

24. ročník matematické olympiády

Jan Vyšín (editor); Petr Fabinger (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); František Zítek (editor): 24. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1974-1975. 17. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1977.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404654>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

XXIV. ročník matematické olympiády



DVACÁTÝ ČTVRTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

*Zpráva a řešení úloh ze soutěže
konané ve školním roce 1974 – 1975*

SEDMNÁCTÁ MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ
OLYMPIÁDA

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ
PRAHA

Za přispění spolupracovníků zpracovali doc. Jan Vyšín, CSc.,
Petr Fabinger, dr. Jiří Mída, doc. dr. Jozef Moravčík, CSc.
a dr. František Zítek, CSc.

Slovenské části textu přeložil doc. dr. Jozef Moravčík, CSc.

Recenzovali dr. Jitka Kučerová a dr. Miroslav Šisler, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1977

Předmluva

Milí mladí přátelé,

ve školním roce 1974/75 proběhl XXIV. ročník československé celostátní matematické olympiády a v Bulharsku byla uspořádána XVII. mezinárodní matematická olympiáda. Československo se zúčastnilo všech až dosud konaných mezinárodních matematických olympiád, avšak s umístěním československého družstva v žebříčku účastnických zemí nejsme spokojeni. Tento žebříček je sice neoficiální, neboť mezinárodní matematické olympiády jsou podle svého statutu soutěží jednotlivců, ale přesto pořadí jednotlivých států ukazuje ne sice úroveň vyučování matematice, ale spíše péči o matematické talenty v příslušném státě. Naše družstvo se umísťovalo zpravidla kolem středu žebříčku, v posledních letech klesá do dolní poloviny.

Uvažovalo se mnoho o této neradostné situaci a hledaly se cesty k nápravě. Vznikly různé pomocné akce částečně podle zahraničních vzorů: krátká *přípravná soustředění* reprezentačních družstev, semináře pro zvláště schopné žáky, které probíhají v Praze po větší část školního roku, individuální péče o matematické talenty v mimopražských střediscích, v poslední době byly zřízeny *matematické třídy* při několika

gymnáziích s internáty a byl zorganizován tzv. *korespondenční seminář*, který je jakýmsi rozšířením pražského semináře na mimopražské studenty a má zmenšit diskriminaci v jejich přípravě.

Ale to vše se ukázalo prozatím slabé, i když o výsledcích posledních opatření se dosud nemůžeme vyjádřit. Pocho-pitelně, že při otvírání nových akcí se vždy znovu uvažovalo o příčinách našich malých úspěchů. Nikdy jsme se nedomní-vali, že máme méně schopnou mladou generaci než jiné státy; mluvílo se však často obecně o méně kvalitní přípravě našich žáků a v souvislosti s tím i o jejich menší nervové stabilitě. Otevřeně řečeno jde o tzv. trému, zmatkaření, dokonce panikaření, neschopnost umět překonávat částečný neúspěch; zkrátka jde o komplex zaviněný často nedostatečnou sebejistotou, vědomím vlastních nedostatků. Před ně-kolika lety při hodnocení výsledků v mezinárodní mate-matické olympiádě padla slova „o nerovném boji amatérů s profesionály“. Něco na tom je: amatér, který chce úspěšně zápolit s profesionálem, musí mít při řádově stejných schop-nostech stejně mnoho zkušeností; musí mít tedy také podmínky, zejména časové, aby tyto zkušenosti nashromáždil. Nechceme tu rozvíjet paralelu mezi soutěžením v mate-matice a soutěžením v tělovýchově a sportu, ale alespoň jedné obdoby bychom si měli všimnout: péče o špičkové talenty musí vyrůstat z dobré masové základny. To znamená, že bez pozvednutí obecné úrovně vyučování matematice bude asi všechna péče o matematické talenty málo účinná, neboť bude velmi obtížné objevovat a vyhledávat nadané žáky. To je první styčný bod mezinárodních matematických olympiád a masové výuky matematice.

Druhá věc, která se týká jak špičkových talentů, tak i všech žáků, jsou už zmíněné matematické zkušenosti. Samozřejmě, že u talentovaných žáků hrají zkušenosti mnohem větší, ne-li vůbec rozhodující roli. O jaké matematické zkušenosti jde? Asi v menší míře jde o znalosti pojmů a vět a o zkušenosti s jejich používáním; převážně půjde o zkušenosti s pracovními metodami v oblasti školské matematiky. Metody, kterých se užívá při dokazování, při určování matematického objektu daných vlastností, obecněji při řešení problémů, musí být dobře roztrženy a jejich uživatel, např. řešitel úloh matematické olympiády, musí mít dostatek *zkušeností* s jejich používáním, tzn. musí znát dostatek situací, v nichž se dá ta která metoda s úspěchem aplikovat. I zde bychom mohli velmi dobře sledovat období s myšlenkově náročnou prací některých dělnických profesí. Čím dále tím více se ukazuje, že pracovní metody jsou ve školské matematice a možná v matematice vůbec hybnou pákou a klíčem k tvořivé práci.

Nashromáždění zkušeností na určité úrovni (např. na úrovni talentovaného žáka střední školy) je podmíněno vytrvalou prací, *dostatkem času* a soustředěním. Soustředit se na určitou práci, např. na studium matematiky, vyžaduje, aby byly k dispozici jisté delší souvislé časové úseky, v nichž by studující mladý člověk nebyl rozptylován jinými povinnostmi. Možná, že úprava pracovního režimu v tomto směru by rozřešila i dříve zmíněnou otázku nervové lability našich reprezentantů na mezinárodní olympiádě.

Už také bylo řečeno, že nadaní a schopní mladí lidé jsou bohatstvím národa, na nich bude v budoucnu záležet, v jaké šíři a jak rychle se rozvine naše společnost. Jsme povinni

věnovat dostatek péče všem, ale zvláštní péči nadaným mladým lidem.

Na konci této trochu akademicky stylizované předmluvy jsme v pokusení dát vám konkrétní úkol:

Zkuste vyhledat v oblasti středoškolské matematiky (bez ohledu na její tradiční složky algebru, geometrii atd.) pro každou z několika obecných pracovních metod aspoň tři zcela rozličné příklady jejího použití. Pošlete-li nám svoje práce, bude to jakási „volná soutěž“ mimo olympiádu. Výběr situačních příkladů vám usnadní „ročníkové brožury MO“ popř. svazečky knižnice Škola mladých matematiků.

Navrhujeme vám tyto obecné metody: metoda souřadnic, matematická indukce, zbytkové třídy, míra, rozklad zobrazení.

Mnoho úspěchů při studiu matematiky i při řešení soutěžních úloh vám přeje

ÚV MO

I. O průběhu XXIV. ročníku matematické olympiády

1. ORGANIZACE SOUTĚŽE

Pořadatelem soutěže XXIV. ročníku matematické olympiády byla opět *ministerstva školství ČSR a SSR s Matematickým ústavem ČSAV v Praze (MÚ ČSAV)*, s *Jednotou čs. matematiků a fyziků (JČSMF)* a *Jednotou slovenských matematiků a fyziků (JSMF)* za spolupráce s orgány *Socialistického svazu mládeže (SSM)*. Protože připravovaný nový statut MO nebyl dosud schválen, řídila se soutěž XXIV. ročníku MO opět podle statutu, který byl uveřejněn ve Věstníku MŠK, roč. XIX, str. 126, 127, směrnice 37 ze dne 30. IV. 1963.

Žáci soutěžili celkem ve čtyřech kategoriích: kategorie A je určena pro žáky III. a IV. ročníků škol II. cyklu, kategorie B pro žáky II. ročníků a kategorie C pro žáky I. ročníků těchto škol. V kategorii Z soutěží žáci základních devítiletých škol, především žáci 9. ročníků. Bylo ovšem možné, aby žák soutěžil i ve vyšší kategorii, než do které patřil.

2. SLOŽENÍ ÚSTŘEDNÍHO VÝBORU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

V červnu r. 1974 byl jmenován ministerstvy školství ČSR a SSR nový ÚV MO s platností od 1. ledna 1974 ve složení:

Předseda: *doc. Jan Vyšín, CSc., MÚ ČSAV, Praha*

1. místopředseda: *doc. dr. Jozef Moravčík, CSc., VŠD, Žilina*

2. místopředseda: *prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc., MÚ ČSAV, Praha*

1. jednatel: *Petr Fabinger, pedagogická fakulta KU, Praha*

2. jednatel: *dr. Jiří Mída, pedagogická fakulta KU, Praha*

zástupce MŠ ČSR: *Václav Šůla*

zástupce MŠ SSR: *Michal Zöldy*

zástupce ÚV SSM: *Jana Pomazalová, gymnázium, tř. kpt. Jaroše, Brno*

Ostatní členové:

Anton Auxt, KPÚ, Banská Bystrica

dr. František Běloun, KPÚ, Praha

doc. dr. Lev Bukovský, CSc., přírodovědecká fakulta UPJŠ, Košice

František Hradecký, Praha

dr. Ivan Korec, CSc., přírodovědecká fakulta UK, Bratislava

doc. dr. Alois Kufner, CSc., MÚ ČSAV, Praha

dr. Vlastimil Macháček, pedagogická fakulta KU, Praha

Olga Maříková, gymnázium, Nad štolou 1, Praha 7

akademik Josef Novák, MÚ ČSAV, Praha

Vítazoslav Repáš, gymnázium, Novohradská ul., Bratislava
Stanislav Rypáček, gymnázium, Litoměřická, Praha 9
dr. Jiří Sedláček, CSc., MÚ ČSAV, Praha
Ing. Oldřich Skopal, gymnázium, tř. kpt. Jaroše, Brno
Jiří Šídlo, gymnázium, Nad štolou 1, Praha 7
Miloslav Šmerda, ZDŠ, Bílovice n. Svitavou
František Veselý, Praha
dr. František Zítek, CSc., MÚ ČSAV, Praha

Dalšími členy ÚV MO byli předsedové krajských výborů matematické olympiády:

Praha: *prof. dr. Václav Pleskot*, ČVUT, Praha
Středočeský kraj: *Ludmila Tréglová*, gymnázium, Říčany
Jihočeský kraj: *dr. ing. Lada Vaňatová*, pedagogická fakulta, České Budějovice
Západočeský kraj: *Věra Rádlová*, gymnázium, nám. Odbo-
rářů, Plzeň
Severočeský kraj: *Vladimír Blažek*, pedagogická fakulta, Ústí nad L.
Východočeský kraj: *Josef Kubát*, VŠCHT, Pardubice
Jihomoravský kraj: *dr. Petr Benda*, VUT, Brno
Severomoravský kraj: *prof. dr. Miloslav Zedek*, přírodo-
vědecká fakulta UP
Bratislava: *Katarína Hajtášová*, přírodovědecká fakulta UK
Západoslovenský kraj: *doc. dr. Ondrej Šedivý*, pedagogická
fakulta, Nitra
Středoslovenský kraj: *dr. Ladislav Berger*, VŠD, Žilina
Východoslovenský kraj: *dr. Martin Gavalec*, přírodovědecká
fakulta VPJŠ, Košice

Pracovní *předsednictvo* ÚV MO (*PÚV MO*) tvořili (v abecedním pořadí):

Anton Auxt, Petr Fabinger, prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc., dr. Jiří Mída, doc. dr. Jozef Moravčík, CSc., dr. J. Sedláček, CSc., Václav Šůla, doc. Jan Vyšín, CSc., dr. František Zítek, CSc., Michal Zöldy.

3. *SCHŮZE ÚV MO*

Během 24. ročníku MO se konala dvě zasedání ÚV MO: v Praze ve dnech 5. a 6. prosince 1974 a v Ústí n. L. ve dnech 25. a 26. dubna 1975 u příležitosti konání celostátního kola MO kategorie A.

Na *zimním* zasedání bylo při honocení uplynulého XXIII. roč. MO konstatováno, že se dále zvyšuje počet řešitelů MO, zvláště v kategorii Z a C. KV MO pokračovaly v organizování kursů a týdenních soustředění účastníků MO kategorie B a C. Bohužel po uveřejnění směrnice MŠ ČSR č. 4 Instrukce pro organizování a hospodářské zajištění soutěží žáků a učňů škol, výchovných zařízení a odborných učilišť spravovaných národními výbory ve *Věstníku MŠ ČSR*, roč. XXX., seš. 2, ze dne 20. února 1974, některé KNV odmítají financovat tato soustředění.

Celostátní soustředění řešitelů MO a FO se konala v Zadově, obec Stachy, okres Prachatice od 17. června do 6. července 1974.

Dále bylo pořádáno *přípravné soustředění pro MMO* od 17. do 22. června 1974 v Praze.

ÚV MO se rozhodl ustavit *odborné komise* pro výběr úloh (vedoucími určení: prof. Fiedler, doc. Moravčík,

dr. Macháček a A. Auxt), pro ediční činnost a pro ŠMM. K nadcházejícímu jubileu MO jmenoval komisi propagační a komisi pro odměny pracovníkům MO k 25. výročí soutěže.

Na tomto zasedání informoval ředitel MÚ ČSAV akademik Josef Novák, že se Matematický ústav ČSAV rozhodl odměňovat vtipné a originální řešení úlohy III. kola kategorie A peněžní částkou až do výše 1000 Kčs. ÚV MO toto rozhodnutí přivítal, neboť účastníky III. kola jistě zaktivizuje.

Na *jarním* zasedání byl hodnocen dosavadní průběh soutěže a její další vyhlídky. Přitom bylo rozhodnuto: 1. přizpůsobit úroveň kat. Z a C tak, aby byly přístupné absolventům 7. resp. 8. tříd, 2. kategorie Z určit nejen žákům devátých, ale i osmých tříd ZDŠ, 3. pracovní komise pro úlohy rozšířit o další profesory středních škol.

V souvislosti s nadcházejícím jubileem olympiády byly projednány akce propagující MO a odměny pracovníkům MO.

Spolupráce se SSM se rozvíjí velmi slibně. ÚV SSM věnuje nový putovní pohár pro vítěze MO, absolutnímu vítězi MO poskytne ÚV SSM zájezd do SSSR a další úspěšní řešitelé III. kola kategorie A se zúčastní týdenního rekreačního pobytu v ČSSR (společně s účastníky FO). ÚV SSM přislíbil hmotnou podporu i při samotné organizaci soutěže. Je třeba, aby se rozšířila i spolupráce mezi krajskými orgány MO a SSM.

Doc. Moravčík podal zprávu o nové pomocné akci, tzv. *korespondenčním semináři*. Informaci o něm najde čtenář v samostatném odstavci.

4. PRŮBĚH JEDNOTLIVÝCH KOL SOUTĚŽE

Organizace jednotlivých kol soutěže nebyla v XXIV. ročníku MO nijak podstatně změněna; byly upraveny jen dílčí termíny odevzdání úloh žáky, resp. posunuty termíny II. kola.

I. kolo, tzv. *studijní*, proběhlo opět ve dvou etapách. Čtyři *přípravné* úlohy odevzdávali soutěžící všech kategorií svým učitelům (referentům MO) do 15. listopadu 1974. Úlohy byly opraveny, ale neklasifikovány, takže každý žák měl možnost se zúčastnit *soutěžní části* prvního kola. V této části soutěže, končící pro kategorii A 15. ledna 1975 a pro kategorii B a C 15. února 1975, museli žáci podle vlastního výběru vyřešit ze 6 úloh aspoň 3 na známku aspoň „dobrou“, aby mohli být navrženi do II. kola. V kategorii Z bylo podmínkou pro navržení do II. kola vyřešení aspoň tří úloh ze čtyř na známku aspoň „dobrou“.

II. kolo se konalo v těchto termínech:

kategorie A — sobota 1. března 1975

kategorie B a C — sobota 12. dubna 1975

kategorie Z — pondělí 3. března 1975

Podrobné výsledky jsou uvedeny v tabulkách 1–4. V tabulce 5 uvádíme přehledná čísla za 1. až 24. ročník MO. Seznamy úspěšných řešitelů z těchto kol jsou uvedeny v příloze A na str. 30–37.

Třetí (krajské) kolo kategorie Z pořádaly téměř všechny kraje, v SSR bylo toto kolo uspořádáno jednotně pro celou

republiku. Úlohy zadané v tomto kole najde čtenář ve zvláštní kapitole na str. 154.

Třetí (celostátní) kolo kat. A se konalo v Ústí n. L. od 24. do 26. dubna 1975. Stává se již tradicí, že setkání u příležitosti tohoto kola má velmi dobrou společenskou úroveň. Také letos byl díky péči krajských orgánů a obětavé práce KV MO v čele se s. *Vladimírem Blažkem* připraven výborný kulturní i rekreační program.

Celostátního kola se zúčastnilo 79 žáků, úspěšných bylo 37, z toho vítězů 18 (viz příloha B na str. 38 a 39). Absolutním vítězem, a tedy držitelem poháru do příštího ročníku, se stal již podruhé *Jiří Navrátil*, žák 2. roč. gymnázia v Olomouci-Hejčíně. *Odměnu MÚ ČSAV* za originální řešení úlohy dostal *Jiří Peňáz*, student 3. roč. gymnázia na tř. kpt. Jaroše v Brně. Úlohy zadané v tomto kole a jejich řešení najde čtenář na str. 133 a dalších.

5. POMOCNÉ AKCE

Příprava našich olympioniků probíhala v již zmíněném korespondenčním semináři a pak v již tradičním semináři, konaném na gymnáziu v Praze 2, ul. W. Piecka. Na tomto školení přednášeli *prof. dr. M. Fiedler, DrSc., doc. Jan Vyšín, CSc., dr. J. Sedláček, CSc., dr. J. Hojdar, dr. A. Vrba, CSc.*, všichni z MÚ ČSAV v Praze, a *doc. dr. Zbyněk Nádeník, DrSc.*, ze stavební fakulty ČVUT.

Od 15. do 21. června 1975 se konalo *přípravné soustředění* 13 nejúspěšnějších vítězů III. kola kategorie A. Z nich bylo vybráno osmičlenné reprezentační družstvo pro XVII. me-

zinárodní olympiádu v Burgasu. Na soustředění byla probírána tato témata:

Úlohy z geometrie	(doc. Jan Vyšín, CSc.)
Úlohy z kombinatoriky	(dr. M. Koman, CSc.)
Rovnice a nerovnice	(dr. J. Hojdar)
Posloupnosti a funkce	(dr. Fr. Zítek, CSc.)
Číselná teorie	(doc. dr. J. Moravčík, CSc.)

Soustředění úspěšných řešitelů MO a FO druhých a třetích ročníků středních škol se konalo od 15. června do 5. července na SPŠ dřevařské ve Zvolenu. Matematický obsah školení tvořily přednášky:

1. Vybrané úlohy z časopisu Kvant. algoritmy a počítače, nekonečné množiny (RNDr. Ivan Korec, CSc.)
2. Stereometria, projektívna geometria (RNDr. Valent Zaťko, CSc.)
3. Stereometria (doc. RNDr. Ján Čižmár, CSc.)
4. Matematika a hudba (doc. RNDr. Beloslav Riečan)
5. Pravdepodobnosť (RNDr. Jozef Kalas)
6. Teória čísel (RNDr. Štefan Porubský)
7. Nerovnosti pre štvorsten a priestorový štvoruholník (doc. RNDr. Zbyněk Nádeník, DrSc.)
8. Princípy kombinatorických úloh MO, neriešiteľné úlohy (RNDr. Antonín Vrba, CSc.)
9. Matematická analýza (RNDr. Jiří Jarník, CSc.)

Na soustředění byly vytvořeny tak jako doposud tři třídy: matematická, matematicko-fyzikální a fyzikální. Pro budoucnost bude vhodné zařazovat do soustředění řešitele

kategorie A z nejvýše třetího ročníku, aby se mohla zvýšit úroveň soustředění. Ukazuje se, že bude vhodné pro žáky speciálních matematických tříd zřídit oddělené soustředění.

6. STUDIJNÍ LITERATURA

Základní informační literaturou pro účastníky MO jsou *letáky* pro kategorie A, B, C a kategorii Z, které vydává SPN. Úlohy XXIV. roč. otiskly též *Rozhledy matematicko-fyzikální*.

ÚV MO vydává v MF edici *Škola mladých matematiků*. Uvádíme přehled svazků od č. 30:

- 30: *Milan Koman – Jan Vyšín*: Malý výlet do moderní matematiky
- 31: *Oldřich Odvárko*: Booleova algebra
- 32: *Jan Vyšín – Jitka Kučerová*: Druhý výlet do moderní matematiky
- 33: *Jaroslav Morávek*: O dynamickém programování
- 34: *Ladislav Rieger*: O grupách – na obálce omylem uvedeno č. 33
- 35: *Alois Kufner*: Co asi nevíte o vzdálenosti
- 36: *Ján Černý*: O aplikáciách v matematice
- 37: *Beloslav Riečan*: O pravděpodobnosti
- 38: *Juraj Bosák*: Latinské štvorce
- 39: *Alois Kufner*: Nerovnosti a odhady
- 40: *Antonín Vrba*: Matematická indukce (v tisku)

7. KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR MO V ŠKOLSKOM ROKU 1974/75

Z rozhodnutia predsedníctva ÚV MO sa v školskom roku 1974/75 po prvý raz konal tzv. *korešpondenčný seminár* pre vybraných riešiteľov MO, ktorí prichádzali do úvahy pre zaradenie do družstva pre MMO. Jeho cieľom bolo poskytovať úlohový materiál predovšetkým tým účastníkom MO, ktorí nemohli navštevovať pražský seminár pre vybraných riešiteľov MO a úspešnou účasťou v XXIII. ročníku MO v kategórii A preukázali svoje matematické schopnosti. Výber účastníkov tohto seminára urobilo PÚV MO jednak na základe výsledkov XXIII. ročníka MO, a jednak z návrhov KV MO. Účastníci korešpondenčného seminára dostávali písomne na riešenie po 6 – 10 úloh postupne z 5 tematických okruhov: číselná teória, stereometria, rovnice a systémy rovníc, kombinatorika a kombinatorická geometria, funkcie a mnohočleny. Riešenia úloh každého tematického celku posielali do stanoveného termínu na adresu zostavovateľa, ktorý riešenia opravil a s prípadným komentárom vrátil riešiteľovi.

Celkom sa korešpondenčného seminára zúčastnilo 25 riešiteľov, a to 6 z Prahy, po 2 zo Stredočeského, Juhočeského a Východočeského kraja, 6 z Juhomoravského, po 3 zo Severomoravského a Stredoslovenského kraja a 1 z Bratislavy. Žiadneho zástupcu nemali v seminári Západočeský, Severočeský, Západoslovenský a Východoslovenský kraj.

Najlepšie výsledky v seminári dosiahol *Jiří Navrátil* z Olomouca, ktorý zo 43 úloh úspešne vyriešil 41. Veľmi dobré výsledky dosiahli ďalej *Jiří Peňáz* z Brna (37 úsp. riešení),

Lubomír Balanda z Těrlicka, okr. Karviná (32 riešení), Josef Voldřich z Vimperka, okr. Prachatice (30 riešení), Peter Takáč z Rim. Soboty (29 riešení), Ján Borsík z Lipt. Hrádku (24 riešení) a Vlastimil Klíma z Benešova, Pavel Makovický zo Žiliny a Michael Valášek z Prahy (po 21 riešení). Ostatní účastníci seminára vyriešili úspešne 18 úloh a menej. Z vyššie menovaných úspešných účastníkov seminára sa štyria (Navrátil, Voldřich, Klíma a Valášek) zúčastnili XVII. MMO ako členovia čs. družstva a z nich 2 (Valášek, Navrátil) získali na MMO 3. cenu. Je pravdepodobné, že svoj podiel na ich úspechu mala tiež účasť v korešpondenčnom seminári, ktorý PÚV MO hodnotilo ako úspešný a rozhodlo sa v jeho organizovaní pokračovať aj v nasledujúcom školskom roku.

* * *

Pre informáciu čitateľov uvádzame texty úloh, ktoré boli predložené účastníkom korešpondenčného seminára:

Číselná teória (zostavil doc. dr. J. Moravčík, CSc.).

1. Určte posledné dve cifry čísla $7^{7^{7^7}} - 7^{7^7}$.
2. Vyšetrite, pre ktoré cifry a ($0 \leq a \leq 9$, celé číslo) možno nejaké číslo $\frac{n(n+1)}{2} > 10$ (n prír. číslo) zapísať v desiatkovej sústave len ciframi a .

3. Nájdite všetky prirodzené čísla x , pre ktoré platí

$$[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + \dots + [\sqrt[3]{x^3 - 1}] = 400.$$

4. Dokážte, že pre každé prvočíslo p je číslo

$$\underbrace{11 \dots 122 \dots 233 \dots 3 \dots 99 \dots 9}_p - 123456789$$

deliteľné číslom p .

5. Nech a, b, m, n sú prirodzené čísla, $\mathbf{d}(a, b) = 1$, $a > 1$. Dokážte, že ak $a^m + b^m$ je deliteľné číslom $a^n + b^n$, potom m je deliteľné číslom n .

6. Nech a, b sú prirodzené čísla, pre ktoré platí: $0 \leq b < a$. Nech ďalej $z_n = an + b$, $n = 0, 1, 2, \dots$, je daná postupnosť prirodzených čísel taká, že pre nejaké m je $\mathbf{d}(z_m, a) = d$. Presvedčte sa, či potom pre všetky n platí $\mathbf{d}(z_n, a) = d$.

7. Nech $P(x)$ je mnohočlen s celočíselnými koeficientami. Dokážte, že ak číslo d je deliteľom každého z čísel $a_n = 3^n + P(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, potom d je mocnina čísla 2 s celočíselným exponentom.

8. Dokážte, že súčet $\sum_{k=0}^s \binom{n}{2k+1} (1973)^k$, $s = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, je pre každé prirodzené n deliteľný číslom 2^{n-1} .

9. Dokážte, že číslo $\sum_{k=1}^n \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k}$ nie je pre žiadne prirodzené číslo n deliteľné číslom 5.

10. Nech $x_n = (p + \sqrt{q})^n - [(p + \sqrt{q})^n]$ pre $n = 1, 2, \dots$. Dokážte, že ak p, q sú prirodzené čísla vyhovujúce nerovnosti $p - 1 < \sqrt{q} < p$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

Poznámka: Symbol $[a]$ v úlohách 3, 8 a 10 znamená celú časť čísla a , tj. celé číslo c také, že $c \leq a < c + 1$.

Stereometria (zostavili *prof. dr. M. Fiedler, DrSc.* a *J. Zemánek*).

1. Ak je odchýlka každých dvoch stien štvorstena ostrý uhol, potom všetky steny štvorstena sú ostrouhlé trojuholníky. Dokážte.

2. Dokážte, že zo šiestich vnútorných uhlov, ktoré zvierajú steny štvorstena, sú vždy aspoň tri ostré.

3. Body $A_1, A_2, \dots, A_n$ sú všetky vrcholy konvexného mnohostena, $d = \max A_i A_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Dokážte, že vzdialenosť každých dvoch bodov tohto telesa je menšia alebo rovná d .

4. V priestore je daný bod P a množina bodov $\mathbf{M}$ taká, že jej prienik s každou rovinou prechádzajúcou bodom P je kruh. Dokážte, že $\mathbf{M}$ je guľa.

5. V priestore je daná konečná množina bodov taká, že každá priamka prechádzajúca dvoma jej bodmi obsahuje ešte aspoň jeden ďalší bod tejto množiny. Dokážte, že všetky body danej množiny ležia v jednej priamke.

6. Nech $\mathbf{M}$ je množina bodov v priestore taká, že ku každému bodu priestoru možno v množine $\mathbf{M}$ nájsť práve jeden najvzdialenejší bod. Dokážte, že množina $\mathbf{M}$ je jednobodová.

Rovnice a sústavy rovníc (zostavil *dr. J. Hojdar*).

1. Riešte rovnicu $a(x^2 - a^2) = b(x^2 - b^2)$, kde a, b sú dané reálne čísla. Má táto rovnica vždy reálne riešenie?

2. Určte všetky reálne riešenia sústavy rovníc $x - |y + 1| = 1, \quad x^2 + y = 10$.

3. Riešte sústavu rovníc $\cos x + \frac{1}{\cos x} = 9 \operatorname{tg} y$,

$$\sin x + \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} y,$$

kde x, y sú neznáme.

4. V rovnici $(m + 2)^2 x^2 - 2(m^3 - 4)x + n = 0$ s neznámou x sú m, n dané reálne čísla.

a) Určte všetky čísla m, n , pre ktoré má daná rovnica jediný koreň.

b) Stanovte všetky čísla m, n , pre ktoré sú korene danej rovnice navzájom prevrátené čísla.

5. Určte všetky reálne čísla p , pre ktoré rovnica

$$x^2 - 2(p + 4)x + p^2 + 6p = 0$$

s neznámou x má:

a) oba korene rôzne a záporné;

b) jeden koreň záporný, druhý nezáporný.

6. Riešte sústavu rovníc

$$x + y + z = a,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2,$$

$$xy = z^2,$$

kde a, b sú dané čísla.

Udajte podmienky, ktorým musia vyhovovať čísla a, b , aby čísla x, y, z vyhovujúce danej sústave boli kladné a navzájom rôzne.

7. Je daná rovnica $x^2 + 2px + 2p^2 - 1 = 0$ s neznámou x , kde p je reálne číslo. Nájdite všetky čísla p , pre ktoré má daná rovnica reálne korene, z ktorých žiadny nemá absolútnu hodnotu väčšiu než jedna.

Kombinatorika a kombinatorická geometria (zostavil
dr. M. Koman, CSc.).

1. (úloha o deviatkách) Určte nutnú a postačujúcu podmienku pre to, aby k danému prirodzenému číslu existoval násobok, ktorý možno v desiatkovej sústave napísať len pomocou deviatok, tj. má tvar $999 \dots 99$.

2. (úloha o prirodzených číslach) Zistite, či je medzi ľubovoľnými za sebou nasledujúcimi desiatimi prirodzenými číslami vždy aspoň jedno nesúdeliteľné so zostávajúcimi číslami.

3. (úloha o letiskách) Na každom z 12 letísk štartuje lietadlo a odlietava na najbližšie susedné letisko. Vzdialenosti medzi letiskami sú navzájom rôzne čísla. Určte maximálny počet lietadiel, ktoré môžu pristáť na jednom letisku.

4. (úloha o lodiach) Na voľnom mori plávajú rozptýlene tri lode L_1, L_2, L_3 , ktoré majú rovnakú maximálnu rýchlosť. Na admirálov rozkaz sa majú čo najskôr stretnúť na jednom mieste. Určte najvýhodnejšiu polohu miesta stretnutia S .

Poznámka: Pokúste sa úlohu riešiť tiež pre prípad väčšieho počtu lodí alebo pre prípad rôznych maximálnych rýchlostí.

5. (úloha o červenej ceste) Štvorec $\mathbf{C}$ je rozdelený na $4n^2$ zhodných štvorcových polí, ktoré sú biele a čierne, pričom každé dve polia súmerne položené podľa stredu S štvorca $\mathbf{C}$ sú rôznej farby. Strany polí zafarbíme červene práve vtedy, keď patria rôzne zafarbeným poliam. Dokážte, že existuje červená cesta spájajúca niektoré dva body ležiace na protiahlych stranách štvorca $\mathbf{C}$.

6. (1. úloha o šachovnici) Všetky polia ľubovoľnej šachovnice $n \times n$ sú očíslované nezápornými reálnymi číslami tak, že číslo ľubovoľného poľa sa rovná aritmetickému priemeru čísel napísaných na všetkých susedných poliach. Charakterizujte všetky prípustné očíslovania. (Pojem susedného poľa možno chápať dvoma rôznymi spôsobmi.)

7. (2. úloha o šachovnici) Všetky polia šachovnice so 100×100 poliami sú očíslované prirodzenými číslami tak, že čísla na každých dvoch susedných poliach sa líšia najviac o 50. Zistite, či môžu byť všetky polia šachovnice očíslované navzájom rôznymi číslami.

8. (úloha o koľajniciach vláčika) Dráhu pre elektrický vláčik možno zostaviť z úsekov, ktoré majú tvar štvrtkružnice. Bola postavená okružná rovinná dráha (bez križovatiek a nadjazdov). Pri zvolenom zmysle obiehania tvorí n_1 dielcov ľavotočivú zákrutu a n_2 dielcov pravotočivú zákrutu. Dokážte, že čísla n_1 a n_2 sú párne a číslo $n_1 + n_2$ je násobkom čísla 4.

9. (úloha o n bodoch) V rovine je daných n ($n > 4$) bodov, z ktorých žiadne tri neležia v priamke. Dokážte, že existuje aspoň $\binom{n-3}{2}$ konvexných štvoruholníkov, ktorých vrcholmi sú niektoré z daných bodov.

10. (úloha o n -uholníku) Konvexný n -uholník P_n neobsahuje žiadne tri uhlopriečky, ktoré by prechádzali jedným spoločným vnútorným bodom. Koľko trojuholníkov ohraničujú jeho uhlopriečky?

Poznámka: Pokúste sa túto úlohu riešiť pre štvoruholníky; stačí odhad.

Funkcie a mnohočleny

(zostavil doc. dr. J. Moravčík, CSc.).

1. Nech f je funkcia definovaná pre všetky reálne x predpisom $f(x) = \frac{1 - x^2}{x^6 + 4}$. Zistite, či funkcia f nadobúda najväčšiu a najmenšiu hodnotu a v kladnom prípade ich nájdite.

2. Kvadratický trojčlen $f(x) = ax^2 + bx + c$ je taký, že rovnica $f(x) = x$ nemá reálne korene. Dokážte, že rovnica $f(f(x)) = x$ tiež nemá reálne korene.

3. Nájdite prirodzené čísla p, q také, aby koreňmi mnohočlenov $P(x) = x^2 - qx + p$ a $Q(x) = x^2 - px + q$ boli len prirodzené čísla.

4. Dokážte, že mnohočlen $P(x)$ s celočíselnými koeficientami, ktorého absolútna hodnota v troch rôznych celých číslach sa rovná 1, nemá celočíselné korene.

5. Nájdite najmenšie reálne číslo A také, že pre každý kvadratický trojčlen $f(x)$, pre ktorý platí $|f(x)| \leq 1$, ak $0 \leq x \leq 1$, je splnená nerovnosť $f'(0) \leq A$.

6. Určte reálne čísla a, b, c také, že $|f(x)| = |ax^2 + bx + c| \leq 1$ pre $|x| \leq 1$ a súčet $\frac{8}{3}a^2 + 2b^2$ je maximálny.

7. Nech f je reálna funkcia reálnej premennej x taká, že nie je identicky rovná nule a pre každé reálne čísla x, y platí: $f(x) \cdot f(y) = f(x - y)$. Nájdite všetky také funkcie f .

8. Nájdite všetky usporiadané dvojice f, g funkcií reálnej premennej x , ktoré sú definované pre všetky reálne čísla x okrem $-1; 0; 1$ a pre ktoré v každom bode x ich definičného

oboru platí: $x f(x) - \frac{1}{x} g\left(\frac{1}{x}\right) = 1$, $\frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 g(x)$.

