselné teorie. Vyjdeme z VĚTY:

Přirozené číslo $p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_n^{\lambda_n}$ je k -tou mocninou přirozeného čísla (k přirozené), kde $p_1, p_2, \dots, p_n$ jsou navzájem různá prvočísla, právě když všechny exponenty $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou násobky čísla k .

V jednom směru je věta evidentní; její obrácení se dokáže následujícím způsobem: Je-li

$$p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_n^{\lambda_n} = (q_1^{\mu_1} q_2^{\mu_2} \dots q_m^{\mu_m})^k, \quad (1)$$

kde prvočísla $p_1, p_2, \dots, p_n$ i prvočísla $q_1, q_2, \dots, q_m$ jsou navzájem různá, upravíme (1) na tvar

$$p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_n^{\lambda_n} = q_1^{k\mu_1} q_2^{k\mu_2} \dots q_m^{k\mu_m}.$$

Z věty (V) o jednoznačném vyjádření přirozeného čísla jako součinu mocnin prvočinitelů vyplývá

$$n = m, p_1 = q_1, p_2 = q_2, \dots, p_n = q_m$$

(při vhodném označení)

$$\lambda_1 = k\mu_1, \lambda_2 = k\mu_2, \dots, \lambda_n = k\mu_m.$$

Tím je dokázána obrácená věta.

Při této příležitosti věnujte trochu pozornosti větě (V),

kterou znáte a které běžně užíváte např. při vyhledávání největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku několika čísel.

Celkem snadno můžeme předvést obdobnou situaci, za které jednoznačnost vyjádření neplatí; tak se ukáže, že věta (V) není tak samozřejmá, jak se na první pohled zdá.

Množina **S** všech kladných sudých čísel obsahuje podmnožinu **Z** všech čísel tvaru $2k$, kde k je kladné liché číslo;

$$\mathbf{Z} = \{2, 6, 10, 14, 18, 22, \dots\}.$$

Prvky množiny **Z** nazveme základními čísly (je to obdoba prvočísel). Každé číslo $x \in \mathbf{S} \setminus \mathbf{Z}$ je složené, tj. dá se vyjádřit jako součin aspoň dvou základních čísel. Toto vyjádření však není vždy jediné, jak ukazuje příklad:

$$60 \in \mathbf{S} \setminus \mathbf{Z}; \quad 60 = 2 \cdot 30 = 10 \cdot 6.$$

Můžeme ještě rozřešit obdobnou úlohu jako Z-P-1, např.: Máme určit nejmenší přirozené číslo x , pro které je $720 \cdot x^3$ čtvrtou mocninou přirozeného čísla.

Platí $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$; má-li být číslo x co nejmenším číslem požadované vlastnosti, bude mít jen prvočinitele 2, 3 a 5. Nechť je $x = 2^a 3^b 5^c$; pak je $x^3 = 2^{3a} 3^{3b} 5^{3c}$ a dále

$$720x^3 = 2^{4+3a} \cdot 3^{2+3b} \cdot 5^{1+3c}. \quad (2)$$

Přitom a, b, c jsou nezápornými celými čísly, z nichž aspoň jedno je kladné. Na pravé straně (2) je čtvrtá mocnina přirozeného čísla, právě když každý z exponentů $4 + 3a, 2 + 3b, 1 + 3c$ je co nejmenším násobkem čtyř. Odtud dostaneme třeba experimentálně $a = 0, b = 2, c = 1$ a odtud $x = 45$. Skutečně je

$$\begin{aligned} 720 \cdot 45^3 &= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot (3^2 \cdot 5)^3 = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^4 = \\ &= (2 \cdot 3^2 \cdot 5)^4 = 90^4. \end{aligned}$$

Úlohy tohoto druhu jsou i vhodnou příležitostí k procvičování výpočtů s mocninami.

Formulace úlohy Z-P-1 je dost obvyklá v zahraničí: z několika odpovědí se má vybrat správná, popřípadě odůvodnit nesprávnost ostatních. Někdy bývají mezi uvedenými odpověďmi dvě správné, někdy jsou všechny nesprávné. Některá odpověď svádí řešitele, aby ji chápal (neoprávněně) jako správnou, např. v úloze Z-P-1 odpověď b); číslo 1260^2 není nejmenší číslo požadované vlastnosti. Celkem rychle lze také zjistit nesprávnost odpovědi a): dekadické vyjádření součinu $1260 \cdot 1470$ končí trojčíslím 200; takové číslo však nemůže být třetí mocninou čísla, jehož dekadické vyjádření končí nulou.

Úloha Z-P-1 je podnětem k formulování úlohy obecnější a ke zjištění, zda je řešitelná. Jsou dána přirozená čísla N, r, s ; máme zjistit, zda existují přirozená čísla x, y tak, že platí

$$N \cdot x^r = y^s.$$

Z-P-2

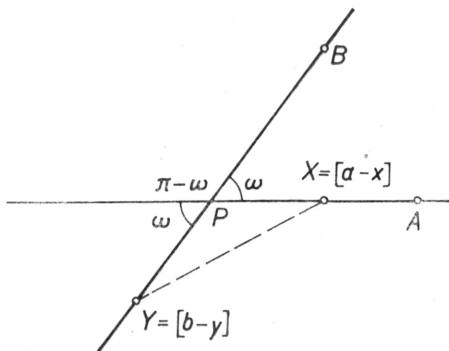
Zdeněk a Jirka bydlí v domech A, B ve dvou navzájem kolmých ulicích; domy A, B jsou od křižovatky K obou ulic po řadě vzdáleny 500 m a 400 m. V témže okamžiku vyjedou oba chlapci na kolech od svého bydliště po ulicích AK, BK směrem ke křižovatce, kterou projedou.

Zdeněk jede průměrnou rychlostí 4 m/s, Jirka průměrnou rychlostí 3 m/s.

Za kolik vteřin od startu bude jejich vzdušná vzdálenost nejmenší a kolik metrů to bude?

Tato úloha je jednou z variant známé úlohy. Po dvou různoběžných přímkách se pohybují (zpravidla rovno-

měrným pohybem) dva body; máme určit jejich vzdálenost v daném okamžiku. Na obr. 15 je znázorněna situ-



Obr. 15

ace; v čase $t = 0$ jsou oba pohybující se body X , Y v polohách A , B , jejichž vzdálenosti od průsečíku P daných přímek jsou $AP = a$, $BP = b$ ($a > 0$, $b > 0$). V čase t vykonal bod X dráhu $x > 0$, bod Y dráhu $y > 0$. Dané přímky pokládáme za osy souřadnic s počátkem P ; pak je poloha bodu X , resp. Y , v čase t určena souřadnicemi $a - x$, resp. $b - y$. Označíme-li ω velikost úhlu $\sphericalangle APB$, je $\omega = 90^\circ$ a podle Pythagorovy věty platí

$$z^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 . \quad (3)$$

Vzorec (3) platí i v případě, kdy je jedno z čísel $a - x$, $b - y$ nekladné nebo kdy jsou obě nekladná; to si snadno ověříte, uvážíte-li, že úhel $\sphericalangle APB$ pak nahradíme úhlem vedlejším nebo vrcholovým.

Pohyb bodu X i pohyb bodu Y je rovnoměrný s rychlostí 4 m/s, popř. 3 m/s; proto platí $x = 4t$, $y = 3t$ (t je

čas v sekundách) a po dosazení do (3) za $a = 500$ a $b = 400$ vyjde $z^2 = (500 - 4t)^2 + (400 - 3t)^2$ neboli $z^2 = (5t - 640)^2 + 400$. Funkce z^2 i z nabude nejmenší hodnoty pro $5t - 640 = 0$, tj. $t = 128$ vteřin. Nejmenší vzdálenost bodů X , Y je pak $z = \sqrt{400} = 20$ (metrů).

Pro vyspělejší čtenáře rozřešíme úlohu ještě v případě, kdy je $\omega \neq 90^\circ$ (obr. 15). Pak platí podle kosinové věty $z^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 - 2(a - x)(b - y) \cos \omega$. (3')

Je-li pohyb bodu X i pohyb bodu Y rovnoměrný s rychlostí v_1 , resp. v_2 , je $x = v_1 t$, $y = v_2 t$ a po dosazení do (3') dostaneme

$$z^2 = k_1 t^2 + k_2 t + k_3, \quad (4)$$

kde

$$\begin{aligned} k_1 &= v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \omega, \\ k_2 &= 2(av_2 \cos \omega + bv_1 \cos \omega - av_1 - bv_2), \\ k_3 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \omega. \end{aligned}$$

Protože

$$\begin{aligned} k_1 &= (v_1 - v_2)^2 + 2v_1 v_2 (1 - \cos \omega) = \\ &= (v_1 - v_2)^2 + 4v_1 v_2 \sin^2 \frac{\omega}{2}, \end{aligned}$$

je $k_1 = 0$, právě když $v_1 = v_2$ a $\sin \frac{\omega}{2} = 0$, což pro $0 < \omega < \pi$ nikdy nenastane. Je tedy funkce (4) vždy kvadratická (to je důležitý teoretický výsledek).

Můžeme rozřešit ještě jednodušší úlohu: dráhy bodů budou opět kolmé přímky, $AP = 500(\text{m})$, $B = P$, $v_1 = 4(\text{m/s})$, $v_2 = 3(\text{m/s})$. Vyjde

$$z^2 = 250\,000 - 4\,000t + 25t^2$$

neboli

$$z^2 = 25[(t - 80)^2 + 3600].$$

Minimum nastane pro $t = 80$ vteřin a je to $z = \sqrt{25 \cdot 3600} = 5.60 = 300$ (metrů).

Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1 = (S; r_1)$ a $k_2 = (S; r_2)$, kde $r_1 < r_2$. Na kružnici k_1 zvolíme dva různé body A, P a sestojíme přímku kolmou k AP procházející bodem P . Průsečíky této přímky s kružnicí k_2 označme B, C .

Vyjádřete

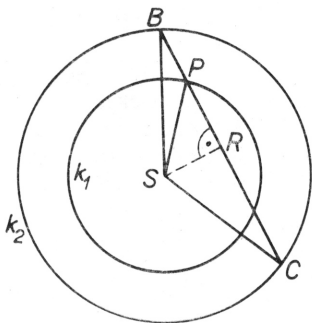
$$PA^2 + PB^2 + PC^2$$

pomocí r_1 a r_2 .



Úloha Z-P-3 přímo vybízí k podrobnějšímu vyšetřování tětiv dvou soustředných kružnic. Jsou-li dány dvě soustředné kružnice k_1, k_2 o poloměrech r_1, r_2 ($r_1 < r_2$), je-li BC tětiva kružnice k_2 , která obsahuje bod P kružnice k_1 , pak platí

$$PB \cdot PC = r_2^2 - r_1^2. \quad (6)$$



Obr. 16

Vzorec (6) plyne z určení mocnosti bodu P vzhledem ke kružnici k_2 , ale lze ho odvodit primitivněji.

Platí při označení z obr. 16:

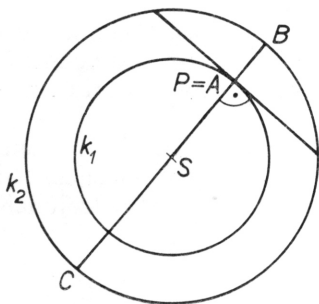
$$\begin{aligned} PB &= BR - PR, \quad PC = \\ &= CR + PR = BR + PR, \\ PB \cdot PC &= BR^2 - PR^2 = \\ &= r_2^2 - SR^2 - (r_1^2 - \\ &\quad - SR^2) = r_2^2 - r_1^2. \end{aligned}$$

Vzorec (6) platí i v případě, kdy tětiva BC obsahuje střed S . Při řešení úlohy Z-P-3

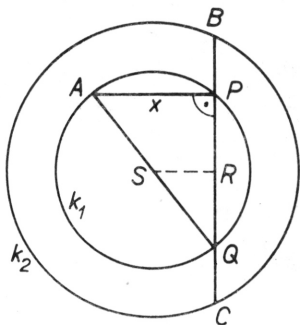
byste měli zkoumat zvláštní případ, kdy $S \in AP$. Zde vyjde bezprostředně

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 = 2(r_1^2 + r_2^2). \quad (7)$$

Nemůže však být $S \in BC$, neboť by nemohly vzniknout dva různé body A, P na kružnici k_1 , jak žádá text úlohy. Kdybychom však připustili $A = P$ a přímku AP nahradili tečnou kružnice k_1 v bodě P , bylo by $AP = 0$, $BP = r_2 - r_1$, $CP = r_2 + r_1$, platil by tedy opět vzorec (7). K tomuto případu bychom se měli na konci vrátit z hlediska spojitosti (obr. 17a).



Obr. 17a



Obr. 17b

V případě naznačeném na obr. 17b vznikne podle obrácení Thaletovy věty pravoúhlý trojúhelník APQ s přeponou AQ délky $2r_1$. Platí

$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 + CP^2 &= AP^2 + (CP - BP)^2 + 2BP \cdot CP = \\ &= AP^2 + (CP - CQ)^2 + 2BP \cdot CP = \\ &= AP^2 + PQ^2 + 2BP \cdot CP. \end{aligned} \quad (8)$$

Podle Pythagorovy věty je $AP^2 + PQ^2 = AQ^2 = 4r_1^2$;

podle vzorce (6) je $BP \cdot CP = r_2^2 - r_1^2$; dosadíme-li do (8), dostaneme

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 = 4r_1^2 + 2r_2^2 - 2r_1^2 = 2(r_1^2 + r_2^2),$$

což je opět vzorec (7).

Tím je dokázáno, že při libovolné poloze sečny AP kružnice k_1 platí (7); platí však (v důsledku spojitosti) i tehdy, když sečna AP přejde v tečnu kružnice k_1 .

Tento způsob odvození vzorce (7) se zdá dosti umělý; při něm však získáme zajímavý vzorec (6) a přiučíme se často používanému obratu ve výpočtu (8). Máme-li postupovat takto, musíme vyčlenit lemma (6), uvědomit si trik (8) a vyšetřit speciální případy.

Primitivnějším způsobem je prostý výpočet pomocí souřadnic (to ovšem účastníci kategorie Z většinou neumějí) nebo je možno obejít tento postup prostým planimetrickým výpočtem.

Označíme R patu kolmice spuštěné z bodu S na přímkou BC (R je střed úsečky PQ , viz obr. 17b). Označíme-li ještě $AP = x$, je podle vlastnosti střední příčky trojúhelníka $SR = \frac{x}{2}$. Dále je

$$PB = RB - PR, PC = RC + PR = RB + PR. \quad (9)$$

Pak je podle Pythagorovy věty

$$RB^2 = r_2^2 - SR^2, PR^2 = r_1^2 - SR^2. \quad (10)$$

Spojíme-li (9) a (10), dostaneme

$$\begin{aligned} PA^2 + PB^2 + PC^2 &= x^2 + 2RB^2 + 2PR^2 = \\ &= x^2 + 2r_2^2 - \frac{x^2}{2} + 2r_1^2 - \frac{x^2}{2}, \end{aligned}$$

tj.

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 2(r_1^2 + r_2^2).$$

Nepoužijeme-li metody souřadnic, musíme ovšem zvlášť vyšetřit případ $S \in BC$, tj. $S = R$.

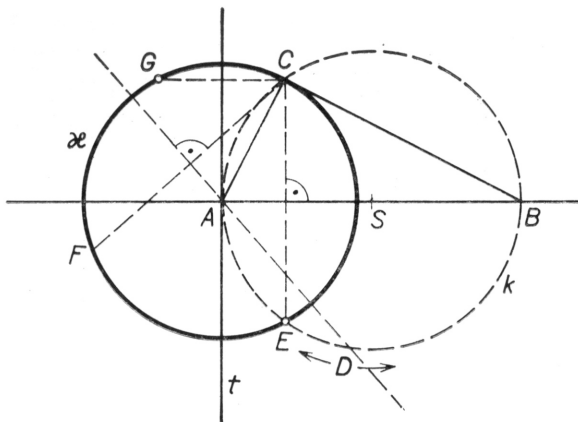
Z-P-4

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB . Ke každému bodu D kružnice opsané trojúhelníku ABC ($D \neq A, D \neq B$) sestrojíme bod E souměrně sdružený s bodem C podle přímky AB a bod F souměrně sdružený s bodem C podle přímky AD .

Vyšetřte geometrické místo a) bodů E ; b) bodů F .



Tuto snadnou úlohu můžete řešit v podstatě bez pomoci. Uvědomíte si, že přímka AB je pevná, a tudíž i bod E je pevný; naproti tomu přímka AD probíhá svazek se



Obr. 18

středem A s výjimkou přímky AB a tečny t vedené v bodě A ke kružnici k opsané trojúhelníku ABC . Bod F proběhne tedy kružnici k se středem A a poloměrem AC s vyloučením dvou bodů: bodu E a bodu G souměrně sdruženého s bodem C podle přímky t (obr. 18).

Lze rozřešit i obdobnou úlohu: za stejné situace vyšetřit množiny všech bodů a) E' , b) F' , kde E' , resp. F' , jsou paty kolmic spuštěných z bodu C na přímku AB , resp. AD .

Ještě lepší by bylo ukázat si vyšetření takovéto úpatnice na úloze hodně zobecněné, např.: Je dán trojúhelník ABC , ve vnitřku poloroviny opačné k BCA je dána kružnice k_0 . Vyšetřte množinu $\mathbf{M}$ všech pat kolmic X' , spuštěných z vrcholu C na přímky AX , když bod X probíhá kružnici k_0 .

Množina $\mathbf{M}$ je v tomto případě průnikem kružnice sestrojené nad průměrem AC s úhlem $\sphericalangle T_1AT_2$, kde T_1, T_2 jsou body dotyku tečen vedených z vrcholu A ke kružnici k_0 . Místo pat kolmic můžeme zvolit jako v úloze Z-P-4 body souměrně sdružené s vrcholem C podle přímek AX . Úloha připouští velké množství různých snadných variant.

III. Soutěžní úlohy I. kola

(Komentář a řešení)

1. KATEGORIE A

A-I-1

Je dána posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_n = 7^n - 3^{n+4}$.

a) Rozhodněte, zdali je tato posloupnost rostoucí nebo klesající.

b) Určete mezi členy a_n nejmenší a největší (pokud existují).

c) Určete, pro která n platí $a_n \leq 0$.

d) Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí: a_n je dělitelno čtyřmi.



Tato úloha se dá řešit pomocí rekurentního vzorce pro členy posloupnosti, který vyjadřuje porovnání členů rozdilem. Mimoto užijeme ještě porovnání podílem. Vypočteme

$$a_{n+1} - a_n = (7^{n+1} - 3^{n+5}) - (7^n - 3^{n+4}),$$

tj.

$$a_{n+1} - a_n = 6(7^n - 3^{n+3}). \quad (1)$$

Pro rozhodnutí v otázce a) je třeba zjistit, pro která n je

$a_{n+1} - a_n \geq 0$ a pro která je $a_{n+1} - a_n \leq 0$. Porovnání čísel 7^n a 3^{n+3} podílem dává

$$\frac{7^n}{3^{n+3}} = \frac{1}{27} \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^n > \frac{1}{27} \cdot 2^n. \quad (2)$$

Pro všechna $n \geq 5$ je $\frac{1}{27} \cdot 2^n > 1$, tj. $7^n - 3^{n+3} > 0$.

Pro $n = 4$ je $7^4 - 3^7 = 2401 - 2187 > 0$. Platí tedy nerovnost $a_{n+1} - a_n > 0$ pro všechna $n \geq 4$. Zbývá vyšetřit $n = 1, 2, 3$. Sestavíme tabulku pro $n = 1, 2, 3, 4, 5$, kterou budeme potřebovat pro otázku c).

n	1	2	3	4	5
$a_n = 7^n - 3^{n+4}$	-236	-680	-1844	-4160	-2876

(3)

Z tabulky (3) je vidět, že posloupnost $\{a_n\}$ je klesající pro $n \leq 4$ a rostoucí pro $n \geq 4$.

Kladné a záporné členy najdeme z tabulky (3) tímto výpočtem:

$$\frac{7^n}{3^{n+4}} = \frac{1}{81} \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^n > \frac{1}{81} \cdot 2,3^n > \frac{1}{84} \cdot 2,3^n. \quad (4)$$

Protože pro $n \geq 6$ je $2,3^n > 140$, dostaneme ze (4) pro $n \geq 6$

$$\frac{7^n}{3^{n+4}} > \frac{140}{84} = \frac{5}{3} > 1,$$

tj. pro $n \geq 6$ je

$$a_n = 7^n - 3^{n+4} > 0.$$

Nejmenší člen je a_4 , největší člen neexistuje.

Otázka d). Protože $7^n - 3^{n+3}$ je sudé pro všechna n , plyne z (1)

$$a_{n+1} = a_n + 4b_n, \quad (b_n \text{ celé}).$$

Je-li tedy a_n násobkem čtyř, platí to i pro a_{n+1} . Podle tabulky (3) je a_1 násobkem čtyř, proto je každé a_n násobkem čtyř (indukce).

Řešitelé mohou rozhodovat o znamení čísla $7^n - 3^{n+3}$ (viz (1)) pomocí logaritmu: je totiž

$$7^n - 3^{n+3} < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{3}\right)^n < 3^3 \Leftrightarrow n < \frac{3 \log 3}{\log 7 - \log 3}.$$

A-I-2

V rovině ortonormálních souřadnic x, y zobrazte množinu všech bodů, o jejichž souřadnicích x, y platí:

$$|x| + |y| \leq 4$$

a zároveň

$$\lceil \sqrt{8 - x^2} \rceil \geq y \geq \lfloor x \rfloor,$$

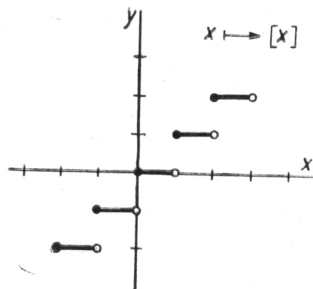
kde symbol $\lfloor a \rfloor$ značí celou část reálného čísla a . V této množině určete všechny body, jejichž souřadnicemi jsou celá čísla vyhovující vztahu

$$y = \lfloor \lfloor x \rfloor - |x| \rfloor.$$

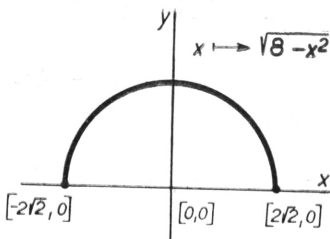


Úloha A-I-2 pokračuje v tematice schodových funkcí a funkcí z nich odvozených. Nejdříve byste mohli sestrojit po řadě grafy funkcí $x \mapsto \lfloor x \rfloor$, $x \mapsto \sqrt{8 - x^2}$, $x \mapsto \lceil \sqrt{8 - x^2} \rceil$, $x \mapsto \lfloor \lfloor x \rfloor - |x| \rfloor$.

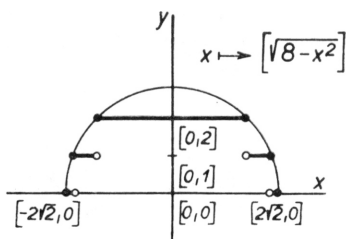
Tyto grafy jsou na obr. 19, 20, 21, 22. Pak už zbývá jen sestrojit průnik grafů relací $|x| + |y| \leq 4$ (obr. 23) a



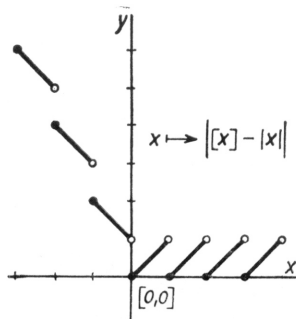
Obr. 19



Obr. 20



Obr. 21



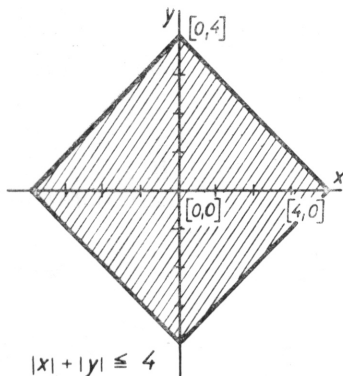
Obr. 22

$[\sqrt{8 - x^2}] \geq y \geq [x]$ (obr. 24). Poznámka: čárkované úsečky a body vyznačené bílými kroužky nepatří příslušným grafům.

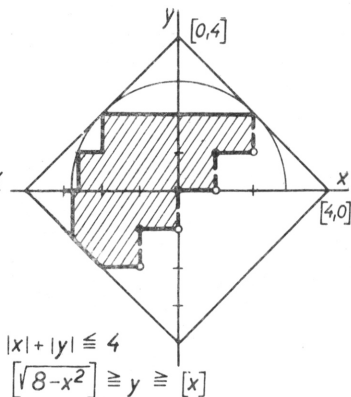
Konečným výsledkem je dvoubodová množina

$$\{[0; 0], [-1; 2]\}.$$

Úloha A-I-2 je spíše časově náročná než myšlenkově obtížná.



Obr. 23



Obr. 24

A-I-3

Nech je daný pravidelný n -úholník $A_1 A_2 \dots A_n$ vpísaný jednotkovej kružnici. Vypočítajte

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n A_i A_j^2.$$



Tato úloha se řeší asi nejvhodněji komplexními čísly. Řešitel si jen potřebuje uvědomit vzorec pro vzdálenost bodů $A = [\alpha]$, $B = [\beta]$, kde α , β jsou komplexní čísla. Platí

$$AB = |\alpha - \beta|, AB^2 = |\alpha - \beta|^2 = (\alpha - \beta)(\bar{\alpha} - \bar{\beta}), \quad (5)$$

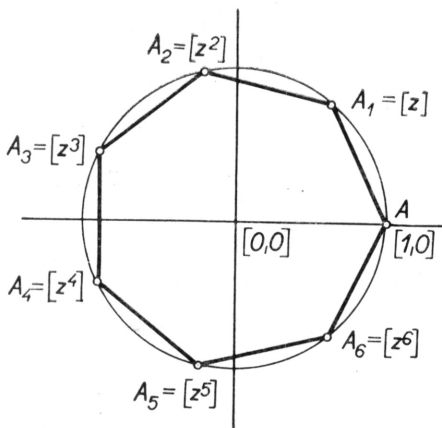
kde $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ jsou čísla komplexně konjugovaná k α , β . Na

první pohled je vidět, proč saháme po komplexních číslech: kdybychom použili ortonormálních reálných souřadnic, měli bychom místo jednoduchého vzorce (5) složitější vzorec

$$AB^2 = (\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2,$$

kde α_i, β_i jsou (reálné) souřadnice bodů A, B .

Na obr. 25 označuje z komplexní číslo, jehož obrazem



Obr. 25

je ten vrchol A_1 pravidelného n -úhelníka $A_1 A_2 \dots A_n$, který leží v prvním nebo druhém kvadrantu a je nejbližší vrcholu $A_n = [1; 0]$ (na obr. 25 je $n = 7$). Zřejmě je $A_k = [z^k]$ a dále platí $z^n - 1 = 0$, $z \neq 1$, tj.

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = 0. \quad (6)$$

Je vhodné uvědomit si, jak si můžeme pomoci geometrickou úvahou: uvážíme, že hledaný součet S je součtem druhých mocnin délek všech stran a všech úhlopříček

n -úhelníka $A_1 A_2 \dots A_n$ (každá je vzata jen jednou, což vyplývá z podmínky $i < j$). Proto platí

$$S = \frac{n}{2} (A_1 A_n^2 + A_2 A_n^2 + \dots + A_{n-1} A_n^2).$$

Použijeme-li vzorce (5), vyjde

$$S = \frac{n}{2} \left((z - 1)(\bar{z} - 1) + (z^2 - 1)(\bar{z}^2 - 1) + \dots \right. \\ \left. \dots + (z^{n-1} - 1)(\bar{z}^{n-1} - 1) \right).$$

Protože $\bar{z}^k = z^{n-k}$ ($k = 1, \dots, n-1$), je

$$S = \frac{n}{2} \left(n - 1 - 2(z + z^2 + \dots + z^{n-1}) + n - 1 \right),$$

neboli podle (6)

$$S = n(n-1) - n(z + z^2 + \dots + z^{n-1}) = \\ = n(n-1) + n = n^2.$$

Řešitelé úlohy A-I-3 by se měli seznámit se souvislostí teorie pravidelných mnohoúhelníků s kořeny binomické rovnice $x^n = 1$ (Kreisteilung). Je to sice klasická partie, ale přitom je to estetické a užitečné použití aritmetiky komplexních čísel. Možná, že by takové stručné poučení bylo nejlepším uvedením do problematiky úlohy A-I-3.

A-I-4

Dokažte:

a) V tětiovém pětiúhelníku s vnitřními úhly $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5$ (v tomto pořadí) platí

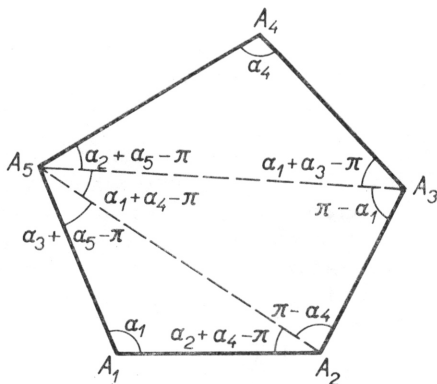
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 3\pi, \\ \alpha_1 + \alpha_3 > \pi, \alpha_2 + \alpha_4 > \pi, \alpha_3 + \alpha_5 > \pi, \\ \alpha_4 + \alpha_1 > \pi, \alpha_5 + \alpha_2 > \pi.$$

b) Jsou-li $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5$ duté úhly (tj. $0 < \alpha_i < \pi$) splňující všechny uvedené vztahy, pak existuje tětívový pětiúhelník s těmito vnitřními úhly (v tomto pořadí).

Úloha A-I-4 je pro řešitele kategorie A velmi snadná. Pro rozřešení její první části stačí uvědomit si dvě skutečnosti:

(a) Každý tětívový pětiúhelník je konvexní a součet velikostí jeho vnitřních úhlů je 3π ;

(b) s pomocí vztahu $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 3\pi$ lze vypočítat velikosti všech úhlů na obr. 26.



