

30. ročník matematické olympiády

Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Antonín Vrba (editor); František Zítek (editor): 30. ročník matematické olympiády. Školní rok 1980-1981. 22. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1983.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404734>

Terms of use:

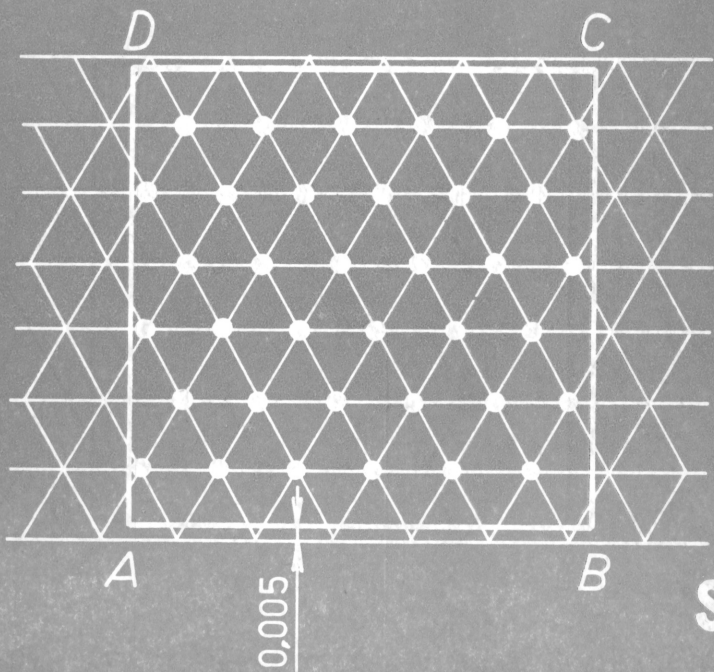
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MO

XXX. ročník matematické olympiády



SPN

TŘICÁTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

(Školní rok 1980—81)

22. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ
PRAHA

Za přispění spolupracovníků zpracovali
prof. dr. Jozef Moravčík, CSc., dr. Leo Boček, CSc.,
doc. dr. Lev Bukovský, CSc., dr. Antonín Vrba, CSc.,
dr. František Zítek, CSc.

Recenzovali dr. Jitka Kučerová, dr. Miroslav Šisler, CSc.,
dr. Václav Šůla

© Prof. dr. Jozef Moravčík, CSc. za kolektiv, 1983

Obsah

Předmluva	5
Projev ministra školství ČSR	9
Projev předsedy ÚV MO	15
O průběhu 30. ročníku MO	25
Kategorie Z	50
Přípravné úlohy I. kola	50
Soutěžní úlohy I. kola	53
Soutěžní úlohy II. kola	56
Soutěžní úlohy III. kola - ČSR	58
Soutěžní úlohy III. kola - SSR	59
Kategorie C	61
Přípravné úlohy I. kola	61
Soutěžní úlohy I. kola	66
Soutěžní úlohy II. kola	73
Kategorie B	78
Přípravné úlohy I. kola	78
Soutěžní úlohy I. kola	85
Soutěžní úlohy II. kola	97
Kategorie A	103
Přípravné úlohy I. kola	103
Soutěžní úlohy I. kola	109
Soutěžní úlohy II. kola	120
Soutěžní úlohy III. kola	130
Korespondenční seminář ÚV MO	141
 22. MMO	149

Predhovor

Milí mladí priatelia a spolupracovníci matematickej olympiády,

dostávate do rúk ročenku jubilejného 30. ročníka matematickej olympiády, ktorý sa uskutočnil v školskom roku 1980/81. Význam našej súťaže v riešení matematických úloh pre žiakov stredných a základných škôl každoročne vyhlasovanej ministerstvami školstva ČSR a SSR dokumentovala o. i. skutočnosť, že záver súťaže - celoštátne kolo kategórie A - sa pri príležitosti jubilea konal po dvadsiatich rokoch opäť v hlavnom meste nášho štátu a mal mimoriadne slávnostný ráz. Miesto matematickej olympiády v systéme československej výchovnovzdelávacej sústavy zhodnotil na slávnostnom otvorení celoštátneho kola minister školstva ČSR s. doc. dr. Milan Vondruška, ktorého prejav v plnom znení uverejňujeme. Krátky pohľad do histórie jubilujúcej MO a na podujatia, ktoré ju sprevádzajú, nájdete vo vystúpení, ktoré v aule Karolína predniesol predseda ÚV MO. Spomína v ňom tiež na niektorých zaslúžilých pracovníkov v MO, ktorí sa jubilejného ročníka už nedožili. Pri tejto slávnostnej príležitosti sa dostalo významného ocenenia záslužnej práce pri vyhľadávaní a vedení matematických talentov desiatkam žijúcich dlhoročných pracovníkov v matematickej olympiáde tým, že prevzali ďakovné listy ministrov školstva.

Ako to však už pri takýchto príležitostiach býva, nebolo možné oceniť všetkých, ktorí by si to zasluhovali. Využívame preto aj túto možnosť, aby sme poďakovali za obetavú prácu stovkám nemenovaných učiteľov a organizačných pracovníkov, ktorí po desiatky rokov neľutovali vynakladať svoje duševné a fyzické sily i voľný čas na prospech rozvoja mladých talentov a tým napomáhať rozmnožovanie duchovného i hmotného bohatstva našej socialistickej vlasti.

Ako obvykle nájdete v ročenke prehľad o organizácii a výsledkoch jubilejného ročníka, úlohy všetkých kôl a kategórií súťaže s riešeniami a po jednoročnej prestávke tiež výstižnú informáciu o 22. medzinárodnej matematickej olympiáde v USA, na ktorej v súťaži rekordného počtu 185 žiakov z 27 krajín všetkých kontinentov nadviazalo nekompletné družstvo reprezentujúce našu vlasť za oceánom na úspech spred dvoch rokov, keď opäť priviezlo jednu prvú cenu za plný počet bodov a ani jeden z päťice našich žiakov sa nevrátil domov bez ocenenia.

Nechýba ani úplný prehľad úloh, ktoré v školskom roku 1980/81 riešili účastníci celoštátneho korešpondenčného seminára. Pre obmedzený rozsah ročenky sa ich riešenia už nevošli na jej stránky, ale pevne veríme, že riešitelia budúcich ročníkov MO ich využijú na vyskúšanie svojich schopností a tým na lepšiu prípravu pre súťaž, ktorá od svojho budúceho - 31. ročníka zvyšuje svoju náročnosť v školskom kole, ako sme o tom podrobnejšie informovali v predhovore k ročenke predchádzajúceho ročníka.

Záverom nám dovoľte vysloviť presvedčenie, že jubilujúca MO aj vo svojom zrelom veku alebo práve vďaka skúsenostiam tomuto veku prislúchajúcim bude nachádzať stále väčšiu priazeň

mladých, ktorým je určená a ktorým chce pomáhať objavovať krásy matematiky a prinášať neopakovateľnú radosť z tvorivej práce.

Ústredný výbor matematickej olympiády

PROJEV MINISTRA ŠKOLSTVÍ ČSR
DOC. DR. M. VONDRUŠKY
K ZAHÁJENÍ CELOSTÁTNÍHO KOLA
30. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

*Vážené soudružky, vážení soudruzi,
milí soutěžící,*

srdečně vás všechny zdravím, zde, na historické půdě staroslavného Karolina, kde se scházíme k slavnostnímu zahájení celostátního kola jubilejního 30. ročníku matematické olympiády. Je symbolicky příhodné, že k vyvrcholení této už tradiční soutěže žáků a studentů základních a středních škol dochází právě nyní, v májových dnech v hlavním městě naší socialistické vlasti, ve stověžaté zlaté Praze. Finále letošní matematické olympiády se tak dostává do mimořádně tvůrčího dění přítomné doby k němuž na prvním místě patří XVI. sjezd KSČ, oslavy vítězství nad fašismem a osvobození Československa Sovětskou armádou, slavné šedesátileté jubileum naší komunistické strany a pak volby do zastupitelských sborů, k nimž se s veškerou svědomitostí připravujeme. Tyto vpravdě nosné pilíře politického a společenského života vytvářejí naši socialistickou přítomnost a přes ně směřujeme do budoucnosti. A právě pro tuto budoucnost svou dnešní prací připravujeme ve školách činnost rodou, vzdělanou, morálně uvědomělou mladou generaci, která bude schopna vybudovat materiálně technickou základnu komunistické společnosti.

Náš úkol v tomto směru je vskutku obrovský a k jeho splnění musíme efektivně využívat všech prostředků, které máme. Nesporné přitom je, že k nejučinnějším z nich - pokud jde o formování vzdělanostního profilu člověka již třetího tisíciletí - náleží matematika. Jsme si všichni plně vědomi, že matematika tvoří základ technických věd. A tuto skutečnost nebyvalou měrou umocňuje hlavní požadavek dneška: urychlovat, zkvalitňovat proces vědeckotechnické revoluce a organicky spojovat její výsledky s přednostmi socialistického zřízení.

Zcela zákonitě proto XVI. sjezd položil důraz na rozvoj vědy, na bezprostřední aplikaci jejích výsledků v praxi, na vědecký a technický pokrok, jenž je základem úspěšného rozvoje všech úseků národního hospodářství, ekonomiky a kultury. Vědecky myslící, tvořící lidé jsou dnes nositeli klíčových požadavků racionalizace výroby a zvyšování její efektivnosti, využívání vědeckotechnického pokroku, integrace vědy a výroby jako jednoho z nejdůležitějších požadavků současnosti.

V této spojitosti také XVI. sjezd KSČ ocenil výsledky, kterých dosahují přírodní, technické i společenské vědy, vyzdvihl obětavou práci vědců a úspěchy docílené prostřednictvím mezinárodní spolupráce ve vědě, zvláště se sovětskými vědci. Zároveň však bylo na sjezdu konstatováno, že přes nesporné úspěchy tempo rozvoje a využívání vědy neodpovídá potřebám i možnostem, jež máme. Z těchto sjezdových závěrů, soudružky a soudruzi, musíme odvodit vše potřebné i pro naši práci ve školách, tam, kde se formují příští nositelé vědeckotechnického rozvoje. A svou pozornost přitom zaměřit především na - jak říkáme - královnu věd - matematiku. Zejména v uplynulých pěti letech, v souvislosti s postupnou realizací dokumentu o dalším rozvoji československé výchovně vzdělávací soustavy,

krátce řečeno s Projektem, byl pro výuku matematiky učiněn nebyvalý kus práce. Obsahová přestavba, spočívající v základní škole do značné míry právě na novém pojetí vyučování matematice, dospěla již letos do pátého ročníku základní školy. Přitom analýza výsledků v 1.—4. ročníku ukázala potěšitelnou věc: matematika se stává u žáků předmětem velmi oblíbeným, zatímco dosud tomu bylo spíše naopak. To je cenná zkušenost, ale hlavně cenná skutečnost, kterou nesmíme promarnit. Půjde o to, abychom z existující obliby matematiky u dětí mladšího školního věku vytěžili maximum pro výuku matematiky, pro zájem žáků a studentů ve vyšších ročnících a na vyšších stupních školské soustavy. Prostě musíme nyní učinit vše, aby se matematika ve vědomí žáků a studentů stala nejenom potřebnou, ale také zajímavou, přitažlivou disciplínou a tím výsledky jejímu vyučování odpovídaly požadavkům a potřebám rozvoje socialistické společnosti.

Zmiňuji se o tom právě zde, neboť jak se průkazně ukázalo, matematická olympiáda se stala výrazným prostředkem zvyšování zájmu o matematiku včetně objevování matematických talentů. Jsme vděční všem, kteří stáli u kolébky této soutěže. Dovolte, abych za všechny vzpomněl především vynikající osobnosti, vědce a pedagoga, akademika Eduarda Čecha. Zároveň abych vyzdvihl prospěšnost těsné spolupráce mezi školskými vědeckými i společenskými řídicími orgány a institucemi. Původně to byly někdejší ministerstvo školství, věd a umění, Československý svaz mládeže a Ústřední ústav matematický. V duchu této tradice vyhláší a organizují dnes matematickou olympiádu ministerstva školství České a Slovenské socialistické republiky, Jednota československých matematiků a fyziků, Jednota slovenských matematiků a fyziků, Matema-

tický ústav ČSAV a Socialistický svaz mládeže. Vysoce oceňujeme práci všech těchto organizátorů, lidí, kteří věnovali matematické olympiádě mnoho svých sil i volného času a svým nadšením, obětavostí založili tradici a úspěšnou přítomnost této soutěže.

Zvláště bych pak rád poděkoval také učitelům základních a středních škol, neboť na nich bezesporu spočívá hlavní pedagogická a přípravná práce mezi soutěžícími, jejich působení zakládá úspěch celé soutěže, její výsledný efekt. Uvažme, že každoročně se matematické olympiády účastní přibližně 15 tisíc žáků základních a 4 tisíce žáků středních škol. Vypracovaná řešení musí učitelé opravit, zhodnotit, probrat s řešiteli, ukázat na úspěchy a zamyslet se nad případným nezdarem. Velice si vážíme této záslužné práce učitelů, bez nichž by se matematická olympiáda nikdy neobešla; práce, kterou navíc všichni konají s vnitřním zaujetím, nadšením pro věc.

Třicet let existence matematické olympiády - to je doba zahrnující už více než jednu generaci. Někdejší první řešitelé a vítězové jsou již dnes úspěšní učitelé matematiky nebo i přední vědečtí pracovníci a pedagogové, mnozí z nich se vynikajícím způsobem uplatňují ve výrobním procesu. A je nemálo těch, kteří zůstali věrni přímo matematické olympiádě. Samozřejmě ne již jako soutěžící, ale jako nadšení organizátoři, pracovníci okresních, krajských výborů soutěže nebo v ústředním výboru matematické olympiády. Máme z toho radost, neboť to vše dokumentuje prospěšnost jejího zrodu a trvání.

A jestliže k tomu ještě připočteme velmi dobré výsledky našich chlapců a děvčat na mezinárodních matematických olympiádách, pak můžeme být právem hrdi na dobře započaté a konané dílo. Jeho těžištěm je tolik potřebný rozvoj logického

myšlení prostřednictvím matematických úloh. Avšak také - a to bych rád ještě zvlášť zdůraznil - skutečnost matematické olympiády, především ve vyšších kolech, obohacuje poznání soutěžících mladých lidí o nová místa, vede k navázání nových přátelství, znamená tedy i významnou společenskou událost s kulturně politickým a výchovným vlivem. I tento aspekt soutěže mějme trvale na zřeteli. Jsem přesvědčen, že naše socialistická metropole Praha se zhostí své úlohy na výbornou a vytvoří pro vás, účastníky a organizátory jubilejního 30. ročníku matematické olympiády, takové prostředí, na něž budete vždy velmi rádi vzpomínat.

Vážené soudružky, vážení soudruzi, v následujících třech dnech zasednou soutěžící ke svým finálovým úlohám a členové ústředního výboru matematické olympiády se ujmou náročného úkolu hodnocení prací. Třicátý ročník olympiády v matematice, v této náročné, ale také nesmírně zajímavé a nanejvýš potřebné vědní disciplíně, bude slavnostně a věřím, že úspěšně završen. Děkuji vám všem, kteří jste se na jeho přípravě a průběhu podíleli. Vám, kteří svou prací pro matematickou olympiádu pomáháte orientovat žactvo základních a středních škol ke společensky mimořádně žádoucím oborům studia a formujete mladou směnu pro povolání, která z hlediska dalšího rozvoje socialistické společnosti náleží k nejpotřebnějším.

A vám, děvčata a chlapci, mladí přátelé, kteří jste se svými znalostmi, schopnostmi, svou pílí a svým umem probíjeli až do tohoto celostátního kola, vám všem přeji mnoho úspěchů v nastávajícím ušlechtilém zápolení. Připravujete se na život prostřednictvím čínorodé tvůrčí práce. A to je ta pravá cesta, po níž dospějete k celospolečenské prospěšnosti i osobnímu uspokojení. Cesta, kterou vám otevírá - v duchu jednání

XVI. sjezdu KSČ - naše socialistické školství. Neboť jak výstižně uvedl ze sjezdové tribuny generální tajemník ÚV KSČ soudruh Gustáv Husák: »Úsilí školy musí směřovat k tomu, aby se v každém mladém člověku úměrně jeho věku a fyzickým schopnostem postupně vytvářel a rozvíjel kladný vztah k práci, touha po vlastní tvořivé činnosti.«

Vyjadřuji určitě názor vás všech, když prohlásím, že jednou z podstatných složek tohoto úsilí je vzdělávání v matematice a jeho moderní účinná forma - matematická olympiáda. Přeji celostátnímu kolu třicátého ročníku této soutěže mnoho zdaru, všem účastníkům co nejlepší výsledky v řešení soutěžních úloh a budiž čest práci všech organizátorů a pedagogů, kteří se na matematické olympiádě podílejí.

PREĽAV PREDSEDU ÚV MO
PROF. DR. Ľ. MORAVČÍKA, CSc.
NA SLÁVNOSTNOM OTVORENÍ
CELOŠTÁTNEHO KOLA
ĽUBILEĽNÉHO 30. ROČNÍKA MO

*Vážení súdruh minister, vážení hostia, súdružky, súdruhovia,
milí mladí priatelia!*

Je viac než symbolické, že sa pri otvorení celoštátneho kola jubilejného 30. ročníka matematickej olympiády (MO) stretávame v ovzduší doznievajúcich osláv 36. výročia oslobodenia našej vlasti hrdinskou sovietskou armádou, v dňoch, keď si pripomínáme 60. výročie založenia KSČ. Nepochybne bez oboch spomínaných významných udalostí by nebolo ani matematickej olympiády, teda ani jej tohtoročného jubilea. Keď si v tejto slávnostnej chvíli pripomínáme v historických priestoroch staroslávneho Karolína jej tridsaťročnú existenciu, dovoľte mi podotknúť, že tradícia matematických súťaží pre žiakov stredných škôl na území nášho štátu, z ktorej MO vyrástla, je oveľa staršia a súvisí s činnosťou Jednoty československých matematikov a fyzikov, ktorá vznikla roku 1862 a od roku 1870 začala vo svojich časopisoch uverejňovať matematické a fyzikálne úlohy pre stredoškôľakov, za riešenie ktorých sa udeľovali odmeny. Čitateľská súťaž v riešení úloh na stránkach časopisov Jednoty pomohla získať pre matematiku celý rad neskorších vynikajúcich matematikov, fyzikov a popredných odborníkov v iných oblastiach ľudskej činnosti. I medzi dneš-

nými akademikmi ČSAV sa nájdu takí, ktorí s hrdosťou spomínajú na vavríny získané v súťažiach Rozhľadov matematicko-fyzikálnych, ktoré i dnes uverejňujú úlohy na riešenie pre svojich stredoškolských čitateľov.

Potreby budovania socialistickej spoločnosti po historickom víťazstve, ktoré dosiahol náš ľud pod vedením KSČ vo Februári 1948, obrovský pokrok vo všetkých odboroch vedeckého poznania, ktorý signalizoval nastupujúcu vedeckotechnickú revolúciu, vyžadovali väčšie množstvo pracovníkov s kvalitným matematickým vzdelaním. Bolo treba rýchle vyškoliť nové matematické kádre, prebudovať zastaralé technické vzdelanie a vybudovať vedecké pracoviská a ústavy. Z toho vyplynula potreba získať predovšetkým študentov stredných škôl pre hlbšie štúdium matematiky a k tomu už čitateľská súťaž určená relatívne úzkemu okruhu čitateľov nepostačovala. Bolo preto viac-menej zákonité, že už v školskom roku 1949/50 sa organizovala matematická súťaž pre žiakov stredných škôl vo vtedajšom Olomouckom a Ostravskom kraji. O rok neskôr pripravovali podobnú súťaž niektoré slovenské kraje. Tieto podujatia a najmä dobré skúsenosti s podobnými súťažami v niektorých oblastiach ZSSR, v Poľsku a v Bulharsku, kde sa tieto súťaže nazývali matematickými olympiádami, boli bezprostredným popudom pre návrh akademika Eduarda Čecha, aby sa aj v Československu poriadala celoštátna matematická súťaž pre žiakov stredných škôl pod názvom matematická olympiáda. Pod jeho vedením vznikol 12. 9. 1951 prípravný výbor MO, ktorý pripravil návrh organizačného poriadku súťaže a predložil ho vtedajšiemu ministerstvu školstva, vied a umení. Toto ho s pochopením akceptovalo a pre školský rok 1951/52 vyhlásilo prvý ročník súťaže.

Jej prvý organizačný poriadok poukazuje predovšetkým na praktický a výchovný význam matematiky pre našu mládež a oceňuje súťaž z hľadiska sústavného zvyšovania úrovne vyučovania matematiky, fyziky a technických vied. MO sa kládlo za úlohu slúžiť vyhľadávaniu a včasnému podchytávaniu mladých talentovaných študentov a zabezpečovaniu sústavnej starostlivosti o prípravu budúcich vedúcich technických kádrov nášho hospodárskeho života.

Po pravde treba konštatovať, že začiatky MO boli skromné. V prvom ročníku sa jej v dvoch kategóriách zúčastnilo celkom 1013 riešiteľov zo 139 stredných škôl, z ktorých bolo v prvom kole len 166 úspešných. Počty účastníkov súťaže i úspešných riešiteľov však pomerne rýchle rástli. Postupne sa menila organizácia súťaže, vzrástol počet kategórií, upravovali sa súťažné podmienky. Pôvodne bola súťaž určená len pre žiakov stredných škôl, ale od 3. ročníka v roku 1953 pribudla kategória určená pre žiakov s povinnou školskou dochádzkou, v ktorej súťažia žiaci najvyšších ročníkov základných škôl. Cieľom súťaže v tejto kategórii má byť predovšetkým vzbudzovanie a rozvíjanie záujmu žiakov o matematiku a vhodný spôsob ich vedenia k samostatnej práci. S tým súvisí skutočnosť, že táto kategória súťaže má predovšetkým propagačný charakter a pomerne veľký počet riešiteľov. Za doterajších 28 rokov jej trvania sa jej zúčastnilo v školskom kole viac než 220 tisíc žiakov. V posledných rokoch je to každoročne okolo 15 tisíc účastníkov.

V kategóriách určených pre žiakov stredných škôl ráta súťaž s hlbším záujmom a nadaním pre matematiku a zúčastňuje sa jej menší počet žiakov. Pre porovnanie mi dovoľte spomenúť, že v predchádzajúcom ročníku sa školského kola zúčastnilo 4245 stredoškolákov, z ktorých 3456 splnilo podmienky pre

postup do krajského kola. V krajskom kole bolo úspešných 574 riešiteľov zo stredných škôl. Toto malé porovnanie názorne ukazuje, že za 30 rokov svojej existencie MO zmohutnela nielen kvantitatívne, ale najmä kvalitatívne. Inšpirovala vznik nových foriem a metód, ktoré sa v práci s talentami osvedčili. Spočiatku to boli pracovné prednášky či semináre v rámci krúžkov riešiteľov MO na školách, ku ktorým čoskoro pribudli krajské a neskôr tiež celoštátne sústreďovania riešiteľov MO organizované pod odborným dohľadom JČSMF. Počas prvých 10 ročníkov súťaže boli jedinou študijnou literatúrou pre riešiteľov MO ročenky jednotlivých ročníkov súťaže vydávané ÚV MO v SPN, ktoré obsahujú všetky úlohy príslušného ročníka s riešeniami. Od roku 1961 začal ÚV MO vydávať v mládežníckom nakladateľstve Mladá fronta edíciu Škola mladých matematikov, v ktorej doteraz vyšlo 47 zväzkov, viaceré z nich v niekoľkých vydaniach. Okrem toho v SPN vyšli 3 zbierky vybraných riešených úloh z jednotlivých kategórií našej súťaže.

Za 30 rokov svojho trvania podnietila MO rozhodnutie tisícok mladých ľudí k štúdiu matematiky, fyziky a technických odborov. Z nich mnohí sú už dnes poprednými odborníkmi, vedeckými pracovníkmi, vysokoškolskými učiteľmi a nechýbajú medzi nimi ani doktori fyzikálno-matematických či technických vied. Zastávajú významné miesta v rôznych oblastiach nášho národného hospodárstva či ako učitelia základných a stredných škôl pripravujú svojich nasledovníkov. Môžeme preto oprávnené konštatovať, že MO úspešne plní úlohy, ktoré dostala do vienka pri svojom vzniku, že zaujala pevné miesto v našom výchovnovzdelávacom systéme. Mohlo sa tak stať však len vďaka obetavej a nezištnej práci desiatok a stoviek učiteľov matematiky zo základných a stredných

škôl, dobrovoľných pracovníkov z vysokých škôl a výskumných pracovísk, ktorí nehľadiac na voľný čas venovali svoje sily a schopnosti práci s talentami. Nie je tu možné vymenovať všetkých nielen pre krátkosť času, ale najmä pre anonymitu mnohých z nich, pretože sú bezmennými hrdinami obetavej pedagogickej práce. Všetci bez výnimky si však zaslúžia našu úctu a poďakovanie. Viacerým z nich sa ho dostane z rúk najpovolanejších, keď prevezmú ďakovný list súdruha ministra. Dovoľte mi však spomenúť aspoň niekoľkých z tých, ktorým už takýmto spôsobom poďakovať nemožno, pretože ich niet medzi nami. Je to na prvom mieste s. Rudolf Zelinka, ktorý od vzniku MO po 14 rokov až do svojej náhlej smrti v máji 1965 vykonával náročnú funkciu tajomníka ÚV MO a bol doslova dušou olympiády. Ďalej spomeňme na prof. dr. Františka Vyčichla, prvého predsedu ÚV MO, akademika Jura Hronca, ktorý od prvého ročníka až do svojej smrti v decembri 1959 zastával funkciu podpredsedu ÚV MO a ktorého 100. výročie narodenia si pripomenieme 17. mája t.r., dlhoročných členov ÚV MO prof. dr. Karla Hrušu, Františka Hradeckého, Františka Veselého, Františka Vejsadu i Petra Fabingera, ktorý 4 roky pracoval ako tajomník ÚV MO.

Stovky, ba tisícky známych i menej známych učiteľov sa za 30 rokov existencie MO zanietene venovali a venujú popri svojich základných povinnostiach vyhľadávaniu a cielavedomému odbornému vedeniu talentov. Často možno doslovne hovoriť o odovzdávaní štafety, keď bývalí olympionici s rovnakým zápalom ako ich niekdajší učitelia sa zapájajú do práce s talentami - so svojimi nasledovníkmi. Keď už v súvislosti s MO hovoríme o učiteľoch, nemožno nespomenúť, že inštruktáže a školenia učiteľov matematiky základných a stredných

škôl, ktorí vedú MO na školách, mali a majú pozitívny vplyv na ich metodickú a odbornú úroveň a tým nepriamo vplývajú na kvalitnejšie plnenie výchovnovzdelávacích úloh školy vo vyučovaní matematiky. Nemaľou mierou k tomu prispievajú tiež metodické materiály, tzv. komentáre k úlohám I. kola, ktoré začal ÚV MO spracovávať z iniciatívy svojho dlhoročného predsedu doc. Jana Vyšína, CSc., ktorý bol tiež po niekoľko rokov sám ich jediným autorom.

Jedným z podujatí, ktoré sa osvedčili pri práci s talentami, je tzv. korešpondenčný seminár. Zúčastňuje sa ho ročne 30—40 vybraných úspešných riešiteľov MO z celej ČSSR. Koná sa každoročne od škol. roku 1974/75 a zvlášť v posledných rokoch zaznamenal výrazný kvalitatívny rozmach. Je potešiteľné, že táto forma práce s talentami našla značný ohlas tiež v krajoch a v kombinácii so zaujímavo organizovanými sústredzeniami priniesla najmä vo Východoslovenskom kraji v posledných 2—3 rokoch výrazné úspechy v MO. Ťažisko práce s celoštátnym korešpondenčným seminárom spočíva na pracovníkoch MÚ ČSAV, ktorý od vzniku MO vytvára pre súťaž nenahraditeľné odborné i technické predpoklady.

Na našu MO, ako aj na starostlivosť o matematické talenty v ČSSR, má nesporne vplyv aj medzinárodná matematická olympiáda, ktorá vznikla pred 22 rokmi z iniciatívy rumunských matematikov. ČSSR patrila k jej zakladateľom a naše družstvo nechýbalo na žiadnej z doteraz uskutočnených 21 MMO. Poslednej z nich pred 2 rokmi v Londýne sa zúčastnilo 166 žiakov z 23 krajín. Významný úspech na nej dosiahol najmladší člen nášho družstva Jan Nekovář, keď sa zaradil do štvorice riešiteľov, ktorí absolvovali súťaž bez straty bodu, čím získal po 11 rokoch pre ČSSR opäť prvú cenu. Celkom

na doterajších MMO získali naši žiaci 6 prvých, 18 druhých a 49 tretích cien a 4 špeciálne ceny za originalitu riešení súťažných úloh. I keď výsledky dosiahnuté na MMO nemožno preceňovať, dávajú do určitej miery možnosť porovnávať úroveň vyučovania matematiky a starostlivosti, ktorá sa venuje matematickým talentom v jednotlivých krajinách.

Poznatky z MMO prispeli o.i. k vzniku internátnych matematických tried zriadených pred 7 rokmi na 4 gymnáziách v ČSSR, ku ktorým v tomto školskom roku pribudlo ďalšie. Tým sa vytvorili nebývalé podmienky pre rozvoj matematických talentov pod odborným vedením.

Jubilejný 30. ročník súťaže, ktorý týmto celoštátnym kolom kategórie A vlastne uzatvárame, sa stal príležitosťou na zamyslenie nielen nad úspechmi, ktoré MO zaznamenala, ale aj nad cestami k ešte lepším výsledkom. Na odporúčanie ÚV MO dochádza od budúceho - 31. ročníka - k niektorým zmenám v koncepcii organizovania školského kola súťaže. Vo všetkých kategóriách boli zrušené tzv. prípravné úlohy, ktorých riešenie nebolo povinné, v dôsledku čoho im učitelia ani riešitelia nevenovali potrebnú pozornosť. Namiesto toho sa zavádza vo všetkých 3 stredoškolských kategóriách na záver školského kola klauzúrna súťaž, ktorá bude v rovnaký deň vo všetkých stredných školách v ČSSR pre príslušnú kategóriu a do krajského kola budú môcť postúpiť len tí, ktorí ju úspešne absolvujú. Očakávame, že táto zmena prispeje k zlepšeniu prípravy riešiteľov na súťaž a k tomu, že ňou budú podstatne viac žiť stredné školy a ich metodické komisie matematiky, než tomu bolo doteraz. Ďalším prínosom nepochybne bude vyššia úroveň účastníkov krajských kôl súťaže, hoci bude pravdepodobne treba aspoň spočiatku rátať s poklesom ich počtu.