9. Nech $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$. Dokážte, že pre každé $x \in (0; \pi)$ platí: $f(x) > 0$.

10. Nech f a g sú reálne funkcie definované v intervale $(-\infty, \infty)$, pre ktoré platí $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot g(y)$ pri každom reálnom x a y . Dokážte, že ak f nie je identicky rovná 0 a $|f(x)| \leq 1$ pre každé x , potom tiež $|g(y)| \leq 1$ pre každé y .

8. KONKURS JČSMF A JSMF NA NÁVRHY ÚLOH PRO MO

Během XXIV. ročníku MO pokračoval konkurs na úlohy pro MO, jehož vyhlašovatelé jsou společně *Jednota čs. matematiků a fyziků* a *Jednota slovenských matematiků a fyziků*. Podmínky tohoto konkursu byly též otištěny v letáku s přípravnými a soutěžními úlohami I. kola.

Od vyhlášení konkursu v roce 1966 do 30. 6. 1975 došlo celkem 1 108 úloh od 99 autorů. Z nich bylo 644 přijato a odměněno.

Při sestavování úloh pro jednotlivá kola XXIV. ročníku MO se použilo 54 úloh získaných konkursem.

TABULKA 1
Výsledky kategorie A

KRAJ	Kolo			
	I.		II.	
	S	Ú	S	Ú
Praha	120	117	109	54
Středočeský	103	91	73	15
Jihočeský	60	54	48	12
Západočeský	55	50	47	9
Severočeský	121	100	89	33
Východočeský	69	67	65	28
Severomoravský	100	79	77	25
Jihomoravský	203	157	119	23
Bratislava	73	66	63	42
Západoslovenský	139	60	57	5
Středoslovenský	120	111	96	19
Východoslovenský	63	29	29	7
Celkem	1 226	981	872	272

S. počet všech soutěžících

Ú. počet úspěšných řešitelů

TABULKA 2
Výsledky kategorie B

KRAJ	Kolo			
	I.		II.	
	S	Ú	S	Ú
Praha	54	44	36	5
Středočeský	64	56	52	7
Jihočeský	56	46	40	8
Západočeský	29	26	23	1
Severočeský	77	57	46	5
Východočeský	66	55	46	8
Jihomoravský	112	85	69	11
Severomoravský	65	58	57	5
Bratislava	46	44	44	6
Západoslovenský	92	65	65	3
Středoslovenský	87	81	75	5
Východoslovenský	51	18	11	2
Celkem	799	635	564	66

TABULKA 3
Výsledky kategorie C

KRAJ	Kolo			
	I.		II.	
	S	Ú	S	Ú
Praha	88	60	60	32
Středočeský	60	54	48	3
Jihočeský	58	53	41	5
Západočeský	50	36	34	12
Severočeský	118	80	68	7
Východočeský	80	78	67	17
Jihomoravský	162	138	113	23
Severomoravský	91	74	68	14
Bratislava	72	53	52	14
Západoslovenský	91	85	79	4
Středoslovenský	88	76	67	6
Východoslovenský	105	35	31	4
Celkem	1 063	822	728	141

TABULKA 4
Výsledky kategorie Z

KRAJ	Kolo			
	I.		II.	
	S	Ú	S	Ú
Praha	1 068	596	496	296
Středočeský	556	356	328	190
Jihočeský	730	345	314	173
Západočeský	499	296	207	81
Severočeský	625	358	313	186
Východočeský	622	488	436	277
Jihomoravský	1 796	796	648	241
Severomoravský	912	569	506	250
Bratislava	697	357	329	150
Západoslovenský	1 354	1 041	1 012	274
Středoslovenský	1 078	635	620	206
Východoslovenský	1 426	781	764	413
Celkem	11 363	6 618	5 973	2 737

První a druhé kolo československé MO v číslech • Počet úspěšných řešitelů

Ročník	Školní rok	kateg. A kolo		kateg. B kolo		kateg. C kolo		kateg. D (Z) kolo	
		I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1.	1951/52	76	47	90	30	—	—	—	—
2.	1952/53	106	51	133	42	—	—	—	—
3.	1953/54	119	70	126	99	94	64	2499	1852
4.	1954/55	196	151	361	189	321	174	2827	1807
5.	1955/56	376	205	469	130	541	187	6660	4711
6.	1956/57	373	146	343	129	409	273	7634	4935
7.	1957/58	342	162	429	208	820	518	6725	4171
8.	1958/59	605	131	539	206	566	288	5894	3677
9.	1959/60	541	130	417	107	667	204	7877	4135
10.	1960/61	369	129	330	92	558	240	7362	3281
11.	1961/62	386	77	426	124	510	224	7081	3894
12.	1962/63	277	52	321	81	777	373	5054	2913
13.	1963/64	257	68	782	224	994	317	6888	2899
14.	1964/65	661	152	837	187	1186	498	6851	3551
15.	1965/66	454	132	754	131	771	350	5441	2263
16.	1966/67	670	244	612	81	1053	270	6210	2311
17.	1967/68	344	70	513	114	938	99	6065	2191
18.	1968/69	273	37	370	34	636	35	4264	1455
19.	1969/70	447	88	612	149	—	—	5550	1790
20.	1970/71	352	58	656	162	—	—	7376	3807
21.	1971/72	445	170	354	122	926	180	7870	3063
22.	1972/73	858	152	667	225	975	418	6989	2423
23.	1973/74	775	198	601	120	1192	230	7049	1561
24.	1974/75	981	272	635	66	822	141	6618	2737

PŘÍLOHA A

PŘEHLED ÚSPĚŠNÝCH ŘEŠITELŮ II. KOLA V KATEGORIÍCH A, B A C

Praha – město

A. *Michael Valášek*, 4.d, W. Piecka, Praha 2; *Václav Kotěšovec*, 3.d, W. Piecka, Praha 2; *Petr Pěnička*, 3.d, W. Piecka, Praha 2; *Ludvík Reichert*, 4.a, Nad štolou, Praha 7; *Martin Šedivý*, 4.d, W. Piecka, Praha 2; *Martin Baumann*, S2e OU ČKD, Praha; *Jiří Štěrba*, 4.d, W. Piecka, Praha 2; *Jaroslav Zápotocký*, 3.c, Štěpánská, Praha 1; *Jan Hugo*, 4.c, Sladkovského, Praha 3; *Karel Suchomel*, 3.c, Štěpánská, Praha 1

B. *Jiří Kolafa*, 2.d, W. Piecka, Praha 2; *Jana Sedláčková*, 2.d, W. Piecka, Praha 2; *Jiří Kejř*, 2.d, Sladkovského, Praha 3; *Martin Holeňa*, 2.d, Sladkovského, Praha 3; *Jiří Peterka*, 2.b, Nad Turbovou, Praha 5

C. *Zdeněk Vavřín*, 1.c, Štěpánská, Praha 1; *Mirko Navara*, 1.d, W. Piecka, Praha 2; *Pavel Trska*, 1.a, Leninova, Praha 6; *Petr Beránek*, 1.a, Litoměřická, Praha 9; *Jiří Koch*, 1.d, W. Piecka, Praha 2; *Jan Vilhelm*, 1.d, W. Piecka, Praha 2; *Jiří Mareš*, 1.d, W. Piecka, Praha 2; *Petr Čerovský*, 1.a, Voděradská, Praha 10; *Jan Matějka*, 1.d, W. Piecka, Praha 2

Středočeský kraj

A. *Vlastimil Klíma*, 3.b, Benešov; *Jan Bázler*, 2.b, Mladá Boleslav; *Jiří Sloup*, 4.b, Brandýs nad L.; *Karel Karlík*, 4.b, Čáslav; *Pavel Tvrdik*, 4.b, Kolín; *Vojtěch Zadražil*, 3.b, Český Brod; *Jan Procházka*, 4.b, Mladá Boleslav; *Hana Janoušková*, 3.a, Sedlčany; *Josef Čvančara*, 3.b, Mladá Boleslav; *Libuše Urbanová*, 4.a, Nové Strašecí

B. *Jan Bázler*, 2.b, Mladá Boleslav; *Karel Jenčík*, 2.a, SPŠ, Kutná Hora; *Josef Blažek*, 2.a, Mnichovo Hradiště; *Miroslav Havlena*, 2.c, Kladno; *Milena Fliegelová*, 2.b, Říčany; *Iva Šolarová*, 2.a, Benešov; *Jiří Švec*, 2.c, Kladno

C. *Stanislav Kadlec*, 1.a, Hořovice; *Tomáš Gergelits*, 1.c, SPŠ, Mladá Boleslav; *Robert Černý*, 1.b, Rakovník

Jihočeský kraj

A. *Josef Voldřich*, 4.r., Vimperk; *Vladimír Drápalík*, 4.a, Strakonice; *Zbyněk Brtna*, 3.b, Tábor; *Věra Černá*, 3. r., Pacov; *Jan Kozelka*, E4.a, SPŠ, Písek; *Miloš Řezníček*, 4.a, Soběslav; *Marie Divišová*, 3.b, Pelhřimov; *Josef Metlika*, 3.c, Strakonice; *Vít Remta*, 4.a, g. K. Šátala, Č. Budějovice; *Michal Šimek*, 3.a, Strakonice

B. *Jindřich Trnka*, 2.c, Tábor; *Helena Jilková*, 2.a, g. K. Šátala, Č. Budějovice; *J. Glaser*, 2.a, g. K. Šátala, Č. Budějovice; *Vlastimil Křivan*, 2.b, Strakonice; *Miloslav Lacina*, 2.c, Tábor; *Zd. Panec*, 2.b, SPŠS, Strakonice; *Jan Vácha*, 2.c, Tábor; *Dalibor Zikmund*, 2.b, Milevsko

C. *Karel Štěpán*, 1.a, g. K. Šátala, Č. Budějovice; *Zdeněk Tůma*, 1.b, Tábor; *Petr Lett*, 1.c, Tábor; *Jan Cvejn*, sl. SPŠ Písek; *Jaroslav Marek*, 1.c, SPŠ, Strakonice

Západočeský kraj

A. *Jiří Koukol*, 2.a, Sušice; *Pavel Odvárka*, 4.a, g. J. Fučíka, Plzeň; *Jaroslav Krčmář*, 4.a, Sušice; *Luboš Pruner*, 4.a, g. J. Fučíka, Plzeň; *Vladislav Krásný*, 4.a, g. J. Fučíka, Plzeň; *Pavel Rádl*, 4.a, g. J. Fučíka, Plzeň; *Milan Studený*, 3.a, g. J. Fučíka, Plzeň; *František Staněk*, 3.a, g. J. Fučíka, Plzeň; *Čestmír Suda*, 4.a, Sušice

B. *Jiří Koukol*, 2.a, Sušice

C. *Věra Hrubešová*, 1.b, Karlovy Vary; *Pavel Pyrih*, 1.a, Sušice; *Vladimír Šverák*, 1.a, Karlovy Vary; *Libor Fiala*, 1.a, g. J. Fučíka, Plzeň; *Miroslav Veselý*, 1.b, Domažlice; *Zuzana Princová*, 1.a, g. J. Fučíka, Plzeň; *Pavel Mach*, 1.c, ul. Pionýrů, Plzeň; *Blanka Zymáková*, 1.a, g. J. Fučíka, Plzeň; *Jiří Pátek*, 1.a, g. J. Fučíka, Plzeň; *Vladimír Šrámek*, 1.d, ul. Pionýrů, Plzeň

Severočeský kraj

A. *Jan Malý*, 4.a, Litoměřice; *Václav Soukup*, 4.c, Liberec; *Jiří Maryška*, 4.a, Jablonec n. N.; *Pavel Vondrák*, 3.a, Ústí n. L.; *Jiří Škuthan*, 4.a, Litvínov; *Jaroslav Kotas*, 4.b, Česká Lípa; *Pavel Esentier*, 3.r., Tanvald; *Jan Červínek*, 3.a, Teplice; *Josef Kalát*, 4.b, Teplice; *Vlasta Novotná*, 2.a, Teplice

B. *Milan Sopr*, SPŠSE, Liberec; *Vlasta Novotná*, Teplice; *Danuše Svobodová*, Jablonec n. N.; *Vladimír Havlena*, Rumburk; *Eva Formánková*, Liberec

C. *Zdeněk Kalousek*, Jablonec n. N.; *Dana Kratochvílová*, Louny; *Jiří Tschiesche*, Teplice; *Ondřej Macoun*, Liberec; *Erik Majer*, Teplice; *Arnošt Hlaváček*, Ústí nad Labem; *Pavel Němec*, Ústí nad Labem

Východočeský kraj

A. *Jan Blažek*, 4.a, Chrudim; *Pavel Štoviček*, 3.a, Pardubice; *Tomáš Blažek*, 4.a, Pardubice; *Petr Holan*, 4.a, Nový Bydžov; *Petr Novák*, 3.a, Pardubice; *Jiří Somer*, 4., Jevíčko; *Jiří Hůlka*, 4., Hradec Králové; *Radoslava Hrubá*, 4.a, Trutnov; *Jan Kratochvíl*, 1.a, Pardubice; *Josef Pavel*, 2.a, Rychnov nad Kněžnou

B. *Jan Kratochvíl*, 1.a, Pardubice; *Josef Dobeš*, 2.a, Rychnov nad Kněžnou; *Jan Kábrt*, 2.a, Vysoké Mýto; *Zdeněk Rozlívka*, 2., Hradec Králové; *Vladimír Hulec*, 2.a, Pardubice; *Josef Rousek*, 2.a, Pardubice; *Pavel Hochmann*, 2.a, Nový Bydžov; *Richard Liska*, 2.a, Pardubice

C. *Ilja Turek*, 1., Hradec Králové; *Miroslav Tůma*, 1.a, Nová Paka; *Petr Bahník*, 1.a, Pardubice; *Vladimír Pekárek*, 1.a, Pardubice; *Jaromír Matěna*, 1., Hradec Králové; *Jan Barták*, 1.a, Chrudim; *Zbyněk Červenka*, 1., Hradec Králové; *Jan Kováč*, 1.a, Ústí nad Orlicí; *Miloš Holman*, 1.a, Vrchlabí; *Tomáš Vlasák*, 9.a, ZDŠ Makarenkovo n., Pardubice

Jihomoravský kraj

A. *Dana Kučeříková*, 3.b, Holešov; *Jiří Peňáz*, 3.b, tř. kpt. Jaroše, Brno; *Miroslava Kouřilová*, 4.c, Kyjov; *Dalibor Musil*, 4.a, SPŠS, Sokolská, Brno; *Martin Čadek*, 2.a, tř. kpt. Jaroše, Brno; *Milan Kliment*, 3.b, tř. kpt. Jaroše, Brno; *Jaromír Trubelík*, 4.a, Kroměříž; *Petr Zapletal*, 3.b, Jihlava; *Zuzana Tesařová*, 3.b, Jihlava

B. *Martin Čadek*, 2.a, tř. kpt. Jaroše, Brno; *Luděk Klimeš*, 2.a, Blansko; *Jiří Martišek*, 2.a, Kroměříž; *Miroslav Hrubý*,

2.a, Kroměříž; *Jiří Chmela*, 2.a, Kroměříž; *Jiří Zlatuška*, 2.c, tř. kpt. Jaroše, Brno; *Jana Dvořáková*, 2.c, Třebíč; *Jiří Pavlas*, 2.c, Třebíč; *Libor Pivnička*, 2.b, Znojmo; *Jiří Svoboda*, 2.a, tř. kpt. Jaroše, Brno

C. *Jaroslav Šmerda*, 1.c, Třebíč; *Jiří Kaďourek*, 1.b, Koněvova, Brno; *Petr Kučírek*, 1.b, Koněvova, Brno; *Aleš Juránek*, 1.a, tř. kpt. Jaroše, Brno; *Tomáš Bilina*, 1.a, Křenová, Brno; *Radim Burda*, 1.b, Koněvova, Brno; *Ivo Žáček*, 1.a, Křenová, Brno; *Josef Laštovička*, 1.a, Žďár nad Sázavou; *Tomáš Lukeš*, 1.a, tř. kpt. Jaroše, Brno; *Ludmila Fortelná*, 1.c, SPŠ kož., Třebíč

Severomoravský kraj

A. *Miroslav Šedivý*, 3.b, Přerov; *Lubomír Baland*, 4.b, Český Těšín, Frýdecká ul.; *Jiří Kožusznik*, 4.c, ul. Komenského, Třinec; *Jiří Navrátil*, 2.a, Olomouc-Hejčín; *Karel Lichý*, 4.b, Komenského ul., Opava; *Vladimír Hruška*, 4.a, Husova ul., Valašské Meziříčí; *Andrzej Kozikowski*, 4.d, Havlíčkova ul., Český Těšín; *Oskar Linkesch*, 3.e, SPŠ, Ostrava-Vítkovice; *Miroslav Lýčka*, 4.b, Vsetín; *Leszek Gajdzica*, 4.b, Havlíčkova ul., Český Těšín

B. *Radomír Lukáš*, 2.a, J. G. Tajovského, Havířov; *Vladimír Pastrňák*, 2.b, Šmeralova ul., Ostrava 1; *Petr Janča*, 2.c, Komenského 5, Opava; *Martin Petrák*, 2.a, Ostrava-Hrabůvka; *Helena Svozilová*, 2.b, Tomkova 45, Olomouc-Hejčín

C. *Pavel Kolařík*, 1.c, Gottwaldova ul., Bílovec; *Vladimír Hanák*, 1.c, Gottwaldova ul., Bílovec; *Karel Štěpka*, 1.c, Gottwaldova ul., Bílovec; *Ivo Wandrol*, 1.c, Gottwaldova ul.,

Bílovec; *Ota Pösel*, 1.d, Rudé armády, Karviná 8; *Helena Šnapková*, 1.c, Šmeralova ul., Ostrava 1; *Petr Tas*, 1.c, Gottwaldova ul., Bílovec; *Petr Gurka*, 1.c, Gottwaldova ul., Bílovec; *Petr Hiltavský*, 1.d, Rudé armády, Karviná 8; *Lumír Witoszek*, 1.d, Rudé armády, Karviná 8

Bratislava

A. *Ján Slodička*, 4.b, Novohradská ul., Bratislava; *Igor Kossaczký*, 3.c, Novohradská ul., Bratislava; *Ján Krajčík*, 4.b, Novohradská ul., Bratislava; *Miroslav Poliak*, 4.m2, SPŠ elektro, Zochova ul., Bratislava; *Miroslav Drkoš*, 3.b, Novohradská ul., Bratislava; *Viktor Birnstein*, 3.c, Novohradská ul., Bratislava; *Pavol Kossey*, 3.b, Novohradská ul., Bratislava; *Dušan Miklánek*, 4.b, Novohradská ul., Bratislava; *Juraj Wallner*, 3.b, Novohradská ul., Bratislava; *Marián Slodička*, 3.b, Novohradská ul., Bratislava

B. *Róbert Handlovič*, Novohradská ul., Bratislava; *Igor Remža*, Novohradská ul., Bratislava; *Martin Barto*, Novohradská ul., Bratislava; *Ján Polák*, ul. Červenej armády, Bratislava; *Tibor Gerécz*, Dunajská ul., Bratislava; *Eva Toldyová*, Novohradská ul., Bratislava

C. *Ivan Mizera*, Novohradská ul., Bratislava; *Milan Veščičík*, ul. Červenej armády, Bratislava; *Július Ertl*, ul. Červenej armády, Bratislava; *Štefan Varga*, Novohradská ul., Bratislava; *Ján Prokop*, Novohradská ul., Bratislava; *Ján Lakota*, Novohradská ul., Bratislava; *Erich Banhégyi*, Tomašíkova ul., Bratislava; *Pavol Vnučko*, ul. Červenej armády, Bratislava; *Ivan Priecel*, ul. Červenej armády, Bratislava; *Katarína Šachová*, Tomašíkova ul., Bratislava

Zápodoslovenský kraj

A. *Milan Potočár*, 4.b, Senec; *Svetozár Malinarič*, 3.a, Párovská, Nitra; *Pavol Bánský*, 4.b, Komárno; *Vladimír Makýš*, 4.f, Trnava; *Vladimír Dzurák*, 4.a, Nové Mesto nad Váhom

B. *Ladislav Miklós*, 2.c, Komárno; *Juraj Kouřil*, 2.a, Nové Mesto nad Váhom; *Peter Kovács*, 2.c, Nové Zámky

C. *Peter Filakovszky*, 1.c, Nové Zámky; *Eugen Šimko*, 1.b, Komárno; *Mária Marcsaová*, 1.b, Štúrovo; *Jozef Bartek*, 1.a, Piešťany

Středoslovenský kraj

A. *Jozef Kordík*, Prievidza; *Peter Maličky*, B. Štiavnica; *Ján Borsík*, Lipt. Hrádok; *Peter Takáč*, R. Sobota; *Vladimír Technovský*, Zvolen; *Pavol Makovický*, Žilina-Horný Val; *Dušan Martina*, Prievidza; *Martin Valovič*, Vrútky; *Karol Pekár*, Ružomberok; *Jaroslav Mikuláš*, Prievidza; *Emil Borák*, Prievidza; *Pavol Mravík*, Žiar n. Hr.; *Jozef Daňo*, Dubnica n. V.; *Vladimír Jelluš*, SPŠ el., Tvrdošín; *Ján Boďa*, Turč. Teplice; *Štefan Bračok*, Ružomberok; *Martin Papcún*, Žilina-Hliny; *K. Kačalová*, Žiar n. Hronom; *Vladimír Podhorec*, Žilina-Horný Val

B. *Peter Takáč*, R. Sobota; *Igor Böhm*, SPŠ strojní, Zvolen; *Pavol Quittner*, Prievidza; *Ivan Pavlíček*, Žilina-Hliny; *Pavla Olbřímková*, Martin

C. *Ján Detko*, Prievidza; *Vladimír Hudec*, Vrútky; *Jozef Krajčovič*, SPŠ stavební, Žilina; *Ludmila Dudková*, B. Bystřica; *Eva Uhríková*, Martin; *Milan Beleš*, V. Krtíš

Východoslovenský kraj

A. *Branislav Jacko*, 1.a, Šmeralova ul., Košice; *Ondrej Cako*, 3.e, Kováčska, Košice; *Imrich Harbula*, 4.b, Sečovice; *Marián Okál*, 3.b, Šmeralova ul., Bratislava; *Miroslav Šveda*, 3.b, Konštantinova, Prešov; *Ladislav Pivka*, 3.a, Šmeralova, Košice; *Vladimír Matej*, 4.b, Kováčska, Košice

B. *Peter Jaroš*, SPŠ hutnícka, Košice; *Igor Bobák*, SPŠ elektrotechn., Košice

C. *Zlatica Slavíková*, 1.a, Šmeralova, Košice; *Branislav Jacko*, 1.a, Šmeralova, Košice; *Ján Nižňanský*, 1.a, Šmeralova, Košice; *Michal Pudlák*, 1.a, Šmeralova ul., Košice

Poznámka: 1. V tomto seznamu uvádíme nejvýše deset nejúspěšnějších řešitelů v každé kategorii z každého kraje.

2. Pokud není uveden druh školy, jde o gymnázium.

PŘÍLOHA B

VÝSLEDKY III. KOLA KATEGORIE A XXIV. ROČNÍK MO

Vítězové

1. *Jiří Navrátil*, 2.a, g., Tomkova ul., Olomouc-Hejčín
2. *Vlastimil Klíma*, 3.b, g., Benešov u Prahy
3. *Martin Baumann*, S2e, OU ČKD, Praha 9
4. *Michael Valášek*, 4.d, g., W. Piecka, Praha 2
5. *Jan Malý*, 4.a, g., Litoměřice
6. – 8. *Jan Kratochvíl*, 1.a, g., Pardubice
Pavel Odvárka, 4.a, g., nám. Odborářů, Plzeň
Josef Voldřich, 4., g., Vimperk
9. – 10. *Jiří Peňáz*, 3.b, g., tř. Jaroše, Brno
Ján Slodička, 4.b, g., Novohradská, Bratislava
11. – 12. *Stanislav Červinka*, 3.c, g., Štěpánská, Praha 1
Leszek Gajdzica, 4.d, g., Havlíčkova ul., Český Těšín
13. – 15. *Lubomír Balanda*, 4.b, g., Frýdecká, Český Těšín
Karel Lichý, 4.b, g., Komenského, Opava
Miroslav Lýčka, 4.b, g., Vsetín

16. – 18. *Ján Krajčík*, 4.b, g., Novohradská, Bratislava
Peter Maličký, 4.d, g., Banská Bystrica
Magda Volkeová, 3.a, g., Leninova, Praha 6

Ostatní úspěšní řešitelé

19. – 21. *Jiří Hůlka*, 4.g, g., Hradec Králové
Tomáš Roubíček, 3.d, g., U libeňského zámku, Praha 8
Miroslav Šedivý, 3.b, g., Komenského, Přerov
22. – 24. *Petr Holan*, 4.a, g., Nový Bydžov
Jiří Koukolík, 4.d, g., W. Piecka, Praha 2
Andrzej Kozikowski, 4.d, g., Havlíčkova ul., Český Těšín
25. – 30. *Jan Bázler*, 2.b, g., Mladá Boleslav
Tomáš Kotrba, 3.c, g., Štěpánská ul., Praha 1
Oskar Linkesch, 3.e, SPŠ, Ostrava-Vítkovice
Dalibor Musil, 4.a, SPŠS, Sokolská ul., Brno
Petr Novák, 3.a, g., Pardubice
Peter Takáč, 2.a, g., Rimavská Sobota
31. – 34. *Ján Borsík*, 4.a, g., Liptovský Hrádok
Jiří Koukol, 2.a, g., Sušice
Ludvík Rejchrt, 4.a, g., Nad štolou, Praha 7
Vladimír Technovský, 3.c, g., Zvolen
Karel Karlík, 4.b, g., Čáslav
Josef Pavel, 2.a, g., Rychnov nad Kněžnou
Pavel Štoviček, 3.a, g., Pardubice

II. Přípravné úlohy I. kola

ÚV MO se rozhodl zařazovat do přípravného kola myšlenkově cenné a zajímavé úlohy v MO již použité. Toto rozhodnutí se začalo uplatňovat poprvé ve 24. roč. MO. Proto u úloh již známých z minulých ročníků uvádíme jen text úlohy a odkaz na příslušnou literaturu, kde najde čtenář komentář či řešení úlohy (viz str. 48).

KATEGORIE A

A – P – 1

Je dáno přirozené číslo a ; vypočtete součet

$$\sum_{k=1}^{1975} \left[\frac{k}{a} \right].$$

Poznámka: Pro každé reálné x značí $[x]$ jeho celou část, tj. celé číslo, pro které platí $[x] \leq x < [x] + 1$.

Řešení: viz [22], str. 135.

A – P – 2

Je dána sústava rovníc s troma neznámymi x, y, z a s parametrami a, b :

$$x + ay = b,$$

$$y - a^2z = 1,$$

$$az + x = b + 1.$$

Určte všetky také hodnoty parametrov a, b , pre ktoré má daná sústava nekonečne mnoho riešení.

Řešení: viz [16], str. 63.

A – P – 3

Dokážte, že pre všetky reálne čísla x rôzne od nuly platí:

$$1 + x \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cos \frac{1}{x} > 0.$$

Komentář. Doporučujeme řešitelům, aby si nejprve prostudovali 3. kapitolu knížky *Šmakal – Budinský: Goniometrické funkce* (20. svazek ŠMM). Funkce

$$f: x \rightarrow 1 + x \cdot \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cos \frac{1}{x}$$

je zřejmě sudá. Toto zjištění je velmi cenné, neboť umožňuje omezit důkaz dané nerovnosti jen na kladná reálná čísla x .

Načrtnou-li si řešitelé grafy funkcí $\cos \frac{1}{x}$, $\sin \frac{1}{x}$, $x \cdot \sin \frac{1}{x}$,

zjistí, že bude vhodné danou nerovnost dokázat nejprve pro $x = \frac{1}{\pi}$ a pak pro $x \in \left(\frac{1}{\pi}, +\infty\right)$ a $x \in \left(0, \frac{1}{\pi}\right)$. V případě $x \in \left(0, \frac{1}{\pi}\right)$ je třeba uvážit, že $\frac{1}{\pi} < \frac{1}{2}$.

A – P – 4

V rovině je dán kruh **K**. Určete množinu vrcholů A všech konvexních čtyřúhelníků $ABCD$, o nichž platí, že $AC \leq BD$ a že celá úhlopříčka BD leží v kruhu **K**.

Řešení: viz [21], str. 128.

KATEGORIE B

B – P – 1

Mějme posloupnost celých čísel $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, v níž pro všechna $n \geq 1$ platí

$$a_{n+1} + a_{n-1} = a_1 a_n.$$

a) Může být taková posloupnost posloupností aritmetickou?

b) Určete nutné a postačující podmínky pro to, aby v takové posloupnosti platilo:

$$a_{n+k} + a_{n-k} = a_k a_n$$

pro všechna $n, k, n \geq k, k \geq 0$.

c) Jestliže $a_0 = 2$, pak existuje komplexní číslo z takové, že pro všechna $n \geq 0$ je

$$a_n = z^n + z^{-n};$$

dokažte.

Řešení: viz [20], str. 102.

B – P – 2

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n a pro všechny reálné čísla $x, x_1, x_2, \dots, x_n$ platí nerovnost:

$$n(n+1)x^2 \geq 2 \cdot \sum_{i=1}^n ix_i(2x - x_i).$$

Komentář. Důkazové úlohy tohoto typu se v MO vyskytují poměrně často. Je možno užít matematické indukce nebo přímo vzorce

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1),$$

který platí pro každé přirozené číslo n .

B – P – 3

Trojúhelník ABC má tu vlastnost, že kružnice procházející středy jeho stran se dotýká kružnice opsané.

Dokažte, že bod dotyku je jedním vrcholem trojúhelníku ABC a že vnitřní úhel při tomto vrcholu je pravý.

Řešení: viz [17], str. 73.

B – P – 4

Nájdite všetky hodnoty parametra a , pre ktoré je v kartézskej súradnicovej sústave so súradnicami x, y graf rovnice

$$|x + y| + a|y| = 1$$

obvodom pravouhelníka.

Řešení: viz [19], str. 111.

KATEGORIE C

C – P – 1

Určte všetky riešenia sústavy rovníc

$$x(x + y) + z(x - y) = 6,$$

$$y(y + z) + x(y - z) = -2,$$

$$z(z + x) + y(z - x) = 3.$$

Řešení: viz [16], str. 34.

C – P – 2

Nechť p, q jsou prvočísla větší než 3. Potom číslo

$$p^2 + 7q^2 - 23$$

není prvočíslem. Dokažte.

Řešení: viz [20], str. 109.

C – P – 3

Je dána kružnice $k = (S; r)$, bod A z vnútra kruhu ohraničeného kružnicou k a kladné číslo d . Bodom A je vedená tetiva kružnice k tak, že tento bod ju rozdeľuje na dve úsečky, ktorých dĺžky majú rozdiel d .

a) Vyjadrite dĺžku t tejto tetivy a jej vzdialenosť od stredu S pomocou parametrov $r, d, v = SA$.

b) Zostrojte pomocou výsledku z úlohy a) všetky tetivy danej vlastnosti.

Řešení: viz [16], str. 39.

C – P – 4

Nechť $\mathbf{M}$ je množina všech vrcholů čtverců dané šachovnice o 16 polích. Pro každý bod $X \in \mathbf{M}$ označme $p(X)$ počet všech čtverců, jejichž všechny vrcholy patří do množiny $\mathbf{M}$, přičemž jedním z nich je bod X . Určete výčet množinu všech čísel $p(X)$.

Komentář. Doporučujeme řešitelům, aby si nejprve prostudovali 6. úlohu I. kola XXI. roč. MO kategorie C. Pro řešení naší úlohy je důležité si uvědomit, že existují čtyři osy souměrnosti množiny $\mathbf{M}$. Stačí pak najít číslo $p(X)$ jen pro jistých 6 bodů množiny $\mathbf{M}$.

KATEGORIE Z

Z – P – 1

Součinem dvou kvadratických trojčlenů $x^2 + ax + b$, $x^2 + cx + d$ je dvojčlen $x^4 + 4$. Určete koeficienty trojčlenů.

Řešení: viz [16], str. 102.

Z – P – 2

Kolikrát v době od 14.00 h. do 14.05 h. je centrální vteřinová ručička hodiněk osou dutého úhlu sevřeného hodinovou a minutovou ručičkou? Udejte příslušné okamžiky s přesností na vteřiny.

Komentář. Při řešení vycházíme ze základního vztahu mezi velikostmi úhlů α, β, γ sevřenými po řadě minutovou, hodinovou a vteřinovou ručičkou s polopřímkou SO , kde S je střed číselníku a bod O označuje na číselníku 12 h. V hledané okamžiky je velikost úhlu γ aritmetickým průměrem velikostí úhlů α a β . Snadno se určí úhlové rychlosti ručiček ve stupních za sekundu. Lze užít i obloukové míry.

Pro velikosti úhlů α, β, γ opsané za čas t (s) dostaneme

$$\alpha = \frac{t}{10},$$

$$\beta = \frac{t}{120} + 60,$$

$$\gamma = 6t - k \cdot 360,$$

kde k je celé nezáporné číslo udávající, kolikrát vteřinová ručička oběhla číselník za dobu t sekund po 14 h. Na základě uvedených fakt získáme po úpravách rovnici

$$1\,427t = 7\,200 + 86\,400k. \quad (1)$$

Z ní lehko určíme t .

Podle textu úlohy splňuje t nerovnici

$$0 \leq t \leq 300.$$

Tuto podmínku však splňuje pouze pět kořenů rovnice (1), totiž: 6; 66; 126; 186; 247 (s přesností na celé sekundy). O správnosti počtu řešení se ostatně můžeme přesvědčit jednoduchým úsudkem.

Z – P – 3

Trojúhelník ABC má velikosti vnitřních úhlů $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$.

- Vyjádřete délky stran b, c pomocí strany a .
- Vyjádřete poměr délek všech tří výšek trojúhelníku ABC .

Řešení: viz [17], str. 57.

Z – P – 4

Je dán čtverec $ABCD$, jehož strana má délku a ; K je střed strany AD , L je bod polopřímky BA , pro který platí $BL = \frac{3}{2}a$. Označme o takovou přímku procházející bodem D , že úsečka XY souměrně sdružená s KL podle osy o leží celá ve čtverci $ABCD$.

Jaký útvar vyplní všechny takto vytvořené úsečky XY ?
Narýsujte obrázek, vyšrafujte tento útvar a popište jeho konstrukci.

Řešení: viz [18], str. 55.