Obr. 26

Obr. 26 zároveň také vede k rozřešení druhé části úlohy. Sestrojí se $\triangle A_1A_2A_5$, jehož úhly mají velikosti uvedené na obr. 26; tento trojúhelník se dá sestavit, neboť je $\alpha_2 + \alpha_4 > \pi$, $\alpha_3 + \alpha_5 > \pi$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 3\pi$. Dále se sestaví v polorovině opačné k $A_2A_5A_1$

trojúhelník $A_2A_3A_5$, jehož úhly mají velikosti uvedené na obr. 26 (úhly α_1, α_4 jsou duté). Protože je

$$\sphericalangle A_5A_1A_2 = \pi - \sphericalangle A_5A_3A_2,$$

leží podle známé věty V bod A_3 na kružnici k opsané trojúhelníku $A_1A_2A_5$, tj. všechny čtyři body A_1, A_2, A_3, A_5 leží na kružnici k . V polorovině opačné k $A_3A_5A_2$ se dále sestrojí trojúhelník $A_3A_4A_5$ tak, aby jeho úhly měly velikosti uvedené na obr. 26. Podle věty V leží bod A_4 na kružnici opsané trojúhelníku $A_2A_3A_5$, což je kružnice k . Leží tedy všech pět vrcholů A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 na kružnici k .

Klíčem k řešení je věta V , kterou si můžeme zopakovat např. v souvislosti s *Ptolemaiovou větou* nebo některou konstrukční úlohou o tětivovém čtyřúhelníku. Tuto větu lze použít i při řešení úlohy A-I-6.

A-I-5

V množině všech reálných čísel je dána binární operace

$$x \ast y = x + y + xy.$$

Zjistěte, pro které trojice reálných čísel x, y, z platí

$$(x \ast y) \ast z = (x \ast z) \ast (y \ast z)$$

(distributivnost operace $\ast$ vzhledem k operaci $\ast$).



Úloha je z oblasti strukturální matematiky. Nezvyklé je snad to, že jde o distributivitu operace k ní samé. Přepíšeme-li danou operaci podle její definice, dostaneme nakonec rovnici

$$z(1+z)(1+x)(1+y) = 0,$$

která ovšem *neplatí pro všechna* x, y, z . Operace $\ast$ není tedy distributivní sama k sobě.

Do tematiky úlohy vnikneme tak, že řešíme *úlohu*:
Určit konstanty a, b tak, aby operace

$$x \nabla y = ax + by$$

byla distributivní sama k sobě. Rovnici

$$(x \nabla y) \nabla z = (x \nabla z) \nabla (y \nabla z)$$

přepíšeme postupně takto:

$$(ax + by) \nabla z = (ax + bz) \nabla (ay + bz),$$

$$a(ax + by) + bz = a(ax + bz) + b(ay + bz),$$

tj.

$$b(a + b - 1)z = 0. \quad (7)$$

Vztah (7) platí pro všechna x, y, z , právě když je $b = 0$ nebo $a + b = 1$. Příkladem operace, která je distributivní sama k sobě, je tedy třeba

$$x \nabla y = ax + (1 - a)y,$$

kde $a \neq 0$.

A-I-6

Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, jehož prodloužené protější strany se protínají v bodech E, F . Dokažte:

a) Kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 , které jsou opsány po řadě trojúhelníkům AED, BEC, ABF a DCF , procházejí tímž bodem G .

b) Středů O_1, O_2, O_3, O_4 těchto kružnic leží na kružnici procházející bodem G .

c) Paty kolmic z bodu G na všechny strany čtyřúhelníka $ABCD$ leží na téže přímce.



Je to úloha tradiční, ale přitom záludná. Rozhodně je třeba o ní podrobněji hovořit. Jde totiž o vyhledání vhod-

ného aparátu. Poněvadž je to úloha polohová, zdá se přirozené užít metody souřadnic. Když to však zkusíme, poznáme, že i když se použijí komplexní souřadnice v rovině, vyjdou složité výrazy; proto tak raději postupovat nebudeme. Složité je, že v úloze je směs prvků projektivních (čtyřroh) a prvků metrických (kružnice). To vede zcela přirozeně k myšlence projektivizovat úlohu, tj. nahradit kružnice kuželosečkami a pak užít prostředků projektivní geometrie. Tato cesta je však skoro všem středoškolákům nedostupná. Nezbyvá tedy než se vrátit k aparátu elementární geometrie, ale snažit se cestu trochu usnadnit. Ti, kdo znají základy kruhové geometrie, si jistě uvědomí, že v úloze jde o konfiguraci kruhových křivek v *Möbiově rovině*. Přibereme-li k sedmi bodům A, B, C, D, E, F, G (G je společný bod všech čtyř kružnic k_1, k_2, k_3, k_4) ještě nevlastní bod N^∞ Möbiovy roviny $\star$), dostaneme konfiguraci osmi bodů a osmi kruhových křivek (jsou to přímky AB, BC, CD, DA a kružnice k_1, k_2, k_3, k_4). Každým bodem konfigurace

$$\Gamma = \{A, B, C, D, E, F, G, N^\infty, \\ AB, BC, CD, DA, k_1, k_2, k_3, k_4\}$$

procházejí právě čtyři její kruhové křivky (což je společný název pro přímku a kružnici) a na každé její kruhové křivce leží právě čtyři její body. Část a) úlohy A–I–6 žádá vlastně důkaz existence konfigurace Γ .

Pro elementární důkaz této existence máme k dispozici jen větu o obvodových úhlech, resp. větu V o tětívoém čtyřúhelníku; je však známo, že účinným prostředkem v kruhové geometrii je zobrazení, zvané *kruhová inverze*.

$\star$) Jak známo, má Möbiova rovina jediný nevlastní bod, kterým procházejí všechny přímky, ale kterým neprochází žádná kružnice. Nej názornějším modelem Möbiovy roviny je kulová plocha, jejíž jeden význačný bod je obrazem nevlastního bodu.

Doporučujeme vám, abyste se při této příležitosti s jeho základními vlastnostmi seznámili.

Místo abychom dokazovali, že existuje bod G , kterým prochází každá z kružnic k_1, k_2, k_3, k_4 , změníme kruhovou inverzí situaci tak, že budeme dokazovat obdobnou vlastnost pro dvě kružnice a dvě přímky.

Obr. 27

Zvolíme bod A za střed inverze; její mocnost zvolíme libovolně (třeba tak, aby všechny body B, C, D, E, F ležely vně základní kružnice).

Označíme-li $p = AB$, $q = AD$ a označíme-li čárkováním obrazy bodů v inverzi, dostaneme situaci naznačenou na obr. 27. Pomocí tohoto obrázku provedeme výpočet:

$$\begin{aligned} \sphericalangle C'G'D' &= \sphericalangle C'F'D' = \pi - \sphericalangle C'F'A = \\ &= \pi - (\pi - \sphericalangle C'B'A) = \sphericalangle C'B'A = \sphericalangle C'B'E' = \\ &= \pi - \sphericalangle C'G'E'. \end{aligned}$$

První rovnost vyplývá z věty o obvodových úhlech, třetí a šestá z vlastnosti tětiového čtyřúhelníka (věta V). Z rovnosti

$$\sphericalangle C'G'D' = \pi - \sphericalangle C'G'E' \quad (8)$$

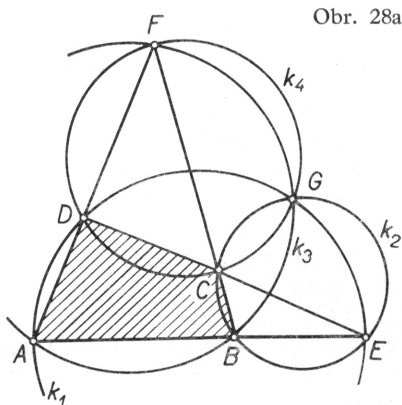
plyne, že body D', G', E' jsou kolineární, tj. že přímka k'_1 prochází bodem G' . K úplnému důkazu je třeba ovšem ještě doplnit úvahu o uspořádání bodů na kružnicích,

Výměnou označení ($k'_2 \leftrightarrow k'_4, p' \leftrightarrow q', E' \leftrightarrow F', B' \leftrightarrow D'$) dostaneme z (8) rovnost

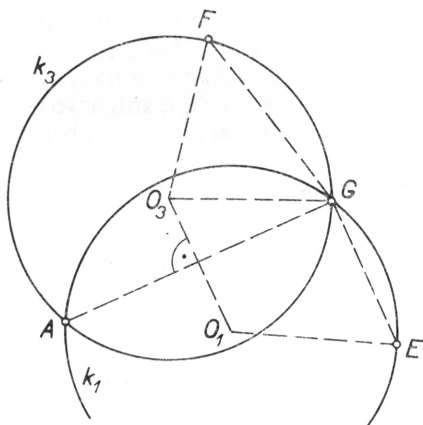
$$\sphericalangle C'G'B' = \pi - \sphericalangle C'G'F';$$

z ní vyplývá, že také přímka k_3 prochází bodem G' . Přejdeme-li inverzí zpět k nečárkovaným bodům, je část a) úlohy A–I–6 rozřešena.

Principem důkazu části b) je odůvodnění, že čtyřúhelník $O_1O_2GO_3$ je tětiový (změnou označení pak dostaneme, že i čtyř-



Obr. 28a



Obr. 28b

úhelník $O_3O_4GO_1$ je tětiový a tím bude část b) rozřešena). Poněvadž obě kružnice k_1, k_2 procházejí body E, G , je $O_1O_2 \perp GE$; na základě toho vyjádříme $\sphericalangle O_1O_2G$ (obr. 28a). Poněvadž kružnice k_3 prochází body A, B, G, F , vypočteme $\sphericalangle O_1O_3G$ (středový úhel) pomocí $\sphericalangle AFG$ (obvodový úhel).

Pomocí obr. 28ab jsme tedy získali:

$$\sphericalangle O_1O_2G = \pi - \frac{1}{2} \sphericalangle GO_2E = \pi - \sphericalangle GBE = \pi - \\ - \sphericalangle GCE = \sphericalangle GCD,$$

$$\sphericalangle O_1O_3G = \frac{1}{2} \sphericalangle AO_3G = \sphericalangle AFG = \sphericalangle DFG.$$

Protože čtyřúhelník $DFGC$ je tětiový, je $\sphericalangle GCD + \sphericalangle DFG = \pi$, tj. $\sphericalangle O_1O_2G + \sphericalangle O_1O_3G = \pi$, tj. také čtyřúhelník $O_1O_2GO_3$ je tětiový, což jsme měli dokázat.

Jako impuls pro řešení části c) úlohy A–I–6 by snad mělo stačit upozornění, že každá kružnice sestrojená nad některým průměrem GF , GD , GC , GE obsahuje právě dvě paty kolmic spuštěných z bodu G na přímky AB , BC , CD , DA . Pokud zná řešitel *Simsonovu větu*, je část c) triviální. Neboť bod G leží např. na kružnici k_1 opsané trojúhelníku ADE , a proto paty kolmic spuštěných z bodu G na přímky AD , DE , EA leží na Simsonově přímce. Snad by bylo nejvhodnější, kdyby si řešitel tuto větu předem odvodil*), např. výpočtem pomocí komplexních čísel (střed opsané kružnice se zvolí za počátek souřadnic; vrcholy trojúhelníka pak jsou obrazy komplexních jednotek ε_1 , ε_2 , ε_3 , bod, z něhož spouštíme kolmice, je obrazem komplexní jednotky ε_0).

Úloha A–I–6 je dosti rafinovaná a náročná; můžete se však na ní naučit hodně věcí z tradiční geometrie.

*) Viz též Příklad 14 na str. 69 v 15. svazku ŠMM – M.Koman: Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic.

B-I-1

Dokážte, že pro každé dve reálné čísla a, b platí

$$\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leq \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|}.$$

Zistite všetky případy, v ktorých nastane rovnost.



Tuto úlohu můžeme řešit velmi primitivně, jediným použitím známé nerovnosti $|a + b| \leq |a| + |b|$, která platí pro všechna reálná čísla a, b . Předpokládáme, že daná nerovnost platí pro jistou dvojici a, b ; vynásobíme ji kladným číslem $(1 + |a|) \cdot (1 + |b|) \cdot (1 + |a + b|)$; dostaneme

$$\begin{aligned} & |a + b| (1 + |a|) (1 + |b|) \leq \\ & \leq |a| (1 + |a + b|) (1 + |b|) + \\ & + |b| (1 + |a + b|) (1 + |a|) \end{aligned} \quad (1)$$

a dále po úpravě

$$(|a| + |b| - |a + b|) + 2|ab| + |a + b| \cdot |ab| \geq 0. \quad (2)$$

Tento výpočet (rozbor úlohy) je vlastně hledáním všech *možných* řešení nerovnice

$$\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leq \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|}. \quad (3)$$

Ukázalo se však, že nerovnice (2), odvozená z (3), má za řešení všechny dvojice reálných čísel a, b . Dá se tedy očekávat, že totéž bude platit pro nerovnici (3). To se dokáže

obrácením postupu: pro libovolnou dvojici reálných čísel a, b platí (2); z (2) lze odvodit (1); *dělíme-li* (1) *kladným číslem* $(1 + |a|) \cdot (1 + |b|) \cdot (1 + |a + b|)$, dostaneme z (2) nerovnost (3).

Tento postup, i když trochu těžkopádnější, je přirozenější než takové triky, jako je např. sečtení vztahů

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

$$|a + b| (|a| + |b|) = |a + b| (|a| + |b|)$$

a další umělé úpravy, tj. použití nerovností

$$\frac{|a|}{1 + |a| + |b|} \leq \frac{|a|}{1 + |a|},$$

$$\frac{|b|}{1 + |a| + |b|} \leq \frac{|b|}{1 + |b|}.$$

Také na další otázku úlohy snadno odpovíme. Rovnost v (3) nastane, právě když platí rovnost v (2). Rovnost v (2) nastane, právě když je

$$|a| + |b| - |a + b| = 0$$

a zároveň

$$|ab| = 0,$$

tj. právě když aspoň jedno z čísel a, b je rovno nule.

Domníváme se, že by se měla převést daná *důkazová úloha* na *úlohu určovací* a měla by se řešit úpravami (1), (2), tj. řešení nerovnice (3) by se mělo převést na řešení nerovnice (2) a měla by se prokázat jejich ekvivalence.

Připojujeme ještě tuto poznámku: Úloha B-I-1 svádí k tomu, abychom se zmínili o *funkcích konkávních a konvexních*.

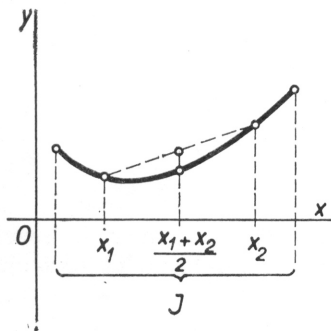
Funkce $f(x)$ jedné reálné proměnné x se nazývá *konvexní*, resp. *konkávní* v otevřeném intervalu I , právě když pro každá dvě čísla $x_1, x_2 \in I$ platí

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \left(f(x_1) + f(x_2)\right),$$

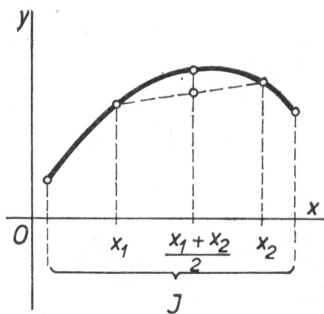
resp.

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{1}{2} \left(f(x_1) + f(x_2)\right).$$

Typický graf konvexní a konkávní funkce ukazují obr. 29 a 30.



Obr. 29



Obr. 30

Má-li funkce f v každém bodě intervalu I první a druhou derivaci, je konvexní (konkávní), právě když $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) pro všechna $x \in I$. Podle tohoto kritéria snadno poznáme, že např. funkce $x \mapsto x^2$ je konvexní v každém otevřeném intervalu, funkce $x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$ je konkávní v intervalu $(0; +\infty)$.

Studujeme funkci $f: x \mapsto \frac{|x|}{1 + |x|}$ neboli

$$x \mapsto 1 - \frac{1}{1 + |x|}.$$

Pro každé dvě reálná čísla a, b platí

$$\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leq \frac{|a + b|}{1 + \frac{|a + b|}{2}}; \quad (4)$$

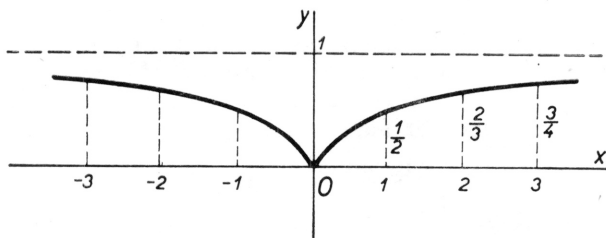
kdyby se tedy podařilo dokázat konvexitu funkce f v intervalu $(-\infty; +\infty)$, tj. platnost formule

$$\frac{\left| \frac{a+b}{2} \right|}{1 + \left| \frac{a+b}{2} \right|} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \right),$$

neboli

$$\frac{|a+b|}{1 + \frac{|a+b|}{2}} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}, \quad (5)$$

vyplývala by z (4), (5) dokazovaná nerovnost. Bohužel však funkce f není konvexní pro všechna x . To ukazuje její graf na obr. 31.



Obr. 31

Studujeme-li konkávní a konvexní funkce, můžeme si dokázat i *Jensenovu formuli* jako zajímavé cvičení na práci s nerovnostmi a na velmi zajímavý a neobvyklý způsob užití matematické indukce. (Viz např. *Meschowski: Ungelöste und unlösbare Probleme der Geometrie*, Berlin, Springer-Verlag.)

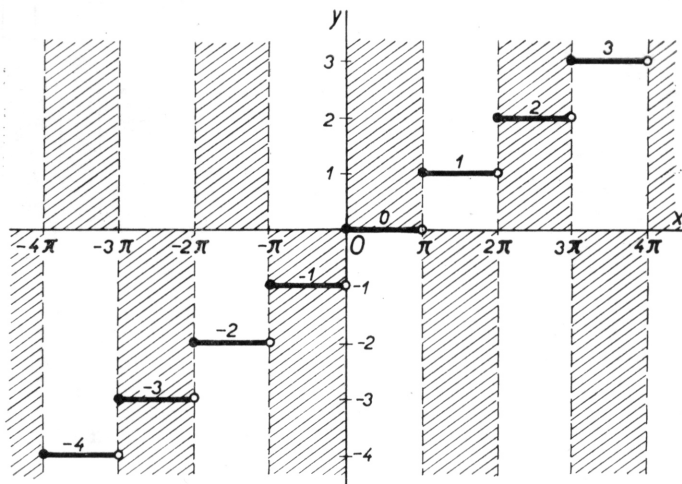
Dokažte, že pro každé α platí

$$\sin \alpha = (-1)^{\left[\frac{\alpha}{\pi}\right]} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha},$$

kde $[x]$ je celé číslo vyhovující vztahům

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

Nalezněte obdobný vztah pro vyjádření $\cos \alpha$ pomocí $\sin \alpha$.



Obr. 32

Úloha B-I-2 vyžaduje, abychom dokázali upřesnění formule z goniometrie. Vzorce

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \text{ nebo } |\sin \alpha| = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

se mají nahradit určitější formulí

$$\sin \alpha = (-1)^{\left[\frac{\alpha}{\pi}\right]} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}.$$

Jinými slovy: pomocí funkce $x \mapsto [x]$ (celá část z x) se má vyjádřit, v kterých intervalech je funkce $\alpha \mapsto \sin \alpha$ nezáporná, a v kterých je nekladná.

Doporučujeme, abyste sestrojili graf podle obr. 32, na kterém je patrné, kterými částmi roviny probíhá sinusoida. Jsou to vyšrafované části roviny. Hranice k nim nemusíme počítat, neboť pro všechna celá čísla k je $\sin k\pi = 0$.

Na obr. 32 je dále zakreslen graf schodové funkce $x \mapsto \left[\frac{x}{\pi}\right]$.

Zřejmé je

$$(-1)^{\left[\frac{\alpha}{\pi}\right]} = 1 \text{ pro } \left[\frac{\alpha}{\pi}\right] \text{ sudé a } (-1)^{\left[\frac{\alpha}{\pi}\right]} = -1 \text{ pro } \left[\frac{\alpha}{\pi}\right] \text{ liché;}$$

to platí, i když je číslo $\left[\frac{\alpha}{\pi}\right]$ záporné.

Analogicky se odvodí vzorec pro kosinus:

$$\cos \alpha = (-1)^{\left[\frac{1}{2} \pm \frac{\alpha}{\pi}\right]} \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

Toto odvození je nepatrně složitější; v obou případech se doporučuje sestrojit graf schodové funkce; ovšem v prvním případě je funkce $\alpha \mapsto \left[\frac{\alpha}{\pi}\right]$ dána, v druhém případě

musíme funkci $\alpha \mapsto \left[\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\pi}\right]$ nejdříve najít.

Obdobně lze upravit další skupinu dvou goniometrických vzorců

$$\sin \frac{\alpha}{2} = (-1)^{\left[\frac{\alpha}{2\pi}\right]} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad (6a)$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = (-1)^{\left[\frac{1}{2} \pm \frac{\alpha}{2\pi}\right]} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}. \quad (6b)$$

Mimoto je možné odvodit ze vzorců (6a), (6b) příslušný vzorec pro tangentu.

B-I-3

Ze 100 osob koupilo na předvánočním trhu 80 lidí textilní zboží, 70 lidí knihy a 55 lidí elektrotechnické výrobky. Kolik osob nejméně koupilo výrobky všech tří druhů? Jestliže každá z uvedených 100 osob si koupila aspoň jeden z uvedených výrobků, kolik osob nejvýše koupilo výrobky všech tří druhů?



Tato úloha náleží do oblasti úloh z naivní teorie množin. Klíčem k jejímu řešení jsou *Vennovy diagramy* a jeden ze vzorců o počtu prvků tří konečných množin, jejich průniků a sjednocení. Označíme-li n_1, n_2, n_3 počty prvků množin $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$, p_{12}, p_{23}, p_{31} počty prvků průniků $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_3 \cap \mathbf{M}_1$, s_{12}, s_{23}, s_{31} počty prvků sjednocení $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_3 \cup \mathbf{M}_1$ a konečně p_{123}, s_{123} počty prvků průniku $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}_3$ a sjednocení $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_3$, platí vzorce:

$$s_{123} = n_1 + n_2 + n_3 - p_{12} - p_{23} - p_{31} + p_{123}, \quad (7a)$$

$$s_{123} + n_1 + n_2 + n_3 = s_{12} + s_{23} + s_{31} + p_{123}. \quad (7b)$$

Použijeme vzorce (7b). Dostaneme

$$p_{123} = n_1 + n_2 + n_3 - 2s_{123} + K,$$

kde

$$K = (s_{123} - s_{12}) + (s_{123} - s_{23}) + (s_{123} - s_{31}) \geq 0.$$

Proto

$$p_{123} \geq n_1 + n_2 + n_3 - 2s_{123}. \quad (8)$$

V našem případě je $s_{123} = 100$, $n_1 = 80$; $n_2 = 70$, $n_3 = 55$. Z (8) pak plyne

$$p_{123} \geq 5. \quad (9)$$

Odhadujeme p_{123} (počet zákazníků, kteří koupili výrobky všech tří druhů), a to zdola pro první otázku, shora pro druhou otázku.

Omezení shora dostaneme z upravené formule (7a). Je

$$s_{123} = n_1 + n_2 + n_3 - 2p_{123} + Z,$$

kde

$$Z = (p_{123} - p_{12}) + (p_{123} - p_{23}) + (p_{123} - p_{31}) \leq 0.$$

Je tedy

$$n_1 + n_2 + n_3 - 2p_{123} \geq s_{123}$$

neboli

$$p_{123} \leq \frac{1}{2} (n_1 + n_2 + n_3 - s_{123}). \quad (10)$$

V našem případě dá (10)

$$p_{123} \leq \frac{1}{2} (80 + 70 + 55 - 100) = \frac{105}{2},$$

tj.

$$p_{123} \leq 52. \quad (11)$$

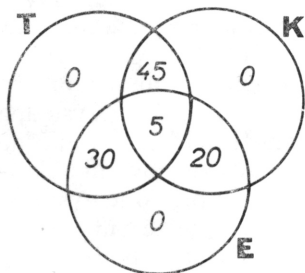
Hlavní myšlenka řešení je asi tato: Je třeba znát formule (7a), (7b) a upravit je tak, aby obsahovaly jednak výraz $K \geq 0$, jednak výraz $Z \leq 0$; tak dostaneme odhady pro p_{123} shora (11) a zdola (9).

Zbývá otázka, zda obou hranic (9), (11) pro p_{123} může být dosaženo; také tuto otázku bychom měli studovat.

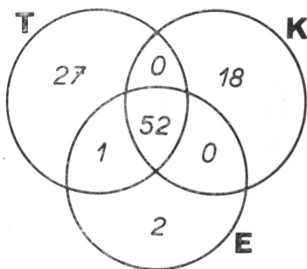
Má-li být $p_{123} = 5$, musí být $K = 0$, tj. musí platit $s_{12} = s_{23} = s_{31} = s_{123} = 100$. Pak je podle známého vzorce $p_{12} = n_1 + n_2 - s_{12} = 80 + 70 - 100 = 50$; obdobně $p_{23} = 25$, $p_{31} = 35$. Vennův diagram s počty prvků je na obr. 33.

Obdobně se postupuje při zkoumání situace $p_{123} = 52$; vyjde např. diagram jako na obr. 34.

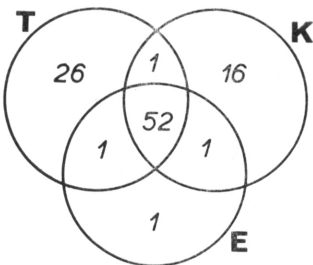
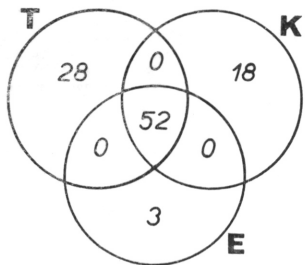
Nakonec otázka: Proč nemůže mít diagram na obr. 34 některý z těchto tvarů jako na obr. 35?



Obr. 33



Obr. 34

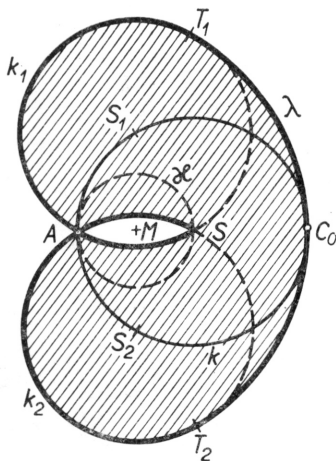


Obr. 35

V rovině je dána kružnice k a na ní bod A . Najděte množinu vrcholů B všech trojúhelníků ABC , u nichž bod C leží na kružnici k a o nichž platí $BC \leq AB \leq AC$.



Úloha B-I-4 vyžaduje určit složitější množinu bodů v rovině, a to jednak intuitivně, jednak provedením pří-



Obr. 36

v kladném i záporném smyslu. Další částí hranice množiny $\mathbf{M}$ je oblouk $T_1 \widehat{C_0} T_2$ kružnice λ se středem A . (Body T_1, T_2 jsou body dotyku kružnic k_1, λ , resp. k_2, λ .)

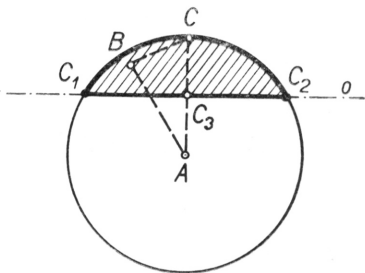
Množinu $\mathbf{M}$ vyšetříte intuitivně. Můžete postupovat např. takto: Zvolíte-li libovolný bod $C \in k$, $C \neq A$, je

slušných důkazů. Předností úlohy je, že není na první pohled patrné, co je hledanou množinou $\mathbf{M}$ vrcholů B . Výsledná množina $\mathbf{M}$ je ohraničena vesměs kruhovými oblouky; na obr. 36 je vyšrafována. Hranice k ní patří — výjimku činí body A, C_0 , které omezují průměr dané kružnice k se středem S . Hranice množiny $\mathbf{M}$ se skládá z oblouků $\widehat{AT_1}, \widehat{AT_2}$ kružnic k_1, k_2 se středy S_1, S_2 , které vzniknou otočením kružnice k o 60° kolem bodu A , a to

množina všech příslušných vrcholů B uzavřená kruhová úseč $\mathbf{U}_c$ kruhu se středem A a poloměrem AC , omezeného osou o úsečky AC ; z ní jsou vypuštěny body úsečky AC (obr. 37). Neboť pro všechny body úsečky $\mathbf{U}_c$ a jen pro ně platí

$$BC \leq AB \leq AC.$$

Poloha $\mathbf{U}_{c_0}$ úsečky $\mathbf{U}_c$ je úseč $T_1ST_2C_0T_1$. Když bod C probíhá některou polokružnicí



Obr. 37

$\widehat{C_0A}$, probíhá C_1 polokružnicí $\widehat{T_1A}$ a C_2 polokružnicí $\widehat{T_2A}$. Odtud lze odvodnit, že úsečka C_1C_2 náleží vždy vyšrafovanému obrazci. Protože podle obrácení Thaletovy věty každá z přímek C_1C_2 prochází bodem S , lze snadno dokázat, že každý bod X , který leží v průniku vyšrafovaného obrazce a poloroviny T_1T_2A , náleží množině $\mathbf{M}$, s výjimkou bodu A . Pro body X bílé „čočky“ to dokázat nelze (proč?).

Ze skutečnosti, že všechny body C, C_1, C_2 náleží vyšrafovanému obrazci a že $\sphericalangle C_1AC_2 = 120^\circ$, plyne, že každá z úsečí $\mathbf{U}_c$ náleží vyšrafovanému obrazci. Odděleně je třeba prozkoumat hraniční body. Zřejmě je $A \notin \mathbf{M}$; kdyby bylo $C_0 \in \mathbf{M}$, tj. $C_0 = B$, bylo by $AB = AC_0 \leq AC$, tj. $B = C$, což je nemožné.

