

32. ročník matematické olympiády

Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); František Zítek (editor): 32. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1982/83. 24. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404762>

Terms of use:

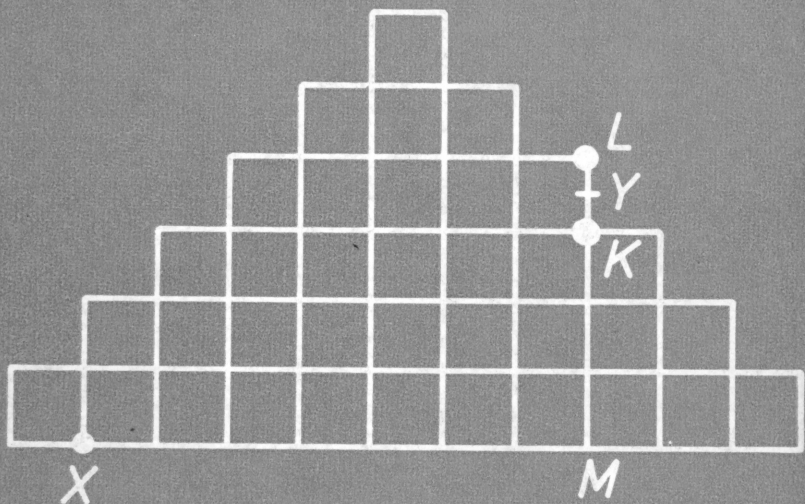
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MO

XXXII. ročník matematické olympiády



SPN

TŘICÁTÝ DRUHÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1982/83

24. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ
PRAHA

Za přispění spolupracovníků zpracovali
prof. dr. Jozef Moravčík, CSc., dr. Leo Boček, CSc.,
dr. Karel Horák, CSc., dr. František Zítek, CSc.

Recenzovali dr. Jitka Kučerová, dr. Miroslav Šisler, CSc.,
dr. Václav Šůla

© Prof. dr. Jozef Moravčík, CSc., za kolektiv, 1985

Obsah

Předmluva	5
O průběhu 32. ročníku matematické olympiády	8
Kategorie Z	40
Úlohy I. kola	40
Úlohy II. kola	46
Úlohy III. kola v ČSR	50
Úlohy III. kola v SSR	53
Kategorie C	57
Úlohy I. kola - domácí část	57
Úlohy I. kola - školní část	65
Úlohy II. kola	69
Kategorie B	73
Úlohy I. kola - domácí část	73
Úlohy I. kola - školní část	82
Úlohy II. kola	85
Kategorie A	90
Úlohy I. kola - domácí část	90
Úlohy I. kola - školní část	99
Úlohy II. kola	104
Úlohy III. kola	115
Korespondenční seminář ÚV MO	126
Hodnocení průběhu a výsledků 32. ročníku MO	134
24. MMO	137

Milí mladí priatelia a spolupracovníci v matematickej olympiáde!

Uzatvárame opäť ďalší ročník našej súťaže, ktorý sa konal počas školského roka 1982/83. Tradičná ročenka, ktorú vám týmto predkladáme, obsahuje ako zvyčajne prehľad o organizácii a výsledkoch 32. ročníka MO i všetky súťažné úlohy s riešeniami. Podrobnejšie ako obvykle sa zaoberáme prehľadom podujatí a pomocných akcií organizovaných na pomoc riešiteľom MO v jednotlivých krajocho. Dozviete sa okrem iného, že takmer vo všetkých krajocho sa už ujala myšlienka poriadania krajského korešpondenčného seminára uskutočňovaného podľa vzoru celoštátneho korešpondenčného seminára, ktorý sa konal po prvý raz v školskom roku 1974/75 pre vybraných úspešných riešiteľov MO z celej ČSSR. Nemôžu tu preto chýbať ani texty úloh 9. ročníka korešpondenčného seminára ÚV MO ako zdroj cenného úlohového materiálu pre krajské sústreďenia, semináre i krúžky MO na školách. Medzi jeho úspešných riešiteľov patrili tiež členovia družstva, ktoré našu vlasť reprezentovalo na 24. medzinárodnej MO v Paríži, kde úspešne nadviazalo na výsledky dosiahnuté našimi žiakmi na niekoľkých predchádzajúcich MMO. Nevrátilo sa bez prvej ceny a v neofi-

ciálnom hodnotení 32 krajín zastúpených na ušľachtilom zápolení vo Francúzsku obsadilo veľmi pekné 8. miesto. O priebehu, úlohách i výsledkoch 24. MMO sa taktiež podrobnejšie dočítate na ďalších stránkach.