V kategórii Z na základných školách sa zatiaľ so zavedením klauzúrnej súťaže na úrovni školy nepočíta, ale odovzdávanie riešení školského kola sa rozdeľuje na dve časti, aby sa učitelia i žiaci práci v MO venovali rovnomernejšie a systematickejšie.

Zásadnú zmenu by malo priniesť uskutočnenie odporúčania, aby sa postupne zaviedla matematická olympiáda pre žiakov škôl od 5. ročníka v nadväznosti na realizáciu novej koncepcie vyučovania matematiky. ÚV MO pri predkladaní tohto návrhu ministerstvám školstva sledoval cieľ včasnšieho objavenia žiakov matematicky nadaných, aby ich talent bolo možné už na základnej škole podchytiť a cieľavedome rozvíjať.

Vedeckotechnický pokrok, ktorý je neodmysliteľnou podmienkou ďalšieho upevňovania rozvinutej socialistickej spoločnosti potrebuje stále viac žiakov a študentov s dobrým vzťahom k matematike, s vysokou úrovňou vedomostí a schopnosťou tvorivo ich využívať. Tomu chce stále účinnejšie napomáhať aj MO a vyššie spomenuté zmeny v jej koncepcii by mohli prispieť k dosiahnutiu tohto cieľa. ÚV MO očakáva, že v tomto svojom úsilí nájde na stredných i základných školách ako aj v orgánoch školskej správy dostatok pochopenia a ochoty k spolupráci.

Vážené súdružky, súdruhovia!

Pokúsil som sa v tejto slávnostnej chvíli aspoň na niekoľkých faktoch ukázať, že jubilujúca MO si vydobyla svojimi výsledkami v oblasti práce s matematicky nadanými žiakmi pevné miesto v našej výchovnovzdelávacej sústave a nemalou mierou prispieva v oblasti vyučovania matematiky k realizácii Projektu jej ďalšieho rozvoja ako aj naznačiť niektoré

aktuálne otázky, ktoré úzko súvisia s ďalším kvalitatívnym rozvojom MO.

Zišli sme sa tu z príležitosti otvorenia celoštátneho kola jej jubilejného ročníka, ktoré sa práve vďaka tomuto jubileu koná po dvadsiatich rokoch opäť v hlavnom meste nášho štátu. Žiada sa pripomenúť, že v prvých 10 ročníkoch súťaže bola Praha každoročne dejiskom jej celoštátneho kola. V nasledujúcich rokoch sa však v organizácii tohto celoštátneho podujatia postupne vystriedali už všetky kraje republiky, viaceré z nich niekoľkokrát. Starostlivá príprava, program podujatia i všetko, s čím sme sa až doteraz po príchode do Prahy stretli, svedčia o tom, že vďaka vzácnemu pochopeniu predstaviteľov stranických i štátnych orgánov sa podarilo organizačnému výboru celoštátneho kola vytvoriť optimálne podmienky pre súťaž 80 žiakov vybraných zo 136 úspešných riešiteľov krajského kola kategórie A i pre dvoj denné rokovanie ÚV MO, ktorý sa bude zaoberať zhodnotením jubilejného ročníka súťaže i aktuálnymi otázkami jej ďalšieho rozvoja.

Záverom mi dovoľte poďakovať menom ÚV MO organizátorom celoštátneho kola za jeho starostlivú prípravu a predstaviteľom stranických a štátnych orgánov, ktoré im vychádzali v ústrety za poskytnutú pomoc. Veľmi rád využívam túto vzácnu príležitosť taktiež k tomu, aby som menom ÚV MO poďakoval osobitne s. ministrovi doc. Vondruškovi za pozornosť, ktorú venuje matematike i MO. Ďakujem pracovníkom oboch ministerstiev školstva za pochopenie pre potreby súťaže. Naše poďakovanie za cennú spoluprácu pri organizovaní doterajších ročníkov MO patrí tiež JČSMF a JSMF, MÚ ČSAV v Prahe i ÚV SZM. Neobávam sa vysloviť pre-

svedčenie, že táto spolupráca sa bude ďalej prehľbovať a rozvíjať na prospech starostlivosti o rozvoj matematických talentov, pre ďalší rozkvet našej drahej socialistickej vlasti.

O průběhu XXX. ročníku matematické olympiády

1. ORGANIZACE SOUTĚŽE

Pořadatelé 30. ročníku matematické olympiády byla stejně jako v minulých letech *ministerstva školství ČSR a SSR, Matematický ústav ČSAV v Praze (MÚ ČSAV), Jednota československých matematiků a fyziků (JČSMF), Jednota slovenských matematiků a fyziků (JSMF) a Socialistický svaz mládeže (SSM)*. Soutěž je řízena ústředním výborem matematické olympiády (ÚV MO) a dále krajskými a okresními výbory matematické olympiády (KV MO, OV MO).

Žáci soutěží ve čtyřech kategoriích: v kategorii A žáci III. a IV. ročníků středních škol, v kategorii B žáci II. ročníků středních škol a v kategorii C žáci I. ročníků. V kategorii Z soutěží žáci 8. a 9. tříd základních devítiletých škol. Se souhlasem KV MO může žák soutěžit i v kategorii určené pro žáky vyšších ročníků.

Na závěr školního roku 1979/80 jmenovala ministerstva školství ČSR a SSR členy ÚV MO na další tři roky. Od 1. září 1980 pracoval tedy ÚV MO ve složení:

předseda: *prof. dr. Jozef Moravčík, CSc., VŠDS Žilina*

místopředsedové: *doc. Jan Vyšín, CSc., MÚ ČSAV Praha*
dr. František Zítek, CSc., MÚ ČSAV Praha

jednatelé: *dr. Leo Boček, CSc., MFF UK Praha*
dr. Antonín Vrba, CSc., MÚ ČSAV Praha
zástupce MŠ ČSR: *dr. Václav Šíla, Praha*
zástupce MŠ SSR: *dr. Júlia Lukátišová, Bratislava*
zástupce ÚV SSM: *Jana Pomazalová, gymnázium Brno,*
tř. kpt. Jaroše
ostatní členové:
dr. František Běloun, Praha
dr. Ladislav Berger, Žilina
doc. dr. Lev Bukovský, CSc., přírodovědecká fakulta UPJŠ
Košice
dr. Milan Cirjak, KPÚ Prešov
prof. dr. Miroslav Fiedler, člen-korespondent ČSAV, MÚ ČSAV
Praha
dr. Karol Križalkovič, CSc., Pedagogická fakulta Nitra
doc. dr. Alois Kufner, DrSc., MÚ ČSAV Praha
Olga Maříková, gymnázium Praha 10, Voděradská
dr. Milan Maxian, gymnázium A. Markuša, Bratislava
dr. Peter Mederly, CSc., MFF UK Bratislava
dr. Jiří Mída, CSc., Pedagogická fakulta UK Praha
dr. Jana Müllerová, CSc., VÚP Praha
akademik Josef Novák, MÚ ČSAV Praha
doc. dr. Aleš Pultr, CSc., MFF UK Praha
Vítazoslav Repáš, gymnázium J. Hronca, Bratislava
Stanislav Rypáček, gymnázium Praha 9 - Prosek
dr. Jiří Sedláček, CSc., MÚ ČSAV Praha
ing. Oldřich Skopal, gymnázium Brno, tř. kpt. Jaroše
dr. Jiří Šídlo, gymnázium Praha 3, Sladkovského nám.
Miloslav Šmerda, Brno

Dále jsou členy ÚV MO předsedové krajských výborů MO:

Praha: *prof. dr. Karel Drbohlav, DrSc.*, MFF UK Praha
Středočeský kraj: *Ludmila Tréglová*, gymnázium Říčany
Jihočeský kraj: *doc. dr. ing. Lada Vaňatová*, Pedagogická fakulta České Budějovice
Západočeský kraj: *dr. Josef Polák, CSc.*, VŠSE Plzeň
Severočeský kraj: *Jiří Slavík*, gymnázium Teplice
Východočeský kraj: *dr. Josef Kubát*, gymnázium Pardubice
Jihomoravský kraj: *doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc.*, FE VUT Brno
Severomoravský kraj: *dr. Vladimír Vlček*, přírodovědecká fakulta UP Olomouc
Bratislava: *dr. Ľudovít Niepel, CSc.*, MFF UK Bratislava
Západoslovenský kraj: *prof. dr. Ondrej Šedivý, CSc.*, Pedagogická fakulta Nitra
Středoslovenský kraj: *doc. dr. Pavel Kršňák, CSc.*, Pedagogická fakulta Banská Bystrica
Východoslovenský kraj: *dr. Martin Gavalec, CSc.*, přírodovědecká fakulta UPJŠ Košice
Pracovní předsednictvo ÚV MO (PÚV MO) tvořili (v abecedním pořadí): *dr. Leo Boček, CSc.*, *doc. dr. Lev Bukovský, CSc.*, *prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc.*, *dr. Júlia Lukátšová, prof. dr. Jozef Moravčík, CSc.*, *Jana Pomazalová, Víťazoslav Repáš, dr. Jiří Sedláček, CSc.*, *dr. Václav Šůla, dr. Antonín Vrba, CSc.*, *doc. Jan Vyšín, CSc.*, *dr. František Zítek, CSc.*

2. SCHŮZE ÚV MO

V průběhu 30. ročníku MO se konala dvě zasedání ÚV MO, první ve dnech 8.—9. prosince 1980 a druhé ve dnech 15.—16. května 1981. Obě se konala v Praze, druhé zároveň

s celostátním kolem 30. ročníku MO. Hlavními body programu bylo zhodnocení průběhu 29. ročníku MO, příprava 31. ročníku, především v souvislosti s novou organizací MO (zavedení klauzurní části školního kola), spolupráce se SSM a ediční činnost, spojená s matematickou olympiádou. Předsednictvo ÚV MO se scházelo pravidelně jednou měsíčně a kromě organizačního zajištění MO projednávalo hlavně výběr úloh 30. a 31. ročníku MO.

3. PRŮBĚH SOUTĚŽE

Organizace jednotlivých kol soutěže byla stejná jako v předcházejících letech. Velmi slavnostní ráz mělo celostátní kolo kategorie A, jehož zahájení 14. května 1981 ve velké aule Univerzity Karlovy se zúčastnili ministr školství ČSR *doc. dr. Milan Vondruška*, zástupce ÚV KSČ *s. j. Březina* a další zástupci stranických a státních orgánů. Za Univerzitu Karlovu se shromáždění zúčastnili prorektor *prof. dr. V. Prosser, CSc.*, a proděkan fakulty matematicko-fyzikální *doc. dr. B. Novák, CSc.* Hlavní projev přednesl ministr školství *doc. dr. M. Vondruška*.

Záslouhou KV MO v Praze, především *prof. dr. K. Drbohlava, DrSc., inspektora Jaroslava Novotného, Olgy Maříkové, dr. Jiřího Šídla, Stanislava Rypáčka, dr. Ivana Buška, dr. Květy Sovíkové, dr. Františka Bělouna* a dalších byl pro účastníky celostátního kola MO i členy ÚV MO připraven velmi bohatý společenský program (prohlídka Prahy, návštěva Laterny magiky, výlet parníkem). Fakulta matematicko-fyzikální UK Praha připravila pro soutěžící zajímavé odpoledne věnované teorii her, na kterém měl pěknou přednášku *doc. dr. M. Vlach*,

CSc. Organizace vlastní soutěže i dalšího programu byla dokonalá. Na rozdíl od minulých let byly na závěr celostátního kola jubilejního ročníku matematické olympiády hned vyhlášeny výsledky a úspěšní účastníci převzali od ředitelky odboru MŠ ČSR s. O. Špétové diplomy. Mnozí pracovníci MO převzali současně děkovné dopisy ministra školství SSR a náměstka ministra školství ČSR za svou dlouholetou společensky významnou práci při výchově a vzdělání naší mládeže.

4. POMOCNÉ AKCE

Ve všech krajích se konaly pro účastníky MO přednášky, rozdělené podle jednotlivých kategorií. V některých krajích se konala i soustředění a letní školy nejlepších účastníků minulých ročníků MO. Velmi se osvědčily i korespondenční semináře, které po vzoru Východoslovenského kraje pořádají i v kraji Jihočeském, Západoslovenském, v Bratislavě a jinde.

Téměř ve všech krajích se konaly též semináře pro referenty matematické olympiády. ÚV MO pořádal celostátní korespondenční seminář, o kterém píšeme podrobněji dále. V průběhu 30. ročníku MO se konala i tři soustředění celostátní. Dvě byla věnována přípravě československého družstva na mezinárodní matematickou olympiádu, první se konalo v Kladně, druhé v Bratislavě. Celostátní soustředění matematické a fyzikální olympiády se konalo na Zemplínské Šíravě. U příležitosti 30. ročníku MO vydala JČSMF brožurku Matematická olympiáda 1951—1981.

5. STUDIJNÍ LITERATURA

Úlohy matematické olympiády jsou obsaženy v letácích, které vydávají Státní pedagogické nakladatelství v Praze a Slovenské pedagogické nakladatelstvo v Bratislavě. Úlohy MO otiskují též Rozhledy matematicko-fyzikální a Matematika a fyzika ve škole. O každém ročníku MO vychází v SPN Praha ročenka, třicátou právě čtete. V edici Škola mladých matematiků (ŠMM) vydává ÚV MO v nakladatelství Mladá fronta knížky, určené hlavně našim olympionikům. Z posledních vydaných svazků uvádíme:

svazek 44 — *Bohdan Zelinka*: Matematika hrou i vážně

45 — *Antonín Vrba*: Kombinatorika

46 — *Jaroslav Šedivý*: Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách

47 — *Arnošt Niederle*: Zajímavé dvojice trojúhelníků

Brožurka B. Zelinky obdržela čestné uznání nakladatelství Mladá fronta při udílení výročních cen.

6. KONKURS ÚLOH MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

JČSMF a JSMF vyhlásily v roce 1966 konkurs na úlohy MO, který stále probíhá. Návrhy úloh se zasílají na adresu ÚV MO ve dvou exemplářích. Přijetím úlohy získává ÚV MO právo úlohu upravit a autor bere na sebe závazek, že úlohu utají.

TABULKA 1

Počty žáků soutěžících v I. kole MO

Kraj	kat. A		kat. B		kat. C		Celkem	
	S	Ú	S	Ú	S	Ú	S	Ú
Praha	79	70	70	61	117	100	266	231
Středočeský	99	72	75	59	98	81	272	212
Jihočeský	79	66	76	57	143	98	298	221
Západočeský	63	48	37	28	106	70	206	146
Severočeský	64	47	70	61	128	90	262	198
Východočeský	76	64	75	58	111	74	262	196
Jihomoravský	126	109	104	85	181	159	411	353
Severomoravský	75	70	86	81	165	156	326	307
Bratislava	80	70	75	67	125	94	280	231
Západoslovenský	130	108	114	98	210	137	454	343
Středoslovenský	92	81	74	69	191	160	357	310
Východoslovenský	149	117	164	131	375	315	688	563
ČSR celkem	661	546	593	490	1049	828	2303	1864
SSR celkem	451	376	427	365	901	706	1779	1447
ČSSR celkem	1112	922	1020	855	1950	1534	4082	3311

S počet všech soutěžících Ú počet úspěšných řešitelů

TABULKA 2

Počty soutěží v II. kole MO

Kraj	kat. A		kat. B		kat. C		Celkem	
	S	Ú	S	Ú	S	Ú	S	Ú
Praha	61	24	56	15	83	15	200	54
Středočeský	64	1	55	3	77	6	196	10
Jihočeský	59	1	48	5	95	1	202	7
Západočeský	44	10	25	2	65	7	134	19
Severočeský	44	4	49	5	76	11	169	20
Východočeský	57	13	50	11	62	7	169	31
Jihomoravský	93	4	76	6	105	10	274	20
Severomoravský	70	8	80	6	144	13	294	27
Bratislava	67	16	65	19	91	14	223	49
Západoslovenský	104	12	98	11	137	5	339	28
Středoslovenský	78	7	65	11	158	11	301	29
Východoslovenský	72	14	75	7	315	15	462	36
ČSR celkem	492	65	439	53	707	70	1638	188
SSR celkem	321	49	303	48	701	45	1325	142
ČSSR celkem	813	114	742	101	1408	115	2963	330

TABULKA 3

Počty účastníků III. kola MO kat. A

Kraj	Počet všech účastníků	Počet úspěšných	Z toho vítězů
Praha	16	12	10
Středočeský	1	0	0
Jihočeský	1	1	0
Západočeský	8	1	0
Severočeský	4	0	0
Východočeský	9	3	1
Jihomoravský	2	0	0
Severomoravský	5	1	0
Bratislava	12	3	1
Západoslovenský	7	1	0
Středoslovenský	4	1	1
Východoslovenský	11	8	2
ČSR celkem	46	18	11
SSR celkem	34	13	4
ČSSR celkem	80	31	15

TABULKA 4

Počty základních škol, které se zúčastnily MO (kat. Z)

Kraj	Celkový počet v kraji	I. kola		Zúčastnilo se		III. kola	
		počet	%	II. kola počet	%	počet	%
Praha	200	175	87	140	70	27	13
Středočeský	214	184	86	169	79	30	14
Jihočeský	185	139	75	127	71	29	16
Západočeský	234	175	75	140	60	28	12
Severočeský	279	187	67	149	53	30	11
Východočeský	307	213	69	175	57	36	12
Jihomoravský	466	289	62	274	58	42	9
Severomoravský	338	289	89	246	71	52	15
Bratislava	74	52	70	52	70	22	30
Západoslovenský	468	342	73	325	71	40	8
Středoslovenský	407	285	70	256	63	20	5
Východoslovenský	382	273	71	259	68	39	10
ČSR celkem	2223	1651	74	1420	64	274	12
SSR celkem	1331	952	72	892	67	121	9
ČSSR celkem	3554	2603	73	2312	65	395	11

TABULKA 5

Počty žáků soutěžících v I. – III. kole kat. Z

Kraj	I. kolo		II. kolo		III. kolo	
	S	Ú	S	Ú	S	Ú
Praha	1 046	865	615	359	36	19
Středočeský	1 174	704	527	284	35	9
Jihočeský	1 094	682	448	201	39	5
Západočeský	1 432	691	388	162	27	12
Severočeský	1 379	610	443	224	39	16
Východočeský	1 393	775	553	316	42	18
Jihomoravský	2 002	1 343	1 015	450	52	26
Severomoravský	1 788	1 013	720	352	58	17
Bratislava	1 520	987	970	137	40	10
Západoslovenský	2 137	1 375	1 083	504	40	25
Středoslovenský	1 748	809	767	283	30	11
Východoslovenský	1 711	1 011	817	391	60	10
ČSR celkem	11 308	6 683	4 709	2 348	328	122
SSR celkem	7 116	4 182	3 637	1 315	170	56
ČSSR celkem	18 424	10 865	8 346	3 663	498	178

TABULKA 6

Počet středních škol zapojených v 30. ročníku MO

Kraj	Gymnázia			
	Celkový počet v kraji	Z toho zapojeno		
		v kategorii		
		A	B	C
Praha	20	13	14	16
Středočeský	23	17	17	16
Jihočeský	18	10	12	14
Západočeský	14	11	8	12
Severočeský	21	16	18	18
Východočeský	35	18	15	18
Jihomoravský	38	23	26	32
Severomoravský	43	14	19	30
Bratislava	8	7	6	6
Západoslovenský	38	24	27	31
Středoslovenský	37	21	19	27
Východoslovenský	63	24	24	33
ČSR celkem	212	122	129	156
SSR celkem	146	76	76	97
ČSSR celkem	358	198	205	253

alespoň v jedné kategorii	Ostatní střední školy			
	zapojeno v kategorii			alespoň v jedné kategorii
	A	B	C	
18	4	2	1	6
21	2	4	7	10
14	4	2	4	4
12	1	2	6	6
19	2	3	11	12
28	2	3	4	6
32	2	2	5	5
39	3	3	7	10
7	—	—	1	1
34	4	6	10	11
29	1	2	11	11
34	3	11	24	29
183	20	21	45	59
104	8	19	46	52
287	28	40	91	111

VÝSLEDKY III. KOLA KATEGORIE A

30. ROČNÍKU MO

Uvádíme jméno a příjmení, ročník a zaměření gymnázia.

Vítězové

1. *Jiří Sgall*, 2., M, Praha 2, W. Piecka
- 2.—3. *Petr Couf*, 3., M, Praha 2, W. Piecka
Igor Kříž, 2., M, Praha 2, W. Piecka
4. *Jan Nekovář*, 4., M, Praha 2, W. Piecka
5. *Miroslav Engliš*, 3., M, Praha 2, W. Piecka
6. *Jiří Matoušek*, 4., MF, Praha 10, Voděradská
- 7.—8. *Jozef Bednárik*, 4., M, Bratislava, Červenej armády
Bořivoj Tydlitát, 4., M, Praha 2, W. Piecka
9. *Pavel Jůza*, 3., M, Praha 2, W. Piecka
10. *Ladislav Pecen*, 4., P, Havlíčkův Brod
- 11.—12. *Vladimír Lieberzeit*, 3., M, Praha 2, W. Piecka
Ondrej Virdzek, 4., P, Žilina, Velká Okružná
- 13.—15. *Peter Spišiak*, 3., Košice, Šmeralova
Vladimír Hudec, 4., Košice, Šmeralova
Martina Šimůnková, 4., Praha 2, W. Piecka

Ostatní úspěšní řešitelé

- 16.—17. *Vladimír Dančák*, 2., Košice, Šmeralova
František Marko, 4., M, Bratislava, Červenej armády

- 18.—21. *Galina Kumičáková*, 3., Košice, Kováčská
Jan Němec, 4., P, Praha 7, Nad štolou
Martin Štěpánek, 2., P, Jaroměř
Peter Tarina, 3., P, Topoľčany
- 22.—24. *Bohumil Čider*, 4., MF, Bratislava, Novohradská
Libor Forst, 4., P, České Budějovice, Jírovцова
Lubomír Šoltés, 3., Michalovce
- 25.—31. *Martin Dubrovský*, 4., MF, G J. K. Tyla, Hradec
Králové
Robert Krajča, 3., M, Bílovec
Jozef Kunca, 4., Bardejov
Petr Laciga, 4., MF, G J. Fučíka, Plzeň
Milan Schürger, 4., Košice, Šmeralova
Anton Sedlák, 3., Prešov, Konštantínova
Martin Trusina, 3., M, Praha 2, W. Piecka

SEZNAMY NEJÚSPĚŠNĚJŠÍCH ŘEŠITELŮ

II. KOLA KATEGORIÍ A, B, C

Uvádíme jméno a příjmení, ročník a zaměření (jen u gymnázií), školu a místo. Není-li uvedena škola, rozumí se gymnázium. Z každého kraje a každé kategorie je uvedeno nejvýše deset řešitelů v pořadí, v jakém se umístili.

M matematické zaměření

MF matematicko-fyzikální zaměření

P přírodovědné zaměření

Praha

Kategorie A

Igor Kříž, 2., Jan Nekovář, 4., Jiří Sgall, 2., Miroslav Engliš, 3., Roman Kamarýt, 4., Martin Trusina, 3., Petr Couf, 3., všichni M, G W. Piecka, Praha 2; Jan Němec, 4., P, Praha 7, Nad štolou; Jiří Matoušek, 4., MF, Praha 10, Voděradská

Kategorie B

Igor Kříž, Jiří Sgall, Michal Vojtek, Jitka Veselá, všichni 2., M, G W. Piecka, Praha 2; Martin Reysser, 2., MF, Praha 10, Voděradská; Jiří Sušický, Petr Nováček, oba 2., M, G W. Piecka, Praha 2; Jan Tatoušek, 2., MF, Praha 10, Voděradská

*Kategorie C**

Blanka Marková, Tomáš Vaníček, oba 1., M, G W. Piecka, Praha 2; *Jiří Witzany*, 1., P, Praha 6, Arabská; *Pavel Šimáček*, 1., M, G W. Piecka, Praha 2; *Petr Pokorný*, 1., P, Praha 6, Parlérova; *Michal Brajer*, 1., P, Praha 4, Budějovická; *Martin Janoušek*, 1., MF, Praha 10, Voděradská; *Jiří Janů*, 1., P, Praha 1, Štěpánská; *Petr Marusič*, 1., P, Praha 3, Sladkovského nám., *Daniel Konopáč*, 1., P, Praha 4, Budějovická

Středočeský kraj

Kategorie A

Bohumil Bednář, 3., SPŠ Mladá Boleslav

Kategorie B

Petr Zavadil, 2., P, Říčany; *Vladimír Ladma*, 2., SPŠS Mělník; *Jan Gregor*, 2., P, Vlašim

Kategorie C

Tomáš Vaněk, 1., SPŠ stroj. Čáslav; *Zdenka Němcová*, 1., SPŠ stroj. Kladno; *Petr Kolář*, 1., P, Mladá Boleslav; *Josef Hanzal*, 1., P, Kutná Hora; *Oldřich Nedvěd*, 1., P, Mladá Boleslav; *Josef Novák*, 1., SPŠ Kutná Hora

Jihočeský kraj

Kategorie A

Libor Forst, 4., P, Č. Budějovice, Jírovcova

Kategorie B

Ivana Šabatová, 2., P, G K. Šátala, České Budějovice; *Stanislav Waldauf*, 2., MF, G K. Šátala, České Budějovice; *Petr Demal*, 2., P, Týn nad Vltavou; *Šárka Hořejšová*, 2., P, Tábor; *Fatima Cvrčková*, 2., P, Strakonice

Kategorie C

Tomáš Drtina, 1., P, České Budějovice, Jírovcova

Západočeský kraj

Kategorie A

Petr Laciga a *Vít Novák*, oba 4., MF, G J. Fučíka, Plzeň; *Jan Burle*, 4., P, Karlovy Vary; *Ivan Pyšek*, 4., P, Plzeň, ul. Pionýrů; *Jan Jůza*, 3., MF, G J. Fučíka, Plzeň; *Marek Vančata*, 3., MF, Karlovy Vary; *Božena Šmrhová*, 3., MF, G J. Fučíka, Plzeň; *Pavel Pešek*, 4., SPŠE Plzeň; *Jaromír Vetengl*, 4., MF, a *Petr Mýtina*, 3., MF, oba G J. Fučíka, Plzeň

Kategorie B

Stanislav Jelen, 2., MF, Karlovy Vary; *Tomáš Holeček*, 2., MF, G J. Fučíka, Plzeň

Kategorie C

Eugen Scheinherr, 1., P, Sušice; *Marek Uhlíř*, 1., P, Plzeň, ul. Pionýrů; *Petr Bejlek*, 1., MF, G J. Fučíka, Plzeň; *Mikuláš Gangur*, 1., P, Cheb; *Petr Stupka*, 1., P, Rokycany; *Pavel Hajn a Radek Machačka*, oba 1., MF, G J. Fučíka, Plzeň

Severočeský kraj

Kategorie A

Jaroslav Šindelář, 3., P, Teplice; *Eduard Rindt*, 4., P, Liberec; *Petr Opočenský*, 4., P, Frýdlant v Č.; *Milan Kolář*, 3., SPŠ Liberec

Kategorie B

Jaroslav Novák, 2., P, Liberec; *Ivan Kyselý*, 2., Chomutov; *Radek Mojdl*, 2., P, Most; *Luboš Talácko*, 2., Louny; *Pavel Vítovec*, 2., P, Litvínov

Kategorie C

Petr Jaklin, 1., Ústí nad Labem; *Vladimír Smutný*, 1., MF, Liberec; *Petr Rychlý*, 1., SPŠE Chomutov; *Michal Holý*,

1., Jablonec; *Michal Holoubek*, 1., Děčín; *Dalibor Lošťák*
a *Pavel Kuba*, oba 1., MF, Teplice

Východočeský kraj

Kategorie A

Ladislav Pecen, 4., P, Havlíčkův Brod; *Martin Štěpánek*,
2., P, Jaroměř; *Vít Trnka*, 4., P, Pardubice; *Radek Burda*, 3.,
Martin Dubrovský, 4., *Karel Majer*, 3., *Jaroslav Vodička*,
4., všichni MF, G J. K. Tyla, Hradec Králové; *Petr Eisler*,
3., P, Havlíčkův Brod; *Richard Havlík*, 4., P, Hořice

Kategorie B

Martin Štěpánek, 2., P, Jaroměř; *Jiří Votínský*, 2., MF Pardu-
bice; *Jiří Hofman*, 2., P, Hořice; *Milan Kašpar*, 2., SPŠ
stroj., Chrudim; *Aleš Kratochvíl*, 2., P, Hořice; *Jaroslav*
Rubín, 2., P, Jičín; *František Vencl*, 2., P, Česká Třebová;
Ivo Koreň, 2., MF, G J. K. Tyla, Hradec Králové; *Jaromír*
Krys, 2., P, Chrudim; *Magda Pražanová*, 2., P, Polička

Kategorie C

Tomáš Pecina, 1., P, Turnov; *Oto Stefan*, 1., P, G J. K. Tyla,
Hradec Králové; *Zbyněk Linhart*, *Petr Prachař*, oba 1., P,
Pardubice; *Josef Hynek*, 1., SPŠ elektr. Pardubice; *Vlastimil*
Ježek a *Miloslav Koudelka*, oba 1., P, Jilemnice

Jihomoravský kraj

Kategorie A

Libor Škavrada, 4., Brno, Koněvova; *Jan Paseka*, 4., Brno, Slovanské nám.; *Jiří Skřivánek*, 4., Jihlava; *Petr Sojka*, 4., Brno, Koněvova

Kategorie B

Tomáš Werner, 2., Brno, kpt. Jaroše; *Jaroslav Smejkal*, 2., Velké Meziříčí; *Darína Neumannová*, 2., Brno, Slovanské nám.; *Jaroslav Štefánek*, 2., Strážnice; *Ivana Hofmannová*, 2., Žďár n. S.; *Jan Chrastina*, 2., Brno, Koněvova