V předchozím je ovšem jen nástin řešení. Je možné, že někdo z řešitelů zvolí metodu souřadnic. Je-li polopřímka $\overrightarrow{AS}$ kladná poloosa x , $AS = 1$, vede vyšetřování množiny $\mathbf{M}$ k analytickému vyjádření

$$x + ty \geq 1, (1 + t^2)(x^2 + y^2) \leq 4,$$

kde t je reálný parametr. Zkoumání těchto nerovnic však asi přesahuje možnosti většiny středoškoláků.

B-I-5

V množině všech reálných čísel je dána binární operace

$$x \times y = x + y + xy.$$

a) Zjistěte, zda je tato operace komutativní a asociativní a zda má neutrální prvek.

b) Určete všechna reálná čísla x , pro která platí

$$a \times (x \times x) = b \times x;$$

provedte diskusi vzhledem k reálným parametrům a, b .



Také tato úloha vnáší do XXII. ročníku *MO* jisté prvky strukturální matematiky, tj. studium vlastností binárních operací. Zjištění komutativity a asociativity je věci jednoduchého výpočtu; je třeba zdůraznit kvantifikaci: *pro všechna* x, y, z musí platit

$$x \times y = y \times x, (x \times y) \times z = x \times (y \times z).$$

Při důkazu asociativity vypočteme

$$\begin{aligned} (x \times y) \times z &= (x + y + xy) \times z = \\ &= x + y + xy + z + (x + y + xy)z \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} x \times (y \times z) &= x + (y \times z) + x(y \times z) = \\ &= x + y + z + yz + x(y + z + yz). \end{aligned}$$

Operace $\times$ je tedy komutativní a asociativní.

Neutrálním prvkem může být jen takový prvek e , že pro

všecka x platí $e \times x = x \times e = x$, neboli vzhledem k tomu, že operace je komutativní, platí

$$x + e + xe = x,$$

tj. $e(1 + x) = 0$, tj. $e = 0$. Číslo 0 je skutečně neutrálním prvkem.

Rovnice $a \times (x \times x) = b \times x$ je „kvadratická“, neboť obsahuje výraz $x \times x$. Klíčem je opět převedení operace $\times$ na operace $+$, $\cdot$; vyjde

$$a + x + x + x^2 + a(x + x + x^2) = b + x + bx$$

neboli

$$(1 + a)x^2 + (2a - b + 1)x + (a - b) = 0.$$

Výsledek diskuse můžeme shrnout do tabulky:

	$b = -1$	$b \neq -1$
$a = -1$	všecka x	$x = -1$
$a \neq -1$	$x = -1$	$x = -1, \frac{b-a}{a+1}$

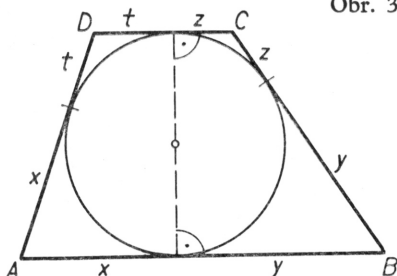
B-I-6

Ak možno lichobežníku vpísať kružnicu, potom geometrický priemer dĺžok oboch jeho ramien je väčší ako geometrický priemer dĺžok oboch jeho základní. Dokážte.



Nepoužijeme-li při jejím řešení trigonometrie, odvodíme pomocnou větu o tečnovém lichoběžníku; ta je klíčem k řešení úlohy.

LEMMA. Budiž $ABCD$ tečnový lichoběžník se základnami $AB = a$, $CD = c$ a rameny $BC = b$, $AD = d$. Budte x, y, z, t délky tečen vedených po řadě z vrcholů A, B, C, D ke kružnici vepsané lichoběžníku $ABCD$. Pak platí (obr. 38).



$$xt = yz. \quad (12)$$

DŮKAZ. Protože je $AB \parallel CD$, je spojnice dotykových bodů obou základů s kružnicí vepsanou průměrem této kružnice. Vyjádříme dvojím způsobem výšku lichoběžníka $ABCD$:

$$(y + z)^2 - (y - z)^2 = (x + t)^2 - (x - t)^2.$$

Odtud plyne (12).

Nyní vypočteme rozdíl druhých mocnin geometrických průměrů $\sqrt{ac}$, $\sqrt{bd}$; je tedy

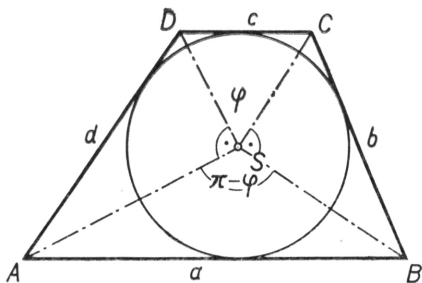
$$\begin{aligned} bd - ac &= (x + t)(y + z) - (x + y)(z + t) = \\ &= xy + zt - yz - xt, \end{aligned}$$

tj.

$$bd - ac = (x - z)(y - t). \quad (13)$$

Zřejmě je $x \neq z$, $y \neq t$; je-li totiž např. $y = t$, plyne z (12) $x = z$ a $ABCD$ je rovnoběžník. Zvolme označení tak, aby bylo $x > z$; pak je $y > t$. Neboť kdyby bylo $t > y$, platilo by $tx > yz$, což je ve sporu s (12). Je-li však $x > z$, $y > t$, je podle (13) $bd > ac$.

TRIGONOMETRICKÉ ŘEŠENÍ. Na obr. 39 je opět tečnový čtyřúhelník $ABCD$ a jemu vepsaná kružnice se



Obr. 39

středem S a poloměrem ρ . Protože je $\sphericalangle BAD + \sphericalangle CDA = \pi$, je $\sphericalangle SAD + \sphericalangle ADS = \frac{\pi}{2}$,

$\sphericalangle ASD = \frac{\pi}{2}$. Obdobně je $\sphericalangle BSC = \frac{\pi}{2}$. Je-li tedy

$\sphericalangle CSD = \varphi$, je $\sphericalangle ASB = \pi - \varphi$. Platí tedy pro dvojnásobné obsahy trojúhelníků ABS , BCS , CDS , DAS :

$$AS \cdot DS = d\rho, \quad BS \cdot CS = b\rho, \quad AS \cdot BS \cdot \sin\varphi = a\rho, \\ CS \cdot DS \cdot \sin\varphi = c\rho.$$

Odtud

$$(bd - ac) \rho^2 = AS \cdot BS \cdot CS \cdot DS (1 - \sin^2\varphi) > 0,$$

neboť je $0 < \varphi < \pi$. Protože je $(bd - ac) \rho^2 > 0$, $\rho^2 > 0$, je i

$$bd - ac > 0.$$

Druhé řešení je trikové: klíčem k němu je vyjádření obsahů trojúhelníků ABS , BCS , CDS , DAS dvojím

způsobem. První řešení je přirozenější; klíčem je uvedené lemma.

3. KATEGORIE C

C-I-1

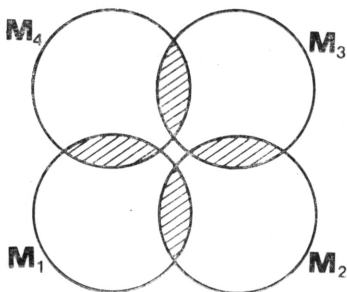
Množiny $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4, \mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_3 \cup \mathbf{M}_4$ mají po řadě n_1, n_2, n_3, n_4, s prvků; přitom platí $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_3 = \mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}_4 = \emptyset$. Dokažte, že platí

$$2s \geq n_1 + n_2 + n_3 + n_4.$$

Může nastat rovnost a v kterém případě?



Úloha C-I-1 uvádí i do kategorie C tematiku množinové algebry a Vennových diagramů, kterou uvedla do kategorie B úloha B-P-1.



Obr. 40

Úloha C-I-1 je lehčí, bylo by vhodné doplnit ji úlohou, která je uvedena dále. Ostatně ani úloha B-P-1 není pro účastníky kategorie C nedostupná. Aspoň úvod k řešení úlohy B-P-1 by si měli přečíst i účastníci soutěže v kategorii C.

Pro řešení úlohy C-I-1 si zopakujeme tytéž tři

formule jako při řešení úlohy B-P-1 a nakreslíme diagram (obr. 40), kde uplatníme předpoklady $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_3 =$

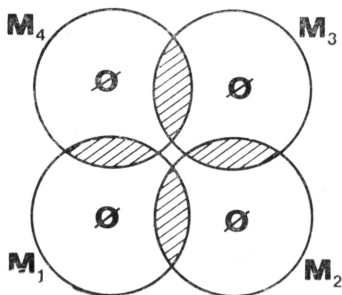
$= \mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}_4 = \emptyset$. Označíme s_{13} , s_{24} počty prvků množin $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_3$, $\mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_4$, evidentně platí

$$s \geq s_{13}; \quad s \geq s_{24},$$

$$s_{13} = n_1 + n_3; \quad s_{24} = n_2 + n_4. \quad (1)$$

Sečtením prvních dvou a druhých dvou vztahů dostaneme dokazovanou nerovnost.

Rovnost $2s = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ nastane jen v případě, když nastane rovnost v prvních vztazích (1). Z rovnosti $s = s_{13}$ plyne, že obě bílé části diagramů množin $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_4$ značí množiny prázdné; obdobně je tomu s rovností $s = s_{24}$. Diagram pak je na obr. 41.



Obr. 41

Doplňková úloha, o které jsme se zmínili, se týká omezení čísla s shora. Označíme p' počet prvků průniku $(\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_3) \cap (\mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_4)$. Podle prvního vzorce z řešení úlohy B-P-1 je

$$s + p' = s_{13} + s_{24} \quad (2)$$

(vzorec jsme aplikovali na množiny $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_3$ a $\mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_4$). Z (2) plyne

$$s \leq s_{13} + s_{24}. \quad (3)$$

Z posledních dvou vzorců (1) a z (3) dostaneme

$$s \leq n_1 + n_2 + n_3 + n_4. \quad (4)$$

Úhrnem $\frac{1}{2}(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) \leq s \leq n_1 + n_2 + n_3 + n_4$.

Rovnost v (4) nastane, právě když každé dvě z množin

M_1, M_2, M_3, M_4 jsou disjunktní (z rovnosti se odvodí pomocí (3), (2) $p' = 0$).

C-I-2

Vypočítajte súčet všetkých šesticiferných čísel, z ktorých každé má dekadický zápis obsahujúci všetky číslice 1, 2, 3, 4, 5, 6.



Tato úloha je vlastně jistým předběhnutím kombinatoriky. Elementy kombinatoriky jsou však tak přístupné a zajímavé, že se mohou probírat na základní škole. Domníváme se, že by se řešitelé měli seznámit při příležitosti řešení úlohy C-I-2 s názvem „*permutace*“ jako zkratkou pro „uspořádanou n -tici prvků“ (v našem případě šestici).

Postup:

- a) Uvědomíme si, jak vypsát všechny permutace 3, 4 prvků.
- b) Na základě tohoto systému odvodíme vzorec pro výpočet počtu všech permutací n prvků ($n = 2, 3, 4, 5, 6$); názvu „*faktoriál*“ a příslušného znaku ($6!$) nemusíme užívat.
- c) Uvážíme, jak zjistit, kolikrát se vyskytuje jistá cifra na jistém místě ve všech permutacích cifer 1, 2, 3, 4, 5, 6 (je to $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ krát, tj. 120krát).

Počet všech vyšetřovaných čísel je $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$. Na prvním místě se objeví každá z cifer 1, 2, 3, 4, 5, 6 právě 120krát. Tyto cifry vzhledem ke své místní hodnotě přispějí do celkového součtu sčítancem

$$\begin{aligned} &120 \cdot 1 \cdot 10^5 + 120 \cdot 2 \cdot 10^5 + 120 \cdot 3 \cdot 10^5 + \\ &+ 120 \cdot 4 \cdot 10^5 + 120 \cdot 5 \cdot 10^5 + 120 \cdot 6 \cdot 10^5, \end{aligned}$$

tj.

$$120 \cdot 10^5 (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 120 \cdot 10^5 \cdot 21.$$

Obdobně tomu je na 2., 3., 4., 5. a 6. místě; příslušné příspěvky jsou

$$120 \cdot 10^4 \cdot 21, 120 \cdot 10^3 \cdot 21, 120 \cdot 10^2 \cdot 21, \\ 120 \cdot 10 \cdot 21, 120 \cdot 21.$$

Žádaný součet je tedy

$$s = 120 \cdot 21(10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = \\ = 120 \cdot 21 \cdot 111\,111.$$

Součet s je úctyhodné číslo 279 999 720.

Zde máme dobrou příležitost ocenit výhodu spekulace a dedukce oproti bezduchému mechanickému počítání. Pripustíme, že by počtář byl velmi rychlý a absolutně spolehlivý. Napsání 720 šesticiferných čísel „pod sebe“ by mu trvalo asi 36 minut (předpokládáme napsání 20 čísel za minutu). Sečtení jednoho sloupce by mu trvalo asi 24 minut (předpokládáme sečtení 30 jednociferných čísel za minutu). Celkový výpočet by tedy trval

$$6 \cdot 24 + 36 = 180 \text{ (minut)},$$

tj. nejméně tři hodiny.

Jak by vypadal výpočet pomocí kalkulačky?

C-I-3

Řešte graficky a početně v oboru reálných čísel rovnici

$$[3x + 2] = [x + 1];$$

přitom $[a]$ značí celou část čísla a .



Úloha C-I-3 náleží do tématu „*schodových funkcí*“, které jsou jedním z hlavních témat XXII. ročníku MO. Úloha C-I-3 navazuje na úlohu C-P-1. Při jejím řešení můžeme použít VĚTY: *Je-li c číslo celé, pak platí pro všechna t:*

$$[c + t] = c + [t]. \quad (5)$$

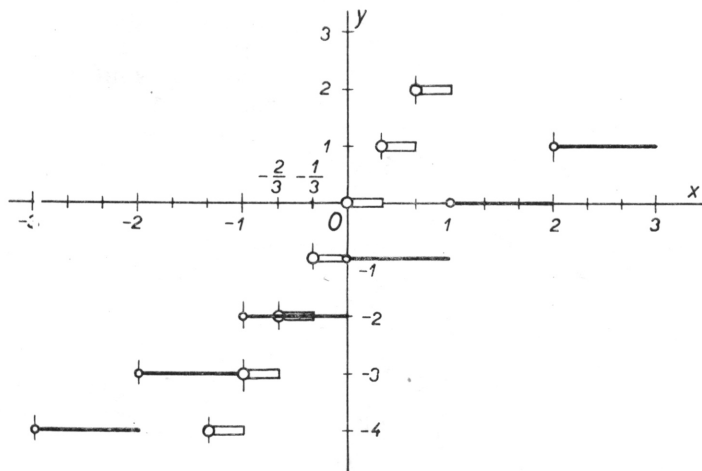
Tato formule se dokáže snadno přímo z definice „*celé části*“. Platí totiž

$$(c + t) - 1 < [c + t] \leq c + t, \quad (6)$$

$$t - 1 < [t] \leq t,$$

a tedy

$$t + c - 1 < [t] + c \leq t + c. \quad (7)$$



Obr. 42

Poněvadž podmínkám $t + c - 1 < x \leq t + c$ vyhovuje *jediné celé číslo* x , platí vzhledem k (6) a (7) vzorec (5). Danou rovnici upravíme na tvar

$$[3x] + 2 = [x] + 1$$

neboli

$$[3x] = [x] - 1; \quad (8)$$

rovnice (8) má podle (5) též řešení jako daná rovnice.

Text úlohy žádá, abychom ji řešili *nejdříve* graficky a *pak* teprve početně. Grafy funkcí $x \mapsto [3x]$, $x \mapsto [x] - 1$ jsou dvojce schody; „*výška stupně*“ je vždy 1, „*délka stupně*“ je u první funkce $\frac{1}{3}$, u druhé 1. Obě „schodiště“ stoupají zleva doprava, a to první strměji, druhé pomaleji. Grafy (obr. 42) ukáží také „setkání“ obou „schodišť“. To si ověříme výpočtem podle následující tabulky (T).

(T)

x	-3	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	2	3
$[3x]$	-9	-6	-3	-2	-1	0	1	2	3	6	9
$[x] - 1$	-4	-3	-2	-2	-2	-1	-1	-1	0	1	2

Podle grafu i podle tabulky (T) jsou řešení dané rovnice všechna čísla x , pro něž platí

$$-\frac{2}{3} \leq x < -\frac{1}{3}.$$

Snadno dokážeme, že rovnice jiná řešení nemá: radíme vám, abyste odůvodnili to, co vidíte na obr. 42, např., že

pro všechna $x \geq -\frac{1}{3}$ je $[3x] > [x] - 1$. Skutečně, je-li $-\frac{1}{3} \leq x < 0$, je $-1 \leq 3x < 0$, tj. $[3x] = -1$,
 $[x] - 1 = -1 - 1 = -2$; je-li $x \geq 0$, je $[3x] > 3x - 1 \geq x - 1 \geq [x] - 1$.
 Obdobně dokážeme, že pro všechna $x < -\frac{2}{3}$ je $[3x] < [x] - 1$.

C-I-4

Nech $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ sú dĺžky strán dotýčnicového štvoruholníka $ABCD$.

Ak platí $a^2 + b^2 = ab + cd + bc + ad - ac - bd$, je $ABCD$ deltoid. Ak okrem toho platí

$b^2 + c^2 = bc + ad + cd + ab - bd - ac$,

je $ABCD$ kosočtverec. Dokážte.



Klíče k řešení této úlohy jsou dva:

- (a) Znalost věty: součty délek protějších stran tečnového čtyřúhelníka jsou si rovny; vzorec $a + c = b + d$.
- (b) Charakteristika deltoidu a kosočtverce: vypuklý čtyřúhelník je deltoidem, právě když některá dvojice sousedních stran jsou shodné úsečky a zbývající dvojice sousedních stran jsou také shodné úsečky; (vypuklý) čtyřúhelník je kosočtvercem, právě když jsou všechny jeho strany navzájem shodné.

Řešení úlohy záleží v tom, že využijeme první dané

rovnosti a rovnosti $a + c = b + d$. Danou rovnost upravíme na tvar

$$a(a + c) + b(b + d) = (a + c)(b + d).$$

Dosadíme $b + d = a + c$; vyjde

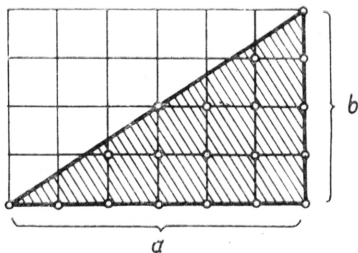
$$(a + c)(a + b) = (a + c)^2. \quad (9)$$

Protože je $a + c > 0$, plyne z (9) $a + b = a + c$, tj. $b = c$, $a = d$. Podle věty (b) je tedy čtyřúhelník deltoid.

Druhá z daných rovností vznikne z první *cyklickou změnou*: $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$. Proto můžeme obměnit cyklicky i výsledek: mimo vztahy $b = c$, $a = d$ budou platit ještě vztahy $c = d$, $b = a$. Podle věty (b) (druhá část) je tedy v tomto případě čtyřúhelník kosočtverec.

C-I-5

V rovině je dána čtvercová síť složená z jednotkových čtverců. Zvolme libovolný pravoúhlý trojúhelník **T**, jehož vrcholy leží ve vrcholech sítě a odvěsny v přímkách sítě. Označme p obsah trojúhelníka **T**, h , resp. v , počet vrcholů sítě, které jsou na hranici, resp. ve vnitřku trojúhelníka **T**. Dokažte, že platí



Obr. 43

$$2p - h - 2v + 2 = 0.$$

Úloha C-I-5 podobně jako C-I-6 vnáší do soutěže téma z kombinatorické geometrie.

Při řešení úlohy C-I-5 začneme experimentovat např. s pravoúhlým trojúhelníkem o odvěsnách $a = 6$, $b = 4$ (obr. 43); a, b jsou obecně čísla celá, jejich největšího společného dělitele označíme δ . Na čísla δ zřejmě záleží; jsou-li a, b nesoudělná, neleží na přeponě mimo vrcholy žádný mřížový bod. První impuls k řešení úlohy bude tedy odvození vzorce

$$h = (a - 1) + (b - 1) + (\delta - 1) + 3,$$

tj.

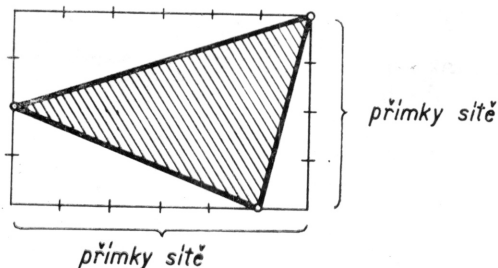
$$h = a + b + \delta. \quad (10)$$

Další poznámka se týká odvození vzorce pro $2v$; podnětem je doplnit trojúhelník na pravoúhelník (obr. 43). Uvnitř pravoúhelníka je $(a - 1)(b - 1)$ mřížových bodů; zřejmě však platí

$$(a - 1)(b - 1) = 2v + \delta - 1,$$

neboli

$$2v = ab - a - b - \delta + 2. \quad (11)$$



Obr. 44

Protože $2p = ab$, dostaneme z (10) a (11)

$$\begin{aligned} 2p - 2v - h &= \\ &= ab - ab + a + b + \delta - 2 - a - b - \delta = -2. \end{aligned}$$

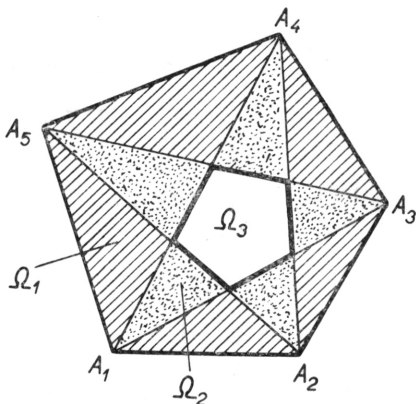
Pokusíme se rozšířit odvozený vzorec pro libovolný *mřížový trojúhelník*, tj. trojúhelník, jehož všechny tři vrcholy jsou mřížové body. Dostatečný podnět dává obr. 44.

C-I-6

V rovině je dán vypuklý pětiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5$ a uvnitř něho bod A_6 , který neleží na žádné úhlopříčce. Kolika různými způsoby lze sestavit dva trojúhelníky s vrcholy v bodech A_i tak, aby trojúhelníky neměly žádný společný bod? (Diskuse.)



Tato úloha se může vyřešit v podstatě experimentálně. Načtneme konvexní pětiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5$ a sestojíme všechny jeho úhlopříčky (v počtu 5). Tím se rozdělí pětiúhelník celkem na 11 částí obr. (45) tří typů; tyto typy označíme $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$. Na obr. 45 jsou oblasti typu Ω_1 vyšrafovány, oblasti typu Ω_2 jsou vytečkované, oblast typu Ω_3 je bílá a



Obr. 45

ohraničená tlustou čarou. Oblasti jsou otevřené (bez hranic) a bod A_6 náleží jedné z nich.

Leží-li bod A_6 v oblasti Ω_1 , jsou žádané dvojice trojúhelníků 3, např. $(A_1A_5A_6, A_2A_3A_4)$, $(A_1A_6A_2, A_3A_4A_5)$, $(A_4A_5A_6, A_1A_2A_3)$. Polointuitivně ověříme, že tyto dvojice vyhovují. Měli bychom si uvědomit, že všech dvojic trojúhelníků je 10 (stačí zvolit tři vrcholy tak, aby mezi nimi byl A_6). Snadno ověříme, že zbývajících sedm dvojic trojúhelníků, mezi nimiž jsou trojúhelníky $A_3A_5A_6$, $A_3A_4A_6$, $A_2A_5A_6$, $A_2A_4A_6$, $A_1A_3A_6$, $A_2A_3A_6$, $A_1A_4A_6$, nevyhovuje.

Leží-li bod A_6 v oblasti Ω_2 , jsou žádané dvojice trojúhelníků 4, např. $(A_1A_2A_6, A_3A_4A_5)$, $(A_1A_5A_6, A_2A_3A_4)$, $(A_6A_2A_3, A_1A_4A_5)$, $(A_6A_4A_5, A_1A_2A_3)$.

Leží-li bod A_6 v oblasti Ω_3 , je žádaných dvojic trojúhelníků 5, a to $(A_6A_1A_2, A_3A_4A_5)$, $(A_6A_2A_3, A_1A_4A_5)$, $(A_6A_3A_4, A_1A_2A_5)$, $(A_6A_4A_5, A_1A_2A_3)$, $(A_6A_5A_1, A_2A_3A_4)$.

Tím je zároveň provedena diskuse řešení.

4. KATEGORIE Z

Z-I-1

Dokažte, že existuje jediné prvočíslo p takové, že p , $p + 2$, $p + 4$ jsou prvočísla.



Vyšetřování aritmetických posloupností, jejichž všechny členy jsou prvočísla (nazveme je p -posloupnosti), je problémová situace, ze které lze vytěžit řadu pěkných úloh. P -posloupnost s diferencí 2 může obsahovat nejvýše tři členy. Jsou-li totiž x , $x + 2$, $x + 4$, $x + 6$ čtyři členy

p -posloupnosti, jsou pro zbytky při dělení třemi tři možnosti uvedené v následující tabulce ve třech řádcích:

x	$x + 2$	$x + 4$	$x + 6$
0	2	1	0
1	0	2	1
2	1	0	2

Protože je $x \geq 2$, je $x + 2 \geq 4$, $x + 4 \geq 6$, $x + 6 \geq 8$. V každém řádku tabulky je tedy aspoň jeden násobek tří větší než 3 a to je číslo složené.

Omezíme-li se jen na posloupnosti tříčlenné, přichází v úvahu jen první řádek tabulky a první člen musí být násobek tří, který je prvočíslo, tj. $x = 3$; dále je $x + 2 = 5$, $x + 4 = 7$, což je řešení naší úlohy.

Omezíme-li se jen na posloupnosti dvojčlenné s diferencí 2 — tj. na tzv. prvočíselná dvojčata, přichází v úvahu jen p -posloupnost 3, 5 a pak p -posloupnosti podle 3. řádku tabulky, např. 17, 19 nebo 29, 31 nebo 41, 43 atd. První člen x dvojice nemůže končit v dekadickém vyjádření trojkou, pokud je $x > 3$; neboť pak by druhý člen končil pětkou a přitom by platilo $x + 2 > 5$, tj. druhý člen $x + 2$ by bylo číslo složené. Jak je známo, není dosud rozřešena otázka, zda množina prvočíselných dvojčat je nekonečná.

Do série úloh z této problémové situace patří např. úloha nalézt všechny p -posloupnosti aspoň tříčlenné s diferencí 4. (Diference p -posloupnosti, která má aspoň tři členy, nemůže být číslo liché — proč? Jak je tomu u dvojčlenných posloupností?)

Sestavme tabulku pro čtyřčlennou p -posloupnost s di-

ferenci 4; do tabulky zapisujeme zbytky při dělení třemi (jsou tři možnosti, uvedené ve třech řádcích tabulky).

x	$x + 4$	$x + 8$	$x + 12$
0	1	2	0
1	2	0	1
2	0	1	2

Protože je $x \geq 2$, je $x + 4 \geq 6$, $x + 8 \geq 10$, $x + 12 \geq 14$. V každém řádku je tedy aspoň jeden násobek tří větší než 3, tj. číslo složené. *Závěr: neexistuje čtyřčlenná p -posloupnost s diferencí 4.*

Omezíme-li se na tříčlenné p -posloupnosti s diferencí 4, přichází v úvahu jen první řádek a první člen je $x = 3$; další členy jsou $x + 4 = 7$, $x + 8 = 11$.

Omezíme-li se na dvojčlenné p -posloupnosti s diferencí 4 a vyloučíme-li posloupnost 3, 7, přichází v úvahu jen druhý řádek tabulky. Sem patří „dvojčata“ 7, 11; 13, 17; 19, 23; 97, 101 a další. Snad i těchto dvojčat je nekonečně mnoho.

Úloha o p -posloupnostech s diferencí 4 by mohla být úvodem k úloze Z-I-1. Bylo by možné vyšetřovat obdobným způsobem i p -posloupnosti s diferencí 6; zde bychom vypsali do tabulky zbytky při dělení pěti. Všecky tyto úlohy jsou vhodnou příležitostí k procvičování dalšího pojmu elementární číselné teorie — k pojmu zbytku, resp. zbytkové třídy.

V písemné práci se vyskytl lomený výraz

$$\frac{ax + b}{x + c};$$

a, b, c byla určitá čísla. Luděk si pamatuje, že při dosazení $x = 1$ dostal výsledek 1, při dosazení $x = -1$ dostal -1 , když dosadil $x = 2$, zjistil, že se nedá hodnota daného výrazu vypočítat. Pomozte mu najít čísla a, b, c .



Z textu úlohy dostaneme

$$\frac{a + b}{1 + c} = 1, \quad \frac{-a + b}{-1 + c} = -1.$$

Hodnotu výrazu nebylo možno vypočítat pro $x = 2$, protože jmenovatel byl roven nule, tj. $c + 2 = 0$. Z uvedených rovnic dostaneme

$$a = -2, \quad b = 1, \quad c = -2.$$

Lomený výraz, s kterým se Luděk potýkal, byl tedy

$$\frac{1 - 2x}{x - 2}.$$

A nyní připojíme k úloze Z-I-2 komentář, který je určen pro vyspělejší účastníky MO.

Úloha Z-I-2 je úloha na určenost lineární lomené funkce. Jde o funkci tvaru

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \tag{1}$$

kde a, b, c, d jsou konstanty. Zpravidla ještě předpokládáme, že je $ad - bc \neq 0$.

Z teorie víme, že třemi dvojicemi $x_1 \rightarrow y_1, x_2 \rightarrow y_2, x_3 \rightarrow y_3$, kde x_i jsou navzájem různá čísla a y_i jsou navzájem různá čísla, je určena funkce (1) jednoznačně; tj.

jednoznačně jsou určeny poměry $a : b : c : d$. Pomocí této věty lze vytvořit libovolně mnoho úloh takového typu, jako je úloha Z-I-2.

Např. je-li $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, dostaneme pro koeficienty a, b, c, d rovnice

$$\frac{b}{d} = y_1, \quad \frac{a+b}{c+d} = y_2, \quad \frac{-a+b}{-c+d} = y_3. \quad (2)$$

Protože je $\frac{b}{d} = y_1$, je $d \neq 0$ a můžeme volit $d = 1$.