V tejto súvislosti stojí určite za zmienku, že ďalšia kapitola medzinárodných súťaží v riešení náročných matematických úloh sa bude písať u nás. Je to o to významnejšie, že to bude kapitola jubilejná, pretože v júli 1984 sa bude konať v Prahe, hlavnom meste socialistického Československa, už 25. MMO. Sme presvedčení, že prinesie úspech nielen spoločenský a organizačný, ale potvrdí tiež správnosť cesty nastúpenej u nás v posledných rokoch v cieľavedomej starostlivosti o matematické talenty a získa ďalších priaznivcov pre matematickú olympiádu medzi žiakmi, ich rodičmi, učiteľmi i ostatnými školskými pracovníkmi ako aj medzi širokou verejnosťou u nás doma i v zahraničí.

Prichádza nám však súčasne vysloviť veľké poľutovanie nad tým, že tohto sviatku školskej matematiky a matematickej olympiády sa nedožil bývalý dlhoročný predseda ÚV MO, niekoľkonásobný účastník MMO vo funkcii vedúceho československej delegácie, hlavný autor celého radu ročeniek MO doc. Jan Vyšín, CSc., ktorý nás navždy opustil 24. júna 1983 vo veku 75 rokov. Celý svoj život zasvätil výchove mladých ľudí a odbornej práci v oblasti teórie vyučovania matematiky. Do histórie matematickej olympiády u nás i vo svete sa zapísal nezmazateľným písmom. Bol autorom mnohých súťažných úloh, s jeho menom je spojený vznik metodických materiálov pre učiteľov pracujúcich v MO, tzv. komentárov, ktoré rad rokov sám tvoril. Napísal desiatky pútavých článkov pre riešiteľov MO i učiteľov, je autorom

viacerých kníh, učebníc i odborných statí o modernizácii výučby matematiky. Bol jedným z iniciátorov zriadenia tried so zameraním na matematiku na gymnáziách. Jeho myšlienky, výsledky jeho práce a žiarivý príklad jeho húževnatosti, pracovitosti a cieľavedomého úsilia budú nás inšpirovať k ďalšiemu rozvoju starostlivosti o matematické talenty.

V listopadu 1983

Ústredný výbor matematickej olympiády

O průběhu 32. ročníku matematické olympiády

Matematickou olympiádu pořádají ministerstva školství ČSR a SSR ve spolupráci s Jednotou československých matematiků a fyziků, Jednotou slovenských matematiků a fyziků, Matematickým ústavem ČSAV a Socialistickým svazem mládeže. Soutěž řídí ústřední výbor matematické olympiády (ÚV MO) prostřednictvím krajských a okresních výborů matematické olympiády (KV MO, OV MO). Členy ÚV MO jmenují ministerstva školství, členy KV MO a OV MO jmenují příslušné odbory školství KNV a ONV. V průběhu 32. ročníku MO byl předsedou ÚV MO prof. dr. Jozef Moravčík, CSc., prorektor Vysoké školy dopravy a spojů v Žilině, který tuto funkci zastával již mnoho let. Místopředsedy byli dr. František Zítek, CSc., z MÚ ČSAV a doc. Jan Vyšín z téhož ústavu. Funkci jednatele zastával dr. Leo Boček, CSc., z matematicko-fyzikální fakulty UK v Praze; část jeho povinností převzal v průběhu roku dr. Karel Horák z MÚ ČSAV. Zástupcem ÚV SSM v ÚV MO byl s. Pavel Krsička, který tuto funkci převzal až na začátku školního roku 1982/83. Novým členem ÚV MO se stal také s. Pavel Klenovčan z Pedagogické fakulty v Banské Bystrici, který vystřídal doc. dr. P. Kršňáka, CSc., ve funkci předsedy KV MO Středoslovenského kraje. Jinak

bylo složení ÚV MO stejné jako v minulém, 31. ročníku MO.

Žáci soutěží ve čtyřech kategoriích, v kategorii A žáci třetích a čtvrtých ročníků středních škol, v kategorii B žáci druhých ročníků a v kategorii C žáci prvních ročníků. Pro žáky osmých tříd základních škol je určena kategorie Z, ve které soutěžili i žáci dobíhajících devátých tříd ZDŠ. V této kategorii se soutěží ve třech kolech, úlohy I. kola řeší žáci doma nebo v kroužcích MO a mohou se přitom radit se svými učiteli a vedoucími. Nejlepší řešitelé úloh I. kola postupují do II. kola, které je organizováno v každém okrese a má formu písemné práce, při které řeší žáci čtyři úlohy. Konalo se 2. února 1983. Z iniciativy krajských výborů MO probíhá obdobně v každém kraji III. kolo; v krajích ČSR to bylo 16. dubna, v SSR 21. května 1983. V kategoriích A, B, C má I. kolo dvě části, nejdříve řeší žáci šest úloh doma nebo v matematických kroužcích, druhá část má již formu písemné práce a organizuje se na jednotlivých školách. Obdobně probíhá i II. kolo, které organizují ve všech krajích krajské výbory MO. V kategorii A se koná i kolo III., celostátní. Jeho účastníci řeší ve dvou dnech šest úloh a nejlepší z nich jsou vyhlášeni vítězi příslušného ročníku MO. V kategoriích B, C se druhá část I. kola konala 9. února, II. kolo 16. dubna 1983; v kategorii A to bylo 15. prosince 1982 a 12. února 1983.