Kategorie C

Tomáš Drtílek, 1., Brno, Koněvova; *Pavel Zemčík*, 1., SPŠ el. Brno, Leninova; *Olga Ženíšková*, 1., Brno, Koněvova; *Michal Beneš*, 1., Jihlava; *Svatopluk Švarc*, 1., Brno, kpt. Jaroše; *Jan Tomčík*, 1., Brno, Koněvova; *Zdeněk Kovář*, 1., Brno, Slovanské nám.; *Miriam Fendrychová*, 1., Brno, Koněvova; *Dan Moltaš*, 1., Blansko; *Ivana Visíngrová*, 1., SPŠ st. Brno, Kudelova

Severomoravský kraj

Kategorie A

Miroslav Havelka, 3., Nový Jičín, *Libor Pleva*, 3., Bílovec; *Miroslav Czerník*, 4., SPŠE Frenštát pod Radh.; *Miroslav*

Chmelař, 4. a Robert Krajča, 3., oba Bílovec; Miroslav Beneš, 3., Ostrava-Poruba; Pavel Hruška, 4., Bílovec; Radek Zicháček, 3., Valašské Meziříčí

Kategorie B

Vladan Pecha, Bronislav Suchý a Petr Střelec, všichni 2., Bílovec; Karel Minařík, 2., Hranice na Moravě; Cyril Chrásdecký, 2., Vsetín; Rostislav Škrabana, 2., Bílovec

Kategorie C

Ivo Čermák, Martin Grajcar, Pavel Kráčmar a Miroslav Polášek, všichni 1., Bílovec; Jiří Teichmann, 1., Olomouc-Hejčín; Zita Močkořová, 1., Třinec; Miroslav Ryška, 1., Frýdek-Místek; Eliška Florianová, 1., Karviná

Bratislava

Kategorie A

Jozef Bednárik, 4., M, Červenej armády; Tomáš Blažek, 4., P, Tomašikova; Bohumil Čider, 4., MF, Novohradská; František Marko, 4., M, Červenej armády; Tatiana Murínová, 4., P, Vazovova; Daniela Balážová a Pavol Krakovský, oba 4., Červenej armády; Richard Hlubina, 3., P, Vazovova; Roman Lietava, 4., P, Tomašikova

Kategorie B

Ľuraj Dúbrava, 2., M, Červenej armády; Richard Pulman, 2., MF, Novohradská; Marián Blecha, Xaver Gubáš a Roman

Bačík, všetci 2., M, Červenej armády; *Peter Borovanský* a *Viktor Martišovits*, oba 2., MF, Novohradská; *Marcela Foltínová* a *Monika Bömová*, obě 2., M, Červenej armády

Kategorie C

Matej Lexa a *Ivan Ježík*, oba 1., M, Červenej armády; *Monika Khandlová*, *Martin Hanula*, *Michal Hejný* a *Anna Lövová*, všetci 1., MF, Novohradská; *Jaromír Kudeláš*, *Andrej Hoos* a *Ondrej Pastva*, všetci 1., M, Červenej armády; *Martina Barnášová*, 1., MF, Novohradská

Západoslovenský kraj

Kategorie A

Aba Teleki, 3., P, G E. Gudernu, Nitra; *Yveta Danešová*, 4., SPŠE Piešťany; *Ladislav Zsilinszký*, 4., P, Nové Zámky; *Vojtech Liszkay*, 4., SPŠS Komárno; *Arpád Bartalos*, 4., P, G maď. Čalovo; *Peter Tarina*, 3., P, Topoľčany; *Dušan Jurčák*, 4., P, Trenčín; *Juraj Pápay*, 3., P, G maď. Galanta; *Jozef Bukor* a *Alexander Tomášek*, oba 3., SPŠS Komárno

Kategorie B

Marián Bartek, 2., P, Sereď; *Dušan Mocko*, 2., P, Nové Mesto nad Váhom; *Daniel Ševčovič* a *Peter Ridzoň*, oba 2., P, Trenčín; *Jozef Roháč*, 2., P, G E. Gudernu, Nitra; *Mircz Hyacint*, 2., P, G maď. Galanta; *Roman Kotiers*, 2., P, G maď. Šamorín; *Tibor Lovász* a *Alžbeta Szalayová*, oba 2., P, G maď. Komárno; *Róbert Jursa*, 2., P, Topoľčany

Kategorie C

Tibor Lacza, 1., P, Nové Zámky; *Anna Valkóová*, 1., P, Levice; *Brigita Königsteinová* a *Marian Mráz*, oba 1., P, Malacky; *Ján Dugáček*, 1., SPŠ el. Stará Turá

Stredoslovenský kraj

Kategorie A

Pavol Hronský, 4., P, Žilina, Wolkerova; *Anton Lacko*, 4., P, Handlová; *Ondrej Virdzek*, 4., P, Žilina, Veľká Okružná; *Florián Petényi*, 4., P, Banská Štiavnica; *Eduard Grešák*, 4., P, Kysucké Nové Mesto; *Roman Martoňák*, 3., MF, Žilina; Wolkerova; *Milan Rusko*, 3., P, Banská Bystrica, SPN

Kategorie B

Ludmila Moravčíková, 2., MF, Žilina, Wolkerova; *Milan Kratka*, 2., P, Prievidza; *Rudolf Blaško*, 2., P, Žilina, Wolkerova; *Sinjar Al-Hadi* a *Tibor Beláň*, oba 2., P, Prievidza; *Martin Gažo*, 2., MF, Martin; *Miroslav Haviar*, 2., MF, Banská Bystrica, Tajovského ul.; *Štefan Klein*, 2., MF, Zvolen; *Jozef Mihál*, 2., P, Žilina, Wolkerova

Kategorie C

Ľuboš Knapec, *Roman Kučera*, *Stanislav Švorčík* a *Roman Gajdošech*, všichni 1., M, Žilina, Veľká Okružná; *Igor Molčák*, 1., P, Žiar n. H.; *Dušan Pospíšil*, 1., P, Považská Bystrica;

Mária Móricová, 1., P, Vrútky; *Tatiana Cimráková*, 1., M, Žilina, Veľká Okružná

Východoslovenský kraj

Kategorie A

Vladimír Hudec, 4., Košice, Šmeralova; *Jozef Pala*, 4., Bardejov; *Lubomír Šoltés*, 3., Michalovce; *Vladimír Dančík*, 2., Košice, Šmeralova; *Milan Polaczyk*, 3., Kežmarok; *Anton Sedlák*, 3., Prešov, Konštantínova; *Peter Spišiak*, 3., Košice, Šmeralova; *Jozef Kunca*, 4., Bardejov; *Ján Hric*, 3., Prešov, Konštantínova; *Galina Kumičáková*, 3., Košice, Kováčská

Kategorie B

Vladimír Dančík a *Marek Hatala*, oba 2., Košice; Šmeralova; *Oto Smolárik*, 2., Košice, Kováčská; *Marián Ferenc*, 2., Prešov, Konštantínova; *Jaroslav Vernarský*, 2., Prešov, T. Ševčenka; *Peter Karailiev*, 2., Michalovce; *Peter Rudnay*, 2., SPŠE Michalovce

Kategorie C

Dušan Čupka, 1., Poprad; *František Bobenič*, 1., Košice, Šmeralova; *Ignác Tereščák*, 1., Michalovce; *Luboš Brejčák*, 1., Poprad; *Ondrej Ploščica*, 1., Stará Ľubovňa; *Miroslav Krotký*, 1., Spišská Nová Ves; *Mária Petrášková*, 1., Kežmarok; *Karol Kováč*, 1., Košice, Šmeralova; *Luboš Krupa*, 1., Humenné; *Ľubica Rusnáková*, 1., Košice, Opatovská

PŘÍPRAVNÉ ÚLOHY I. KOLA

Z - P - 1

Určete nejmenší přirozené číslo, jehož 1979násobek končí čtyřčíslím 1980.

Řešení: Představme si, že jsme hledané číslo písemně vynásobili číslem 1979. Celý zápis by vypadal takto

$$\begin{array}{r}
 \dots dcba \\
 \times 1979 \\
 \hline
 \dots srqp \\
 \dots wvu \\
 \dots yx \\
 \dots z \\
 \hline
 \dots 1980,
 \end{array}$$

kde jsme tečkami a písmeny označili zatím neznámé číslice (neznáme vlastně ani počet číslic hledaného čísla). Postupně vidíme, že $p = 0$, a tedy $a = 0$. Pak je však též $u = x = z = 0$ a tudíž $q = 8$. To však platí pouze v případě $b = 2$ a důsledkem toho je $v = 4$, $y = 8$. Musí proto být $r = 5$, a tedy číslo $9c$

musí končit číslicí 4, je proto $c = 6$. Pak je $w = 3$ a číslo $9d$ musí končit číslicí 5, tedy $d = 5$. Obráceně se snadno přesvědčíme, že vynásobením každého čísla končícího čtyřčíslím 5620 dostaneme číslo končící čtyřčíslím 1980. Hledané číslo je proto 5620.

Z - P - 2

Ke každé hraně krychle je připsáno přirozené číslo tak, že součet tří čísel připsaných hranám vycházejícím z jednoho vrcholu krychle je pro všechny vrcholy stejný, rovná se S .

a) Jaký vztah platí mezi S a součtem všech dvanácti čísel, připsaných k hranám krychle?

b) Je možno hrany krychle očíslovat čísly 1, 2, ..., 12 tak, že součet tří čísel, kterými jsou očíslovány hrany krychle vycházející z téhož vrcholu, je pro všechny vrcholy stejný?

Řešení: Krychle má 12 hran, 8 vrcholů, na každé hraně leží právě dva vrcholy, z každého vrcholu vycházejí tři hrany. Sečteme-li čísla připsaná třem hranám vycházejícím z téhož vrcholu krychle, dostaneme osm čísel, jejichž součet dává dvojnásobek součtu T všech dvanácti čísel připsaných k hranám krychle. Podle podmínky úlohy je tedy $8S = 2T$, tj. $4S = T$, tím je vyřešena část a). Protože $1 + 2 + \dots + 12 = 78$ a toto číslo není dělitelné čtyřmi, nemůže se rovnat číslu $4S$ pro žádné přirozené číslo S , a proto je odpověď na otázku b) záporná. Hrany krychle nelze očíslovat čísly 1, 2, ..., 12 tak, aby součet tří čísel, kterými jsou očíslovány hrany krychle vycházející z téhož vrcholu, byl pro všech osm vrcholů krychle stejný.

Dvě dvojmístná přirozená čísla, která mají na místě desítek stejné cifry a na místě jednotek cifry doplňující se do deseti (například 87, 83), se mohou násobit tak, že číslo na místě desítek znásobíme číslem zvětšeným o jednu a k tomuto součinu přičteme dvojciferný součin jednotek ($8(8 + 1) = 72$, $7 \cdot 3 = 21$, $87 \cdot 83 = 7221$). Odůvodněte tento postup.

Řešení: Nechť jedno z čísel má tvar $10a + b$, druhé $10a + c$, kde a je společná číslice na místě desítek, b, c jsou číslice na místě jednotek, přičemž $b + c = 10$. Pak je

$$\begin{aligned}(10a + b)(10a + c) &= 100a^2 + 10a(b + c) + bc = \\ &= 100(a^2 + a) + bc = 100a(a + 1) + bc.\end{aligned}$$

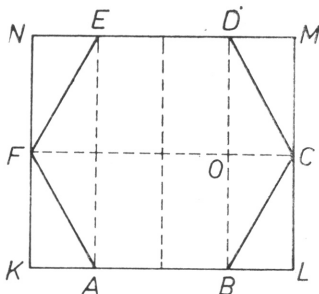
Tento výsledek již ukazuje, že čísla můžeme vynásobit způsobem popsaným v úloze.

Z - P - 4

Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Sestrojte pravoúhelník $KLMN$ tak, že úsečka AB je částí úsečky KL , úsečka ED je částí úsečky MN a body C, F leží po řadě uvnitř úseček LM a KN . Vypočítejte poměr obsahů pravoúhelníku $KLMN$ a daného šestiúhelníku.

Řešení: Pravoúhelník $KLMN$ se sestrojí snadno, stačí vést body C, F kolmice ke straně AB . Tyto kolmice spolu s přímkami AB, ED určují obdélník $KLMN$ (obr. 1). Označme ještě O patu kolmice vedené bodem D na přímkou FC . Šestiúhelník $ABCDEF$ se skládá z dvanácti nepřekrývajících se trojúhelníků shodných s trojúhelníkem DOC , obdélník $KLMN$ se skládá

z 16 nepřekrývajících se trojúhelníků shodných s trojúhelníkem DOC . Hledaný poměr je proto $16 : 12 = 4 : 3$.



Obr. 1

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY I. KOLA

Z - I - 1

Určete všechna trojciferná čísla, jejichž 576násobek končí trojčíslím 576.

Řešení: Dekadický zápis hledaného čísla označíme pqr (p je číslice na místě stovek, q na místě desítek a r počet jednotek). Má tedy platit

$$\begin{array}{r}
 pqr \\
 \times 576 \\
 \hline
 .xyz \\
 .uv \\
 .w \\
 \hline
 .576
 \end{array}$$

Musí proto být $z = 6$, a tudíž $r = 1$ nebo $r = 6$. Je-li $r = 1$, je $v = 7$, $y = 0$, a tudíž $q = 0$ nebo 5 . Je-li $q = 0$, musí být $p = 5$. V případě $q = 5$ je $p = 2$ nebo 7 . Podobně postupujeme pro $r = 6$. Zkouškou se přesvědčíme, že obdržená čísla 501, 251, 751, 126, 626, 376, 876 vyhovují podmínce úlohy.

Z - 1 - 2

Dokažte, že hrany pravidelného trojbokého jehlanu se nedají očíslovat čísly 1, 2, 3, 4, 5, a 6 tak, aby součet tří čísel, kterými jsou očíslovány hrany jedné stěny, byl pro všechny čtyři stěny stejný (mezi stěny počítáme též podstavu).

Řešení: Předpokládejme, že by bylo možno hrany pravidelného trojbokého jehlanu očíslovat čísly 1, 2, ..., 6 tak, aby součet S tří čísel, kterými jsou očíslovány hrany jedné stěny byl pro všechny čtyři stěny stejný. Protože každá hrana leží právě ve dvou stěnách a stěny jsou čtyři, platilo by $4S = 2(1 + 2 + \dots + 6) = 42$. Protože číslo 42 není dělitelné čtyřmi, dospěli jsme ke sporu a náš předpoklad proto nebyl správný.

Z - 1 - 3

Mějme dvojciferné číslo X . Číslo Y vznikne z čísla X přehozením cifer. Najděte všechna čísla X , pro která je $X - Y$ druhou mocninou přirozeného čísla.

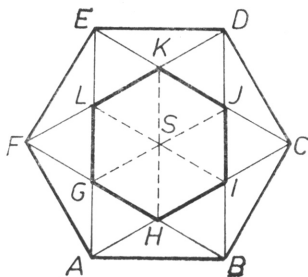
Řešení: Položme $X = 10a + b$, kde a je číslice na místě desítek, b číslice na místě jednotek dvojciferného čísla X . Pak je $Y = 10b + a$, $X - Y = 10(a - b) + b - a = 9(a - b)$. Toto číslo bude druhou mocninou přirozeného čísla právě

tehdy, bude-li mít tuto vlastnost číslo $a - b$. Protože $1 \leq a \leq 9$, může to nastat pouze v případech $a - b = 1$, $a - b = 4$ nebo $a - b = 9$. Jsou tedy jedinými řešeními čísla 10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 40, 51, 62, 73, 84, 95, 90.

Z - I - 4

Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Trojúhelníky ACE a BDF se protínají opět v pravidelném šestiúhelníku. Dokažte, že jeho obsah se rovná třetině obsahu šestiúhelníku $ABCDEF$.

Řešení: Průnikem trojúhelníků ACE , BDF je pravidelný šestiúhelník, jehož vrcholy označíme G, H, I, J, K, L (obr. 2).



Obr. 2

Společný střed obou šestiúhelníků označme S . Označme $|SA| = a$, $|SH| = b$. Z kosodélíku $SGAH$ vidíme, že a je dvojnásobek výšky v rovnostranném trojúhelníku SGH o straně b , tedy $a = b\sqrt{3}$, a proto je obsah šestiúhelníku $ABCDEF$ třikrát větší než obsah šestiúhelníku $GHIJKL$. Jiný důkaz

spočívá v tom, že obsahy trojúhelníků EKD , KJD , JCD jsou stejné (mají stejně velké základny $|EK|$, $|KJ|$ a $|JC|$ a k nim společnou výšku). Šestiúhelník $ABCDEF$ se tak rozloží na 18 a šestiúhelník $GHIJKL$ na 6 nepřekrývajících se trojúhelníků, jejichž obsah je shodný s obsahem trojúhelníku KJD .

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY II. KOLA

Z - II - 1

Určete všechna trojčíferná čísla, která po vynásobení číslem 36 končí trojčíslím 324.

Řešení: Označme pqr dekadický zápis hledaného čísla, má tedy platit

$$\begin{array}{r} pqr \\ \times 36 \\ \hline \dots \\ \dots \\ \hline \dots 324 \end{array}$$

Vidíme, že nutně platí $r = 4$ nebo $r = 9$. Je-li $r = 4$, je $q = 3$ nebo $q = 8$. V žádném z těchto případů však nedostaneme vhodné číslo p . Pro $r = 9$ je $q = 0$ nebo $q = 5$. Je-li $r = 9$, $q = 0$, dostaneme $p = 5$, v případě $r = 9$, $q = 5$ dostaneme dvě řešení: $p = 2$, $p = 7$. Zkouškou se přesvědčíme, že čísla 259, 509, 759 jsou řešením.

Z - II - 2

Rozhodněte, zda lze stěny krychle očíslovat čísly 1, 2, ..., 6 tak, aby součet tří čísel, kterými jsou očíslovány stěny se společným vrcholem, byl pro všechny vrcholy stejný. Odůvodněte svou odpověď.

Řešení: Předpokládejme, že jsme krychli požadovaným způsobem očíslovali. Součet tří čísel, kterými jsou očíslovány stěny se společným vrcholem, označíme S (je pro všechny vrcholy týž). Každá stěna obsahuje 4 vrcholy, proto $8S = 4(1 + 2 + \dots + 6) = 84$. Protože však číslo 84 není dělitelné osmi, dospěli jsme ke sporu.

Z - II - 3

X je dvojciferné číslo a číslo Y z něho vznikne změnou pořadí číslic. Najděte všechna X , pro která je $X + Y$ druhou mocninou přirozeného čísla.

Řešení: Podobně jako v úloze Z-I-3 položme $X = 10a + b$, $Y = 10b + a$, $X + Y = 11(a + b)$. Aby bylo toto číslo druhou mocninou přirozeného čísla, musí být nutně $a + b$ násobkem čísla 11. Protože je $a + b \leq 18$, může to nastat pouze v případě $a + b = 11$, kdy je $X + Y = 11^2$. Řešením úlohy jsou tudíž čísla 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

Z - II - 4

Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Na jeho straně AB leží bod A_1 , na straně BC bod B_1 , ..., na straně FA bod

F_1 tak, že $|AA_1| = |BB_1| = \dots = |FF_1| = \frac{1}{3} |AB|$. Vypočítejte poměr obsahů šestiúhelníků $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, $ABCDEF$.

Řešení: Je-li S společný střed obou šestiúhelníků a P střed strany AB , je $|AS| = |AB|$, $|A_1S| = |A_1B_1| =$

$$= \sqrt{|A_1P|^2 + |PS|^2} = \sqrt{\frac{|AB|^2}{36} + |AB|^2 - \frac{|AB|^2}{4}} =$$

$$= |AB| \sqrt{\frac{7}{9}}. \text{ Hledaný poměr je tudíž } 7 : 9.$$

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY III. KOLA - ČSR (ÚLOHY PŘIPRAVIL KV MO KRAJE ZÁPADOČESKÉHO)

Z - III - 1

Kterým přirozeným číslem m ($m \geq 1$) musíme násobit číslo 16 200, abychom dostali nejmenší číslo n , které je zároveň druhou a třetí mocninou přirozeného čísla? Určete číslo n a proveďte zkoušku.

Řešení: Protože $16\,200 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2$, je $m = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4 = 45\,000$, $n = 2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^6 = 729\,000\,000$.

Z - III - 2

Označme X čtyřciferné číslo a Y čtyřciferné číslo, které vznikne z čísla X obrácením pořadí číslic. (Je-li například $X = 4265$, je $Y = 5624$). Najděte všechna taková přirozená

čísla X , pro která jsou součin $X \cdot Y$ a součet $X + Y$ dělitelné číslem 5 a rozdíl $X - Y$ je přirozené číslo dělitelné číslem 360.

Výsledek: 5405, 5515, 5625, 5735, 5845, 5955, 5805, 5915.

Z - III - 3

Pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ má stranu dané velikosti a . Průsečík přímk AB , CD je bod K . Vypočtete délku úsečky EK .

Výsledek: $|EK| = a\sqrt{7}$.

Z - III - 4

Určete velikosti vnitřních úhlů rovnoramenného trojúhelníku ABC se základnou AB , který je rozdělen přímkou procházející bodem A na dva trojúhelníky, z nichž každý je rovnoramenný.

Výsledek: Úloha má dvě řešení: $\alpha = \beta = 72^\circ$, $\gamma = 36^\circ$
a $\alpha = \beta = 77^\circ 8'$, $\gamma = 25^\circ 43'$.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY III. KOLA - SSR (ÚLOHY PŘIPRAVIL KV MO KRAJE STŘEDOSLOVENSKÉHO)

Z - III - 1

Od trojčiferného čísla odčítáme číslo, které dostaneme zámenou poradia cifier pôvodného čísla na opačné.

a) Nájďte všetky trojčiferné čísla, ktoré vyhovujú podmienke: získaný rozdiel sa rovná jednej šestine pôvodného čísla.

b) Ukážte, že neexistuje trojčiferné číslo, pre ktoré sa tento rozdiel rovná polovici pôvodného čísla.

Výsledek: 594.

Z - III - 2

Zistite, či existuje prirodzené číslo a z intervalu $\langle 1, 6 \rangle$ tak, že hrany pravidelného štvorstena sa dajú označiť číslami $a, 2, 3, 4, 5, 6$, pričom súčet označení hrán, ktoré ležia na tej istej stene, je pre všetky steny rovnaký.

Výsledok: Neexistuje.

Z - III - 3

Zistite, či existuje štvorciferné číslo, ktoré je druhou mocninou prirodzeného čísla a pritom číslo zapísané jeho prvými dvomi ciframi v danom poradí je polovicou čísla zapísaného jeho poslednými dvomi ciframi v danom poradí.

Výsledok: Neexistuje.

Z - III - 4

Je daný pravidelný šesťuholník $ABCDEF$. Na strane AB leží bod A_1 , na strane BC bod $B_1, \dots$, na strane FA leží bod F_1

tak, že $|AA_1| = |BB_1| = \dots = |FF_1| = \frac{1}{3} |AB|$. Uhlopriečky

AD, BE, CF pretínajú strany šesťuholníka $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ v bodoch $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2$, ktoré sú vrcholmi pravidelného šesťuholníka. Označme P plošný obsah šesťuholníka $ABCDEF$, P_1 plošný obsah šesťuholníka $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ a P_2 plošný obsah šesťuholníka $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$. Ukážte, že $P_1^2 = P \cdot P_2$.

PŘÍPRAVNÉ ÚLOHY I. KOLA

C - P - 1

Veslárovi trvá prejdienie istého úseku rieky na loďke proti prúdu s veslovaním a po prúde bez veslovania rovnaký čas. O koľkej sa musí otočiť, ak vyštartuje o 15. hodine, o 18. hodine má byť naspäť, a rozhodol sa veslovať aj na spätočnej ceste? (Predpokladáme, že rýchlosť prúdu rieky aj vlastná rýchlosť veslára je konštantná.)

Řešení: Označme v rychlost loďky vzhledem k vodě při veslování a r rychlost tekoucí vody vzhledem ke břehům. Vůči břehům se loďka tedy pohybuje při veslování proti proudu rychlostí $v - r$, při veslování po proudu rychlostí $v + r$ a je-li unášena proudem bez veslování, rychlostí r . Trvá-li projetí určitého úseku proti proudu s veslováním stejnou dobu jako po proudu bez veslování, jsou i příslušné rychlosti stejné, tj.

$$v - r = r.$$

Odtud dostaneme

$$v + r = 3r = 3(v - r).$$

Rychlost (vůči břehům) při veslování po proudu je tedy trojnásobná ve srovnání s rychlostí plavby proti proudu. Vesluje-li veslař proti proudu po dobu t , návrat s veslováním mu trvá $\frac{t}{3}$. V našem případě

$$t + \frac{t}{3} = 3,$$

takže

$$t = 2 \frac{1}{4}.$$

Veslař se musí obrátit nejpozději v 17.15 hod.

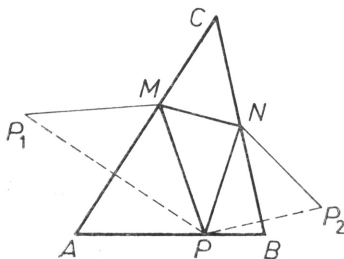
C - P - 2

Každá strana a každá úhlopříčka konvexního pětiúhelníku je obarvena jednou ze dvou barev tak, že žádný trojúhelník (tvořený stranami nebo celými úhlopříčkami pětiúhelníku) není jednobarevný. Dokažte, že z každého vrcholu pětiúhelníku vycházejí právě dvě úsečky každé barvy.

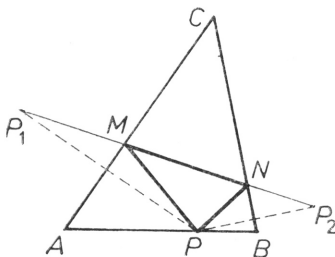
Řešení: Předpokládejme, že z některého vrcholu A vycházejí aspoň tři úsečky jedné barvy AB , AC , AD . Není-li žádný z trojúhelníků ABC , ABD , ACD jednobarevný, jsou úsečky BC , BD , CD obarveny druhou barvou, a tedy trojúhelník BCD je jednobarevný. Z žádného vrcholu tedy nevycházejí tři úsečky nebo více úseček jedné barvy. Vzhledem k tomu, že z každého vrcholu vycházejí právě čtyři úsečky, jsou dvě z nich jedné barvy a dvě druhé barvy.

V ostroúhlém trojúhelníku ABC je dán bod P uvnitř strany AB . Sestrojte bod M uvnitř strany AC a bod N uvnitř strany BC tak, aby obvod trojúhelníku PMN byl minimální.

Řešení: Uvažujme libovolný bod M uvnitř strany AC a libovolný bod N uvnitř strany BC . Je-li P_1 bod souměrně sdružený k bodu P podle přímky AC a P_2 bod souměrně



Obr. 3



Obr. 4

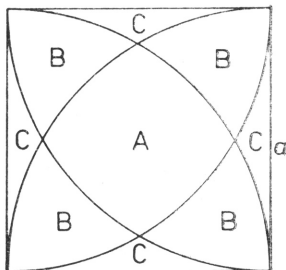
sdružený k bodu P podle přímky BC , je obvod trojúhelníku MNP roven délce lomené čáry P_1MNP_2 (obr. 3). Tato délka je nejmenší v případě, kdy body M, N jsou společné body úsečky P_1P_2 se stranami AC, BC (obr. 4) - pokud však tyto společné body existují a leží uvnitř stran. To je splněno, protože

$$\begin{aligned}\sphericalangle P_1CP_2 &= \sphericalangle P_1CP + \sphericalangle PCP_2 = 2\sphericalangle ACP + 2\sphericalangle PCB = \\ &= 2\sphericalangle ACB < 180^\circ\end{aligned}$$

(trojúhelník ABC je ostroúhlý).

C - P - 4

Je dán čtverec, jehož strana má velikost a . Z každého vrcholu jsou dovnitř čtverce opsány čtvrtkružnice s poloměrem a . Tak se čtverec rozdělí na devět částí. Vypočítejte obsahy těchto částí.



Obr. 5

Řešení: Částí, na něž se čtverec rozpadne, budou tři druhy; jejich obsahy označíme A , B , C (obr. 5). Bude platit

$$A + 4B + 4C = a^2 \quad (\text{čtverec})$$

$$A + 3B + 2C = \frac{\pi}{4} a^2 \quad (\text{čtvrtina kruhu})$$

$$A + 2B + C = \frac{\pi}{3} a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \quad (\text{sjednocení dvou kruhových výsečí se středovým úhlem } 60^\circ, \text{ jejichž průnikem je rovnost- ranný trojúhelník}).$$

Odtud plyne

$$B + 2C = a^2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$B + C = a^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right),$$

a tedy

$$C = a^2 \left(1 - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$B = a^2 \left(-1 + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$A = a^2 \left(1 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \right).$$

Jiné řešení je v ročence XIX. ročník MO, str. 118.

C - I - 1

Kocka o hrane délky 5 je zložená zo 125 jednotkových kociek. Určte najmenší a najväčší možný povrch telesa, ktoré z nej dostaneme odstránením troch hranolov pozostávajúcich z piatich jednotkových kociek, keď žiadne dva z odstránených hranolov nemajú spoločný bod ani rovnaký smer.

Řešení: Pro odstranění jednoho hranolu $5 \times 1 \times 1$ z krychle $5 \times 5 \times 5$ máme tři možnosti:

(1) Odstraněním hranolu, který obsahuje hranu krychle, zmenšíme povrch o 2.

(2) Odstraněním hranolu, jehož delší stěna je obsažena ve stěně krychle a přitom neobsahuje hranu krychle, zvětšíme povrch o 8.

(3) Odstraněním hranolu, který má s povrchem krychle společné jen dvě protější čtvercové podstavy, zvětšíme povrch o 18.

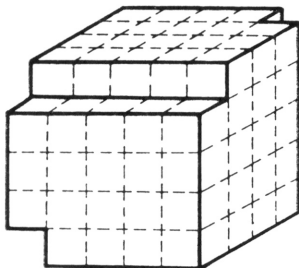
Těleso vzniklé z krychle $5 \times 5 \times 5$ odstraněním tří hranolů $5 \times 1 \times 1$, z nichž žádné dva nemají společný bod, bude mít minimální povrch v případě tří hranolů typu (1), viz obr. 6, povrch bude

$$6 \cdot 5 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 144,$$

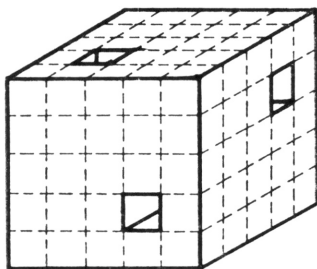
maximální v případě tří hranolů typu (3), a to

$$6 \cdot 5 \cdot 5 + 3 \cdot 18 = 204.$$

Obr. 7 ukazuje, že hranoly lze volit tak, aby žádné dva neměly společný bod ani stejný směr.