Literatura

- [16] *Vyšín – Macháček: Šestnáctý ročník MO, SPN 1968*
- [17] *Vyšín a kol.: Sedmnáctý ročník MO, SPN 1969*
- [18] *Vyšín a kol.: Osmnáctý ročník MO, SPN 1970*
- [19] *Vyšín a kol.: Devatenáctý ročník MO, SPN 1971*
- [20] *Vyšín a kol.: Dvacátý ročník MO, SPN 1972*
- [21] *Vyšín a kol.: Dvacátý první ročník MO, SPN 1973*
- [22] *Vyšín a kol.: Dvacátý druhý ročník MO, SPN 1974*

III. Súťažné úlohy I. kola

KATEGÓRIA A

A-1-1

Riešte sústavu s neznámymi $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 2$) a parametrami c, d :

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= c, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0, \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ -x_{n-2} + 2x_{n-1} - x_n &= 0, \\ -x_{n-1} + 2x_n &= d. \end{aligned}$$

Komentár. Počet rovníc je n . Druhá až predposledná rovnica sa dajú prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 = x_2 - x_3; \quad x_2 - x_3 = x_3 - x_4; \quad \dots; \\ \dots; \quad x_{n-2} - x_{n-1} = x_{n-1} - x_n. \end{aligned} \quad (1)$$

Prvú rovnicu danej sústavy možno napísať v tvare

$$x_1 = c - (x_1 - x_2). \quad (2)$$

Rovnice (1) a (2) tvoria sústavu $n - 1$ rovníc s n neznámymi $x_1, x_2, \dots, x_n$. Všetky neznáme v nich možno však vyjadriť pomocou neznámej

$$\xi = x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = \dots = x_{n-1} - x_n, \quad (3)$$

v čom je „eliminačný trik“. Z (2), (3) dostaneme

$$x_1 = c - \xi, \quad x_2 = c - 2\xi, \quad x_3 = c - 3\xi, \dots, x_n = c - n\xi. \quad (4)$$

Poslednú rovnicu danej sústavy upravíme na tvar

$$x_n = d + \xi. \quad (5)$$

Posledná rovnica (4) a rovnica (5) tvoria sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi x_n, ξ , z ktorej vypočítame ξ :

$$\xi = \frac{1}{n+1}(c-d). \quad (6)$$

Rovnice (4) a (6) dávajú jediné možné riešenie danej sústavy

$$x_k = c - \frac{k}{n+1}(c-d), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Skúškou sa presvedčíme, že (7) je skutočne riešením danej sústavy. Domnievame sa, že účastníci kategórie A by mohli na uvedený trik prísť bez akejkolvek pomoci.

A-1-2

Nech sú a, b, c, d komplexné čísla. Majme kvadratickú rovnicu

$$x^2 - px + q^2 = 0, \quad (8)$$

kde $p = |a|^2 + |d|^2 + 2 \operatorname{Re}(b\bar{c})$, $q = |ad - bc|$. Dokážte: Ak má rovnica (8) záporný koreň, potom je to koreň dvojnásobný. (Poznámka: Zápis $\operatorname{Re} z$ znamená reálnu časť komplexného čísla z ; $\bar{c}$ je číslo komplexne združené s číslom c .)

Komentár. Treba dokázať, že diskriminant rovnice, tj. číslo $\frac{1}{4}p^2 - q^2$, sa rovná nule. V tejto úlohe sa hodí dokázať rovnosť diskriminantu nule trochu neobvyklým spôsobom, a to dôkazom správnosti dvoch nerovností

$$\frac{p^2}{4} - q^2 \geq 0, \quad \frac{p^2}{4} - q^2 \leq 0. \quad (9)$$

Pravdivosť prvej z nerovností (9) vyplýva z predpokladu o rovnici (8). Táto rovnica s reálnymi koeficientami má záporný koreň a teda oba korene reálne, z čoho vyplýva nezápornosť diskriminantu.

Pretože súčin oboch koreňov rovnice (8) je číslo $q^2 \geq 0$, je druhý koreň rovnice (8) taktiež nekladný a súčet oboch koreňov – číslo p – je záporný. Druhá nerovnosť (9) je teda ekvivalentná s nerovnosťou

$$p + 2q \geq 0. \quad (10)$$

Správnosť nerovnosti (10) dokážeme pomocou určenia čísel p, q . Použijeme pritom nerovnosti

$$|ad - bc| \geq |bc| - |ad|, \quad \operatorname{Re}(b\bar{c}) + bc = \operatorname{Re}(b\bar{c}) + |b\bar{c}| \geq 0.$$

Za „kľúčový“ krok dôkazu pokladáme dokazovanie oboch nerovností (9). Tým sa totiž vyhneme priamemu zdôvodňovaniu rovnosti $\frac{1}{4}p^2 - q^2 = 0$, resp. $\frac{1}{2}p + q = 0$ ($\frac{1}{2}p - q$ je totiž záporné), ktoré je formálne zložitejšie.

A-I-3

Vyšetrite priebeh funkcie

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{x}{k} \right]^{[k/x]}$$

na intervale $(0, \infty)$.

Komentár. Symbol $[z]$ znamená ako obvykle celú časť čísla z . Doporučujeme, aby riešitelia postupovali takto: Najskôr sa vyšetří priebeh funkcie $f: a \mapsto [a]^{[1/a]}$ v intervale $(0, \infty)$.

Výsledok je

$$f(a) = 0 \quad \text{pre } a \in (0; 1),$$

$$f(a) = 1 \quad \text{pre } a \in \langle 1; \infty \rangle.$$

Dalej položíme $a = \frac{x}{k}$ a odvodíme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{x}{k} \right]^{[k/x]} = [x].$$

Grafom tejto funkcie sú známe „schody“. Úloha je teda len hranie sa s funkciou $z \mapsto [z]$. Pri riešení je treba správne interpretovať symbol súčtu a uvedomiť si, že v podstate nejde o súčet nekonečného radu.

A-I-4

Nech a, b, c sú veľkosti strán trojuholníka ABC a r je polomer jemu opísanej kružnice. Označme $V = a^2 + b^2 + c^2 - 8r^2$. Trojuholník ABC je ostrouhlý práve

vtedy, keď $V > 0$, pravouhlý práve vtedy, keď $V = 0$ a tupouhlý práve vtedy, keď $V < 0$. Dokážte.

Komentár. Pri riešení tejto úlohy nejde o nič iného ako o vyjadrenie výrazu V pomocou súčinu kosínov veľkostí uhlov trojuholníka ABC . Riešiteľ môže vyjsť napr. zo vzorcov

$$\begin{aligned}a^2 &= 4r^2 \sin^2 \alpha = 2r^2(1 - \cos 2\alpha), \\b^2 &= 4r^2 \sin^2 \beta = 2r^2(1 - \cos 2\beta), \\c^2 &= 4r^2 \sin^2 \gamma = 2r^2(2 - 2\cos^2 \gamma).\end{aligned}$$

Dalej použije vzorce

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha + \cos 2\beta &= -2 \cos \gamma \cos (\alpha - \beta), \\ \cos (\alpha - \beta) - \cos \gamma &= -2 \sin \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha - \beta - \gamma}{2}\end{aligned}$$

a dostane potrebnú formulu

$$V = 8r^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

A-1-5

Ak sú $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ veľkosti ľubovoľných n uhlov, platí nerovnosť

$$\begin{aligned}|\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \dots \sin \alpha_n - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \dots \cos \alpha_n| &\leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n |\sin \alpha_k - \cos \alpha_k|.\end{aligned}\tag{11}$$

Dokážte. Kedy platí rovnosť?

Komentár. A. K dôkazu nerovnosti možno poradiť riešiteľom napr. tento trik autora úlohy: Vyjde sa z rovnosti

$$\begin{aligned} & \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \dots \sin \alpha_n - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \dots \cos \alpha_n = \\ &= \sum_{k=1}^n \sin \alpha_1 \dots \sin \alpha_{k-1} (\sin \alpha_k - \cos \alpha_k) \cos \alpha_{k+1} \dots \cos \alpha_n, \end{aligned}$$

kde vždy prvý člen k -tého sčítanca s druhým členom $(k+1)$ -tého sčítanca dáva nulu. Zostane teda len druhý člen prvého sčítanca a prvý člen n -tého sčítanca. Ak označíme súčet L , platí

$$L = \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \dots \sin \alpha_n - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \dots \cos \alpha_n.$$

Ďalší postup bude už potom jednoduchý. Platí zrejme

$$\begin{aligned} |L| \leq \sum_{k=1}^n |\sin \alpha_1| |\sin \alpha_2| \dots |\sin \alpha_{k-1}| |\sin \alpha_k - \cos \alpha_k| \times \\ \times |\cos \alpha_{k+1}| \dots |\cos \alpha_n| \end{aligned}$$

odkiaľ priamo vyplýva

$$|L| \leq \sum_{k=1}^n |\sin \alpha_k - \cos \alpha_k|.$$

B. Pre riešenie druhej časti úlohy **A-1-5** radíme riešiteľom, aby preskúmali najskôr prípady $n=1$ a $n=2$ a až potom prešli k prípadu $n \geq 3$.

Pre $n=1$ dostaneme rovnosť $|\sin \alpha_1 - \cos \alpha_1| = |\sin \alpha_1 - \cos \alpha_1|$, ktorá platí pre všetky α_1 . Pre $n=2$

nastane v (11) rovnosť práve vtedy, keď nastane rovnosť v týchto troch nerovnostiach:

$$|\sin \alpha_1 - \cos \alpha_1| \cdot |\cos \alpha_2| \leq |\sin \alpha_1 - \cos \alpha_1|, \quad (12a)$$

$$|\sin \alpha_1| \cdot |\sin \alpha_2 - \cos \alpha_2| \leq |\sin \alpha_2 - \cos \alpha_2|, \quad (12b)$$

$$\begin{aligned} & |(\sin \alpha_1 - \cos \alpha_1) \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 (\sin \alpha_2 - \cos \alpha_2)| \leq \\ & \leq |(\sin \alpha_1 - \cos \alpha_1) \cos \alpha_2| + |\sin \alpha_1 (\sin \alpha_2 - \cos \alpha_2)|. \end{aligned} \quad (12c)$$

Rovnosť v (12a, b) vedie k týmto podmienkam:

- a) $\sin \alpha_1 = \cos \alpha_1 \wedge \sin \alpha_2 = \cos \alpha_2$;
- b) $\sin \alpha_1 = \cos \alpha_1 \wedge \sin \alpha_2 \neq \cos \alpha_2 \wedge |\sin \alpha_1| = 1$;
- c) $\sin \alpha_1 \neq \cos \alpha_1 \wedge |\cos \alpha_2| = 1 \wedge \sin \alpha_2 = \cos \alpha_2$;
- d) $\sin \alpha_1 \neq \cos \alpha_1 \wedge |\cos \alpha_2| = 1 \wedge$
 $\wedge \sin \alpha_2 \neq \cos \alpha_2 \wedge |\sin \alpha_1| = 1$.

Prípady b), c) nemôžu nastať, pretože pre žiadne φ neplatí $\sin^2 \varphi = \cos^2 \varphi = 1$. Prípad d) je v spore s (12c), pretože (12c) nadobúda v tomto prípade tvar

$$\begin{aligned} & |\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2| \leq \\ & \leq |\sin \alpha_1 \cos \alpha_2| + |-\sin \alpha_1 \cos \alpha_2|. \end{aligned}$$

Pravá strana sa rovná 2, ľavá 0, takže rovnosť nenastáva.

Zostáva len prípad a). V tomto prípade

$$\alpha_k = \frac{\pi}{4} + m_k \pi, \quad k = 1, 2, \quad (13)$$

kde m_1, m_2 sú celé čísla. Skúškou sa ľahko presvedčíme, že vzorce (13) dávajú skutočne riešenie úlohy **B** v prípade $n = 2$.

V prípade $n \geq 3$ postupujeme analogicky ako pri $n = 2$. Dostaneme výsledok: rovnosť v (11) nastane práve vtedy, keď

$$\alpha_k = \frac{\pi}{4} + m_k \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

kde m_k sú celé čísla.

A-I-6

Je daná guľa **G**. Určte množinu **M** všetkých bodov *A*, pre ktoré možno zostrojiť taký rovnobežník *ABCD*, že celá jeho uhlopriečka *BD* sa nachádza v guľi **G** a o veľkostiach uhlopriečok *AC*, *BD* platí $AC \leq BD$.

Komentár. Riešenie sa skladá z troch častí:

1. Odvodí sa, že každý vrchol *A* leží v guľi **G'** sústrednej s **G**, ktorej polomer je $r\sqrt{2}$ (r je polomer gule **G**).
2. Vysloví sa hypotéza, že hľadaná množina **M** je guľa **G'**.
3. Dokáže sa inklúzia $\mathbf{G}' \subset \mathbf{M}$. Pretože v časti 1. bola dokázaná inklúzia $\mathbf{M} \subset \mathbf{G}'$, bude tak dokázaná rovnosť $\mathbf{M} = \mathbf{G}'$.

Ad 1. Ak označíme *S* stred rovnobežníka *ABCD*, je podľa predpokladu $SA \leq SB = SD$, tj. bod *A* leží v kruhu zostrojenom nad priemerom *BD*. Preto je $\sphericalangle BAD \geq 90^\circ$. Rovina *ABD* pretne guľu **G** v kruhu, ktorý z bodu *A* vidno pod uhlom $\omega \geq \sphericalangle BAD \geq 90^\circ$ alebo ktorý bod *A* obsahuje.

Ad 2. Z predchádzajúcej úvahy vyplýva hypotéza, že $\mathbf{M} = \mathbf{G}'$.

Ad 3. Pri dôkaze inklúzie $\mathbf{G}' \subset \mathbf{M}$ zvolíme bod $A \in \mathbf{G}'$, ktorý leží mimo gule **G**. Stredom gule **G** a bodom *A* pre-

ložíme rovinu g , která pretne G v kružnici κ . Z bodu A vedíme ku κ dotýčnice s body dotyku B, D . Potom je bod A vrcholem rovnobežníka $ABCD$, který vyhovuje požiadavkám úlohy.

Ako je zrejmé z vyššie uvedených komentárov, sú úlohy **A–I–1, 2, 5** náročnejšie, ich riešenie vyžaduje isté triky. Úlohy **A–I–3, 4, 6** patria zasa k úlohám, ktorých riešenie nevyžaduje od riešiteľa takmer žiadnu vynaliezavosť.

KATEGORIE B

B–I–1

Pro číslo 3 025 platí: $3\,025 = (30 + 25)^2$. Najděte všechna dvojčiferná a čtyřčiferná čísla této vlastnosti:

Komentář. Text úlohy je poněkud nejasný. Snad by se měl interpretovat tak, že jde jednak o čísla tvaru $10x + y$, kde x, y jsou čísla jednociferná, a jednak o čísla tvaru $100x + y$, kde x, y jsou čísla dvojčiferná. Přitom číslo x **nesmí** začínat cifrou 0, číslo y **může** začínat cifrou 0.

Při řešení by se měla vyžadovat podrobná analýza. V první úloze se vychází z rovnice

$$10x + y = (x + y)^2, \quad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. \quad (14)$$

Úlohu lze řešit experimentálně přezkoušením všech devíti možných případů. Malým trikem odvodíme z (14) ekvivalentní rovnici

$$9x = (x + y)(x + y - 1). \quad (15)$$

Tato úprava umožňuje podstatně zúžit obor řešení. Oba činitele na pravé straně (15) jsou totiž nesoudělná čísla, proto jeden z nich je násobkem devíti, tj. roven $9k$ ($k \geq 1$). Druhý činitel je $9k \pm 1 \geq 9 \pm 1 \geq 8$. Z (15) pak plyne $9x \geq 9k \cdot 8$, neboli $x \geq 8$. Protože je $x < 10$, zužuje se obor řešení na dvě čísla $x = 8$ nebo 9 . Zkouška ukáže, že jediné řešení je $81 = (8 + 1)^2$.

V druhé úloze se ukáže, že předchozí postup řešení je schopný přenesení. Výchozí rovnice v tomto případě zní

$$99x = (x + y)(x + y - 1). \quad (16)$$

Nesoudělnost obou činitelů na pravé straně (16) vede k závěru, že a) buď jeden z nich je násobkem čísla 99, nebo b) jeden je násobkem čísla 9, druhý násobkem čísla 11.

V případě a) jsou činitele na pravé straně (16), $99k$, $k \geq 1$, $99k \pm 1 \geq 99 \pm 1 \geq 98$; z (16) pak plyne $99x \geq 99k \cdot 98$, tj. $x \geq 98k$. Odtud dále $k = 1$, $x = 98$ nebo 99 . Zkouška ukáže, že jediné řešení v případě a) je $9801 = (98 + 1)^2$. Poněvadž rozdíl obou činitelů na pravé straně (16) je roven 1, platí v případě b) rovnice

$$9z + 11t = 1, \quad (17)$$

kde z, t jsou shodná čísla celá. Diofantickou rovnici (17) rozřeší žáci známým způsobem ($9z = 1 - 11t$, $9u = 1 - 2t$, $2t = 1 - 9u$, $2v = 1 - u$, $u = 1 - 2v$, odtud $z = 5 - 11v$, $t = 9v - 4$).

Pro řešení rovnice (17) pořídíme výpis z tabulky:

v	-2	-1	0	1	2	3
z	27	16	5	-6	-17	-28
t	-22	-13	-4	5	14	23
$9z$	243	144	45	-54	-153	-252
$11t$	-242	-143	-44	55	154	253

Řešení dává jen tlustě orámovaná část tabulky, tj. dvojice 44, 45 a 54, 55. Příslušné hodnoty x jsou podle (16) $x = 20$ nebo 30; řešení jsou

$$2\,025 = (20 + 45)^2, \quad 3\,025 = (30 + 25)^2.$$

Primitivněji lze k řešení rovnice (16) dospět tak, že vzhledem k (16) sestavíme tabulku násobků čísla 11 až do 18.11 (neboť $x + y < 200$) a zkoumáme dělitelnost devíti těchto násobků a čísel sousedních.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$11k$	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198
$11k - 1$	10	21	32	43	54	65	76	87	98	109	120	131	142	153	164	175	186	197
$11k + 1$	12	23	34	45	56	67	78	89	100	111	122	133	144	155	166	177	188	199

Odtud vyjde např. $x + y = 45$, $99x = 44 \cdot 45$, $x = 20$, ale $x + y = 154$, $99x = 154 \cdot 153$, $x = 238 > 100$. Vyjdou

tedy opět jen tři řešení z levé části tabulky. Úloha dobře ukazuje, jak závisí obsáhlost zkoušky na „úplnosti“ analýzy úlohy.

B-I-2

Dokážte platnost nerovnosti

$$6 \sum_{i=1}^n i^2 \left(\frac{x_i}{x} \right)^2 \left(2 - \left(\frac{x_i}{x} \right)^2 \right) \leq n(n+1)(2n+1),$$

kde n je přirozené číslo a $x, x_i, i = 1, 2, \dots, n$, reálné čísla. Kedy nastane rovnost?

Komentář. Úloha je velmi jednoduchá a nepotřebuje takřka komentáře; poměrně komplikovaný koeficient při i^2 má za úkol jen trochu zmást řešitele. Označíme-li ho

$$y_i = \left(\frac{x_i}{x} \right)^2 \left(2 - \left(\frac{x_i}{x} \right)^2 \right), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

pak stačí dokázat, že platí

$$y_i i^2 \leq i^2. \quad (18)$$

To je evidentní, pokud je $y_i < 0$. Je-li $y_i \geq 0$, pak nerovnost $y_i \leq 1$ vyplývá ze studia průběhu funkce $t \mapsto t(2-t)$. Sečteme-li nerovnosti (18) pro $i = 1$ až $i = n$, vyjde dokazovaná nerovnost ze vzorce $1^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Pokud řešitel tento vzorec nezná, odvodí dokazovanou nerovnost přímo matematickou indukcí.

Rovnost nastane, právě když ve všech nerovnostech (18) nastane rovnost, tj. když

$$(\forall i) y_i = 1 \quad \text{neboli} \quad (\forall i) \left(\frac{x_i}{x} \right)^2 \left(2 - \left(\frac{x_i}{x} \right)^2 \right) = 1,$$

$$\text{neboli} \quad (\forall i) |x_i| = |x|.$$

B-I-3

Nechť pro $a \geq 0$ je

$$r_a(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x > a, \\ 0 & \text{pro } |x| \leq a, \\ x & \text{pro } x < -a. \end{cases}$$

Řešte rovnici s reálným parametrem k

$$\sum_{i=0}^{\infty} r_i(x) = kx.$$

Komentář. Klíčem k řešení této jednoduché úlohy je podrobná analýza průběhu funkce

$$R(x) = \sum_{i=0}^{\infty} r_i(x).$$

Ukáže se, že pro $x \in \langle -n; -n+1 \rangle \cup (n-1; n \rangle$ (n přirozené), je $R(x) = nx$. Přesný důkaz je třeba provést indukcí, řešitelé by si měli načrtnout graf funkce $R(x)$.

Diskuse se provede podle parametru k a za pomoci náčrtků. Řešením jsou tyto množiny kořenů:

$k < 1$	$k = 1$	$1 < k < 2$	$\dots \quad k = n$	$n < k < n + 1$
$\{0\}$	$\langle -1; 1 \rangle$	$\{0\}$	K	$\{0\}$

kde $\mathbf{K} = \langle -n; -n + 1 \rangle \cup (n - 1; n)$.

Úloha **B-I-3** rozšiřuje opět zásobu elementárních nespojitých funkcí, s kterými se pracuje na střední škole.

B-I-4

Jsou dány čtyři různé body A, B, C, D ležící v téže přímce. Určete množinu všech bodů X v prostoru, pro něž platí:

$$\sphericalangle AXB = \sphericalangle BXC = \sphericalangle CXD. \quad (19)$$

Komentář. Dvě úvodní poznámky: 1. Je vidět, že prostorová varianta úlohy je jen formální; je-li totiž $\mathbf{M}_1$ množina všech bodů X , které leží v rovině svazku (AB) a splňují podmínky (19), vznikne hledaná množina $\mathbf{M}_2$ rotací množiny $\mathbf{M}_1$ kolem osy AB .

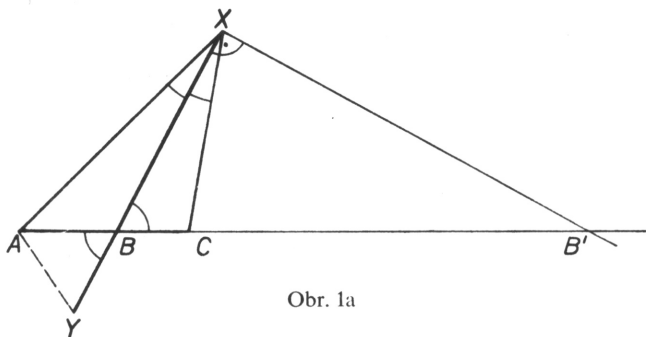
2. Pokud má být $\mathbf{M}_2 \neq \emptyset$, pak pro uspořádání bodů A, B, C, D plyne z (6), že B leží mezi A, C a C mezi B, D ; je tedy pořádek bodů A, B, C, D .

Řešení rovinné varianty úlohy **B-I-4** se opírá o *Apollo-niovu kružnici*, resp. o vlastnost osy úhlu trojúhelníku; tyto poznatky by si měli řešitelé připomenout. Na obrázku 1a

je $\overrightarrow{XB}$ osa úhlu $\angle AXC$, úhel $\angle XBC$ je ostrý. (Případy, v nichž je $\angle XBC$ pravý nebo tupý, přenecháváme čtenáři.) Na polopřímce $\overrightarrow{XB}$ je sestrojen bod $Y \neq B$ tak, že je $AY = AB$. Z podobnosti $\triangle AXY \sim \triangle CXB$ plyne

$$\frac{AX}{AY} = \frac{AX}{AB} = \frac{CX}{CB},$$

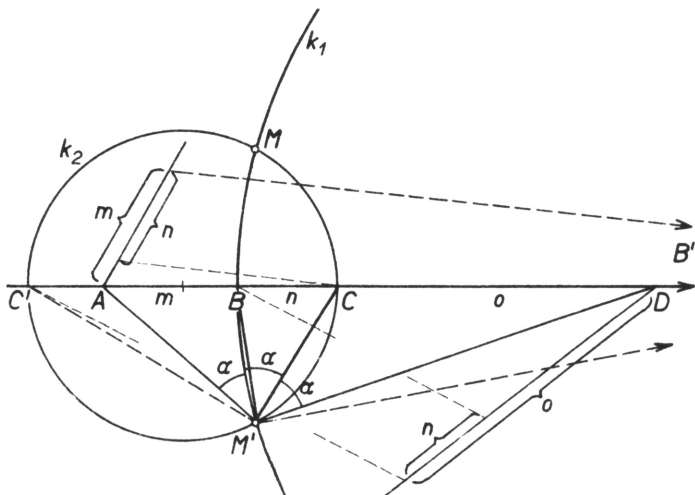
neboli $\frac{AX}{CX} = \frac{AB}{CB}$; bod X leží tedy na Apolloniiově kružnici



k_1 , sestrojené nad průměrem BB' ; přitom B' je bod ležící vně úsečky AC na polopřímce $\overrightarrow{BC}$, pro který platí $AB' : CB' = AB : CB$.

Obdobně: není-li $BC = CD$, leží bod X na Apolloniiově kružnici k_2 sestrojené nad průměrem CC' , přičemž $BC : DC = BC' : DC'$. Bod C' leží vždy vně úsečky BB' (protože úhly $\angle BXB'$, $\angle CXC'$ jsou pravé a bod C leží mezi B a B'), a proto se obě Apolloniiovy kružnice k_1, k_2 protínají ve dvou různých bodech M, N souměrně sdružených podle osy AB (obr. 1b). Jejich rotací vznikne kružnice.

Také úloha **B-I-4** nevyžaduje žádný vtíp; jediným impulsem by snad mohlo být upozornění na souvislost osy úhlu s Apolloniiovou kružnicí. Pozornost je třeba vě-



Obr. 1b

novat diskusi; zvláště se nesmí zapomenout na případy, kdy body X neleží na Apolloniiově kružnici, nýbrž na jisté přímce.

B-I-5

V rovině je dán trojúhelník. Najděte aspoň jeden lichoběžník, jehož všechny čtyři vrcholy leží na hranici daného trojúhelníku tak, že dělí jeho obvod na čtyři stejně dlouhé části.

Komentář. Je to v podstatě úloha na manipulaci s nerovnostmi, zejména s nerovností trojúhelníkovou. Postup řešení žáci najdou pravděpodobně snadno, náročnější je detailní provedení. Důležité je připomenutí, že úloha žádá jen určení (sestrojení) *aspoň jednoho* lichoběžníku žádané vlastnosti. Postup řešení lze rozčlenit do těchto bodů:

1. Hledaný lichoběžník má jednu stranu z ve straně trojúhelníku. Pokusíme se o to, aby tato strana z byla základna lichoběžníku a aby ležela v nejdelší straně c trojúhelníku.

2. Výpočtem určíme krajní body druhé základny z' .

3. Pokusíme se umístit stranu z v úsečce c tak, aby dvě další části hranice trojúhelníku měly délky rovnající se čtvrtině jeho obvodu.

4. Dokážeme, že výsledný čtyřúhelník není rovnoběžník.

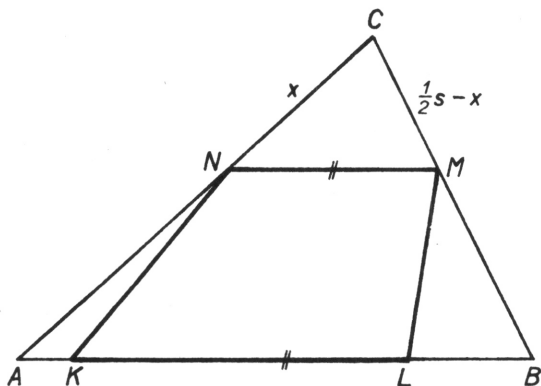
Toto členění by mohlo být instrukcí pro řešení úlohy.

Ad 1. Označíme vrcholy a strany trojúhelníku obvyklým způsobem, jeho obvod označíme $2s$; $KLMN$ bude hledaný lichoběžník (obr. 2). Je-li AB nejdelší strana daného trojúhelníku ABC , je $3c \geq a + b + c = 2s$, tj. $c \geq \frac{2}{3}s > \frac{1}{2}s$, a do strany AB lze umístit úsečku délky $\frac{1}{2}s$.

Ad 2. Označíme $CN = x$; pak je $CM = \frac{a}{b}x$, jak plyne z podobnosti $\triangle ABC \sim \triangle NMC$. Na druhé straně je $CM = \frac{1}{2}s - x$. Porovnáním dostaneme

$$x = \frac{bs}{2(a+b)}. \quad (20)$$

Bod N padne mezi body A, C , neboť není $x \geq b$; jinak by totiž platilo $\frac{bs}{2(a+b)} \geq b$, tj. $s \geq 2(a+b)$, $2s \geq 4(a+b)$, $c \geq 3a + 3b > a + b$, a to je spor.



Obr. 2

Ad 3. Víme už, že $x < b$. Jde ještě o ostřejší omezení čísla x shora; jeho účelem je ukázat, že nanese-li na polopřímku $\overrightarrow{NA}$ úsečku délky $\frac{1}{2}s$, překročíme bod A . Toto odůvodnění je asi nejobtížnější část důkazu; provedeme důkaz sporem.

Nechť je $x + \frac{1}{2}s \leq b$; dosadíme-li sem x ze (20), dostaneme

$$\frac{s}{2} \cdot \frac{2 + \lambda}{1 + \lambda} = b, \quad (21)$$

kde $\lambda = \frac{a}{b}$. Z (21) plyne dále

$$\frac{2s}{b} \leq \frac{4 + 4\lambda}{2 + \lambda};$$

tuto nerovnost spojíme s nerovností $\frac{2s}{b} = \frac{a+b+c}{b} =$
 $= 1 + \lambda + \frac{c}{b} \geq 2 + \lambda$ (je totiž $c \geq b$); vyjde

$$2 + \lambda \leq \frac{4 + 4\lambda}{2 + \lambda},$$

odtud $\lambda^2 \leq 0$. Protože platí $\lambda^2 \geq 0$, je $\lambda = \frac{a}{b} = 0$, což je spor.

Ad 4. Dokážeme nepřímou, že je $MN \neq KL = \frac{1}{2}s$. Z podobnosti $\triangle ABC \sim \triangle NMC$ plyne podle (20)

$$MN = c \cdot \frac{x}{b} = c \cdot \frac{bs}{2b(a+b)} = \frac{cs}{2(a+b)}.$$

Kdyby bylo

$$\frac{cs}{2(a+b)} = \frac{s}{2},$$

platilo by $c = a + b$, což je nemožné.

B-I-6

V pravoúhlé soustavě souřadnic v rovině jsou dány body $A = [2; 0]$, $B = [0; 3]$, $C = [0; 0]$. Určete výraz $V(x, y)$ tak, aby grafem rovnice

$$V(x, y) = 0$$

byla hranice $\triangle ABC$. Přitom v této úloze definujeme výraz takto:

[1] $1, x, y$ jsou výrazy.

[2] Jsou-li $V_1(x, y), V_2(x, y)$ výrazy, jsou výrazy také $V_1(x, y) + V_2(x, y), V_1(x, y) - V_2(x, y), V_1(x, y) \cdot V_2(x, y)$.

[3] Je-li $V(x, y)$ výraz, je $|V(x, y)|$ výraz.

Komentář. Úloha je jakási kuriózní hříčka; pomocí absolutních hodnot se tu snažíme „odstranit nerovnosti“, ačkoli běžný postup bývá právě opačný.

Impulsem – snad jediným – by řešitelům mohly být být tyto věty platné pro reálná čísla i „výrazy“ (kvantifikátory vynecháváme):

$$\text{I. } \alpha = 0 \wedge \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 0.$$

$$\text{II. } \alpha = 0 \wedge \beta = 0 \wedge \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0.$$

$$\text{III. } \alpha = 0 \vee \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta = 0.$$

$$\text{IV. } \alpha = 0 \vee \beta = 0 \vee \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = 0.$$

$$\text{V. } \alpha \geq 0 \Leftrightarrow \alpha - |\alpha| = 0.$$

$$\text{VI. } \alpha \leq 0 \Leftrightarrow \alpha + |\alpha| = 0.$$

Na základě těchto vět odvodí řešitelé snadno analytické vyjádření úseček AC, BC, AB :

$$AC: V_1 = (x - |x|)^2 + (2 - x - |2 - x|)^2 + y^2 = 0,$$

$$BC: V_2 = (y - |y|)^2 + (3 - y - |3 - y|)^2 + x^2 = 0,$$

$$AB: V_3 = (3x + 2y - 6)^2 + (x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 0.$$

Analytické vyjádření hranice trojúhelníku ABC je $V_1 V_2 V_3 = 0$.

KATEGORIE C

C-I-1

Nech $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 1$) sú prvočísla všetky väčšie než 3. Potom číslo $a_1^2 a_2^2 \dots a_n^2 - 1$ je deliteľné číslom 24. Dokážte.

Komentár. Predpoklad, že každé z prvočísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ je väčšie než 3, upozorňuje na jednu vlastnosť týchto prvočísel: Každé prvočíslo $p > 3$ sa dá vyjadriť v tvare $p = 6k \pm 1$, kde k je prirodzené číslo (vetu však nie je možné obrátiť!). Pretože p je prvočíslo, musí byť jeho zvyšok pri delení šiestimi buď 1 alebo 5.

Prirodzené je overiť si pravdivosť dokazovanej vety najskôr pre $n = 1$:

$$p^2 - 1 = (6k \pm 1)^2 - 1 = 36k^2 \pm 12k = 12k(3k \pm 1).$$

Ak je k párne, je $12k$ násobkom čísla 24. Ak je k nepárne, je $3k \pm 1$ párne a $12k(3k \pm 1)$ je tiež násobkom čísla 24. V každom prípade je teda

$$p^2 = 24b + 1. \quad (22)$$

Pomocou (22) sa potom ľahko vypočíta, že

$$a_1^2 a_2^2 \dots a_n^2 = (24b_1 + 1)(24b_2 + 1) \dots (24b_n + 1) = 24N + 1, \quad (23)$$

kde N je vhodné prirodzené číslo. Tým je veta dokázaná.

Ako je z uvedeného vidieť, kľúčom k riešeniu úlohy je vyjadrenie prvočísla $p > 3$ v tvare $p = 6k \pm 1$. Z rovnosti

(23) však možno vyčítať ešte tento výsledok: Druhá mocnina každého nepárneho čísla, ktoré nie je násobkom troch, dáva pri delení číslom 24 zvyšok 1.