(Proč?) Z (2) pak dostaneme

$$b = y_1, \quad a + y_1 = cy_2 + y_2, \quad -a + y_1 = -cy_3 + y_3. \quad (3)$$

Sečtením posledních dvou rovnic (3) vyjde

$$2y_1 = c(y_2 - y_3) + y_2 + y_3$$

a odtud

$$c = \frac{2y_1 - y_2 - y_3}{y_2 - y_3}. \quad (4a)$$

Z druhé rovnice (3) pak vypočteme

$$a = \frac{y_1 y_2 - 2y_2 y_3 + y_1 y_3}{y_2 - y_3}. \quad (4b)$$

Podle (4a), (4b) je

$$ad - bc = a - cy_1 = 2 \frac{(y_1 - y_3)(y_2 - y_1)}{y_2 - y_3} \neq 0.$$

Jedna ze tří podmínek může být nahrazena jako v úloze Z-I-2 tím, že k určitému x nelze vypočítat příslušné y . Nechť je např. opět $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, y_3 však

nelze vypočítat, tj. $-c + d = 0$. Podmínky pro koeficienty tedy jsou

$$\frac{b}{d} = y_1, \quad \frac{a+b}{c+d} = y_2, \quad -c + d = 0.$$

Můžeme opět zvolit $d = 1$; pak je

$$d = 1, \quad b = y_1, \quad c = 1, \quad a = 2y_2 - y_1.$$

Opět je $ad - bc = 2(y_2 - y_1) \neq 0$. Funkce

$$y = \frac{(2y_2 - y_1)x + y_1}{x + 1}$$

skutečně splňují dané podmínky.

Úloha obdobného typu, která může být uvedením do této tematiky, zní:

Koeficienty funkce $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ jsou takové, že se nedá vypočítat y pro $x = 1$ a že pro žádné x nevyjde $y = 1$.

První podmínka vede při $d = 1$ k vyjádření $y = \frac{ax+b}{-x+1}$.

Uplatníme druhou podmínku: položíme $y = 1$ a budeme se snažit vypočítat x . Dostaneme rovnici $-x + 1 = ax + b$ neboli

$$x(1 + a) = 1 - b. \quad (5)$$

Rovnice (5) je neřešitelná, právě když $a = -1$, $b \neq 1$. Daným podmínkám tedy vyhovuje nekonečně mnoho funkcí

$$y = \frac{-x+b}{-x+1}, \quad b \neq 1.$$

Určenost lineární lomené funkce (1) třemi dvojicemi

$[x; y]$ je v soulase se skutečností, že při $c \neq 0$ je grafem funkce (1) *rovnoosá hyperbola*, jejíž asymptoty jsou rovnoběžné s osami souřadnic (ortonormálních). Směry asymptot určují oba nevlastní body hyperboly a je tedy třeba ještě tří dalších bodů. Zvolíme-li tyto tři body tak, že leží v přímce, např.

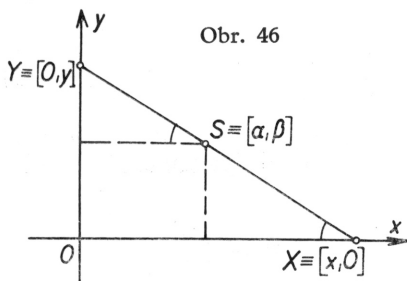
$$[3; 0], [0; 3], [2; 1], \quad (6)$$

dá nám známý postup tyto koeficienty: $a = -1$, $b = 3$, $c = 0$, $d = 1$; lineární lomená funkce přejde ve funkci polynomickou

$$y = -x + 3,$$

jejímž grafem je *přímka* obsahující všechny tři body (6). Lineární lomená funkce má však ještě jiný geometrický význam. Zvolme soustavu ortonormálních souřadnic; mimo osy souřadnic zvolme bod S . Promítneme-li proměnný bod $X = [x; 0]$ osy x z bodu S do (proměnného) bodu $Y = [0; y]$ osy y , pak platí

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad (1bis)$$



kde a , b , c , d jsou vhodné reálné konstanty, $ad - bc \neq 0$ (obr. 46). Obráceně však neplatí, že každá lineární lomená funkce (1 bis) vyjadřuje promítnutí osy x do osy y .

ČÍSELNÝ PŘÍKLAD. Budiž $S = [2; 1]$; pak bod $A = [3; 0]$ se promítá do bodu $B =$

$= 0; 3]$ a bod $P = [0; 0]$ se promítá sám do sebe. Platí tedy

$$0 = \frac{b}{d}, \quad 3 = \frac{3a + b}{3c + d}, \quad 2c + d = 0. \quad (7)$$

Poslední podmínka (7) vyjadřuje, že bod $[2; 0]$ nemá žádný průmět na ose y . Zvolíme-li $d = -2$ (a to můžeme), dají nám rovnice (7)

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 1, \quad d = -2$$

a vyjádření funkce (1 bis) je

$$y = \frac{x}{x - 2}.$$

Jak je vidět, poskytuje úloha Z-I-2 mnoho možností k důvěrnému seznámení s lineární lomenou funkcí, s jejím užitím v geometrii, k procvičování soustav tří lineárních rovnic v souvislosti s větou o určenosti *lineární lomené funkce* třemi dvojicemi $[x; y]$. Velmi doporučujeme interpretovat lineární lomenou funkci jako analytické vyjádření zobrazení (projektivního) — viz poslední řešení příklad; věta o určenosti lineární lomené funkce se pak jeví jako analytický protějšek *Staudtovy věty* o určenosti projektivity. V zadané úloze Z-I-2 je lomený výraz dehomogenizován, koeficient při x v jmenovateli je totiž roven 1.

Z-I-3

Je-li bod O libovolný vnitřní bod trojúhelníka ABC a jsou-li A_1, B_1, C_1 po řadě průsečíky přímek AO, BO, CO s protějšími stranami, pak platí

$$\text{a) } \frac{OA_1}{AA_1} + \frac{OB_1}{BB_1} + \frac{OC_1}{CC_1} = 1;$$

$$\text{b) } \frac{AO}{AA_1} + \frac{BO}{BB_1} + \frac{CO}{CC_1} = 2.$$

Dokažte.



1. V této úloze jde o poměry délek, což napovídá, že jde o úlohu z afinní geometrie. Pro starší čtenáře bude užitečné, uvedeme-li řešení, které se opírá o *vlastnosti dělicího poměru*; znalost základních vlastností dělicího poměru totiž umožňuje sestavit si mnohé varianty úlohy. Řešitelé kategorie Z najdou jednoduché řešení na str. 127 odst. 5, 6.

2. Jsou-li X, Y, Z tři různé body v přímce, definujeme *dělicí poměr* (XYZ) tak, že

$$(XYZ) = \pm \frac{XZ}{YZ};$$

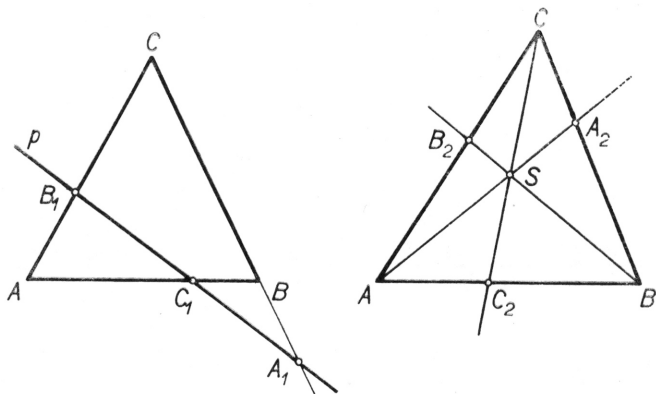
volíme znaménko $+$, leží-li bod Z *vně* úsečky XY , a znaménko $-$, leží-li bod Z *uvnitř* úsečky XY .

Utvoříme-li z daných kolineárních bodů X, Y, Z všech šest permutací, dostaneme šest hodnot dělicího poměru:

$$\begin{aligned} (XYZ) &= \lambda, (YXZ) = \frac{1}{\lambda}, (XZY) = 1 - \lambda, \\ (ZXY) &= \frac{1}{1 - \lambda}, (YZX) = 1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \\ (ZYX) &= 1 - \frac{1}{1 - \lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}. \quad (1) \end{aligned}$$

3. Další důležité vlastnosti dělicích poměrů vyjadřují věty *Menelaova* a *Ceva*.

VĚTA MENELAOVA. Je dán trojúhelník ABC a přímka p jeho roviny, která neprochází žádným z vrcholů



Obr. 47

A, B, C a protíná přímky AB, BC, CA po řadě v bodech C_1, A_1, B_1 . Pak platí

$$(ABC_1) \cdot (BCA_1) \cdot (CAB_1) = 1.$$

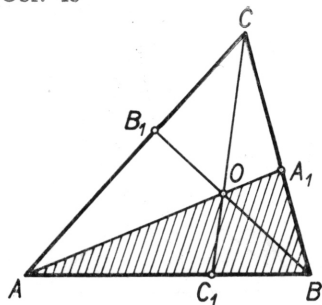
VĚTA CEVOVA. Je dán trojúhelník ABC a bod S jeho roviny, který neleží na žádné z přímek AB, BC, CA ; přímky AS, BS, CS nechť protínají přímky BC, CA, AB po řadě v bodech A_2, B_2, C_2 . Pak platí

$$(ABC_2) \cdot (BCA_2) \cdot (CAB_2) = -1.$$

Obě situace ukazuje obr. 47. Připomínáme ještě, že dělicí poměry jsou tvořeny „cyklicky“ a že obě věty lze obrátit.

4. Protože v úloze Z-I-3 leží bod O uvnitř ABC , platí (obr. 48)

$$\frac{OA_1}{AA_1} = (OAA_1), \quad \frac{OB_1}{BB_1} = (OBB_1), \quad \frac{OC_1}{CC_1} = (OCC_1). \quad (2)$$



Aplikujeme Menelaovu větu na $\triangle ABA_1$ a přímku OC ; vyjde

$$(ABC_1) \cdot (BA_1C) \cdot (A_1AO) = 1$$

a dále podle (1)

$$(AA_1O) = (ABC_1) \cdot (BA_1C),$$

$$(AA_1O) = (ABC_1) [1 - (BCA_1)]. \quad (3)$$

Podle (1) je

$$(OAA_1) = \frac{1}{(AOA_1)} = \frac{1}{1 - (AA_1O)}. \quad (4)$$

Označíme-li

$$(ABC_1) = \lambda_3, \quad (BCA_1) = \lambda_1, \quad (CAB_1) = \lambda_2,$$

přepíšeme (3) a (4) ve tvaru

$$(AA_1O) = \lambda_3(1 - \lambda_1) = \lambda_3 - \lambda_1\lambda_3,$$

$$(OAA_1) = \frac{1}{1 - \lambda_3 + \lambda_1\lambda_3}. \quad (5a)$$

Cyklickou záměnou dostaneme

$$(OBB_1) = \frac{1}{1 - \lambda_1 + \lambda_2\lambda_1}, \quad (5b)$$

$$(OCC_1) = \frac{1}{1 - \lambda_2 + \lambda_3\lambda_2}.$$

Podle (2), (5a), (5b) vypočteme součet $\sum \frac{OA_1}{AA_1}$ (zápis znamená součet tří příslušných členů)

$$\sum \frac{OA_1}{AA_1} = \frac{1}{1 - \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3} + \frac{1}{1 - \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2} + \frac{1}{1 - \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3}.$$

Protože je podle Cevovy věty $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -1$, rozšíříme-li první zlomek číslem λ_2 , dostaneme

$$\begin{aligned} \sum \frac{OA_1}{AA_1} &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_2 \lambda_3 - 1} + \frac{1}{1 - \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3} + \\ &+ \frac{1}{1 - \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2}, \\ \sum \frac{OA_1}{AA_1} &= \frac{1 - \lambda_2}{1 - \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3} + \frac{1}{1 - \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2}. \quad (6) \end{aligned}$$

První zlomek na pravé straně (6) rozšíříme číslem λ_1 ; vyjde

$$\sum \frac{OA_1}{AA_1} = \lambda_1 \frac{1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_1 \lambda_2 - 1} + \frac{1}{1 - \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2} = 1.$$

Tím je dokázána první rovnost.

5. Protože je $AO = AA_1 - OA_1$, je

$$\frac{AO}{AA_1} = 1 - \frac{OA_1}{AA_1},$$

a tedy

$$\sum \frac{AO}{AA_1} = 3 - \sum \frac{OA_1}{AA_1} = 2.$$

Je dán kvádr $ABCDEFGH$ se středem S , jehož hrany mají délky $AB = a$, $AD = b$, $AE = c$. Uvnitř kváдру je dán bod X .

a) Vyjádřete součet druhých mocnin vzdáleností bodu X od všech vrcholů kváдру pomocí a, b, c, SX .

b) Platí výsledek odstavce a) i pro body ležící vně kváдру nebo na jeho povrchu?



Tato úloha nevyžaduje vůbec vynalézavost — je to drilová úloha na algebraické výpočty. Kvádr $ABCDEFGH$ rozdělíme na osm kvádrů, které mají vždy jeden vrchol X a za protější vrchol jeden z vrcholů daného kváдру. Vzdálenosti $AX, BX, CX, DX, EX, FX, GX, HX$ jsou délky tělesových úhlopříček těchto osmi kvádrů; tyto vzdálenosti vypočteme pomocí délek hran těchto kvádrů. Označíme-li vzdálenosti bodu X od stěn $ADHE, ABFE, ABCD$ po řadě x, y, z , jsou tyto délky hran

$$x, y, z, a - x, b - y, c - z. \quad (7)$$

Pak se vyjádří

$$\begin{aligned} AX^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \quad BX^2 = (x - a)^2 + y^2 + z^2, \\ CX^2 &= (x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2, \dots, HX^2 = \\ &= x^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2, \quad (8) \\ SX^2 &= (x - \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{b}{2})^2 + (z - \frac{c}{2})^2. \quad (9) \end{aligned}$$

Přitom užíváme rovnosti $(x - a)^2 = (a - x)^2, (y - b)^2 = (b - y)^2, (z - c)^2 = (c - z)^2$.

Hledaný součet je podle (8)

$$\sigma = 8(x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz) + 4(a^2 + b^2 + c^2). \quad (10)$$

Z (9) plyne

$$x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = SX^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2). \quad (11)$$

Spojením (10), (11) dostaneme řešení úlohy a)

$$\sigma = 8SX^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2). \quad (12)$$

Leží-li bod X na povrchu nebo vně kvádru, nahradíme v (7) rozdíly $a - x$, $b - y$, $c - z$ absolutními hodnotami $|a - x| = |x - a|$, $|b - y| = |y - b|$, $|c - z| = |z - c|$; další výpočet i výsledek (12) zůstávají nezměněny. Tím je rozřešena úloha b).

Je patrné, že celý postup, zejména při řešení úlohy b), je v podstatě obcházením metody souřadnic. Domníváme se, že olympionici by se měli s tímto principem seznámit; jde zejména o vzorec pro vzdálenost bodů $[x_1, y_1, z_1]$, $[x_2, y_2, z_2]$

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Musíme ovšem zdůraznit, že platí — obdobně jako vzorec pro délku tělesové úhlopříčky kvádru, z něhož vlastně vznikl — jen v soustavě ortonormálních souřadnic. Dále musíme zdůraznit, že vzorec platí, ať jsou čísla x_i, y_i, z_i jakákoli — nezáporná či záporná; to je jeho hlavní přednost.

Protože mezi přípravnými úlohami není obdobná úloha stereometrická, bylo by vhodné rozřešit si nejprve tuto ÚLOHU:

Jsou dány dva různé body A, B ; máme vyšetřit množinu všech bodů X v prostoru, pro které platí $AX^2 + BX^2 = k$, kde k je kladná konstanta.

Označíme M střed úsečky AB a dokážeme, že MX je konstantní; je třeba diskutovat řešení vzhledem k parametrům k , AB . Za určitých předpokladů je hledanou množinou kulová plocha.

Složitější je úloha, kde jsou dány tři nekolineární body A , B , C a vyšetřuje se množina všech bodů X v prostoru, pro něž platí $AX^2 + BX^2 + CX^2 = k$, kde k je kladná konstanta. Výsledkem je za určitých předpokladů opět kulová plocha, jejímž středem je těžiště trojúhelníka ABC .

Kdežto při řešení první úlohy se vystačí „s planimetrickými výpočty“, při druhé úloze se neobejdeme bez souřadnic.

IV. Soutěžní úlohy II. kola

1. KATEGORIE A

A-II-1a

V množině všech celých kladných čísel jsou zavedeny dvě operace: $x \sqcap y$ je největší společný dělitel čísel x, y ; $x \sqcup y$ je nejmenší společný násobek čísel x, y .

1. Dokažte, že každá z operací $\sqcap, \sqcup$ je komutativní a asociativní.
2. Dokažte, že každá z operací $\sqcap, \sqcup$ je distributivní vzhledem k operaci zbývající.
3. Najděte všechna celá kladná čísla x , pro která platí

$$x \sqcap (a \sqcup x) = b \sqcup (b \sqcap x);$$

přitom a, b jsou daná celá kladná čísla.

(6 bodů)

ŘEŠENÍ. 1. Budiž $x = p_1^{\kappa_1} \dots p_n^{\kappa_n}, y = p_1^{\lambda_1} \dots p_n^{\lambda_n}, z = p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n}$ kde $p_1, \dots, p_n$ jsou všechna prvočísla, která se vyskytují v rozkladu aspoň jednoho z čísel x, y, z (exponenty $\kappa_i, \lambda_i, \nu_i$ jsou nezáporná čísla celá).

V rozkladu čísel $x \sqcap y$ a $y \sqcap x$ jsou i -tí součinitelé $p_i^{\min(\kappa_i, \lambda_i)}, p_i^{\min(\lambda_i, \kappa_i)}$; je tedy $x \sqcap y = y \sqcap x$ a komutativita operace $\sqcap$ je prokázána. Obdobně tomu je u ope-

race $\sqcup$; zde je i -tý součinitel rozkladu čísel $x \sqcup y$ i $y \sqcup x$ číslo $p_i^{\max(\kappa_i, \lambda_i)}$.

Asociativita obou operací se prokáže tak, že i -tý součinitel v rozkladu $x \sqcap (y \sqcap z)$ i $(x \sqcap y) \sqcap z$ je $p_i^{\min(\kappa_i, \lambda_i, \nu_i)}$, i -tý součinitel v rozkladu $x \sqcup (y \sqcup z)$ i $(x \sqcup y) \sqcup z$ je $p_i^{\max(\kappa_i, \lambda_i, \nu_i)}$.

2. Důkaz distributivity: i -tý součinitel v rozkladu čísla $(x \sqcap y) \sqcup z$ je

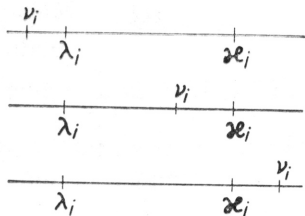
$$p_i^{\max((\min \kappa_i, \lambda_i), \nu_i)} \quad (1)$$

v rozkladu čísla $(x \sqcup z) \sqcap (y \sqcup z)$ je

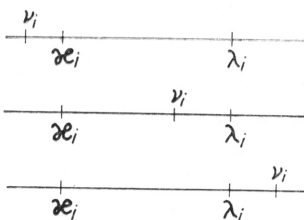
$$p_i^{\min(\max(\kappa_i, \nu_i), \max(\lambda_i, \nu_i))}. \quad (2)$$

Rovnost exponentů (1), (2) dokážeme např. pomocí číselné osy; je celkem 6 možností (obr. 50).

$$\kappa_i \geq \lambda_i$$



$$\kappa_i < \lambda_i$$



Obr. 50

Obdobně se dokáže *distributivita* operace $\sqcap$ vzhledem k $\sqcup$.

3. Řešení rovnice

$$x \sqcap (a \sqcup x) = b \sqcup (b \sqcap x). \quad (3)$$

Operace $\sqcap$ je distributivní vzhledem k operaci $\sqcup$, a proto

$$x \sqcap (a \sqcup x) = (x \sqcap a) \sqcup (x \sqcap x) .$$

Protože je $x \sqcap x = x$ a číslo $x \sqcap a$ dělí x , je

$$x \sqcap (a \sqcup x) = x . \quad (4)$$

Dále je podle (4) při nahrazení $x \mapsto b$, $a \mapsto x$

$$b \sqcup (b \sqcap x) = (b \sqcup b) \sqcap (b \sqcup x) = b \sqcap (x \sqcup b) = b . \quad (5)$$

Spojením (4), (5) dostaneme jediný možný kořen (3)

$$x = b .$$

ZKOUŠKA potvrdí, že b je opravdu kořenem rovnice (3).

A-II-1b

Je dán pravidelný čtyřstěn o hraně délky h a přímka p . Označme A, B, C, D pravoúhlé průměty vrcholů daného čtyřstěnu na přímku p . Dokažte, že platí

$$AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 2h^2 . \quad (6 \text{ bodů})$$

ŘEŠENÍ (podle PAVLA FERSTA ze třídy 3. d gymnasia na Sladkovského nám. v Praze 3).

Zvolíme ortonormální souřadný systém tak, aby vrcholy daného čtyřstěnu A', B', C', D' měly souřadnice

$$A' = [0, 0, 0], \quad B' = [a, a, 0], \quad C' = [a, 0, a], \\ D' = [0, a, a] ,$$

kde $a = \frac{1}{2} h \sqrt{2}$. Na přímce p pak zvolíme jednotkový vektor $\mathbf{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

Obecně platí, že velikost pravoúhlého průmětu libovolné úsečky XY na přímku p je rovna absolutní hodnotě skalárního součinu vektoru $\overrightarrow{XY}$ s vektorem $\mathbf{v}$.

V našem případě tedy máme

$$\begin{aligned}
 & AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = \\
 & = (\overrightarrow{A'B'} \cdot \mathbf{v})^2 + (\overrightarrow{A'C'} \cdot \mathbf{v})^2 + \dots + (\overrightarrow{C'D'} \cdot \mathbf{v})^2 = \\
 & = a^2[(\alpha + \beta)^2 + (\alpha + \gamma)^2 + (\beta + \gamma)^2 + (\gamma - \beta)^2 + \\
 & \quad + (\gamma - \alpha)^2 + (\beta - \alpha)^2] = \\
 & = a^2[\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 + 2\alpha\gamma + \gamma^2 + \beta^2 + 2\beta\gamma + \\
 & \quad + \gamma^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta + \\
 & \quad + \alpha^2] = 4a^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 4a^2 = \frac{4 \cdot h^2 \cdot 2}{4} = 2h^2,
 \end{aligned}$$

což jsme měli dokázat.

A—II—2a

Je dáno přirozené číslo a ; vypočtete součet

$$\sum_{k=1}^{1973} \left[\frac{k}{a} \right].$$

Poznámka. Pro každé reálné x značí $[x]$ jeho celou část, tj. celé číslo, pro které platí $[x] \leq x < [x] + 1$.

(6 bodů)

ŘEŠENÍ. Platí

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{a-1} \left[\frac{k}{a} \right] &= 0, & \sum_{k=a}^{2a-1} \left[\frac{k}{a} \right] &= a, \\
 \sum_{k=2a}^{3a-1} \left[\frac{k}{a} \right] &= 2a, \dots,
 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=a\left[\frac{n}{a}\right]-a}^{a\left[\frac{n}{a}\right]-1} \left[\frac{k}{a}\right] = a \left(\left[\frac{n}{a}\right] - 1 \right),$$

$$\sum_{k=a\left[\frac{n}{a}\right]}^n \left[\frac{k}{a}\right] = m \left[\frac{n}{a}\right],$$

kde m je počet přirozených čísel ne větších než n , která mají přidělení číslem a celou část rovnou $\left[\frac{n}{a}\right]$; platí $m = n - a\left[\frac{n}{a}\right] + 1$.

Dostáváme tedy:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left[\frac{k}{a}\right] &= a \left\{ 1 + 2 + \dots + \left(\left[\frac{n}{a}\right] - 1 \right) \right\} + m \left[\frac{n}{a}\right] = \\ &= \frac{a}{2} \left(\left[\frac{n}{a}\right] - 1 \right) \left[\frac{n}{a}\right] + \left[\frac{n}{a}\right] \left(n - a\left[\frac{n}{a}\right] + 1 \right) = \\ &= \left[\frac{n}{a}\right] \left\{ n + 1 - \frac{a}{2} \left(\left[\frac{n}{a}\right] + 1 \right) \right\}. \end{aligned}$$

Pro $n = 1973$ odtud dostáváme součet žádaný úlohou.

$$\boxed{\text{A-II-2b}}$$

Buďte A_0, A_1, A_2, A_3 čtyři po sobě bezprostředně ná-

sledující vrcholy pravidelného sedmiúhelníka. Pak platí

$$\frac{1}{A_0A_1} = \frac{1}{A_0A_2} + \frac{1}{A_0A_3};$$

dokažte.

(6 bodů)

Obr. 51

ŘEŠENÍ. Označme ε komplexní jednotku s argumentem $\frac{\pi}{7}$. Pak

lze zvolit soustavu or-tonormálních souřadnic tak, že vrcholy A_0, A_1, A_2, A_3 jsou po řadě obrazy komplexních čísel $1, \varepsilon^2, \varepsilon^4, \varepsilon^6$

$$\begin{aligned} (\sphericalangle A_0SA_1 &= \\ &= \sphericalangle A_1SA_2 = \\ &= \sphericalangle A_2SA_3 = \frac{2\pi}{7}; \end{aligned}$$

přitom S je střed kružnice opsané danému sedmiúhelníku). Situace je znázorněna na obr. 51. Protože podle věty o obvodových úhlech

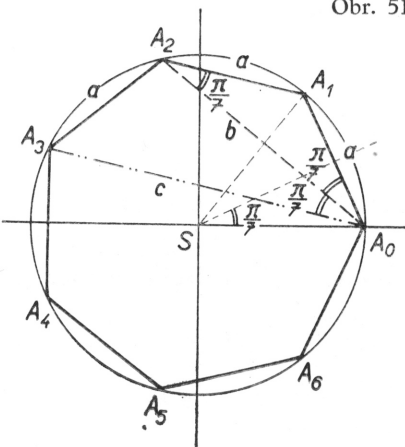
$$\sphericalangle A_1A_0A_2 = \sphericalangle A_2A_0A_3 = \frac{\pi}{7},$$

převěde otočení kolem středu A_0 o úhel $\frac{\pi}{7}$ polopřímky $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}$ po řadě

v polopřímky $\overrightarrow{A_0A_2}, \overrightarrow{A_0A_3}$. Je tedy při označení z obr. 51

$$\varepsilon^4 - 1 = \frac{b}{a} \varepsilon (\varepsilon^2 - 1), \quad (1)$$

$$\varepsilon^6 - 1 = \frac{c}{a} \varepsilon^2 (\varepsilon^2 - 1).$$



Tyto rovnice vyplývají z posunutí soustavy souřadnic, které převede souřadnice bodů A_0, A_1, A_2, A_3 po řadě v čísla $0, \varepsilon^2 - 1, \varepsilon^4 - 1, \varepsilon^6 - 1$. Číslo ε je (primitivním) kořenem rovnice $\varepsilon^7 = -1$ neboli $\varepsilon^7 + 1 = 0$; platí tedy

$$\varepsilon^6 - \varepsilon^5 + \varepsilon^4 - \varepsilon^3 + \varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0. \quad (2)$$

Z rovnice (1) plyne (je totiž $\varepsilon^2 \neq 1$)

$$\varepsilon^2 + 1 = \frac{b}{a} \varepsilon, \quad (3)$$

$$\varepsilon^4 + \varepsilon^2 + 1 = \frac{c}{a} \varepsilon^2.$$

Rovnici (2) upravíme na tvar

$$\varepsilon^6 + (1 - \varepsilon)(\varepsilon^4 + \varepsilon^2 + 1) = 0,$$

kam dosadíme z druhé rovnice (3). Po úpravě vyjde

$$\varepsilon^4 + (1 - \varepsilon) \frac{c}{a} = 0. \quad (4)$$

Vyloučíme-li ε^4 z druhé rovnice (3) a z (4), dostaneme po úpravě

$$\varepsilon^2 - \frac{c}{c - a} \varepsilon + 1 = 0. \quad (5)$$

Vyloučíme dále ε^2 z rovnice (5) a z první rovnice (3); vyjde

$$\left(\frac{c}{c - a} - \frac{b}{a} \right) \varepsilon = 0$$

a odtud $ac + ab = bc$, což je dokazovaná rovnost.

JINÉ ŘEŠENÍ (podle MILENY ŠÍDLOVÉ ze třídy 3.a gymnasia v ulici Nad štolou v Praze 7). Rovnost

$$\frac{1}{A_0 A_1} = \frac{1}{A_0 A_2} + \frac{1}{A_0 A_3} \quad (1)$$

platí, právě když

$$\frac{A_0 A_1}{A_0 A_2} + \frac{A_0 A_1}{A_0 A_3} = 1. \quad (2)$$

Zřejmě je

$$A_0 A_2 = A_3 A_5 \text{ a } A_0 A_1 = A_1 A_2,$$

takže (2), a tedy také (1), platí, právě když

$$\frac{A_0 A_1}{A_3 A_5} + \frac{A_1 A_2}{A_0 A_3} = 1. \quad (3)$$

Vektory $\overrightarrow{A_0 A_1}$ a $\overrightarrow{A_5 A_3}$ jsou souhlasně orientovány, neboť $A_0 A_1 \parallel A_5 A_3$ a body A_1 a A_3 leží v téže polorovině určené přímkou $A_0 A_5$. Tudíž

$$\overrightarrow{A_0 A_1} = \frac{A_0 A_1}{A_3 A_5} \cdot \overrightarrow{A_5 A_3}. \quad (4)$$

Podobně zjistíme, že

$$\overrightarrow{A_1 A_2} = \frac{A_1 A_2}{A_0 A_3} \cdot \overrightarrow{A_0 A_3}. \quad (5)$$

Jak známo, v rovině daného sedmiúhelníka lze zvolit ortonormální soustavu souřadnic tak, že existuje taková komplexní jednotka z , že vrcholy $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ jsou po řadě obrazy komplexních jednotek $z^0 = 1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6$. Potom z rovností (4) a (5) vyplývá

$$z - 1 = \frac{A_0 A_1}{A_3 A_5} \cdot (z^3 - z^5), \quad (6)$$

$$z^2 - z = \frac{A_1 A_2}{A_0 A_3} \cdot (z^3 - 1). \quad (7)$$

Z rovností (6) a (7) dostáváme

$$\frac{A_0 A_1}{A_3 A_5} + \frac{A_1 A_2}{A_0 A_3} = \frac{z - 1}{z^3 - z^5} + \frac{z^2 - z}{z^3 - 1} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(z-1)(z^3-1) + (z^2-z)(z^3-z^5)}{(z^3-z^5) \cdot (z^3-1)} = \\
&= \frac{z^4 - z^3 - z + 1 + z^5 - z^4 - z^7 + z^6}{z^6 - z^8 - z^3 + z^5} = 1,
\end{aligned}$$

neboť $z^7 = 1$ a $z^8 = z$. Platí tedy rovnost (3), a tedy také rovnost (1), kterou jsme měli dokázat.