Obr. 6



Obr. 7

C - I - 2

Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré sa začínajú cifrou 7 a po jej odstránení sa zmenšia 36 krát.

Řešení: Hledané číslo můžeme rozepsat jako $7 \cdot 10^n + p$ a podmínku vyjádřit rovnicí

$$7 \cdot 10^n + p = 36 p,$$

odkud dostaneme $p = 2 \cdot 10^n - 1$. Hledané číslo má tedy tvar

$$7 \cdot 10^n + 2 \cdot 10^n - 1.$$

Snadno se přesvědčíme, že všechna čísla 72, 720, 7200, ... splňují podmínku úlohy.

C - I - 3

Dva vesláři na dvou člncích vyštartovali o 14.55 z přístaviště a veslovali proti proudu rieky. K lesu došli spolu, pak jeden vesloval späť a vrátil sa o 17.55, druhý sa nechal doviezť späť prúdom a vrátil sa o 19.07. Koľko im trvala plavba z prístavišťa k lesu? (Predpokladáme, že po celý čas rýchlosť toku rieky aj vlastná rýchlosť veslovania boli konštantné.)

Řešení: Označme v rychlost loďky vzhledem k vodě při veslování a r rychlost tekoucí vody vzhledem k břehům. Proti proudu jeli tedy oba veslaři rychlostí $v - r$, po proudu první rychlostí $v + r$, druhý rychlostí r (vzhledem ke břehům). Označme t dobu společné plavby od přístaviště k lesu a s vzdálenost lesa od přístaviště. Pak platí, měříme-li čas v minutách

$$s = (v - r) t \quad (\text{společná cesta tam})$$

$$s = (v + r) (180 - t) \quad (\text{zpáteční cesta 1. veslaře})$$

$$s = r (252 - t) \quad (\text{zpáteční cesta 2. veslaře}).$$

Z těchto vztahů určíme t . Dosadíme-li s z první rovnice do druhé a třetí rovnice, dostaneme

$$2vt = 180 (v + r)$$

$$vt = 252 r.$$

Vyloučíme z těchto rovnic r a máme

$$2vt = 180 v + \frac{180}{252} vt,$$

neboli, protože $v \neq 0$,

$$2t = 180 - \frac{180}{252} t$$

a odtud

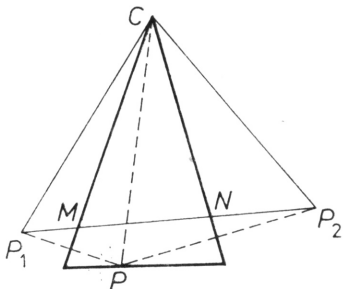
$$t = 140.$$

Cesta od přístaviště k lesu tedy trvala 140 min.

C - I - 4

Do ostroúhlého trojúhelníku ABC je vepsán trojúhelník MNP tak, že $M \in AC$, $N \in BC$, $P \in AB$. Určete polohu bodů M , N , P tak, aby obvod trojúhelníku MNP byl minimální.

Řešení: Zvolme libovolný bod P uvnitř strany AB a označme P_1 , P_2 body souměrně sdružené k bodu P podle přímk AC , BC . Uvědomme si (obr. 8), že



Obr. 8

a

$$|CP_1| = |CP_2| = |CP|$$

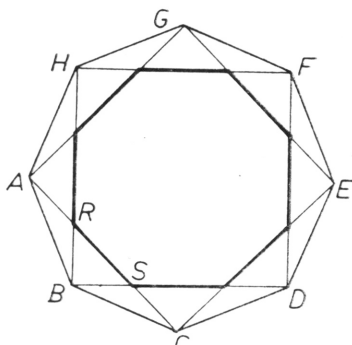
$$\begin{aligned} \sphericalangle P_1CP_2 &= \sphericalangle P_1CP + \sphericalangle PCP_2 = 2\sphericalangle ACP + 2\sphericalangle BCP = \\ &= 2\sphericalangle ABC. \end{aligned}$$

Při řešení úlohy C-P-3 jsme zjistili, že ze všech trojúhelníků MNP , kde $M \in AC$, $N \in BC$, má minimální obvod trojúhelník, jehož vrcholy M , N leží na úsečce P_1P_2 , a minimální obvod je roven $|P_1P_2|$. Zbývá tedy najít polohu bodu $P \in AB$ tak, aby rovnoramenný trojúhelník P_1CP_2 měl minimální základnu. Vzhledem k tomu, že úhel při jeho hlavním vrcholu C má velikost $2\sphericalangle ACB$ a nezávisí tedy na poloze bodu P , bude základna minimální, právě když bude minimální rameno. Rameno má velikost $|CP|$ a bude minimální, právě když úsečka PC bude výškou trojúhelníku ABC .

C - I - 5

Je dán pravidelný osmiúhelník $ABCDEFGH$. Čtverce $ACEG$ a $BDFH$ se protínají také v pravidelném osmiúhelníku. Vypočítejte poměr obsahů obou osmiúhelníků.

Řešení: (obr. 9). Využijeme podobnosti rovnoramenných trojúhelníků ABC , ARB (mají společný úhel BAR), odkud plyne, že



Obr. 9

$$|AB| : |AC| = |AR| : |AB|,$$

tj.

$$|AB|^2 = |AC| \cdot |AR|.$$

Z pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku RBS máme

$$|RS| = |AR| \sqrt{2},$$

a tedy

$$|AB|^2 = (\sqrt{2} + 2) |AR|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) |RS|^2.$$

Odtud vidíme, že poměr obsahů pravidelných osmiúhelníků

o stranách AB, RS je $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$.

V rovnostranném trojúhelníku ABC o straně délky 1 se na straně AC pohybuje bod X a na straně BC bod Y tak, že obsah trojúhelníku XYC se stále rovná polovině obsahu trojúhelníku ABC . Najděte, jakou funkcí vzdálenosti $x = |CX|$ je vzdálenost $y = |CY|$, a určete definiční obor a obor hodnot této funkce.

Řešení: Ze vzorce pro obsah trojúhelníku daného dvěma stranami a úhlem jimi sevřeným je hned vidět, že obsahy trojúhelníků XYC , ABC jsou v poměru

$$P_{XYC} : P_{ABC} = xy : 1.$$



(Jiným způsobem to můžeme odvodit také takto: Trojúhelníky XYC , XBC mají tutéž výšku na stranu YC , resp. BC , takže

$$P_{XYC} : P_{XBC} = y : 1$$

a analogicky

$$P_{XBC} : P_{ABC} = x : 1,$$

odkud dostaneme

$$P_{XYC} : P_{ABC} = xy : 1.)$$

Podle zadání je tento poměr $1 : 2$, takže pro každou dvojici

$$x, y \text{ platí } xy = \frac{1}{2}.$$

Pro každé x tedy platí

$$y = \frac{1}{2x}.$$

Definiční obor i obor hodnot této funkce je zřejmě obsažen v intervalu $(0, 1]$. Aby bylo $y \leq 1$, musí být $x \geq \frac{1}{2}$. Pro každé $x \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$ je $y \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$. Ke každému $y \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$ je příslušné $x = \frac{1}{2y} \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$. Definiční obor i obor hodnot je tedy interval $\langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY II. KOLA

C - II - 1

Voda v řece teče rychlostí 2 m/s. Cesta od přístavu k mostu a zpět trvá malému člunu 33 min a velkému člunu, který má (ve stojaté vodě) dvojnásobnou rychlost, 16 min. Jak daleko je od přístavu k mostu?

Řešení: Rychlost malého člunu označme c (m/s) a hledanou vzdálenost d (m).

Malému člunu cesta trvá

$$\frac{d}{c+2} + \frac{d}{c-2} = 33.60 \quad (1)$$

a velkému člunu

$$\frac{d}{2c+2} + \frac{d}{2c-2} = 16.60.$$

Je tedy

$$\frac{\frac{2cd}{c^2-4}}{\frac{4cd}{4c^2-4}} = \frac{33}{16},$$

neboli

$$\frac{4c^2-4}{2(c^2-4)} = \frac{33}{16}.$$

Odtud $c = 10$ m/s a z (1) dostaneme

$$d = \frac{33.60(c^2-4)}{2c} = 9904 \text{ (m)}.$$

C - II - 2

Na kružnici je dáno 6 bodů a každé dva jsou spojeny úsečkou - buď modrou, nebo červenou. Tyto úsečky přitom tvoří právě jeden červený a právě jeden modrý trojúhelník. Dokažte, že červených úseček je buď 7, nebo 8.

Řešení: Vrcholy červeného trojúhelníku označme 1, 2, 3. Trojúhelník s vrcholy ve zbývajících bodech 4, 5, 6 není červený a má tedy alespoň jednu modrou stranu. Z každého bodu 4, 5, 6 vedou alespoň dvě modré úsečky do bodů 1,

2, 3 - jinak by vznikl další červený trojúhelník. Celkem je tedy alespoň 7 modrých úseček. Analogicky zjistíme, že je aspoň 7 červených úseček. Tím jsme hotovi, protože úseček je celkem 15.

C - II - 3a

Nájdite všetky prirodzené čísla, tretia mocnina ktorých sa končí na 1981.

Řešení: Hledané číslo můžeme rozepsat

$$x = 10a + b,$$

potom

$$x^3 = 1000a^3 + 300a^2b + 30ab^2 + b^3.$$

Má-li být poslední číslice 1, musí být $b = 1$. Je tedy

$$x^3 = 1000a^3 + 300a^2 + 30a + 1.$$

Na předposlední číslici čísla x^3 má vliv jen předposlední sčítanec. Aby se tato číslice rovnala 8, musí poslední číslice čísla a být 6. Hledané číslo rozepíšeme

$$x = 100c + 61,$$

takže

$$x^3 = \dots + 3 \cdot 61^2 \cdot 100c + 61^3.$$

Číslici na místě stovek ovlivňují jen poslední dva členy a aby se rovnala 9, musí poslední číslice čísla c být 0. Můžeme tedy psát

$$x = 1000d + 61,$$

takže

$$x^3 = \dots + 3 \cdot 61^2 \cdot 1000d + 61^3.$$

Aby číslice na místě tisíců byla 1, musí poslední číslice čísla d být 5.

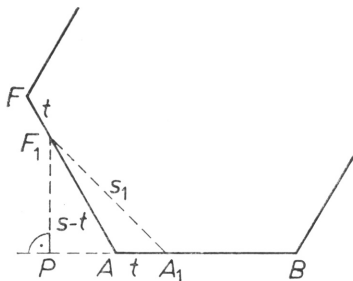
Splňuje-li nějaké číslo požadovanou podmínku, musí končit na 5061. Všechna přirozená čísla končící tímto čtyřčíslem vyhovují.

C - II - 3b

Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ o straně s . Na jeho stranách $AB, BC, \dots, FA$ leží po řadě body $A_1, B_1, \dots, F_1$ tak, že je $AA_1 = BB_1 = \dots = FF_1 = t$. Jsou to vrcholy pravidelného šestiúhelníku $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ o straně s_1 .

- a) Dokažte, že $s_1^2 = s^2 - st + t^2$.
 b) Zjistěte, pro které t je s_1 nejmenší.

Řešení: (obr. 10) a) Označme P patu kolmice z bodu F_1 na přímkou AB .



Obr. 10

Protože $\sphericalangle F_1AP = 60^\circ$, je $|AP| = \frac{s-t}{2}$. Z pravoúhlého trojúhelníku APF_1 dostáváme

$$\begin{aligned} s_1^2 &= |A_1P|^2 + |F_1P|^2 = |A_1P|^2 + |AF_1|^2 - |AP|^2 = \\ &= \left(t + \frac{s-t}{2}\right)^2 + (s-t)^2 - \left(\frac{s-t}{2}\right)^2 = t^2 + s^2 - st. \end{aligned}$$

b) Upravíme-li

$$s_1^2 = t^2 + s^2 - st = \left(t - \frac{s}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}s^2,$$

vidíme, že s_1^2 a tedy i s_1 je minimální pro $t = \frac{s}{2}$.

PRÍPRAVNÉ ÚLOHY I. KOLA

B - P - 1

Určte počet všetkých rôznych usporiadaných trojíc prirodzených čísel x, y, z , ktoré vyhovujú rovnici

$$x^1 \cdot y^{97} \cdot z^9 = 19^{791} \cdot 97^9 \quad (1)$$

Riešenie: Nech prirodzené čísla x, y, z vyhovujú rovnici (1). Pretože čísla 19 a 97 sú prvočísla, ako sa ľahko presvedčíme, musia byť čísla x, y, z súčinnmi mocnín čísel 19 a 97 s nezápornými celočíselnými exponentami. Číslo y však nemôže obsahovať ako súčiniteľ kladnú mocninu čísla 97, lebo na pravej strane rovnice (1) je mocnina 97^9 . Musia preto existovať nezáporné celé čísla a, b, k, r, s také, že platí

$$x = 19^a \cdot 97^b, \quad y = 19^k, \quad z = 19^r \cdot 97^s.$$

Po dosadení do (1) dostaneme

$$19^a \cdot 97^b \cdot 19^{97k} \cdot 19^{9r} \cdot 97^{9s} = 19^{791} \cdot 97^9.$$

K tomu, aby platila táto rovnosť, musia byť súčasne splnené tieto dve rovnice:

$$a + 97k + 9r = 791, \quad (2a)$$

$$b + 9s = 9. \quad (2b)$$

Je zrejmé, že každému nezápornému celočíselnému riešeniu sústavy rovníc (2a) a (2b) odpovedá jedno riešenie rovnice (1). Stačí nám teda zistiť počet nezáporných celočíselných riešení sústavy rovníc (2a), (2b).

Lahko sa vidí, že rovnica (2b) má dve rôzne riešenia v obore celých nezáporných čísel: $b = 0, s = 1$ a $b = 9, s = 0$.

Pretože $8 \cdot 97 = 776 < 791 < 9 \cdot 97 = 873$, môže číslo k nadobúdať len hodnoty 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Postupne tieto hodnoty dosadíme do rovnice (2a). Dostaneme:

a) Ak $k = 0$, potom $a + 9r = 791$ čiže $a = 9(87 - r) + 8$. Číslo r môže teda nadobúdať hodnoty 0, 1, ..., 87. Pre každú z týchto hodnôt existuje práve jedno celé nezáporné číslo a vyhovujúce rovnici (2a). Dostávame tak 88 riešení tejto rovnice.

b) Ak $k = 1$, potom $a + 9r = 694$, z čoho $a = 9(77 - r) + 1$. Analogickou úvahou ako v predchádzajúcom prípade dostávame 78 riešení.

c) Pre $k = 2$ bude $a + 9r = 597$, z čoho $a = 9(66 - r) + 3$. Rovnica (2a) má v tomto prípade 67 nezáporných celočíselných riešení.

d) Pre $k = 3$ je $a + 9r = 500$, z čoho $a = 9(55 - r) + 5$. Máme 56 riešení.

e) Ak $k = 4$, je $a + 9r = 403$, z čoho $a = 9(44 - r) + 7$ a dostávame 45 riešení.

f) Pre $k = 5$ je $a + 9r = 306$, z čoho $a = 9(34 - r)$. Máme 35 riešení.

g) Ak $k = 6$, je $a + 9r = 209$, z čoho $a = 9(23 - r) + 2$. Dostávame teda 24 riešení.

h) Pre $k = 7$ je $a + 9r = 112$, z čoho je $a = 9(12 - r) + 4$. To znamená ďalších 13 celočíselných nezáporných riešení rovnice (2a).

i) Konečne v prípade $k = 8$ dostaneme $a + 9r = 15$ čiže $a = 9(1 - r) + 6$. Dostávame teda dve rôzne riešenia.

Celkový počet nezáporných celočíselných riešení sústavy (2a), (2b), a teda počet prirodzených riešení rovnice (1) je $2 \cdot (88 + 78 + 67 + 56 + 45 + 35 + 24 + 13 + 2) = 816$.

B - P - 2

Pre každé prirodzené číslo n existujú navzájom rôzne prirodzené čísla r, s tak, že číslo

$$3^r - 3^s$$

je deliteľné číslom n . Dokážte.

Riešenie: Pri riešení úlohy využijeme známy Dirichletov prihradkový princíp. Uvažujme o týchto prirodzených číslach

$$3^1, 3^2, 3^3, \dots, 3^n, 3^{n+1},$$

ktorých je práve $n + 1$. Pri delení číslom n musia mať aspoň dve z nich rovnaký zvyšok, pretože možných zvyškov je práve n : $0, 1, 2, \dots, n - 1$. Nech sú to čísla $3^r, 3^s$. Platí teda $3^r = k \cdot n + z$, $3^s = m \cdot n + z$, kde k, m sú celé nezáporné čísla, z je

niektorý z možných zvyškov. Potom $3^r - 3^s = (k - m)n$ je číslo deliteľné číslom n . Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

B - P - 3

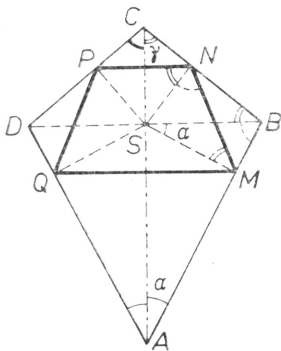
Nech $ABCD$ je deltoid (vypuklý štvoruholník súmerný práve podľa jednej zo svojich uhlopriečok) s osou súmernosti AC . Nech S je priesečník priamok AC , BD a M , N , P , Q v uvedenom poradí sú jeho kolmé priemety na priamky AB , BC , CD , DA .

a) V štvoruholníku $MNPQ$ platí $MQ \parallel NP$. Dokážte.

b) Nech $\sphericalangle BAD = 2\alpha$, $\sphericalangle BCD = 2\gamma$. Vyjadrite veľkosti uhlov štvoruholníka $MNPQ$ pomocou uhlov α , γ .

c) Rozhodnite, kedy je štvoruholník $MNPQ$ lichobežníkom a kedy rovnobežníkom.

Riešenie: a) Deltoid $ABCD$ je osove súmerný podľa osi AC . V tejto symetrii odpovedá bodu B bod D , úsečka AB úsečka



Obr. 11

AD , úsečka SM kolmej k AB úsečka SQ kolmá k AD (pozri obr. 11). Bodu M odpovedá teda bod Q , z čoho vyplýva, že $MQ \parallel BD$. Analogickou úvahou sa dokáže, že $NP \parallel BD$. Z tranzitívnosti relácie rovnobežnosti preto priamo vyplýva, že $MQ \parallel NP$, ako sme mali dokázať.

b) Trojuholníky SMB a SNB sú pravouhlé so spoločnou preponou SB . Štvoruholníku $SMBN$ môžeme preto opísať thaletovskú kružnicu s priemerom SB . Uhly $\sphericalangle SBM = 90^\circ - \alpha$ a $\sphericalangle SNM$ sú obvodovými uhlami tejto kružnice prislúchajúcimi tomu istému oblúku SM . Preto tiež $\sphericalangle SNM = 90^\circ - \alpha$. Z analogického dôvodu platí tiež $\sphericalangle NBS = 90^\circ - \gamma = \sphericalangle NMS$. Preto platí

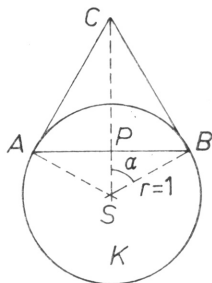
$$\begin{aligned}\sphericalangle MNP &= \sphericalangle NPQ = \sphericalangle MNS + \sphericalangle SNP = 90^\circ - \alpha + \gamma, \\ \sphericalangle PQM &= \sphericalangle QMN = \sphericalangle SMN + \sphericalangle QMS = 90^\circ - \gamma + \alpha.\end{aligned}$$

c) Štvoruholník $MNPQ$ je súmerný podľa osi AC . Rovnobežníkom môže byť preto len vtedy, keď platí $MN \parallel AC \parallel PQ$. V takom prípade však bude priamka MN kolmá ku priamke MQ , čiže $\sphericalangle QMN = 90^\circ$. Z časti b) však vieme, že $\sphericalangle QMN = 90^\circ + \alpha - \gamma$. Štvoruholník $MNPQ$ bude rovnobežníkom teda práve vtedy, keď platí $\alpha = \gamma$, čiže vtedy, keď daný deltoid $ABCD$ bude kosoštvorec. Vo všetkých ostatných prípadoch bude štvoruholník $MNPQ$ lichobežníkom.

B - P - 4

Nech K je daný kruh s polomerom 1. Určte množinu vrcholov C všetkých rovnostranných trojuholníkov ABC , ktorých vrcholy A, B ležia vo vnútri alebo na hranici kruhu K .

Riešenie (obr. 12): Označme S stred daného kruhu K . Nech M je hľadaná množina vrcholov C všetkých rovnostranných trojuholníkov daných vlastností. Vzhľadom na symetriu kruhu a rovnostranného trojuholníka možno očakávať, že body množiny M vyplnia kruh G so stredom S a polomerom $r > 1$.



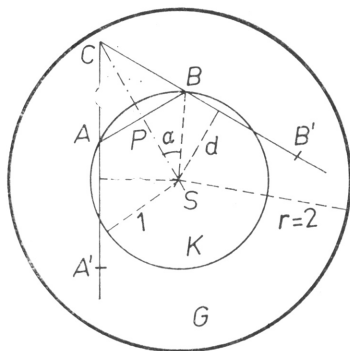
Obr. 12

Polomer r kruhu G sústredného s daným kruhom K určíme tak, keď budeme uvažovať o takej polohe rovnostranného trojuholníka ABC pri pevne zvolenej dĺžke AB , kedy má vrchol C najväčšiu vzdialenosť od bodu S (pozri obr. 12). V takom prípade platí:

$$\begin{aligned} |SC| &= |SP| + |CP| = |SP| + \sqrt{3}|BP| = \\ &= \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha = 2 \left(\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right) = \\ &= 2(\sin 30^\circ \cos \alpha + \cos 30^\circ \sin \alpha). \end{aligned}$$

Je teda $|SC| = 2 \sin(30^\circ + \alpha) \leq 2$, pričom rovnosť nastane pre $\alpha = 60^\circ$. Je teda $r = 2$ čiže množina M je časťou kruhu $G(S;2)$.

Nech je obrátene C ľubovoľný bod kruhu G rôzny od jeho stredu S . Potom možno zostrojiť uhol $A'CB'$ veľkosti 60° tak, aby obsahoval bod S a aby priamka CS bola jeho osou. Nech A , resp. B je v uvedenom poradí priesečník polpriamky CA' , resp. CB' s hranicou kruhu K . Pri vhodnom označení bodov A' , B' na ramenách zostrojeného uhla tvoria potom body A , B , C vrcholy rovnostranného trojuholníka s vrcholom C z množiny M (obr. 13). Ak $C=S$, potom možno uvažovať o ľu-



Obr. 13

bovoľnom uhle veľkosti 60° s vrcholom v bode C a priesečníky jeho ramien s hranicou kruhu K pri vhodnom označení tvoria vrcholy A , B rovnostranného trojuholníka požadovaných vlastností. Tým sme dokázali, že kruh $G(S;2)$ je časťou množiny M , pretože existenciu bodov A , B v oboch uvažovaných prípadoch zaručuje skutočnosť, že vzdialenosť d bodu S od polpriamok CA' , CB' je

$$d = |CS| \sin 30^\circ \leq 2 \sin 30^\circ = 1.$$

Z oboch vyššie dokázaných inklúzií: $M \subset G$ a $G \subset M$ dostávame $M = G$, čo znamená, že množinou bodov daných vlastností je kruh so stredom S a polomerom $r = 2$.

SÚŤAŽNÉ ÚLOHY I. KOLA

B - I - 1

Pre každé prirodzené číslo $n \leq 150$ existujú dva rôzne delitele d_1, d_2 čísla 9 000 000 také, že n delí rozdiel $d_1 - d_2$. Dokážte.

Riešenie: Pretože prvočíselný rozklad čísla 9 000 000 je

$$9\,000\,000 = 9 \cdot 10^6 = 3^2 \cdot 2^6 \cdot 5^6,$$

bude počet všetkých jeho deliteľov ν určený vzťahom:

$$\nu = (2 + 1)(6 + 1)(6 + 1) = 49 \cdot 3 = 147.$$

a) V prípade, keď $n < 147$, môžeme použiť opäť Dirichletov priehradkový princíp ako pri riešení úlohy B-P-2. Pri delení číslom n majú totiž aspoň dva z deliteľov čísla 9 000 000 rovnaký zvyšok. Potom však ich rozdiel bude zrejme číslo deliteľné číslom n .

b) Zostáva ešte dokázať tvrdenie úlohy v prípadoch, keď $n = 147, 148, 149, 150$. V týchto prípadoch však nebude ťažké deliteľov čísla 9 000 000 požadovaných vlastností skutočne nájsť:

Pre $n = 147$ možno vziať $d_1 = 150 = 3 \cdot 2 \cdot 5^2$, $d_2 = 3$, pretože

$d_1 - d_2 = 147$. Pre $n = 148$ stačí vziať opäť $d_1 = 150$, $d_2 = 2$, lebo $d_1 - d_2 = 148$. Pri $n = 149$ je opäť $d_1 = 150$, $d_2 = 1$ a $d_1 - d_2 = 149$. Pri $n = 150$ vezmeme $d_1 = 300 = 3 \cdot 2^2 \cdot 5^2$ a $d_2 = 150$. Potom $d_1 - d_2 = 150$.

B - I - 2

Nech a je prirodzené číslo tvaru $2p + 1$, kde p je prvočíslo. Nájdite množinu všetkých prirodzených čísel x , pre ktoré platí, že ak z nich vynecháme prvú číslicu, dostaneme $\frac{x}{a}$.

Riešenie: Z textu úlohy je zrejmé, že číslo x musí byť aspoň dvojciferné. Predpokladajme, že má m cifier, kde $m > 1$. Potom ho možno zapísať v tvare

$$x = y \cdot 10^{m-1} + z,$$

kde y je niektoré z jednociferných prirodzených čísel: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 a z je nejaké $(m - 1)$ -ciferné číslo. Po vynechaní prvej číslice y z dekadického zápisu čísla x dostaneme zápis čísla z . Podľa textu úlohy však má platiť $z = \frac{x}{a}$. Z toho vyplýva, že platí $x = a \cdot z$, čiže $y \cdot 10^{m-1} + z = (2p + 1)z$, odkiaľ dostaneme

$$y \cdot 10^{m-1} = 2p \cdot z$$

a po delení číslom 2 bude

$$5y \cdot 10^{m-2} = p \cdot z. \quad (1)$$

Rovnica (1) nemôže byť splnená pre $p > 10$ pri žiadnom z , pretože prvočíslo $p > 10$ nedelí $5y \cdot 10^{m-2}$. Stačí teda nájsť riešenie rovnice (1) pre jednotlivé prvočísla $p < 10$.

a) Nech $p = 2$. Potom $a = 5$ a preskúmame postupne riešenia rovnice (1) pri jednotlivých možných hodnotách čísla y : Pre $y = 1$ dostaneme z (1) $5 \cdot 10^{m-2} = 2z$, z čoho pre $m \geq 3$ vyplýva $z = 25 \cdot 10^{m-3}$, čiže $x = 1 \cdot 10^{m-1} + 25 \cdot 10^{m-3} = 125 \cdot 10^{m-3}$.

Pre $y = 2$ máme z (1) $5 \cdot 10^{m-2} = z$, z čoho $x = 25 \cdot 10^{m-2}$.

Pre $y = 3$ bude z (1) $5 \cdot 3 \cdot 10^{m-2} = 2z$, odkiaľ $z = 5 \cdot 15 \cdot 10^{m-3}$, ak $m \geq 3$, tj. $x = 3 \cdot 10^{m-1} + 75 \cdot 10^{m-3} = 375 \cdot 10^{m-3}$.

Ak bude $y \geq 4$, potom z (1) máme $2z = 5y \cdot 10^{m-2}$, z čoho $z = 25 \cdot y \cdot 10^{m-3} \geq 100 \cdot 10^{m-3} = 10^{m-1}$. To však nemôže nastať, pretože číslo z je podľa predpokladu len $(m - 1)$ -ciferné.

V tomto prípade do hľadanej množiny patria čísla:

$\{25, 250, 2500, \dots\} \cup \{125, 1250, 12\,500, \dots\} \cup \{375, 3750, 37\,500, \dots\}$.

b) Nech $p = 3$. Potom $a = 7$ a z rovnosti prirodzených čísel $5y \cdot 10^{m-2} = 3z$ vyplýva, že číslo y musí byť násobkom čísla 3. Preto nám treba postupne preskúmať prípady $y = 3, 6, 9$.

Ak $y = 3$, potom z (1) máme $5 \cdot 3 \cdot 10^{m-2} = 3z$, z čoho $z = 5 \cdot 10^{m-2}$, čiže $x = 3 \cdot 10^{m-1} + 5 \cdot 10^{m-2} = 35 \cdot 10^{m-2}$.

Pre $y \geq 6$ dostaneme $3z = 5y \cdot 10^{m-2} \geq 30 \cdot 10^{m-2} = 3 \cdot 10^{m-1}$, z čoho v spore s predpokladom vyplýva $z \geq 10^{m-1}$.

V tomto prípade do hľadanej množiny patria čísla $\{35, 350, 3500, \dots\}$.

c) Ak $p = 5$, potom $a = 11$ a z (1) dostaneme $5y \cdot 10^{m-2} = 5z$, z čoho $z = y \cdot 10^{m-2}$, čiže $x = y \cdot 10^{m-1} + y \cdot 10^{m-2} = 11y \cdot 10^{m-2}$. Z toho vyplýva, že pre každú možnú hodno-

tu y dostaneme nekonečnú množinu riešení, takže hľadanú množinu čísel tvorí zjednotenie množín:

$$\{11, 110, 1100, \dots\} \cup \{22, 220, 2200, \dots\} \cup \dots \cup \{99, 990, 9900, \dots\}.$$

d) Ak $p = 7$, bude $a = 15$ a po dosadení do (1) dostaneme $5y \cdot 10^{m-2} = 7z$, z čoho vyplýva, že rovnici (1) môže vyhovovať len $y = 7$. Pri tejto hodnote však platí $z = 5 \cdot 10^{m-2}$ čiže $x = 7 \cdot 10^{m-1} + 5 \cdot 10^{m-2} = 75 \cdot 10^{m-2}$.