Úlohy vybírá pro všechny kategorie a všechna kola předsednictvo ÚV MO, pouze úlohy III. kola kategorie Z připravují některé krajské výbory MO. Všechny úlohy 32. ročníku MO jsou v dalších částech této ročenky uvedeny i s řešením. Každá úloha je označena písmenem kategorie, římská číslice značí příslušné kolo soutěže a pak je uvedeno

pořadové číslo úlohy. U úloh označených 3a a 3b má soutěžící možnost volby, řeší buď úlohu 3a, nebo úlohu 3b. Úlohy I. kola druhé části (týká se kategorií A, B, C) jsou označeny písmenem S.

Celostátní kolo 32. ročníku MO se konalo ve dnech 5. až 8. května 1983 v Pardubicích. Slavnostního zahájení se zúčastnili doc. Miloslav Boháč, vedoucí odboru školství KNV Východočeského kraje, tajemník KV SSM v Hradci Králové dr. Karel Procházka, zástupce OV KSČ s. Milan Slavíček a další představitelé stranických a státních orgánů kraje, okresu a města Pardubice. Doc. M. Boháč vyzdvihl ve svém projevu práci učitelů při přípravě nové generace a nejlepším učitelům i školám Východočeského kraje předal čestná uznání za dlouholetou úspěšnou práci v matematické olympiádě a další prospěšnou činnost při práci s talenty. Soutěžící pozdravil také s. Jan Kratochvíl, bývalý žák pardubického gymnázia a úspěšný účastník i mezinárodních matematických olympiád. Prof. Moravčík připomněl v závěrečném slově význam zákona o jednotné škole, od jehož schválení uplynulo již 35 let. Během pobytu v Pardubicích navštívili soutěžící s členy ÚV MO památník »Zámeček«, aby uctili památku umučených vlastenců v době druhé světové války. Členové ÚV MO byli přijati na generálním ředitelství sdružení UNICHEM jeho ekonomickým ředitelem s. ing. K. Kašparem, CSc., kde proběhla beseda nejen o uplatnění matematiků v chemickém průmyslu, ale též o ochraně životního prostředí při současném rozvoji chemie. Další beseda se uskutečnila na gymnáziu v Pardubicích s ředitelem gymnázia dr. Z. Martincem. Pro soutěžící připravil KV MO bohatý společensko-kulturní program: návště-

vu památné obce Ležáky, besedu s účastníky mistrovství světa v ledním hokeji a koncert folkové skupiny Kantoři. Jako v předcházejících dvou ročnících mohly být již posledního dne vyhlášeny výsledky; vítězové i další úspěšní řešitelé obdrželi spolu s diplomy i knižní odměny. Kromě doc. M. Boháče měl hlavní zásluhu na úspěšném průběhu vlastní soutěže a dalšího programu především dr. J. Kubát, profesor gymnázia v Pardubicích a předseda KV MO, a jeho kolegové L. Dvořák, V. Kubátová, P. Pochobradský a další pracovníci.

Během roku se konala dvě zasedání ÚV MO. Na pro-
sincovém se hodnotil především průběh minulého ročníku MO a bylo dohodnuto vyhlásit v celostátním kole vždy také pořadí žáků z tříd, které nejsou zaměřeny na matematiku. Druhé zasedání se konalo spolu s celostátním kolem MO v Pardubicích; hlavními body jednání byla příprava dalšího ročníku MO, ediční činnost a otázka zavedení matematické olympiády i do nižších tříd základní školy. Protože končilo funkční období ÚV MO, poděkoval jeho předseda prof. Moravčík všem členům za vykonanou práci v matematické olympiádě. Předsednictvo ÚV MO se scházelo jednou měsíčně, hlavní jeho činností byl výběr úloh i pro další ročníky MO, projednání spolupráce se SSM, organizační otázky, náplň seminářů a soustředění apod.

Ve všech krajích se konají různé akce, které mají nejen pomáhat řešitelům úloh matematické olympiády, nýbrž i dalšími formami vyhledávat matematické talenty, dát jim možnost uplatnit své matematické vlohy a získat je pro studium technických oborů.