C-1-2

Určte množinu všetkých bodov v rovine, pre ktorých pravouhlé súradnice x, y platí

$$x + s(x) + y + s(y) < 1,$$

kde

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x > 1, \\ 0 & \text{pre } |x| \leq 1, \\ -1 & \text{pre } x < -1. \end{cases}$$

Komentár. Riešiteľom radíme, aby rovinu rozdelili na $3 \cdot 3 = 9$ oblastí vzhľadom na definíciu funkcie $s(x)$ a zapísali príslušné množiny:

$$\mathbf{M}_1 = \{[x; y]: x > 1 \wedge y > 1\},$$

$$\mathbf{M}_2 = \{[x; y]: x > 1 \wedge |y| \leq 1\},$$

$$\mathbf{M}_3 = \{[x; y]: x > 1 \wedge y < -1\},$$

$$\mathbf{M}_4 = \{[x; y]: |x| \leq 1 \wedge y > 1\},$$

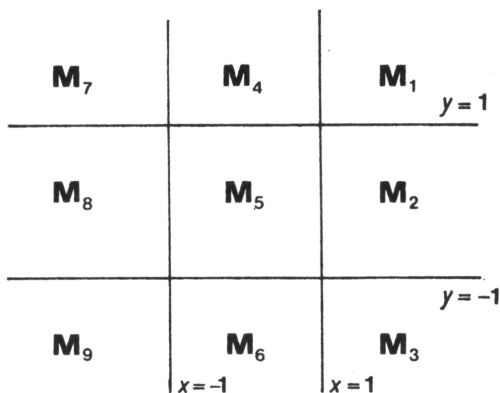
$$\mathbf{M}_5 = \{[x; y]: |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1\},$$

$$\mathbf{M}_6 = \{[x; y]: |x| \leq 1 \wedge y < -1\},$$

$$\mathbf{M}_7 = \{[x; y]: x < -1 \wedge y > 1\},$$

$$\mathbf{M}_8 = \{[x; y]: x < -1 \wedge |y| \leq 1\},$$

$$\mathbf{M}_9 = \{[x; y]: x < -1 \wedge y < -1\}.$$



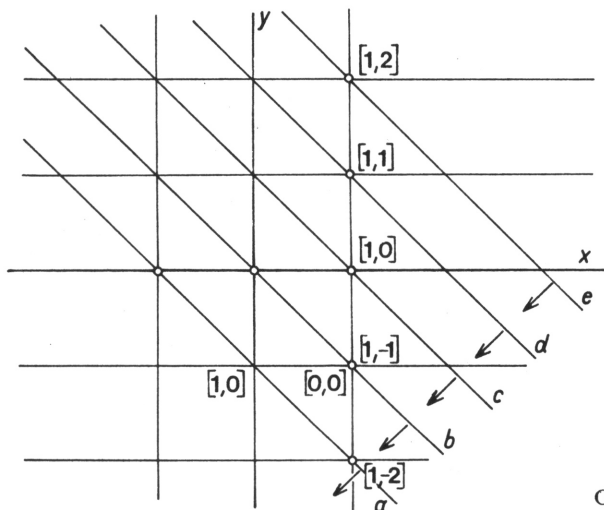
Obr. 3

Príslušný náčrtok oblastí je na obr. 3. Ďalšou úlohou bude prepísať danú nerovnosť pre jednotlivé oblasti tak, že sa nahradia $s(x)$ a $s(y)$ príslušnými hodnotami. Výsledok možno výhodne zapísať do tabuľky:

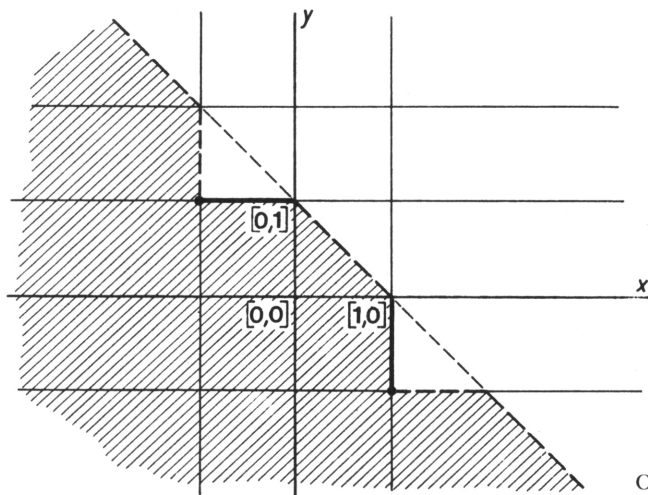
M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
$x + y < -1$	$x + y < 0$	$x + y < 1$	$x + y < 0$	$x + y < 1$

M_6	M_7	M_8	M_9
$x + y < 2$	$x + y < 1$	$x + y < 2$	$x + y < 3$

Tieto nerovnosti vyjadrujú polroviny, ktorých hranicami sú v uvedenom poradí priamky $a, b, c, b, c, d, c, d, e$ a na obr. 4 sú vyznačené šipkami. Hľadanú množinu M dosta-



Obr. 4



Obr. 5

neme, ak určíme prieniky týchto polrovín v uvedenom poradí s množinami $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_9$ a výsledky zjednotíme. Túto časť vyšetrovania možno prehľadne zapísať v tabuľke. Výsledná množina $\mathbf{M}$ bodov je na obr. 5, kde plne vytiahnuté časti hranice patria k $\mathbf{M}$, čiarkované nie a z vrcholov lomej čiary patria do $\mathbf{M}$ len body vyznačené krúžkami.

C-I-3

Riešte v reálnom obore sústavu rovníc s neznámymi x_1, x_2, x_3, x_4 a s parametrom p :

$$\begin{aligned} x_1(x_2 + x_3) &= p, & x_2(x_3 + x_4) &= p, \\ x_3(x_4 + x_1) &= p, & x_4(x_1 + x_2) &= p. \end{aligned} \quad (24)$$

Komentár. Táto úloha je cvičením na zložitejšie diskusie. Na prvý pohľad sa núka vetviť riešenie sústavy pre prípady $p = 0$ a $p \neq 0$.

A. Ak je $p = 0$, rozlíšia sa dva prípady:

$\mathbf{A}_1$ – žiadne z čísel x_i sa nerovná nule; $\mathbf{A}_2$ – aspoň jedno z čísel x_i je rovné nule.

V prípade $\mathbf{A}_1$ vyplýva z (24)

$$x_2 + x_3 = 0, \quad x_3 + x_4 = 0, \quad x_4 + x_1 = 0, \quad x_1 + x_2 = 0,$$

čiže

$$x_2 = -x_1, \quad x_4 = -x_1, \quad x_3 = x_1;$$

pritom za x_1 možno zvoliť ľubovoľné číslo rôzne od nuly.

Pri skúmaní prípadu $\mathbf{A}_2$, keď z čísel x_i je aspoň jedno rovné nule, je potrebné upozorniť na to, že sústava (24)

má cyklickú štruktúru, čo znamená, že stačí nájsť riešenie sústavy (24) pre prípad $x_1 = 0$, čím už bude prípad $p = 0$ v podstate vybavený.

Ak teda $x_1 = 0$, potom tretia a štvrtá rovnica (24) dávajú

$$x_3x_4 = 0, \quad x_2x_4 = 0. \quad (25)$$

Je teda buď $x_4 = 0$ a z druhej rovnice (24) vyplýva $x_2 = 0 \vee x_3 = 0$ alebo je $x_4 \neq 0$ a z rovníc (25) dostávame

$$x_2 = x_3 = 0.$$

Ak je $p = 0$, sú teda v každom prípade aspoň tri z čísel x_i rovné nule. Obrátene: ak zvolíme štvoricu čísel $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, x_4 ľubovoľné, bude sústava (24) splnená.

B. V tomto prípade ($p \neq 0$) sú všetky x_i čísla rôzne od nuly. (Logická štruktúra riešenia je obvyklá: predpokladáme, že sústava (24) má riešenie, a hľadáme preň nutné podmienky.) Z prvej a tretej a z druhej a zo štvrtej rovnice sústavy (24) dostaneme

$$x_1x_2 = x_3x_4, \quad x_2x_3 = x_1x_4. \quad (26)$$

Z rovníc (26) po vydelení a jednoduchšej úprave dostaneme

$$\left(\frac{x_4}{x_2}\right)^2 = 1,$$

tj. buď

$$x_4 = x_2, \quad x_3 = x_1, \quad (27)$$

alebo

$$x_4 = -x_2, \quad x_3 = -x_1. \quad (28)$$

V prípade (27) prvé dve rovnice (24) majú tvar

$$x_1x_2 + x_1^2 = p, \quad x_1x_2 + x_2^2 = p \quad (29)$$

a rovnaký tvar má druhá dvojica rovníc (24). Odčítaním rovníc (29) dostaneme $x_1^2 = x_2^2$, tj. $x_1 = x_2$, pretože prípad $x_2 = -x_1$ je vzhľadom na $p \neq 0$ nemožný (pozri štvrtú rovnicu (24)). Vzhľadom na (27) môžu vyhovovať len štvorice, pre ktoré platí $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$, tj.

$$x_i = \pm \sqrt{\frac{p}{2}}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (30)$$

Skúška ukáže, že pre $p > 0$ sú obe možné štvorice čísel (30) riešeniami sústavy (24).

Zostáva preskúmať prípad (28). Rovnice (24) sa v tomto prípade redukujú na dve rovnice

$$x_1x_2 - x_1^2 = p, \quad -x_1x_2 - x_2^2 = p. \quad (31)$$

Odčítaním rovníc (31) a delením číslom x_1^2 dostaneme

$$\frac{x_2^2}{x_1^2} + 2\frac{x_2}{x_1} - 1 = 0, \quad \text{tj.} \quad \frac{x_2}{x_1} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Pomocou (28) vyjadríme x_2, x_3, x_4 v závislosti na x_1 :

$$x_2 = (-1 \pm \sqrt{2})x_1; \quad x_3 = -x_1; \quad x_4 = (1 \mp \sqrt{2})x_1. \quad (32)$$

Dosadením do prvej rovnice (24) dostaneme

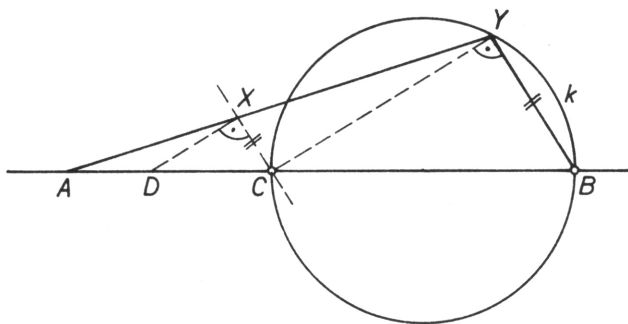
$$x_1^2(-2 \pm \sqrt{2}) = p \quad (33)$$

a stadiaľ x_1, x_2, x_3, x_4 v dosť zložitom tvare. Pre x_1 vyjdú

z rovnice (33) pri $p < 0$ štyri možnosti. Ak určíme x_2, x_3, x_4 z (32), musíme preskúšať voľbu znamienok skúškou – dosadením vypočítaných čísel do rovníc (24). Aj toto počítanie pre účastníka kategórie C je dosť náročné.

C-I-4

V rovine je daná úsečka AB a jej vnútorný bod C . Zostrojme pravouhlý trojuholník BCY s pravým uhlom pri vrchole Y . Označme X taký bod na úsečke AY , že $CX \parallel BY$. Dokážte, že všetky také body X ležia na kružnici. Vyjadrite jej polomer pomocou vzdialeností AC, BC .



Obr. 6

Komentár. Formulácia úlohy nie je úplná. Je treba doplniť, že zostrojíme všetky pravouhlé trojuholníky s preponou BC . Takto určené body Y vyplnia kružnicu k zostrojenú nad priemerom BC , z ktorej sme vylúčili body B, C (obr. 6). Je zrejmé, že bod X je obrazom bodu Y v rov-

noľahlosti, ktorá má stred A a prevádza bod B do bodu C , tj. má konštantu $\frac{AC}{AB} = \frac{AC}{AC + BC}$. Táto rovnoľahlosť prevádza bod C do bodu D polpriamky AB a kružnicu k do kružnice k' zostrojenej nad priemerom CD . Polomer kružnice k' je $\frac{AC}{AC + BC} \cdot \frac{BC}{2} = \frac{AC \cdot BC}{2(AC + BC)}$.

Úloha je triviálna, nezaujímavá. Jediný zisk z riešenia je, že si riešiteľ uvedomí užitočnosť zobrazenia (rovnoľahlosť).

C-I-5

Je daný ostrý uhol $\sphericalangle MVN$. Na ramene VM sú dané body A, B a C , pre ktoré platí

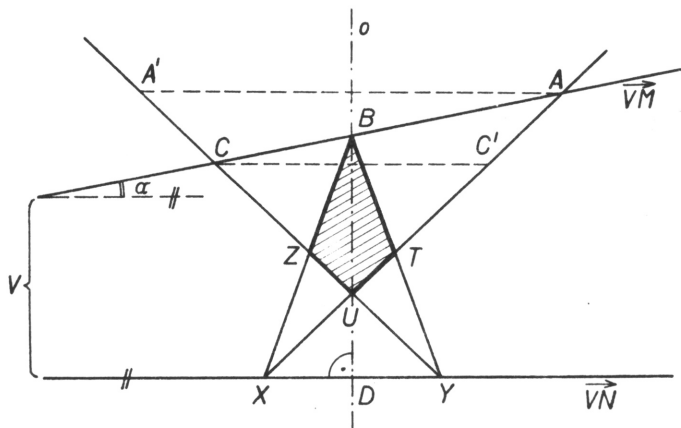
$$AV > BV > CV.$$

Zostrojte na ramene VN také body X, Y , aby prienikom trojuholníkov AXB a CYB bol štvoruholník osove súmerný podľa osi predchádzajúcej bodom B . Nájdite podmienku riešiteľnosti.

Komentár. Prvým impulzom k riešeniu by mohol byť náčrt pre vykonanie rozboru úlohy. Načrtne štvoruholník (deltoid) $BZUT$ súmerný podľa osi $o = BU$ a zostrojíme priesečníky $\{X\} = BZ \cap TU$, $\{Y\} = BT \cap ZU$ (obr. 7). Pretože symetria podľa osi o vymieňa priamky UZ , UT i priamky BZ, BT , vymieňa aj body X, Y , tj. $o \perp XY = VN$. Aby prienikom trojuholníkov ABX , BCY bol štvoruholník, musí priamka o oddeľovať dvojice AX a CY . Načrtne teda priamku VN a zvolíme priamku VM

tak, aby prechádzala bodom B a aby priesečník V priamok VN , VM ležal v polrovine oX . Nakoniec označme body A, C .

Pomocou popísaného náčrtku riešiteľa ľahko urobia rozbor úlohy aj konštrukciu. Priamka o je daná bodom B a smerom ($o \perp VN$). Vrcholy Z, U, T zostrojíme pomocou priamok $AC', A'C$, kde A', C' sú body súmerne združené s bodmi A, C podľa priamky o .



Obr. 7

Obťažnejšia je diskusia. Nech si riešitelia uvedomia, že úloha je riešiteľná práve vtedy, keď priamka o oddeľuje dvojice AX a CY (ide o prienik trojuholníkov ABX, BCY). Ak chceme podmienku riešiteľnosti vyjadriť analyticky, zvolíme parametre takto: $\alpha = \angle MVN$, $VA = a$, $VB = b$, $VC = c$.

Pretože ide o záležitosť usporiadania, je vhodné použiť sústavu ortonormálnych súradníc, napr. $VN \equiv \text{os } x$, $o \equiv \text{os } y$. Súradnice bodov A, C, C' sú potom $A = [(a - b) \cos \alpha; a \sin \alpha]$,

$C = [(c - b) \cos \alpha; c \sin \alpha]$, $C' = [(b - c) \cos \alpha; c \sin \alpha]$.
Pre súradnicu x_1 bodu X (priesečníka priamok VN, AC')
odvodíme rovnicu

$$\frac{x_1(a - c)}{\cos \alpha} = ab + bc - 2ac.$$

Podmienkou riešiteľnosti je potom $x_1 < 0$ a pretože
 $a - c > 0$, $\cos \alpha > 0$, možno ju vyjadriť v tvare

$$b(a + c) < 2ac.$$

C-1-6

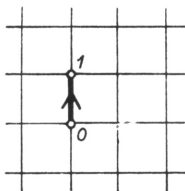
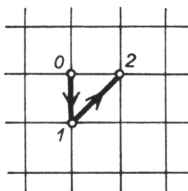
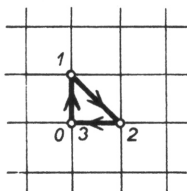
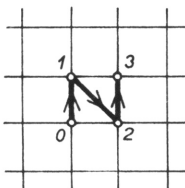
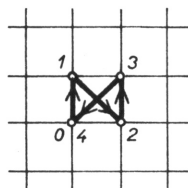
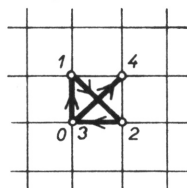
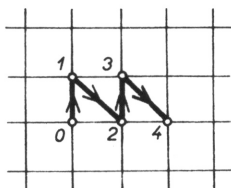
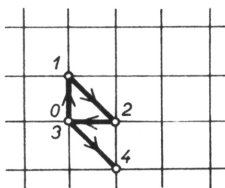
Je daná rovina a v nej jednotková štvorcová sieť. Vyšetrite postupnosti bodov

$$A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \quad (34)$$

s týmito vlastnosťami: Všetky body postupnosti (34) ležia vo vrcholoch danej štvorcovej siete, a to tak, že úsečky $A_k A_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ sú striedavo vždy buď stranou alebo uhlopriečkou niektorého jednotkového štvorca siete. Ak pre niektoré $k = 1, 2, 3, \dots$ je $A_k A_{k+1}$ uhlopriečkou niektorého jednotkového štvorca danej siete, sú $A_{k-1} A_k$ a $A_{k+1} A_{k+2}$ stranami toho istého štvorca.

- Pre ktoré prirodzené n môže byť $A_n = A_0$?
- Pre $n = 1, 2, 3, \dots$ určte maximálnu a minimálnu možnú vzdialenosť bodu A_n od A_0 .

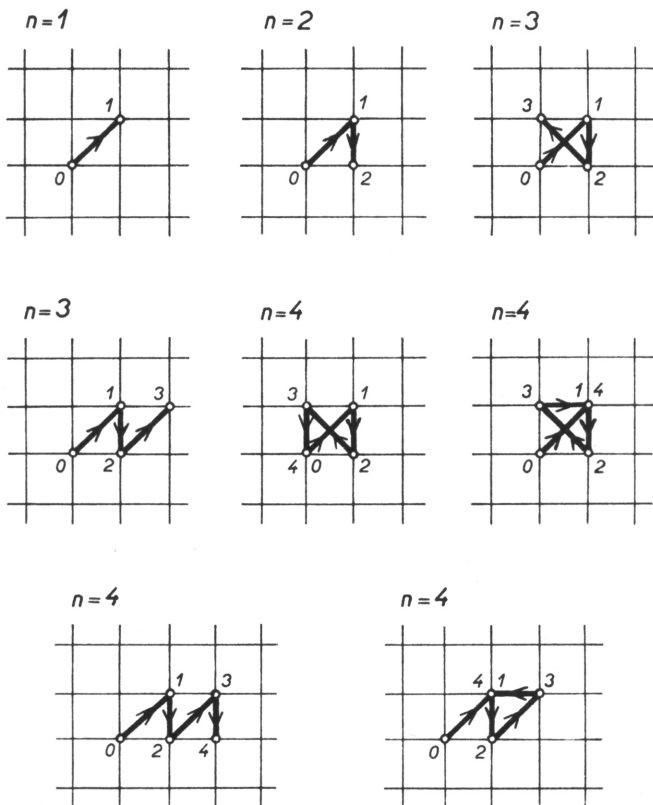
Komentár. Úloha **C-1-6** je pomerne náročná. Jej riešenie nevyžaduje síce takmer žiadne matematické znalosti,

$n=1$  $n=2$  $n=3$  $n=3$  $n=4$  $n=4$  $n=4$  $n=4$ 

Obr. 8

ale spôsob riešenia je pre väčšinu účastníkov MO neobvyklý.

Otázku a) by bolo treba asi vysvetliť: majú sa nájsť všetky prirodzené čísla n , pre ktoré môže platiť (pri vhodnej

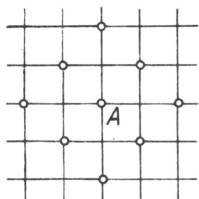


Obr. 9

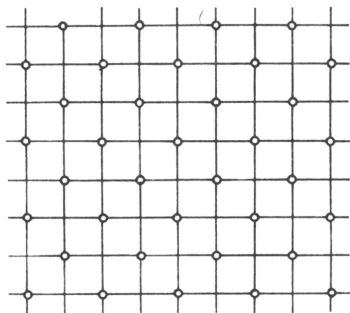
voľbe bodov A_k) $A_n = A_0$. Odporúčame riešiteľom, aby si zaobstarali štvorčekový papier a experimentovali pre $n = 1, 2, 3, 4$. Všetky typy príslušných postupností bodov sú zakreslené na obr. 8 (v jeho popise je všade k namiesto A_k),

a to najskôr pre *prípád I*, že A_0A_1 je strana štvorca siete.

Analogický experiment urobíme pre *prípád II*, tj. pre postupnosti, kde A_0A_1 je uhlopriečkou štvorca základnej siete (pozri obr. 9). Pritom sú v obr. 8 a 9 typy postupností $n = 3$ obe možnosti nadväzujúce na typ $n = 2$, typy postupností $n = 4$ sú všetky možnosti nadväzujúce na oba typy $n = 3$.



Obr. 10



Obr. 11

Pre riešenie úlohy a) pri postupnostiach *I* i *II* odporúčame riešiteľom, aby si načrtli všetky vrcholy siete dosiahnuteľné z jedného z nich pre $n = 4$. Vzhľadom na obr. 8, 9 vyjde situácia načrtnutá na obr. 10, kde východným bodom je bod A . Z tohto obrázku je zrejmé, že pre $n = 4r$ (r prirodzené) sú vzájomne „dosiahnuteľné“ ktorékoľvek dva body siete Σ z obr. 11. Vzhľadom na druhé náčrty z obr. 8 i 9 je zrejmé, že pre $n = 4r + 2$ (r celé nezáporné) nemôže platiť $A_n = A_0$ pre žiadny bod A_0 . A_n je podľa obr. 11 vždy susedným bodom k niektorému bodu siete Σ .

Pre $n = 4r + 1$ (r celé nezáporné) analogicky zistíme, že rovnosť $A_n = A_0$ môže nastať len pre postupnosti skupiny *II*,

ale nie I . Pre $n = 4r + 3$ (r celé nezáporné) zistíme, že rovnosť $A_n = A_0$ môže nastať len pre postupnosti skupiny I , ale nie II .

Tieto výsledky si je treba demonštrovať pre určité n , napr. $n = 5, 6, 7, 8$, a to postupnosti skupiny I aj II . Postupnosti budeme konštruovať s tendenciou dosiahnuť rovnosť $A_n = A_0$.

b) Je evidentné, že minimum δ vzdialeností bodov A_n, A_0 je pre $n > 1$ buď 0 alebo 1. Pre $n = 1$ pre skupinu II je $\delta = \sqrt{2}$.

Pre maximálnu vzdialenosť Δ dostaneme pri párnom n v skupine I i II podľa siedmich náčrtkov na obr. 8 a $\Delta = \frac{1}{2}n$. Pre nepárne n dostaneme

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + 1} \quad \text{v skupine } I;$$

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 + 1} \quad \text{v skupine } II.$$

Tieto výsledky si budeme demonštrovať asi len na numerických príkladoch. Úloha **C-1-6** je myšlienkově najhodnotnejšou úlohou I. kola.

KATEGORIE Z

Z-1-1

Určete všechny takové dvojice čísel a, b , pro něž je mnohočlen $x^4 + ax^2 + b$ možno vyjádřit jako součin mnohočlenů 2. stupně, z nichž jeden je $x^2 + ax + b$.

Komentář. Úloha **Z-1-1** navazuje bezprostředně na úlohu **Z-P-1** a opírá se o určení koeficientů polynomu (polynomicke funkce), který vyplývá z rovnosti dvou takových funkcí platící pro všechny hodnoty proměnné. V našem případě jde o rovnost

$$x^4 + ax^2 + b = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d);$$

neboli

$$\begin{aligned} & x^4 + ax^2 + b = \\ & = x^4 + (a + c)x^3 + (b + d + ac)x^2 + (ad + bc)x + bd. \end{aligned} \quad (35)$$

Z (35) plyne

$$a + c = 0, \quad b + d + ac = a, \quad ad + bc = 0, \quad bd = b. \quad (36)$$

Čtvrtá rovnice (36) vede k tomu, abychom začali rozlišením případů $b \neq 0$ a $b = 0$. Radíme, aby si řešitelé pro koeficienty a, b, c, d sestavili tabulku, kterou budou postupně doplňovat. V případě $b \neq 0$ dostaneme z čtvrté rovnice (36) $d = 1$, takže začátek tabulky je

a	b	c	d
			1

K tomu přistupují rovnice

$$c = -a, \quad b + 1 - a^2 = a, \quad a(1 - b) = 0. \quad (37)$$

Třetí rovnice (37) vede k rozlišení $a = 0$, $a \neq 0$. Rovnice (37) nám dávají toto doplnění tabulky

a	b	c	d
0	-1	0	1
1	1	-1	1
-2	1	2	1

Pro $b = 1$ dává totiž druhá rovnice (37) dvě možnosti:

$$a^2 + a - 2 = 0, \quad (38)$$

$$(a + \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}, \quad (39)$$

$$a + \frac{1}{2} = \pm \frac{3}{2},$$

tj. $a = 1$ nebo -2 . Jinak: (38) můžeme napsat ve tvaru $(a^2 - 1) + (a - 1) = 0$, neboli $(a - 1)(a + 1) + (a - 1) = 0$, neboli $(a - 1)(a + 2) = 0$

a odtud opět $a = 1$ nebo $a = -2$. Jak patrně, „obcházíme“ tu řešení kvadratické rovnice, ale „doplnění“ na druhou mocninu dvojčlenu (39) by měl být pro účastníky olympiády kategorie Z běžný obrat.

V doplňování tabulky pokračujeme pro $b = 0$. Soustava (36) má pak tvar

$$c = -a, \quad d = a(1 + a), \quad ad = 0. \quad (40)$$

Poslední rovnice (40) nás vede k rozlišení případů $a \neq 0$

a $a = 0$. Je-li $a \neq 0$, je $d = 0$, z druhé rovnice (40) je $a = -1$, z první $c = 1$. Další řádek tabulky je tedy

a	b	c	d
-1	0	1	0
....			

Je-li $a = 0$, plyne z (40) $c = d = 0$ a dostaneme tedy celkem 5 možných řešení:

a	b	c	d
0	-1	0	1
1	1	-1	1
-2	1	2	1
-1	0	1	0
0	0	0	0

Zkouškou se přesvědčíme, že uvedené čtveřice čísel a, b, c, d jsou skutečně řešeními; např. je pro všechna x

$$x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x + 1).$$

Jak je patrné, jádro úlohy je v rozboru a diskusi soustavy (36).

Z-1-2

Na výstavě hraček jezdí dvě elektrické lokomotivy po kolejích položených na dvou soustředných kružnicích $k_1(S; r_1)$ a $k_2(S; r_2)$, $r_2 > r_1$, ve stejném smyslu stálou rychlostí v . Vyjely z polohy, v níž byly sobě nejbližší. V kterých okamžicích po startu budou od sebe a) poprvé nejdále; b) poprvé nejbližší? Řešte nejprve obecně, pak pro: $r_1 = 60 \text{ cm}$, $r_2 = 70 \text{ cm}$, $v = 20 \text{ cm/s}$, $\pi \doteq \frac{22}{7}$.

Komentář. Doporučujeme řešit nejprve úlohu:

Na kruhové dráze o poloměru r společně trénovali dva běžci. Spolu vyběhli z téhož místa ve stejném smyslu se stálými rychlostmi v_1 a v_2 ($v_1 > v_2$) a běželi tak dlouho, dokud rychlejší z nich nezískal před druhým náskok tří okruhů. V kterých okamžicích po startu byli od sebe a) poprvé nejdále; b) poprvé nejbližší?

Vzdušná vzdálenost mezi oběma běžci byla vždy největší, právě když byli v krajních bodech téhož průměru dráhy. Poprvé se tak stalo, když rychlejší běžec měl náskok poloviny okruhu. Pro tento okamžik t tedy platí

$$v_1 t - v_2 t = \pi r,$$

tj.

$$t = \frac{\pi r}{v_1 - v_2}. \quad (41)$$

Po startu si běžci byli vždy nejbližší, když rychlejší pomalejšího předbíhal. Poprvé se tak stalo, když rychlejší měl náskok jednoho okruhu. Pro tento okamžik T platí:

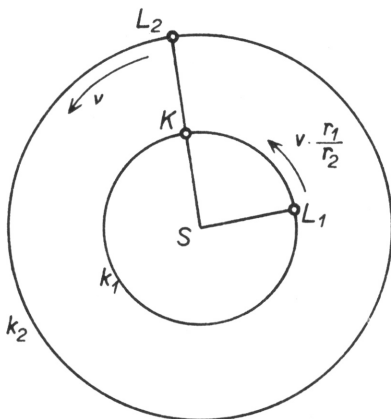
$$v_1 T - v_2 T = 2\pi r,$$

tj.

$$T = 2 \cdot \frac{\pi r}{v_1 - v_2} = 2t. \quad (42)$$

Tuto úlohu je možno řešit např. pro $r = 50$ m, $v_1 = 10$ km/h, $v_2 = 13,6$ km/h.

Přejdeme k řešení úlohy **Z-1-2**. Nechť body L_1 a L_2 na obr. (12) znázorňují obě lokomotivy v jistém časovém



Obr. 12

okamžiku. Označme K průsečík polopřímky SL_2 s kružnicí k_1 . Pohybuje-li se bod L_2 po kružnici k_2 rychlostí v , pak se bod K pohybuje po kružnici k_1 rychlostí

$$v \cdot \frac{r_1}{r_2}.$$

Body L_1 a L_2 jsou si zřejmě nejbližší (nejdále), právě když

jsou si nejbliže (nejdále) body L_1 a K . V okamžiku startu lokomotivy body L_1 a K splývaly. Položíme-li

$$v_1 = v, \quad v_2 = v \cdot \frac{r_1}{r_2}, \quad r = r_1,$$

lze pro řešení úlohy **Z-I-2** užít výše uvedených vzorců (41) a (42). Z těchto vzorců pak plyne pro případ a)

$$t = \frac{\pi r_1 r_2}{v(r_2 - r_1)},$$

tj. pro dané údaje $t \doteq 66$ s;
pro případ b) je

$$T = 2t,$$

tj. pro dané údaje $T \doteq 132$ s.

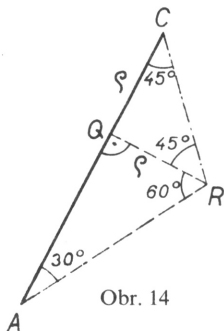
Z-I-3

Je dán rovnostranný trojúhelník ABC , jehož strana má velikost a . Sestrojte bod O , jenž je průsečíkem jeho výšek, a bod P , jenž je s bodem O souměrně sdružen podle přímky BC . Dokažte, že čtyřúhelníku $ABPC$ lze vepsat i opsat kružnici. Vypočítejte poloměry obou těchto kružnic.

Komentář. Úloha **Z-I-3** navazuje volně na úlohu **Z-P-3**. Situace je načrtnuta na obr. 13. Impuls, který lze dát řešitelům, je tento: Kružnice, která se dotýká polopřímek XY , XZ , má střed na ose úhlu $\sphericalangle YXZ$.*)

*) Kružnice, která prochází body X , Y , má střed na ose úsečky XY .

Protože $\triangle OBP$ je rovnostranný (všechny jeho úhly mají velikost 60°), procházejí všechny čtyři osy úseček AB , AC , BP , CP bodem O , který je středem kružnice opsané čtyřúhelníku $ABPC$.



Poloměr ϱ kružnice vepsané lze vypočítat buď z $\triangle PCR$ podle úlohy **Z–P–3** nebo z $\triangle ACR$ (viz obr. 14). Zde je

$$CQ = \varrho, \quad AQ = \varrho \sqrt{3}, \quad AQ + CQ = a, \quad \text{tj.} \quad \varrho = \frac{a}{\sqrt{3} + 1} =$$

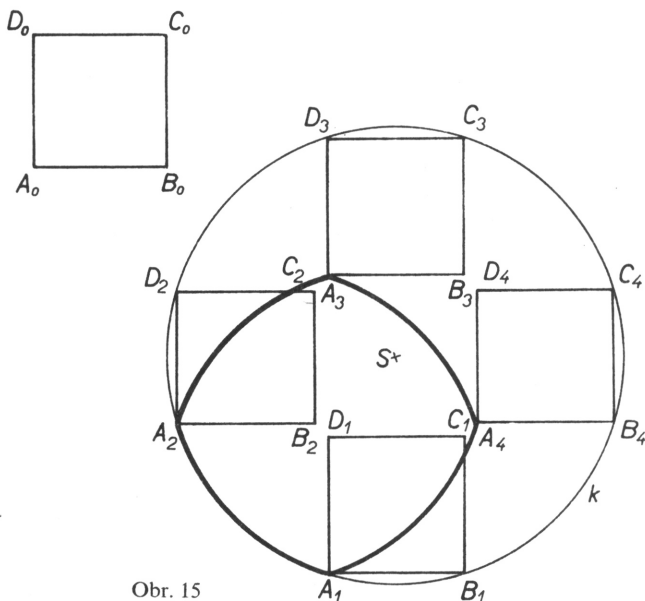
$$= \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1). \text{ Stačí v } \triangle ACR \text{ zakreslit úsečku } QR = \varrho$$

90

Z-I-4

V rovině je dána kružnice k o poloměru 6 cm a čtverec $A_0B_0C_0D_0$, jehož strana má délku 3,5 cm. Označme $ABCD$ čtverec těchto vlastností:

1. Vznikne rovnoběžným posunutím čtverce $A_0B_0C_0D_0$;
2. náleží kruhu s hranicí k ;
3. aspoň jeden jeho vrchol náleží kružnici k .



Obr. 15

Narýsujte čáru, kterou vyplní vrcholy A všech takových čtverců.

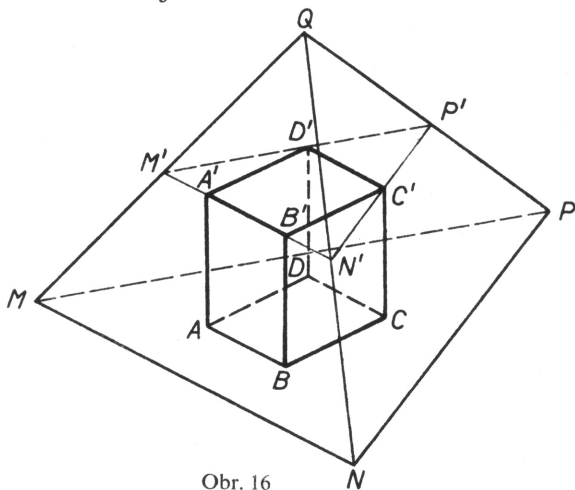
Komentář. Úloha **Z-I-4** je úloha na určení množiny bodů v rovině, vytvořené pohybem; hlavní roli tu hraje pochopení textu a znázornění situace. Deduktivně pak má řešitel odůvodnit, že hledaná množina bodů **M** se skládá ze čtyř navzájem shodných oblouků kružnice $\widehat{A_1A_2}$, $\widehat{A_2A_3}$, $\widehat{A_3A_4}$, $\widehat{A_4A_1}$, z nichž první je částí kružnice k , druhý vznikne posunutím ($D_2 \rightarrow A_2$) z oblouku $\widehat{D_2D_3}$, třetí vznikne posunutím ($C_3 \rightarrow A_3$) z oblouku $\widehat{C_3C_4}$ a čtvrtý vznikne posunutím ($B_4 \rightarrow A_4$) z oblouku $\widehat{B_4B_1}$. S tímto výkladem a jeho odůvodněním se asi spokojíme. Situace je nakreslena na obr. 15; k výkladu patří i popis konstrukce čtverců $A_iB_iC_iD_i$.