V tomto prípade úlohe vyhovujú čísla $\{75, 750, 7500, \dots\}$.

Zistili sme teda, že úloha má riešenie len pre $a = 5, 7, 11, 15$ a v každom z týchto prípadov sme našli nekonečnú množinu prirodzených čísel, ktoré vyhovujú podmienkam úlohy, ako sa o tom ľahko možno presvedčiť.

B - 1 - 3

Určte všetky hodnoty reálneho parametra m , pre ktoré má sústava rovníc

$$x^2 + y^2 = 4, \tag{1}$$

$$(x + m)^2 + (y - m)^2 = 1 \tag{2}$$

s neznámymi x, y práve jedno riešenie.

Riešenie: Ak od rovnice (2) odčítame rovnicu (1), dostaneme

$$2m(x - y) = -2m^2 - 3. \tag{3}$$

Z (3) vyplýva, že pre $m = 0$ nemá daná sústava žiadne riešenie. Ak $m \neq 0$, potom z (3) dostaneme

$$x = y - \frac{2m^2 + 3}{2m}. \quad (4)$$

Ak za x zo (4) dosadíme do (1), dostaneme postupne

$$y^2 + \left(y - m - \frac{3}{2m}\right)^2 = 4, \quad (5)$$

$$2y^2 - \left(2m + \frac{3}{m}\right)y + m^2 + \frac{9}{4m^2} - 1 = 0.$$

Pre diskriminant D kvadratickej rovnice (5) platí

$$D = \left(2m + \frac{3}{m}\right)^2 - 8\left(m^2 + \frac{9}{4m^2} - 1\right) = -4m^2 - \frac{9}{m^2} + 20.$$

Rovnica (5) má mať práve jedno riešenie. Preto jej diskriminant musí byť rovný nule, čiže

$$4m^4 - 20m^2 + 9 = 0. \quad (6)$$

Ak v rovnici (6) použijeme substitúciu $z = m^2$, dostaneme kvadratickú rovnicu $4z^2 - 20z + 9 = 0$ s koreňmi $z_1 = \frac{1}{2}$,

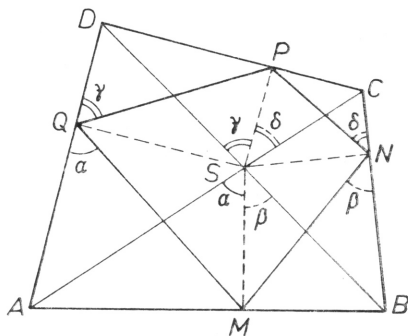
$z_2 = \frac{9}{2}$. Pre každý z týchto koreňov dostaneme dve hodnoty parametra m , pre ktoré má sústava (1), (2) práve jedno riešenie. Danej úlohe teda vyhovujú práve štyri hodnoty parametra m :

$$m_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, m_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, m_3 = \frac{3\sqrt{2}}{2}, m_4 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Nech $ABCD$ je vypuklý štvoruholník taký, že kolmé priemety priesečníka jeho uhlopriečok na jednotlivé strany ležia vo vnútri týchto strán.

Nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby tieto priemety ležali na kružnici je, aby uhlopriečky štvoruholníka $ABCD$ boli na seba kolmé. Dokážte.

Riešenie: Označme S priesečník uhlopriečok štvoruholníka $ABCD$ a M, N, P, Q v uvedenom poradí jeho kolmé priemety na strany AB, BC, CD, DA (pozri obr. 14). Štvoruholníkom



Obr. 14

$AMSQ, BNSM, CPSN, DQSP$ možno opísať kružnicu (thaletovskú) s priermi v uvedenom poradí AS, BS, CS, DS . Sú to teda tzv. tetivové štvoruholníky. Podľa vety o rovnosti obvodových uhlov prislúchajúcich tomu istému oblúku kružnice preto platí: $\sphericalangle ASM = \sphericalangle AQM = \alpha$, $\sphericalangle MSB = \sphericalangle MNB = \beta$, $\sphericalangle PSD = \sphericalangle PQD = \gamma$, $\sphericalangle PSC = \sphericalangle PNC = \delta$. Ďalej

zrejme platí: $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ a taktiež $\sphericalangle PQM = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$, $\sphericalangle PNM = 180^\circ - (\beta + \delta)$. Nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby štvoruholník bol tetivový, tj. aby jeho vrcholy ležali na kružnici je, aby súčet jeho vnútorných protiľahlých uhlov bol 180° . To znamená, že body P, Q, M, N budú ležať na kružnici vtedy a len vtedy, keď $\sphericalangle PQM + \sphericalangle PNM = 180^\circ$. Pretože $\sphericalangle PQM + \sphericalangle PNM = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 180^\circ$ vtedy a len vtedy, keď platí $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$, ležia body M, N, P, Q na kružnici vtedy a len vtedy, keď $\alpha + \beta = \gamma + \delta = 90^\circ$, čiže vtedy, keď uhol ASB uhlopriečok štvoruholníka $ABCD$ je pravý. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

B - I - 5

Pravouholník P nazveme opísaným pravidelnému šesťuholníku, ak každá z jeho strán obsahuje aspoň jeden vrchol šesťuholníka a žiaden bod šesťuholníka neleží mimo pravouholníka.

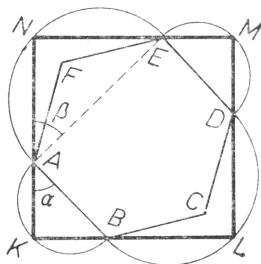
Je daný pravidelný šesťuholník so stranou dĺžky 1. Zostrojte aspoň jeden jemu opísaný pravouholník, ktorý:

- a) má čo najväčší obsah;
- b) má čo najmenší obsah.

V oboch prípadoch určte podiel obsahov šesťuholníka a pravouholníka.

Riešenie: Z definície opísaného pravouholníka je zrejmé, že aspoň dva susedné vrcholy šesťuholníka ležia na susedných stranách pravouholníka. Označme ich A, B a ostatné vrcholy šesťuholníka označme podľa obr. 15. Označme ďalej K, L, M, N vrcholy opísaného pravouholníka. Tieto vrcholy v uvedenom poradí ležia na oblúkoch thaletovských kružníc s priemermi

AB , BD , DE , EA , pretože uhly $\sphericalangle AKB$, $\sphericalangle BLD$, $\sphericalangle DME$, $\sphericalangle ENA$ sú pravé. Ak označíme $\sphericalangle KAB = \alpha$, $\sphericalangle NAE = \beta$, potom zrejme platí $\beta = 90^\circ - \alpha$. Z toho, že vnútorný



Obr. 15

uhol pravidelného šesťuholníka má veľkosť 120° vyplýva, že $\alpha \in \langle 30^\circ, 60^\circ \rangle$.

Obsah O pravouholníka $KLMN$ dostaneme ako súčet konštantného obsahu obdĺžnika $ABDE$ a obsahov trojuholníkov AKB , BLD , DME , ENA . Veľkosť obsahov týchto trojuholníkov je priamo úmerná vzdialenosti vrcholov K , L , M , N v uvedenom poradí od strán AB , BD , DE , EA obdĺžnika $ABDE$.

a) Z vyššie uvedenej úvahy vyplýva, že obsah O opísaného pravouholníka bude maximálny, keď trojuholníky AKB , BLD , DME , ENA budú rovnoramenné, čiže ak $\alpha = \beta = 45^\circ$. V takom prípade však budú uhlopriečky KM , LN opísaného pravouholníka na seba kolmé, čo znamená, že $KLMN$ bude štvorec.

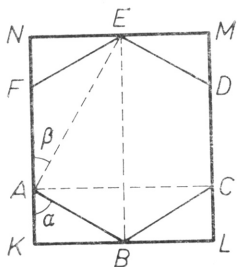
Z pravouhlého trojuholníka ADE s preponou $|AD| = 2$ sa ľahko vypočíta, že $|AE| = \sqrt{3}$. Vzdialenosť bodu K od úsečky

AB , resp. bodu M od úsečky DE je v uvažovanom prípade zrejme $\frac{1}{2}$ a tak pre uhlopriečku KM štvorca $KLMN$ zrejme platí $|KM| = 1 + \sqrt[3]{3}$. Preto

$$O_{\max} = \frac{1}{2} |KM|^2 = 2 + \sqrt[3]{3}.$$

Pretože pre obsah S pravidelného šesťuholníka so stranou 1 platí $S = \frac{3}{2} \sqrt[3]{3}$, dostaneme $S : O_{\max} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{3} : (2 + \sqrt[3]{3}) = \frac{3}{2} (2\sqrt[3]{3} - 3)$.

b) Obsah O opísaného pravouholníka $KLMN$ bude zrejme minimálny vtedy, keď budú minimálne vzdialenosti bodov K, L, M, N v uvedenom poradí od úsečiek AB, BD, DE, EA . Tento prípad nastane vtedy, keď buď $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ$ alebo $\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ$ (pozri obr. 16). V takom prípade však



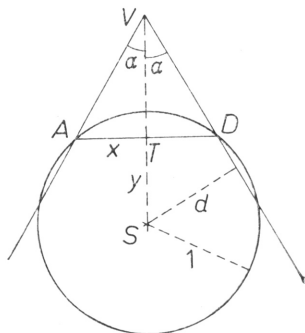
Obr. 16

$$O_{\min} = |KL| \cdot |LM| = |BE| \cdot |AC| = 2\sqrt{3}. \text{ Preto } S : O_{\min} = \\ = \frac{3}{2} \sqrt{3} : 2\sqrt{3} = \frac{3}{4}.$$

B - I - 6

Je daná guľa G s polomerom 1. Určte množinu vrcholov V všetkých pravidelných štvorstenov $ABCV$, ktorých vrcholy A, B, C ležia vo vnútri alebo na hranici gule G .

Riešenie: Ide zrejme o stereometrickú analógiu úlohy B-P-4. Označme M hľadanú množinu vrcholov V pravidelných štvorstenov požadovaných vlastností. Nech $ABCV$ je niektorý z týchto štvorstenov. Ak ho budeme otáčať okolo stredu S gule G , zostane celý trojuholník ABC , ktorý je podstavou tohto štvorstena v guli G . Z toho vyplýva, že množina M musí byť podmnožinou gule K so stredom S a polomerom $r > 1$. Jej polomer určíme tak, keď zistíme maximálnu možnú vzdialenosť $|SV|$ pre vrchol pravidelného štvorstena požadovaných vlast-



Obr. 17

ností. Nech V je vrchol, pre ktorý je $|SV|$ maximálna. Potom zrejme vrcholy A, B, C podstavy štvorstena ležia na hranici gule G . Nech T je ťažisko podstavy. Ak bude štvorsten $ABCV$ rotovať okolo osi TV , potom vrcholy A, B, C opíšu na hranici gule G kružnicu so stredom T a polomerom $|AT|$. Označme a

hranu štvorstena. Potom zrejme platí $|AT| = \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ak vyjdeme zo situácie v rovine ASV (pozri obr. 17) a označíme $|AT| = x$, $|ST| = y$, potom vzhľadom na vyššie uvedené platí $a = x\sqrt{3}$. Z Pythagorovej vety vyplýva $x^2 + y^2 = 1$, $|TV| = x\sqrt{2}$. Preto

$$|SV| = |ST| + |TV| = y + x\sqrt{2},$$

z čoho priamo vyplýva

$$|SV|^2 = y^2 + 2\sqrt{2}xy + 2x^2 = 1 - x^2 + 2\sqrt{2}xy +$$

$$+ 2(1 - y^2) = 3 - (x - \sqrt{2}y)^2,$$

čiže

$$|SV| = \sqrt{3 - (x - \sqrt{2}y)^2},$$

čo znamená, že $|SV|_{\max} = \sqrt{3}$, pričom táto situácia nastane pre $x = \sqrt{2}y$ a vzhľadom na podmienku $x^2 + y^2 = 1$ pre $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $y = \sqrt{3}$. Z uskutočnenej úvahy vyplýva teda, že M je časťou gule K so stredom S a polomerom $r = \sqrt{3}$. Pripomeňme si ešte, že pri uvažovanej rotácii okolo osi VT vytvorí štvorsten $ABCV$

kužeľovú plochu, ktorej podstavou je kružnica so stredom v bode T a polomerom $a \frac{\sqrt{3}}{3}$ a jej vrchol V je totožný s vrcholom V uvažovaného štvorstena. Pre vrcholový uhol SVD veľkosti 2α zrejme platí: $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Nech teraz obrátene bod V je ľubovoľný z bodov gule $K(S; \sqrt{3})$. Zostrojme rotačnú kužeľovú plochu s vrcholom V a vrcholovým uhlom 2α , pričom $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ a s osou SV , ak $V \neq S$ (v prípade $V = S$ volíme za os kužeľovej plochy ľubovoľnú priamku prechádzajúcu bodom V). Pretože pre vzdialenosť d stredu S od kužeľovej plochy (obr. 17) platí

$$d = |SV| \sin \alpha \leq \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 1,$$

pretína táto kužeľová plocha hranicu gule G aspoň v jednej kružnici k . Ak do kružnice k vpíšeme rovnostranný trojuholník ABC , potom jeho vrcholy spolu s bodom V určujú pravidelný štvorsten požadovaných vlastností. Tým sme dokázali, že $K \subset M$.

Z platnosti oboch dokázaných inklúzií vyplýva preto, že hľadanou množinou M je guľa $K(S; \sqrt{3})$.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY II. KOLA

B - II - 1

Nájdite všetky prirodzené čísla $n > 5$, pre ktoré je číslo

$$1.2.3. \dots (n-4)$$

deliteľné číslom n .

Riešenie: Predovšetkým je zrejmé, že tvrdenie úlohy neplatí pre žiadne prvočíslo. Predpokladajme preto, že n je číslo zložené, tj. že platí $n = a \cdot b$, kde $a \geq 2$, $b \geq 2$ sú prirodzené čísla.

a) Nech $a \neq b$. Zrejme platí $a \leq \frac{n}{2}$, $b \leq \frac{n}{2}$. Z toho však vyplýva, že v tomto prípade vyhovuje úlohe každé zložené číslo, pre ktoré platí $\frac{n}{2} \leq n-4$ čiže $n \geq 8$. Zostáva preskúmať číslo $n = 6 = 2 \cdot 3$, ktoré však úlohe nevyhovuje.

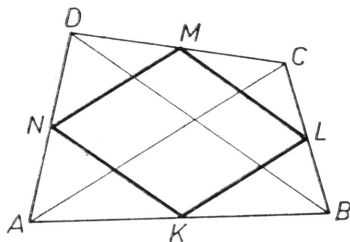
b) Ďalej je zrejmé, že zloženými číslami, pre ktoré nie je splnená vyššie uvedená podmienka, sú len čísla tvaru $n = p^2$, kde p je prvočíslo. V takom prípade však budú úlohe vyhovovať všetky také čísla, pre ktoré sú v súčine $1.2.3. \dots (p^2-4)$ aspoň dva faktory deliteľné číslom p . Túto vlastnosť splňujú všetky také prvočísla p , pre ktoré platí $2p \leq p^2-4$ čiže $p \geq 4$. Zostáva ešte preskúmať číslo $n = 3^2 = 9$, ktoré je tohto tvaru, ale ľahko sa vidí, že úlohe nevyhovuje.

Záver: Danej úlohe vyhovujú všetky zložené prirodzené čísla $n \geq 10$ a číslo 8.

Nech kolmé priemety priesečníka uhlopriečok konvexného štvoruholníka na jednotlivé strany ležia vo vnútri týchto strán. Nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby týmito štyrmi priemetmi bolo možné preložiť kružnicu je, aby bolo možné preložiť kružnicu stredmi jeho strán.

Dokážte.

Riešenie: Označme A, B, C, D vrcholy uvažovaného konvexného štvoruholníka a K, L, M, N stredy jeho strán (pozri obr. 18). Z vlastností strednej pričky trojuholníka vy-



Obr. 18

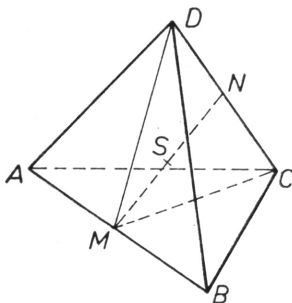
plýva, že platí: $KL \parallel AC \parallel MN$ a tiež $KN \parallel BD \parallel LM$. Štvoruholník $KLMN$ je teda rovnobežníkom. Rovnobežníku však možno opísať kružnicu vtedy a len vtedy, keď je pravouholníkom. Štvoruholník $KLMN$ je však pravouholníkom vtedy a len vtedy, keď sú uhlopriečky štvoruholníka $ABCD$ na seba kolmé. Podľa tvrdenia, ktoré sme dokázali v úlohe B-I-4, je kolmosť uhlopriečok štvoruholníka $ABCD$ nutnou a postaču-

júcou podmienkou pre to, aby kolmé priemety priesečníka uhlopriečok štvoruholníka na jeho jednotlivé strany ležali na kružnici. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

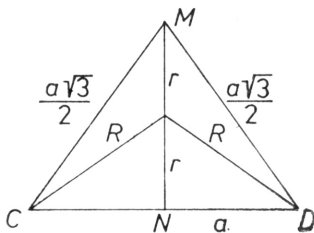
B - II - 3a

V priestore je daná guľová plocha so stredom S a polomerom r a vo vzdialenosti d od bodu S priamka p . Určte na priamke p vrchol pravidelného štvorstena, ktorého všetky hrany sa dotýkajú danej guľovej plochy.

Urobte diskusiu riešiteľnosti.



Obr. 19



Obr. 20

Riešenie: Označme G danú guľovú plochu. Je zrejmé, že množinou vrcholov všetkých pravidelných štvorstenov, ktorých všetky hrany sa dotýkajú guľovej plochy $G(S;r)$ bude opäť guľová plocha so stredom S . Označme jej polomer R a vypočítajme jeho hodnotu. Nech $ABCD$ je pravidelný štvorsten, ktorého všetky hrany sa dotýkajú danej guľovej plochy a nech a je veľkosť jeho hrany. Nech M, N sú v uvedenom poradí stredy hrán AB, CD (pozri obr. 19). V rovnoramennom trojuholníku

CMD (obr. 20) zrejme platí: $|CM| = |DM| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Bod S leží vo vnútri trojuholníka CMD , pričom platí: $|SM| = |SN| = = r, |SC| = |SD| = R$. Podľa Pythagorovej vety z pravouhlých trojuholníkov CNS a CNM vyplýva

$$R^2 = r^2 + \frac{a^2}{4}, \quad \frac{3}{4} a^2 = 4r^2 + \frac{a^2}{4},$$

z čoho dostaneme $a^2 = 8r^2, R^2 = 3r^2$. Teda $R = r\sqrt{3}$.

Hľadaný vrchol pravidelného štvorstena dostaneme zrejme ako spoločný bod priamky p a guľovej plochy $K(S;r\sqrt{3})$. Vzhľadom na to, že priamka môže mať s guľovou plochou najviac dva spoločné body, dostaneme v prípade $d < r\sqrt{3}$ dve riešenia úlohy, v prípade $d = r\sqrt{3}$ má úloha práve jedno riešenie a v prípade $d > r\sqrt{3}$ riešenie nejestvuje.

B - II - 3b

Nájdite všetky hodnoty reálneho parametra p , pre ktoré sústave rovníc

$$x^2 + 8y^2 + 2x = 7p^2, \quad (1)$$

$$(x + 1)^2 + (2y + p)^2 = 1 \quad (2)$$

vyhovujú práve dve usporiadané dvojice x, y reálnych čísel.

Riešenie: Rovnicu (1) môžeme prepísať do tvaru

$$(x + 1)^2 + 8y^2 = 7p^2 + 1. \quad (1')$$

Z (1'), (2) je zrejmé, že ak danej sústave vyhovuje usporiadaná dvojica x, y potom je riešením tiež dvojica $-x - 2, y$.

Ak od rovnice (2) odčítame rovnicu (1'), dostaneme

$$8y^2 - (2y + p)^2 = 7p^2,$$

z čoho po jednoduchšej úprave vyplýva

$$y^2 - py - 2p^2 = 0. \quad (3)$$

Pre $p = 0$ má (3) zrejme jediné riešenie $y = 0$ a danej sústave vyhovujú práve dve dvojice: $x = 0, y = 0$ a $x = -2, y = 0$.

V prípade $p \neq 0$ má (3) dva rôzne reálne korene: $y_1 = -p, y_2 = 2p$.

V prípade $y = -p$ majú obe rovnice danej sústavy tvar

$$x^2 + 2x + p^2 = 0, \quad (4)$$

pre $y = 2p$ dostaneme z každej z rovníc (1), (2)

$$x^2 + 2x + 25p^2 = 0. \quad (5)$$

Z toho vyplýva, že sústava (1), (2) má práve dve riešenia vtedy a len vtedy, keď z rovníc (4), (5) jedna má dva reálne korene, druhá nemá reálne korene. To však nastane vtedy a len vtedy, keď platí

$$\frac{1}{25} < p^2 < 1.$$

Sústava (1), (2) má teda práve dve rôzne riešenia vtedy a len vtedy, keď nastane niektorý z týchto prípadov: $p \in \left(-1, -\frac{1}{5}\right)$,
 $p = 0$, $p \in \left(\frac{1}{5}, 1\right)$.

PRÍPRAVNÉ ÚLOHY I. KOLA

A - P - 1

V rovině je dána síť rovnostranných trojúhelníků o straně a , vytvořena třemi soustavami rovnoběžných přímek. Dokažte, že uvnitř každého čtverce, který leží v rovině sítě a má stranu větší než a , leží alespoň jeden vrchol sítě.

Riešenie: Najprv si uvedomíme dve jednoduché vlastnosti siete. Ich jednoduché dôkazy neuvádzame.

Ak X , Y sú dva rôzne vrcholy siete a ich vzdialenosť $|XY|$ je väčšia ako a , tak už platí

$$|XY| \geq a\sqrt{3}.$$

Druhá vlastnosť je takáto. Nech Q je štvorec ležiaci v rovine siete. Ak na jednej jeho strane ležia dva rôzne vrcholy siete, potom aj v jeho vnútri leží nejaký vrchol siete. Teraz dokážeme pomocné tvrdenie: každý kruh v rovine siete o polomere $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ obsahuje vrchol siete.

Nech S je stred takého kruhu. Ak vytvoríme systém kruhov o polomere $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ so stredmi v každom vrchole siete, tak systém pokryje celú rovinu siete. Špeciálne, existuje vrchol siete X taký, že kruh nášho systému so stredom X obsahuje bod S . Vrchol X je hľadaný vrchol siete, ktorý leží v kruhu so stredom S a polomerom $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ukážeme, že ak štvorec o strane b neobsahuje vo svojom vnútri ani jeden vrchol siete, tak $b \leq a$.

Nech $ABCD$ je štvorec o strane b , ktorý neobsahuje ani jeden vrchol siete vo svojom vnútri. Zväčšíme ho tak, aby obsahoval aspoň dva vrcholy siete na svojich stranách. Nech S je stred štvorca $ABCD$. Ak X je vrchol siete, označíme R_X priesečník polpriamky SX so stranou štvorca $ABCD$. Zrejme existuje taký vrchol siete X , že číslo $k = |SX| : |SR_X|$ je najmenšie zo všetkých takýchto čísiel. Keďže X neleží vnútri štvorca $ABCD$, tak $k \geq 1$. Zväčšíme štvorec $ABCD$ rovnolahlosťou so stredom S a koeficientom k na štvorce $A_1B_1C_1D_1$. Zrejme strana b_1 štvorca $A_1B_1C_1D_1$ je $b_1 = k \cdot b \geq b$, $A_1B_1C_1D_1$ neobsahuje vo svojom vnútri vrchol siete, ale vrchol X leží na jeho strane. Teraz rovnolahlosťou so stredom X zväčšíme štvorec $A_1B_1C_1D_1$ na štvorec $A_2B_2C_2D_2$ taký, že vo svojom vnútri neobsahuje ani jeden vrchol siete, ale na jeho strane leží vrchol siete Y rôzny od X . Zrejme stačí uvažovať vrchol siete Y , pre ktorý je číslo $k_1 = |YX| : |XQ_Y|$ najmenšie (Q_Y je priesečník polpriamky XY so stranou štvorca) a k_1 vziať za koeficient rovnolahlosti. Strana b_2 štvorca $A_2B_2C_2D_2$ je $b_2 = k_1 b_1 \geq b_1 \geq b$.

Ak vrcholy siete X, Y ležia na susedných stranách štvorca $A_2B_2C_2D_2$, napr. na stranách A_2B_2, A_2D_2 , tak vhodnou rovnolahlosťou so stredom A_2 zväčšíme štvorec na štvorec $A_3B_3C_3D_3$, ktorý obsahuje vrchol siete aj na jednej zo strán B_2C_2, C_2D_2 .

Máme teda štvorec $A'B'C'D'$ so stranou $b' \geq b$, ktorý buď obsahuje dva vrcholy siete na tej istej strane alebo na nesusedných stranách a vo svojom vnútri neobsahuje vrchol siete.

Ak dva vrcholy siete ležia na tej istej strane štvorca $A'B'C'D'$, tak zrejme $b' \leq a$ a teda aj $b \leq a$. Ak dva vrcholy siete ležia na protiľahlých stranách a ich vzdialenosť je a , tak tiež platí $b' \leq a$ a teda $b \leq a$.

Zostáva nám prípad, že dva vrcholy siete X, Y ležia na protiľahlých stranách štvorca $A'B'C'D'$ a $|XY| \geq a\sqrt{3}$. Potom uhlopriečka štvorca $A'B'C'D'$ nie je menšia ako $|XY|$, t.j.

$$b'\sqrt{2} \geq a\sqrt{3}.$$

Teda

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} < \frac{3a}{2\sqrt{2}} \leq \frac{b}{2}.$$

Z toho vyplýva, že kruh so stredom identickým so stredom štvorca $A'B'C'D'$ a polomerom $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ leží vnútri štvorca $A'B'C'D'$ a podľa pomocného tvrdenia obsahuje vrchol siete.

Takže posledný prípad nie je možný a v predchádzajúcich prípadoch sme ukázali, že $b \leq a$.

Nájdite všetky reálne korene rovnice

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x, \quad (1)$$

kde p je reálny parameter.

Riešenie: Rovnicu (1) umocníme na druhú

$$x^2 - p + 4(x^2 - 1) + 4\sqrt{(x^2 - p)(x^2 - 1)} = x^2$$

a upravíme

$$4\sqrt{(x^2 - p)(x^2 - 1)} = 4 + p - 4x^2. \quad (2)$$

Túto rovnicu umocníme na druhú

$$16(x^4 - px^2 - x^2 + p) = 16 + p^2 + 16x^4 + 8p - 8px^2 - 32x^2$$

a upravíme

$$x^2(16 - 8p) = p^2 + 16 - 8p$$

teda

$$x^2(4 - 2p)4 = (p - 4)^2. \quad (3)$$

Každé riešenie rovnice (1) je aj riešením rovnice (2) a každé riešenie rovnice (2) je aj riešením rovnice (3). Rovnica (3) má riešenia

$$x_1 = \frac{4 - p}{2\sqrt{4 - 2p}} \quad (4)$$

$$x_2 = \frac{p - 4}{2\sqrt{4 - 2p}}$$

za predpokladu $4 - 2p > 0$ a jediné riešenie $x = 0$ za predpokladu $p = 4$.

Zistíme, kedy riešenia rovnice (3) sú aj riešeniami rovnice (1). Každé riešenie x rovnice (2) je riešením rovnice (1) za predpokladu $x \geq 0$, $x^2 - p \geq 0$, $x^2 - 1 \geq 0$. Teda rovnice (1) a (2) sú ekvivalentné za predpokladu

$$x \geq 1, \quad x^2 \geq p. \quad (5)$$

Ľahko vidieť, že za predpokladu $p = 4$ koreň $x = 0$ nie je koreň rovnice (1). Ak $p < 2$, tak skúsime, či korene (4) rovnice (3) vyhovujú podmienkám (5). Zrejme x_2 je vtedy záporný, teda nie je riešením rovnice (1). Pre koreň x_1 dostaneme

$$\frac{4 - p}{2\sqrt{4 - 2p}} \geq 1, \quad \frac{(4 - p)^2}{4(4 - 2p)} \geq p. \quad (6)$$

Prvá z nerovníc (6) platí pre každé $p < 2$ a druhá dokonca pre každé p . Teda za predpokladu $p < 2$ každé riešenie rovnice (2) je aj riešením rovnice (1). Ešte musíme zistiť, kedy koreň x_1 je riešením rovnice (2). Zrejme je to vtedy, ak platí

$$x_1^2 \geq p, \quad x_1^2 \geq 1, \quad 4 + p - 4x_1^2 \geq 0.$$

Prvé dve podmienky sú vlastne nerovnice (6) a platia pre každé $p < 2$. Z tretej podmienky dostávame:

$$4 + p - \frac{(p - 4)^2}{(4 - 2p)} \geq 0$$

a po úprave (vieme, že $p < 2$)

$$-3p^2 + 4p \geq 0,$$

t.j.

$$p(4 - 3p) \geq 0.$$

Posledná nerovnica je ekvivalentná $0 \leq p \leq \frac{4}{3}$.

Záver: Ak $0 \leq p \leq \frac{4}{3}$, rovnica (1) má jediný koreň $x = \frac{4 - p}{2\sqrt{4 - 2p}}$. Ak $p < 0$ alebo $p > \frac{4}{3}$, rovnica (1) nemá reálny koreň.

A - P - 3

Jsou-li všechny výšky čtyřstěnu stejně velké, jsou všechny jeho stěny shodné trojúhelníky. Dokažte.

Riešenie je uvedené v brožúre Vybrané úlohy MO - A + MMO, úloha 87.

A - P - 4

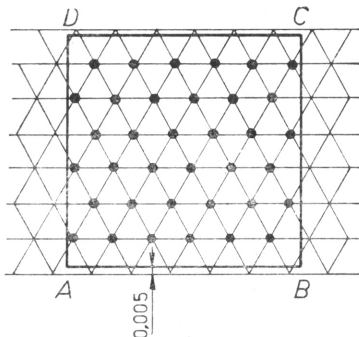
Je dán ostroúhlý trojúhelník T s obsahem P . Sestrojte pravoúhlý trojúhelník, který je obsažen v trojúhelníku T a má obsah větší nebo rovný $\frac{1}{3} P\sqrt{3}$.

Riešenie je uvedené v brožúrke 25. ročník MO, úloha A-II-3b.