ĎALŠIE RIEŠENIE. Nech pravidelný sedemuholník je vpísaný do kružnice s polomerom r (pozri obr. 51). Pre dĺžky úsečiek A_0A_1 , A_0A_2 , A_0A_3 zrejme platí:

$$A_0A_1 = 2r \sin \frac{\pi}{7}, \quad A_0A_2 = 2r \sin \frac{2\pi}{7}, \quad (1)$$

$$A_0A_3 = 2r \sin \frac{3\pi}{7}.$$

Zo základných vlastností funkcie sínus vyplýva

$$\sin \frac{4\pi}{7} = \sin \frac{3\pi}{7}. \quad (2)$$

Z rovnosti (2) po vynásobení číslom $\sin \frac{2\pi}{7} \neq 0$ a použití

vzorca pre sínus dvojnásobného uhla dostaneme:

$$\sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7} = 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7},$$

z čoho podľa vzorca pre súčet hodnôt funkcie sínus ďalej máme

$$\sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7} = \sin \frac{\pi}{7} \left(\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} \right). \quad (3)$$

Z (3) po využití (2) dostávame

$$\sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7} = \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7},$$

z čoho po vynásobení číslom $\left(2r \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7}\right)^{-1} \neq$

$\neq 0$ vzhľadom na (1) dostaneme

$$\frac{1}{A_0 A_1} = \frac{1}{A_0 A_2} + \frac{1}{A_0 A_3},$$

čo bolo treba dokázať.

Riešil JOZEF ŠIRÁŇ, 3.b tr.
Gymn. Bratislava, Novohradská ul.

A-II-3a

Nech $\mathbf{N}_0$ znamená množinu všetkých nezáporných celých čísel. Označme $\mathbf{A} = \{x; x = x_1^2 + x_2^2, x_1, x_2 \in \mathbf{N}_0\}$, $\mathbf{A}_t = \{tx; x \in \mathbf{A}\}$, kde $t \in \mathbf{N}_0$, $\mathbf{B} = \{t; \mathbf{A}_t \subset \mathbf{A}\}$. Dokážte, že $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. (7 bodov)

RIEŠENIE. Dokážeme najskôr, že $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$. Nech $t \in \mathbf{A}$, tj.

$t = t_1^2 + t_2^2$, $t_1, t_2 \in \mathbf{N}_0$. Potom pre každé $x \in \mathbf{A}$ je
 $tx = (t_1^2 + t_2^2)(x_1^2 + x_2^2) = (t_1 x_1 + t_2 x_2)^2 + (t_1 x_2 - t_2 x_1)^2 =$
 $= z_1^2 + z_2^2$, kde $z_1, z_2 \in \mathbf{N}_0$. Teda $tx \in \mathbf{A}$, čo znamená, že

$$\mathbf{A}_t \subset \mathbf{A} \text{ čiže } t \in \mathbf{B}.$$

Nech teraz $t \in \mathbf{B}$, tj. $\mathbf{A}_t \subset \mathbf{A}$. Keďže $1 = 0^2 + 1^2 \in \mathbf{A}$, vyplýva z toho, že tiež $t \cdot 1 = t \in \mathbf{A}_t$. Platí preto aj inklúzia $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ a tým je rovnosť $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ dokázaná.

V kruhu o poloměru 1 leží konvexní mnohoúhelník. Dokažte, že v tomto mnohoúhelníku existuje takový bod, který má od všech jeho ostatních bodů vzdálenost menší nebo rovnu jedné.

(7 bodů)

ŘEŠENÍ. Jestliže střed kružnice S leží v mnohoúhelníku $\mathbf{M}$, je S hledaný bod a důkaz je hotov. Nechť tedy S neleží v $\mathbf{M}$. Pak existuje v $\mathbf{M}$ takový bod T , který má od S mezi všemi body $\mathbf{M}$ nejmenší vzdálenost. Dokážeme, že T má požadovanou vlastnost. Budiž A libovolný bod $\mathbf{M}$, nejprve takový, že neleží na přímce ST . Trojúhelník STA má úhel u T pravý nebo tupý. Kdyby totiž byl ostrý, byly by některé body strany TA , která celá leží v $\mathbf{M}$, blíže k S než bod T , což odporuje definici T . Je proto $TA < SA \leq \leq 1$. Budiž nyní $B \neq T$ bod z $\mathbf{M}$, ležící na přímce ST . B neleží mezi S a T , protože by byl blíže k S než T . S neleží mezi B a T , protože podle konvexity by bylo S v $\mathbf{M}$ proti předpokladu. Je tedy T mezi S a B , a B je blíže k T než k S , $TB < SB \leq 1$.

2. KATEGORIE B

V oboru všech přirozených čísel zavedme operaci $\ast$ takto:

a) $\forall x : x \ast 1 = 1 \ast x = 1$;

b) je-li $x > 1$ a $y > 1$ a jsou-li $x = p_1 \dots p_\lambda$,

$y = q_1 \dots q_\mu$ vyjádření čísel x, y jako součinů prvo-

činitelů, pak definujeme $x \times y$ jako součin všech součtů $p_i + q_k$ ($i = 1, \dots, \lambda, k = 1, \dots, \mu$).

Dokažte, že operace $\times$ je distributivní vzhledem k násobení a uveďte číselné příklady.

(5 bodů)

ŘEŠENÍ. Budiž $z = r_1 \dots r_\nu$ vyjádření čísla z jako součinu prvočinitelů; pak je $(xy) \times z$ součin všech součtů $p_i + r_j$ a $q_k + r_j$ ($i = 1, \dots, \lambda, k = 1, \dots, \mu, j = 1, \dots, \nu$), neboť $xy = p_1 \dots p_\lambda \cdot q_1 \dots q_\mu$ je vyjádření čísla xy jako součinu prvočinitelů. Tentýž výsledek dá $(x \times z) \cdot (y \times z)$, neboť první činitel je součin všech součtů $p_i + r_j$, druhý je součin všech součtů $q_k + r_j$. Snadno se přesvědčíme, že podle a) je

$$(xy) \times z = (x \times z) \cdot (y \times z) \quad (1)$$

i v tom případě, když některé z čísel x, y, z je rovno 1.

ČÍSELNÉ PŘÍKLADY:

I. $x = 12, y = 15, z = 8; x = 2^2 \cdot 3, y = 3 \cdot 5, z = 2^3$.

Je $xy = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180; (xy) \times z = (2 + 2)^3 \cdot (2 + 2)^3 \cdot (3 + 2)^3 \cdot (3 + 2)^3 \cdot (5 + 2)^3 = 4^6 \cdot 5^6 \cdot 7^3 = 2^{12} \cdot 5^6 \cdot 7^3$; dále je $x \times z = (2 + 2)^3 \cdot (2 + 2)^3 \cdot (3 + 2)^3 = 4^6 \cdot 5^3 = 2^{12} \cdot 5^3, y \times z = (3 + 2)^3 \cdot (5 + 2)^3 = 5^3 \cdot 7^3$. Platí tedy skutečně (1).

II. $x = 18, y = 1, z = 25; x = 2 \cdot 3^2, z = 5^2$.

Je $(xy) \times z = (2 \cdot 3^2) \times 5^2 = (2 + 5)^2 \cdot (3 + 5)^4 = 7^2 \cdot 8^4 = 7^2 \cdot 2^{12}$; dále je $x \times z = (2 \cdot 3^2) \times 5^2 = (2 + 5)^2 \cdot (3 + 5)^4, y \times z = 1 \times 5^2 = 1$. Platí tedy skutečně (1).

B-II-1b

Do kružnice o středu S je vepsán konvexní čtyřúhelník

$ABCD$ tak, že S neleží uvnitř něho. Potom čtyřúhelník $ABCD$ má jedinou stranu maximální délky; dokažte.

(5 bodů)

ŘEŠENÍ. Jestliže S leží na některé straně čtyřúhelníka $ABCD$, je tato strana průměrem kružnice, všechny ostatní strany jsou pak nutně kratší.

Jestliže S leží vně čtyřúhelníka $ABCD$, pak mezi čtyřmi přímkami AB , BC , CD , DA existuje jedna, která odděluje S od ostatních dvou vrcholů čtyřúhelníka; zvolme označení tak, aby přímka AB měla tuto vlastnost. Ukážeme, že je pak nutně $AB > BC$, $AB > CD$, $AB > DA$. Skutečně, body C , D leží oba na kratším z obou oblouků AB a úsečka AB je nejdelší možnou tětivou s koncovými body na tomto oblouku. Tětiny AD , CD , BC jsou nutně kratší, neboť body A , B , C , D jsou vesměs různé (jsou to vrcholy konvexního čtyřúhelníka).

B-II-2a

Nájdite všetky dvojice celých čísel x, y , ktoré spĺňajú nerovnosť:

$$3(x^2 - 2) + (y - 1)^2 \leq 6.$$

Výsledok riešenia znázornite v pravouhlom súradnicovom systéme.

(6 bodov)

RIEŠENIE. Danú nerovnosť $3(x^2 - 2) + (y - 1)^2 \leq 6$ upravme na tvar $3x^2 + (y - 1)^2 \leq 12$ a odtiaľ je:

$$|y - 1| \leq \sqrt{3(4 - x^2)}.$$

Definičným oborom danej nerovnosti sú zrejme x , pre ktoré je $4 - x^2 \geq 0$. Tu vyhovujú tie x , pre ktoré je $|x| \leq 2$.

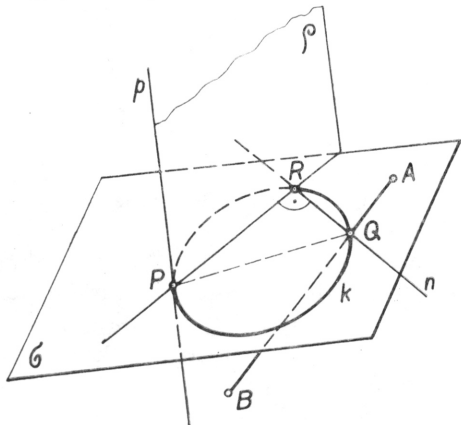
a dále zvolme libovolnou rovinu π , v níž leží přímka p , a označme X patu kolmice vedené bodem Q k rovině π .

Nalezněte množinu všech bodů X , když bod Q probíhá úsečkou AB a když zároveň rovina π probíhá svazkem rovin, jehož osou je přímka p . Diskuse.

(6 bodů)

ŘEŠENÍ. A. Zvolíme na úsečce AB libovolný bod Q . Pak mohou nastat dva případy:

(a) Necht' $Q \notin p$. Zvolme rovinu ϱ patřící do svazku rovin o ose p (obr. 53). Vedme bodem Q kolmici n k ro-



Obr. 53

vině ϱ ; patu této kolmice označme R . Necht' $R \notin p$, $R \neq Q$. Přímka p leží v rovině ϱ , a proto $n \perp p$. Tedy kolmice n leží v rovině σ , která prochází bodem Q a je kolmá k přímce p . Označme P průsečík roviny σ a přímky p . Pak $\angle PRQ = 90^\circ$. Odtud podle Thaletovy věty vyplývá, že každá pata R kolmice n vedené bodem Q k některé z rovin svazku rovin o ose p leží na kružnici k , která leží v rovině σ a jejímž průměrem je úsečka PQ .

Obráceně, je-li R libovolný bod kružnice k , pak mohou nastat tři případy:

1. Je-li $R = P$, pak příslušnou rovinou svazku s osou p , na níž je přímka $RQ = PQ$ kolmá, je ta rovina tohoto svazku, jejíž průsečnice s rovinou σ je tečnou kružnice k v bodě P .

2. Je-li $R = Q$, pak příslušnou rovinou svazku s osou p je rovina pQ , a kolmicí k ní, která má patu $R = Q$, je tečna ke kružnici k v bodě Q .

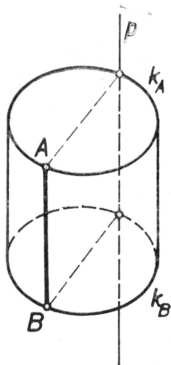
3. Je-li $R \neq P$ a $R \neq Q$, pak příslušnou rovinou svazku s osou p je rovina pR , a QR je zřejmě kolmicí na tuto rovinu, neboť $p \perp \sigma$ a $\sphericalangle QRP = 90^\circ$.

V případě, že $Q \notin p$, je tedy množinou všech pat všech kolmic k rovinám svazku rovin o ose p , které procházejí bodem Q , výše popsaná kružnice k .

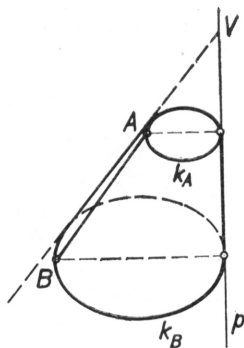
(b) Je-li $Q \in p$, tj. jestliže Q je průsečíkem přímek AB a p , pak množinou všech pat X všech kolmic k rovinám svazku rovin o ose p , které procházejí bodem Q , je zřejmě množina $\{Q\}$.

B. Na základě části A. můžeme vyřešit naši úlohu. Přímka AB není kolmá k přímce p , a proto body A a B neleží v téže rovině kolmé k přímce p . V případě, že $A \notin p$ ($B \notin p$), označme k_A (k_B) množinu všech pat všech kolmic na roviny svazku o ose p , jež přísluší k bodu A (B). Při řešení naší úlohy může nastat právě osm případů. Na obr. 54 až 57 jsou základní čtyři případy, další dva obdržíme záměnou bodů A a B na obr. 55 a 56, dále situace na obr. 57 může být tří typů podle toho, zda kružnice k_A a k_B mají tentýž poloměr nebo zda poloměr kružnice k_A je větší (menší) než poloměr kružnice k_B . Hledanou množinou je vždy plášť P těles na těchto obrázcích. Vyplývá to z následujících dvou vlastností pláště P každého z těles na obr. 54, 55, 56 a 57.

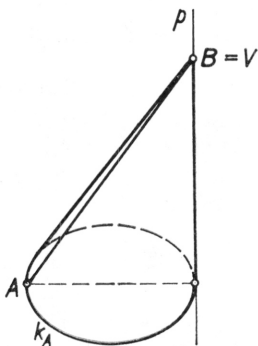
1. Každá rovina σ kolmá k přímce p a procházející bodem Q ležícím na úsečce AB protíná plášť P v kružnici



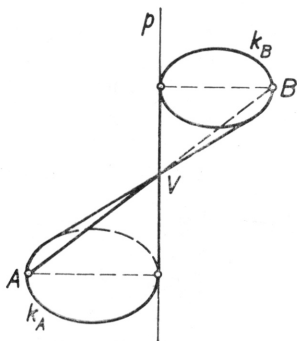
Obr. 54



Obr. 55



Obr. 56



Obr. 57

k , resp. v bodě Q , když $Q \in p$. Je-li P průsečíkem přímky p a roviny σ , pak úsečka PQ je průměrem kružnice k .

2. Každý bod $R \in \mathbf{P}$ buď leží na p , nebo leží aspoň na jedné kružnici k , která leží v rovině σ , jež je kolmá k p ,

přičemž pro k platí: Označíme-li P průsečík přímky p a roviny σ a Q průsečík úsečky AB a roviny σ , pak PQ je průměrem kružnice k .

Tyto vlastnosti vyplývají v případě válce na obr. 54 z vlastností rovnoběžného posunutí kružnice k_A ve směru přímky p , v případě těles na obr. 55 až 57 se k důkazu těchto vlastností užije stejnolehlosti o středu V , kde V je průsečík přímek p a AB .

B-II-3a

Pro každé reálné číslo y označme $R(y)$ počet řešení rovnice

$$[x] = xy - 1973. \quad (1)$$

Dokažte tato tvrzení:

- (i) je-li $y > 2$, je $1 \leq R(y) \leq 2$;
- (ii) je-li $0 < 1974y < 1$, je $R(y) = 0$;
- (iii) existuje y , pro které je $R(y) = 1973$.

(7 bodů)

ŘEŠENÍ. Při daném reálném y hledejme řešení rovnice (1). Podle definice celé části $[.]$ je rovnice (1) ekvivalentní nerovností (současně platným)

$$xy - 1973 \leq x < xy - 1972. \quad (2)$$

Přitom je z (1) vidět, že xy musí být celé číslo.

Je-li $y > 1$, tj. $y - 1 > 0$, dostaneme ze (2) přímým výpočtem nerovnosti

$$\frac{1972}{y-1} < x \leq \frac{1973}{y-1},$$

tj.

$$1972 \frac{y}{y-1} < xy \leq 1973 \frac{y}{y-1}. \quad (3)$$

Při $y > 1$ je $\frac{y}{y-1} > 1$, takže v mezích daných nerovnostmi (3) leží vždy alespoň jedno celé číslo xy ; pro $y > 1$ je tedy $R(y) \geq 1$.

Je-li $y > 2$, je $\frac{y}{y-1} < 2$, takže v mezích daných nerovnostmi (3) leží vždy nejvýše dvě celá čísla; pro $y > 2$ platí tedy $R(y) \leq 2$.

Tím je dokázáno tvrzení (i).

Je-li $0 < 1974y < 1$, je ovšem také $0 < y < 1$, tedy $y - 1 < 0$. Z nerovností (2) dostaneme obdobně nerovnosti

$$1972 \frac{y}{1-y} < -xy \leq 1973 \frac{y}{1-y}. \quad (4)$$

Jestliže je $0 < 1974y < 1$, potom

$$0 < \frac{y}{1-y} < \frac{1}{1973};$$

podle (4) má být

$$0 < 1972 \frac{y}{1-y} < -xy \leq 1973 \frac{y}{1-y} < 1.$$

Je zřejmé, že žádné takové celé číslo xy neexistuje, tj. $R(y) = 0$ — platí tvrzení (ii).

Poněvadž xy má být celé číslo, jsou nerovnosti (3) ekvivalentní nerovnostem

$$\left[1972 \frac{y}{y-1} \right] + 1 \leq xy \leq \left[1973 \frac{y}{y-1} \right]. \quad (5)$$

Při $y > 1$ je tedy

$$R(y) = \left[1973 \frac{y}{y-1} \right] - \left[1972 \frac{y}{y-1} \right]. \quad (6)$$

Položíme speciálně $y = \frac{1973}{1972} > 1$. Je pak

$$\frac{y}{y-1} = 1973$$

a podle (6) je

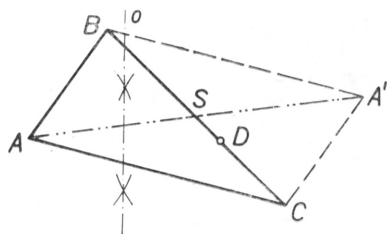
$$\begin{aligned} R(y) &= [1973 \cdot 1973] - [1973 \cdot 1972] = \\ &= 1973 (1973 - 1972) = 1973; \end{aligned}$$

platí tedy tvrzení (iii).

B-II-3b

V rovině sú dané dva rôzne body A a D . Nech ABC je ostrouhlý trojuholník tej vlastnosti, že úsečka BC obsahuje bod D . Nájdite geometrické miesta stredov strán BC všetkých takých trojuholníkov ABC .

(7 bodov).



Obr. 58a

ŘEŠENÍ. Je-li v takovém trojúhelníku ABC bod S středem strany BC (obr. 58a), pak

$$SB = SC < SA, \quad (1)$$

jak plyne z rovnoběžníku $ACA'B$, v němž úhel $\sphericalangle CAB$ je ostrý.

Je proto také

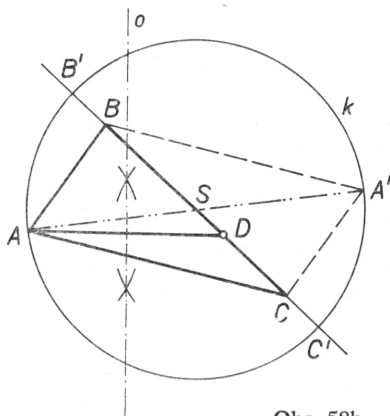
$$SD < SA, \quad (2)$$

neboť $SD \leq SB$.

Dále je zřejmé, že bod S může ležet na přímce AD jen tehdy, je-li $S = D$.

Tím jsme dokázali, že bod S leží v té otevřené polorovině vyřáté osou úsečky AD , která obsahuje bod D , a přitom na přímce AD leží jen v případě $S = D$.

Ukažme, že tím je popsána hledaná množina. Je-li $S \equiv D$, existuje zřejmě ostroúhlý trojúhelník ABC , pro který je bod D středem strany BC (např. rovnostranný). Necht' S je nyní bod uvedené poloroviny, neležící na



Obr. 58b

přímce AD . Pak přímka SD neprochází bodem A , a přitom $SD < SA$. Kružnice $k = (S; SA)$ tedy obsahuje bod D uvnitř a protíná přímku SD v bodech, které označíme B' a C' (obr. 58b).

Trojúhelník $AB'C'$ je pravoúhlý, s pravým úhlem u vrcholu A , bod D leží uvnitř strany $B'C'$ a S je středem $B'C'$. Zvolíme-li tedy na straně

$B'C'$ body B a C tak, že $BB' = CC'$ je dostatečně malé (aby trojúhelník ABC byl ostroúhlý, a aby úsečka BC obsahovala bod D) dostaneme trojúhelník vyhovující úloze.

ZÁVĚR. Hledaná množina se skládá z poloroviny vyřáté osou úsečky AD , z níž jsou vyřaty body na přímce AD , s výjimkou bodu D , který je ponechán.

3. KATEGÓRIA C

C-II-1a

V školskej kvízovej súťaži obsadili prvé štyri miesta Dušan, Milan, Tomáš a Václav. Pri hádke ich priateľov o poradí, v akom skončili, odznegli tvrdenie:

Cyril: Prvý bol Dušan, druhý Milan, tretí Tomáš, štvrtý Václav.

Emil: Vyhral Václav, Tomáš bol druhý, Dušan tretí, Milan štvrtý.

Ivan: Milan bol prvý, Tomáš druhý, Václav tretí, Dušan štvrtý.

Je pravda, že Tomáš nezvítazil. Z výrokov Emila a Ivana je pravdivý práve jeden, z Cyrilových výrokov ani jeden. Aké bolo teda skutočné poradie?

(5 bodov)

RIEŠENIE. Z uvedených údajov vyplýva hneď, že zvíťazil Václav alebo Milan a Tomáš obsadil buď druhé alebo štvrté miesto.

Predpokladajme, že zvíťazil Václav. Potom z toho, čo vieme o Emilových výrokov, vyplýva, že Tomáš nebol druhý. Musel preto obsadiť štvrté miesto. Druhé a tretie miesto zostáva pre Dušana a Milana. Z nepravdivosti Cyrilových tvrdení vychádza, že Dušan bol druhý a Milan tretí. Takto zistené poradie však nesúhlasí s tým, že práve jeden z Ivanových výrokov je pravdivý.

Z toho vyplýva, že prvý bol Milan. Keďže posledné tri výroky Ivana sú nepravdivé, musel byť Tomáš štvrtý. Pre Dušana a Václava nám zostáva druhé a tretie miesto. Václav však na základe nepravdivosti Ivanovho tretieho výroku nemohol byť tretí, čo znamená, že bol druhý

a tretie miesto Dušana potvrdzuje aj jediný Emilov pravdivý výrok.

Skutočné poradie teda bolo: Milan, Václav, Dušan, Tomáš.

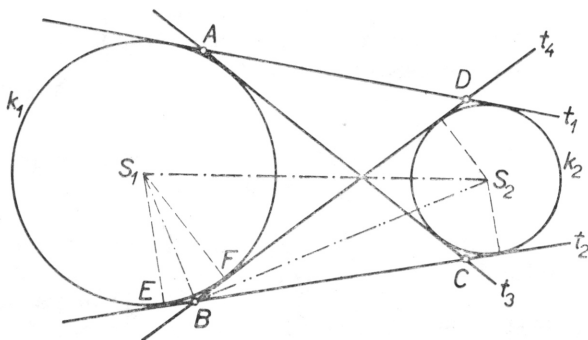
C-II-1b

Jsou dány dvě kružnice $k_1 = (S_1; r_1)$ a $k_2 = (S_2; r_2)$, pro něž platí $S_1 S_2 > r_1 + r_2$.

Narýsujte obrázek pro $r_1 = 3,5$ cm, $r_2 = 2$ cm a $S_1 S_2 = 9$ cm.

Označme A, B, C, D body, z nichž každý je průsečíkem jedné vnitřní a jedné vnější tečny daných kružnic.

Dokažte, že body A, B, C, D, S_1 a S_2 leží na téže kružnici. (5 bodů)



Obr. 59

ŘEŠENÍ. Jestliže existuje kružnice k procházející body A, B, C, D, S_1, S_2 , pak z osově souměrnosti dvojic bodů A, B a C, D podle přímky $S_1 S_2$ plyne, že její střed leží na přímce $S_1 S_2$. Kružnice k , pokud existuje, je tedy kružnicí opsanou nad průměrem $S_1 S_2$. Tvrzení obsažené v úloze tudíž bude dokázáno, jestliže dokážeme, že pro každý

průsečík X jedné vnější a jedné vnitřní tečny kružnic k_1, k_2 platí

$$\sphericalangle S_1XS_2 = 90^\circ.$$

Poslední tvrzení dokážeme např. pro průsečík B tečen t_4 a t_2 (obr. 59). Body E a F jsou po řadě body dotyku tečen t_2 a t_4 s kružnicí k_1 . Úhly EBF a FBC jsou vedlejší. Přímky S_1B a S_2B jsou zřejmě osy těchto dvou úhlů, a proto

$$\sphericalangle S_1BS_2 = 90^\circ.$$

C-II-2a

Podľa gregoriánskeho kalendára je priestupný každý rok, ktorého poradové číslo je deliteľné štyrmi s výnimkou posledného roku tých storočí, ktorých poradové čísla nie sú štyrmi deliteľné. 29. február 1972 pripadol na útorok.

a) Určte, na ktorý deň týždňa pripadol 29. február najzriedkavejšie od reformy kalendára roku 1582 do roku 1973.

b) Ako sa podelia o 29. február jednotlivé dni týždňa v rokoch 1973 až 2400, ak nedojde k reforme kalendára. (6 bodov)

RIEŠENIE. Kvôli zjednodušeniu zápisu riešenia nazvime 29. február dňom V a jednotlivé dni týždňa označme číslami takto: pondelok — 1, utorok — 2, streda — 3, štvrtok — 4, piatok — 5, sobota — 6, nedeľa — 7.

a) V priebehu storočia prejde od jedného dňa V po druhý 4 · 365 + 1 dní, tj. 208 týždňov a 5 dní. Deň V pripadá preto v priebehu storočia na jednotlivé dni týždňa v tomto poradí (zapíšeme si poradie posledných 8 priestupných rokov):

2, 7, 5, 3, 1, 6, 4, 2 .

Pri prechode zo storočia, ktorého poradové číslo nie je štyrmi deliteľné, do nasledujúceho storočia prejde od posledného dňa V jedného storočia do prvého dňa V nasledujúceho storočia $8 \cdot 365 + 1$ dní, tj. 417 týždňov a 2 dni.

V storočí, ktorého poradové číslo je deliteľné štyrmi je celkom 25 dní V , v ostatných storočiach je o jeden deň V menej.

Z vyššie uvedenej úvahy vyplýva, že poradie doterajších 18 dní V 20. storočia začína pondelkom, tj. číslom 1 a deň V pripadol na 1, 6, 4, 2 po trikrát, na 7, 5, 3 po dvakrát.

Postupnosť 24 dní V 19. storočia končila sobotou, tj. číslom 6 a začínala číslom 3 (streda), pričom sa v nej vyskytli 3, 1, 6 po štyri razy a 4, 2, 7, 5 po tri razy.

Postupnosť 24 dní V 18. storočia končila číslom 1, začínala číslom 5 a vyskytovali sa v nej štyri razy 5, 3, 1, po tri razy 6, 4, 2, 7.

V 17. storočí sa postupnosť 24 dní V končila číslom 3 a začínala zrejme číslom 7, pričom sa v nej vyskytuje 7, 5, 3 po štyri razy, 1, 6, 4, 2 po tri razy.

Zostáva nám ešte zistiť, na ktoré dni týždňa pripadol deň V od reformy kalendára roku 1582 do roku 1600. Bolo to celkom 5 dní V , ktoré za sebou nasledovali v tomto poradí: 3, 1, 6, 4, 2.

Zistené výsledky zapíšeme do tabuľky, ktorá udáva, koľko ráz pripadol deň V na jednotlivé dni týždňa od roku 1582 do roku 1973 (viz tabuľka str. 157).