IV. Soutěžní úlohy II. kola

KATEGORIE A

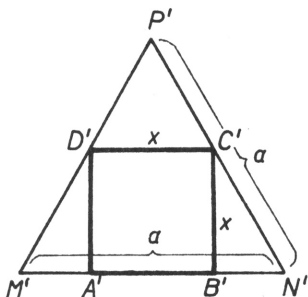
A – II – 1a

Je dán pravidelný čtyřstěn $MNPQ$ o hraně délky 1. Dokažte, že každá krychle, jejíž čtyři vrcholy leží ve stěně MNP a zbývající čtyři v dalších stěnách čtyřstěnu, má hranu menší než $\frac{1}{3}$.



Obr. 16

Řešení. Nechť krychle $ABCD A'B'C'D'$ splňuje v textu uvedené podmínky; ve stěně MNP nechť leží její stěna $ABCD$. Pak rovina $A'B'C'$ je rovnoběžná s rovinou MNP , takže daný čtyřstěn protíná v rovnostranném trojúhelníku; jeho vrcholy označme M', N', P' (obr. 16). Čtverec $A'B'C'D'$ je zřejmě trojúhelníku $M'N'P'$ vepsán. To je možné jedine



Obr. 17

tak, že jedna ze stran čtverce $A'B'C'D'$ je částí jedné ze stran $\triangle M'N'P'$. Nechť např. $A'B' \subset M'N'$ (obr. 17). Označme a velikost úsečky $M'N'$ a x velikost hrany vepsané krychle. Pak z $\triangle B'N'C'$ plyne

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{x}{0,5(a - x)},$$

tj.

$$\sqrt{3}(a - x) = 2x,$$

odkud plyne

$$x = (2 - \sqrt{3})a\sqrt{3}. \quad (1)$$

Snadno lze spočítat, že pravidelný čtyřstěn o hraně délky

d má tělesovou výšku $k = d \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$; výška čtyřřtěnu $MNPQ$ je tedy

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (2)$$

Čtyřřtěn $M'N'P'Q$ je zřejmě také pravidelný, a proto je jeho výška

$$v' = a \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (3)$$

Z rovností (2) a (3) vyplývá, že

$$x = (1 - a) \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (4)$$

Z (1) a (4) dostáváme rovnici pro a :

$$(2 - \sqrt{3}) a \sqrt{3} = (1 - a) \sqrt{\frac{2}{3}},$$

z níž plyne

$$a = \frac{\sqrt{2}}{6 + \sqrt{2} - 3\sqrt{3}}.$$

Podle (1) pak dostáváme

$$x = \frac{(2 - \sqrt{3}) \sqrt{6}}{6 + \sqrt{2} - 3\sqrt{3}}. \quad (5)$$

Zřejmě $x > 0$. Z našich úvah plyne, že způsobem popsaným v textu úlohy lze danému čtyřřtěnu vepsat právě tři různé navzájem shodné krychle, jejichž hrany mají délku (5).

Máme dokázat, že platí $x < \frac{1}{3}$. Podle (5) je

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{1}{6}(6 + \sqrt{2} - 3\sqrt{3}) \sqrt{6}(2 + \sqrt{3}) = \\ &= \frac{1}{6}(3\sqrt{6} + 4\sqrt{3} + 6) > 3. \end{aligned}$$

Tedy $x < \frac{1}{3}$.

A – II – 1b

Riešte sústavu rovníc s neznámymi x_1, x_2, x_3, x_4 a s parametrami c_1, c_2, c_3, c_4 :

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 &= c_1, \\-x_1 + 2x_2 - x_3 &= c_2, \\-x_2 + 2x_3 - x_4 &= c_3, \\-x_3 + 2x_4 &= c_4.\end{aligned}$$

Řešení. Z první rovnice je

$$x_1 - x_2 = c_1 - x_1,$$

ze součtu prvních dvou rovnic

$$x_2 - x_3 = c_1 + c_2 - x_1,$$

ze součtu prvních tří rovnic

$$x_3 - x_4 = c_1 + c_2 + c_3 - x_1,$$

ze součtu všech čtyř rovnic

$$x_4 = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 - x_1.$$

Sečtením posledních dvou rovnic

$$x_3 = 2c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4 - 2x_1,$$

dále

$$x_2 = 3c_1 + 3c_2 + 2c_3 + c_4 - 3x_1,$$

a konečně

$$x_1 = 4c_1 + 3c_2 + 2c_3 + c_4 - 4x_1.$$

Proto je

$$x_1 = \frac{4}{3}c_1 + \frac{3}{3}c_2 + \frac{2}{3}c_3 + \frac{1}{3}c_4,$$

$$x_2 = \frac{3}{3}c_1 + \frac{6}{3}c_2 + \frac{4}{3}c_3 + \frac{2}{3}c_4,$$

$$x_3 = \frac{2}{3}c_1 + \frac{4}{3}c_2 + \frac{6}{3}c_3 + \frac{3}{3}c_4,$$

$$x_4 = \frac{1}{3}c_1 + \frac{2}{3}c_2 + \frac{3}{3}c_3 + \frac{4}{3}c_4.$$

Snadno se přesvědčíme, že toto řešení soustavy skutečně vyhovuje.

Diskuse: Řešení je jediné, na hodnotách parametrů c_1, c_2, c_3, c_4 přitom nezáleží, mohou to být libovolná čtyři reálná čísla.

A – II – 2a

Je dána množina funkcí $f(x) = x^2 + b|x| + c$, kde b, c jsou reálné parametry. Najděte všechny funkce z této množiny, které mají v intervalu $\langle -\frac{1}{2}, 1 \rangle$ největší hodnotu 2 a nejmenší hodnotu 1.

Řešení. Graf Γ každé funkce f lze složit z částí grafů Γ_1, Γ_2 funkcí

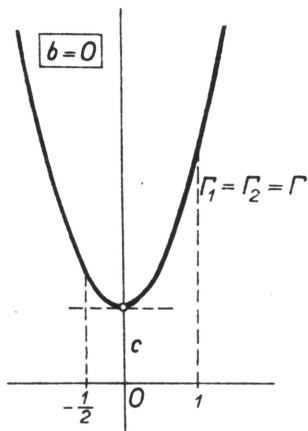
$$f_1(x) = x^2 + bx + c,$$

$$f_2(x) = x^2 - bx + c.$$

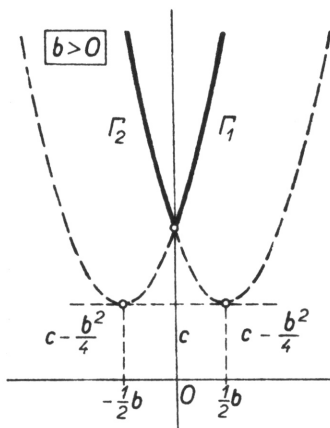
Funkce f_1 má minimum pro $x = -\frac{1}{2}b$, funkce f_2 pro $x = \frac{1}{2}b$; v obou případech je minimum $c - \frac{1}{4}b^2$. Pro $b = 0$ je $f_1 = f_2$, $\Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2$. Pro $b > 0$ je graf Γ složen pro $x \geq 0$ z části grafu Γ_1 , pro $x \leq 0$ z části grafu Γ_2 , a to z těch částí, které neobsahují vrcholy parabol Γ_1, Γ_2 . Také pro

$b < 0$ je graf Γ složen pro $x \geq 0$ z části grafu Γ_1 , pro $x \leq 0$ z části grafu Γ_2 , ale z těch částí, které *obsahují* vrcholy parabol Γ_1, Γ_2 .

a) Je-li $b \geq 0$, nastane minimum pro $x = 0$ (je tedy $c = 1$) a maximum pro $x = 1$. To naznačují obr. 18, 19 a lze to snadno prokázat výpočtem. Dostáváme pro $b = 0$ funkci



Obr. 18



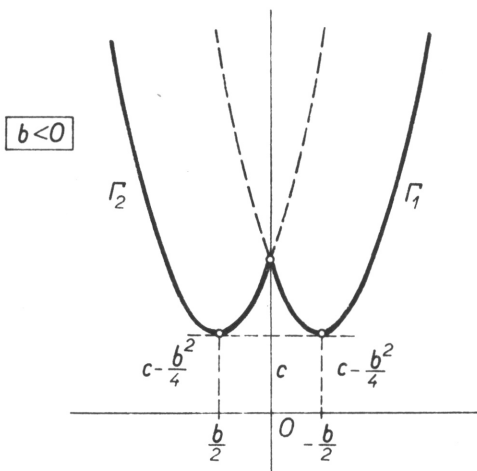
Obr. 19

$x \mapsto x^2 + 1$, která skutečně splňuje podmínky úlohy, pro $b > 0$ nedává rovnice $1 + b + 1 = 2$ řešení.

b) Je-li $b < 0$ (viz obr. 20), je třeba rozlišit dva případy:
 $\alpha)$ $-\frac{1}{2}b \leq 1$ a $\beta)$ $-\frac{1}{2}b > 1$.

V případě $\alpha)$ nastane minimum pro $x = -\frac{1}{2}b$, a platí tedy $c - \frac{1}{4}b^2 = 1$. Buď nastane maximum pro $x = 0$; pak je $c = 2$, $b = -2$ a dostaneme jako možné řešení funkci $x \mapsto x^2 - 2|x| + 2$, která skutečně vyhovuje. Nebo nastane

maximum pro $x = 1$, což vede k rovnici $1 + b + c = 2$; spojením s rovnicí $c - \frac{1}{4}b^2 = 1$ dostaneme $b = -4$, což je ve sporu s předpokladem α).



Obr. 20

V případě β) nastane minimum pro $x = 1$ a maximum pro $x = 0$. Z toho plynou rovnice $1 + b + c = 1$ a $c = 2$, z nichž dostaneme $b = -2$, což je spor s předpokladem β).

Úloha má tedy dvě řešení $x \mapsto x^2 + 1$ a $x \mapsto x^2 - 2|x| + 2$.

A – II – 2b

Určte všechny reálné čísla x , pro které platí

$$3[x]^2 + 6x - 4 = 0. \quad (R)$$

$[x]$ znamená také celé číslo y , pro které platí $y \leq x < y + 1$.

Řešení. 1. způsob: Označme $z = x - y$; pak je

$$0 \leq z < 1. \quad (6)$$

Do dané rovnice dosadíme $x = y + z$. S použitím rovnosti $[x] = y$ dostaneme

$$6z = 4 - 3y^2 - 6y. \quad (7)$$

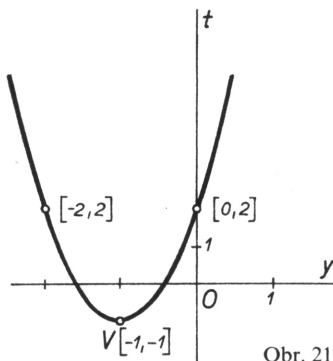
Vzhledem k (6) dostaneme z (7)

$$0 \leq 4 - 3y^2 - 6y < 6. \quad (8)$$

Z (8) plyne

$$0 < 3y^2 + 6y + 2 \leq 6. \quad (9)$$

Grafem funkce $t = 3y^2 + 6y + 2$ v souřadném systému (O, y, t) je „konvexní“ parabola, jejíž osa o je rovnoběžná



Obr. 21

s osou t a jejíž vrchol je v bodě $[-1; 1]$ (obr. 21). Je-li $y \leq -3$ nebo $y \geq 1$, je $t \geq 11$, což je spor s pravou ne-

rovností soustavy (9). Řešení soustavy (9) mohou být jediné ta celá čísla y , pro něž platí

$$-2 \leq y \leq 0.$$

Príslušná tabulka je

y	-2	-1	0
t	2	-1	2

Vidíme, že $y = -1$ nevyhovuje vztahu (9). Pro $y = -2; 0$ dostaneme podle (7) $z = +\frac{2}{3}$ a dále $x = -\frac{4}{3}; \frac{2}{3}$. Daná úloha má skutečně dvě řešení, jak se ověří zkouškou.

Poznámka. Soustavu (9) lze vyřešit ještě tímto způsobem: Určíme obor pravdivosti **A** výrokové formy $A(y) \equiv 3y^2 + 6y + 2 > 0$ a obor pravdivosti **B** výrokové formy $B(y) \equiv 3y^2 + 6y + 2 \leq 6$.

Platí

$$\mathbf{A} = \left(-\infty; -1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \cup \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty \right),$$

$$\mathbf{B} = \left\langle -1 - \frac{\sqrt{21}}{3}; -1 + \frac{\sqrt{21}}{3} \right\rangle.$$

V průniku $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ leží dvě celá čísla: -2 a 0 . Další postup je stejný jako v prvním případě.

2. *způsob*: Má-li platit (R), musí být $6x$ celé číslo. Je tedy x nutně tvaru

$$x = q + \frac{1}{6}r,$$

kde q je celé a $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Potom ovšem $[x] = q$, takže (R) lze psát ve tvaru

$$3q^2 + 6q + r - 4 = 0. \quad (10)$$

Odtud je vidět, že $r - 4$ musí být dělitelno 3. To je možné jenom tehdy, je-li buď $r = 1$, nebo $r = 4$. Tyto případy vyšetříme postupně.

a) $r = 1$. Potom z (10) dostáváme

$$3q(q + 2) = 3,$$

tzn.

$$q(q + 2) = 1,$$

ale takové celé q neexistuje.

b) $r = 4$. Z (10) vychází

$$3q(q + 2) = 0,$$

takže je buď $q = 0$, anebo $q = -2$. V prvním případě je

$$x = \frac{2}{3},$$

ve druhém

$$x = -\frac{4}{3};$$

dosazením do (R) se přesvědčíme, že to jsou skutečně řešení.

A – II – 3a

V rovině je dána kružnice k o poloměru 1 a jí vepsaný rovnoběžník $A_1B_1B_2A_2$, pro který platí $A_1B_1 = 1$. Dále je dáno $n - 1$ rovnoběžníků $A_1B_1B_iA_i$, $i = 3, 4, \dots, n + 1$,

$n > 1$ tak, že všechny vrcholy $A_3, B_3, A_4, B_4, \dots, A_{n+1}, B_{n+1}$ leží uvnitř kružnice k . Označme s součet obsahů všech rovnoběžníků, které lze zapsat ve tvaru $A_i B_i B_k A_k$, $i, k = 1, 2, \dots, n+1, i < k$. Dokažte, že platí

$$n\sqrt{3} \leq s < \frac{1}{2}(n^2 - n + 2)\sqrt{3}.$$

Řešení. Rovnoběžník $A_1 B_1 B_2 A_2$ má obsah $\sqrt{3}$, neboť to je vzdálenost dvou navzájem rovnoběžných tětív $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ kružnice k , které mají délku 1. Všechny ostatní úsečky $A_i B_i$, $i = 3, 4, \dots, n+1$, leží uvnitř pásu roviny s hranicemi $A_1 B_1$ a $A_2 B_2$. Leží-li všechny body A_i, B_i , $i = 3, 4, \dots, n+1$, v přímce, vznikne mimo rovnoběžník $A_1 B_1 B_2 A_2$ ještě $2(n-1)$ rovnoběžníků $A_1 B_1 B_i A_i$ a $A_2 B_2 B_i A_i$, $i = 3, 4, \dots, n+1$, z nichž vždy dva odpovídající $A_1 B_1 B_i A_i$ a $A_2 B_2 B_i A_i$ mají obsahy se součtem $\sqrt{3}$. Pro číslo s máme v tomto případě rovnost

$$s_0 = \sqrt{3} + (n-1)\sqrt{3} = n\sqrt{3}. \quad (11)$$

V jiných případech přistoupí k uvedeným $2n-1$ rovnoběžníkům nejvýše r rovnoběžníků, které lze zapsat ve tvaru $A_i B_i B_k A_k$, $i, k = 3, 4, \dots, n+1, i < k$. Zřejmě je

$$r \leq \binom{n-1}{2} = \frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

Každý z těchto rovnoběžníků má obsah menší než $\sqrt{3}$; pro součet s' jejich obsahů tedy platí

$$s' < r\sqrt{3} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(n^2 - 3n + 2).$$

S použitím (11) dostaneme

$$s = s_0 + s' < n\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}(n^2 - 3n + 2),$$

tj.

$$s < \frac{1}{2}(n^2 - n + 2)\sqrt{3};$$

úhrnem

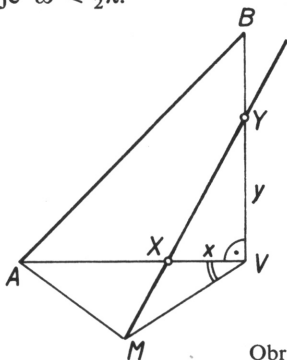
$$n\sqrt{3} \leq s < \frac{1}{2}(n^2 - n + 2)\sqrt{3}.$$

A – II – 3b

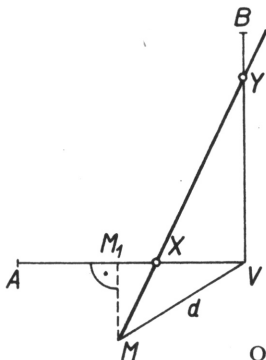
Je dáno kladné číslo s a konvexní čtyřúhelník $ABVM$, v němž je úhel $\sphericalangle AVB$ pravý. Určete takové body X, Y ramen VA, VB , aby přímka XY procházela bodem M a aby platilo $VX + VY = s$.

- Vyjádřete VX pomocí délek $s, d = VM$ a velikosti úhlu $\omega = \sphericalangle AVM$.
- Stanovte podmínku řešitelnosti úlohy.

Řešení. Na obr. 22 je označeno $VX = x, VY = y$. Zřejmě je $\omega < \frac{1}{2}\pi$.



Obr. 22



Obr. 23

Pro obsahy trojúhelníků platí

$$\triangle VXY + \triangle VXM = \triangle MVY,$$

neboli

$$\frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}dx \sin \omega = \frac{1}{2}dy \cos \omega,$$

tj.

$$y = \frac{dx \sin \omega}{d \cos \omega - x}. \quad (12)$$

Protože $VX + VY = s$, plyne z (12)

$$x + \frac{dx \sin \omega}{d \cos \omega - x} = s,$$

tj.

$$x^2 - (d \cos \omega + d \sin \omega + s)x + ds \cos \omega = 0. \quad (13)$$

Podle obr. 23 je úloha řešitelná právě tehdy, má-li rovnice (13) kladný kořen, pro který platí $x < VM_1$ (M_1 je pravoúhlý průmět bodu M do polopřímky VA), neboli

$$x < d \cos \omega. \quad (14)$$

Diskriminant rovnice (13) je

$$D = (d \cos \omega + d \sin \omega + s)^2 - 4ds \cos \omega,$$

po úpravě

$$D = d^2 \sin^2 \omega + 2d \sin \omega (d \cos \omega + s) + (d \cos \omega - s)^2. \quad (15)$$

Protože $d > 0$, $\cos \omega > 0$, $s > 0$, $\sin \omega > 0$, je $D > 0$, tj. rovnice (13) má dva reálné kořeny x_1, x_2 . Protože jejich součet i součin jsou kladná čísla (viz (13)), jsou oba kořeny x_1, x_2 kladné.

Nutná a postačující podmínka řešitelnosti úlohy je, aby menší z obou kořenů x_1, x_2 rovnice (13) byl menší než $d \cos \omega$. Menší kořen x_1 je dán vzorcem

$$x_1 = \frac{d \cos \omega + d \sin \omega + s - \sqrt{D}}{2}.$$

Podmínka řešitelnosti je po úpravě

$$d \sin \omega + s - d \cos \omega < \sqrt{D}. \quad (16)$$

Je-li $d \sin \omega + s - d \cos \omega \geq 0$, plyne z (16) po úpravě vzhledem k (15)

$$0 < 4d^2 \sin \omega \cos \omega. \quad (17)$$

Protože postup lze obrátit (v případě $d \sin \omega + s - d \cos \omega \geq 0$), je $x_1 < d \cos \omega$ a úloha je řešitelná.

Vyšetřme tedy ještě případ $d \sin \omega + s - d \cos \omega < 0$. V tomto případě platí (16) bez dalších podmínek. Po přičtení $2d \cos \omega$ na obou stranách (16) zjistíme, že opět platí $x_1 < d \cos \omega$, a úloha je tedy opět řešitelná.

Úloha má tedy v každém případě aspoň jedno řešení.

KATEGORIE B

B – II – 1a

Zostrojte $\triangle ABC$, v ktorom pre veľkosť t_c ťažnice z vrcholu C na stranu AB a pre veľkosť a strany BC platí

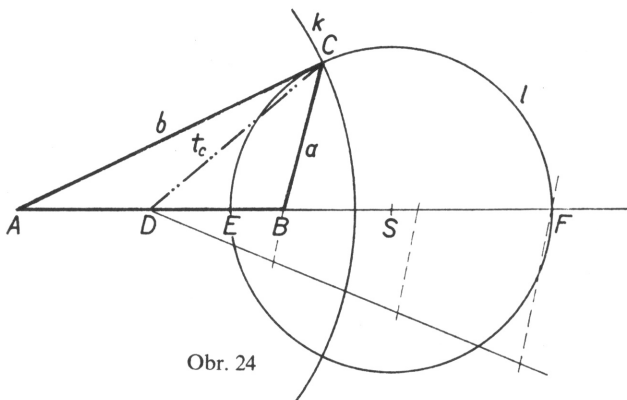
$$t_c = \frac{3}{2}a,$$

ak sú dané veľkosti b, c strán AC a AB .

Riešenie. Rozbor. Označme D stred strany AB . Potom platí

$$BC : DC = a : t_c = 2 : 3.$$

Ďalej bod C leží na kružnici $k \equiv (A; b)$.



Obr. 24

Konštrukcia: (obr. 24). Najskôr zostrojíme stranu AB s veľkosťou c , jej stred D a kružnicu $k = (A; b)$. Potom zostrojíme bod E ležiaci vo vnútri úsečky BD , pre ktorý platí $BE : DE = 2 : 3$, a taký bod F na predĺžení úsečky DB za bod B , že $BF = 2 \cdot BD$, tj. $BF : DF = 2 : 3$. Potom opíšeme kružnici l nad priemerom EF . Určíme $k \cap l$. Zvoľme bod $C \in k \cap l$. V prípade, že C neleží na priamke AB , je $\triangle ABC$ hľadaným trojuholníkom.

Skúška. Z konštrukcie vyplýva, že strany AB a AC majú skutočne v uvedenom poradí veľkosti c a b . Kružnica l je zrejme Apolloniouvu kružnicou pre body B, D a pomer $BX : DX = 2 : 3$, takže $a : t_c = 2 : 3$, tj. $t_c = \frac{3}{2}a$.

Diskusia. Úloha bude mať riešenie práve vtedy, keď sa budú kružnice k a l pretínať čiže práve vtedy, keď kružnica k bude mať spoločný bod s vnútrom úsečky EF , tj. práve vtedy keď

$$AE < b < AF. \quad (18)$$

Platí $AE = AB - EB = c - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}c = \frac{4}{5}c$, $AF = AB + BF = 2c$. Podmienka (18) teda znie

$$\frac{4}{5}c < b < 2c. \quad (19)$$

Kružnice k a l majú síce v prípade (19) dva priesečníky, ale úloha je nepolohová, takže sa uvažuje len o jednom z nich. Teda, ak platí (19), má úloha jediné riešenie. Ak neplatí (19), potom úloha nemá riešenie.

B – II – 1b

Je daný ostrouhlý trojuholník ABC , v ktorom uhol BAC má veľkosť α . Obsah trojuholníka je P . Označme B_1 päť výšky z vrcholu B na stranu AC a C_1 päť výšky z vrcholu C na stranu AB . Vyjadrite obsah štvoruholníka BCB_1C_1 pomocou P a α .

Riešenie. Z pravouhlých trojuholníkov ACC_1 a ABB_1 dostávame (obr. 25)

$$AC_1 = AC \cos \alpha,$$

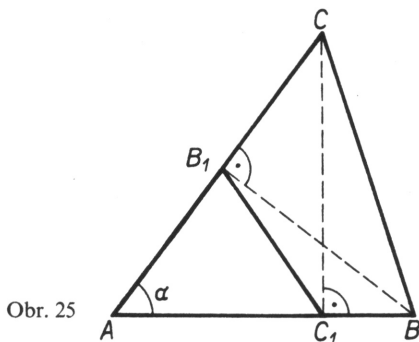
$$AB_1 = AB \cos \alpha.$$

Podľa vety *sus* pre podobnosť trojuholníkov je teda

$$\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$$

s pomerom podobnosti $AB_1 : AB = \cos \alpha$. Pre obsah P_1 trojuholníka AB_1C_1 teda platí

$$P_1 = P \cos^2 \alpha.$$



Pre obsah P' štvoruholníka BCB_1C_1 potom dostávame

$$P' = P - P \cos^2 \alpha = P(1 - \cos^2 \alpha) = P \sin^2 \alpha.$$

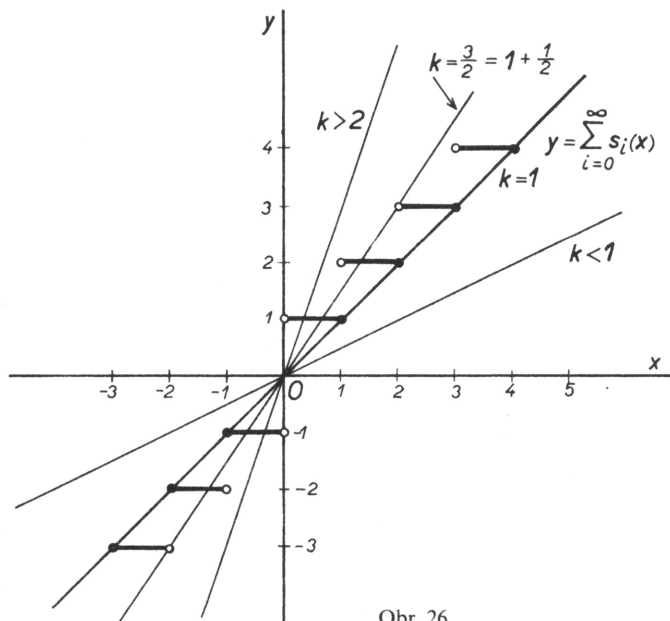
B – II – 2a

Nech a je nezáporné reálne číslo. Definujme funkciu $s_a(x)$ takto:

$$s_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x > a, \\ 0 & \text{pre } |x| \leq a, \\ -1 & \text{pre } x < -a. \end{cases}$$

Riešte rovnicu $\sum_{i=0}^{\infty} s_i(x) = kx$, kde k je reálny parameter.

Riešenie. Označme $S(x) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i(x)$ a skúmajme podrobnejšie vlastnosti funkcie $S(x)$. Predovšetkým je vidieť, že ide o funkciu nepárnu, pretože pre každé reálne x platí $S(-x) = -S(x)$. Vzhľadom na to, že pravá strana danej



Obr. 26

rovnice je tiež nepárna funkcia (platí: $k(-x) = -kx$), stačí sa obmedziť len na interval $\langle 0; \infty \rangle$. Ak bude koreňom našej rovnice nejaké číslo $x \geq 0$, potom jej bude vyhovovať aj číslo $-x$.

Vráťme sa k funkcii $S(x)$. Pre $x = 0$ je $S(x) = 0$. Pre $x \in (m - 1; m)$, kde m je prirodzené číslo, je

$$S(x) = \sum_{i=0}^{m-1} s_i(x) + \sum_{i=m}^{\infty} s_i(x).$$

Pre každé $i \leq m - 1$ je pre x z uvedeného intervalu $s_i(x) = 1$ a prvý sčítanec tohto súčtu je teda rovný m . Druhý sčítanec je rovný nule, pretože tu $|x| \leq i$ pre všetky i . $S(x)$ je teda stupňovitá funkcia, ktorá na intervale $(m - 1; m)$ nadobúda hodnotu m . Jej graf je na obr. 26.

Pre $k = 1$ je riešením danej rovnice v intervale $\langle 0; \infty \rangle$ každé prirodzené číslo a nula a v obore všetkých reálnych čísel je teda jej riešením každé celé číslo. Pre $k < 1$ nemá okrem riešenia $x = 0$ daná rovnica žiadne ďalšie riešenie.

Pre $k \in \left\langle 1 + \frac{1}{m}; 1 + \frac{1}{m-1} \right\rangle$, kde $m = 2, 3, 4, \dots$, je riešením každé číslo $x = \frac{i}{k}$, kde $i = -m, -m+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, m$. Pre $k \geq 2$ má rovnica korene $-\frac{1}{k}; 0; \frac{1}{k}$.

B – II – 2b

Je daná množina funkcií

$$x \mapsto 2x - |x| + a|x - a|,$$

kde a je reálny parameter. Určte všetky hodnoty a , pre ktoré graf príslušnej funkcie má s osou x spoločný aspoň jeden bod.

Riešenie. Budeme rozlišovať prípady $a = 0$, $a > 0$, $a < 0$. Pre $a = 0$ ide o funkciu $x \mapsto 2x - |x|$, ktorej graf má s osou x spoločný jedine bod $[0; 0]$.

I. Ak $a > 0$, uvažujme o danej funkcii na intervaloch $J_1 = (-\infty, 0]$, $J_2 = \langle 0; a \rangle$, $J_3 = \langle a, \infty \rangle$. V týchto intervaloch sú funkčné rovnice funkcií danej množiny určené takto:

$$J_1: x \mapsto (3 - a)x + a^2,$$

$$J_2: x \mapsto (1 - a)x + a^2,$$

$$J_3: x \mapsto (1 + a)x - a^2.$$

V intervale J_2 nemá graf funkcie spoločný bod s osou x , pretože je to úsečka s krajnými bodmi $[0; a^2]$, $[a; a]$. Grafom uvažovanej funkcie v intervale J_3 je polpriamka vychádzajúca z bodu $[a; a]$ a prechádzajúca bodom $[2a; 2a + a^2]$, ktorá nemá taktiež spoločný bod s osou x . Iba graf funkcie v intervale J_1 môže mať s osou x spoločný bod, a to práve vtedy, keď $3 - a > 0$ čiže ak

$$0 < a < 3. \quad (20)$$

II. Ak je $a < 0$, budeme uvažovať o danej funkcii na intervaloch $J_4 = (-\infty; a]$, $J_5 = \langle a; 0 \rangle$, $J_6 = \langle 0; \infty \rangle$, v ktorých sú funkčné rovnice:

$$J_4: x \mapsto (3 - a)x + a^2,$$

$$J_5: x \mapsto (3 + a)x - a^2,$$

$$J_6: x \mapsto (1 + a)x - a^2.$$

Analogicky ako v prípade I sa ukáže, že v intervale J_4 , J_5 nemá graf danej funkcie spoločný bod s osou x . Spoločný

bod s osou x môže mať len v intervale J_6 , a to práve vtedy, keď $1 + a > 0$ čiže $a > -1$. Keďže je zároveň $a < 0$, dostávame

$$-1 < a < 0. \quad (21)$$

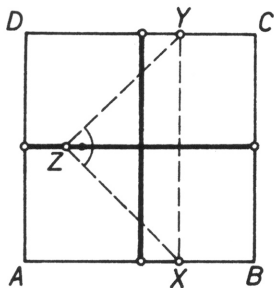
Ak k podmienkam (20), (21) pripojíme ešte prípad $a = 0$, dostaneme nutnú a postačujúcu podmienku riešiteľnosti úlohy:

$$-1 < a < 3.$$

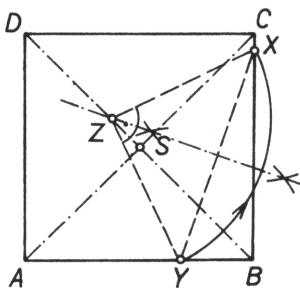
B – II – 3a

Je daný štvorec $ABCD$, ktorého strana má dĺžku a . Vo vnútri tohto štvorca nájdite množinu vrcholov Z všetkých pravouhlých rovnoramenných trojuholníkov XYZ s preponou $XY = a$, ktorých vrcholy X, Y ležia na obode daného štvorca.

Riešenie. 1. Najskôr vyšetrujeme prípad, keď vrcholy X a Y ležia vo dvoch protiľahlých stranách daného štvorca (obr. 27). Potom sa ľahko zistí, že v tomto prípade množinou



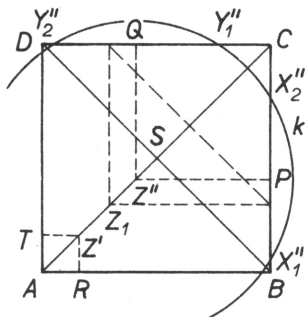
Obr. 27



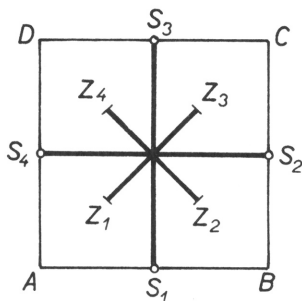
Obr. 28

všetkých vrcholov Z ležiacich vo vnútri štvorca $ABCD$ je množina $\mathbf{M}_1$ všetkých vnútorných bodov stredných priecok štvorca $ABCD$.

2. Zaoberajme sa prípadom, keď vrcholy X a Y ležia vo vnútri oboch susedných strán daného štvorca. Pre tento prípad označme $\mathbf{M}_2$ množinu všetkých vrcholov Z ležiacich vo vnútri daného štvorca. Bod X je zrejme obrazom bodu Y pri otočení okolo bodu Z o uhol 90° v kladnom alebo zápornom zmysle (obr. 28). Bod Z je vnútorným bodom štvorca $ABCD$ a každé dve susedné strany štvorca sú navzájom kolmé. Preto množina $\mathbf{M}_2$ je časťou množiny všetkých vnútorných bodov uhlopriečok daného štvorca.



Obr. 29



Obr. 30

Označme S priesečník uhlopriečok daného štvorca (obr. 29). Uvažujme o úsečke AS . Nech Z_1 je taký bod tejto úsečky, ktorý má od strán BC a CD vzdialenosť $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Zrejme $Z_1 \in \mathbf{M}_2$. Ak zvolíme ľubovoľný bod Z' ležiaci vo vnútri úsečky AZ_1 , potom príslušné body X' a Y' môžu ležať buď na stranách DC a BD , alebo AB a AD . Na stranách

DC a BC také body neexistujú, pretože vzdialenosť bodu Z' od týchto strán je väčšia než $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Dokážme, že ani na stranách AB a AD nemôžu ležať také body. Označme R a T v uvedenom poradí pravouhlé priemety bodu Z' na strany AB a AD . Ďalej je $AZ' < AS = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, takže pokiaľ by existovali na stranách AB a AD body X' a Y' , patrili by úsečkám RB a TD , tj. $\sphericalangle X'Z'Y'$ by bol väčší než 90° . Teda $Z' \notin \mathbf{M}_2$.