SÚŤAŽNÉ ÚLOHY I. KOLA

A - I - 1

Je daný štvorec $ABCD$ o dĺžke strany 6. Nájdite najmenšie také prirodzené číslo n , že vo vnútri štvorca $ABCD$ možno zvoliť n bodov tak, že vo vnútri každého štvorca o strane 1, ktorý celý leží v štvorci $ABCD$, sa nachádza aspoň jeden z uvažovaných bodov.



Obr. 21

Riešenie: Štvorec $ABCD$ možno rozdeliť na 36 štvorcov o strane 1, ktoré nemajú spoločné vnútorné body. Teda potrebujeme aspoň 36 bodov, aby sme vyhovelí požiadavke úlohy, t.j. $n \geq 36$.

Ukážeme, že možno zvoliť 36 bodov s danou vlastnosťou. Vytvorme sieť rovnostranných trojuholníkov o strane 0,99 vytvorenú tromi sústavami rovnobežných priamok. Umiestnime štvorec $ABCD$ do tejto siete podľa obr. 21. Pak 36 vrcholov siete, ležiacich vnútri štvorca $ABCD$, podľa úlohy A-P-1 vyhovuje požiadavke úlohy.

Záver: najmenšie prirodzené číslo požadovanej vlastnosti je číslo 36.

A - 1 - 2

Nájdite všetky reálne čísla x , pre ktoré platí

$$\sqrt{2p + 1 - x^2} + \sqrt{3x + p + 4} = \sqrt{x^2 + 9x + 3p + 9}, \quad (1)$$

kde p je reálny parameter.

Riešenie: Ak umocníme rovnicu (1) na druhú, dostaneme po úprave

$$2\sqrt{(2p + 1 - x^2)(3x + p + 4)} = 2x^2 + 6x + 4.$$

Túto rovnicu delíme číslom 2 a umocníme na druhú, dostaneme rovnicu

$$\begin{aligned} 6px + 3x - 3x^3 + 2p^2 + p - px^2 + 8p + 4 - 4x^2 &= \\ &= x^4 + 9x^2 + 4 + 6x^3 + 4x^2 + 12x \end{aligned}$$

a po úprave

$$x^4 + 9x^3 + (17 + p)x^2 + (9 - 6p)x - (2p^2 + 9p) = 0. \quad (2)$$

Zrejme každé riešenie rovnice (1) je aj riešením rovnice (2). Rovnicu (2) však bezprostredne nevieme riešiť. Ak sa dívame na ľavú stranu rovnice (2) ako na kvadratický polynóm premennej p :

$$p^2(-2) + p(-9 - 6x + x^2) + (x^4 + 9x^3 + 17x^2 + 9x) = 0, \quad (3)$$

tak jeho diskriminant je

$$\begin{aligned} D &= (-9 - 6x + x^2)^2 - 4 \cdot (-2)(x^4 + 9x^3 + 17x^2 + 9x) = \\ &= 9x^4 + 60x^3 + 154x^2 + 180x + 81 = (3x^2 + 10x + 9)^2. \end{aligned}$$

Teda rovnica (3) má korene

$$p_{1,2} = \frac{9 + 6x - x^2 \pm (3x^2 + 10x + 9)}{-4},$$

po úprave

$$p_1 = -\frac{1}{2}(x^2 + 8x + 9), \quad p_2 = x^2 + x.$$

Z uvedeného vyplýva, že rovnicu (2) môžeme ekvivalentne vyjadriť v tvare

$$[p + \frac{1}{2}(x^2 + 8x + 9)](p - x^2 - x) = 0,$$

a po úprave

$$(x^2 + 8x + 9 + 2p)(x^2 + x - p) = 0. \quad (4)$$

Rovnica (4) má korene

$$x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{7 - 2p}, \quad x_{3,4} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1 + 4p}).$$

Zistíme, kedy tieto korene sú reálne korene rovnice (1).

Aby korene x_1, x_2 boli reálne, musí byť $2p \leq 7$. Keby číslo $x = x_1$ alebo $x = x_2$ vyhovovalo rovnici (1), tak musí byť

$$\begin{aligned} x^2 + 9x + 3p + 9 &\geq 0 \\ 2p + 1 - x^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Uvedené čísla však vyhovujú rovnici

$$x^2 + 8x + 9 + 2p = 0.$$

Ak od prvej nerovnice odčítame rovnicu, dostaneme

$$x + p \geq 0.$$

Z rovnice potom vyplýva

$$(x + 3)^2 = -2x - 2p \leq 0,$$

teda $x = -3$. Z druhej nerovnice potom dostávame $2p \geq 8$.

Teda x_1, x_2 nie sú reálne korene rovnice (1).

Vyšetříme korene x_3, x_4 . Aby boli reálne, musí byť $p \geq -\frac{1}{4}$.
Pre $x = x_3, x_4$ platí $p = x^2 + x$, takže po dosadení máme

$$|x + 1| + |x + 2| = |2x + 3|. \quad (5)$$

Keďže $x_3 \geq -\frac{1}{2}$, tak zrejme x_3 vyhovuje rovnici a teda aj rovnici (1).

Aby koreň x_4 vyhovoval rovnici (5), musí byť buď $x_4 + 1 \geq 0$, $x_4 + 2 \geq 0$ alebo $x_4 + 1 \leq 0$, $x_4 + 2 \leq 0$. Teda, buď $x_4 \geq -1$ alebo $x_4 \leq -2$. To platí práve vtedy, keď $p \leq 0$ alebo $p \geq 2$. Ešte si všimnime, že pre $p = -\frac{1}{4}$ platí $x_3 = x_4$.

Môžeme zhrnúť. Ak $p < -\frac{1}{4}$, tak rovnica (1) nemá reálne korene. Ak $p = -\frac{1}{4}$ alebo $p \in (0, 2)$, tak rovnica (1) má jediný reálny koreň $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 4p})$. Pre $p \in (-\frac{1}{4}, 0) \cup (2, \infty)$ má rovnica (1) dva rôzne reálne korene $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1 + 4p})$.

A - I - 3

Je dáno prirodzené číslo $n > 1$. Množina M uzavřených intervalů má tyto vlastnosti:

1. Pro každý interval $\langle u, v \rangle \in M$ platí, že u, v jsou přirozená čísla, $1 \leq u < v \leq n$.

2. Pro každé dva různé intervaly $I \in M$, $I' \in M$ je $I \subset I'$ nebo $I' \subset I$ nebo $I \cap I' = \emptyset$.

Určete největší možný počet prvků množiny M .

Poznámka: Uzavřený interval $\langle u, v \rangle$ je množina všech reálných čísel r , pro které platí $u \leq r \leq v$.

Riešenie: Pre dané prirodzené číslo $n > 1$ označíme $f(n)$ najväčší možný počet prvkov množiny M .

Ak zvolíme $M = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \dots, \langle 1, n \rangle\}$, tak M vyhovuje podmienkám 1. a 2. Teda $f(n) \geq n - 1$. Ukážeme, že platí rovnosť $f(n) = n - 1$.

Pre $n = 2$ je $M \subseteq \{\langle 1, 2 \rangle\}$ a teda $f(n) = 1$. Budeme pokračovať matematickou indukciou. Nech $n > 2$ a predpokla-

dáme, že pre každé prirodzené číslo $k < n$, $k \geq 2$ platí $f(k) = k - 1$. Nech M je množina s vlastnosťami 1. a 2., ktorá má maximálny počet prvkov. Množina M musí obsahovať interval $\langle 1, n \rangle$, totiž keby ho neobsahovala, tak by nemala maximálny počet prvkov, lebo $M \cup \{\langle 1, n \rangle\}$ tiež spĺňa podmienky 1. a 2. Označíme $M' = M - \{\langle 1, n \rangle\}$. Rozlíšime tri prípady.

a) Žiadny z intervalov $I \in M'$ neobsahuje číslo n . Potom pre M' platí podmienka 1) pre $n - 1$ a podľa indukčného predpokladu počet prvkov M' je nie väčší ako $n - 2$. Teda počet prvkov M je nie väčší ako $n - 2 + 1 = n - 1$.

b) Žiadny z intervalov $I \in M'$ neobsahuje číslo 1. Nech $M'' = \{\langle u - 1, v - 1 \rangle ; \langle u, v \rangle \in M'\}$. Potom M'' má podľa indukčného predpokladu najviac $n - 2$ prvkov. Teda M má najviac $n - 1$ prvkov.

c) Niektorý interval z M' obsahuje číslo n a niektorý interval z M' obsahuje číslo 1. Nech p je najväčšie prirodzené číslo také, že $\langle 1, p \rangle \in M'$. Nech q je zase najmenšie prirodzené číslo také, že $\langle q, n \rangle \in M'$. Označíme

$$\begin{aligned} M'' &= \{I \in M'; I \subseteq \langle 1, p \rangle\}, \\ M''' &= \{I \in M'; I \subseteq \langle q, n \rangle\}. \end{aligned}$$

Zrejme je $p < q$. Počet prvkov M' je rovný súčtu počtu prvkov M'' a M''' . Teda

$$|M| = |M'| + 1 = |M''| + |M'''| + 1.$$

Podľa indukčného predpokladu však

$$|M''| \leq f(p) = p - 1.$$

Argumentom rovnakým ako v časti b) z indukčného predpokladu vyplýva

$$|M'''| \leq f(n - q + 1) = n - q.$$

Teda

$$|M| \leq (p - 1) + (n - q) + 1 \leq n - 1.$$

A - I - 4

Zostrojte štvoruholník $ABCD$, ktorého všetky vrcholy ležia na kružnici o polomere 1 a pre ktorý platí

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 > 8,999.$$

Riešenie: Nech ABC je rovnostranný trojuholník, ktorého vrcholy ležia na kružnici o polomere 1. Jeho strany sú potom dlhé $\sqrt{3}$ a teda

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2 = 3 \cdot 3 = 9.$$

Nech X je bod na kratšom oblúku kružnice určenom bodmi A, C . Uhol $\delta = \angle AXC$ nezávisí od polohy bodu X na tomto oblúku a je rovný $\delta = 120^\circ$. Podľa kosínusovej vety platí

$$\begin{aligned} |CA|^2 &= |AX|^2 + |XC|^2 - 2|AX| \cdot |XC| \cdot \cos 120^\circ = \\ &= |AX|^2 + |XC|^2 + |AX| \cdot |XC|. \end{aligned}$$

Ak zvolíme bod $D = X$ tak, aby bolo

$$|CD| < \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 0,001,$$

tak pre štvoruholník $ABCD$ platí

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = 9 - |AD| \cdot |CD|.$$

Ale $|AD| \leq |AC| = \sqrt[3]{3}$, teda

$$|AD| \cdot |CD| < \sqrt[3]{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}}{3} \cdot 0,001 = 0,001.$$

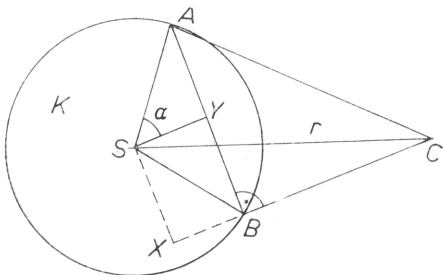
Potom

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 > 9 - 0,001 = 8,999.$$

A - I - 5

Nech K je kruh s priemerom 1. Nájdite v rovine kruhu K množinu všetkých bodov patriacich pravouhlým rovnoramenným trojuholníkom, ktorých aspoň dva vrcholy ležia v K .

Riešenie: Ľahko vidieť, že hľadaná množina M je kruh so stredom v strede kruhu K . Je potrebné určiť polomer kruhu M .



Obr. 22

Polomer kruhu M bude maximum čísiel r , kde r je vzdialenosť vrcholu C pravouhlého trojuholníka ABC takého, že vrcholy A, B ležia v kruhu K . Zrejme stačí uvažovať prípad, keď body A, B ležia na obvode kruhu K . Z obr. 22 zase vyplýva, že stačí uvažovať prípad, keď AB je odvesna pravouhlého trojuholníka. Kvôli jednoduchosti, nech AC je prepona a teda $|AB| = |BC|$.

Nech X je vrchol pri pravom uhle pravouhlého trojuholníka SCX , Y je stred úsečky AB a $\alpha = \angle ASY$. Zrejme platí

$$\begin{aligned} |SY| &= |XB| = \frac{1}{2} \cos \alpha, \\ |SX| &= |AY| = \frac{1}{2} \sin \alpha, \\ |BC| &= |AB| = \sin \alpha. \end{aligned}$$

Potom podľa Pythagorovej vety dostávame

$$\begin{aligned} r^2 &= |XC|^2 + |SX|^2 = \left(\frac{1}{2} \cos \alpha + \sin \alpha\right)^2 + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha = \\ &= \frac{1}{4} (3 - 2 \cos 2\alpha + 2 \sin 2\alpha) = \frac{1}{4} [3 + 2\sqrt{2} \sin (2\alpha - \frac{\pi}{4})]. \end{aligned}$$

Maximálna hodnota r bude pre $\alpha = \frac{3}{8}\pi$ a to

$$r = \sqrt{\frac{1}{4}(3 + 2\sqrt{2})} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

Teda polomer kruhu M je $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

A - I - 6

Je dané prirodzené číslo n a štvorsten s vlastnosťami:

- Veľkosti jeho strán sú prirodzené čísla rovné najviac n .
- Obvody stien štvorstenu majú konštantnú veľkosť.

Dokážte, že pre $n \leq 5$ stený štvorstenu tvoria rovnoramenné trojuholníky.

Platí rovnaké tvrdenie pre $n \geq 6$?

Riešenie: Nech $ABCD$ je štvorsten s vlastnosťami a), b). Označíme dĺžky jeho hrán takto: $a_1 = |AB|$, $a_2 = |BC|$, $a_3 = |AC|$, $a_4 = |BD|$, $a_5 = |AD|$, $a_6 = |CD|$. Z podmienky b) vyplývajú rovnosti

$$a_1 + a_2 + a_3 = c$$

$$a_2 + a_4 + a_6 = c$$

$$a_1 + a_4 + a_5 = c$$

$$a_3 + a_5 + a_6 = c.$$

Ak tieto rovnice sčítame, dostaneme

$$a_1 + a_2 + a_5 + a_6 + a_1 + a_1 = 2c.$$

Postupným odčítaním dostaneme odiaľ

$$a_2 = a_5, \quad a_1 = a_6, \quad a_3 = a_4.$$

Z týchto rovníc vyplýva, že všetky strany štvorstenu sú zhodné trojuholníky. Teda stačí vyšetrovať jeden z nich, napr. ABC . Čísla a_1, a_2, a_3 sú prirodzené, nie väčšie ako 5 a musia spĺňať trojuholníkovú nerovnosť. Máme pre ne 22 možností:

1,1,1; 1,2,2; 1,3,3; 1,4,4; 1,5,5;

2,2,2; 2,2,3; 2,3,3; 2,3,4; 2,4,4; 2,4,5; 2,5,5;

3,3,3; 3,3,4; 3,3,5; 3,4,4; 3,4,5; 3,5,5;

4,4,4; 4,4,5; 4,5,5;

5,5,5.

Všetky z nich, okrem 2,3,4; 2,4,5; 3,4,5, sú rovnoramenné trojuholníky. Ukážeme, že tieto prípady nenastanú, tj. že neexistuje štvorsten so stranami 2,3,4 (alebo 2,4,5; 3,4,5) a stranami zhodnými trojuholníkmi.

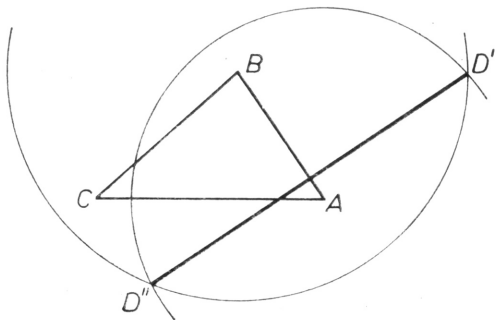
Stačí si uvedomiť, že vo všetkých troch prípadoch by bol uhol $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC \geq 90^\circ$. Ak označíme E stred strany

AC , tak ľahko vidieť, že $|BE| = |DE| \leq |AE| = \frac{a_3}{2}$. Keďže

DEB je trojuholník, musí platiť $|BE| + |DE| > |DB| = a_3$.
To však neplatí.

Tým sme dokázali, že pre $n \leq 5$ každý štvorsten s vlastnosťami a) a b) má za steny rovnoramenné trojuholníky.

Ukážeme teraz, že existuje štvorsten, pre ktorý platí $a_1 = a_5 = 4$, $a_2 = a_6 = 5$, $a_3 = a_4 = 6$. Nech ABC je trojuholník o stranách $|AB| = 4$, $|BC| = 5$ a $|AC| = 6$. Nech bod D je spoločný bod guľových plôch o stredoch A , B , C a polomeroch 5, 6, 4. Ľahko vidieť, že body $ABCD$ tvoria



Obr. 23

štvorsten, pre ktorý platí $|AD| = |BC| = 5$, $|BD| = |AC| = 6$, $|CD| = |AB| = 4$, teda vyhovuje podmienkám a), b) pre $n = 6$ a jeho steny nie sú rovnoramenné trojuholníky.

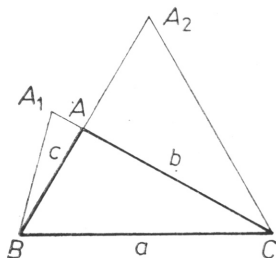
Nedokázali sme, že taký bod D existuje. Prienik guľových plôch $(A, 5)$ a $(B, 6)$ je kružnica k . Stačí ukázať, že táto kružnica pretína guľovú plochu $(D, 4)$. Priemet tejto kružnice do roviny ABC je úsečka $D'D''$, kde $|BD'| = |BD''| = 6$, $|AD'| = |AD''| = 5$ (pozri obr. 23). Stačí ukázať, že $|CD''| < 4 < |CD'|$. To sa však zistí jednoduchým výpočtom.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY II. KOLA

A - II - 1

Každý trojuholník je obsažený v rovnoramennom trojuholníku, jeho obsah je menší než tri poloviny obsahu pôvodného trojuholníku. Dokažte.

Riešenie: Uvažujme trojuholník ABC s obsahom P . Označíme a, b, c dĺžky jeho strán BC, AC, AB . Bez újmy na



Obr. 24

všeobecnosti môžeme predpokladať $a > b > c$. Nech A_1 je bod na polpriamke CA , pre ktorý platí $|A_1C| = a$ a A_2 je bod na polpriamke BA , pre ktorý platí $|A_2B| = |A_2C|$ (pozri obr. 24).

Označíme postupne $v_a, v_{a'}, v_{a''}$ výšky trojuholníkov ABC, A_1BC, A_2BC na stranu BC . Z viet o podobnosti trojuholníkov vyplýva

$$\frac{v_a}{v_{a'}} = \frac{b}{a}, \quad (1)$$

$$\frac{v_a}{v_{a''}} = \frac{c}{|A_2B|}. \quad (2)$$

Obsah P_1 rovnoramenného trojuholníka A_1BC je podľa (1) teda rovný

$$P_1 = \frac{1}{2} a \cdot v_{a'} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{2} a \cdot v_a = \frac{a}{b} P. \quad (3)$$

V prípade $\frac{a}{b} < \frac{3}{2}$, trojuholník A_1BC je hľadaný trojuholník.

Predpokladajme teraz $\frac{a}{b} \geq \frac{3}{2}$. Pre obsah P_2 rovnoramenného trojuholníka A_2BC podľa (2) platí

$$P_2 = \frac{1}{2} a \cdot v_{a''} = \frac{1}{2} a \cdot \frac{|A_2B|}{c} \cdot v_a = \frac{|A_2B|}{c} \cdot P.$$

Ak β je veľkosť uhlu pri vrchole B , tak platí

$$\cos \beta = \frac{a}{2|A_2B|}$$

a teda

$$P_2 = \frac{a}{2c \cos \beta} P. \quad (4)$$

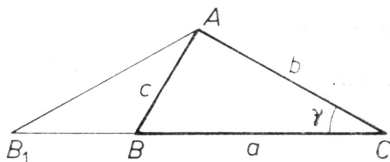
Podľa predpokladu je $b \leq \frac{2}{3} a$, teda

$$c > a - b \geq \frac{1}{3} a.$$

Potom použitím kosínusovej vety dostávame

$$\begin{aligned} \frac{a}{2c \cos \beta} &= \frac{a^2}{2ac \cos \beta} = \frac{a^2}{a^2 + c^2 - b^2} < \frac{a^2}{a^2 + \frac{1}{9} a^2 - \frac{4}{9} a^2} = \\ &= \frac{1}{\frac{6}{9}} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Podľa vzťahu (4) v tomto prípade obsah trojuholníka A_2BC je menší ako tri polovice pôvodného trojuholníka.



Obr. 25

Iné riešenie: Použijeme označenie z predchádzajúceho riešenia. Uvažujme trojuholník B_1AC , kde B_1 je taký bod na polpriamke CB , pre ktorý platí $|B_1A| = b$. Označíme P_3 obsah rovnoramenného trojuholníka B_1AC . Ľahko vidieť, že platí (pozri obr. 25)

$$|B_1C| = 2b \cos \gamma$$

a teda

$$P_3 = \frac{1}{2} |B_1C| \cdot v_a = \frac{2b \cos \gamma}{a} \cdot \frac{1}{2} a \cdot v_a = \frac{2b \cos \gamma}{a} P. \quad (5)$$

Dokážeme, že platí

$$P_1 < \sqrt{2} \cdot P$$

alebo

$$P_3 < \sqrt{2} \cdot P.$$

To je silnejšie tvrdenie ako tvrdenie úlohy, lebo $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$.

Dokážeme to sporom. Predpokladajme, že $P_1 \geq \sqrt{2} \cdot P$, $P_3 \geq \sqrt{2} \cdot P$. Potom podľa (3) a (5) je

$$\frac{a}{b} \geq \sqrt{2}, \quad \frac{2b}{a} \cos \gamma \geq \sqrt{2}$$

a teda

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{2b}{a} \cos \gamma \geq \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2,$$

tj.

$$\cos \gamma \geq 1.$$

To však nie je možné, lebo γ je uhol trojuholníka ABC .

Tým je tvrdenie dokázané.

Nájdite všetky riešenia sústavy rovníc

$$1980x_1 + 1979x_2 + \dots + 2x_{1979} + x_{1980} = 0, \quad (1)$$

$$x_1 - x_{1980} = x_2 - x_{1979} = \dots = x_{990} - x_{991} = 1981, \quad (2)$$

$$x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = \dots = x_{989} - x_{990} = -1. \quad (3)$$

Riešenie: Z rovníc (3) dostávame

$$x_{k+1} = x_k + 1 \text{ pre } k = 1, 2, \dots, 989$$

a teda

$$x_k = x_1 + (k - 1) \text{ pre } k = 1, 2, \dots, 990. \quad (4)$$

Podľa rovníc (2) platí

$$x_k = x_{1981-k} - 1981 \text{ pre } k = 991, \dots, 1980.$$

Použitím (4) dostaneme

$$x_k = x_1 - k - 1 \text{ pre } k = 991, \dots, 1980. \quad (5)$$

Ak takto získané výrazy dosadíme do rovnice (1), dostaneme

$$1980x_1 + 1979(x_1 + 1) + \dots + 991(x_1 + 989) + \\ + 990(x_1 - 992) + \dots + 1 \cdot (x_1 - 1981) = 0.$$

Výraz na ľavej strane môžeme upraviť postupne takto:

$$\begin{aligned}
& x_1(1980 + 1979 + \dots + 1) + \\
& + 1 \cdot 1979 + 2 \cdot 1978 + \dots + 989 \cdot 991 - \\
& - 990 \cdot 992 - 989 \cdot 993 - \dots - 1 \cdot 1981 = \\
& = \frac{1}{2} x_1 \cdot 1980 \cdot 1981 + 1 \cdot (1979 - 1981) + \\
& + 2(1978 - 1980) + \dots + 989(991 - 993) - \\
& - 990 \cdot 992 = x_1 \cdot 990 \cdot 1981 - \\
& - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 989 \cdot 990 - 990 \cdot 992 = \\
& = (x_1 - 1) 990 \cdot 1981.
\end{aligned}$$

Odtiaľ vyplýva, že $x_1 = 1$, lebo pravá strana rovnice (1) je nula.

Zistili sme teda, že ak čísla $x_1, \dots, x_{1980}$ vyhovujú rovniciam (1), (2), (3), tak musí platiť

$$x_k = k \text{ pre } k = 1, 2, \dots, 990$$

a

$$x_k = -k \text{ pre } k = 991, \dots, 1980.$$

Skúškou ľahko zistíme, že je to skutočne jediné riešenie tejto sústavy rovníc.

A - II - 3a

Jsou dána přirozená čísla $n > 1$, k . Konečná posloupnost $I_1, I_2, \dots, I_m$ uzavřených intervalů má tyto vlastnosti:

a) Pro každý její člen $I_j = \langle u_j, v_j \rangle$ platí, že u_j, v_j jsou přirozená čísla, $1 \leq u_j < v_j \leq n$.

b) Každé reálné číslo leží nejvýše v k jejích členech. Jaké hodnoty může nanejvýš nabývat číslo m ?

Riešenie: Označíme s_i počet tých intervalov, ktoré majú ľavý koncový bod i . Teda

$$m = s_1 + \dots + s_{n-1}.$$

Ak interval I má ľavý koncový bod i , tak $i + 1$ patrí do I . Teda číslo $i + 1$ patrí aj do intervalov s ľavým koncovým bodom i aj do intervalov s pravým koncovým bodom $i + 1$. Podľa podmienky b) z toho vyplýva

$$s_i + s_{i+1} \leq k. \quad (1)$$

Ak n je nepárne, $n = 2p + 1$, tak dostávame

$$m = (s_1 + s_2) + (s_3 + s_4) + \dots + (s_{2p-1} + s_{2p}) \leq pk.$$

Podobne pre n párne, $n = 2q$ z vzťahu (1) vyplýva

$$\begin{aligned} m &= (s_1 + s_2) + \dots + (s_{2q-2} + s_{2q-1}) + s_{2q} \leq \\ &\leq (q - 1)k + k = qk. \end{aligned}$$

Teda

$$m \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor k. \quad (2)$$

Ľahko vidieť, že (2) je najlepšie ohraničenie čísla m , tj. existuje postupnosť intervalov $I_1, \dots, I_m$ s vlastnosťami a)

a b) taká, že $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor k$. Stačí totiž položiť:

$$I_1 = \dots = I_k = \langle 1, 2 \rangle,$$

$$I_{k+1} = \dots = I_{2k} = \langle 3, 4 \rangle,$$

.

.

.

$$I_{(k-1)\left[\frac{n}{2}\right]+1} = \dots = I_{k\left[\frac{n}{2}\right]} = \langle 2\left[\frac{n}{2}\right] - 1, 2\left[\frac{n}{2}\right] \rangle.$$

Iné riešenie: Každý z intervalov $I_1, \dots, I_m$ obsahuje párne číslo nie väčšie ako n . Párnych čísiel nie väčších ako n je $\left[\frac{n}{2}\right]$. Keďže každé smie byť najviac v k intervaloch, tak

$$m \leq k \left[\frac{n}{2}\right].$$

Podľa riešenia *Igora Kříže*, žiaka II.D triedy gymnázia W. Piecka v Prahe 2.

A - II - 3b

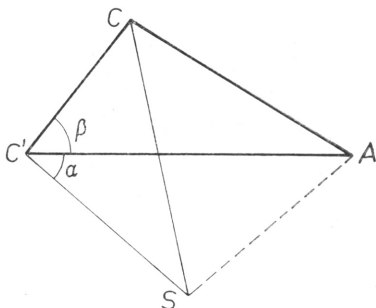
Určete množinu, kterou vyplní body všech krychlí, jejichž tělesová úhlopříčka je obsažena v dané kouli s jednotkovým poloměrem.

Riešenie: Nech S je stred gule G s polomerom 1. Označíme M hľadanú množinu.

Nech M' je množina bodov všetkých kociek K , ktorých telesová uhlopriečka t je tetivou gule G a štyri vrcholy kocky

K ležia v rovine určenej tetivou t a bodom S . Určíme množinu M' a ukážeme, že $M = M'$.

Uvažujme kocku $ABCD A' B' C' D'$ takú, že AC' je tetiva



Obr. 26

gule G a body A, A', C, C', S ležia v jednej rovine. Označíme $r = |SC|$, $\alpha = \sphericalangle SC'A$, $\beta = \sphericalangle AC'C$ (pozri obr. 26).

Jednoduchým výpočtom zistíme, že

$$|AC'| = 2 \cos \alpha, \quad |C'C| = \frac{2 \cos \alpha}{\sqrt{3}}$$

(lebo pomer $|C'C| : |CA| : |C'A|$ je $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$).

Podľa kosínusovej vety dostávame

$$\begin{aligned} r^2 &= |SC'|^2 + |C'C|^2 - 2|SC'| \cdot |C'C| \cdot \cos(\alpha + \beta) = \\ &= 1 + \frac{4 \cos^2 \alpha}{3} - \frac{4 \cos \alpha}{\sqrt{3}} \cos(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

$$\text{Zrejme platí } \cos \beta = \frac{|C'C|}{|AC'|} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Potom jednoduchou úpravou máme

$$\begin{aligned} r^2 &= 1 + \frac{4 \cos^2 \alpha}{3} - \frac{4 \cos \alpha}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin \alpha \right) = \\ &= 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Najväčšia hodnota r bude pre $\alpha = \frac{\pi}{4}$ a to $\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}}$. Ukáže-

me, že M' je guľa so stredom S a polomerom $\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}}$.

Ak bod X patrí do M' , tak X patrí do nejakej kocky

$ABCD A' B' C' D'$, a teda $|SX| \leq |SC| \leq \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}}$. Teda

X patrí do gule so stredom S a polomerom $\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}}$.

Nech naopak X je bod tejto gule. Ak X patrí do gule G , tak sa ľahko zostrojí kocka, ktorej telesová uhlopriečka je priemer gule G a obsahuje bod X . Teda X patrí do M' . Ak X nepatrí do G , tak stačí zvoliť kocku $ABCD A' B' C' D'$ takú,

že $SC = \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}}$ a bod X leží na polpriamke SC . Potom

X patrí do tejto kocky a teda X patrí do množiny M' .