Ako priamo z tabuľky vyplýva, najzriedkavejšie za uvedené obdobie pripadol 29. február na nedeľu.

b) Od roku 1973 do konca 20. storočia zostáva ešte 7 dní V , ktoré budú nasledovať v poradí: 7, 5, 3, 1, 6, 4, 2. Postupnosť dní V v 21. storočí začne teda opäť číslom 7 (nedeľa), ako tomu bolo v 17. storočí a za predpokladu, že nedojde k reforme kalendára, sa v rokoch 2001 –

Deň týždňa	16. stor.	17. stor.	18. stor.	19. stor.	20. stor.	Spolu
1-pondelok	1	3	4	4	3	15
2-utorok	1	3	3	3	3	13
3-streda	1	4	4	4	2	15
4-štvrtok	1	3	3	3	3	13
5-piatok	—	4	4	3	2	13
6-sobota	1	3	3	4	3	14
7-nedeľa	—	4	3	3	2	12

2400 bude presne opakovať situácia z rokov 1601—2000. Pri rozdelení dní V na jednotlivé dni týždňa dostaneme preto po odčítaní prvého stĺpca (16. stor.) a po pripočítaní jednotky v každom riadku (dni V do konca 20. storočia) tento výsledok:

pondelok	utorok	streda	štvrtok	piatok	sobota	nedeľa
15	13	15	13	14	14	13

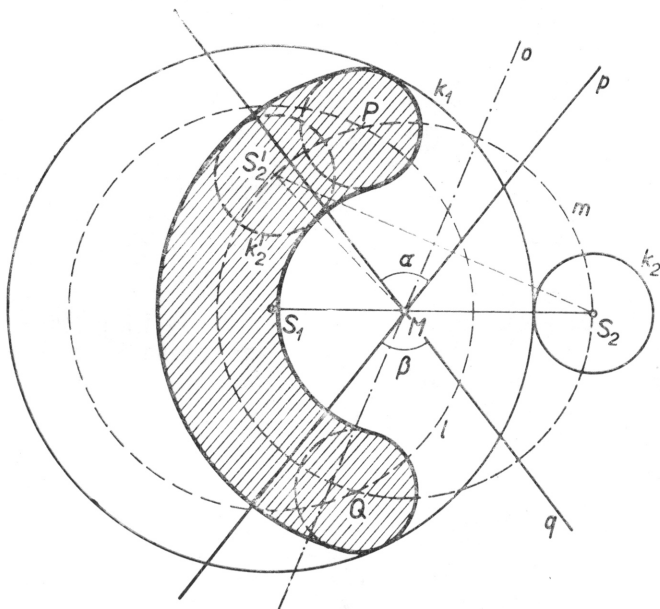
Jsou dány kruhy $K_1 = (S_1; 70 \text{ mm})$ a $K_2 = (S_2; 15 \text{ mm})$, přičemž $S_1S_2 = 85 \text{ mm}$. Dále je dán bod M takový, že $MS_1 = 35 \text{ mm}$, $MS_2 = 50 \text{ mm}$.

Bodem M vedme přímku o tak, aby kruh souměrně sdružený s K_2 podle o ležel v kruhu K_1 .

- Jakou část roviny vyplní všechny tyto přímky o ?
- Jakou část roviny vyplní všechny tyto kruhy?

(6 bodů)

ŘEŠENÍ. Sestrojíme jednu přímku o bodem M jako na obr. 60 a podle ní k S_2 souměrně sdružený bod S'_2 . Pak



Obr. 60

platí $MS_2 = MS'_2$. Proto všechny body souměrně sdružené k S_2 podle přímek svazku M leží na kružnici $m = (M, MS_2)$. Kruh K'_2 souměrně sdružený s K_2 podle přímky svazku M se bude v krajním případě dotýkat kružnice k_1 uvnitř; jeho střed pak leží na kružnici $l = (S_1; r_1 - r_2 = 55 \text{ mm})$. Vzhledem k vzájemné poloze kružnic m a l jsou takové body dva: P a Q na obr. 60. Osy úhlů $\sphericalangle S_2MP$ a $\sphericalangle S_2MQ$ jsou krajní případy os souměrnosti vedených bodem M , podle nichž přejde kruh K_2 v kruh ležící ještě v kruhu K_1 ; nazveme je pořadě p, q .

a) Přímký p, q jsou v našem případě různoběžné a vytvoří dvě dvojice vrcholových úhlů. Každá přímka svazku M , která patří úhlům α, β neobsahujícím kruh K_2 , je osou souměrnosti podle podmínek úlohy.

b) Kruhy souměrně sdružené s K_2 podle přímek ležících ve vrcholových úhlech α, β vyplní útvar, který je na obr. 60 vyšrafován; sestává z výseče mezikruží a dvou půlkruhů.

C-II-3a

Dokažte, že pro každé reálné $c > 2$ má rovnice

$$(1) \quad x = \left[\frac{1973 + x}{c} \right]$$

alespoň jedno a nejvýše dvě řešení.

(7 bodů)

ŘEŠENÍ. Má-li rovnice (1) řešení, musí být x celé číslo. Podle definice celé části musí pak platit nerovnosti

$$(2) \quad x \leq \frac{1973 + x}{c} < x + 1,$$

tj. zároveň

$$(c - 1)x \leq 1973$$

a

$$(c - 1)x > 1973 - c.$$

Celé číslo x musí tedy splňovat nerovnosti

$$(3) \quad \frac{1973 - c}{c - 1} < x \leq \frac{1973}{c - 1}.$$

Obráceně necht' x je celé číslo, které při daném $c > 2$ vyhovuje nerovnostem (3). Potom vyhovuje také nerovnostem (2), takže skutečně platí (1): toto číslo x je řešením rovnice (1).

Zbývá tedy jen zjistit, kolik celých čísel vyhovuje nerovnostem (3). Poněvadž $c > 2 > 1$, je

$$\left| \frac{1973}{c - 1} - \frac{1973 - c}{c - 1} \right| = \frac{c}{c - 1} > 1,$$

takže nutně aspoň jedno celé číslo leží v mezích udaných nerovnostmi (3). Na druhé straně je však při $c > 2$

$$\frac{c}{c - 1} < 2,$$

takže v těchto mezích leží nanejvýš dvě celá čísla. Rovnice (1) má tedy skutečně při libovolném $c > 2$ alespoň jedno a nejvýše dvě řešení.

C-II-3b

V rovině je dáno pět bodů A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 , z nichž žádné tři neleží v jedné přímce. Kolika způsoby je možno vybrat čtyři z nich tak, aby tvořily vrcholy konvexního čtyřúhelníka? Diskuse.

(7 bodů)

ŘEŠENÍ. Rozlišujeme tři případy. První je ten, že dané body jsou vrcholy konvexního pětiúhelníka. Pak vypuštěním kteréhokoli z nich dostáváme čtveřici, jež má požadovanou vlastnost. V tomto případě má úloha 5 řešení.

V druhém případě probereme situaci, v níž čtyři z daných bodů (řekněme A_1, A_2, A_3, A_4) jsou vrcholy konvexního čtyřúhelníka a zbývající (bod A_5) leží uvnitř čtyřúhelníka. Bod A_5 nemůže ležet ani na úhlopříčce A_1A_3 ani na A_2A_4 . Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že A_5 je uvnitř trojúhelníka A_1A_2B , kde B je průsečík A_1A_3 a A_2A_4 . Pak vypuštěním jednoho z bodů A_1, A_2 nebo A_5 vznikne požadovaná čtveřice. V tomto případě má úloha tři řešení.

Poslední případ vede k diskusi, že tři body (řekněme A_1, A_2, A_3) jsou vrcholy trojúhelníka, zbývající dva (body A_4, A_5) jsou uvnitř. Přímkou A_1A_4, A_2A_4, A_3A_4 rozdělí trojúhelník $A_1A_2A_3$ na šest trojúhelníků. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že A_5 leží uvnitř trojúhelníka A_1CA_4 , kde C je průsečíkem přímek A_1A_2 a A_3A_4 . Pak vypuštěním bodu A_2 ze základní pětice vznikne požadovaný konvexní čtyřúhelník. Zde existuje jen jediné řešení.

SHRNUTÍ. Úloha má buď 5, nebo 3, anebo 1 řešení podle toho, jak jsou dané body v rovině umístěny.

4. KATEGORIE Z

Z-II-1

Nalezněte nejmenší přirozené číslo x takové, aby každé z čísel $x, 616, 700, 924$ bylo dělitelem součinu ostatních tří.

ŘEŠENÍ. Necht' x je takové přirozené číslo, že každé z čísel x , 616, 700, 924 dělí součin zbývajících tří. Platí

$$\begin{aligned}616 &= 2^3 \cdot 7 \cdot 11, \\700 &= 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7, \\924 &= 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11.\end{aligned}\tag{1}$$

Z (1) plyne, že číslo 924 dělí součin $616 \cdot 700 \cdot x$, právě když existuje přirozené číslo a takové, že

$$x = 3a.\tag{2}$$

Dále podle (1) platí, že číslo 700 dělí součin $616 \cdot 924 \cdot x$, právě když

$$x = 5^2 \cdot b,\tag{3}$$

kde b je přirozené číslo.

Číslo 616 dělí součin $700 \cdot 924 \cdot x$, jak vyplývá z (1) pro každé přirozené číslo x .

Nejmenší přirozené číslo x vyhovující zároveň podmínkám (2) a (3) a dělicí přitom součin $616 \cdot 700 \cdot 924$ je zřejmě číslo

$$3 \cdot 5^2 = 75.$$

Z-II-2

Je dána úsečka AB a kružnice m opsaná kolem středu M úsečky AB poloměrem větším než je polovina úsečky AB . Necht' S je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC .

- a) Vyšetřete geometrické místo bodů S , když bod C probíhá kružnici m .
- b) Jaké bude toto geometrické místo, když poloměr kružnice m bude rovný polovině délky úsečky AB ?

ŘEŠENÍ. a) Středy kružnic, opsaných trojúhelníkům ABC musí ležet na ose o úsečky AB , která je společnou stranou všech uvažovaných trojúhelníků (obr. 61).



Je otázka, zda *obráceně* každý bod přímky *o* patří hledanému geometrickému místu, které nazveme **G**. Do **G** patří body S_1, S_2 , které jsou středy kružnic opsaných rovnoramenným trojúhelníkům ABC_1 a ABC_2 (kde C_1, C_2 jsou průsečíky *o* s *m*).

Každý bod X vnitřku úsečky S_1C_1 (popř. S_2C_2) je středem kružnice $x = (X; AX)$, která protne kružnici m ve dvou bodech (vzniknou tak do-

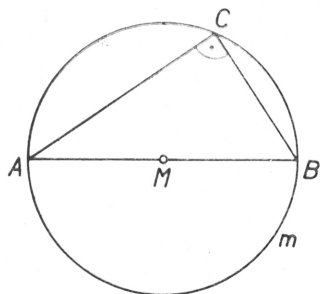
Proto bod X patří do $\mathbf{G}$. Také každý bod Y prodloužení úsečky S_1C_1 za bod C_1 (popř. S_2C_2 za bod C_2) patří do $\mathbf{G}$, neboť kružnice $y = (Y; AY)$ protne vždy kružnici m .

Naproti tomu bod M do $\mathbf{G}$ nepatrí, neboť kružnice $(M; MA)$ a m se neprotínou.

Je-li Z bod vnitřku úsečky MS_1 (popř. MS_2), pak z trojúhelníka AZS_1 plyne $AZ < AS_1$. Dále platí $AS_1 = S_1C_1$ a $S_1C_1 < ZC_1$. Proto je $AZ < ZC_1$, takže kružnice m a $z = (Z; AZ)$ se neprotínají. Bod Z do $\mathbf{G}$ tedy nepatří.

b) Je-li poloměr kružnice m roven $\frac{1}{2} AB$, splyne m

Obr. 62



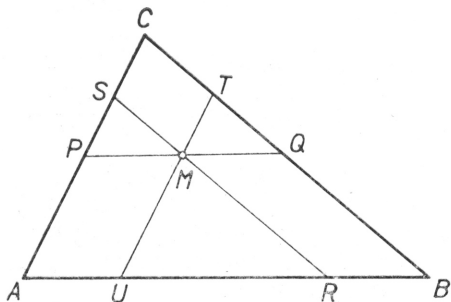
s kružnicí opsanou každému trojúhelníku ABC . Pak $\mathbf{G}$ obsahuje jediný bod — střed M kružnice m .

ZÁVĚR. V případě a) tvoří $\mathbf{G}$ dvě polopřímky S_1C_1 a S_2C_2 (viz obr. 61), v případě b) jediný bod M (viz obr. 62).

Z-II-3

Bod M leží uvnitř $\triangle ABC$ a je $PQ \parallel AB$, $RS \parallel BC$, $TU \parallel CA$ (viz obr. 63). Dokažte, že

$$\frac{PQ}{AB} + \frac{RS}{BC} + \frac{TU}{CA} = 2.$$



Obr. 63

ŘEŠENÍ. Z podobnosti trojúhelníků $\triangle ARS \sim \triangle ABC$ plyne

$$\frac{RS}{BC} = \frac{AR}{AB}. \quad (1)$$

Z podobnosti trojúhelníků $\triangle UBT \sim \triangle ABC$ plyne

$$\frac{UT}{AC} = \frac{UB}{AB}. \quad (2)$$

Podle (1) a (2) platí

$$\frac{PQ}{AB} + \frac{RS}{BC} + \frac{TU}{CA} = \frac{PQ + AR + UB}{AB}. \quad (3)$$

Čtyřúhelníky $AUMP$ a $RBQM$ jsou rovnoběžníky, a proto

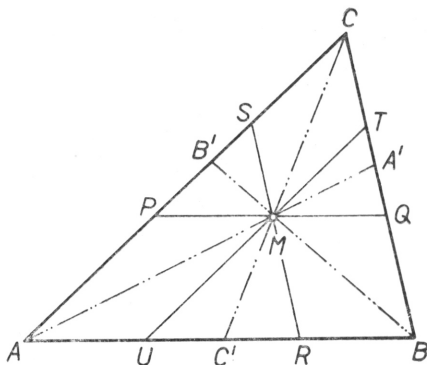
$$AU = PM \text{ a } RB = MQ,$$

tj.

$$PQ = PM + MQ = AU + RB. \quad (4)$$

Dosadíme-li podle (4) do (3), dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{PQ}{AB} + \frac{RS}{BC} + \frac{TU}{CA} &= \frac{(AU + RB) + AR + UB}{AB} = \\ &= \frac{(AU + UB) + (AR + RB)}{AB} = \frac{AB + AB}{AB} = 2, \text{ c. b. d. } \end{aligned}$$



Obr. 64

JINÉ ŘEŠENÍ. Označme po řadě A' , B' , C' průsečíky přímk AM , BM , CM (obr. 64) s protějšími stranami. Podle řešení úlohy Z-I-3 b) pak platí

$$\frac{AM}{AA'} + \frac{BM}{BB'} + \frac{CM}{CC'} = 2. \quad (*)$$

Z podobnosti $\triangle ARM \sim \triangle ABA'$ a $\triangle ARS \sim \triangle ABC$ dostáváme

$$\frac{AM}{AA'} = \frac{AR}{AB}, \quad \frac{AR}{AB} = \frac{RS}{BC},$$

takže

$$\frac{AM}{AA'} = \frac{RS}{BC}.$$

Podobně dokážeme, že

$$\frac{BM}{BB'} = \frac{TU}{CA}, \quad \frac{CM}{CC'} = \frac{PQ}{AB}.$$

Platí tedy

$$\frac{PQ}{AB} + \frac{RS}{BC} + \frac{TU}{CA} = \frac{CM}{CC'} + \frac{AM}{AA'} + \frac{BM}{BB'},$$

tj. podle rovnosti (*)

$$\frac{PQ}{AB} + \frac{RS}{BC} + \frac{TU}{CA} = 2.$$

Z-II-4

Je dán rotační váleček V s výškou v a poloměrem podstavy r . Vyšetřujeme všechny rotační válce V' , jejichž poloměr podstavy je $r + m$ a výška je $v - m$, kde $0 < m < v$. Určete číslo m tak, aby povrch válce V' byl dvojnásobek

sobkem povrchu válce V . Jaká je podmínka řešitelnosti?

ŘEŠENÍ. a) Válec V má povrch

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rv.$$

Válec V' má poloměr $r' = r + m$ a výšku $v' = v - m$. Povrch válce V' je tedy

$$S' = 2\pi(r + m)^2 + 2\pi(r + m) \cdot (v - m).$$

Podle textu úlohy platí

$$S' = 2 \cdot S,$$

tj.

$$\begin{aligned} 2\pi(r + m)^2 + 2\pi(r + m)(v - m) &= \\ &= 2 \cdot (2\pi r^2 + 2\pi rv). \end{aligned}$$

Po úpravě dostáváme

$$2\pi(r + m) \cdot [(r + m) + (v - m)] = 4\pi r(r + v),$$

odkud vyplývá

$$(r + m) \cdot (r + v) = 2r(r + v).$$

Zřejmě $r + v \neq 0$, a proto

$$r + m = 2r,$$

tj.

$$m = r.$$

ZKOUŠKA. Pro $m = r$ platí $r' = 2r$ a $v' = v - r$. Potom je

$$\begin{aligned} S' &= 2\pi(2r)^2 + 2\pi \cdot 2r(v - r) = \\ &= 8\pi r^2 + 4\pi rv - 4\pi r^2 = \\ &= 2 \cdot (2\pi r^2 + 2\pi rv) = 2 \cdot S. \end{aligned}$$

b) Je-li dán libovolný válec V o poloměru podstavy r a výšce v , pak podle odstavce a) má válec V' splňující podmínky uvedené v textu úlohy $r' = 2r$ a výšku $v' = v - r$. Velikost výšky musí být kladné číslo, a proto válec V' existuje, právě když

$$v > r.$$

V. Řešení soutěžních úloh III. kola

KATEGORIE A

A-III-1

Platí-li pro velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2, \quad (1)$$

je tento trojúhelník pravoúhlý. Dokažte.

(5 bodů)

ŘEŠENÍ. Podle vzorce $2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$ plyne z dané rovnosti

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + 1 = 0.$$

Podle vzorce pro $\cos 2\alpha + \cos 2\beta$ a podle vzorce $2\cos^2 \gamma = 1 + \cos 2\gamma$ dostaneme

$$2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + 2 \cos^2 \gamma = 0.$$

Protože je $\alpha + \beta = \pi - \gamma$, dostaneme dále

$$\cos \gamma (\cos \gamma - \cos(\alpha - \beta)) = 0,$$

neboli

$$\cos \gamma (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) = 0.$$

Použijeme znovu vzorce pro $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$; vyjde

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma = 0. \quad (2)$$

Je tedy buď $\alpha = \frac{\pi}{2}$, nebo $\beta = \frac{\pi}{2}$, nebo $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

POZNÁMKA. Uvedené řešení 1. úlohy je řešení autorské. Soutěžící, kteří tuto úlohu úspěšně vyřešili, většinou užívali v podstatě stejného postupu, tj. dokázali, že z rovnosti (1) plyne rovnost (2). Jejich důkazy však byly složitější.

A-III-2

Je dán čtyřstěn. Označme v_i ($i = 1, 2, 3, 4$) jeho výšky a ϱ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) poloměry kulových ploch vně vepsaných tomuto čtyřstěnu. Pak platí

$$2 \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4} \right) = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4};$$

Dokažte.

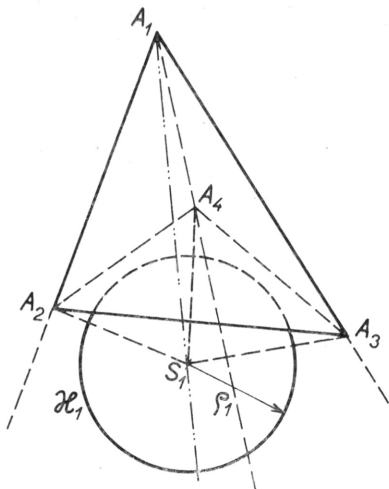
(6 bodů)

ŘEŠENÍ. Označme vrcholy čtyřstěnu A_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Budiž S_1 střed a ϱ_1 poloměr vně vepsané kulové plochy podle schematického obr. 65. Označme P_1, P_2, P_3, P_4 po řadě obsahy trojúhelníků $\triangle A_2A_3A_4, \triangle A_1A_3A_4, \triangle A_1A_2A_4, \triangle A_1A_2A_3$. Potom pro objemy $V_{11}, V_{12}, V_{13}, V_{14}$ čtyřstěnů $A_2A_3A_4S_1, A_1A_3A_4S_1, A_1A_2A_4S_1, A_1A_2A_3S_1$ platí

$$-V_{11} + V_{12} + V_{13} + V_{14} = V, \quad (1)$$

kde V je objem čtyřstěnu $A_1A_2A_3A_4$. Platí však

$$V_{1i} = \frac{P_i \varrho_1}{3} \quad (i = 1, 2, 3, 4);$$



Obr. 65

po dosazení do (1) dostáváme

$$\frac{\varrho_1}{3} (-P_1 + P_2 + P_3 + P_4) = V,$$

z čehož

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{-P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{3V}.$$

Cyklickou záměnou dostaneme:

$$\frac{1}{\varrho_2} = \frac{P_1 - P_2 + P_3 + P_4}{3V},$$

$$\frac{1}{\varrho_3} = \frac{P_1 + P_2 - P_3 + P_4}{3V},$$

$$\frac{1}{\varrho_4} = \frac{P_1 + P_2 + P_3 - P_4}{3V}.$$

Je tedy

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{V}. \quad (2)$$

Dále platí

$$V = \frac{P_i \cdot v_i}{3} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

z čehož

$$\frac{1}{v_i} = \frac{P_i}{3V} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

a tedy

$$2 \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{V}. \quad (3)$$

Z rovností (2) a (3) vyplývá

$$2 \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4} \right) = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4},$$

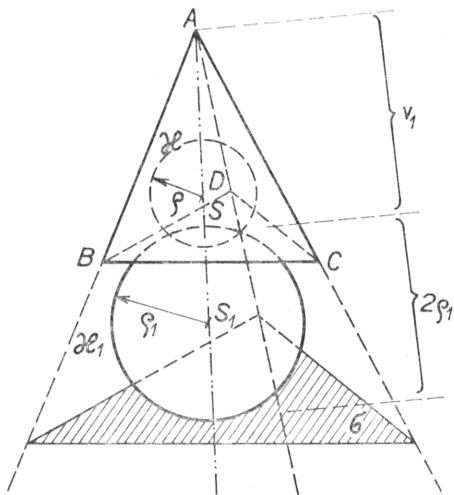
c. b. d.

Řešil Petr Slačálek,

3. f, gymnasium, ul. W. Piecka, Praha 2

JINÉ ŘEŠENÍ. Poloměr kulové plochy κ vepsané dovnitř daného čtyřstěnu $ABCD$ (schematický obr. 66) označme ϱ a obsahy jednotlivých stěn S_1, S_2, S_3, S_4 . Pro objem V daného čtyřstěnu platí

$$S_1 \cdot \frac{\varrho}{3} + S_2 \cdot \frac{\varrho}{3} + S_3 \cdot \frac{\varrho}{3} + S_4 \cdot \frac{\varrho}{3} = V,$$



Obr. 66

z čehož po úpravě máme

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{3V}. \quad (1)$$

Dále víme, že pro objem V platí

$$V = S_1 \cdot \frac{v_1}{3} = S_2 \cdot \frac{v_2}{3} = S_3 \cdot \frac{v_3}{3} = S_4 \cdot \frac{v_4}{3},$$

takže

$$S_1 = \frac{3V}{v_1}, S_2 = \frac{3V}{v_2}, S_3 = \frac{3V}{v_3}, S_4 = \frac{3V}{v_4}.$$

Po dosazení za S_1, S_2, S_3 a S_4 do (1) dostáváme rovnost

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4}. \quad (2)$$

Vyšetřujeme kulovou plochu κ_1 o poloměru ϱ_1 vepsanou do trojhranu $A(BCD)$ tak, že se dotýká roviny BCD a leží v opačném poloprostoru určeném rovinou BCD než bod A . Tato kulová plocha κ_1 je stejnohlá s kulovou plochou κ vepsanou dovnitř čtyřstěnu $ABCD$. Středem stejnohllosti je bod A . Vedme rovinu $\sigma \parallel BCD$ ($\sigma \neq BCD$) tak, aby se dotýkala plochy κ_1 . Ze vzdálenosti rovin σ a BCD určíme koeficient stejnohllosti, který se musí rovnat poměru poloměrů:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho} = \frac{2\varrho_1 + v_1}{v_1}.$$

Odtud dostáváme

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho} - 2 \cdot \frac{1}{v_1}. \quad (3)$$

Obdobný vztah jako (3) platí zřejmě i pro $\varrho_2, v_2; \varrho_3, v_3; \varrho_4, v_4$. Z těchto vztahů tedy plyne

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4} = 4 \cdot \frac{1}{\varrho} - 2 \cdot \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4} \right).$$

Po dosazení z rovnosti (2) dostáváme rovnost

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4} = 2 \cdot \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4} \right),$$

která se měla dokázat.

Řešil JAN FRYNTA,
4.f, gymnasium, ul. W. Piecka, Praha 2

Je daná postupnosť reálnych čísel $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ taká, že pre každé $k > 1$ platí $a_{k-1} + a_{k+1} \geq 2a_k$.

Pre $n = 1, 2, 3, \dots$ označme

$$A_n = \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

Potom pre každé $n > 1$ platí tiež

$$A_{n-1} + A_{n+1} \geq 2A_n; \quad (1)$$

dokážte.

(8 bodov)

RIEŠENIE. Vypočítajme rozdiel $R_n = A_{n-1} + A_{n+1} - 2A_n$. Lahko sa vidí, že

$$R_n = \frac{2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - n(n+1)a_n + n(n-1)a_{n+1}}{n(n-1)(n+1)}.$$

Je zrejmé, že (1) platí pre každé prirodzené číslo $n > 1$ vtedy a len vtedy, keď pre každé $n > 1$ je $R_n \geq 0$, čo je ekvivalentné s nerovnosťou

$$\begin{aligned} 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + n(n-1)a_{n+1} &\geq \\ &\geq n(n+1)a_n. \end{aligned} \quad (2)$$

Pravdivosť nerovnosti (2) dokážeme úplnou indukciou:

1. Pre $n = 2$ má nerovnosť (2) tvar

$$2(a_1 + a_2) + 2a_3 \geq 6a_2 \text{ čiže } a_1 + a_3 \geq 2a_2,$$

čo je splnené podľa predpokladu.

2. Predpokladajme, že pre nejaké prirodzené číslo $n > 1$ platí (2). Podľa podmienok úlohy platí pre každé prirodzené číslo $n > 1$ tiež

$$a_n + a_{n+2} \geq 2a_{n+1}, \text{ z čoho hneď dostaneme}$$

$$n(n+1)a_n + n(n+1)a_{n+2} \geq 2n(n+1)a_{n+1}. \quad (3)$$

Sčítaním (2) a (3) po jednoduchéj úprave dostaneme

$$2(a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}) + n(n+1)a_{n+2} \geq \\ \geq (n+1)(n+2)a_{n+1},$$

čo je nerovnosť, ktorú dostaneme z (2), ak v nej nahradíme n číslom $n+1$.

Tým sme dokázali správnosť nerovnosti (2) pre každé prirodzené číslo $n > 1$ a vzhľadom na ekvivalenciu nerovnosti (2) s nerovnosťou (1) tiež správnosť tejto nerovnosti.

Riešil PAVOL ZLATOŠ, 3.b tr.
Gymn. Bratislava, Novohradská ul.

JINÉ ŘEŠENÍ. Utvořme nejprve posloupnost koeficientů definovanou rekurentně takto:

$$b_1 = 1, b_2 = 3, b_k = 2b_{k-1} - b_{k-2} + 1.$$

Matematickou indukcí snadno dokážeme, že pro každé přirozené číslo k platí

$$b_k = \frac{(k+1) \cdot k}{2}. \quad (1)$$

I. Pro $k = 1$ a $k = 2$ rovnost (1) skutečně platí. Nechť $k = 3$. Podle definice je

$$b_3 = 6 - 1 + 1 = 6$$

a podle (1) je také

$$b_3 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6.$$

II. Nechť (1) platí pro nějaké přirozené číslo $k \geq 3$. Pak

$$b_{k+1} = 2b_k - b_{k-1} + 1 = 2 \cdot \frac{(k+1) \cdot k}{2} - \frac{k \cdot (k-1)}{2} + 1 = \\ = \frac{(k+2)(k+1)}{2}, \text{ c. b. d.}$$

Podle předpokladu pro každé $k > 1$ platí

$$a_{k-1} + a_{k+1} \geq 2a_k. \quad (2)$$

Sečteme $n - 1$ nerovností (n je libovolně zvolené přirozené číslo, $n > 1$),

$$b_1 \cdot (a_1 - 2a_2 + a_3) \geq 0,$$

$$b_2 \cdot (a_2 - 2a_3 + a_4) \geq 0,$$

.....

$$b_k (a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2}) \geq 0,$$

.....

$$b_{n-1} (a_{n-1} - 2a_n + a_{n+1}) \geq 0,$$

které platí podle (2) a proto, že podle (1) je $b_k > 0$ pro každé $k \geq 1$. Součet je

$$\begin{aligned} & a_1 b_1 + a_2 \cdot (-2b_1 + b_2) + a_3 \cdot (b_1 - 2b_2 + b_3) + a_4 \cdot \\ & \cdot (b_2 - 2b_3 + b_4) + \dots + a_k \cdot (b_{k-2} - 2b_{k-1} + b_k) + \\ & + \dots + a_{n-1} \cdot (b_{n-3} - 2b_{n-2} + b_{n-1}) + \\ & + a_n \cdot (b_{n-2} - 2b_{n-1}) + a_{n+1} \cdot b_{n-1} \geq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Z rekurentní definice posloupnosti $\{b_k\}$ plyne

$$\begin{aligned} b_{k-2} - 2b_{k-1} + b_k &= b_{k-2} - 2b_{k-1} + 2b_{k-1} - b_{k-2} + \\ &+ 1 = 1. \end{aligned}$$

Tedy nerovnost (3) nabývá tvaru

$$\begin{aligned} & a_1 b_1 + a_2 (-2b_1 + b_2) + a_3 + a_4 + \dots + a_k + \dots + \\ & + a_{n-1} + a_n (b_{n-2} - 2b_{n-1}) + a_{n+1} \cdot b_{n-1} \geq 0. \end{aligned}$$

Dosadíme za koeficienty b_k z definice a z (1); dostáváme

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \cdot \frac{2 - n^2 - n}{2} + \\ & + a_{n+1} \frac{n^2 - n}{2} \geq 0, \end{aligned}$$

tj.

$$2 \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + 2a_n - 2n^2 a_n + (n^2 - n)a_n + \\ + (n^2 - n) a_{n+1} \geq 0,$$

čili

$$(n^2 - n) \cdot a_n + (n^2 - n) \cdot a_{n+1} \geq \\ \geq -2 \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + 2n^2 a_n.$$

K oběma stranám poslední nerovnosti přičteme $2n^2 (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$, na levé přičteme i odečteme $n (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$. Po úpravě dostáváme

$$(n^2 + n) \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + (n^2 - n) \cdot \\ \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + (n^2 - n) \cdot (a_n + a_{n+1}) \geq \\ \geq 2 (n^2 - 1) \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

Tuto nerovnost znásobíme kladným výrazem

$$\frac{1}{n(n-1)(n+1)}$$

a docházíme k nerovnosti

$$\frac{1}{n-1} (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + \frac{1}{n+1} \cdot$$

$$\cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1}) \geq 2 \cdot \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

což je nerovnost

$$A_{n-1} + A_{n+1} \geq 2 \cdot A_n,$$

kterou jsme měli dokázat.