KV MO Praha pořádal pracovní přednášky pro řešitele

kategorií B, C a ve spolupráci s fakultní organizací SSM na matematicko-fyzikální fakultě UK připravil korespondenční seminář. Výsledky v tomto semináři byly hlavním kritériem pro účast na podzimním a lednovém soustředění, účastníci červnového soustředění byli vybíráni podle výsledků ve II. kole MO.

Středočeský kraj pořádal přípravné přednášky a konzultace vždy současně pro žáky několika škol. Krajského korespondenčního semináře se zúčastnilo 11 žáků. Pro 29 nejlepších řešitelů úloh matematické a fyzikální olympiády z žáků základních škol bylo uspořádáno krajské soustředění v Janově n. N., pro 40 žáků středních škol se podobné soustředění konalo v září.

V Jihočeském kraji byly ve všech okresech na pomoc učitelům základních škol ve spolupráci s OPS organizovány instruktáže k vedení zájmových kroužků MO. Tyto kroužky vedli i posluchači Pedagogické fakulty v Českých Budějovicích v rámci společenskopolitické praxe. Průměrná účast v kroužcích byla 12 žáků. Spolu s pobočkou JČSMF se uskutečnilo 43 přednášek pro řešitele kategorií A, B, C a tříkolový korespondenční seminář, jehož se zúčastnilo 72 žáků z celého kraje. Nejlepší jeho účastníci byli pozváni na letní školu, která se konala v červnu v Zadově.

KV MO v Plzni zorganizoval dvě přednášky k soutěžním úlohám každé kategorie, přednášky proběhly vždy ve třech střediscích. Přednášeli pracovníci katedry matematiky na VŠSE v Plzni. Pro učitele základních škol proběhly přednášky k soutěžním úlohám v pěti střediscích; přednášeli pracovníci katedry matematiky na Pedagogické fakultě v Plzni. V kraji se konal třetím rokem korespondenční semi-

nář ve dvou kategoriích; zúčastnilo se ho 57 studentů vyšších ročníků středních škol a 42 studentů prvních a druhých ročníků. Pro úspěšné řešitele MO, FO a v korespondenčním semináři se konalo v červnu soustředění, na které mohlo být pozváno 40 studentů. Korespondenční seminář a soustředění vedli pracovníci VŠSE v Plzni.

V Severočeském kraji se již tradičně koná týdenní soustředění řešitelů úloh MO a FO v červenci v Teplicích. Ve čtyřech třídách se ho zúčastnilo 88 žáků, program zajistila pobočka JČSMF v Ústí n. L. Oblastní semináře pro řešitele MO se konaly v sedmi městech kraje, celkem se konalo 34 seminářů při průměrné účasti 13 žáků. Korespondenční seminář proběhl ve dvou kolech pro kategorii B za účasti 10 žáků. Seminář organizuje Pedagogická fakulta v Ústí n. L. Již druhým rokem pořádá KV MO soutěž v matematice pro žáky tříletých učebních oborů středních odborných učilišť.

Korespondenční seminář pro řešitele úloh MO kategorie A a druhý pro kategorii B pořádal KV MO Východočeského kraje. Pro každou z těchto kategorií se konala dvě soustředění, která proběhla vždy ve dvou dnech, a to v pátek a v sobotu. Nezapomnělo se ani na kategorii C, nejlepší řešitelé MO byli pozváni na desetidenní soustředění do Vysokého Mýta v červnu.

Krajské soustředění úspěšných řešitelů MO a FO v kraji Jihomoravském se konalo v červnu na SPŠ strojní v Jedovicích. Trvalo týden a zúčastnilo se ho 28 studentů prvních ročníků a 28 studentů druhých ročníků středních škol. Součástí soustředění byla exkurze k počítači, besedy o teoretické kybernetice a o studiu na VUT a na přírodovědecké fakultě v Brně.

Severomoravský kraj je sídlem gymnázia M. Koperníka v Bílovci, na němž jsou třídy se zaměřením na matematiku. Toto gymnázium pořádalo setkání řešitelů MO z tříd zaměřených na matematiku a také korespondenční seminář. KV MO organizoval sobotní besedy pro kategorie A, B, C, jež se konaly v Olomouci a v Ostravě a zároveň se na nich setkávali řešitelé MO s vysokoškolskými učiteli. Jako v ostatních krajích pořádal i KV MO Severomoravského kraje instruktáže předsedů OV MO k úlohám kategorie Z a instruktáže referentů MO ze středních škol.

Stejně instruktáže byly pořádány i v Bratislavě, kde se dále konaly korespondenční semináře pro žáky středních škol s dvěma týdenními soustředěními a přednášky pro vybrané řešitele MO kategorie A. Soustředění bylo uspořádáno též pro úspěšné řešitele kategorií B, C, Z. Kroužky MO na základních i středních školách vedli učitelé a studenti MFF UK v Bratislavě.