Teraz ukážeme, že $M' = M$. Zrejme $M' \subseteq M$ - priamo

podľa definícií. Nech bod X patrí do M . Ak X patrí do gule G , tak argumentom rovnakým ako vyššie možno ukázať, že bod X patrí do M' . Nech bod X nepatrí do gule G , ale patrí do kocky $ABCD A'B'C'D'$ a telesová uhlopriečka AC' patrí do gule. Rovnoľahlosťou s vhodným koeficientom a stredom na úsečke AC' zväčšíme kocku $ABCD A'B'C'D'$ tak, aby uhlopriečka AC' prešla do tetivy gule G . Dostaneme tak kocku K' , ktorá obsahuje bod X . Pootočením okolo telesovej uhlopriečky, ktorá je tetivou gule G a potom okolo stredu S gule G dostaneme kocku K'' , ktorá obsahuje bod X a štyri vrcholy má v rovine určenej stredom S a uhlopriečkou - tetivou. Odtiaľ vyplýva, že $X \in M'$.

Teda hľadaná množina je guľa so stredom S a polomerom

$$\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}}.$$

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY III. KOLA

A - III - 1

Najdšte všetky reálne hodnoty parametru a , pro které platí:

nerovnice

$$x^4 + x^3 - 2(a + 1)x^2 - ax + a^2 < 0 \quad (1)$$

má alespoň jedno řešení v oboru reálných čísel.

Riešenie: Ľavá strana nerovnice je kvadratický trojčlen v premennej a . Jeho diskriminant je

$$D = (-x - 2x^2)^2 - 4(x^4 + x^3 - 2x^2) = \\ = x^2 + 4x^4 + 4x^3 - 4x^4 - 4x^3 + 8x^2 = 9x^2.$$

Korene trojčlenu sú $a_1 = x^2 + 2x$, $a_2 = x^2 - x$. Teda nerovnicu (1) môžeme napísať v tvare

$$(x^2 + 2x - a) \cdot (x^2 - x - a) < 0. \quad (2)$$

Všimnime si diskriminanty D_1 , D_2 trojčlenov $x^2 + 2x - a$, $x^2 - x - a$ (v premennej x):

$$D_1 = 4 + 4a, \quad D_2 = 1 + 4a.$$

(Ak $a \leq -1$, tak $D_1 \leq 0$, $D_2 < 0$ a pre každé x je $x^2 + 2x - a \geq 0$, $x^2 - x - a > 0$. Teda nerovnica (2) nemá reálne riešenie.

Ak $a > 0$, stačí zvoliť $x = \sqrt{a}$. Našli sme aspoň jedno riešenie nerovnice (2).

Ak $a > -1$, $a \leq 0$, tak $x^2 + 2x - a$ je záporné pre x z intervalu $(-1 - \sqrt{1 + a}, -1 + \sqrt{1 + a})$. Špeciálne, pre $x = -1$ je $x^2 - 2x - a < 0$. Ľahko vidieť, že $x^2 - x - a$ je kladné pre $x = -1$ a $a > -1$. Teda v tomto prípade nerovnica (2) má reálne riešenie $x = -1$.

Zistili sme, že nerovnica (1) má reálne riešenie pre $a > -1$. Pre $a \leq -1$ reálne riešenie nemá.

A - III - 2

Nech $n \geq 1$ je prirodzené číslo. Na priamke je daných $n^2 + 1$ uzavretých úsečiek. Potom platí aspoň jedno z nasledujúcich tvrdení:

a) Existuje medzi nimi $n + 1$ úsečiek, ktoré majú neprázdny prienik.

b) Existuje medzi nimi $n + 1$ úsečiek tak, že každé dve z nich majú prázdny prienik.

Dokážte.

Riešenie: Označíme dané úsečky $I_1, I_2, \dots, I_{n+1}$. Nech A_i je ľavý a B_i pravý koncový bod úsečky I_i . Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že bod A_i neleží vpravo od bodu A_{i+1} , tj. bod A_i buď splýva s bodom A_{i+1} alebo leží od neho vľavo.

Predpokladajme, že neplatí tvrdenie a). Teda každých $n + 1$ úsečiek má prázdny prienik. Špeciálne, prienik $n + 1$ úsečiek $I_{(k-1)n+1}, I_{(k-1)n+2}, \dots, I_{kn}, I_{kn+1}$ je prázdny. Z toho vyplýva, že ľavý koncový bod A_{kn+1} úsečky I_{kn+1} nepatrí do niektorej z úsečiek $I_{(k-1)n+1}, \dots, I_{kn}$. Označíme ju U_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Označíme $U_{n+1} = I_{n+1}$.

Ukážeme, že každé dve z úsečiek $U_1, U_2, \dots, U_{n+1}$ majú prázdny prienik. Skúmame dve také úsečky U_i, U_j , kde $1 \leq i < j \leq n + 1$. Z definície úsečky U_i vyplýva, že bod A_{in+1} nepatrí do úsečky U_i . Teda pravý koncový bod úsečky U_i je vľavo od A_{in+1} . Z definície U_j však vyplýva, že ľavý koncový bod úsečky U_j je niektorý z bodov $A_{(j-1)n+1}, \dots, A_{jn}$ alebo A_{n+1} , ak $j = n$. Keďže $i < j$, tak $i \leq j - 1$ a teda pravý koncový bod úsečky U_i je vľavo od ľavého koncového bodu úsečky U_j . Z toho už vyplýva, že $U_i \cap U_j = \emptyset$.

A - III - 3

V rovine je daný štvorec $ABCD$ so stranou $|AB| = 1$.

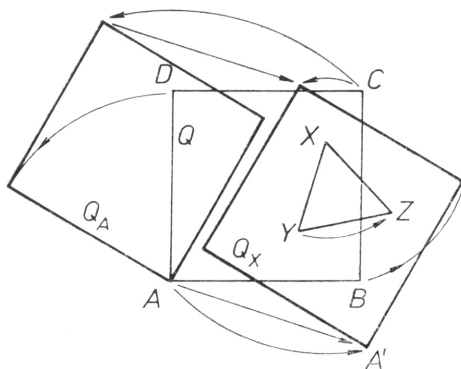
a) Určte v rovine množinu M , ktorú vyplnia tretie vrcholy

všetkých rovnostranných trojuholníkov, ktorých dva vrcholy ležia vo vnútri alebo na hranici daného štvorca $ABCD$.

b) Vypočítajte obsah množiny M .

Riešenie: Daný štvorec $ABCD$ označíme Q . Nech φ_X označuje otočenie roviny okolo stredu X o 60° v kladnom smere (proti smeru hodinových ručičiek) a ψ_X označuje otočenie roviny okolo stredu X o 60° v zápornom smere. Kvôli jednoduchosti, označíme $Q_X = \varphi_X(Q)$ obraz štvorca Q v otočení φ_X .

Ak XYZ je rovnostranný trojuholník (pozri obr. 27),



Obr. 27

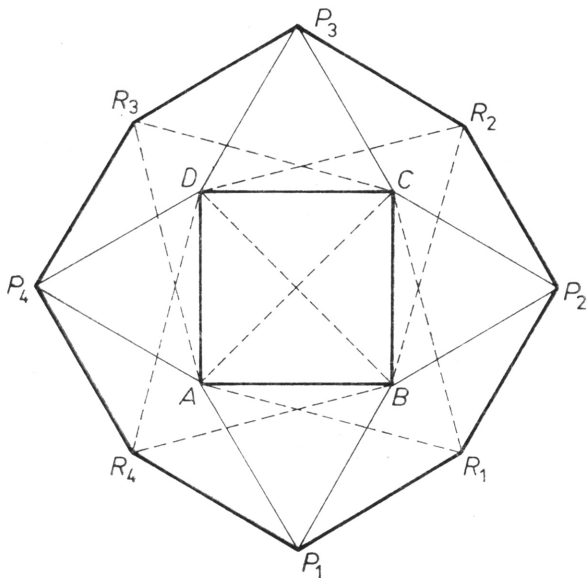
body X, Y ležia v štvorci Q , tak bod Z je obraz bodu Y pri otočení φ_X a teda $Z \in Q_X$. Z toho vyplýva, že hľadaná množina M je podmnožina zjednotení všetkých štvorcov Q_X pre $X \in Q$.

Lahko vidieť, že štvorec Q_X vznikol zo štvorca Q_A posunutím o vektor AA' , kde $A' = \varphi_X(A)$. Trojuholník $AA'X$

je rovnostranný, lebo $|AX| = |A'X|$ a $\sphericalangle A'XA = 60^\circ$. Teda bod A' je obraz bodu X v otočení ψ_A . Označíme Q' obraz štvorca Q v otočení ψ_A . Potom bod $A' \in Q'$.

Z uvedeného vyplýva, že každý bod Z množiny M dostaneme z bodu A posunutím o vektor $\vec{AE} + \vec{AF}$, kde $E \in Q_A$ a $F \in Q'$. Označíme W množinu všetkých bodov Z , ktoré sú posunutím bodu A o vektor $\vec{AE} + \vec{AF}$, $E \in Q_A$, $F \in Q'$. Teda $M \subset W$.

Nech P_1, P_2, P_3, P_4 sú tretie vrcholy rovnostranných trojuholníkov $ABP_1, BCP_2, CDP_3, DAP_4$, ktoré ležia mimo



Obr. 28

štvorca Q . Označíme ďalej R_1, R_2, R_3, R_4 vrcholy rovnostranných trojuholníkov, ktorých jedna strana je uhlopriečka štvorca Q . Nech S je stred štvorca Q (pozri obr. 28).

Ukážeme, že W je podmnožina osemuholníka $P_1R_1P_2R_2P_3R_3P_4R_4$ a tento osemuholník je podmnožina hľadanej množiny M . Odtiaľ a z inklúzie $M \subseteq W$ vyplýva, že hľadaná množina M je uvedený osemuholník.

Ľahko vidieť, že $P_1 = \psi_A(B)$, $R_1 = \psi_A(C)$, $P_4 = \varphi_A(D)$, $R_3 = \varphi_A(C)$. Štvorec Q_A leží v polrovine určenej priamkou $R_3\varphi_A(B)$ obsahujúcou bod S . Ak túto polrovinu posunieme $\xrightarrow{\quad}$ o vektor $\overrightarrow{AF}$, $F \in Q'$, tak bude podmnožinou polroviny určenej priamkou P_3R_2 obsahujúcou bod S . Teda množina W je podmnožina tejto polroviny. Štvorec Q' leží v polrovine určenej priamkou $\psi_A(D)R_1$ obsahujúcou bod S . Ak štvorec Q' posunieme $\xrightarrow{\quad}$ o vektor $\overrightarrow{AE}$, $E \in Q_A$, tak bude ležať v polrovine určenej priamkou R_2P_2 obsahujúcou bod S . Teda množina W je podmnožina tejto polroviny. Podobne by sme postupovali pre ďalšie polroviny. Odtiaľ vyplýva, že množina W je podmnožina osemuholníka $P_1R_1P_2R_2P_3R_3P_4R_4$.

Q_1, Q_3, Q_5, Q_7 budú štvorce, ktoré získame zo štvorca Q' posunutím o vektory $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{A\varphi_A(B)}, \overrightarrow{AR_3}, \overrightarrow{AP_4}$. Q_2, Q_4, Q_6, Q_8 budú štvorce, ktoré získame zo štvorca Q_A posunutím o vektory $\overrightarrow{AR_1}, \overrightarrow{A\psi_A(D)}, \overrightarrow{AA}, \overrightarrow{AP_1}$. Zrejme zjednotenie $Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_8$ je osemuholník $P_1R_1P_2R_2P_3R_3P_4R_4$.

Ukážeme, že každé Q_i , $i = 1, 2, \dots, 8$ je podmnožina množiny M . Nech napr. bod Z patrí do množiny Q_3 . Potom existuje bod $F \in Q'$ taký, že Z je posunutie bodu F o vektor $\overrightarrow{A\varphi_A(B)}$. Nech $X \in Q$ je taký bod, že $\psi_A(X) = F$. Ľahko

vidieť, že trojuholník XBZ je rovnostranný. Teda $Z \in M$.
Pre ostatné Q_i postupujeme analogicky.

Zistili sme, že množina M je osemuholník
 $P_1R_1P_2R_2P_3R_3P_4R_4$.

b) Obsah množiny M je zrejmé osemnásobok obsahu trojuholníka P_1R_1S . Uhol $\angle P_1SR_1$ je 45° , pre dĺžky strán

platí $|SP_1| = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|SR_1| = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3}$. Teda obsah M je

$$8 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3} \cdot \sin 45^\circ = 3 + \sqrt{3}.$$

Spracované podľa riešenia *M. Engliša*, žiaka III.D triedy gymnázia W. Piecka v Prahe 2.

A - III - 4

Je dáno prirodzené číslo n . Dokažte, že existuje prvočíslo p a posloupnosť $a_1, a_2, \dots$ prirodzených čísel tak, že všetky členy posloupnosti $p + na_1, p + na_2, \dots$ jsou navzájem různá prvočísla.

Riešenie: Nech P je množina všetkých prvočísel. Označíme P_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$ množinu tých prvočísel, ktoré pri delení číslom n dávajú zvyšok i . Potom

$$P = P_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_{n-1}.$$

Množina P je nekonečná, teda existuje i také, že množina P_i je nekonečná, $0 \leq i < n$. Nech p je najmenší prvok

množiny P_i . Potom každý prvok $x \in P_i$ je tvaru $x = p + na$ pre vhodné a . Nech $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ je očíslovanie množiny podľa veľkosti, tj. $x_n < x_{n+1}$. Stačí položiť $a_i = \frac{x_i - p}{n}$.

A - III - 5

Je dané prirodzené číslo n . Určte maximálnu hodnotu výrazu $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ za predpokladu, že $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú celé nezáporné čísla vyhovujúce podmienke

$$x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 \leq 7n.$$

Riešenie: Pre $n = 1$ je maximálna hodnota výrazu $x_1 = 1$. Nech $n \geq 2$ a predpokladajme, že platí

$$x_1^3 + \dots + x_n^3 \leq 7n.$$

Najprv si všimneme, že niektoré z čísiel $x_1, \dots, x_n$ musí byť menšie ako 2. Keby totiž $x_1 \geq 2, \dots, x_n \geq 2$, tak

$$x_1^3 + \dots + x_n^3 \geq 8n > 7n.$$

Ak niektoré z čísiel $x_1, \dots, x_n$ je väčšie ako 2, napr. $x_j > 2$, tak vytvoríme novú n -ticu. Niektoré z čísiel $x_1, \dots, x_n$ musí byť menšie ako 2, napr. $x_i < 2$. Položíme

$$y_i = x_i + 1, y_j = x_j - 1, y_k = x_k \text{ pre } k \neq i, j.$$

Potom

$$y_1 + \dots + y_n = x_1 + \dots + x_n$$

a

$$y_i^3 + y_j^3 = x_i^3 + x_j^3 + 3(x_i(x_i + 1) - x_j(x_j - 1)) < < x_i^3 + x_j^3.$$

Teda

$$y_1^3 + \dots + y_n^3 < 7n.$$

Z uvedeného vyplýva, že môžeme predpokladať toto: ak $x_1 + \dots + x_n$ je maximálny, tak všetky čísla $x_1, \dots, x_n$ sú menšie alebo rovné 2.

Keby všetky x_i boli ostro menšie ako 2, tak $(x_1 + 1)^3 + \dots + x_n^3 \leq 2^3 + 1 + \dots + 1 = 8 + (n - 1) < < 7n$. Teda výraz $x_1 + \dots + x_n$ nie je maximálny. Z toho vyplýva, že aspoň jedno z čísel $x_1, \dots, x_n$ je rovné 2.

Keby niektoré z čísel $x_1, \dots, x_n$ bolo rovné 0, napr. $x_i = 0$, niektoré rovné 2, napr. $x_j = 2$, tak

$$(x_i + 1)^3 + (x_j - 1)^3 = 1^3 + (x_j - 1)^3 < x_i^3 + x_j^3.$$

Môžeme zhrnúť: ak $x_1, \dots, x_n$ sú také čísla, že výraz $x_1 + \dots + x_n$ je maximálny, tak môžeme predpokladať $1 \leq x_i \leq 2, i = 1, 2, \dots, n$.

Je potrebné určiť, koľko čísel z n -tice $x_1, \dots, x_n$ môže byť rovné 2. Nech $x_1 = \dots = x_k = 2, x_{k+1} = \dots = x_n = 1$. Potom

$$k \cdot 3^3 + (n - k) \cdot 1 \leq 7n.$$

Teda

$$k \leq \frac{6n}{7}.$$

Maximálna hodnota výrazu $x_1 + \dots + x_n$ za uvedených podmienok je

$$2 \cdot \left\lfloor \frac{6n}{7} \right\rfloor + 1 \cdot \left(n - \left\lfloor \frac{6n}{7} \right\rfloor \right) = n + \left\lfloor \frac{6n}{7} \right\rfloor.$$

A - III - 6

Vo vnútri gule s objemom V je daných 11 rôznych bodov. Potom existujú roviny ϱ, σ , ktoré obe obsahujú stred gule a určujú výseč s objemom $\frac{1}{8} V$, ktorá neobsahuje vo svojom vnútri žiadny z daných 11 bodov. Dokážte.

Riešenie: Nech ϱ_1 je rovina obsahujúca stred gule a aspoň dva body danej množiny. Rozdelí guľu na dve pologule. Vnútri jednej z nich sú najviac 4 body. Nech rovina ϱ_2 obsahuje stred gule, je kolmá na rovinu ϱ_1 a obsahuje aspoň jeden z týchto štyroch bodov. Roviny ϱ_1, ϱ_2 vytnú štvrt' gule, ktorá obsahuje vnútri najviac jeden bod. Nech rovina ϱ_3 je kolmá na ϱ_1, ϱ_2 a obsahuje stred gule. Rovina ϱ_3 rozdelí uvedenú štvrt' gule na dve rovnaké časti o objeme $\frac{1}{8} V$. Jedna z týchto častí neobsahuje žiaden z daných bodov vnútri.

Iné riešenie: Zrejme stačí nájsť výseč gule o objeme aspoň $\frac{1}{8} V$, ktorá v svojom vnútri neobsahuje žiadny z daných bodov.

Nech π_1 je rovina obsahujúca stred gule a aspoň dva z da-

ných bodov. Rozdelí guľu na dve pologule, z ktorých jedna obsahuje najviac 4 body. Dvoma z nich vedme rovinu π_2 obsahujúcu stred gule. Nech π_3, π_4 sú roviny, ktoré obsahujú zostávajúce dva body a priesečnicu rovin π_1 a π_2 . Roviny π_2, π_3, π_4 rozdelia pologuľu na štyri výseče, ktoré neobsahujú vo svojom vnútri žiadny z daných bodov. Podľa Dirichletovho princípu aspoň jedna z týchto výsečí má objem väčší alebo rovný $\frac{1}{8} V$.

Cílem korespondenčního semináře je dále zvyšovat úroveň špičkových řešitelů, kteří nejsou z Prahy ani z Bratislavy a nemají tak možnost pracovat v tamních seminářích pro přípravu na mezinárodní MO. K účasti pozvalo předsednictvo ÚV MO na základě výsledků v MO, návrhů KV MO a individuálního zájmu asi 50 žáků, z nichž se přihlásilo a zúčastnilo přes 30. Pravidelně jim byly rozesílány série poměrně náročných úloh, které měli během 4–5 týdnů vyřešit. Došlá řešení byla pak opravena, ohodnocena a spolu s rozmnoženým komentářem vrácena účastníkům. Uvádíme znění všech úloh zadaných v korespondenčním semináři:

1. Teorie čísel

1.1 Posloupnost $\{a_n\}$ je definována předpisem

$$a_n = 3(n^2 + n) + 7.$$

Dokažte, že má následující vlastnosti:

- (1) Mezi každými pěti po sobě následujícími členy je právě jeden dělitelný pěti.
- (2) Žádný člen není třetí mocninou celého čísla.

1.2 Dokažte: Pro každé přirozené číslo n je číslo

$(n^3 - 1)n^3(n^3 + 1)$ dělitelné číslem 504.

1.3 Najděte všechna prvočísla p taková, že $4p^2 + 1$, $6p^2 + 1$ jsou také prvočísla.

1.4 Platí-li pro celá čísla a, b

$$2a^2 + a = 3b^2 + b,$$

jsou čísla $a - b$, $2a + 2b + 1$ druhé mocniny celých čísel.
Dokažte.

1.5 Dokažte: Jsou-li x_1, x_2 kořeny rovnice

$$x^2 + px - 1 = 0,$$

kde p je liché číslo, pak čísla $x_1^{17} + x_2^{17}$, $x_1^{18} + x_2^{18}$ jsou celá a nesoudělná.

1.6 Najděte všechna celá čísla x, y, z , pro která platí

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz.$$

1.7 Najděte všechna celá čísla x, y, z, t , pro která platí

$$x + y + z + t = xyzt.$$

2. Geometrické nerovnosti

2.1 Na kruhovém stole s poloměrem 25 leží 143 mincí s poloměrem 1. Dokažte, že se na stůl vejde ještě jedna mince tak, aby se s žádnou mincí nepřekrývala.

2.2 Ve čtvercovém poli o straně 12 je studna a od ní vede síť zavlažovacích kanálů. Kanály jsou složeny z úseček a každý

bod pole je od některého vzdálen nanejvýš 1. Dokažte, že celková délka kanálů je větší než 70.

- 2.3 Střed kruhového lesa o poloměru 50 je v počátku a stromy rostou v bodech s celočíselnými souřadnicemi (kromě po-

čátku). Budou-li poloměry stromů menší než $\frac{1}{\sqrt{2501}}$, bude ze středu vidět z lesa ven, budou-li poloměry stromů $\frac{1}{50}$, vidět nebude. Dokažte.

- 2.4 Ve středu čtvercového pole je vlk a ve vrcholech čtyři psi. Vlk může běhat po celém poli, psi jen po obvodu. Vlk přemůže jednoho psa, dva psi přemohou vlka. Psi umějí běhat víc než 1,5krát rychleji než vlk. Dokažte, že psi mohou udržet vlka v poli.

- 2.5 Křižník pluje rovnoměrně přímočaře rychlostí v . V okamžiku, kdy ho upozoruje ponorka, je spojnice obou lodí kolmá na dráhu křižníku a lodi mají vzdálenost d . Na jakou nejmenší vzdálenost se může ponorka přiblížit ke křižníku, má-li maximální rychlost u ?

- 2.6 Světlomet majáku ozařuje úsečku dlouhou 1 km a otáčí se jednou za minutu. Jakou rychlostí musí plout loď, aby se dostala k majáku a nebyla osvětlena?

- 2.7 Na okraji kruhového bazénu stojí Petr a uprostřed plave Pavel. Petr neumí plavat, ale běhá k -krát rychleji než plave Pavel, ale pomaleji, než běhá Pavel. Uteče Pavel Petrovi?

3. Funkcionální rovnice

- 3.1 Je dáno reálné číslo a funkce f taková, že pro všechna reálná čísla x platí

$$f(x + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2}.$$

Dokažte, že funkce f je periodická. Uveďte aspoň dva příklady funkce f , která splňuje podmínku.

- 3.2 Najděte všechny mnohočleny f takové, že pro každé reálné číslo x platí:

$$xf(x - 1) = (x - 26)f(x).$$

- 3.3 Najděte všechny spojité funkce g , k nimž existuje spojitá funkce f dvou proměnných tak, že pro každá dvě reálná čísla x, y platí

$$g(xy) = f(x, g(y)).$$

- 3.4 Najděte všechny funkce f takové, že pro každá dvě reálná čísla x, y platí

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y).$$

- 3.5 Najděte všechny funkce f takové, že pro každá dvě reálná čísla x, y platí

$$f(x)f(y) = f(x - y).$$

- 3.6 Najděte všechny funkce f takové, že pro každá dvě reálná čísla x, y platí

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x) + f(y), \\ f(xy) &= f(x)f(y). \end{aligned}$$

- 3.7 Najděte všechny rostoucí funkce f takové, že pro všechna kladná reálná čísla x, y platí

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

4. Kombinatorická geometrie

- 4.1 V mnohoúhelníku je sestrojena soustava úhlopříček, které se neprotínají. Dokažte, že aspoň ze dvou vrcholů nevychází žádná z těchto úhlopříček.
- 4.2 V rovině je dána konečná množina bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Body postupně spojujeme úsečkami tak, aby se úsečky neprotínaly; pokračujeme tak dlouho, dokud to jde. Dokažte, že počet úseček, které se podaří sestroit, nezávisí na postupu. V jakých mezích se při daném počtu bodů pohybuje počet úseček v závislosti na rozložení bodů?
- 4.3 Konečná množina bodů v rovině má tu vlastnost, že osa souměrnosti libovolných jejích dvou bodů je osou souměrnosti celé množiny. Dokažte, že množina leží na kružnici. Platí to i pro nekonečné množiny?
- 4.4 Najděte všechny takové n -prvkové množiny bodů v rovině, že vzdálenosti bodů v množině nabývají jen dvou hodnot a, b . Pro jaká čísla n a jaký poměr $a : b$ taková množina existuje?
- 4.5 Existuje sedmiprvková množina bodů v rovině tak, aby každé tři její body byly vrcholy rovnoramenného trojúhelníka? Popište všechny šestibodové množiny s touto vlastností.
- 4.6 Uvažujme množinu bodů v rovině, z jejíchž libovolných pěti bodů lze vybrat čtyři tak, aby ležely na kružnici.

Dokažte: Má-li množina $n > 6$ bodů, leží aspoň $n - 1$ z nich na kružnici. Platí to také pro $n < 7$?

- 4.7 Konečná množina bodů v rovině má tu vlastnost, že na každé přímce procházející dvěma body množiny leží aspoň jeden další bod množiny. Dokažte, že množina leží v přímce. Platí to i pro nekonečnou množinu?

5. Stereometria

- 5.1 SÚ dané priamky a, b, c , z ktorých každé dve sú navzájom mimobežné a každá z nich je rovnobežná s danou rovinou ϱ . Nech M je množina všetkých priečok priamok a, b, c (tj. množina všetkých takých priamok, z ktorých každá pretína každú z priamok a, b, c). Nech $m \in M$ je ľubovoľná priečka a nech $M_1 = m \cap a$, $M_2 = m \cap b$, $M_3 = m \cap c$.

a) Akú hodnotu má podielový pomer $u = (M_1 M_2 M_3) =$

$$= \frac{|M_1 M_3|}{|M_2 M_3|} \quad (\text{v tejto úlohe } |M_i M_j| \text{ znamená dĺžku}$$

orientovanej úsečky $M_i M_j$, tj. kladné alebo záporné reálne číslo) pre ľubovoľnú priamku $m \in M$?

b) Majú všetky priamky $m \in M$ nejakú význačnú vlastnosť týkajúcu sa polohy?

- 5.2 Nech je daný trojhran $Sabc$ (S - vrchol trojhranu, polpriamky a, b, c - hrany trojhranu). Uhly dvojíc hrán trojhranu označme $\alpha = \sphericalangle(b, c)$, $\beta = \sphericalangle(c, a)$, $\gamma = \sphericalangle(a, b)$; uhol susedný s uhlom α , resp. β , resp. γ označme α' , resp. β' , resp. γ' .

1. Dokažte:

a) Tri osi uhlov α', β', γ' ležia v jednej rovine ϱ .

b) Tri osi uhlov α, β, γ' (resp. α, β', γ , resp. α', β, γ) ležia v jednej rovine ϱ .

c) Rovina ϱ (resp. ϱ') zvierá s hranami a, b, c zhodné uhly.

2. Dokážte: Tri roviny σ, τ, ξ , prechádzajúce postupne osami uhlov α, β, γ , pričom $\sigma \perp (b, c), \tau \perp (c, a), \xi \perp (a, b)$, sa pretínajú v jednej priamke p , ktorá je kolmá na rovinu ϱ z časti 1.

5.3 Nech z n bodov $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 3$) priestoru žiadne štyri neležia v jednej rovine. Nech ϱ je rovina rôznobežná s každou z priamok $A_i A_{i+1}$ ($i = 1, \dots, n; A_{n+1} = A_1$). Označme $A_i A_{i+1} \cap \varrho = K_{i,i+1}$.

a) Dokážte: $\prod_{i=1}^n (A_i A_{i+1} K_{i,i+1}) = 1$.

b) Preverte platnosť obráteného výroku:

Ak $K_{i,i+1}$ ($i = 1, \dots, n$) sú body priamok $A_i A_{i+1}$ ($A_{n+1} = A_1$), pre ktoré platí

$$\prod_{i=1}^n (A_i A_{i+1} K_{i,i+1}) = 1,$$

ležia všetky body $K_{i,i+1}$ v jednej rovine.

Sformulujte prípadnú závislosť platnosti tohto výroku od čísla n .

5.4 V rovine alebo priestore treba najst' n bodov $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \in \mathbb{N}$) tak, aby ani jeden z uhlov $\sphericalangle A_i A_j A_k$ ($i, j, k = 1, 2, \dots, n; i \neq j \neq k \neq i$) nebol tupý.

Zistite všetky prirodzené čísla n , pre ktoré je úloha riešiteľná.

a) v rovine;

b) v priestore.

(Tvrdenie odôvodnite).

5.5 Nech sú dané úsečky AB , CD . Nech M je množina všetkých priamok m , obsahujúcich spoločnú hranu EF každých dvoch štvorstenov $ABEF$, $CDEF$, pre ktoré sa pomer ich objemov rovná danému (kladnému) reálnému číslu k . Nájdite množinu M' všetkých takých priamok $m \in M$, ktoré prechádzajú daným bodom S .

5.6 a) Ako treba umiestniť na guľovej ploche n bodov $A_1, \dots, A_n$ ($n = 2, 3, 4, 5, 6$), ak najmenšia zo vzdialeností $|A_i A_j|$ ($i, j = 1, \dots, n; i \neq j$) má mať maximálnu možnú hodnotu?

b) Ako treba umiestniť na guľovej ploche s jednotkovým polomerom najvyšší možný počet bodov A_i ($i = 1, 2, \dots$), ak pre každú vzdialenosť $d_{ij} = |A_i A_j|$ ($i \neq j$) platí:

$$1. d_{ij} \geq \sqrt[3]{2},$$

$$2. d_{ij} > \sqrt[3]{2}.$$

5.7 V priestore je dané otáčanie ϱ s osou otáčania r .

1. Vyjadrite otáčanie ϱ ako kompozíciu dvoch otáčaní σ, σ' s osami s, s' za predpokladov, že

a) uhly (orientované) otáčaní σ, σ' sú navzájom zhodné, a

b) osou otáčania σ je daná priamka, ktorá je rôznobežná s priamkou r .