Řešila MAGDA FOŘTOVÁ
4.d, gymnasium J. Fučíka, Plzeň

Je-li $n \geq 2$ přirozené číslo, určete

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} [\sqrt{k}].$$

(6 bodů)

ŘEŠENÍ. Pro každé přirozené číslo $n \geq 2$ platí

$$[\sqrt{n^2 - 1}] = n - 1,$$

neboť

$$n - 1 \leq \sqrt{n^2 - 1} < (n - 1) + 1.$$

Množinu

$$\mathbf{M} = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{n^2 - 1}\}$$

tedy můžeme rozložit na $n - 1$ disjunktních podmnožin $\mathbf{A}_i$ definovaných takto:

$$\mathbf{A}_i = \{x \in \mathbf{M}; [x] = i\}, i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}.$$

Nyní zjistíme počet prvků $||\mathbf{A}_i||$ množiny $\mathbf{A}_i$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$. Nejmenším prvkem množiny $\mathbf{A}_i$ je zřejmě prvek

$$\alpha_i = \sqrt{i^2};$$

největším jejím prvkem je prvek

$$\beta_i = \sqrt{(i + 1)^2 - 1}.$$

Zřejmě je $\mathbf{A}_i = \{\alpha_i, \alpha_i + 1, \dots, \beta_i\}$, a proto

$$||\mathbf{A}_i|| = (i + 1)^2 - i^2 = 2i + 1.$$

Z předcházejících úvah plyne ($n \geq 2$):

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} [\sqrt{k}] = \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot ||\mathbf{A}_i|| = \sum_{i=1}^{n-1} (2i^2 + i) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i.$$

Pro každé přirozené číslo n platí

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2} n(n+1) \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

a proto

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} [\sqrt{k}] = \frac{2}{6} (n-1) \cdot n \cdot (2n-1) + \frac{1}{2} (n-1) \cdot n.$$

Po úpravě dostáváme

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} [\sqrt{k}] = \frac{1}{6} n(n-1)(4n+1),$$

což je hledaný vztah.

Řešil JAN TRLIFAJ,

3.d, gymnasium, Sladkovského nám., Praha 3

A-III-5

Je dána rovina ϱ . Jsou-li P, Q dva body z ϱ , označme $P + Q$ střed dvojice P, Q a $P \cdot Q$ bod roviny ϱ , který dostaneme otočením bodu Q okolo bodu P o 90° v kladném smyslu.

a) Jsou tyto operace komutativní?

b) Jsou dány dva pevně navzájem různé body A, B roviny ϱ . Rovnice

$$Y \cdot X = (A \cdot X) + B \tag{1}$$

určuje zobrazení $X \mapsto Y$.

Určete o jaké zobrazení jde.

c) Sestrojte všechny samodružné body tohoto zobrazení. (8 bodů)

Porovnáním (2) a (3) vyjde

$$(1 - i) z' + iz = \frac{i}{2} z + \frac{1}{2},$$

tj.

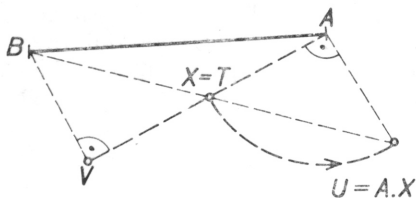
$$z' = -\frac{i}{2(1-i)} z + \frac{1}{2(1-i)}$$

a po úpravě

$$z' = \frac{1-i}{4} z + \frac{1+i}{4}. \quad (4)$$

Rovnicí (4) je určena přímá podobnost. To zjistíme, vyjádříme-li např. $\frac{1-i}{4} = k \cdot \varepsilon$, kde $k = \left| \frac{1-i}{4} \right| = \frac{1}{\sqrt{8}}$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i)$.

Zobrazení $[z] \mapsto [\varepsilon z]$ je otočení kolem bodu $[0]$, zobrazení $[\varepsilon z] \mapsto \left[k\varepsilon z + \frac{1+i}{4} \right]$ je stejnoolehlost s konstantou k .



Obr. 68

c) Budiž $X = Y$ samodružný bod podobnosti (4); pak je $X = X$, a tedy bod X je řešením rovnice

$$X = (A \cdot X) + B.$$

Situace pro samodružný bod X je naznačena

na obr. 68; zde je $\triangle XAU \cong \triangle XVB$, $AU = AX = VX = BV$, $UX = BX$. Pro pomocný bod V tedy platí

$$AV = 2 BV, \quad \sphericalangle AVB = \frac{\pi}{2}, \quad V \cdot X = B;$$

těmito podmínkami je bod V jednoznačně určen; bod X sestrojíme z údaje $X = A + V$.

POZNÁMKA. U 5. úlohy je uvedeno autorské řešení. I když několik účastníků 3. kola získalo za tuto úlohu plný počet bodů, žádné z těchto řešení se nehodilo k otištění.

A-III-6

Ve čtverci, jehož strana má délku 50, je dána lomená čára L tak, že každý bod čtverce má od některého bodu čáry L vzdálenost nejvýše 1. Dokažte, že délka čáry L je větší než 1248.

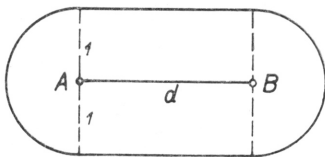
(7 bodů)

ŘEŠENÍ. Necht' AB je libovolná úsečka čáry L . Uvažujme množinu všech bodů roviny daného čtverce, které mají od této úsečky vzdálenost menší nebo rovnou 1. Touto množinou je zřejmě sjednocení všech kruhů ohraničených kružnicemi $k_x = (X; 1)$, kde X probíhá úsečkou AB , tedy útvar složený z pravoúhelníka, jehož dvě strany jsou rovnoběžné s úsečkou AB , mají od ní vzdálenost 1 a druhé dvě strany obsahují body A, B , a z dvou půlkruhů se středy A, B ohraničených stranami pravoúhelníka kolmými na AB (obr. 69). Je-li délka úsečky AB rovna d , pak obsah nalezeného útvaru (dále jej budeme nazývat oválem) je

$$2d + \pi.$$

Uvažujme všechny ovály nad všemi úsečkami tvořícími čáru L . Tyto ovály musí podle zadání úlohy

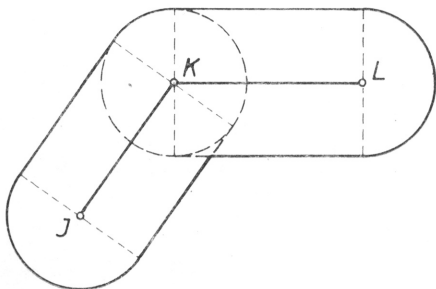
pokrýt celý daný čtverec. Kdyby totiž nějaký bod uvažo-



Obr. 69

vaného čtverce ležel vně každého z těchto oválů, měl by od každého bodu čáry L vzdálenost větší než 1.

Obsah průniku oválů nad dvěma sousedními úsečkami čáry L se společným koncovým bodem K je zřejmě větší nebo roven obsahu kruhu ohraničeného kružnicí $k_k = (K; 1)$, který je oběma oválům společný (obr. 70).



Obr. 70

Pro obsah P útvaru vzniklého sjednocením oválů sestrojených nad všemi úsečkami čáry L pak platí:

$$P \leq \sum_{i=1}^n (2d_i + \pi) - (n-1) \cdot \pi = \pi + 2 \cdot \sum_{i=1}^n d_i, \quad (1)$$

kde $d_i, i = 1, 2, \dots, n$, jsou délky všech úseček tvořících čáru L .

Předpokládejme, že existuje čára L , která vyhovuje podmínkám úlohy a je kratší nebo rovna 1248. Pak

$$\sum_{i=1}^n d_i \leq 1248.$$

Z nerovnosti (1) tedy vyplývá

$$P \leq \pi + 2496 < 2500 = 50^2.$$

Avšak výše bylo dokázáno, že útvar vzniklý sjednocením všech oválů nad úsečkami čáry L pokrývá celý daný čtverec, takže $P \geq 50^2$, což je spor. Délka čáry L je tedy větší než 1248.

Řešil PAVEL KINDELMANN,
3.a, gymnasium, Šrámkova ul.,
České Budějovice

VI. Správa o XV. medzinárodnej matematickej olympiáde

1. ORGANIZÁCIA A PRIEBEH SÚŤAŽE

Pri odchode z Varšavy po skončení XIV. MMO určite ani jeden z jej účastníkov netušil, že o rok povedú cesty matematických nádejí do hlavného mesta ZSSR — Moskvy, ktorá bola dejiskom MMO už v rokoch 1964 a 1968. Sovietski súdruhovia sa totiž podujali na neľahkú úlohu usporiadania XV. MMO až na sklonku roku 1972, keď sa ukázalo, že ani jedna z krajín prichádzajúcich do úvahy organizáciu MMO pre rok 1973 nepripravuje. O to viac prekvapuje, že XV. MMO, ktorá sa konala 5.—16. 7. 1973 sa zúčastnil rekordný počet družstiev — 16: Rakúsko (A), Bulharsko (BG), Kuba (C), ČSSR (CS), NDR (D), Francúzsko (F), Veľká Británia (GB), Maďarsko (H), Mongolsko (M), Holandsko (NL), Poľsko (PL), Rumunsko (R), Švédsko (S), Fínsko (SF), ZSSR (SU) a Juhoslávia (YU). S výnimkou Kuby, ktorú reprezentovalo 5 žiakov, boli všetky družstvá osemčlenné.

Ministerstvo školstva ZSSR poverilo organizovaním súťaže Akadémii pedagogických vied ZSSR, ktorej vice-prezident prof. A. I. Markuševič bol predsedom organizačného výboru olympiády a jej vedecký pracovník prof. I. Ja. Verčenko bol predsedom medzinárodnej jury, ktorá riadila XV. MMO. Jeho zástupcom a pravou rukou bol I. S. Petrakov, inšpektor — metodik ministerstva

školstva ZSSR, ktorý nechýbal na žiadnej z MMO od r. 1962.

Vedúci delegácií, ktorí tvorili medzinárodnú jury, sa schádzali do Moskvy vo štvrtok 5. 7. Svoju prácu začali v piatok 6. 7. v 68. špeciálnej strednej škole na *Slavian-skom bulvári* v moskovskej štvrti *Kuncevo*. Táto škola bola nielen miestom práce jury, ale aj dejiskom vlastnej súťaže. Na prvom zasadnutí jury sa vedúci delegácií po stručnom zoznámení sa s *programom XV. MMO* dozvedeli texty 14 úloh, ktoré príslušná komisia organizačného výboru vybrala z návrhov došlých z 11 krajín. Štyri z týchto úloh boli v diskusii zamietnuté s tým, že niektorí delegáti poznali úlohy s blízkym námetom, ktoré boli publikované. Zostávajúcich 10 úloh mali si členovia jury možnosť premyslieť do nasledujúceho dňa. Na rozdiel od predchádzajúcich rokov nemali pritom k dispozícii autor-ské riešenia úloh, čo im umožňovalo naplno využiť vlastný dôvtip a tvorivosť. K diskusii o úlohách využili aj malú popoludňajšiu autobusovú exkurziu *po Mos- skve*.

Na svojom sobotnajšom zasadnutí jury pomerne rýchle vybrala 5 úloh pre súťaž. Ťažkosti nastali až pri výbere šiestej úlohy. Rozsiahlu diskusiu o tomto probléme nedokázalo urýchliť ani silné hromobitie a prietrž mračien, ktorá zúrila nad Moskvou počas popoludňajšieho zasadnutia jury. Keď nezískala potrebnú väčšinu (aspoň 10 hlasov) ani bulharská ani francúzska úloha na geometrické miesto bodov v priestore, prešiel napokon návrh poľského delegáta na preformulovanie poľskej úlohy o grupe afin-ných transformácií priamky, ktorá sa v pôvodnom výbere 14 úloh nevyskytovala práve preto, že používala pojem grupy, ktorý sa do obsahu školskej matematiky väčšiny zúčastnených krajín zatiaľ nedostal. Tým sa stalo, že v tématike úloh *XV. MMO* chýbala stereometrie a keďže sa nenaskytla ani vhodná úloha zo školskej teórie čísel,

ktorá snáď na žiadnej z doterajších MMO n chýbala,
zrodil sa tento netradičný výber:

1. Bod O leží na priamke l , $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \dots, \overrightarrow{OP_n}$ sú jednotkové vektory také, že body $P_i, i = 1, 2, \dots, n$, ležia všetky v rovine obsahujúcej priamku l a nachádzajú sa všetky po tej istej strane tejto priamky. *všetchny jsou*

Dokážte, že ak n je nepárne, potom

$$|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \dots + \overrightarrow{OP_n}| \geq 1,$$

niz papiruk

kde $|\overrightarrow{OM}|$ znamená dĺžku vektora $\overrightarrow{OM}$. (ČSSR, 6 bodov)

2. Rozhodnite, či existuje v trojrozmernom priestore konečná množina $\mathbf{M}$ pozostávajúca z bodov neležiacich v jednej rovine, ktorá má nasledujúcu vlastnosť: $\longrightarrow$

Ku každým dvom bodom $A, B \in \mathbf{M}$ existujú body $C, D \in \mathbf{M}$ tak, že priamky AB a CD sú rovnobežné a nesplývajú. *kon-li*

(Poľsko, 6 bodov)

3. Nájdite minimálnu hodnotu súčtu $a^2 + b^2$, ak a, b sú reálne čísla, pre ktoré má rovnica *ne*

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

aspoň jeden reálny koreň.

(Švédsko, 8 bodov)

4. Ženista má preveriť, či sa vyskytujú míny na pozemku, ktorý má tvar rovnostranného trojuholníka (vrátane jeho hranice). K dispozícii má detektor, polomer účinnosti ktorého sa rovná polovičnej výške trojuholníka. Na prieskum vychádza z niektorého vrcholu trojuholníka. Akú cestu si má zvoliť, aby prešiel najmenšiu možnú vzdialenosť a preskúmal pritom celý pozemok? *prošel prozk.*

(Juhoslávia, 6 bodov)

5. Neprázdná množina $\mathbf{G}$ nekonštantných funkcií f reálnej premennej x tvaru $f(x) = ax + b$, kde $a \neq 0$, b sú reálne čísla, má nasledujúce vlastnosti:

- $\eta - \text{li}$ a) ak $f, g \in \mathbf{G}$, potom $g \circ f \in \mathbf{G}$, kde $(g \circ f)(x) = g(f(x))$;
 b) ak $f \in \mathbf{G}$, kde $f(x) = ax + b$, potom tiež inverzná funkcia $f^{-1} \in \mathbf{G}$, kde $f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}$;

- c) ku každej funkcii $f \in \mathbf{G}$ existuje x_f tak, že $f(x_f) = x_f$.

Dokážte, že existuje k také, že $f(k) = k$ pre všetky $f \in \mathbf{G}$.
 (Poľsko, 6 bodov)

6. Je daných n kladných reálnych čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ a reálne číslo q také, že $0 < q < 1$.

Nájdite n reálnych čísel $b_1, b_2, \dots, b_n$ s týmito vlastnosťami:

- a) $a_k < b_k$ pre všetky $k = 1, 2, \dots, n$;
 b) $q < \frac{b_{k+1}}{b_k} < \frac{1}{q}$ pre všetky $k = 1, 2, \dots, n - 1$;
 c) $b_1 + b_2 + \dots + b_n < \frac{1 + q}{1 - q} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$.

(Švédsko, 8 bodov)

V zátvorke za textom úlohy je uvedená krajina, ktorá ju navrhla a počet bodov, ktorým jury rozhodla hodnotiť jej úplné riešenie. Tu uvedená formulácia úloh je presným prekladom oficiálnej formulácie v ruskom a anglickom jazyku. Formulovanie textov úloh je už tradične jednou z časovo najnáročnejších povinností jury. I tentoraz si — aj napriek tomu, že sa oficiálna formulácia textov schvaľovala len v spomínaných dvoch jazykoch — vyžiadala celé nedeľné predpoludnie (8.7.). Keďže ešte v nedeľu do večera bolo treba rozmnožiť texty úloh v potrebnom počte

exemplárov v jazykoch jednotlivých krajín a na túto prácu boli vedúci delegácií tentoraz sami, neuskutočnila sa ani plánovaná návšteva Kremľa.

Jednotlivé družstvá na čele s *pedagogickými vedúcimi* prichádzali do Moskvy v sobotu 7. 7. Ubytovatí boli v hoteli *Universitetskaja*, pričom na rozdiel od posledných troch MMO boli pedagogickí vedúci ubytovaní spolu s družstvami, kým vedúci delegácií bývali v hoteli *Ukraina* na kutuzovskom prospekte.

V nedeľu predpoludním sa žiaci a pedagogickí vedúci zúčastnili na autobusovej exkurzii po Moskve a popoludní oddychovali.

Slavnostné otvorenie súťaže sa konalo v pondelok 9. 7. o 09,30 hod. v aule 68. špeciálnej strednej školy. Po krátkom neformálnom prejave *predsedu XV. MMO prof. A. I. Markuševiča* sa žiaci rozišli do 8 tried, aby riešili *prvé tri úlohy* počas štyroch hodín čistého času. Ako je to na MMO obvyklé, nedozvedeli sa bodové hodnotenie za úplné riešenie jednotlivých úloh a na rozdiel od XIV. MMO mali možnosť po prečítaní textov vyjsť na chodbu a požiadať vedúcich delegácií, ktorí tam čakali, o vysvetlenie prípadných nejasností v texte.

Po otvorení súťaže sa uskutočnilo prvé spoločné zasadnutie jury so sovietskymi koordinátormi, na ktorom sa predbežne prediskutovali riešenia prvých troch úloh a ich hodnotenia. Na tomto zasadnutí sa zúčastnili tiež pedagogickí vedúci jednotlivých družstiev, ktorí potom spolupracovali s vedúcimi delegácií pri hodnotení žiackych riešení. Tým došlo k porušeniu tradície posledných rokov i pokiaľ ide o izoláciu vedúcich delegácií od tých, ktorí prichádzali do styku so žiakmi, až do druhého dňa súťaže.

S hodnotením riešení prvých troch úloh sa začalo hneď v pondelok popoludní, zatiaľ čo žiaci absolvovali výlet loďou po rieke Moskve.

Druhú trojicu úloh riešili žiaci v utorok 10. 7. a k dispo-

zícii mali opäť štyri hodiny čistého času s možnosťou dostať vysvetlenie k prípadným nejasnostiam v texte krátko po obdržaní textov. Po otvorení druhého dňa súťaže sa opäť konala diskusia členov jury a pedagogických vedúcich s koordinátormi o riešeníach druhej trojice úloh a po nej pokračovalo hodnotenie riešení a koordinácia hodnotení. Tejto práci boli venované i nasledujúce dva dni (11. a 12. 7.). Trojčlenné skupiny koordinátorov pre jednotlivé úlohy viedli: 1 — *Andrej Leontovič*, 2 — *Andrej Toom*, 3 — *Viktor Gutenmacher*, 4 — *Andrej Jegorov*, 5 — *Leonid Mitjušin*, 6 — *Georgij Dorofejev*. Vedúcim celej skupiny koordinátorov bol *Nikolaj Vasiljev* a niekoľkí z koordinátorov boli bývalí účastníci MMO. Svoje úlohy sa zhostili veľmi úspešne a nedošlo prakticky k žiadnym väčším nedorozumeniam medzi nimi a vedúcimi delegácií.

Záverečné zasadnutie jury sa konalo v piatok 13. 7. predpoludním. Po schválení bodových hodnotení jednotlivých účastníkov rozhodlo o stanovení hraníc pre jednotlivé ceny takto: *I. cena* 40 — 35 bodov, *II. cena*: 33 — 27 bodov (34 bodov nezískal nikto), *III. cena*: 26 — 17 bodov. Pri stanovení hranice pre tretie ceny zohrala vážnu úlohu skutočnosť, že najlepší kubánsky účastník získal 17 bodov. Celkom bolo udelených 5 prvých, 15 druhých a 48 tretích cien, tj. spolu 68 cien, čo je cca o 6 viac ako polovica z celkového počtu účastníkov XV. MMO, ktorých bolo 125. V ďalšej časti zasadnutia sa diskutovalo o jednotlivých úlohách z hľadiska udelenia špeciálnych cien autorom originálnych a zvlášť elegantných riešení. V tomto smere bola jury tohto roku skúpa, pretože z niekoľkých návrhov na špeciálne ceny predložených vedúcimi delegácií, resp. koordinátormi, ani jeden neprešiel.

Na záver zasadnutia sa prihlásil o slovo vedúci delegácie NDR *prof. dr. Helmut Bausch*, ktorý pozval všetky

zúčastnené krajiny na *XVI. MMO*, ktorú hodlá usporiadať *NDR v Erfurte* od 4. do 17.7. 1974, pričom záverečný ceremoniál sa bude konať *v Berlíne*. Všetkým delegáciám rozdal *návrh štatútu XVI. MMO* a rámcový program súťaže. Jeho pozvanie sa stretlo so súhlasom všetkých členov jury.

V piatok 13. 7. vo večerných hodinách prijal vedúcich delegácií vo svojej pracovni viceprezident Akadémie pedagogických vied ZSSR a predseda organizačného výboru *XV. MMO Alexej Ivanovič Markuševič*. V srdečnej besede sa hovorilo o výsledkoch *XV. MMO* i o niektorých otázkach organizácie budúcich *MMO*. Vedúci francúzskej delegácie predložil návrh, aby sa stanovili tieto zásady: a) žiaden žiak sa nemôže zúčastniť *MMO* viac než dvakrát, b) ten žiak, ktorý na *MMO* získa I. cenu, sa viacej nemôže na *MMO* zúčastniť, c) na *MMO* sa nepovoľuje účasť žiakov starších ako 19 rokov. Stanoviská vedúcich delegácií k týmto návrhom sa značne rozchádzali a ako z besedy vyplynulo, pri prípadnom hlasovaní by bol získal väčšinu iba tretí návrh. Pred svojím odchodom obdržali vedúci delegácií od zástupcu hlavného redaktora sovietskeho populárno-vedeckého časopisu „*Kvant*“ *M. L. Smoljanského* kolekciu čísel tohto časopisu s venovaním členov red. rady *prof. Kolmogorova* a *prof. Markuševiča*.

Kým vedúci delegácií so svojimi zástupcami (ped. vedúcimi družstiev) hodnotili riešenia a koordinovali hodnotenia, mali žiaci možnosť návštevy múzea *A. S. Puškina* s bohatou kolekciou obrazov a iných umeleckých diel (10. 7. popoludní), navštívili dedinu *Archangel'skoje* (11.7.), boli v mauzoleu *V. I. Lenina* (12.7.) a prehliadli si *Výstavu úspechov národného hospodárstva ZSSR* ako aj nádvorie a paláca *Kremľa* (13. 7.).

V sobotu 14. 7. bola spoločná exkurzia všetkých účastníkov *XV. MMO* do *Zagorska*. (Pravoslávna cirkevná architektúra, historický kláštor *Troicko-sergijský*.)

Slávnostné zakončenie olympiády sa uskutočnilo v nedeľu 15. 7. o 11.00 hod. vo veľkej sále *Paláca pionierov*. Okrem súťažiacich žiakov, členov jury a členov organizačného výboru *XV. MMO* sa na ňom zúčastnila tiež *sekretárka* moskovského výboru *Komsomolu* a niekoľko ďalších hostí. Záverečný ceremoniál riadil *predseda* organizačného výboru *XV. MMO* *prof. A. I. Markuševič*, ktorý v úvode predniesol krátky neformálny prejav. Po ňom prehovoril zástupca hlavného redaktora časopisu „*Kvant*“ pre matematiku *M. L. Smoljanskij*, ktorý vyzval prítomných študentov k spolupráci s týmto populárno-vedeckým časopisom. Za zahraničných účastníkov *XV. MMO* prehovoril vedúci delegácie NDR *prof. dr. H. Bausch*, ktorý poďakoval sovietskym hostiteľom za veľmi dobrú organizáciu i napriek krátkemu času, ktorý mali na prípravu, pripomenul blížiaci sa X. svetový festival mládeže a študentstva v Berlíne a na záver opätovne pozval všetky zúčastnené delegácie na *XVI. MMO* do NDR. Ako posledný sa ujal slova predseda jury *prof. Ivan Jakovlevič Verčenko*, ktorý blahoželal účastníkom olympiády k dosiahnutým výsledkom a spolu s *akad. A. I. Markuševičom* a podpredsedom jury *I. S. Petrakovom* odovzdal najlepším 68 účastníkom *XV. MMO* diplomy a knižné odmeny. Ostatným žiakom odovzdali potom účastnícke diplomy a knižné darčeky od organizátorov vedúci jednotlivých delegácií.

V nedeľu večer o 19,00 hod. sa konala v reštaurácii hotela *Universitetskaja* záverečná spoločná večera, počas ktorej vládlo v sále srdečné a radostné ovzdušie. Prípitky predniesla za hostiteľov členka organizačného výboru *XV. MMO* s. *Maslovova* a v mene zahraničných účastníkov poďakoval členom organizačného výboru za vydarenú organizáciu olympiády, ktorej sa zúčastnil rekordný počet krajín, vedúci švédskej delegácie *prof. dr. Ake Samuelson*.

Už pred zahájením večere opustili však dejisko *XV. MMO* delegácie *Juhoslávie* a *Mongolska* a v priebehu

pondelka 16. 7. sa rozchádzali do svojich domovov i ostatné zahraničné delegácie. Desatčlennú výpravu ČSSR odvážalo lietadlo ČSA zo šeremetevského letiska do Prahy v pondelok o 14,15 hod.

Ako to neraz konštatovali zúčastnení delegáti, mala moskovská olympiáda predovšetkým pracovný charakter. I napriek kratšej dobe, ktorú mali organizátori k dispozícii, bola po odbornej stránke pripravená dobre. Spoločenskej stránke bola tentoraz venovaná menšia pozornosť než pred rokom v Poľsku, či pred dvoma v ČSSR. Je to pochopiteľné, ak si uvedomíme, že v oboch zmienených prípadoch sa *MMO* konala mimo hlavného mesta, zatiaľ čo vo viac než šesťmiliónovej Moskve bola jedným z mnohých medzinárodných podujatí, ktorým svojím významom ani publicitou nemohla konkurovať. Za všetky stačí spomenúť aspoň dve: súčasne prebiehajúci VIII. moskovský filmový festival a pripravovanú VII. letnú univerziádu.

2. VÝSLEDKY SÚŤAŽE A NIEKOĽKO SLOV K NIM

Pri výbere úloh nemáva obvykle jury *MMO* šťastnú ruku. Výnimkou sa, žiaľ, nestala ani *XV. MMO*. Za veľmi vhodné vo vyššie uvedenom výbere súťažných úloh možno označiť prvú, štvrtú a snáď i tretiu a po dlhých diskusiách zaradenú značne preformulovanú piatu úlohu. Medzi ne sa však vlúdili pre žiakov značne nezvyklá druhá a šiesta úloha vyžadujúce konštrukciu príkladu. Hlavne pri šiestej úlohe išlo o konštrukciu z hľadiska stredoškóľkov umelú a prevažná väčšina účastníkov sa s ňou nedokázala vypoariadať. Výberu úloh nepomohlo teda ani to,

že členovia jury sa nemohli spoliehať na riešenia autorské, ale hľadali vlastné. Na ich ospravedlnenie nech slúži to, že nemali prakticky z čoho vyberať.

Ako sa s jednotlivými úlohami vypořádali súťažiaci, ukazuje *tabuľka*, ktorá udáva, koľko z nich dosiahlo príslušný počet bodov za riešenie jednotlivých úloh:

Počet bodov	Úloha č. 1	Úloha č. 2	Úloha č. 3	Úloha č. 4	Úloha č. 5	Úloha č. 6
8	—	—	42	—	—	10
7	—	—	4	—	—	2
6	37	48	8	38	62	2
5	6	6	4	22	3	3
4	3	4	4	20	2	3
3	5	0	6	14	1	1
2	14	0	9	9	2	2
1	15	2	15	8	17	1
0	45	65	33	14	38	101

Nasledujúca tabuľka nám ukáže, aký bodový zisk znamenali za riešenia jednotlivých úloh zúčastnené družstvá. V jej poslednom stĺpci je uvedené *neoficiálne poradie družstiev* podľa súčtu získaných bodov.

Krajina	Súčet bodov, ktoré družstvo získalo za:						Súčet bodov	Neofic. poradie
	ú. č. 1	ú. č. 2	ú. č. 3	ú. č. 4	ú. č. 5	ú. č. 6		
A — Rakúsko	15	23	48	43	15	0	144	8.
BG — Bulhar-sko	16	6	30	19	25	0	96	12.— 13.
C — Kuba	9	6	3	11	13	0	42	16.
CS — ČSSR	16	11	57	31	27	7	149	7.
D — NDR	39	18	31	46	40	14	188	3.
F — Francúzsko	18	13	36	28	42	16	153	6.
GB — Veľ. Bri-tánia	17	30	38	30	24	25	164	5.
H — Maďarsko	34	31	50	44	45	11	215	2.
M — Mongol-sko	10	21	12	12	10	0	65	15.
NL — Holand-sko	9	33	2	27	17	8	96	12.— 13.
PL — Poľsko	35	36	16	37	42	8	174	4.
R — Rumun-sko	30	18	43	29	13	8	141	9.
S — Švédsko	14	12	14	28	21	10	99	11.
SF — Fínsko	5	31	16	17	17	0	86	14.
SU — ZSSR	35	41	53	47	48	30	254	1.
YU — Juhoslá-via	20	6	50	37	20	4	137	10.