Nech bod Z'' je ľubovoľným vnútorným bodom (obr. 30) úsečky SZ_1 . Označme P, Q v uvedenom poradí päty kolmíc z bodu Z'' na strany BC a CD . Zrejme $Z''P = Z''Q < \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Zostrojme kružnicu $k \equiv (Z''; \frac{1}{2}a\sqrt{2})$. Táto kružnica má s priamkou BC dva spoločné body X_1'' a X_2'' a s priamkou CD spoločné body Y_1'' a Y_2'' . Všetky tieto body ležia na obvodě štvorca a nesplývajú s jeho vrcholmi, pretože P a Q sú vnútorné body úsečiek BC a CD , $Z''C > SC = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ a $Z''B = Z''D > SD = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ (vyplýva z $\triangle Z''SD$). Zo zhodnosti trojuholníkov $Z''PX_1''$ a $Z''QY_1''$ a z toho, že $\sphericalangle PZ''Q = 90^\circ$ vyplýva, že trojuholník $X_1''Z''Y_1''$ je pravouhlý a rovnostranný s preponou $X_1''Y_1''$. Teda $Z'' \in \mathbf{M}$.

Záver. Hľadanou množinou je množina $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2$, ktorá je na obr. 30 hrubo vytiahnutá ($S_1, S_2, S_3, S_4 \notin \mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2$, $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 \in \mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2$).

B – II – 3b

V jednotkovej štvorcovej sieti je zakreslená sústava súradníc, ktorej osi ležia v priamkách siete. Nech (p, q) je bod siete, kde p a q sú prirodzené čísla, $p \leq q$. Dokážte mate-

matickou indukciou podľa čísla $n = p + q$, že po priamkach siete sa možno dostať zo začiatku súradnicovej sústavy do bodu $(p; q)$ cestou dĺžky $p + q$ práve

$$\frac{(p + q)(p + q - 1) \dots (q + 2)(q + 1)}{p(p - 1) \dots 2 \cdot 1}$$

spôsobmi.

Riešenie. Všimnime si najskôr, že cesta dĺžky $p + q$ z bodu $(0; 0)$ do bodu $(p; q)$ má vlastnosť, že je najkratšia, a preto z každého svojho bodu $(u; v)$ pokračuje buď do bodu $(u + 1; v)$, alebo do bodu $(u; v + 1)$.

Dôkaz úplnou indukciou urobíme teraz takto: Pretože p, q sú prirodzené čísla, je $n = p + q \geq 2$. Ak je $n = 2$, je $p = 1, q = 1$. Sú zrejmé dve cesty z $(0; 0)$ do $(1; 1)$ dĺžky 2. Vzorec dáva taktiež 2, takže pre tento prípad tvrdenie platí. Nech $n > 2$ a predpokladajme, že vzorec platí pre $n - 1$. Do bodu $(p; q)$ sa podľa predchádzajúcej úvahy dostaneme z dvoch bodov: $(p - 1; q)$ a $(p; q - 1)$.

Rozlišujeme nasledujúce prípady:

a) $p = q$; pretože počet ciest z $(0; 0)$ do $(p; p - 1)$ je rovnaký ako počet ciest z $(0; 0)$ do $(p - 1; p)$, je potom podľa indukčného predpokladu počet ciest z bodu $(0; 0)$ do $(p; p)$ rovný

$$2 \frac{(2p - 1)(2p - 2) \dots (p + 1)}{(p - 1)(p - 2) \dots 2 \cdot 1} = \frac{2p(2p - 1) \dots (p + 1)}{p(p - 1) \dots 2 \cdot 1},$$

čo je práve číslo dané vzorcom.

b) $1 = p < q$. Do bodu $(1; q)$ sa opäť dostaneme z bodu $(0; q)$ alebo z bodu $(1; q - 1)$. Pretože do bodu $(0; q)$ vedie

z bodu $(0; 0)$ jediná cesta (dĺžky $p + q - 1$) a podľa indukčného predpokladu je počet ciest do $(1; q - 1)$ rovný q , je počet ciest do $(1; q)$ rovný $q + 1$, ako udáva aj vzorec.

c) $1 < p < q$. Počet ciest do $(p; q)$ je opäť súčtom ciest do $(p - 1; q)$ a $(p; q - 1)$, ktoré sú podľa indukčného predpokladu rovné

$$\frac{(p + q - 1)(p + q - 2) \dots (q + 1)}{(p - 1)(p - 2) \dots 2 \cdot 1}$$

a

$$\frac{(p + q - 1)(p + q - 2) \dots q}{p(p - 1) \dots 2 \cdot 1}.$$

Ich súčet je

$$\frac{(p + q)(p + q - 1) \dots (q + 1)}{p(p - 1) \dots 2 \cdot 1}$$

ako zodpovedá vzorcu. Tým je tvrdenie dokázané.

KATEGORIE C

C – II – 1a

V rovine ϱ je daný rovnobežník $ABCD$. Z vonkajšej strany rovnobežníka sú zostrojené dva navzájom podobné rovnoramenné trojuholníky BAB' a BCC' , pre ktoré platí: $AB' = AB$, $CC' = CB$ a uhol BAB' sa rovná uhlu BCC' .

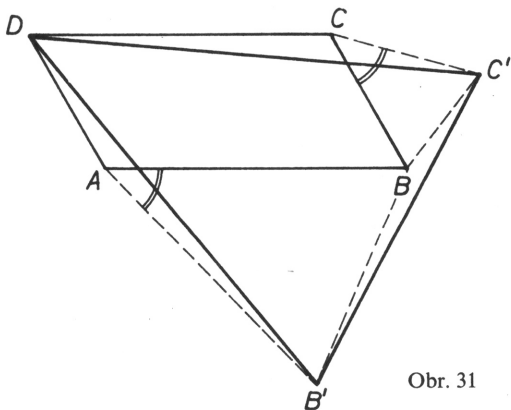
Dokážte, že trojuholník $B'C'D$ je podobný s trojuholníkmi BAB' a BCC' .

Riešenie (viď obr. 31). **1.** Dokážeme, že trojuholník $B'C'D$ je rovnoramenný.

a) platí: $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD$ a $\sphericalangle BAB' = \sphericalangle C'CB$, teda aj $\sphericalangle DAB' = \sphericalangle C'CD$.

b) $AB' = CD$, $DA = BC = C'C$.

Podľa vety *sus* platí, že $\triangle DAB' \cong \triangle C'CD$, teda aj $B'D = C'D$. Trojuholník $B'C'D$ je rovnoramenný.



Obr. 31

2. Dokážeme, že $\sphericalangle B'C'D = \alpha$, kde $\alpha = \sphericalangle CC'B$.

a) Dokážeme, že $\triangle C'BB' \sim \triangle DAB' \sim \triangle C'CD$.

Platí: $\sphericalangle CBC' = \sphericalangle CC'B = \sphericalangle AB'B = \sphericalangle ABB' = \alpha$, potom $\sphericalangle B'AD = \sphericalangle BAD + \sphericalangle B'AB = (2R - \sphericalangle ABC) + (2R - 2\alpha) = 4R - (2\alpha + \sphericalangle ABC) = \sphericalangle C'BB'$.

Ďalej platí: $AB' : AD = AB : BC = B'B : BC'$, teda $\triangle C'BB' \sim \triangle DAB' \sim \triangle C'CD$.

b) Z 2. a) vyplýva, že $\sphericalangle B'C'B = \sphericalangle ADB' = \sphericalangle DC'C$, teda aj $\sphericalangle B'C'D = \sphericalangle B'C'B + \sphericalangle BC'D = \alpha$.

Záver. $\triangle B'C'D$ je rovnoramenný a $\sphericalangle B'C'D = \alpha$, teda $\triangle B'C'D \sim \triangle B'BA \sim \triangle BC'C$.

C – II – 1b

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC , v němž úhel BAC má velikost α . Obsah trojúhelníku je P . Označme B_1 patu výšky z vrcholu B na stranu AC a C_1 patu výšky z vrcholu C na stranu AB . Dokažte, že čtyřúhelník BCB_1C_1 má obsah $P \sin^2 \alpha$.

Řešení. Viz úlohu **B – II – 1b** na str. 108.

C – II – 2a

Najděte všechny dvojice (x, y) přirozených čísel x, y , které splňují rovnici

$$|x - 2| + |y - 3| = 3 - y.$$

Řešení. Je vždy

$$|x - 2| \geq 0,$$

$$|y - 3| = |3 - y| \geq 3 - y.$$

Odtud sečtením

$$|x - 2| + |y - 3| \geq 3 - y;$$

přitom rovnost nastane, právě když

$$|y - 3| = 3 - y$$

a zároveň

$$|x - 2| = 0,$$

tj. platí-li

$$y \leq 3 \quad \text{a} \quad x = 2.$$

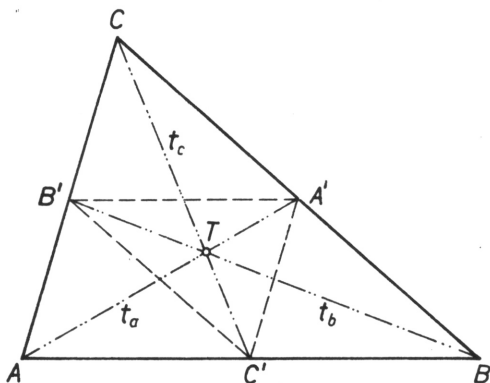
Danému vztahu vyhovují tři dvojice $(2, 1)$, $(2, 2)$ a $(2, 3)$, jak ověříme zkouškou.

C-II-2b

Při obvyklém označení dokažte, že v $\triangle ABC$ platí

$$\frac{3}{4}o < t_a + t_b + t_c < o.$$

Řešení úlohy vychází z použití trojúhelníkové nerovnosti, vlastností těžiště a stejnoolehlosti. Označme A' , B' , C' po řadě středy stran a, b, c trojúhelníku ABC (viz obr. 32).



Obr. 32

Zřejmě platí

$$A'B' = \frac{1}{2}c,$$

$$B'C' = \frac{1}{2}a,$$

$$C'A' = \frac{1}{2}b.$$

Pravou nerovnost odvodíme z trojúhelníků $AA'C'$, $BB'A'$ a $CC'B'$ pomocí trojúhelníkové nerovnosti.

Platí:

$$t_a < \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}b,$$

$$t_b < \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c,$$

$$t_c < \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a.$$

Sečtením těchto nerovností máme:

$$t_a + t_b + t_c < a + b + c,$$

a tedy

$$t_a + t_b + t_c < 0,$$

což jsme měli dokázat.

Levou nerovnost odvodíme analogicky z trojúhelníků ATB , BTC a CTA .

Platí

$$c < \frac{2}{3}t_a + \frac{2}{3}t_b,$$

$$a < \frac{2}{3}t_b + \frac{2}{3}t_c,$$

$$b < \frac{2}{3}t_a + \frac{2}{3}t_c.$$

Sečtením dostaneme

$$a + b + c < \frac{4}{3}(t_a + t_b + t_c)$$

a konečně

$$\frac{3}{4}0 < t_a + t_b + t_c.$$

Tím je dvojice nerovností dokázána.

Riešte sústavu rovníc

$$\frac{x(y+z)}{4} = \frac{y(z+x)}{9} = \frac{z(x+y)}{10},$$

$$xy + yz + zx = \frac{23}{15}xyz. \quad (22)$$

Riešenie. Jednoduchou úpravou sústavy (22) dostaneme

$$9x(y+z) = 4y(z+x),$$

$$10y(z+x) = 9z(x+y),$$

$$xy + yz + zx = \frac{23}{15}xyz,$$

z čoho

$$4yz - 9xz - 5xy = 0,$$

$$-yz + 9xz - 10xy = 0, \quad (23)$$

$$yz + xz + xy = \frac{23}{15}xyz.$$

Nech (x, y, z) je nejaké riešenie sústavy (23). Uvažujme o týchto 2 prípadoch: 1. $xyz \neq 0$, 2. $xyz = 0$.

1. Ak $xyz \neq 0$, potom delením každej rovnice týmto číslom dostaneme:

$$4\frac{1}{x} - 9\frac{1}{y} - 5\frac{1}{z} = 0,$$

$$-\frac{1}{x} + 9\frac{1}{y} - 10\frac{1}{z} = 0, \quad (24)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{23}{15};$$

označme: $\frac{1}{x} = u, \frac{1}{y} = v, \frac{1}{z} = w$. Sústava (24) prejde do tvaru

$$\begin{aligned}4u - 9v - 5w &= 0, \\-u + 9v - 10w &= 0, \\u + v + w &= \frac{23}{15}.\end{aligned}\tag{25}$$

Sčítaním prvých dvoch rovníc sústavy (25) dostaneme

$$3u = 15w \quad \text{čiže} \quad u = 5w \tag{26}$$

a po dosadení z (26) do niektorej z týchto rovníc máme

$$9v = 15w \quad \text{čiže} \quad v = \frac{5}{3}w. \tag{27}$$

Z tretej rovnice (25) po dosadení z (26) a (27) máme

$$5w + \frac{5}{3}w + w = \frac{23}{15}, \quad \text{z čoho} \quad w = \frac{1}{5}. \tag{28}$$

Z (26), (27) dostávame

$$u = 1, \quad v = \frac{1}{3}. \tag{29}$$

Zo (28) a (29) vyplýva

$$x = 1, \quad y = 3, \quad z = 5. \tag{30}$$

Dosadením sa ľahko presvedčíme, že (30) vyhovuje danej sústave.

2. Ak $xyz = 0$, potom môže nastať jeden z týchto prípadov:

a) $x = 0$, b) $y = 0$, c) $z = 0$.

a) Ak $x = 0$, zo sústavy (23) máme: $yz = 0$, z čoho vyplýva, že buď $y = 0$, z ľubovoľné alebo $z = 0$, y ľubovoľné.

V tomto prípade teda vyhovujú danej sústave všetky usporiadané trojice reálnych čísel tvaru $(0, 0, \alpha)$, resp. $(0, \alpha, 0)$, kde α je ľubovoľné reálne číslo.

V prípadoch b), c) analogicky dostaneme, že danej sústave vyhovujú všetky usporiadané trojice reálnych čísel tvaru $(0, 0, \alpha)$ a $(\alpha, 0, 0)$, resp. $(0, \alpha, 0)$ a $(\alpha, 0, 0)$, kde α je ľubovoľné reálne číslo.

Záver. Sústave (22) vyhovuje usporiadaná trojica $(1, 3, 5)$ a všetky usporiadané trojice tvaru $(\alpha, 0, 0)$, $(0, \alpha, 0)$, $(0, 0, \alpha)$, kde α je ľubovoľné reálne číslo.

C – II – 3b

Je daná sústava rovníc

$$\begin{aligned}x + y &= p^2, \\10x + y &= p^3,\end{aligned}\tag{31}$$

kde x, y sú neznáme, p je prirodzené číslo.

a) Nájdite všetky čísla p , pre ktoré má sústava (31) celočíselné riešenie (tj. čísla x, y , ktoré vyhovujú sústave (31), sú celé).

b) Pre ktoré hodnoty p sú čísla x, y vyhovujúce sústave prirodzené?

Riešenie. a) Nech usporiadaná dvojica čísel (x, y) vyhovuje sústave (31). Potom odčítaním prvej rovnice od druhej dostaneme

$$9x = p^2(p - 1).\tag{32}$$

Číslo x vyhovujúce rovnici (32) bude celé len vtedy, keď

nastane jeden z týchto prípadov: I. $p - 1 = 9k$, II. $p = 3k$, kde k je ľubovoľné prirodzené číslo.

I. Ak $p = 9k + 1$, potom z (32) máme

$$x = (9k + 1)^2 k \quad (33)$$

a z prvej rovnice sústavy (31)

$$y = (9k + 1)^2 (1 - k). \quad (34)$$

Vzťahmi (33), (34) je určené celočíselné riešenie sústavy (31), ale y zo (34) nemôže byť pre žiadne prirodzené k prirodzeným číslom.

II. Ak $p = 3k$, kde k je ľubovoľné prirodzené číslo, potom z (32) a prvej rovnice (31) máme

$$x = k^2(3k - 1), \quad y = k^2(10 - 3k). \quad (35)$$

Čísla x, y z (35) vyhovujú sústave (31) a pre každé prirodzené k sú celé.

Záver. Sústava (31) má celočíselné riešenie práve vtedy, keď buď $p = 9k + 1$, alebo $p = 3k$, kde k je ľubovoľné prirodzené číslo.

b) V prípade I nemôžu byť čísla (x, y) vyhovujúce sústave (31) obe prirodzené.

V prípade II budú x, y prirodzenými číslami práve vtedy, keď súčasne platí

$$3k - 1 > 0, \quad 10 - 3k > 0. \quad (36)$$

Prvá z nerovností (36) je splnená pre každé prirodzené číslo k , zatiaľ čo druhá platí pre $k < \frac{10}{3}$ čiže pre $k = 1, 2, 3$.

Záver. Sústava (31) má riešenie v prirodzených číslach len pre $p = 3, 6, 9$, a to:

$$p = 3 \Rightarrow x = 2, \quad y = 7;$$

$$p = 6 \Rightarrow x = 20, \quad y = 16;$$

$$p = 9 \Rightarrow x = 72, \quad y = 9.$$

KATEGORIE Z

Z-II-1

Vyjádrite mnohočlen $x^8 + x^4 + 1$ aspoň jedním způsobem jako součin

a) dvou mnohočlenů čtvrtého stupně,

b) čtyř mnohočlenů druhého stupně.

Řešení. Daný mnohočlen rozložíme podle známých vzorců z algebry takto:

$$\begin{aligned} x^8 + x^4 + 1 &= (x^8 + 2x^4 + 1) - x^4 = (x^4 + 1)^2 - (x^2)^2 = \\ &= (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) = \\ &= (x^4 + 2x^2 + 1 - x^2)(x^4 + 2x^2 + 1 - 3x^2) = \\ &= [(x^2 + 1)^2 - x^2][(x^2 + 1)^2 - (x\sqrt{3})^2] = \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x\sqrt{3} + 1)(x^2 - x\sqrt{3} + 1). \end{aligned}$$

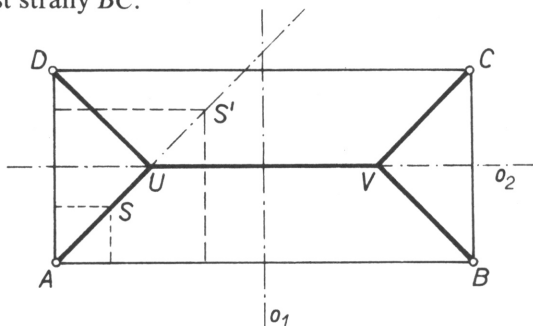
Odpověď. a) $x^8 + x^4 + 1 = (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1),$

b) $x^8 + x^4 + 1 =$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x\sqrt{3} + 1)(x^2 - x\sqrt{3} + 1).$$

Je dán obdélník $ABCD$, v němž je $AB > BC$. Zvolte AB, BC a sestrojte geometrická místa středů všech kružnic, které leží v obdélníku $ABCD$ a dotýkají se dvou jeho sousedních stran nebo dvou jeho protějších stran. Odůvodněte konstrukci.

Řešení (viz obr. 33). Označme a velikost strany AB a b velikost strany BC .



Obr. 33

a) Hledejme množinu $\mathbf{M}_1$ středů všech kružnic, které se dotýkají stran AD a BC a leží uvnitř obdélníku $ABCD$. Každá kružnice, jež se dotýká zároveň přímek AD a BC , má poloměr $\frac{1}{2}a$ a leží na ose o_1 stran AB a CD . Každá taková kružnice tedy vytíná na přímce o_1 tětivu délky a . Avšak $a > b$, a proto je $\mathbf{M}_1$ prázdná množina.

b) Hledejme množinu $\mathbf{M}_2$ středů všech kružnic, které se dotýkají stran AB a CD a leží uvnitř obdélníku $ABCD$. Každá kružnice, která se dotýká přímek AB a CD , má poloměr $\frac{1}{2}b$ a její střed leží na ose o_2 stran AD a BC .

Označme U vnitřní bod obdélníku $ABCD$, jenž leží na přímce o_2 a jehož vzdálenost od AD je rovna $\frac{1}{2}b$. Obdobně V je bod, který leží uvnitř obdélníku $ABCD$ na přímce o_2 a jehož vzdálenost od BC je $\frac{1}{2}b$. Zřejmě každý bod úsečky UV je středem kružnice o poloměru $\frac{1}{2}b$, která se dotýká stran AB a CD a leží v obdélníku $ABCD$. Vnější body úsečky UV na přímce o_2 tuto vlastnost nemají, neboť každá kružnice se středem v takovém bodu a mající poloměr $\frac{1}{2}b$ obsahuje aspoň jeden bod ležící vně rovnoběžkového pásu přímek AD a BC . Tedy množinou $\mathbf{M}_2$ je úsečka UV .

c) Hledejme množinu $\mathbf{M}_3$ středů všech kružnic, které leží v obdélníku $ABCD$ a dotýkají se jeho stran AB a AD . Úhel $\sphericalangle UAB = 45^\circ$, a proto střed každé kružnice, jež se dotýká strany AB a strany AD , leží na polopřímce AU . Zřejmě $A \notin \mathbf{M}_3$ a $U \in \mathbf{M}_3$.

Nechť S je libovolný bod ležící mezi body A a U . Protože je $AS < AU$, je vzdálenost bodu S od strany AB menší než $\frac{1}{2}b$, takže kružnice o středu S , jež se dotýká AB a AD , leží v daném obdélníku, tj. $S \in \mathbf{M}_3$.

Nechť S' je libovolný bod ležící na prodloužení úsečky AU za bod U . Pak $AS' > AU$, a proto vzdálenost bodu S' od přímky AB je větší než $\frac{1}{2}b$ a vzdálenost od přímky CD menší než $\frac{1}{2}b$, takže kružnice se středem S' , jež se dotýká přímek AB a AD , neleží v daném obdélníku, tj. $S' \notin \mathbf{M}_3$.

Množina $\mathbf{M}_3$ je tedy množinou všech bodů úsečky AU s výjimkou bodu A .

Z odstavců a), b) a c) plyne následující závěr:

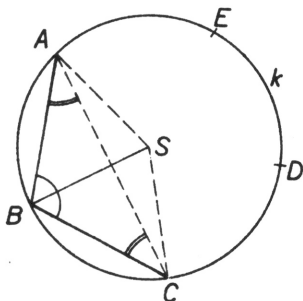
Hledané geometrické místo bodů se skládá z úsečky UV a ze všech vnitřních bodů úseček AU , DU , BV , CV .

Po kružnici $k(S, r)$ se pohybují dva body X a Y rovnoměrným pohybem v navzájem opačných směrech, rychlostmi v a qv , kde $q > 1$. Označme A, B a C body jejich tří bezprostředně po sobě jdoucích setkání.

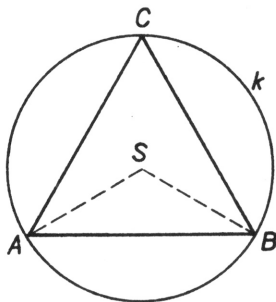
- a) Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$ pro $q = 4$.
 b) Určete q tak, aby $\triangle ABC$ byl α) rovnostranný, β) pravouhlý.

Řešení. a) Kratší z oblouků AB je čtyřikrát menší než delší oblouk AB , má tedy délku $\frac{2}{5}\pi r$. Tutéž délku má i kratší z oblouků CD , neboť body X a Y se pohybují rovnoměrně. Body A, B, C jsou tedy vrcholy pravidelného pětiúhelníku vepsaného kružnici k a $\sphericalangle ABC$ je jeho vnitřním úhlem (viz obr. 34). Platí: $\sphericalangle ABC = 2 \cdot \sphericalangle ASB = 180^\circ - \sphericalangle ASB = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$. Velikost ostatních vnitřních úhlů rovnoramenného $\triangle ABC$ určíme již takto:

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA = \frac{1}{2}(180^\circ - 108^\circ) = 36^\circ.$$

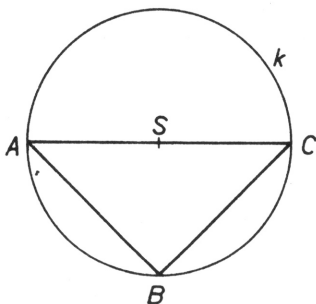


Obr. 34



Obr. 35

b) α) (viz obr. 35) $\triangle ABC$ je rovnostranný, právě když $\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSC = 120^\circ$. Mezi dvěma sousedními setkáními opíše bod X tedy třetinu kružnice, bod Y dvě třetiny kružnice. To nastane, právě když $q = 2$.

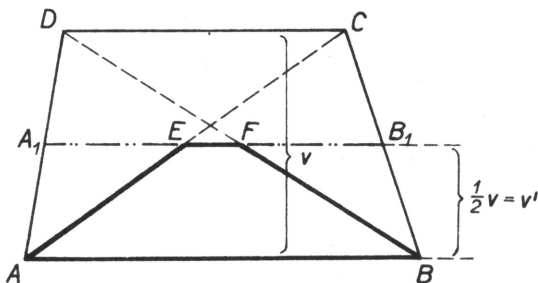


Obr. 36

b) β) (viz obr. 36). Jestliže $\triangle ABC$ je pravoúhlý, pak úsečka AC je průměrem kružnice k . Od prvního do třetího setkání opíše tedy bod X půlkružnici. Protože jeho rychlost je konstantní, opíše bod X mezi dvěma sousedními setkáními čtvrtkružnici. Z toho plyne, že bod Y opíše v této době tři čtvrtiny kružnice. Proto je nutně $q = 3$. Tím jsme našli číslo, které je „podezřelé“ z toho, že vyhovuje naší úloze. Že tomu tak skutečně je, musíme dokázat.

Uvažujme tedy *obráceně*: Nechť $q = 3$. To znamená, že bod Y má třikrát větší rychlost než bod X . Mezi dvěma sousedními setkáními opíše tedy bod X čtvrtkružnici. Oblouk AC je pak půlkružnice, což znamená, že $\triangle ABC$ je pravoúhlý.

Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami $AB = 14$ cm, $CD = 10$ cm. Jeho úhlopříčky AC, BD protínají střední příčku po řadě v bodech E, F . Vypočtete podíl obsahů lichoběžníků $ABCD, ABEF$. Zobecněte pro $AB = a, CD = c$.



Obr. 37

Řešení (viz obr. 37). Označme a velikost strany AB , c velikost strany CD a v výšku daného lichoběžníku. Pak obsah lichoběžníku $ABCD$ je

$$P_1 = \frac{1}{2}v(a + c).$$

Z toho, že $AB \parallel EF$ a že průsečík S úhlopříček AC a BD leží uvnitř poloroviny EFC , plyne, že $ABFE$ je lichoběžník se základnami $AB = a$ a EF . Jeho výška je

$$v' = \frac{1}{2}v.$$

Označme A_1 střed ramena AD a B_1 střed ramena BC . Pak A_1E je střední příčka v $\triangle DCA$, a tedy $A_1E = \frac{1}{2}c$.

Obdobně zjistíme, že $B_1F = \frac{1}{2}c$. Tudíž

$$c' = EF = A_1B_1 - 2 \cdot \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}(a + c) - c = \frac{1}{2}(a - c).$$

Pro obsah lichoběžníku $ABFE$ tedy dostáváme:

$$P_2 = \frac{1}{2}v'(a + c') = \frac{1}{4}v\left[\frac{1}{2}(a - c) + a\right] = \frac{1}{8}v(3a - c).$$

Nyní už můžeme určit, kolikrát je obsah P_1 větší než obsah P_2 . Platí:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{4(a + c)}{3a - c},$$

tj. v našem případě, kdy $a : c = 7 : 5$, je

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{4(a + \frac{5}{7}a)}{3a - \frac{5}{7}a} = \frac{4 \cdot (14 + 10)}{3 \cdot 14 - 10} = 3.$$

Závěr. a) Obsah lichoběžníku $ABCD$ je třikrát větší než obsah čtyřúhelníku $ABFE$.

b) Obecně: Jsou-li základny lichoběžníku $a > c$, pak

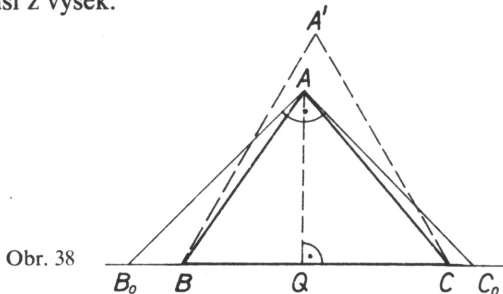
$$P_1 = P_2 \frac{4(a + c)}{3a - c}.$$

V. Soutěžní úlohy III. kola kategorie A

A – III – 1

Je-li **T** ostroúhlý trojúhelník o obsahu 1, pak existuje pravoúhlý trojúhelník, jehož obsah nepřevyšuje $\sqrt{3}$ a který trojúhelník **T** obsahuje. Dokažte.

Řešení. Nechť ABC je daný trojúhelník **T** s obsahem $P = 1$ a BC je jeho největší strana. Označme Q patu výšky příslušné vrcholu A , v její délku. Tato výška je zřejmě nejmenší z výšek.



Rozlišujeme tyto případy:

a) $\angle BAQ \leq 45^\circ$, $\angle CAQ \leq 45^\circ$ (obr. 38). Pak pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník AB_0C_0 s nejmenší výškou $v = AQ$ obsahuje trojúhelník **T** a o jeho obsahu P_1 platí

$$P_1 = v^2.$$

Strana BC je největší stranou $\triangle ABC$, a proto výška v není větší než výška rovnostranného trojúhelníku $A'BC$, tj.

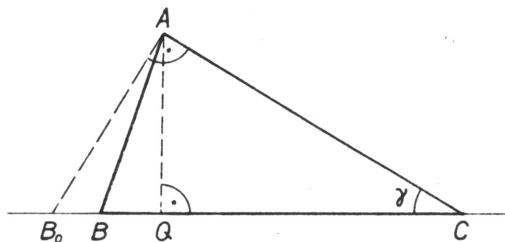
$$v \leq \frac{1}{2}BC \sqrt{3},$$

tedy

$$P_1 = v^2 \leq \left(\frac{1}{2}BC \cdot v\right) \sqrt{3},$$

tj. skutečně

$$P_1 \leq \sqrt{3}.$$



Obr. 39

b) Jeden z úhlů $\sphericalangle BAQ$, $\sphericalangle CAQ$ je větší než 45° , např. (obr. 39)

$$\sphericalangle CAQ > 45^\circ.$$

Pak je

$$\sphericalangle BAQ < 45^\circ.$$

Označme B_0 průsečík kolmice k AC v bodě A s přímkou BC . Trojúhelník B_0AC je pravoúhlý, obsahuje $\mathbf{T}$ a o jeho obsahu P_1 platí

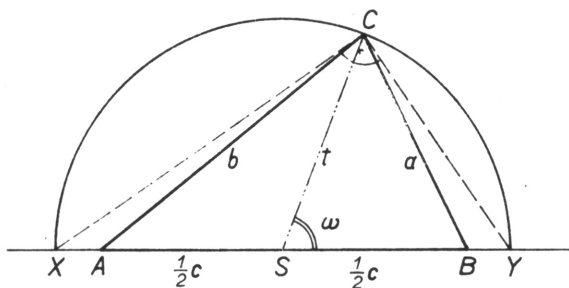
$$P_1 = \frac{P_1}{P} = \frac{B_0C}{BC} \leq \frac{B_0C}{AC} = \frac{1}{\cos \gamma} \leq \sqrt{2} < \sqrt{3},$$

neboť $\sphericalangle B_0CA = \gamma < 45^\circ$.

Tím je úloha rozřešena.

Jiné řešení (podle *Stanislava Červinky*, studenta 3.c Akademického gymnázia v Praze 1). Označme (obr. 40) vrcholy daného trojúhelníka A, B, C tak, aby platilo

$$a \leq c \quad a \leq b. \quad (1)$$



Obr. 40

Dále označme S střed strany AB , $CS = t$, $\sphericalangle CSB = \omega$. Trojúhelník ABC je ostroúhlý, takže

$$2t > AB.$$

Na polopřímkách SA a SB vně úsečky AB tedy existují po řadě takové body X a Y , že

$$SX = SY = t.$$

Trojúhelník XYC obsahuje daný $\triangle ABC$. Dokážeme, že obsah $\triangle XYC$ nepřevyšuje $\sqrt{3}$.

Trojúhelník ABC má obsah 1, takže

$$1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} ct (\sin \omega + \sin (\pi - \omega)) = \frac{1}{2} ct \sin \omega. \quad (2)$$

Pro obsah trojúhelníku XYC platí

$$P = \frac{1}{2}t^2(\sin \omega + \sin(\pi - \omega)) = t^2 \sin \omega,$$

tedy po přihlédnutí k rovnostem (2) máme

$$P = 2 \cdot \frac{t}{c}. \quad (3)$$

Podle známého vzorce pro velikost těžnice v trojúhelníku je

$$t = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2},$$

takže z rovnosti (3) dostáváme

$$P = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} \right) - 1}.$$

Podle (1) je $\frac{a}{c} \leq 1$ a $\frac{b}{c} \leq 1$, a proto

$$P \leq \sqrt{2(1 + 1) - 1},$$

tj.

$$P \leq \sqrt{3}.$$

Tím je tvrzení obsažené v textu dané úlohy zcela dokázáno.

A-III-2

Dokažte, že soustava rovnic

$$[x]^2 + [y] = 0, \quad 3x + y = 2 \quad (4)$$

má nekonečně mnoho řešení a že pro všechna její řešení platí

$$0 < x < 4, \quad -9 \leq y \leq 1.$$

Přitom symbol $[\alpha]$ (celá část z α) značí celé číslo, pro které platí

$$\alpha - 1 < [\alpha] \leq \alpha.$$

Řešení. Z obou rovnic (4) vyloučíme y a dostaneme rovnici

$$[x]^2 + [2 - 3x] = 0. \quad (5)$$

Pro celou část (funkci $[\alpha]$) použijeme vzorců:

Pro všechny reálná α a pro všechny celá k platí

$$[k + \alpha] = k + [\alpha]. \quad (6)$$

Pro všechna reálná β platí

$$[3\beta] = 3[\beta] + \varepsilon_1, \quad (7)$$

kde $\varepsilon_1 = 0$ nebo 1 nebo 2.

Pro všechna reálná γ platí

$$[-\gamma] = -[\gamma] + \varepsilon_2, \quad (8)$$

kde $\varepsilon_2 = -1$ nebo 0.