Západoslovenský kraj pořádal instruktáže pro učitele, kteří měli na starosti matematickou olympiádu na jednotlivých středních školách. Instruktáže vedl dr. O. Ralík z Pedagogické fakulty v Nitře. Doc. dr. K. Križalkovič, CSc., z téže fakulty vedl obdobné instruktáže pro učitele základních škol. Kromě matematických kroužků se konalo pro žáky ZŠ, účastníky III. kola kategorie Z, pětidenní soustředění s přednáškami. Korespondenční seminář probíhal po celý školní rok, žáci řešili úlohy z pěti témat, například »Mřížové body«, »Geometrické nerovnosti« apod. Seminář vedl dr. P. Vrábel, CSc., z Pedagogické fakulty v Nitře. Vybraní řešitelé úloh korespondenčního semináře se sešli na soustředění

v Mlynkách. Konalo se v červnu a zúčastnili se ho i žáci z Bratislavy a ze Středoslovenského kraje.

Středoslovenský kraj uspořádal pro 38 žáků středních škol v měsíci září 1982 soustředění v Kuneradě, v říjnu pak v sedmi okresech instruktáže pro učitele základních škol. Úspěšní řešitelé I. kola kategorie A se sešli na semináři v Žilině a 30 nejlepších řešitelů krajského korespondenčního semináře na pětidenním soustředění v Námestově.

Jako v každém roce se ve Východoslovenském kraji konaly instruktáže pro učitele podle jednotlivých kategorií a již tradiční krajský korespondenční seminář. Matematické kroužky na školách vedli především učitelé matematických kateder přírodovědecké fakulty UPJŠ v Košicích.

O celostátním korespondenčním semináři, který organizoval ÚV MO, píšeme v této ročence podrobně v samostatné kapitole. Pro přípravu na mezinárodní matematickou olympiádu uspořádal ÚV MO dvě soustředění, jedno bylo týdenní, druhé trvalo 14 dní. Obě se konala v Kladně, objekty zajistilo MŠ ČSR. Přípravu na MMO vedli pracovníci MÚ ČSAV dr. K. Horák, P. Liebl, dr. J. Morávek, dr. J. Straškraba, dr. A. Vrba a dr. A. Vencovská, z MFF UK Praha se podíleli dr. J. Daneš a dr. R. Švarc a bývalí úspěšní účastníci MMO, nyní studenti MFF Jan Kratochvíl a Jan Nekoř, jedno zaměstnání vedl dr. Kaukič z VŠDS v Žilině. Jaký výsledek tato dvě soustředění přinesla, se dočtete v části této ročenky, která je věnována mezinárodní matematické olympiádě.

ÚV MO vydává v nakladatelství Mladá fronta edici Škola mladých matematiků, ve které vycházejí matematické brožurky pro středoškoláky, některé brožurky jsou určeny

i pro žáky základních škol. V průběhu 32. ročníku vyšlo šest svazků této edice:

A. Plocki: O náhodě a pravděpodobnosti

A. Kufner: Symetrické funkce

P. Vít: Řetězové zlomky

N. B. Vasiljev, V. L. Gutenmacher: Přímký a křivky

Ľ. Gatiaľ, T. Hecht, M. Hejný: Hry takmer matematické
a druhé vydání brožurky

F. Veselý: O nerovnostech a nerovnicích

Velkou roli při organizaci matematické olympiády hraje výběr úloh pro jednotlivé kategorie a jednotlivá kola soutěže. Každý rok je třeba vybrat asi 60 vhodných úloh. Proto vyhlásily JČSMF a JSMF již v roce 1966 konkurs na úlohy MO, který stále probíhá. Každý má možnost poslat na adresu ÚV MO návrh úloh pro MO; návrh každé úlohy musí být vypracován ve dvou exemplářích a musí obsahovat i řešení úlohy. Přijetím úlohy získává autor finanční odměnu a ÚV MO právo úlohu upravit a použít.

TABULKA I

Počty středních škol zapojených do 32. ročníku MO

Kraj	Celkem	Gymnázia					Ostatní střední školy				
		z toho zapojeno					zapojeno				
		v kategoriích			aspoň v jed- né kat.	v kategoriích			aspoň v jed- né kat.		
		A	B	C	A	B	C	A	B	C	
Praha	21	11	7	10	16	1	0	1	2		
Středočeský	23	22	20	21	23	1	2	6	6		
Jihočeský	19	13	16	18	19	2	4	7	8		
Západočeský	15	14	14	15	15	0	2	5	5		
Severočeský	21	18	18	19	19	3	5	8	10		
Východočeský	35	17	20	24	32	2	4	4	7		
Jihomoravský	38	28	26	26	28	4	2	2	4		
Severomoravský	39	12	14	26	36	1	1	4	6		
Bratislava	11	9	9	10	10	0	0	3	3		
Západoslovenský	38	27	24	35	35	6	10	22	22		
Středoslovenský	37	29	35	37	37	15	17	25	29		
Východoslovenský	38	29	28	36	36	2	16	31	31		
ČSR	211	135	135	159	188	14	20	37	48		
SSR	124	94	96	118	118	23	43	81	85		
ČSSR	335	229	231	277	306	37	63	118	133		