2. Nájdite množinu všetkých osí s' otáčania σ' za podmienky, že os s otáčania σ prebieha pevnou rovinou ξ .

Dvaadvacátá mezinárodní matematická olympiáda (MMO) se konala ve dnech 8.—20. července 1981 v USA - poprvé mimo evropský kontinent. Jejím hlavním pořadatelem byla americká vědecká společnost The Mathematical Association of America, hlavním dějištěm pak Georgetown University ve Washingtonu.

Olympiády se zúčastnily delegace z 27 zemí všech pěti kontinentů - z Austrálie, Belgie, Brazílie, Bulharska, Československa, Finska, Francie, Holandska, Izraele, Jugoslávie, Kanady, Kolumbie, Kuby, Lucemburska, Maďarska, Mexika, NSR, Polska, Rakouska, Rumunska, Řecka, SSSR, Švédsko, Tunisu, USA, Velké Británie a Venezuely. Z obvyklých účastníků tedy chyběly tentokrát NDR a Vietnam, poprvé se zúčastnily Austrálie, Kanada, Kolumbie, Mexiko, Tunis a Venezuela.

Přes jednoroční přestávku - v roce 1980 se MMO nekonala - se podařilo navázat na dlouholetou tradici těchto mezinárodních soutěží mladých matematiků a opět MMO uspořádat v obvyklé podobě; nedošlo k žádným podstatným změnám ani v organizaci, ani v náplni soutěže. Počet soutěžících byl opět rekordní - 185 žáků středních škol tu změřilo své síly a schopnosti.

Jako obvykle byla MMO rozdělena na přípravnou fázi (9.—12. července), vlastní soutěž (13. a 14. července) a hodnoce-

ní výsledků a závěr (14.—19. července). Jednotlivé delegace přicestovaly do New Yorku většinou už ve středu 8. července. Vedoucí delegací, kteří tvoří mezinárodní porotu MMO, se spolu s předsedou poroty 22. MMO *prof. S. L. Greitzerem* z Rutgers University přesunuli 9. července do města Fredericksburg ve státě Virginia, aby tam - přísně izolováni od soutěžících žáků - vybrali a připravili soutěžní úlohy. Zástupci vedoucích a žáci byli mezitím ubytováni v areálu Rutgers University ve městě New Brunswick ve státě New Jersey, kde měli volno na odpočinek po cestě zpestřené výletem a prohlídkou New Yorku.

Mezinárodní porota ubytovaná v Mary Washington College ve Fredericksburgu zatím pilně pracovala. Z materiálu připraveného organizátory a obsahujícího 19 úloh navržených zúčastněnými zeměmi postupně vybrala tuto šestici soutěžních úloh:

1. Je-li P vnitřní bod daného trojúhelníku ABC , označme po řadě D, E, F paty kolmic spuštěných z P na přímky BC, CA, AB . Najděte všechny body P , pro které je součet

$$\frac{|BC|}{|PD|} + \frac{|CA|}{|PE|} + \frac{|AB|}{|PF|}$$

minimální.

2. Necht' n, r jsou celá čísla, $1 \leq r \leq n$. Utvořme všechny r -prvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \dots, n\}$; z každé z nich vezmeme její nejmenší prvek a označíme $F(n, r)$ aritmetický průměr všech takto získaných čísel. Dokažte, že

$$F(n, r) = \frac{n+1}{r+1}.$$

3. Určete největší hodnotu výrazu $m^2 + n^2$, kde m a n jsou celá čísla, $1 \leq m \leq 1981$, $1 \leq n \leq 1981$, taková, že

$$(n^2 - mn - m^2)^2 = 1.$$

4. a) Pro které hodnoty n , $n > 2$, existuje n po sobě jdoucích kladných celých čísel tak, že největší z nich je dělitelem nejmenšího společného násobku ostatních $n-1$ čísel?

b) Pro které n existuje právě jedna taková n -členná posloupnost?

5. Tři shodné kružnice mají společný bod O a leží uvnitř daného trojúhelníku ABC . Každá kružnice se dotýká dvou stran tohoto trojúhelníku. Dokažte, že střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC , střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a bod O leží na jedné přímce.

6. Funkce $f(x, y)$ splňuje

$$f(0, y) = y + 1 \quad (1)$$

$$f(x + 1, 0) = f(x, 1), \quad (2)$$

$$f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y)) \quad (3)$$

pro všechna celá nezáporná x, y . Určete $f(4, 1981)$.

Vybrané úlohy pocházely z návrhů, které předložily Velká Británie, NSR, Holandsko, Belgie, SSSR a Finsko.

Výběr soutěžních úloh na MMO není lehkou záležitostí a může velmi podstatně ovlivnit další průběh soutěže. Porota je při výběru mezera na předložené návrhy a konečný výsledek bývá určen řadou kompromisů. Cílem je ovšem nalézt vyvážený soubor šesti úloh, který by přesvědčivě prověděl znalosti a schopnosti soutěžících, aniž by zároveň předem znevýhodňoval kteroukoliv skupinu účastníků.

O šestici soutěžních úloh vybraných pro 22. MMO lze říci, že každá z úloh sama o sobě je dobrá a pro MMO vhodná, avšak v celém souboru zjevně chybí alespoň jedna opravdu obtížná úloha, jejíž vyřešení vyžaduje podat skutečně špičkový výkon. Porota si byla této skutečnosti vědoma, což vyjádřila mj. i tím, že na rozdíl od dosavadní praxe ohodnotila všechny úlohy stejným počtem sedmi bodů; celkem tedy mohl každý soutěžící získat maximálně 42 body.

Jak ukázaly výsledky soutěže, byly úlohy pro 22. MMO skutečně příliš snadné. I když soutěžícím z některých zemí s menšími zkušenostmi z MMO dělaly i tyto snadné úlohy potíže, žáci ze zemí, kde matematické olympiády již mají tradici a kde se s mladými talenty soustavně a cílevědomě pracuje, dokázali většinou rozřešit v stanoveném čase ($4\frac{1}{2}$ hodiny na každou trojici úloh) všechno nebo takřka všechno.

Porota na MMO rozhoduje hlasováním, k přijetí návrhu stačí prostá většina. Na 22. MMO přijelo mnoho delegací vůbec poprvé a tito »nováčci« měli ovšem tendenci udržet obtížnost soutěže v »přijatelných« mezích. To spolu se skutečností, že porota měla k dispozici jen texty úloh bez jejich podrobného rozboru, snad může vysvětlit, proč byla soutěž tak snadná.

Výběr úloh byl skončen již 10. července, zbývající čas příprav zabraly detailní formulace, překlad textů do národních jazyků soutěžících žáků a rozmnožení potřebného počtu exemplářů. Všechny tyto přípravy byly ukončeny v neděli 12. července. Týž den se již také soutěžící a zástupci vedoucích přestěhovali z Rutgers University do areálu Georgetown University ve Washingtonu D. C. V úterý 14. července sem přesídlila i porota z Fredericksburgu.

Slavnostní zahájení 22. MMO proběhlo v pondělí 13. červen-

ce dopoledne ve velké aule univerzity za účasti federálního ministra pro výchovu *T. H. Bella* a zástupců pořádajících institucí a georgetownské university. Hned poté následovala první část soutěže (řešení první trojice úloh); druhá část proběhla dopoledne 14. července.

Tím skončila pro soutěžící žáky pracovní část jejich pobytu - ve zbývajících dnech se mohli věnovat prohlídkám města Washingtonu a jeho pamětihodností i návštěvě kulturních podniků, které pro ně pořadatelé připravili. Dvou z nich - představení hry *Camelot* v divadle *Harlequin* a vystoupení holandské baletní skupiny v amfiteátru *Wolf Trap* - se mohli zúčastnit také členové poroty, kteří jinak měli v těchto dnech plné ruce práce s opravou žákovských řešení, s jejich hodnocením a s koordinací.

Koordinaci hodnocení úloh prováděla skupina dvaceti koordinátorů vybraných z řad amerických vysokoškolských odborníků. Byli vesměs na vysoké odborné úrovni a uplatňovali náročná hlediska nejen co do věcné správnosti řešení, ale také při posuzování formální stránky, tj. přesnosti a úplnosti formulací všech tvrzení a jejich důkazů. Tato zvýšená přísnost byla ovšem jen zákonitým důsledkem snadnosti úloh a zároveň i relativně účinným prostředkem, jak zabránit přílišné kumulaci úspěšných řešitelů na předních místech výsledného pořadí. I tak se celkem 26 žákům podařilo projít soutěží beze ztráty bodu.

V pátek 17. července byly práce s koordinací dokončeny a po vyřešení některých sporných otázek mohla porota schválit definitivní výsledky soutěže. Na sobotním zasedání pak jednala porota o cenách. Rozhodla, že na 22. MMO nebudou uděleny žádné zvláštní ceny za originální a elegantní řešení, ačkoli koordinátoři předložili řadu návrhů. Při dalším rozhodování -

o hranicích pro udělení prvních, druhých a třetích cen - sehrály určitou roli i otázky prestižní. Ačkoliv byly úlohy snadné, porota cenami nijak nešetřila. Hned v úvodu jednání rozhodla, že první cenu dostane nejen 26 žáků s plným počtem 42 bodů, ale také dalších 10 žáků s 41 body - celkem tedy 36 prvních cen. V porovnání s malým počtem prvních cen udělených na 20. a 21. MMO je to zjevný odklon od dosavadních zvyklostí. Také obvyklý poměr 1 : 2 : 3 počtu prvních, druhých a třetích cen nebyl tentokrát dodržen: druhých cen udělila porota 37 (za výkony ohodnocené 34—40 body), třetích cen pak 30 (za 26—33 bodů). Celkem 103 soutěžící (tj. 55,7 % z celkového počtu) získali na 22. MMO některou z cen.

Vzhledem k tomu, že mnoho zemí vyslalo na 22. MMO delegaci s méně než osmi žáky, nelze tentokrát dost dobře porovnávat družstva podle celkového počtu bodů. Výsledky i počty získaných cen jsou patrné z připojené tabulky.

Na svém posledním zasedání v neděli 19. července dopoledne jednala porota o budoucnosti MMO. Byla informována o návrhu ICMI na zřízení komise pro MMO. Většina členů komise navržených ICMI byla ostatně na 22. MMO osobně přítomna, komise se tedy ihned sešla - za účasti některých dalších členů poroty. Bylo dohodnuto, že komise má zatím fungovat jako informační centrum a poradní orgán a nemá samozřejmě pravomoc rozhodovat o organizaci MMO. Její vztah k ICMI nebyl zatím plně specifikován. Bude záležet na organizátorech příštích MMO, jak dalece budou přihlížet k doporučením komise. Zatím byla přednesena dvě podstatná doporučení: udržet tradici pořádat MMO každý rok a snížit počet žáků v družstvu z osmi na šest; toto snížení bylo motivováno stále rostoucím počtem delegací. Zda se tato doporučení

Výsledky 22. MMO

Země	Součet bodů žáka č.								Celkem	Počet cen		
	1	2	3	4	5	6	7	8		I.	II.	III.
Austrálie	22	13	12	10	17	12	8	28	122	0	0	1
Belgie	37	24	25	38	6	3	3	3	139	0	2	0
Brazílie	42	23	21	14	17	13	21	21	172	1	0	0
Bulharsko	32	42	40	34	28	37	33	41	287	2	3	3
Československo	38	38	40	42	32	—	—	—	190	1	3	1
Finsko	27	41	17	10	31	9	38	33	206	1	1	3
Francie	29	15	42	26	8	29	42	18	209	2	0	3
Holandsko	25	25	37	36	27	16	17	36	219	0	3	1
Izrael	42	32	25	31	16	29	—	—	175	1	0	3
Jugoslávie	26	31	42	32	23	37	35	20	246	1	2	3
Kanada	42	25	23	16	35	42	37	29	249	2	2	1
Kolumbie	14	13	13	11	1	13	14	14	93	0	0	0
Kuba	25	34	22	12	19	9	14	6	141	0	1	0
Lucembursko	42	—	—	—	—	—	—	—	42	1	0	0
Maďarsko	41	42	41	40	—	—	—	—	164	3	1	0
Mexiko	3	4	2	2	1	—	—	—	12	0	0	0
NSR	41	39	37	42	42	41	28	42	312	5	2	1
Polsko	35	18	41	36	24	28	35	42	259	2	3	1
Rakousko	42	41	41	36	37	42	21	30	290	4	2	1
Rumunsko	36	35	33	32	—	—	—	—	136	0	2	2
Řecko	24	11	13	13	15	2	12	14	104	0	0	0
SSSR	42	33	36	35	42	42	—	—	230	3	2	1
Švédsko	22	20	17	32	32	28	38	18	207	0	1	3
Tunis	14	18	—	—	—	—	—	—	32	0	0	0
USA	42	42	42	39	42	35	39	33	314	4	3	1
Velká Británie	42	38	41	36	27	37	38	42	301	3	4	1
Venezuela	6	3	9	4	14	4	23	1	64	0	0	0

uplatní v praxi, uvidíme na příští MMO, která se bude konat v Maďarsku.

Slavnostní zakončení 22. MMO a s ním spojené rozdělení cen se konalo v neděli 19. července odpoledne ve velkém sále budovy National Academy of Science ve Washingtonu. Žáci, kteří získali některou z cen, zde dostali diplomy a věcné dary (mj. kapesní kalkulačky firmy Hewlett-Packard, digitální hodinky). Program byl zpestřen kulturní vložkou (dvě klavírní sóla přednesená dvěma soutěžícími z USA) a občerstvením.

Následující společná večeře všech účastníků MMO byla již ve znamení loučení. Některé delegace odjížděly na newyorské letiště už během noci, ostatní opustily Washington v pondělí 20. července dopoledne.

Československá účast na 22. MMO byla zpočátku poznamenána nejistotou - dlouho se rozhodovalo o tom, zda a v jakém složení československá delegace na 22. MMO pojede, a konečné rozhodnutí padlo až relativně nedlouho před odjezdem. Proto také Československo tentokrát neposlalo návrhy úloh pro soutěž.

Delegace ve složení
vedoucí delegace:

dr. František Zítek, CSc., místopředseda ÚV MO,
členové delegace:

<i>Jozef Bednárík,</i>	4. r. GAM, Bratislava,
<i>Petr Couf,</i>	3. r. GWP, Praha 2,
<i>Igor Kříž,</i>	2. r. GWP, Praha 2,
<i>Jan Nekovář,</i>	4. r. GWP, Praha 2,
<i>Jiří Sgall,</i>	2. r. GWP, Praha 2,

odletěla z technicko-ekonomických důvodů až ve čtvrtek 9. července, tedy o den později, než předpokládal program 22. MMO.

Žáci si sice stačili po cestě trochu odpočinout, ale vedoucí dorazil do Fredericksburgu na zasedání poroty právě v okamžiku, kdy zde končilo jednání o výběru úloh, takže už nemohl výběr nijak ovlivnit.

V dalších dnech už byla účast čs. delegace plně ve shodě s plánovaným programem. Poněvadž tentokrát nebyl v delegaci žádný zástupce vedoucího, byli žáci po celou dobu izolace poroty, tj. až do 14. července, zcela odkázáni na péči přidělené průvodkyně, již byla slečna Mary T. Barrettová, studující mikrobiologie na Rutgers University. Ta se o ně starala velmi pečlivě po celou dobu jejich pobytu v USA a po této stránce nedošlo k žádným komplikacím.

Výsledky, jichž čs. žáci dosáhli v soutěži, jsou obsaženy v následující tabulce:

Jméno žáka	Body získané za úlohu č.						celkem	cena
	1	2	3	4	5	6		
J. Bednárik	7	7	7	7	3	7	38	II.
P. Couf	7	7	3	7	7	7	38	II.
J. Kříž	7	7	7	6	6	7	40	II.
J. Nekovář	7	7	7	7	7	7	42	I.
P. Sgall	0	7	7	7	5	6	32	III.

Zcela bezchybný byl - podobně jako už na 21. MMO v Londýně v r. 1979 - výkon *Ľana Nekováře*, který získal první cenu za plný počet bodů. Další tři žáci získali druhé ceny, když rovněž vyřešili - jen s menšími závadami - všech šest úloh soutěže. Pátý žák, který ztratil body především proto, že nevy-

řešil první úlohu, získal alespoň třetí cenu. Nikdo z nich se tedy nevracel bez získané ceny, což lze nepochybně hodnotit jako úspěch. Je jen škoda, že se nemohlo 22. MMO zúčastnit osm žáků - výsledky třetího kola naší MO nasvědčovaly, že bylo z čeho vybírat.

1. Dokážeme, že jediným bodem minimalizujícím součet

$$S = \frac{|BC|}{|PD|} + \frac{|CA|}{|PE|} + \frac{|AB|}{|PF|}$$

je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC . K tomu cíli vynásobíme S výrazem

$$|BC| \cdot |PD| + |CA| \cdot |PE| + |AB| \cdot |PF|,$$

který je roven dvojnásobnému obsahu trojúhelníku ABC a nezávisí tedy na volbě bodu P . Dostaneme tak výraz

$$\begin{aligned} V = & |BC|^2 + |CA|^2 + |AB|^2 + |BC| \cdot |CA| \left(\frac{|PD|}{|PE|} + \frac{|PE|}{|PD|} \right) + \\ & + |CA| \cdot |AB| \left(\frac{|PE|}{|PF|} + \frac{|PF|}{|PE|} \right) + |AB| \cdot |BC| \left(\frac{|PD|}{|PF|} + \frac{|PF|}{|PD|} \right). \end{aligned}$$

Pro každé kladné reálné číslo x platí

$$x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, jestliže $x = 1$; toto tvrzení snadno vyplývá ze zřejmé nerovnosti $(x - 1)^2 \geq 0$.

Odtud již vidíme, že výraz V - a tedy také součet S , který je jeho konstantním násobkem - je minimální právě tehdy, jestliže $|PD| = |PE| = |PF|$, tj. jestliže bod P je stejně vzdálen od všech tří stran trojúhelníku ABC , tj. je-li P středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC .

2. Počet všech r -prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ je ovšem $\binom{n}{r}$. Pro $k = 1, 2, \dots, n - r + 1$ určíme počet těch r -prvkových podmnožin, jejichž minimální prvek je právě číslo k . Tento počet je roven počtu způsobů, jimiž lze k minimálnímu prvku k vybrat zbývajících $r - 1$ prvků z množiny $\{k + 1, k + 2, \dots, n\}$, a je tedy dán číslem $\binom{n - k}{r - 1}$. Pro $F(n, r)$ odtud dostáváme vyjádření

$$F(n, r) = \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{k=1}^{n-r+1} k \binom{n - k}{r - 1}.$$

Dále použijeme vytvářející funkce, resp. binomickou větu. Platí

$$\begin{aligned} x^{r-1}(1 - x)^{-r} &= x^{r-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-r}{k} (-1)^k x^k = \\ &= x^{r-1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r + k - 1}{r - 1} x^k = \sum_{m=r-1}^{\infty} \binom{m}{r - 1} x^m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(1-x)^{-2} &= x \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k} (-1)^k x^k = \\
&= x \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{1} x^k = \sum_{m=1}^{\infty} m x^m, \\
x^r(1-x)^{-r-2} &= x^r \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-r-2}{k} (-1)^k x^k = \\
&= x^r \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k+1}{r+1} x^k = \sum_{m=r}^{\infty} \binom{m+1}{r+1} x^m.
\end{aligned}$$

Poněvadž pak $x^{r-1}(1-x)^{-r} x(1-x)^{-2} = x^r(1-x)^{-r-2}$, dostáváme porovnáním koeficientů při stejných mocninách x^m podle vzorce pro násobení řad rovnost

$$\sum_{k=1}^{n-r+1} k \binom{n-k}{r-1} = \binom{n+1}{r+1},$$

a tedy

$$F(n, r) = \frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{r+1},$$

což jsme měli dokázat.

3. Označme M množinu všech uspořádaných dvojic (n, m) přirozených čísel vyhovujících vztahu

$$(n^2 - nm - m^2)^2 = 1. \quad (1)$$

Nejprve si dokážeme čtyři pomocná tvrzení A - D:

A. Pro $(n, m) \in M$ platí $n \geq m$.

Skutečně, kdyby bylo $n < m$, bylo by

$$n^2 - nm - m^2 < n^2 - m^2 < 0,$$

$$\text{tj. } n^2 - nm - m^2 \leq -2,$$

$$\text{a tedy } (n^2 - nm - m^2)^2 \geq 4$$

ve sporu s (1).

B. Pro $(m, m) \in M$ platí $m = 1$.

Z (1) totiž plyne

$$1 = (m^2 - m^2 - m^2)^2 = m^4,$$

ale m je přirozené číslo, a proto $m = 1$.

C. Jestliže $(n, m) \in M$, pak také $(n + m, n) \in M$.

Skutečně platí

$$\begin{aligned} [(n + m)^2 - n(n + m) - n^2]^2 &= (n^2 + 2nm + m^2 - \\ &- n^2 - nm - n^2)^2 = (-n^2 + nm + m^2)^2 = \\ &= (n^2 - nm - m^2)^2 = 1. \end{aligned}$$

D. Jestliže $(n, m) \in M$, $n > 1$, potom také $(m, n - m) \in M$.

Skutečně, z nerovnosti $n > 1$ vyplývá podle B a A nerovnost $n > m$, takže $n - m$ je přirozené číslo. Avšak $[m^2 - m(n - m) - (n - m)^2]^2 = (m^2 - nm + m^2 - n^2 + 2nm - m^2)^2 = (-n^2 + nm + m^2)^2 = (n^2 - nm - m^2)^2 = 1$, a tedy $(m, n - m) \in M$.

Budiž nyní $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost tzv. Fibonacciových čísel, definovaná vztahy

$$F_1 = F_2 = 1, \tag{2}$$

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{3}$$

Dokážeme nyní toto tvrzení:

Jestliže $(n, m) \in M$, potom existuje přirozené k takové, že $m = F_k$ a $n = F_{k+1}$.

Důkaz provedeme indukcí. Tvrzení zřejmě platí pro $n = 1$. Podle A je totiž také $m = 1$, a tedy podle (2) $m = F_1$, $n = F_2$, tzn. $k = 1$.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro všechna $n \leq N$, kde N je přirozené číslo; dokážeme, že platí i pro všechna $n \leq N + 1$. Stačí ovšem vyšetřit případ $n = N + 1 > 1$. Podle A a B je pak $n > m$, tj. $m \leq N$; zároveň podle D je $(m, n - m) \in M$. Podle indukčního předpokladu existuje přirozené k takové, že $n - m = F_k$, $m = F_{k+1}$. Podle (3) však potom

$$n = m + n - m = F_k + F_{k+1} = F_{k+2}.$$

Abychom maximalizovali součet $m^2 + n^2$, musíme vzít maximální k takové, že platí $m = F_k \leq 1981$, $n = F_{k+1} \leq 1981$. Přímým výpočtem členů posloupnosti $\{F_k\}$ zjistíme, že $F_{16} = 987$, $F_{17} = 1597$, $F_{18} = 2584$, takže musíme zvolit $m = 987$, $n = 1597$ a hledané maximum bude $987^2 + 1597^2 = 3\,524\,578$.

4. Necht' posloupnost přirozených čísel

$$a - n + 1, a - n + 2, \dots, a - 1, a \quad (1)$$

vyhovuje podmínkám úlohy, tj. číslo a je dělitelem největšího společného násobku čísel $a - n + 1, a - n + 2, \dots, a - 1$. Vyjádříme-li číslo a ve tvaru

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r},$$

kde p_j ($j = 1, \dots, r$) jsou navzájem různá prvočísla $p_1 < p_2 < \dots < p_r$ a $\alpha_j > 0$ ($j = 1, 2, \dots, r$), znamená daná podmínka, že pro každé j ($j = 1, 2, \dots, r$) musí existovat m ($m = 1, 2, \dots, n - 1$) takové, že $p_j^{\alpha_j}$ dělí číslo $a - m$. Poněvadž $p_j^{\alpha_j}$ dělí číslo a , znamená to, že je nutně $p_j^{\alpha_j} \leq n - 1$ pro všechna j ($j = 1, 2, \dots, r$).

Kdyby bylo $r = 1$, tj. $a = p_1^{\alpha_1}$, muselo by být $n \leq a = p_1^{\alpha_1} \leq n - 1$, což je spor, je tedy $r \geq 2$. Musí tedy existovat alespoň dvě různá prvočísla menší než n , tj. musí být $n \geq 4$.

Nyní dokážeme, že pro každé $n \geq 4$ existuje posloupnost (1) vyhovující podmínkám úlohy a že pro $n \geq 5$ existují vždy alespoň dvě takové posloupnosti.

Je-li $n = 4$, musí být $p_1^{\alpha_1} \leq 3$, $p_2^{\alpha_2} \leq 3$, tedy nutně $r = 2$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, takže jedinou posloupností daných vlastností je čtyřčlenná posloupnost

$$3, 4, 5, 6, \quad (2)$$

která skutečně všem podmínkám úlohy vyhovuje.

Existují dvě pětičlenné posloupnosti

$$2, 3, 4, 5, 6 \quad (3)$$

a

$$8, 9, 10, 11, 12 \quad (4)$$

vyhovující podmínkám úlohy.

Je-li $n \geq 6$, označme r, s, t přirozená čísla splňující nerovnosti

$$2^r \leq n - 1 < 2^{r+1},$$

$$3^s \leq n - 1 < 3^{s+1},$$

$$5^t \leq n - 1 < 5^{t+1}.$$

V posloupnosti (1) lze pak volit buď $a = 2^r \cdot 3^s$, anebo $a = 2^r \cdot 5^t$. Skutečně je pak

$$n - 1 < 2^{r+1} < 2^r \cdot 3 \leq 2^r \cdot 3^s = a,$$

resp.

$$n - 1 < 2^{r+1} < 2^r \cdot 5 \leq 2^r \cdot 5^t = a,$$

takže n -členné posloupnosti (1) obsahují vesměs přirozená čísla a vyhovují podmínkám úlohy.

5. Každá z daných tří kružnic (navzájem různých) se dotýká jiné dvojice stran trojúhelníku ABC . Označme S_A , S_B , S_C středy těchto kružnic, a to tak, aby S_B ležel na ose úhlu ABC , S_C na ose úhlu BCA a S_A na ose úhlu BAC . Potom $S_B S_C \parallel BC$, $S_A S_C \parallel AC$, $S_A S_B \parallel AB$. Osy úhlů trojúhelníku ABC jsou zároveň osami úhlů trojúhelníku $S_A S_B S_C$ a oba trojúhelníky, ABC a $S_A S_B S_C$, mají též střed kružnice vepsané, označme ho S . Trojúhelník ABC je obrazem trojúhelníku

$$\begin{aligned} S_A S_B S_C \text{ při homotetii o střed } S \text{ a koeficientu } \kappa &= \frac{|SA|}{|SS_A|} = \\ &= \frac{|SB|}{|SS_B|} = \frac{|SC|}{|SS_C|}. \end{aligned}$$

Bod O je stejně vzdálen od všech tří bodů S_A , S_B , S_C , je to tedy střed kružnice opsané trojúhelníku $S_A S_B S_C$. Jeho obrazem při homotetii (S, κ) je ovšem střed kružnice opsané

trojúhelníku ABC a je jen přirozené, že střed homotetie S , bod O a jeho obraz leží na jedné přímce.

6. Pro $x = 0$ plyne z (3) a (1) rovnost

$$f(1, y + 1) = f(0, f(1, y)) = f(1, y) + 1 \quad (4)$$

pro každé $y \geq 0$. Avšak podle (2) a (1) je

$$f(1, 0) = f(0, 1) = 2. \quad (5)$$

Z (5) a (4) pak plyne

$$f(1, y) = y + 2 \quad (6)$$

pro všechna $y \geq 0$.

Pro $x = 1$ plyne z (3) a (6) rovnost

$$f(2, y + 1) = f(1, f(2, y)) = f(2, y) + 2. \quad (7)$$

Podle (2) a (6) je pak

$$f(2, 0) = f(1, 1) = 3. \quad (8)$$

Ze (7) a (8) dostáváme tak

$$f(2, y) = 2y + 3 \quad (9)$$

pro všechna $y \geq 0$.

Pro $x = 2$ plyne z (3) a (9) rovnost

$$f(3, y + 1) = f(2, f(3, y)) = 2f(3, y) + 3, \quad (10)$$

kdežto (2) a (9) dává

$$f(3, 0) = f(2, 1) = 5 = 8 - 3. \quad (11)$$

Z (10) a (11) pak plyne

$$f(3, y) = 2^y + 3 - 3 \quad (12)$$

pro všechna $y \geq 0$.

Položme nyní $g(y) = f(4, y) + 3$ pro $y = 0, 1, 2, \dots$ Platí

$$g(0) = 3 + f(4, 0) = 3 + f(3, 1) = 16. \quad (13)$$

Pro $x = 3$ pak (3) a (12) dává

$$\begin{aligned} g(y + 1) &= f(4, y + 1) + 3 = f(3, f(4, y)) + 3 = \\ &= 2^{f(4, y) + 3} - 3 + 3 = 2^{g(y)}, \end{aligned}$$

takže v důsledku (13) bude

$$g(y) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}} \quad (\text{celkem } y + 3 \text{ dvojek}),$$

a tedy

$$f(4, 1981) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}} - 3 \quad (1984 \text{ dvojek}).$$

Prof. dr. Jozef Moravčík, CSc.,
dr. Leo Boček, CSc.,
doc. dr. Lev Bukovský, CSc.,
dr. Antonín Vrba, CSc.,
dr. František Zítek, CSc.

TŘICÁTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Ilustroval dr. Jiří Mikulčák
Obálku navrhl Jaromír Jarkovský
Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p.,
v Praze roku 1983
jako svou publikaci č. 5-42-14/30
Edice Pomocné knihy pro žáky
Odpovědná redaktorka: Ilona Mahlerová
Výtvarný redaktor: Václav Hanuš
Technický redaktor: Michal Lehár
Z nové sazby písmem Plantin
vytiskly Moravské tiskařské závody, n. p., Olomouc
Formát papíru 70 × 100 cm
Počet stran 168
AA 6,05 - VA 6,45. Náklad 3700 výtisků
Tematická skupina a podskupina 03/2
1. vydání
Cena brožovaného výtisku Kčs 8,00

505/21,825

14-357-83 Kčs 8,00

**matematická
olympiáda**



SPN 5-42-14/30

03/2

14-357-83

Kčs 8,00