S použitím (6), (7), (8) vypočteme

$$\begin{aligned} [2 - 3x] &= 2 + [-3x] = 2 + 3[-x] + \varepsilon_1 = \\ &= 2 + 3(-[x] + \varepsilon_2) + \varepsilon_1, \end{aligned}$$

tj.

$$[2 - 3x] = -3[x] + 2 + \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2. \quad (9)$$

Proměnná $2 + \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2$ může nabýt hodnot

$$\varepsilon_3 = -1, 0, 1, 2, 3, 4. \quad (10)$$

Spojením (5) a (9) dostaneme rovnici

$$[x]^2 - 3[x] + \varepsilon_3 = 0. \quad (11)$$

Diskriminant rovnice (11) může nabýt vzhledem k (10) hodnot

$$\Delta = 13, 9, 5, 1, -3, -7.$$

Protože kořen $[x]$ rovnice (11) musí být celé číslo, přicházejí v úvahu jen hodnoty $\Delta = 9; 1$, tj. $\varepsilon_3 = 0; 2$. Odpovídající kořeny $[x]$ obou rovnic (11) jsou (v odpovídajícím pořadí)

$$[x] = 0, 3, 1, 2.$$

Z rovnice (9) vypočteme a zkouškou se přesvědčíme, že soustava (4) má tato řešení:

$$\frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}, \quad x = 1, \quad x = 2, \quad \frac{10}{3} < x \leq \frac{11}{3};$$

příslušná y se vypočtou z rovnice $3x + y = 2$.

Jiné řešení (podle *Jana Kratochvíla*, studenta třídy 1.a gymnázia v Pardubicích).

a) Řešením rovnice (5) je zřejmě každé číslo x , pro které platí

$$[x] = 0 \quad \text{a zároveň} \quad [2 - 3x] = 0,$$

tj.

$$0 \leq x < 1 \quad \text{a zároveň} \quad 0 \leq 2 - 3x < 1,$$

odkud plyne

$$x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Príslušné y se vypočte z druhej rovnice soustavy (4); dostávame tak, že

$$y = 2 - 3x.$$

Řešením soustavy (4) je tedy každá dvojice čísel x, y , kde

$$x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ a } y = 2 - 3x.$$

Tím jsme dokázali, že soustava (4) má nekonečně mnoho řešení.

b) Dále je třeba dokázat, že žádná dvojice čísel x, y , která nesplňuje zároveň nerovnosti

$$x > 0, \quad (12)$$

$$x < 4, \quad (13)$$

$$y \geq -9, \quad (14)$$

$$y \leq 1, \quad (15)$$

není řešením soustavy (4). Důkaz provedeme nepřímou.

α) Předpokládejme, že soustava (4) má řešení x, y , kde $x \leq 0$. Potom z druhej rovnice soustavy (4) plyne, že $y \geq 2$, tj. $[y] \geq 2$. Platí tedy

$$[x]^2 + [y] \geq 2,$$

což je spor s první rovnicí soustavy (4), tj. platí nerovnost (12).

β) Předpokládejme, že existuje takové řešení x, y soustavy (4), že $x \geq 4$. Položme

$$x = [x] + \varphi, \quad y = [y] + \psi,$$

kde

$$0 \leq \varphi < 1, \quad 0 \leq \psi < 1. \quad (16)$$

Ze soustavy (4) pak dostáváme

$$\begin{aligned}[y] &= -[x]^2, \\ 3[x] + 3\varphi + [y] + \psi &= 2,\end{aligned}$$

odkud plyne

$$3\varphi + \psi = 2 + [x]([x] - 3). \quad (17)$$

Z předpokladu $x \geq 4$ plyne, že $[x] \geq 4$, takže

$$[x]([x] - 3) \geq 4.$$

Pak z rovnice (17) dostáváme

$$3\varphi + \psi \geq 6,$$

což je ve sporu s nerovnostmi (16). Platí tedy (13).

γ) Předpokládejme, že soustava (4) má takové řešení x, y , že $y < -9$. Potom $[y] \leq -10$. Podle první rovnice soustavy (4) je tedy $[x]^2 \geq 10$, tj.

$$x \geq 4 \quad \text{nebo} \quad x < -3.$$

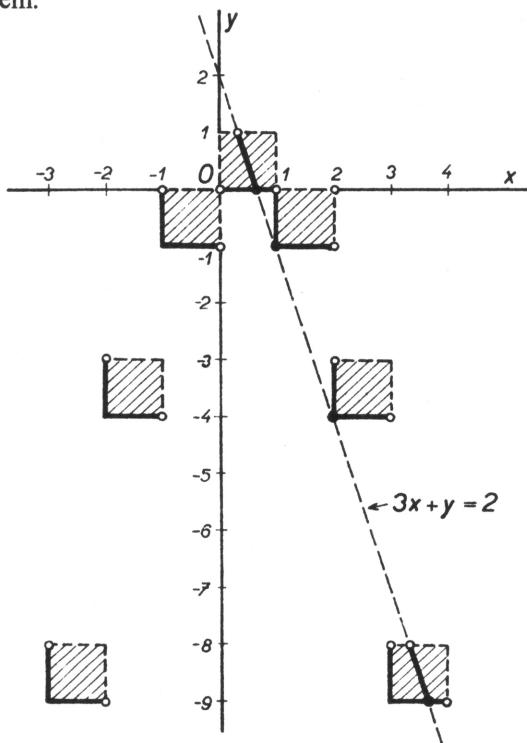
Tyto nerovnosti jsou však ve sporu s dokázanými nerovnostmi (12) a (13), takže platí (14).

δ) Předpokládejme, že existuje takové řešení x, y soustavy (4), pro které platí $y > 1$. Pak ovšem $[y] \geq 1$. Samozřejmě $[x]^2 \geq 0$, takže

$$[x]^2 + [y] \geq 1,$$

což je spor s první rovnicí soustavy (4). Platí tedy nerovnost (15).

Poznámka. Při řešení úlohy **A–III–2** lze s výhodou užít grafického znázornění. Sestrojíme graf první rovnice (4); je to sjednocení polouzavřených čtverců, k nimž náleží vždy levý dolní vrchol a polouzavřené strany levá a dolní (viz obr. 41). Tlustě vytažené části přímky $3x + y = 2$ jsou grafickým znázorněním všech řešení dané soustavy (4). Intuitivně zjištěný výsledek je ovšem nutno zkontrolovat výpočtem.



Obr. 41

Nájdite všetky riešenia sústavy rovníc

$$x_1(x_6 + x_2) = x_3 + x_5, \quad (18)$$

$$x_2(x_1 + x_3) = x_4 + x_6, \quad (19)$$

$$x_3(x_2 + x_4) = x_5 + x_1, \quad (20)$$

$$x_4(x_3 + x_5) = x_6 + x_2, \quad (21)$$

$$x_5(x_4 + x_6) = x_1 + x_3, \quad (22)$$

$$x_6(x_5 + x_1) = x_2 + x_4 \quad (23)$$

s neznámymi $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.

Riešenie. Nech usporiadaná šesticu čísel $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ je riešením sústavy (18)–(23). Potom zrejme tiež každá cyklická permutácia čísel tejto šesticu danej sústave vyhovuje.

Sčítaním všetkých rovníc danej sústavy dostaneme

$$\begin{aligned} x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_6 + x_6x_1 &= \\ &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \end{aligned}$$

čiže

$$\begin{aligned} x_2(x_1 + x_3) + x_4(x_3 + x_5) + x_6(x_5 + x_1) &= \\ &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6. \end{aligned} \quad (24)$$

Ak do (24) dosadíme z (19), (21), (23), dostaneme

$$x_1 + x_3 + x_5 = x_2 + x_4 + x_6. \quad (25)$$

Z rovností (18) a (21), (19) a (22), resp. (20) a (23), dostávame, že platí:

$$\begin{aligned}x_2 + x_6 \neq 0 &\Leftrightarrow x_3 + x_5 \neq 0, & x_4 + x_6 \neq 0 &\Leftrightarrow x_1 + x_3 \neq 0, \\x_2 + x_4 \neq 0 &\Leftrightarrow x_1 + x_5 \neq 0\end{aligned}\quad (26)$$

a taktiež

$$\begin{aligned}x_3 + x_5 \neq 0 &\Rightarrow x_1 x_4 = 1, & x_1 + x_3 \neq 0 &\Rightarrow x_2 x_5 = 1, \\x_1 + x_5 \neq 0 &\Rightarrow x_3 x_6 = 1.\end{aligned}\quad (27)$$

Z čoho vyplýva, že stačí uvažovať o nasledujúcich 4 prípadoch:

1. Všetky 3 súčty $x_1 + x_3$, $x_3 + x_5$, $x_5 + x_1$ sú rôzne od nuly. Potom podľa (27) platí

$$x_1 x_4 = 1, \quad x_2 x_5 = 1, \quad x_3 x_6 = 1, \quad (28)$$

z čoho vyplýva, že $x_i \neq 0$ pre všetky $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Ak z (28) dosadíme do (18)–(20) za x_2, x_4, x_6 , máme

$$\begin{aligned}x_1 \left(\frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_5} \right) &= x_3 + x_5, \\ \frac{1}{x_5} (x_1 + x_3) &= \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3}, \\ x_3 \left(\frac{1}{x_5} + \frac{1}{x_1} \right) &= x_5 + x_1,\end{aligned}$$

z čoho vyplýva:

$$x_1 = x_3 x_5, \quad x_5 = x_1 x_3, \quad x_3 = x_1 x_5. \quad (29)$$

Keďže $x_1 x_3 x_5 \neq 0$, dostaneme vynásobením rovností (29)

$$x_1 x_3 x_5 = 1, \quad (30)$$

z čoho vzhľadom na (29) máme

$$x_1^2 = 1, \quad x_3^2 = 1, \quad x_5^2 = 1$$

čiže

$$|x_1| = 1, \quad |x_3| = 1, \quad |x_5| = 1.$$

Z nášho predpokladu o súčtoch $x_1 + x_3$, $x_3 + x_5$, $x_5 + x_1$ vyplýva, že čísla x_1, x_3, x_5 musia byť rovnakých znamienok, z čoho vzhľadom na (30) máme

$$x_1 = x_3 = x_5 = 1 \quad (31)$$

a z (28) hneď dostávame

$$x_2 = x_4 = x_6 = 1. \quad (32)$$

Dosadením sa ľahko presvedčíme, že (31), (32) dáva riešenie danej sústavy.

2. Práve jeden zo súčtov $x_1 + x_3$, $x_3 + x_5$, $x_5 + x_1$ sa rovná nule. Nech platí napr.

$$x_1 + x_3 = 0, \quad x_3 + x_5 \neq 0, \quad x_5 + x_1 \neq 0.$$

Potom z (26) a (27) máme

$$x_4 + x_6 = 0, \quad x_1 x_4 = 1, \quad x_3 x_6 = 1,$$

z čoho $x_3 = -x_1$, $x_6 = -x_4$, a teda $x_3 x_4 = -1$. Z (25) máme $x_5 = x_2$. V uvažovanom prípade teda platí

$$x_3 = -x_1, \quad x_4 = \frac{1}{x_1}, \quad x_5 = x_2, \quad x_6 = -\frac{1}{x_1}, \quad (33)$$

pričom z (18), (20), resp. (21), (23) pre x_1, x_2 po dosadení zo (33) dostaneme

$$-1 + x_1 x_2 = -x_1 + x_2,$$

$$-x_1 x_2 - 1 = x_2 + x_1$$

a sčítaním oboch rovností dostávame $x_2 = -1$ pri ľubovoľnom $x_1 = p \neq 0$. Skúškou sa ľahko presvedčíme, že v tomto prípade sústave (18)–(23) vyhovuje šesťica čísel

$$x_1 = p, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -p, \quad x_4 = \frac{1}{p}, \quad x_5 = -1, \quad x_6 = -\frac{1}{p},$$

pričom p je ľubovoľné číslo rôzne od 0, -1 , 1 . Posledné dve čísla musíme vylúčiť preto, lebo podľa predpokladu $x_3 + x_5 = -p - 1 \neq 0$, $x_5 + x_1 = -1 + p \neq 0$.

3. Práve dva zo súčtov $x_1 + x_3$, $x_3 + x_5$, $x_5 + x_1$ sú rovné nule. Nech teda

$$x_1 + x_3 = 0, \quad x_3 + x_5 = 0, \quad x_5 + x_1 \neq 0.$$

Podľa (26) a (27) potom platí

$$x_4 + x_6 = 0, \quad x_2 + x_6 = 0, \quad x_3 x_6 = 1$$

a vzhľadom na (25) dostávame

$$x_2 = x_1, \quad x_3 = -x_1, \quad x_4 = x_1, \quad x_5 = x_1, \quad x_6 = -\frac{1}{x_1}, \quad (34)$$

ale tiež $x_2 = -x_6 = \frac{1}{x_1}$, z čoho hneď máme $x_1^2 = 1$.

Pre x_1 sú teda dve možnosti: $x_1 = -1$, $x_1 = 1$, z ktorej

každej zodpovedá – vzhľadom na (34) – jedno riešenie danej sústavy:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1,$$

$$x_4 = 1, \quad x_5 = 1, \quad x_6 = -1;$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1,$$

$$x_4 = -1, \quad x_5 = -1, \quad x_6 = 1,$$

o čom sa ľahko presvedčíme dosadením. Druhé riešenie sa dostane z riešenia v prípade 2 pre $p = -1$, resp. pre $p = 1$.

4. Všetky tri súčty $x_1 + x_3$, $x_3 + x_5$, $x_5 + x_1$ sú rovné nule. Potom podľa (26) tiež $x_2 + x_4 = x_4 + x_6 = x_6 + x_2 = 0$ a vzhľadom na (25) v tomto prípade dostávame

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0,$$

čo zrejme danej sústave vyhovuje.

Záver. Všetky riešenia danej sústavy možno zhrnúť v nasledujúcej tabuľke ($p \neq 0$):

x_1	1	p	$-\frac{1}{p}$	-1	$\frac{1}{p}$	$-p$	-1	1	-1	1	0
x_2	1	-1	p	$-\frac{1}{p}$	-1	$\frac{1}{p}$	$-p$	1	1	-1	0
x_3	1	$-p$	-1	p	$-\frac{1}{p}$	-1	$\frac{1}{p}$	-1	1	1	0
x_4	1	$\frac{1}{p}$	$-p$	-1	p	$-\frac{1}{p}$	-1	1	-1	1	0

x_5	1	-1	$\frac{1}{p}$	$-p$	-1	p	$-\frac{1}{p}$	1	1	-1	0
x_6	1	$-\frac{1}{p}$	-1	$\frac{1}{p}$	$-p$	-1	p	-1	1	1	0

A-III-4

Najděte všechny takové hodnoty parametru p , aby rovnice

$$|x - 2| + |y - 3| + y = p \quad (35)$$

byla rovnicí nějaké polopřímky v rovině x, y .

Řešení. Všimněme si nejprve, že $|z| \geq 0$ pro všechna z a rovnost nastává, právě když $z = 0$, a dále že

$$|z| + z \geq 0$$

pro všechna (reálná) z a rovnost nastává, právě když $z \leq 0$.

Upravíme-li tedy rovnost (35) na tvar

$$|x - 2| + |y - 3| + y - 3 = p - 3,$$

je levá strana vždy nezáporná a je rovna nule, právě když

$$x - 2 = 0 \quad \text{a} \quad y - 3 \leq 0,$$

tj. pro

$$x = 2 \quad \text{a} \quad y \leq 3.$$

Proto dané rovnosti nevyhovuje žádný bod, je-li $p < 3$, a pro $p = 3$ je množina všech bodů vyhovujících rovnosti (35) zřejmě polopřímka.

Je-li $p > 3$, dostáváme již v polorovině $y \leq 3$ množinu řešení tvaru $|x - 2| = p - 3$, tj. dvě různé polopřímky $x - 2 = \pm(p - 3)$.

Vyhovuje proto jen

$$p = 3.$$

Jiné řešení. Útvar, pro jehož body je splněna daná rovnice, je symetrický podle přímky $x = 2$, což plyne z toho, že v rovnici (35) je x obsaženo jenom ve výrazu $|x - 2|$.

Rovnice (35) má být rovnicí nějaké polopřímky. Avšak jestliže polopřímka je souměrná podle nějaké osy, pak musí být podmnožinou této osy. Hledaná polopřímka je tedy podmnožinou přímky $x = 2$.

Dosadíme-li $x = 2$ do rovnice (35), dostaneme:

$$|y - 3| + y = p.$$

Rozlišíme tyto možnosti:

I. Nechť $y \geq 3$. Pak $y = \frac{1}{2}(p + 3)$.

II. Nechť $y \leq 3$. Pak $3 - y + y = p$, tj. $0 \cdot y = p - 3$.

Vyšetřme sjednocení množin nalezených v případech I a II:

A. Je-li $p > 3$, pak je rovnicí (35) za předpokladu $x = 2$ určena množina

$$\left\{ \left[2, \frac{1}{2}(p + 3) \right] \right\} \cup \emptyset.$$

B. Je-li $p = 3$, pak je rovnicí (35) za předpokladu $x = 2$ určena množina

$$\{[2, 3]\} \cup \{[x, y]; x = 2 \wedge y \leq 3\} = \{[x, y]; x = 2 \wedge y \leq 3\}.$$

C. Je-li $p < 3$, pak je rovnicí (35) za předpokladu $x = 2$ určena množina

$$\emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

Polopřímku jsme obdrželi jenom v případě **B**, takže jsme dospěli k závěru, že množinou bodů vyhovujících rovnici (35) je polopřímka, právě když je $p = 3$.

Řešil Leszek Gajdzica, 4.d, gymnázium s polským jaz. vyučovacím, Český Těšín

A – III – 5

Najděte množinu vrcholů A všech rovnoramenných trojúhelníků ABC s hlavním vrcholem B , jejichž strana BC je obsažena v daném čtverci $P_1P_2P_3P_4$.

Řešení. Vyšetřováním speciálních poloh trojúhelníků ABC lze očekávat, že hledaná množina **M** je sjednocení **S** čtyř (uzavřených) kruhů $K(P_i; a\sqrt{2})$, kde a je délka strany daného čtverce, s výjimkou čtyř bodů hranice **S**, které leží na úhlopříčkách čtverce (obr. 42).

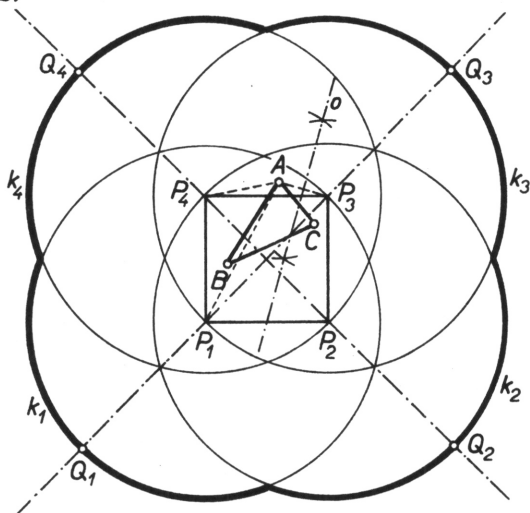
Dokážeme nejprve, že každý bod A vyhovující úloze leží v **S**. Je-li $\triangle ABC$ trojúhelník vyhovující úloze, je

$$AB = BC \leq BP_k,$$

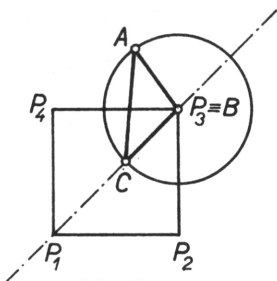
kde P_k je takový vrchol čtverce, který je od B nejvzdálenější (obr. 42). Proto bod B leží v téže polorovině vyřáté osou o úsečky AP_k jako bod A . Tedy přímka o má neprázdný průnik s daným čtvercem. Proto existuje vrchol čtverce P_j v té polorovině podle o , která obsahuje A , a tedy

$$AP_j \leq P_jP_k \leq a\sqrt{2}.$$

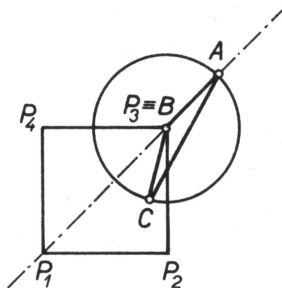
Nechť $A \in \mathbf{K}(P_i; a\sqrt{2})$ a $A \neq Q_i$. Uvažujme nejprve, že $A \notin P_i Q_i$.



Obr. 42



Obr. 43



Obr. 44

Kružnice $k(P_i, P_i A)$ má pak ve čtverci (obr. 43) společný bod C s přímkou $P_i Q_i$. Zvolíme-li $B = P_i$, pak body A, B, C

tvoří vrcholy trojúhelníku vyhovujícího úloze. Leží-li bod A (obráz. 44) na přímce $P_i Q_i$ a $A \neq P_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, pak kružnice $k(P_i, P_i A)$ má se čtvercem společný bod C ležící mimo přímku $P_i Q_i$. Pak opět $B = P_i$ vede k řešení úlohy. Je-li $A = P_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, pak za B zvolíme střed čtverce.

A – III – 6

Nech $\mathbf{M}$ je množina uspořádaných dvojic (x, y) reálných čísel s týmito vlastnostmi:

1. Existuje dvojice $(a, b) \in \mathbf{M}$ taká, že $ab(a - b) \neq 0$.
2. Ak $(x_1, y_1) \in \mathbf{M}$, $(x_2, y_2) \in \mathbf{M}$ a c je reálné číslo, potom tiež $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbf{M}$, $(cx_1, cy_1) \in \mathbf{M}$, $(x_1 x_2, y_1 y_2) \in \mathbf{M}$.

Dokážte, že $\mathbf{M}$ obsahuje všetky uspořádané dvojice reálných čísel.

Řešení.*) Považujme dvojice (x, y) za vektory v dvojrozměrném bodovém prostoru $\mathbf{R}_2$. Podle zadání $\mathbf{M}$ obsahuje alespoň jeden vektor (a, b) a dále, obsahuje-li vektory (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , pak obsahuje také všechny jejich lineární kombinace.

Kromě vektoru (a, b) obsahuje $\mathbf{M}$ např. též vektor (a^2, b^2) . Přitom podle podmínky 1. je $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$, takže vektory (a, b) , (a^2, b^2) jsou lineárně nezávislé.

Vektorový prostor $\mathbf{R}_2$ je dvojrozměrný, proto každá dvojice jeho lineárně nezávislých vektorů tvoří jeho bázi. Protože $\mathbf{M}$ obsahuje oba vektory báze $\{(a, b), (a^2, b^2)\}$,

*) Toto řešení odměnil MÚ ČSAV v Praze za originalitu finanční částkou 500 Kčs.

obsahuje všechny jejich lineární kombinace, tj. $\mathbf{M}$ je množinou všech vektorů v $\mathbf{R}_2$.

To však znamená, že $\mathbf{M}$ obsahuje všechny uspořádané dvojice reálných čísel.

Řešil Jiří Peňáz, 3.b, gymnázium, tř. kpt. Jaroše, Brno

Jiné řešení. Nechť $(a, b) \in \mathbf{M}$ je taková uspořádaná dvojice, že $ab(a - b) \neq 0$. Taková dvojice podle vlastnosti 1 existuje.

Pak uijeme vlastnosti 2 pro $x_1 = a$, $y_1 = b$, $x_2 = a$, $y_2 = b$. Dostáváme, že $(a^2, b^2) \in \mathbf{M}$.

Nechť (x, y) je libovolná uspořádaná dvojice reálných čísel. Soustava rovnic

$$\begin{aligned} a^2 c_1 + ac_2 &= x, \\ b^2 c_1 + bc_2 &= y \end{aligned} \tag{36}$$

o neznámých c_1, c_2 má pak vždy právě jedno řešení*), neboť determinant soustavy

$$\begin{vmatrix} a^2 & a \\ b^2 & b \end{vmatrix} = a^2 b - ab^2 = ab(a - b) \neq 0.$$

Nechť (c_1, c_2) je řešení soustavy (36). Pak podle vlastnosti 2 platí

$$\begin{aligned} (a^2 c_1, b^2 c_1) &\in \mathbf{M}, \\ (ac_2, bc_2) &\in \mathbf{M}, \end{aligned}$$

a tedy

$$(a^2 c_1 + ac_2, b^2 c_1 + bc_2) \in \mathbf{M},$$

tj.

$$(x, y) \in \mathbf{M}.$$

*) K tomuto závěru se snadno dospěje i bez znalosti determinantů.

Platí tedy: Jestliže (x, y) je libovolná uspořádaná dvojice reálných čísel, pak $(x, y) \in \mathbf{M}$, což se mělo dokázat.

Řešil *Jiří Navrátil*, 2.a, gymnázium, Olomouc-Hejčín

VI. Texty soutěžních úloh krajských kol kategorie Z

Praha a Západočeský kraj

1. Určete, pro které koeficienty a, b, c, d, e je mnohočlen $x^5 + ax^3 + bx - 1$ roven součinu mnohočlenů $x^2 + bx - 1$ a $x^3 + cx^2 + dx + e$.

2. a) Určete s přesností na sekundy, kdy hodinové ručičky mezi 0 h až 3 h stojí přesně proti sobě (svírají úhel 180°).

b) Kdy nastane nejdříve tento okamžik po odbití n -té hodiny ($0 \leq n < 6$).

3. Je dán kruh o středu S a poloměru $r = 6$ (cm) omezený kružnicí k . Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC , který leží v tomto kruhu a jehož strana AB má délku 4 (cm) a je tětivou kružnice k . Přímku AB označme p . Trojúhelník ABC se pohybuje tak, že splňuje tyto podmínky:

- a) pohybující se trojúhelník ABC leží celý v kruhu;
- b) aspoň jeden vrchol trojúhelníku leží na kružnici k ;
- c) strana AB je stále rovnoběžná s přímkou p .

Narýsujte, přesně určete a odůvodněte dráhu, kterou vykoná bod A , než se opět pohybující trojúhelník dostane do své původní polohy. Totéž proveďte pro body B a C .

4. Rotační kužel, jehož podstava má poloměr $r = 6$ (cm) a jehož výška je $v = 8$ (cm), protne rovinou ϱ rovnoběžnou s podstavou kužele v kruhu (o poloměru x), který je zároveň podstavou seříznutého kužele a horní podstavou vepsaného válce. Určete poloměr x a vzdálenost roviny ϱ od roviny podstavy, je-li obsah pláště rotačního válce roven obsahu pláště seříznutého kužele.

Středočeský kraj

1. Vědecké porady o využití ropy se zúčastní šest expertů ze socialistických zemí. Vědce označíme písmeny A, B, C, D, E, F . Tři z nich se mohou zúčastnit exkurze do přečerpávací stanice ropovodu Družba. Rozhodněte, která trojice může jet, jestliže:

- a) D nepojede s A , ale pojede jen, pojede-li také F .
- b) A pojede jen, pojede-li E .
- c) C pojede jen, pojede-li D zároveň s B .
- d) F pojede jen v přítomnosti B nebo C .

2. V bytě jsou dvoje hodiny. Jedny se předbíhají o jednu minutu za tři hodiny a druhé se zpožďují o jednu minutu za šest hodin. Oboje hodiny byly nařizeny na správný čas v sobotu přesně v poledne. Kdy se poprvé budou tyto hodiny rozcházet právě o 20 minut 45 sekund? (Udejte, v kolik hodin a který den to bude a kolik budou ukazovat první a kolik druhé hodiny.)

3. Buďte a, b, c tři libovolná čísla. Potom číslo

$$x = 4(a^2 + b^2 + c^2) - [(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2]$$

je číslo nezáporné; dokažte. Dále udejte všechny trojice čísel a, b, c , pro které je číslo x rovno nule.

4. Je dán obdélník $ABCD$, M je střed strany AB . Uvnitř úseček BC, AD sestrojte body E, F tak, aby pětiúhelníku $MECDF$ bylo možno opsat kružnici. Vyjádřete poloměr této kružnice i obsah pětiúhelníku pomocí délek stran obdélníku $ABCD$. Určete podmínku řešitelnosti úlohy.

5. Je dán trojúhelník MNP , ve kterém $PM = 5,5$ cm, $PN = 4$ cm, $MN = 5$ cm. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li M střed strany AC , N střed strany BC a bod P

- a) pata výšky v_c ,
- b) pata výšky v_a .

Jihočeský kraj

1. Je-li n libovolné přirozené liché číslo, je číslo $(n^2 - 1)(n + 3)$ dělitelné číslem 24. Dokažte.

2. Je dán výraz:

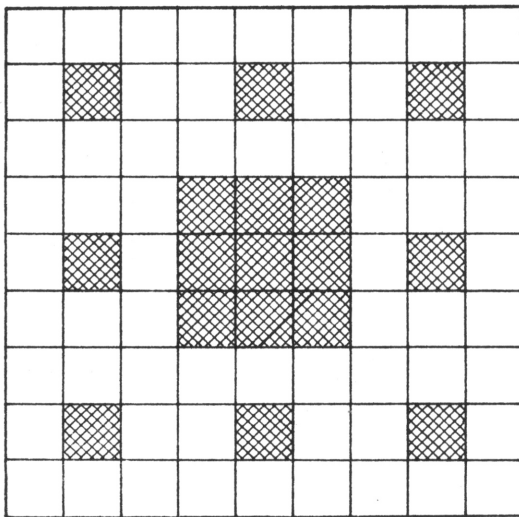
$$V = \left(\frac{a+b}{2a-2b} - \frac{a-b}{2a+2b} + \frac{2b^2}{a^2-b^2} \right) : \frac{4b}{(a^2+b^2)(a-b)}.$$

- a) V zjednodušte a udejte, pro která a, b nemá smysl.
- b) Vypočítejte všechny dvojice celých a, b , pro které $V = 10$.

3. Při omezování odběru elektrického proudu v době špiček se 35 závodů zavázalo snížit spotřebu. Celkem byly tři skupiny těchto závodů. V první skupině dosáhl každý závod snížení o 50 % pravidelného odběru, v druhé skupině snížil každý závod spotřebu o $\frac{1}{3}$ a ve třetí skupině o $\frac{1}{4}$ pravi-

delného odběru. Tím se dosáhlo úspory 40 % pravidelné celkové spotřeby. Přitom v první skupině byl počet závodů dvojnásobný než ve druhé. Kolik závodů bylo ve třetí skupině, jestliže každý z těchto 35 závodů měl původně stejnou pravidelnou spotřebu proudu?

4. Dílna v prvním týdnu splnila plán, tj. vyrobila n kusů výrobků. V druhém týdnu poklesl výkon proti prvnímu týdnu o $p\%$. O kolik procent musela dílna zvýšit svůj výkon z druhého týdne ve třetím týdnu, aby ke konci třetího týdne byl splněn třítýdenní plán? Na závěr proveďte výpočet pro $p = 10$.



Obr. 45

5. Osový řez rotačního kužele je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník VAB o přeponě AB délky d . Přímkou AV je vedena rovina, která protne kužel v rovnostranném trojúhelníku VAC . Vyjádřete pomocí proměnné d objem a povrch jehlanu $ABCV$.

6. Krychle je sestavena ze 729 krychliček o hraně 1 cm. Určete objem tělesa, které vznikne odebráním krychliček, a tím vytvořením tunelů procházejících celou krychlí tak, že každá ze stěn původní krychle je znázorněna připojeným náčrtkem (šrafováním jsou vyznačeny tunely; viz obr. 45).

7. Je dán trojúhelník ABC . Sestrojte body X, Y tak, aby bod X ležel na straně AC a bod Y na straně BC trojúhelníku ABC a aby platilo $XY \parallel AB$, $AX + BY = XY$.

8. Body A, B, C, D dělí kružnici $k = (S; r)$ na čtyři oblouky, jejichž délky jsou v poměru

$$AB : BC : CD : DA = 1 : 2 : 4 : 5.$$

Přímky AD, BC se protnou v bodě Q . Vypočtete vzdálenosti QB a QD .

Severočeský kraj

1. Výraz $3x^4 - 4x^2 + 1$ rozložte a) na součin dvojčlenů
2. stupně, b) na součin dvojčlenů 1. stupně.

2. Ze dvou měst A, B vyšli současně proti sobě dva chodci. První došel z A do B za 5 hodin 24 minuty, druhý z B do A za 6 hodin 45 minut. Po kolika hodinách chůze se potkali, šel-li každý stále stejnou rychlostí?

3. Osový řez rotačního kužele je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník VAB o přeponě AB délky d . Přímkou AV je vedena rovina, která protne kužel v rovnostranném trojúhelníku VAC . Pomocí proměnné d vyjádřete:

- a) objem jehlanu $ABCV$,
- b) povrch jehlanu $ABCV$.

4. Je dána přímka p a na ní body A a B . V bodech A a B sestrojte po řadě kolmice k_1, k_2 , které jsou geometrickým místem (množinou) středů všech kružnic dotýkajících se přímky p v bodech A nebo B . Co je geometrickým místem (množinou) všech vnějších bodů dotyku všech takových kružnic? Své tvrzení dokažte.

Východočeský kraj

1. Daný součet převedte na součin tří činitelů:

$$x^5 + 3x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 3.$$

2. Kolik hodin ukazují ručičky mezi 3. a 4. hodinou, když:

- a) se ručičky kryjí,
- b) stojí proti sobě.

Počítejte na desetiny vteřiny.

3. Je dán kruh o středu S a $r = 6$ cm omezený kružnicí k .

Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC , který leží celý v kruhu a jehož strana AB má délku $a = 4$ cm a je tětivou kružnice k . Přímkou AB označme p . Trojúhelník ABC se pohybuje tak, že splňuje tyto podmínky:

- a) Pohybující se trojúhelník ABC leží celý v kruhu.

b) Aspoň jeden vrchol trojúhelníku ABC leží na kružnici k .

c) Strana AB je stále rovnoběžná s přímkou p .

Narýsujte, přesně určete a odůvodněte dráhu, kterou vykoná bod A , než se opět pohybující se trojúhelník dostane do své původní polohy. Totéž proveďte pro body B a C .

4.a) V rovnoramenném lichoběžníku jsou základny $a = 17$ cm, $c = 7$ cm, rameno $b = 13$ cm. Rozdělte lichoběžník úsečkou x rovnoběžnou se základnami na dvě části, které mají stejný obsah. Vypočítejte délku úsečky x a její vzdálenost od delší základny. O správnosti výpočtu se přesvědčte zkouškou.

4.b) Trojúhelník o stranách $a = 8,5$ cm, $b = 12,5$ cm, $c = 14$ cm rozdělte úsečkou rovnoběžnou s nejdelší stranou na dvě části, které mají stejný obsah. Určete velikost hledané úsečky a zjistěte, v jaké vzdálenosti od bodu C protne kratší stranu. O správnosti výpočtu se přesvědčte zkouškou.

Jihomoravský kraj

1. Dokažte, že výraz

$$V = \frac{2b(a-1)}{(a-2)(b^2-1)} - \frac{a+b}{ab+a-2b-2} - \frac{a-b}{ab-a-2b+2},$$

kde $a \neq 2$, $b \neq \pm 1$, je pro každá dvě čísla a, b roven nule.

2. Je dán čtverec $ABCD$ o straně a . Středů jeho stran označte takto: E – střed AB , F – střed BC , G – střed CD , H – střed DA . Sestrojte trojúhelníky EFD a HGB .

Určete obsah šestiúhelníku $OPQRST$ (vrchol O je prů-

sečík přímek EF a BH , vrchol P je průsečík přímek EF a BG), který je společnou částí (průnikem) obou těchto trojúhelníků. (Správnost výpočtu zdůvodněte.)