TABULKA 2

Počty žáků středních škol soutěžících v I. kole 32. ročníku MO

Kraj	Kategorie								Celkem	
	A		B		C		U		S	U
Praha	81	73	36	36	97		91		214	200
Středočeský	135	36	95	34	167		44		397	114
Jihočeský	77	42	68	35	128		80		273	157
Západočeský	89	31	103	53	173		66		365	150
Severočeský	117	41	126	47	243		70		486	158
Východočeský	62	44	87	63	144		105		293	212
Jihomoravský	121	98	190	104	220		180		531	382
Severomoravský	139	34	152	36	298		116		589	186
Bratislava	112	73	128	62	108		79		348	214
Západoslovenský	197	111	285	230	370		331		852	672
Středoslovenský	231	105	225	99	272		181		728	385
Východoslovenský	305	88	410	158	898		356		1613	602
ČSR	821	399	857	408	1470		752		3148	1559
SSR	845	377	1048	549	1648		947		3541	1873
ČSSR	1666	776	1905	957	3118		1699		6689	3432

S — počet všech soutěžících
 U — počet úspěšných řešitelů

TABULKA 3

Počty žáků středních škol soutěžících ve II. kole 32. ročníku MO

Kraj	Kategorie										Celkem	
	A		B		C		U		S			
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	73	37	36	16	85	51	194	104				
Středočeský	34	11	28	4	42	4	104	19				
Jihočeský	36	14	31	0	72	18	139	32				
Západočeský	28	16	45	6	51	18	124	40				
Severočeský	36	10	45	3	67	15	148	28				
Východočeský	43	18	50	10	91	24	184	52				
Jihomoravský	98	25	104	7	180	42	382	74				
Severomoravský	32	21	36	13	112	39	180	73				
Bratislava	73	47	54	7	79	47	206	101				
Západoslovenský	111	35	230	6	309	37	650	78				
Středoslovenský	78	25	75	4	147	29	300	58				
Východoslovenský	73	29	70	4	204	41	347	74				
ČSR	380	152	375	59	700	211	1455	422				
SSR	335	136	429	21	739	154	1503	311				
ČSSR	715	288	804	80	1439	365	2958	733				

S — počet všech soutěžících
U — počet úspěšných řešitelů

TABULKA 4

Počty účastníků III. kola 32. ročníku MO - kategorie A

Kraj	Počet všech účastníků	Počet úspěšných řešitelů	Z toho vítězů
Praha	16	9	6
Středočeský	1	0	0
Jihočeský	2	1	0
Západočeský	3	1	0
Severočeský	3	1	0
Východočeský	5	4	2
Jihomoravský	7	2	1
Severomoravský	8	3	1
Bratislava	16	10	5
Západoslovenský	4	0	0
Středoslovenský	9	4	2
Východoslovenský	5	5	3
ČSR	45	21	10
SSR	34	19	10
ČSSR	79	40	20

TABULKA 5

Počty základních škol, které se zúčastnily 32. ročníku MO

Kraj	Celkový počet	I. kola		Zúčastnilo se II. kola		III. kola	
		počet	%	počet	%	počet	%
Praha	204	173	84,8	169	82,8	29	14,2
Středočeský	275	214	77,8	194	70,5	33	12,0
Jihočeský	184	154	83,7	131	71,2	36	19,6
Západočeský	216	179	82,8	162	75,0	30	13,9
Severočeský	287	225	78,4	175	60,1	36	12,5
Východočeský	316	235	74,4	213	67,4	30	9,5
Jihomoravský	455	336	73,8	311	68,4	54	11,9
Severomoravský	468	380	81,2	322	68,8	50	10,7
Bratislava	71	58	81,7	58	81,7	27	38,0
Západoslovenský	480	389	81,0	366	76,2	41	8,5
Středoslovenský	409	316	77,3	269	65,8	34	8,3
Východoslovenský	387	331	88,3	287	74,2	35	9,0
ČSR	2 405	1 896	78,8	1 677	69,7	298	12,4
SSR	1 347	1 094	81,2	980	72,8	137	10,2
ČSSR	3 752	2 990	79,7	2 657	70,8	435	11,6