K ešte lepšiemu posúdeniu výsledkov dosiahnutých jednotlivými družstvami určite poslúži *tabuľka rozdelenia jednotlivých cien*:

Cena	A	BG	C	CS	D	F	GB	H	M	NL	PL	R	S	SF	SU	YU	Spolu
I.	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—	—	—	—	—	3	—	5
II.	—	—	—	1	3	3	—	2	—	—	2	1	1	—	2	—	15
III.	6	1	1	4	4	1	5	5	1	2	4	3	1	2	3	5	48
Spolu	6	1	1	5	7	4	6	8	1	2	6	4	2	2	8	5	68

O prvé tri miesta sa teda opäť podelili, tak ako na predchádzajúcich siedmich MMO, družstvá ZSSR, Maďarska a NDR. Bodový rozdiel medzi ZSSR a Maďarskom sa však v porovnaní s minulým rokom značne zvýšil, čím sovietske družstvo suverénnym spôsobom obhájilo svoje vlašajšie prvenstvo. Jeho suverenitu potvrdzujú nielen tri prvé ceny z piatich získané sovietskymi žiakmi, ale aj výsledky v jednotlivých úlohách, keď ho iba o málo predstihlo v prvej úlohe družstvo NDR a v tretej úlohe družstvo ČSSR. Družstvá Veľkej Británie a Poľska potvrdili svoj štandard z posledných rokov. Za veľmi príjemné prekvapenie možno označiť družstvo Francúzska, ktoré po ročnej prestávke vyslalo na MMO výber z *vítazov Concours général*. Mierne sa zlepšilo naše družstvo, čím sa mu podarilo zaujať popredné miesto medzi už tradične vyrovnanými družstvami stredu. Menej príjemne prekvapilo Rumunsko, ktoré dosiahlo snáď svoj najhorší výsledok v celej histórii MMO. Družstvo Fínska po debute na VII. MMO sa zúčastnilo súťaže po druhý raz a hneď pomerne úspešne. Za úspech možno považovať aj výsledok nekompletného družstva Kuby, ktorého

Krajina	Vedúci delegácie	Pedagogický vedúci
A – Rakúsko	prof. Thomas Mühlgasser	prof. Wolfgang Ratzinger
BG – Bulharsko	prof. Ivan Prodanov	Dimo Serafimov Angelov
C – Kuba	prof. Luis Davidson	F. Recio
CS – ČSSR	RNDr. Jozef Moravčík, CSc.	Jiří Mída
D – NDR	prof. dr. Helmut Bausch	prof. dr. Gustav Buroschi
F – Francúzsko	prof. dr. G. Glaeser	prof. dr. Deschamps
GB – Veľká Brit.	prof. Frank Budden	
H – Maďarsko	prof. Endre Hódi	dr. József Pelikán
M – Mongolsko	prof. U. Sanžimjav	G. Dagva
NL – Holandsko	prof. Ary van Tooren	J. van der Graats
PL – Poľsko	Mgr. Andrzej Małowski	dr. Maciej Bryński
R – Rumunsko	dr. Ioan Cuculescu	prof. Constantin Ottescu
S – Švédsko	prof. dr. Ake H. Samuelsson	Stig Westlund
SF – Fínsko	Jarkko Leino	Jarmo Nyström
SU – ZSSR	doc. Valentin A. Skvorcov	Lilija Paškova
YU – Juhoslávia	dr. Vladimír Mičić	Djordje Dugošija

priemerný výsledok na žiaka (8,4 b.) je lepší než priemerný výsledok mongolského družstva (8,125 b.). Tretia cena, ktorú získal najlepší kubánsky žiak, bude určite povzbudením pre ďalších reprezentantov prvého socialistického štátu na americkom kontinente.

V zložení vedúcich delegácií došlo v porovnaní s predchádzajúcim rokom len k niekoľkým zmenám. Skúsenosti z práce jury a dobré vzájomné poznanie väčšiny členov jury prispeli k jej úspešnej práci i k tomu, že sa v jej rokovaní nevyskytli žiadne rušivé momenty.

3. K ČESKOSLOVENSKEJ ÚČASTI NA XV. MMO

Družstvo ČSSR pre XV. MMO vybralo predsedníctvo *ÚVMO* ma záver sústredenia, ktoré sa konalo 25.—30. 6. 1973 v *Prahe-Malešiciach*. Vychádzalo pritom z výsledkov, ktoré dosiahli jednotliví žiaci v III. kole a v II. kole XXII. ročníka *MO*, v priebehu sústredenia a pri svojej prípadnej predchádzajúcej účasti na *MMO*. *Zoznam členov družstva* spolu s dosiahnutými výsledkami viz tabuľka (str. 199).

Výsledky, ktoré družstvo dosiahlo — ako už bolo vyššie spomenuté — sú relatívne dobré. Od *X. MMO*, ktorá bola zhodou okolností taktiež v Moskve, nezískal žiaden čs. účastník na *MMO* lepšiu ako 3. cenu. Vo svetle tohto faktu je tedy *Ferstova druhá cena* nesporným úspechom. Na druhej strane si však treba uvedomiť, že traja členovia družstva (*Horák, Kmošek, Vrto*) sa zúčastnili na *MMO* už tretí raz a pre ďalších troch (*Ferst, Slačálek, Šimša*) bola moskovská olympiáda ich druhou *MMO*. Až na *Fersta* (ktorý bol mimochodom vlni v *Toruni* najhorší z našich a získal len 5 bodov) a *Kmoška* sa skúsení repre-

Por. Meno žiaka č.	Škola a trieda	Počet bodov za rieš. ul.						Spolu bodov	Cena
		1	2	3	4	5	6		
1. Ferst Pavel	3d, gymn. Praha 3, Sladkovského nám.	1	6	8	1	6	7	29	II.
2. Horák Karel	4b, gymn. Strakonice	0	0	6	4	1	0	11	
3. Chrz Tomáš	4f, gymn. Praha 2, ul. W. Piecka	3	5	8	4	1	0	21	III.
4. Kindlmann Pavel	3a, gymn. České Budějovice	2	0	7	6	6	0	21	III.
5. Kmošek Miroslav	4a, gymn. Brno, tř. kpt. Jaroše	6	0	8	3	6	0	23	III.
6. Slačálek Petr	3f, gymn. Praha 2 ul. W. Piecka	2	0	4	5	1	0	12	
7. Šimša Jaro- mír	3b, gymn. Ostrava, Šmeralova 1	0	0	8	4	6	0	18	III.
8. Vrto Imrich	4. tr. gymn. Rimav. So- bota	2	0	8	4	0	0	14	
Družstvo celkom		16	11	57	31	27	7	149	

zentanti nepresadili. Príjemným prekvapením je výsledok oboch nováčkov družstva, ktorí získali svorne po 21 bodov a tretiu cenu. Najlepšie si naši žiaci poradili s *treťou* úlohou, kde viedlo k cieľu rutinné riešenie rovníc a nerovností. Pomerne dobrý je výsledok v *štvrtej* úlohe, kde však viedli k zbytočným bodovým stratám nedôslednosti pri dôkaze minimálnosti cesty, resp. pokrytia. S trochu nezvyklou piatou úlohou si poradili len štyria, ale ešte horší je výsledok v *prvej* úlohe — československej. Tu sa ukázala pre našich žiakov handicapom znalosť komplexných čísel. Niekoľkí totiž upravili dokazovanú nerovnosť na ekvivalentnú nerovnosť pre súčet kosínov, s ktorou si už nevedeli rady. Nevyhovujúci výsledok v *šiestej* úlohe neprekvapuje, ale zaráža to, že pri *druhej* úlohe sa až štyria z našich snažili dokázať sporom neexistenciu množiny požadovaných vlastností, pričom traja boli dokonca presvedčení, že sa im to podarilo. V riešeníach našich žiakov sa až príliš často objavujú nepresnosti vo vyjadrovaní, rôzne okrádlené formulácie (ľahko sa dokáže; z obrázku je zrejmé; apod.), nedôslednosť a nedostatok vytrvalosti. Na odstránenie týchto neduhov sa bude treba zamerať pri práci s matematickými talentami, ak chceme, aby toho v budúcnosti dokázali viac — a nielen na *MMO*.

Za úspech *ČSSR* možno považovať aj to, že do širšieho výberu 14 úloh prípravná komisia zaradila dokonca *dve československé úlohy*, z ktorých veľmi pekná úloha *prof. Fiedlera* bola nakoniec prijatá. K úspechu práce jury prispela československá delegácia viacerými konštruktívnymi návrhmi a neocitla sa ani raz v konfliktnej situácii, akých bolo na *XV. MMO* celkove veľmi málo.

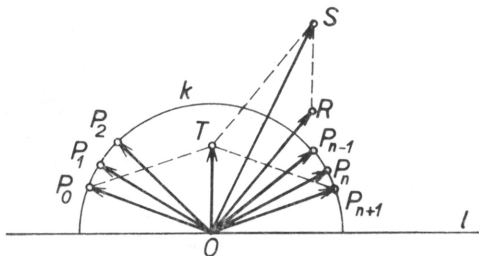
Po spoločenskej stránke reprezentovalo družstvo *ČSSR* veľmi dobre. Tvorilo jednoliaty kolektív so zmyslom pre poriadok a disciplinovanosť. Všetci jeho členovia si odnášali z hlavného mesta *ZSSR* tie najlepšie dojmy.

4. RIEŠENIA SÚŤAŽNÝCH ÚLOH

RIEŠENIE 1. ÚLOHY

Nech n je nepárne číslo. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou. Pre $n = 1$ zrejme platí $|\overrightarrow{OP_1}| = 1$.

Nech pre nejaké n platí $|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \dots + \overrightarrow{OP_n}| \geq 1$. Uvažujme o $n + 2$ jednotkových vektoroch $\overrightarrow{OP_0}, \overrightarrow{OP_1}, \dots, \overrightarrow{OP_n}, \overrightarrow{OP_{n+1}}$, ktorých koncové body $P_i, i = 0, 1, \dots, n + 1$, ležia v uvedenom poradí zľava doprava na polkružnici k so stredom v bode O a polomerom 1 (pozri obr. 71). Nech $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \dots + \overrightarrow{OP_n}$.



Obr. 71

Vektor $\overrightarrow{OR}$ leží zrejme vo vnútri uhla $\sphericalangle P_1OP_n$ a podľa predpokladu platí $|\overrightarrow{OR}| \geq 1$. Označme $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OP_0} + \dots + \overrightarrow{OP_{n+1}}$. Potom $\overrightarrow{OS} = \sum_{i=0}^{n+1} \overrightarrow{OP_i} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OT}$. Nech $\alpha = \sphericalangle TOR$. Zrejme platí $0 \leq \alpha \leq \sphericalangle TOP_{n+1} =$

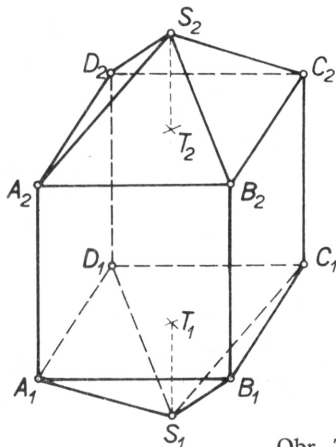
$= \frac{1}{2} \angle P_0 O P_{n+1} < \frac{\pi}{2}$. Ak $\alpha = 0$, potom $|\vec{OS}| = |\vec{OR}| + |\vec{OT}| \geq 1$. Ak $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, je $|\vec{OS}| > |\vec{OR}| \geq 1$, pretože uhlopriečka rovnobežníka vychádzajúca z vrchola, pri ktorom je ostrý uhol, je dlhšia ako ľubovoľná z jeho strán. Tým je tvrdenie dokázané.

RIEŠENIE 2. ÚLOHY

Odpoveď na položenú otázku je pozitívna, ako ukazuje nasledujúca konštrukcia: Nech $A_1 B_1 C_1 D_1 A_2 B_2 C_2 D_2$ je jednotková kocka. Označme T_i stred steny $A_i B_i C_i D_i$, $i = 1, 2$, a na priamke $T_1 T_2$ zvolme body S_1, S_2 (pozri obr. 72) tak, aby platilo $T_1 S_1 = T_2 S_2 = \frac{1}{2}$. Potom množina

$$\mathbf{M} = \{A_1, B_1, C_1, D_1, S_1, A_2, B_2, C_2, D_2, S_2\}$$

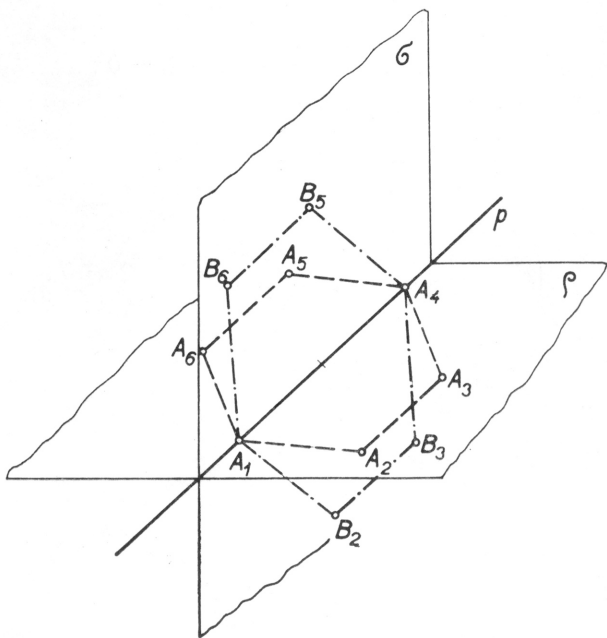
má požadované vlastnosti, ako sa ľahko presvedčíme. Tak napr. pre priamky určené bodom A_1 a ľubovoľným iným bodom množiny $\mathbf{M}$ platí: $A_1 B_1 \parallel A_2 B_2$, $A_1 C_1 \parallel A_2 C_2$, $A_1 D_1 \parallel A_2 D_2$, $A_1 A_2 \parallel S_1 S_2$, $A_1 B_2 \parallel D_1 C_2$, $A_1 C_2 \parallel A_2 S_2$, $A_1 D_2 \parallel B_1 C_2$, $A_1 S_1 \parallel S_2 C_2$, $A_1 S_2 \parallel C_2 S_1$. Pre ľubovoľný iný vrchol kocky je situácia analogická. Pre priamky určené bodom S_1 , resp. S_2 a ľubo-



Obr. 72

voľným iným bodom množiny $\mathbf{M}$ okrem už uvedených vyššie platí $S_1B_1 \parallel S_2D_2$, $S_1C_1 \parallel S_2A_2$, $S_1D_1 \parallel S_2B_2$, $S_1A_2 \parallel S_2C_1$, $S_1B_2 \parallel S_2D_1$, $S_1D_2 \parallel S_2B_1$.

INÉ RIEŠENIE (T. CHRZ — upravené): Nech ϱ , σ sú na seba kolmé roviny a p priamka, v ktorej sa pretínajú. Nech $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ je pravidelný šesťuholník ležiaci v rovine ϱ tak, že $A_1 \in p$, $A_4 \in p$ a $A_1B_2B_3A_4B_5B_6$ s ním zhodný pravidelný šesťuholník ležiaci v rovine σ (obr. 73).



Obr. 73

Potom množina $\mathbf{M} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, B_2, B_3, B_5, B_6\}$ má požadované vlastnosti. Je zrejmé, že vrcholy každého zo šesťuholníkov majú žiadané vlastnosti. Stačí sa preto presvedčiť s prihliadnutím na symetriu, či existuje rovnobežka určená bodmi množiny $\mathbf{M}$ ku každej priamke určenej niektorým z bodov B_2, B_3, B_5, B_6 a ľubovoľným z bodov A_2, A_3, A_5, A_6 . Zrejme platí: $B_2A_2 \parallel B_5A_5$, $B_2A_3 \parallel B_5A_6$, $B_2A_5 \parallel B_5A_2$, $B_2A_6 \parallel B_5A_3$; pre body B_3, B_6 je situácia analogická.

RIEŠENIE 3. ÚLOHY

Nech x_0 je reálny koreň rovnice

$$(1) \quad x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0.$$

Potom zrejme $x_0 \neq 0$ a platí

$$x_0^2 + ax_0 + b + a\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0^2} = 0$$

čiže

$$(2) \quad \left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right)^2 + a\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) + b - 2 = 0.$$

Z (2) je zrejmé, že spolu s x_0 tiež $\frac{1}{x_0}$ je reálnym koreňom rovnice (1). Číslo $y_0 = x_0 + \frac{1}{x_0}$, pre ktoré platí $|y_0| \geq 2$ je však v takom prípade reálnym koreňom rovnice

$$(3) \quad y^2 + ay + b - 2 = 0.$$

Rovnica (3) má reálne korene vtedy a len vtedy, keď platí $a^2 - 4b + 8 \geq 0$

čiže

$$(4) \quad b \leq \frac{1}{4}a^2 + 2.$$

Nech platí (4). Rovnica (1) bude mať reálny koreň vtedy a len vtedy, keď pre aspoň jeden z reálnych koreňov

$$y_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b + 8}}{2} \leq \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b + 8}}{2} = y_2$$

rovnice (3) platí $|y_i| \geq 2$. Zistíme, kedy bude táto podmienka splnená. Môže tak byť buď pre

$$\frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b + 8}}{2} \leq -2 \text{ čiže}$$

$$4 - a \leq \sqrt{a^2 - 4b + 8}, \text{ z čoho pre } a \leq 4 \text{ máme}$$

$$(5) \quad b \leq 2a - 2$$

alebo pre

$$\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b + 8}}{2} \geq 2 \text{ čiže } \sqrt{a^2 - 4b + 8} \geq a + 4,$$

z čoho pre $a \geq -4$ dostaneme

$$(6) \quad b \leq -2a - 2.$$

Znáznorníme si množinu bodov (a, b) vyhovujúcich pre $a \in \langle -4; 4 \rangle$ nerovnostiam (4), (5), resp. (4), (6) v rovine s použitím kartézskych súradníc (pozri obr. 74).

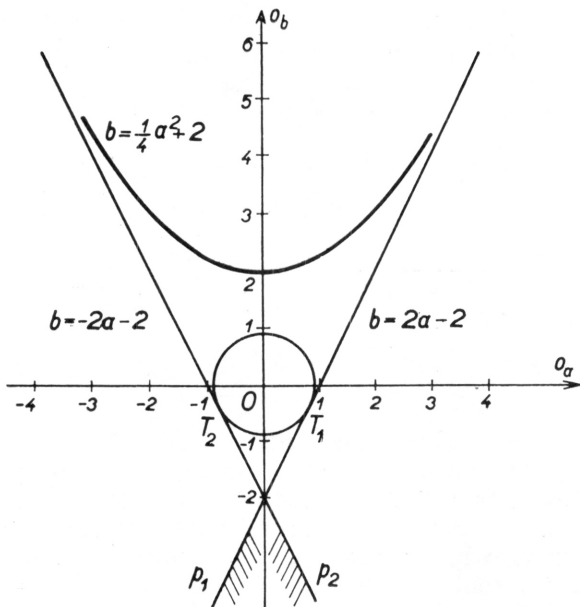
K tomu, aby sme našli minimum súčtu $a^2 + b^2$ tých koeficientov a, b , pri ktorých má rovnica (1) aspoň jeden reálny koreň, stačí vypočítať vzdialenosť $OT_1 = OT_2$, kde T_1, T_2 sú dotykové body kružnice so stredom v bode $(0, 0)$ s priamkami p_1, p_2 (obr. 74).

$$\text{Zrejme platí } 5 \cdot OT_1^2 = 4 \text{ čiže } OT_1^2 = \frac{4}{5} = \min(a^2 + b^2).$$

$$\text{Pre } a = \frac{4}{5}, b = -\frac{2}{5} \text{ je } a^2 + b^2 = \frac{4}{5} \text{ a rovnica (1) má}$$

$$\text{dvojnásobný koreň } x = -1; \text{ pre } a = -\frac{4}{5}, b = -\frac{2}{5}$$

je tiež $a^2 + b^2 = \frac{4}{5}$ a rovnici (1) vyhovuje ako dvojnásobný koreň $x = 1$.

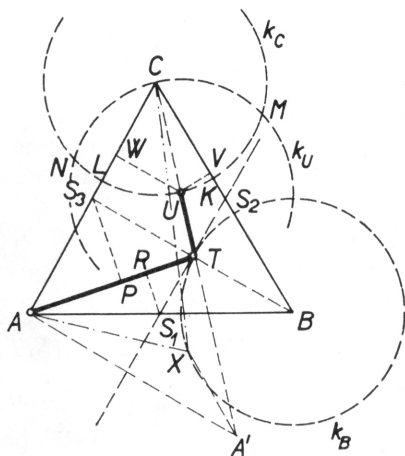


Obr. 74

RIEŠENIE 4. ÚLOHY

Označme A, B, C vrcholy skúmaného rovnostranného trojuholníka, pričom východiskový bod prieskumnej cesty ženistu označíme A . Nech a je dĺžka strany troj-

uholníka ABC . Označme $k_B = k(B; \frac{\sqrt{3}}{4}a)$, $k_C = k(C; \frac{\sqrt{3}}{4}a)$ (obr. 75). Je zřejmé, že k tomu, aby ženista preskúmal



Obr. 75

body B , resp. C , musí sa na svojej ceste z vrcholu A dostať do niektorého bodu na kružnici k_B , resp. k_C . Ďalej je zřejmé, že ak ženista dosiahne nejaký bod X kružnice k_B , potom najkratšou cestou na kružnicu k_C bude príslušná časť úsečky XC . Označme S_1, S_2, S_3 v uvedenom poradí stredy strán AB, BC, CA trojuholníka ABC a T priesečník výšky BS_3 s kružnicou k_B . Bod T je zřejmé zároveň dotykovým bodom priamky S_1S_2 a kružnice k_B . Nech U je priesečník úsečky TC s kružnicou k_C . Ukážeme, že lomená čiara ATU je hľadanou najkratšou cestou, po ktorej ženista splní svoju úlohu.

Nech A' je symetrický obraz bodu A vzhľadom na os S_1S_2 . Keďže trojuholníky ATS_1 a CTS_2 sú zrejme zhodné, platí $\sphericalangle ATS_1 = \sphericalangle CTS_2 = \sphericalangle A'TS_1$ a priamky $A'T$, TC sú totožné. Ak X je ľubovoľný bod na kružnici k_B , potom zrejme platí: $AX + XC \geq A'X + XC \geq A'T + TC = AT + TC$, pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $X = T$. Z toho vyplýva, že lomená čiara ATU je najkratšou cestou z vrcholu A na kružnicu k_C cez bod na kružnici k_B .

Zostáva nám ešte dokázať, že prejdením tejto cesty preverí ženista celý trojuholník ABC . Označme P , resp. R päť výšky z vrcholu S_3 , resp. S_1 , v trojuholníku AS_3T ,

resp. AS_1T . Zrejme je $S_3P < S_3T$, $S_1R < S_1T = \frac{1}{4}a <$

$< a \frac{\sqrt{3}}{4} = S_3T$. Z toho vyplýva, že po ceste AT preverí

ženista vnútro i hranicu štvoruholníka AS_1TS_3 a keďže

$TS_1 = TS_2 = \frac{1}{4}a < TB = TS_3$, tiež vnútro i hranicu

trojuholníka S_1BS_2 . Označme V , resp. W , päť kolmice spustenej z bodu U na priamku BC , resp. CA . Zrejme platí $UV < TS_2$ a $UW < TS_3$. Po ceste TU preverí preto ženista vnútro i hranicu štvoruholníkov $TUVS_2$ i $TUWS_3$, pričom body V , resp. W , ležia zrejme vo vnútri úsečky KC , resp. LC , kde K , resp. L , je priesečník kruž-

nice k_C s úsečkou BC , resp. CA . Nech $k_U = k(U; \frac{\sqrt{3}}{4}a)$

a M , N sú priesečníky kružníc k_C , k_U (pozri obr. 75). Keďže oblúk MN kružnice k_C prislúcha stredovému uhlu 120° a oblúk KL tejto kružnice, vo vnútri ktorého leží bod U , prislúcha stredovému uhlu 60° , je výseč CKL časťou výseče CMN , z čoho vyplýva, že z bodu U preverí ženista tiež vnútro i hranicu celej výseče CKL . Tým sme sa

presvedčili, že z lomenej čiary ATU preverí ženista celý pozemok.

Riešením úlohy je tiež lomená čiara z vrcholu A na kružnicu k_B cez kružnicu k_C , ktorá je súmerná s lomenou čiarou ATU podľa osi AS_2 .

RIEŠENIE 5. ÚLOHY

Nech $f, g \in \mathbf{G}$, $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$. Potom podľa vlastností a), b) tiež $g \circ f^{-1} \in \mathbf{G}$, pričom $g[f^{-1}(x)] = a \frac{x-b}{a} + c = x - b + c$. Podľa c) však musí byť potom $-b + c = 0$ čiže $c = b$. To znamená, že pre $f \in \mathbf{G}$, $f(x) = ax + b$ je b jednoznačne určené číslom a , označme $b = \varphi(a)$. Pre $f : f(x) = ax + \varphi(a)$ existuje podľa c) x_f tak, že $x_f = ax_f + \varphi(a)$. Z toho dostaneme $(1-a)x_f = \varphi(a)$ čiže platí buď $a = 1$, $\varphi(a) = 0$ a x_f je ľubovoľné reálne číslo alebo $a \neq 1$ a x_f je jednoznačne určené: $x_f = \frac{\varphi(a)}{1-a}$.

Nech $f : f(x) = ax + \varphi(a)$ a $g : g(x) = bx + \varphi(b)$ sú ľubovoľné dve funkcie z $\mathbf{G}$, pričom $b \neq 1$. Potom $f \circ g \in \mathbf{G} : f[g(x)] = a(bx + \varphi(b)) + \varphi(a) = abx + a\varphi(b) + \varphi(a)$, ale tiež $g \circ f \in \mathbf{G} : g[f(x)] = b(ax + \varphi(a)) + \varphi(b) = bax + b\varphi(a) + \varphi(b)$. Na základe vyššie uvedeneho však musí platiť: $a\varphi(b) + \varphi(a) = b\varphi(a) + \varphi(b)$ čiže

$$(1-b)\varphi(a) = (1-a)\varphi(b) \text{ a ak } a \neq 1, \text{ potom } \frac{\varphi(a)}{1-a} = \frac{\varphi(b)}{1-b}.$$

Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

RIEŠENIE 6. ÚLOHY

Čísla b_k , $k = 1, 2, \dots, n$ možno zvoliť napr. takto:

$$b_k = a_1 q^{k-1} + a_2 q^{k-2} + \dots + a_{k-1} q + a_k + a_{k+1} q + \dots \\ \dots + a_n q^{n-k} = \sum_{i=1}^n a_i q^{|k-i|}$$

a) Zrejme platí $b_k > a_k$ pre všetky $k = 1, 2, \dots, n$;

$$b) \quad b_{k+1} - q b_k = \sum_{i=1}^n a_i q^{|k+1-i|} - q \sum_{i=1}^n a_i q^{|k-i|} = \\ = \sum_{i=1}^n a_i (q^{|k+1-i|} - q^{|k-i|+1}) = \sum_{j=1}^{n-k} a_{k+j} q^{j-1} (1 - q^2) > 0,$$

z čoho vyplýva $\frac{b_{k+1}}{b_k} > q$ pre $k = 1, 2, \dots, n-1$.

$$q b_{k+1} - b_k = q \sum_{i=1}^n a_i q^{|k+1-i|} - \sum_{i=1}^n a_i q^{|k-i|} = \\ = \sum_{j=1}^k a_j q^{k-j} (q^2 - 1) < 0, \text{ z čoho pre } k = 1, 2, \dots, n-1$$

hneď dostaneme: $b_{k+1}/b_k < 1/q$.

$$c) \quad \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_i q^{|k-i|} \right) < \sum_{i=1}^n a_i (1 + 2q + 2q^2 + \dots + 2q^{n-1}) = \\ = \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{j=0}^{n-1} q^j + \sum_{k=1}^{n-1} q^k \right) < \left(\frac{1}{1-q} + \frac{q}{1-q} \right) \sum_{i=1}^n a_i = \\ = \frac{1+q}{1-q} \sum_{i=1}^n a_i.$$

OBSAH

Předmluva	3
I. Průběh XXII. ročníku matematické olympiády	7
II. Přípravné úlohy I. kola	34
1. Kategorie A	34
2. Kategorie B	44
3. Kategorie C	57
4. Kategorie Z	67
III. Soutěžní úlohy I. kola	77
1. Kategorie A	77
2. Kategorie B	91
3. Kategorie C	106
4. Kategorie Z	116
IV. Soutěžní úlohy II. kola	132
1. Kategorie A	132
2. Kategorie B	142
3. Kategorie C	153
4. Kategorie Z	161
V. Řešení soutěžních úloh III. kola	168
VI. Zpráva o XV. mezinárodní matematické olympiádě	185

Edice Pomocné knihy pro žáky

Za přispění spolupracovníků zpracovali doc. Jan Vyšín, CSc.,
Vlastimil Macháček, Jiří Mída, dr. Jozef Moravčík, CSc.,
a dr. František Zítek, CSc.

DVACÁTÝ DRUHÝ ROČNÍK
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Obálku a vazbu navrhl Jaromír Jarkovský
Vydání 1. — Praha 1974 — Počet stran 212
Odpovědná redaktorka: Květoslava Brázdová
Výtvarná redaktorka: Milada Slaninová
Technická redaktorka: Marcela Kašparová

Vytiskla Státní tiskárna, n. p., závod 1, Praha 1, Karmelitská 6
AA 7,50/6,54 AA textu, 0,96 AA grafiky/ — VA 7,90
Náklad 5 000 výtisků
Tematická skupina a podskupina 03/2
Cena brožovaného výtisku Kčs 9,50
505/21, 825

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze
jako svou publikaci č. 45-0-06

14-612-74

Kčs 9,50

matematická
olympiáda

MO

SPN 45—D—06

14—612—74
93/2 Kčs 9,50