3. Na kruhové dráze vyjedou z téhož místa a současně dva cyklisté

- a) v témže směru;
- b) proti sobě.

První objede dráhu za 1 min 52 s, druhý za 2 min 24 s. Po jaké době se a) dohoní; b) potkají?

4. V rovině jsou dány dvě kružnice k_1 (S_1 ; 25 mm), k_2 (S_2 ; 25 mm). Vzdálenost $S_1S_2 = 120$ mm.

Narýsujte všechny kružnice, které mají s každou z daných kružnic k_1, k_2 vnější dotyk a zároveň se dotýkají přímky S_1S_2 . Vypočítejte poloměry sestrojených kružnic. Proveďte konstrukci též bez předběžného výpočtu.

Slovenská socialistická republika

1. Do kružnice k se středem S a poloměrem 5 cm je vpísaný pravidelný 6-uholník $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}$. Označme A_2, A_4 priesečníky priamky A_1A_5 s priamkami A_3A_{11}, A_3A_7 ; A_6, A_8 priesečníky priamky A_5A_9 s priamkami A_3A_7, A_7A_{11} a A_{10}, A_{12} priesečníky priamky A_9A_1 s priamkami $A_7A_{11}, A_{11}A_3$.

a) Nakreslite množinu $\mathbf{P}$ stredov všetkých kružníc s polomerom 1 cm, ktoré ležia v šesťcipej hviezde

$$\mathbf{H} = A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}.$$

b) Určte obvod útvaru $\mathbf{P}$.

2. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel, ktorých súčin sa rovná štvorcifernému číslu s rovnakými číslicami.

3. Rýchlik dĺžky 200 m ide rýchlosťou 16 m/s. Po druhej koľaji tej istej trate prichádza opačným smerom nákladný vlak. Strojvedúci rýchlika zistil, že celý nákladný vlak minul lokomotívu rýchlika za 12 sekúnd. Ďalej zistil, že od okamihu, keď sa stretli lokomotívy oboch vlakov, až do chvíle, kedy sa minuli ich posledné vozne, uplynulo 20 sekúnd. Vypočítajte rýchlosť a dĺžku nákladného vlaku.

4. Je daný rovnostranný trojuholník ABC , ktorého strany majú dĺžku 2 cm. Bod K leží na priamke AB za bodom B .

a) Vypočítajte vzdialenosti bodu K od priamky AC a BC , ak $BK = 0,5$ cm.

b) Vypočítajte vzdialenosti bodu K od priamky AC a BC , ak $BK = d$ cm.

c) Dokážte, že rozdiel vzdialeností každého bodu polpriamky BK od priamok AC a BC v absolútnej hodnote je konštantný.

VII. Zpráva o XVII. mezinárodní matematické olympiádě

V pořadí již *sedmnáctá mezinárodní matematická olympiáda (MMO)* se konala ve dnech 3. – 16. července 1975 v Bulharsku, v Burgasu a v Sofii. Zúčastnilo se jí celkem 17 zemí: Rakousko (A), Bulharsko (BG), Československo (CS), NDR (DDR), Francie (F), Velká Británie (GB), Řecko (GR), Maďarsko (H), Mongolsko (M), Holandsko (NL), Polsko (PL), Rumunsko (R), Švédsko (S), Sovětský svaz (SU), Spojené státy (USA), Vietnam (VN) a Jugoslávie (YU). Z tradičních účastníků tedy tentokrát chyběla Kuba; Řecko přijelo na *MMO* poprvé.

Každá země byla na *XVII. MMO* zastoupena delegací složenou z vedoucího a jeho zástupce a z osmičlenného žákovského družstva. Československé družstvo tvořili tito žáci: *Martin Baumann* z Prahy, *Vlastimil Klíma* z Benešova u Prahy, *Jan Kratochvíl* z Pardubic, *Jan Malý* z Litoměřic, *Jiří Navrátil* z Olomouce, *Ján Slodička* z Bratislavy, *Michael Valášek* z Prahy a *Josef Voldřich* z Vimperka. Vedoucím delegace byl *dr. František Zítek*, CSc., z Matematického ústavu ČSAV v Praze a *doc. dr. Jozef Moravčík*, CSc., z Vysoké školy dopravní v Žilině.

Průběh *XVII. MMO* odpovídal vcelku ustáleným zvyklostem. Nejprve se 3. července sjeli do Burgasu vedoucí

jednotlivých delegací a vytvořili zde mezinárodní jury, která pak pod předsednictvím *prof. I. R. Prodanova* ze Sofie řídila vlastní soutěž *MMO*. Prvním úkolem jury bylo vybrat šest soutěžních úloh. Z návrhů, které do Bulharska zaslalo 11 ze 17 zúčastněných zemí, připravili bulharští organizátoři předběžný návrh 15 úloh; jedna z nich byla také československého původu.

Práce jury postupovala poměrně rychle a výsledný výběr reprezentoval patrně skutečně optimum za daných možností: mezi zaslanými návrhy byl zjevný nedostatek vhodných úloh s geometrickou tematikou, chyběla zejména stereometrie. Pro soutěž byla vybrána tato šestice úloh (jejich řešení uvádíme na str. 170–183).

1. Nechť x_i, y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) jsou reálná čísla

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n,$$

$$y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n.$$

Dokažte, že pro libovolnou permutaci $z_1, z_2, \dots, z_n$ čísel $y_1, y_2, \dots, y_n$ platí

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2.$$

2. Nechť

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

je nekonečná posloupnost přirozených čísel taková, že

$$0 < a_k < a_{k+1} \quad \text{pro } k = 1, 2, 3, \dots$$

Dokažte, že nekonečně mnoho členů a_m této posloupnosti lze vyjádřit ve tvaru

$$a_m = xa_p + ya_q, \quad p \neq q,$$

kde x, y jsou celá kladná čísla.

3. Je dán trojúhelník ABC . Vně tohoto trojúhelníku sestrojíme (v téže rovině) trojúhelníky ABR , BPC , CQA takové, že

$$\sphericalangle PBC = \sphericalangle CAQ = 45^\circ,$$

$$\sphericalangle BCP = \sphericalangle QCA = 30^\circ,$$

$$\sphericalangle ABR = \sphericalangle BAR = 15^\circ.$$

Dokažte, že

$$1. \quad \sphericalangle PRQ = 90^\circ,$$

$$2. \quad PR = QR.$$

4. Nechť A je součet cifer čísla 4444^{4444} ; nechť B je součet cifer čísla A . Určete součet cifer čísla B . (Všechna čísla jsou zapsána v desítkové soustavě.)

5. Zjistěte, zda na kružnici s poloměrem 1 existuje 1975 bodů takových, že délky všech jimi určených tětiv jsou racionální čísla.

6. Najděte všechny mnohočleny P dvou proměnných s těmito vlastnostmi:

1. P je homogenní mnohočlen stupně n (n je přirozené číslo), tzn. že pro všechna reálná čísla t, c, y platí

$$P(tx, ty) = t^n P(x, y);$$

2. pro všechna reálná čísla a, b, c platí

$$P(a + b, c) + P(a + c, b) + P(b + c, a) = 0 ;$$

3. $P(1, 0) = 1 .$

Vybrané úlohy pocházely z návrhů Československa (č. 1), Velké Británie (č. 2 a č. 6), Holandska (č. 3) a Sovětského svazu (č. 4 a č. 5); text úlohy č. 4 byl při jednáních jury pozměněn proti původnímu návrhu, který byl snazší a připouštěl mechanické řešení přímým numerickým výpočtem.

Jury rovněž posoudila obtížnost vybraných úloh a určila maximální počty bodů, které bylo možno získat za úplné řešení úlohy. Úlohy č. 1, 4 a 5 ohodnotila šesti body, úlohy č. 2 a 3 sedmi body a úlohu č. 6 osmi body. Celkem tedy mohl každý žák získat nejvýše 40 bodů.

Za nejtěžší úlohu byla — zřejmě právem — považována úloha č. 6, jednak proto, že se v ní operuje pojmem homogenní mnohočlen, s nímž žáci středních škol nemají obvykle velké zkušenosti, jednak proto, že její řešení vyžadovalo jistou dávku tvořivosti. Za nelehčí považovala jury před soutěží úlohu č. 4.

Výběrem úloh a překladem jejich textů do jazyků žáků skončila přípravná etapa práce jury. Mezitím se již do Burgasu dostavila všechna zúčastněná družstva a s nimi i zástupci vedoucích delegací, kteří se připojili k jury a pomáhali s překlady. Žáci byli ihned po příjezdu přísně izolováni od jury, aby byla zachována regulérnost soutěže; tato izolace trvala až do konce vyhodnocení výsledků soutěže. Žáci byli ubytováni v internátě na okraji Burgasu;

jejich program byl s výjimkou dvou půldnů, kdy se konala soutěž, věnován hlavně exkurzím, koupání a rekreaci.

Vlastní soutěž se konala ve střední škole P. Berona v Burgasu. Dopoledne dne 7. a 8. července 1975 řešili žáci vždy po třech úlohách; na každé tři úlohy měli čtyři hodiny čistého času.

Ve dnech 9. – 11. července probíhaly opravy, klasifikace a koordinace klasifikace žakovských řešení. Bulharští organizátoři připravili podrobný harmonogram koordinace, který se vcelku podařilo dodržet, takže práce probíhala poměrně rychle a hladce. Z mezi normálu vybočil jen případ úlohy č. 2 u holandské delegace; holandští vedoucí přeložili text úlohy nepřesně, takže žáci řešili jinou, poněkud snazší úlohu. Z rozhodnutí bulharských koordinátorů, které nakonec vedení holandské delegace akceptovalo, nezískali žáci za řešení této snazší úlohy žádné body. (Výjimku tvoří jeden holandský žák, který podal řešení úlohy ve správném znění.)

Závěrečné zasedání jury dne 11. července jednalo pak už jen o hranicích jednotlivých cen. Bylo rozhodnuto udělit první ceny žákům, kteří získali 40 nebo 39 bodů; k získání druhé ceny bylo potřeba mít alespoň 32 bodů, na třetí cenu stačilo 23 bodů. Celkem tak bylo uděleno 8 prvních, 25 druhých a 36 třetích cen.

Vedle těchto hlavních cen byly uděleny ještě tři zvláštní ceny za elegantní a originální řešení jednotlivých úloh. Získali je dva žáci z Rumunska a jeden z USA.

Celkové výsledky jednotlivých delegací na XVII. MMO jsou patrný z následující tabulky:

Země	Součet bodů celého družstva	Počet získaných cen			
		1.	2.	3.	zvláštních
A	192	1	1	2	—
BG	186	—	1	4	—
CS	162	—	—	2	—
DDR	249	—	4	4	—
F	176	1	1	1	—
GB	239	2	2	3	—
GR	95	—	1	—	—
H	258	—	5	3	—
M	75	—	—	1	—
NL	67*)	—	—	1	—
PL	124	—	1	1	—
R	180	—	1	3	2
S	160**)	—	2	—	—
SU	246	1	3	4	—
USA	247	3	1	3	1
VN	175***)	—	1	3	—
YU	163	—	1	1	—

*) Celkový výsledek holandského družstva byl ovlivněn chybným překladem jedné úlohy.

**) Jeden švédský žák se pro nemoc neúčastnil druhého dne soutěže.

***) Vietnamské družstvo soutěžilo v sedmi; osmý žák byl nemocen.

Po skončení této pracovní části *XVII. MMO* podnikli všichni účastníci ve dnech 12. a 13. července autokarový výlet z Burgasu do Sofie přes Starou Zagoru, Kazanlak, Šipku, Gabrovo, Veliko Trnovo a Pleven. Ve všech městech, kde se autokary s účastníky *MMO* zastavily, bylo připraveno slavnostní uvítání. Návštěva místních pamětihodností

(thrácká hrobka v Kazanlaku, památník na Šipce, Dům humoru a satiry v Gabrovu, citadela ve Velikom Trnovu, muzeum v Plevnu) spolu s velice přátelským a srdečným přijetím všude zanechala nutně nesmazatelné dojmy ve všech účastnících.

V Sofii, kam výprava dorazila 13. července večer, byla pak *XVII. MMO* zakončena. Dne 14. července si účastníci prohlédli město; 15. července odpoledne bylo v sále Domu sovětské vědy a kultury slavnostní rozdělení cen. Na závěr byla téhož dne večer uspořádána slavnostní večeře ve známém restaurantu Kopito v horách nad Sofií.

Československá delegace se vrátila do Prahy letadlem dne 16. července krátce po 14. h. Přivážela si s sebou dvě třetí ceny, které získali žáci *M. Valášek* a *J. Navrátil*. Podrobné výsledky československého družstva jsou obsaženy v tabulce:

Jméno	Počet bodů získaných za úlohu č.						Celkem
	1	2	3	4	5	6	
M. Baumann	6	0	7	4	0	1	18
V. Klíma	2	0	7	3	0	1	13
J. Kratochvíl	6	7	1	0	0	2	16
J. Malý	6	7	0	3	0	2	18
J. Navrátil	6	7	0	0	6	8	27
J. Slodička	6	7	0	0	6	1	20
M. Valášek	6	5	7	0	6	6	30
J. Voldřich	6	7	1	2	2	2	20
družstvo celkem	44	40	23	12	20	23	162

Vcelku lze konstatovat, že ani tentokrát nepřekročily výsledky čs. družstva hranici průměrnosti. Zkušenosti několika posledních let nasvědčují tomu, že jde o jev trvalý. Zdá se, že chybějí především vynikající jednotlivci schopní podat špičkový výkon, a to zcela spolehlivě bez náhodných výkyvů. Tato situace si vyžádá hlubší analýzu a přijetí účinných opatření ke zlepšení přípravy našich reprezentantů.

ŘEŠENÍ ÚLOH XVII. MMO

1. Dokazovanou nerovnost

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 \quad (1)$$

přepíšeme na tvar

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n z_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i z_i.$$

Poněvadž zřejmě

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n z_i^2,$$

je nerovnost (1) ekvivalentní nerovnosti

$$\sum_{i=1}^n x_i z_i \leq \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (2)$$

Označme

$$S_k = \sum_{i=1}^k y_i, \quad T_k = \sum_{i=1}^k z_i$$

pro $k = 1, 2, \dots, n$ a položíme $S_0 = T_0 = 0$. Bude pak

$$y_k = S_k - S_{k-1}, \quad z_k = T_k - T_{k-1}$$

pro každé $k = 1, 2, \dots, n$. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k y_k &= \sum_{k=1}^n x_k (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^n x_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} S_k = \\ &= x_n S_n + \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) S_k - x_1 S_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Obdobně je také

$$\sum_{k=1}^n x_k z_k = x_n T_n + \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) T_k - x_1 T_0. \quad (4)$$

Poněvadž však čísla $z_1, z_2, \dots, z_n$ tvoří jen permutaci čísel $y_1, y_2, \dots, y_n$, je nutně $S_n = T_n$. Pro $k = 1, 2, \dots, n-1$ pak platí $S_k \geq T_k$, neboť je $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$. Dále je též $x_k \geq x_{k+1}$, a tedy $x_k - x_{k+1} \geq 0$ pro $k = 1, 2, \dots, n-1$, takže

$$\sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) S_k \geq \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) T_k.$$

Odtud a z rovností (3) a (4) již vyplývá dokazovaná nerovnost (2), a tedy i (1).

Jiné řešení této úlohy je založeno na přímém důkazu nerovností (1), tj. bez redukce na (2), a to indukcí podle n . Místo indukčního kroku je ostatně možné odvolat se na známou skutečnost, že každou permutaci lze složit z transpozic.

2. Členy posloupnosti

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

s výjimkou a_1 rozdělíme do a_1 tříd podle zbytků při dělení číslem a_1 . V každé neprázdné třídě vezmeme nejmenší číslo a_q ; všechny další členy a_m posloupnosti (1) patřící do téže třídy jako a_q se od a_q liší o násobek čísla a_1 , takže je lze psát ve tvaru

$$a_m = a_q + ya_1,$$

kde y je celé kladné číslo. Poněvadž všech tříd je a_1 , tzn. konečný počet, vidíme, že nejen nekonečně mnoho členů posloupnosti (1), ale dokonce všechny členy až na nejvýše $a_1 + 1$ výjimku lze vyjádřit v požadovaném tvaru, přičemž se navíc (aspoň) jedno z čísel x, y rovná 1.

3. Označme

$$\sphericalangle ABC = \beta, \quad \sphericalangle BAC = \alpha, \quad \sphericalangle ACB = \gamma,$$

$AB = c, BC = a, AC = b, AR = BR = y, AQ = x, QC = t, BP = z, PC = v$. Podle sinové věty je

$$x : b = \sin 30^\circ : \sin 105^\circ,$$

takže

$$x = \frac{b}{2 \cos 15^\circ}$$

a obdobně

$$z = \frac{a}{2 \cos 15^\circ}.$$

Dále je

$$y = \frac{c}{2 \cos 15^\circ}$$

a

$$t = x \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = x \sqrt{2} = \frac{b}{\sqrt{2} \cos 15^\circ},$$

$$v = t \frac{a}{b} = \frac{a}{\sqrt{2} \cos 15^\circ}.$$

K vyjádření délek stran trojúhelníku PQR užijeme kosinové věty:

$$QR^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos(\alpha + 60^\circ),$$

$$PR^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cos(\beta + 60^\circ),$$

$$PQ^2 = t^2 + v^2 - 2tv \cos(\gamma + 60^\circ).$$

Tyto rovnosti platí, i když některý z úhlů α, β, γ je větší nebo roven 120° .

Podle sinové věty je ovšem

$$a : b = \sin \alpha : \sin \beta,$$

a tedy

$$a \sin \beta - b \sin \alpha = 0,$$

takže

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \cdot c(a \sin \beta - b \sin \alpha) &= 0 = \\ &= \frac{1}{2}(b^2 - c^2 + a^2 - 2a^2 + a^2 + c^2 - b^2). \end{aligned}$$

Odtud plyne dále rovnost

$$\begin{aligned} b^2 - \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) + bc \sqrt{3} \cdot \sin \alpha &= \\ = a^2 - \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2) + ac \sqrt{3} \cdot \sin \beta, \end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned} & b^2 - \frac{1}{2}(2bc \cos \alpha) + bc \sqrt{3} \cdot \sin \alpha = \\ & = a^2 - \frac{1}{2}(2ac \cos \beta) + ac \sqrt{3} \cdot \sin \beta, \\ & b^2 - 2bc\left(\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin \alpha\right) = \\ & = a^2 - 2ac\left(\frac{1}{2} \cos \beta - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin \beta\right), \end{aligned}$$

což lze psát též jako

$$b^2 - 2bc \cos(\alpha + 60^\circ) = a^2 - 2ac \cos(\beta + 60^\circ).$$

Nyní celou rovnost dělíme číslem $4 \cos^2 15^\circ$ a dostaneme

$$\frac{b^2}{4 \cos^2 15^\circ} - \frac{bc \cos(\alpha + 60^\circ)}{2 \cos^2 15^\circ} = \frac{a^2}{4 \cos^2 15^\circ} - \frac{ac \cos(\beta + 60^\circ)}{2 \cos^2 15^\circ},$$

neboli

$$x^2 - 2xy \cos(\alpha + 60^\circ) = z^2 - 2yz \cos(\beta + 60^\circ).$$

To však znamená, že $PR^2 = QR^2$, čili $PR = QR$. Dokázali jsme tak *druhou* část úlohy: trojúhelník PQR je rovno-ramenný.

První část, tj. rovnost $\sphericalangle PRQ = 90^\circ$, dokážeme z Pythagorovy věty. Platí totiž

$$PR^2 + QR^2 = PQ^2.$$

Poněvadž už víme, že

$$PR = QR,$$

je

$$PR^2 + QR^2 = 2x^2 + 2y^2 - 4xy \cos(\alpha + 60^\circ).$$

Zároveň je

$$PQ^2 = t^2 + v^2 - 2tv \cos(\gamma + 60^\circ).$$

Podle sinové věty je však

$$a \sin \gamma - c \sin \alpha = 0;$$

odtud stejným postupem jako v předchozím dostaneme rovnost

$$c^2 - 2bc \cos(\alpha + 60^\circ) = a^2 - 2ab \cos(\gamma + 60^\circ). \quad (1)$$

Dosadíme-li do výrazů pro $PR^2 + QR^2$ a pro PQ^2 za x, y, t, v , dostaneme

$$PR^2 + QR^2 = \frac{b^2}{2 \cos^2 15^\circ} + \frac{c^2}{2 \cos^2 15^\circ} - \frac{bc \cos(\alpha + 60^\circ)}{\cos^2 15^\circ},$$

$$PQ^2 = \frac{b^2}{2 \cos^2 15^\circ} + \frac{a^2}{2 \cos^2 15^\circ} - \frac{ab \cos(\gamma + 60^\circ)}{\cos^2 15^\circ}.$$

Porovnáním s (1) dostáváme pak požadovanou rovnost:

$$PR^2 + QR^2 = PQ^2;$$

trojúhelník PRQ je tedy pravoúhlý: $\sphericalangle PRQ = 90^\circ$.

Jiné řešení. Vně trojúhelníku ABC sestrojíme tři rovno-ramenné pravoúhlé trojúhelníky $AQ'C$, $BP'C$, ABR' tak, aby

$$\sphericalangle Q'AC = \sphericalangle P'BC = \sphericalangle AR'B = 90^\circ.$$

Tyto tři trojúhelníky jsou ovšem podobné, přičemž si body

P, Q, R vzájemně odpovídají. Nyní sestrojíme body K, L, M, N tak, aby

$$\begin{aligned} K &\in BC, & PK &\perp BC, \\ L &\in AC, & QL &\perp AC, \\ M &\in AB, & KM &\parallel AC, \\ N &\in AB, & LN &\parallel BC. \end{aligned}$$

Z podobnosti plyne

$$\frac{KM}{AC} = \frac{BK}{BC} = \frac{AL}{AC} = \frac{QL}{AC},$$

takže

$$QL = MK.$$

Obdobně dojdeme k rovnostem

$$LN = KP, \quad NR = RM.$$

Navíc je

$$QL \perp MK, \quad LN \perp KP, \quad NR \perp RM.$$

Je tedy také (sčítání vektorů je asociativní a komutativní) $QR = PR$ a $\sphericalangle QRP = 90^\circ$, c. b. d.

Další řešení, podstatně jednodušší, je založeno na znalosti pojmu podobnosti jakožto zobrazení roviny. Vezměme dvě taková zobrazení π_1 a π_2 , definovaná takto: π_1 se skládá z otočení o 45° okolo bodu A a z homotetie se středem

v A a s koeficientem $k = \frac{\sin 105^\circ}{\sin 30^\circ}$, takže $\pi_1(Q) = C$. Zo-

brazení π_2 se skládá z otočení o 45° okolo bodu B a z homotetie se středem v B a s koeficientem $k^{-1} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ}$, takže

$\pi_2(C) = P$. Složením obou zobrazení π_1 a π_2 dostaneme zřejmě pouhé otočení o 90° a zbývá dokázat, že R je právě střed tohoto otočení. Snadno se však vidí, že $\pi_1(R) = S$, kde S je vrchol rovnostranného trojúhelníku ABS (ležícího v polorovině ABR), a že pak $\pi_2(S) = R$. Tím je úloha řešena.

4. Řešení úlohy se skládá ze dvou částí. Nejprve odhadneme shora součet cifer čísla B ; označme ho C . Zřejmě je

$$4444 < 10\,000 = 10^4,$$

takže číslo 4444^{4444} má nanejvýš $4 \cdot 4444 = 17\,776$ cifer. Každá z nich je nanejvýš rovna 9; pro jejich součet A tak dostáváme odhad

$$A \leq 9 \cdot 17\,776 = 159\,984.$$

Číslo B je tedy nejvýše rovno číslu

$$9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 45.$$

Z přirozených čísel menších nebo rovných 45 má největší součet cifer číslo 39, totiž 12. Je tedy celkem

$$C \leq 12.$$

Druhá část řešení spočívá ve využití známé skutečnosti, že každé číslo dává při dělení devíti týž zbytek, jaký dává jeho ciferný součet. Platí tedy

$$4444^{4444} \equiv A \pmod{9},$$

$$A \equiv B \pmod{9},$$

$$B \equiv C \pmod{9}.$$

Avšak

$$4444 \equiv 7 \pmod{9},$$

a tedy také

$$4444 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Snadno si ověříme, že pro každé přirozené k je

$$7^{3k+1} \equiv 7 \pmod{9};$$

je tedy

$$4444^{4444} \equiv 7 \pmod{9}.$$

To však znamená, že také

$$C \equiv 7 \pmod{9}.$$

Poněvadž platí $C \leq 12$, vidíme, že nutně $C = 7$. Hledaný součet cifer čísla B je tedy právě 7.

5. V kružnici s poloměrem 1 má tětiva odpovídající středovému úhlu α délku $2 \sin \frac{\alpha}{2}$. Nyní dokážeme dvě pomocná tvrzení:

1. Je-li δ úhel takový, že $\sin \delta$, $\cos \delta$ jsou racionální čísla, pak také $\sin k\delta$, $\cos k\delta$ jsou racionální čísla pro všechna přirozená k .

2. Existuje libovolně malý úhel δ takový, že $\sin \delta$ a $\cos \delta$ jsou racionální čísla.

První tvrzení dokážeme snadno indukcí podle k : pro $k = 1$ je triviální a pro indukční krok využijeme známých vzorců

$$\sin(k+1)\delta = \sin k\delta \cos \delta + \cos k\delta \sin \delta,$$

$$\cos(k+1)\delta = \cos k\delta \cos \delta - \sin k\delta \sin \delta.$$

K důkazu *druhého* tvrzení stačí např. vzít úhel δ takový, že je

$$\sin \delta = \frac{2t}{t^2 + 1}, \quad \cos \delta = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1},$$

kde t je dostatečně velké přirozené číslo.

Budiž nyní δ úhel takový, že $\sin \delta$ i $\cos \delta$ jsou racionální čísla a že $1975 \cdot \delta < \frac{1}{2}\pi$. Na dané kružnici nyní umístíme 1975 bodů $A_1, A_2, \dots, A_{1975}$ tak, aby středové úhly odpovídající tětivám $A_k A_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots, 1974$) byly všechny právě 2δ . Libovolné dvojici bodů $A_j A_k$ ($j < k$) bude odpovídat středový úhel $2(k - j)\delta$, příslušná tětiva bude mít délku $2 \sin(k - j)\delta$, což je vždy racionální číslo.

Nad kružnici s poloměrem 1 je tedy možné umístit 1975 (a snadno se vidí, že i libovolný jiný konečný počet) bodů tak, aby všechny jimi určené tětivy měly racionální délky.

6. Nejprve probereme případ $n = 1$, tj. hledáme lineární homogenní mnohočlen

$$P(x, y) = Ax + Bx$$

vyhovující podmínkám 2 a 3. Položíme-li $a = 1$, $b = c = 0$, dostaneme z podmínky 2

$$P(0, 1) = -2P(1, 0),$$

podle podmínky 3 je tedy $P(0, 1) = -2$. Odtud a z podmínky 3 vyplývá $A = 1$, $B = -2$, tzn.

$$P(x, y) = x - 2y.$$

Snadno ověříme, že tento lineární mnohočlen opravdu vyhovuje všem třem podmínkám úlohy; při $n = 1$ je to jediné řešení.

Nechť nyní $n > 1$. Platí opět $P(1, 0) = 1$, $P(0, 1) = -2$; položíme-li $a = 2$, $b = c = -1$, dostaneme z podmínky 2 rovnost

$$P(-2, 2) = -2P(1, -1).$$

Z podmínky 1 však zároveň vyplývá, že platí

$$P(-2, 2) = (-2)^n P(1, -1).$$

Jelikož je $n > 1$, je ovšem $(-2)^n \neq -2$, a tedy nutně

$$P(1, -1) = 0.$$

Vzhledem k homogenitě mnohočlenu P je pak také

$$P(x, -x) = 0$$

pro všechna reálná x . Odtud však již vyplývá, že polynom P lze psát ve tvaru

$$P(x, y) = (x + y) Q(x, y),$$

kde Q je polynom.

Ukážeme nyní, že také polynom Q vyhovuje podmínkám 1, 2 a 3. Skutečně, při $x + y \neq 0$ je

$$Q(tx, ty) = \frac{P(tx, ty)}{tx + ty} = \frac{t^n P(x, y)}{t(x + y)} = t^{n-1} Q(x, y),$$

takže Q je nutně homogenní polynom stupně $n - 1$. Podobně je – při $a + b + c \neq 0$ – také

$$\begin{aligned} & Q(a + b, c) + Q(a + c, b) + Q(b + c, a) = \\ &= \frac{1}{a + b + c} [P(a + b, c) + P(a + c, b) + P(b + c, a)] = 0. \end{aligned}$$

Rovněž

$$Q(1, 0) = \frac{P(1, 0)}{1} = 1.$$

Poněvadž při $n = 1$ už řešení známe, vidíme, že řešením mohou být jen polynomy tvaru

$$P(x, y) = (x + y)^{n-1} (x - 2y);$$

snadno se ověří, že tyto polynomy skutečně vyhovují všem třem podmínkám úlohy (při každém přirozeném n).

Jiné řešení. Nejprve dokážeme pomocné tvrzení:

Je-li polynom P řešením úlohy, potom

$$P(x, 1 - x) = 3x - 2$$

pro všechna reálná x .

Tvrzení dokážeme nejdříve jen pro celé hodnoty argumentu x , a to indukcí.

I. Tvrzení zřejmě platí pro $x = 1$; podle podmínky 3 je totiž

$$P(1, 0) = 1 = 3 \cdot 1 - 2.$$

II. Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechna celá čísla v mezích $1 - k$ až $1 + k$ (včetně), kde k je celé ne-

záporné číslo. Podle podmínky 2, kde položíme $a = -k$, $b = 0$, $c = 1 + k$, bude

$$P(-k, 1 + k) = -P(1, 0) - P(1 + k, -k).$$

Podle indukčního předpokladu se však pravá strana rovná

$$-1 - [3(1 + k) - 2] = 3(-k) - 2,$$

takže dokazovaná rovnost platí i pro $x = -k = 1 - (k + 1)$.

Nyní položíme $a = k + 1$, $b = 1$, $c = -(k + 1)$; podle podmínky 2 bude

$$P(k + 2, -k - 1) = -P(0, 1) - P(-k, 1 + k).$$

Podle první části důkazu je však pravá strana rovna

$$-(3 \cdot 0 - 2) - [3(-k) - 2] = 3k + 4 = 3(k + 2) - 2;$$

dokazované tvrzení tedy platí i pro $x = k + 2 = 1 + (k + 1)$.

Tvrzení tedy platí pro všechny celé hodnoty x ; poněvadž však P je polynom, plyne odtud platnost tvrzení pro všechna reálná x vůbec.

Dále využijeme podmínky 1, tj. homogenity polynomu P , a napíšeme (pro $x + y \neq 0$)

$$P(x, y) = (x + y)^n P\left(\frac{x}{x + y}, \frac{y}{x + y}\right).$$

Avšak

$$\frac{y}{x + y} = 1 - \frac{x}{x + y},$$

takže podle pomocné věty je

$$P\left(\frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y}\right) = 3 \frac{x}{x+y} - 2 = \frac{x-2y}{x+y}.$$

Celkem je tedy

$$P(x, y) = (x+y)^{n-1} (x-2y),$$

a to pro každé přirozené n . Ježto P je polynom, platí výsledek i při $x+y=0$.

Snadno se ověří, že výsledný polynom skutečně vyhovuje všem třem podmínkám úlohy.

Poznámky k úlohám a jejich řešením

1. Uvedené řešení úlohy č. 1 je v podstatě shodné s řešením, které na *XVII. MMO* podal *J. Voldřich*.

2. Úlohu č. 2 lze řešit několika způsoby; nejkratší a nejekonomičtější se zdá být řešení, které zde uvádíme; až na drobné úpravy se shoduje s řešením, které při soutěži předložil *J. Kratochvíl*.

3. Úloha č. 3 byla na *MMO* jediná skutečně geometrická úloha. Řešení, které zde uvádíme jako první, se shoduje v podstatě s řešením, které na *MMO* podal *V. Klíma*. Druhé řešení je autorské. Třetí způsob řešení předložil na schůzi jury vedoucí francouzské delegace; odpovídá způsobu, jímž je geometrie roviny vykládána na francouzských školách.

4. Úloha č. 4 vznikla v této podobě až v průběhu jednání jury; v původním sovětském návrhu šlo o určení součtu cifer

čísla 16^{16} . Je smutnou skutečností, že tuto nejlehčí úlohu nedokázal žádný z našich žáků vyřešit úplně.

5. Obtížnost úlohy č. 5 tkvěla spíše v logické struktuře tvrzení užívaných při řešení.

6. První z uvedených řešení úlohy č. 6 sleduje základní ideu, již užil na *XVII. MMO* J. Navrátil, který jako jediný z čs. družstva podal úplné řešení. Podobně ji ovšem řešila i většina ostatních úspěšných řešitelů. Druhé uvedené řešení, založené na pomocném tvrzení o hodnotách mnohočlenu P na přímce $x + y = 1$, podal na *XVII. MMO* jeden ze žáků z USA; dostal za ně zvláštní cenu.

Obsah

Předmluva	3
I. O průběhu XXIV. ročníku MO	7
II. Přípravné úlohy I. kola.	40
Kategorie A	40
Kategorie B	42
Kategorie C	44
Kategorie Z	46
III. Soutěžní úlohy I. kola	49
Kategorie A	49
Kategorie B	57
Kategorie C	69
Kategorie Z	83
IV. Soutěžní úkoly II. kola	93
Kategorie A	93
Kategorie B	106
Kategorie C	117
Kategorie Z	126
V. Soutěžní úlohy III. kola kategorie A	133
VI. Texty soutěžních úloh krajských kol kategorie Z	154
VII. Zpráva o XVII. mezinárodní matematické olympiádě	163

POZNÁMKY

POZNÁMKY

POZNÁMKY

POZNÁMKY

Edice Pomocné knihy pro žáky

Za přispění spolupracovníků zpracovali doc. Jan Vyšín, CSc.,
Petr Fabinger, dr. Jiří Mída, doc. dr. Jozef Moravčík, CSc.
a dr. František Zítek, CSc.

DVACÁTÝ ČTVRTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Obálku a vazbu navrhl Jaromír Jarkovský
Vydání 1. — Praha 1977 — Počet stran 192
Odpovědná redaktorka: Květoslava Brázdová
Výtvarný redaktor: Václav Hanuš
Technická redaktorka: Hana Kubšová

Vytiskla Polygrafia, n. p., Praha 2, Svobodova 1
AA 6,14 (5,39 AA textu, 0,75 AA grafiky) — VA 6,53

Náklad 3 550 výtisků

Tematická skupina a podskupina 03/2

Cena brožovaného výtisku Kčs 8,—

505/21, 825

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze
jako svou publikaci č. 75-0-06

14 — 681 — 77

Kčs 8,—

**matematická
olympiáda**



SPN 75 – 0 – 06

**14 – 681 – 77
03/2 Kčs 8,-**