TABULKA 6

Počty žáků základních škol soutěžících v 32. ročníku MO - kategorie Z

Kraj	I. kolo		II. kolo		III. kolo	
	S	U	S	U	S	U
Praha	1 572	1 175	835	553	39	9
Středočeský	1 408	953	751	412	38	7
Jihočeský	1 400	647	421	238	40	4
Západočeský	1 817	969	493	304	45	9
Severočeský	1 970	949	639	305	37	3
Východočeský	1 905	1 089	675	449	41	9
Jihomoravský	3 180	1 692	1 199	569	61	14
Severomoravský	3 621	1 844	1 216	675	67	24
Bratislava	1 069	440	389	213	53	46
Západoslovenský	2 225	1 442	1 039	500	45	39
Středoslovenský	1 796	977	766	311	40	32
Východoslovenský	2 569	1 359	890	517	51	36
ČSR	16 873	9 318	6 229	3 505	368	79
SSR	7 659	4 218	3 084	1 541	189	153
ČSSR	24 532	13 536	9 313	5 046	557	232

SEZNAM VÍTĚZŮ A ÚSPĚŠNÝCH ŘEŠITELŮ CELOSTÁTNÍHO KOLA 32. ROČNÍKU MO

Vítězové

Pořadí, jméno a příjmení, ročník, zaměření třídy, škola.

- 1.—2. *Igor Kříž*, 4., M, G W. Piecka, Praha 2
 Jiří Sgall, 4., M, G W. Piecka, Praha 2
- 3.—4. *Vladimír Dančík*, 4., M, Košice, Šmeralova
Marián Neamtu, 4., M, G A. Markuša, Bratislava
5. *Xaver Gubáš*, 4., M, G A. Markuša, Bratislava
- 6.—7. *Jaroslav Smejkal*, 4., P, Velké Meziříčí
Martin Štěpánek, 4., P, Jaroměř
- 8.—9. *Juraj Balázs*, 3., MF, Košice, Kuzmányho
František Vencl, 4., P, Česká Třebová
10. *Eudmila Moravčíková*, 4., H, Žilina, Wolkerova
- 11.—12. *Petr Maršálek*, 3., P, Praha 4, Ohradní
Jiří Witzany, 3., M, G W. Piecka, Praha 2
- 13.—14. *Milan Kuchta*, 4., M, G A. Markuša, Bratislava
Dušan Pospíšil, 3., P, Povážská Bystrica
- 15.—17. *Martin Černý*, 3., M, G W. Piecka, Praha 2
Viktor Martišovits, 4., MF, G J. Hronca, Bratislava
Ján Šefčík, 2., M, G A. Markuša, Bratislava
- 18.—20. *Marek Hatala*, 4., M, Košice, Šmeralova

Vladan Pecha, 4., M, G M. Koperníka, Bílovec
Pavel Valtr, 3., M, G W. Piecka, Praha 2

Další úspěšní řešitelé

- 21.—22. *Roman Bačík, 4., M, G A. Markuša, Bratislava*
Ignác Tereščák, 3., P, Michalovce
23. *Peter Karailiev, 4., P, Michalovce*
- 24.—26. *Martin Foltin, 2., M, G A. Markuša, Bratislava*
Martin Klazar, 3., P, Louny
Jiří Sušický, 4., M, G W. Piecka, Praha 2
- 27.—28. *Stanislav Jelen, 4., MF, Karlovy Vary*
Martin Kolář, 4., P, Brno, Křenová
- 29.—33. *Peter Borovanský, 4., MF, G J. Hronca, Bratislava*
Fatima Cvrčková, 4., P, Strakonice
Petr Daniel, 4., P, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Jiří Soudný, 4., M, G W. Piecka, Praha 2
Zuzana Trangošová, 4., M, G A. Markuša, Bratislava
- 34.—36. *Rudolf Blaško, 4., MF, Žilina, Wolkerova*
Petr Loucký, 2., M, G W. Piecka, Praha 2
Miroslav Ryška, 3., P, Frýdek-Místek
37. *Jan Daněk, 4., MF, Žilina, Wolkerova*
- 38.—40. *Ladislav Németh, 4., M, G A. Markuša, Bratislava*
Bronislav Suchý, 4., M, G M. Koperníka, Bílovec
Jiří Votinský, 4., MF, Pardubice

Všichni byli žáky gymnázia (G),

zaměření třídy: M — na matematiku

MF — na matematiku a fyziku

P — zaměření přírodovědné

H — zaměření humanitní

Pořadí žáků z tříd, které nejsou zaměřeny na matematiku:
Vítězové celostátního kola

- 1.—2. *Jaroslav Smejkal*, Velké Meziříčí
Martin Štěpánek, Jaroměř
- 3.—4. *Juraj Balázs*, Košice, Kuzmányho
František Vencľ, Česká Třebová
5. *Ľudmila Moravčíková*, Žilina, Wolkerova
6. *Petr Maršálek*, Praha 4, Ohradní
7. *Dušan Pospíšil*, Považská Bystrica
8. *Viktor Martišovič*, G. J. Hronca, Bratislava

Další úspěšní řešitelé

9. *Ignác Tereščák*, Michalovce
10. *Peter Karailiev*, Michalovce
11. *Martin Klazar*, Louny
- 12.—13. *Stanislav Jelen*, Karlovy Vary
Martin Kolář, Brno, Křenová
- 14.—16. *Peter Borovanský*, G. J. Hronca, Bratislava
Fatima Cvrčková, Strakonice
Petr Daniel, Hradec Králové
- 17.—18. *Rudolf Blaško*, Žilina, Wolkerova
Miroslav Ryška, Frýdek-Místek
19. *Jan Daněk*, Žilina, Wolkerova
20. *Jiří Votinský*, Pardubice

SEZNAMY NEJÚSPĚŠNĚJŠÍCH ŘEŠITELŮ

II. KOLA KATEGORIÍ A, B, C

Z každého kraje a každé kategorie je uvedeno nejvýše prvních deset nejúspěšnějších řešitelů. Zaměření tříd je označeno stejně jako u úspěšných řešitelů celostátního kola, třídy gymnázia s odbornými předměty jsou označeny také P. Soutěžící kategorie C jsou žáky 1. ročníku, soutěžící v kategorii B jsou žáky 2. ročníku, pokud není uveden 1. ročník. Pokud není uvedena škola, jde o gymnázium.

Praha

Kategorie A

1. *Igor Kříž*, 4., M, G W. Piecka, Praha 2
- 2.—3. *Richard Pleva*, 3., MF, Praha 3, Sladkovského
 Jiří Sušický, 4., M, G W. Piecka, Praha 2
4. *Petr Maršálek*, 3., P, Praha 4, Ohradní
5. *Petr Valtr*, 3., M, G W. Piecka, Praha 2
6. *Petr Loucký*, 2., M, G W. Piecka, Praha 2
- 7.—9. *Petr Alexa*, 4., M, G W. Piecka, Praha 2
Zdeněk Čulík, 3., M, G W. Piecka, Praha 2
Jiří Soudný, 4., M, G W. Piecka, Praha 2

Kategorie B

- 1.—2. *Jan Hučín*, M, G W. Piecka, Praha 2
Jan Sigl, M, G W. Piecka, Praha 2
- 3.—4. *Adam Obdržálek*, 1., M, G W. Piecka, Praha 2
Roman Tůma, M, G W. Piecka, Praha 2
- 5.—8. *Leoš Mevart*, P, Praha 10, Voděradská
Petr Paleta, M, G W. Piecka, Praha 2
Boris Perušič, M, G W. Piecka, Praha 2
Patrik Španěl, M, G W. Piecka, Praha 2
9. *Vladimír Cmela*, P, Praha 10, Voděradská

Kategorie C

1. *Adam Obdržálek*, M, G W. Piecka, Praha 2
2. *Petr Hájek*, M, G W. Piecka, Praha 2
3. *Ivan Libicher*, P, Praha 4, Budějovická
4. *Petr Pavlíček*, M, G W. Piecka, Praha 2
- 5.—6. *Martin Mašát*, P, Praha 8, Náhorní
Ivo Petrouš, M, G W. Piecka, Praha 2
7. *Martin Heisler*, M, G W. Piecka, Praha 2
8. *Karel Rott*, M, G. W Piecka, Praha 2

Středočeský kraj

Kategorie A

1. *Petr Kolář*, 3., P, Mladá Boleslav
2. *Martin Dvořák*, 4., P, Čáslav
3. *Petr Havelka*, 4., P, Sedlčany
4. *Petr Zavadil*, 4., P, Říčany

5. *Hana Blažíčková* 4., P, Kolín
6. *Petr Kuboň*, 4., P, Mladá Boleslav
- 7.—9. *Antonín Králík*, 4., P, Benešov
Jaroslav Lain, 4., P, Kralupy nad Vltavou
Pavel Novotný, 4., P. Beroun

Kategorie B

1. *Ondřej Zágora*, P, Benešov
2. *Petr Šil*, P, Mladá Boleslav
3. *Zdeněk Petrás*, SPŠ Mladá Boleslav
4. *Tomáš Lorenc*, P, Kolín

Kategorie C

1. *Ľitka Rennerová*, P, Slaný
2. *Karel Valter*, P, Dobříš
3. *Jan Ornst*, P, Brandýs n. L.
4. *Ladislav Ľelínek*, P, Kladno

Jihočeský kraj

Kategorie A

1. *Roman Bláha*, 4., P, České Budějovice, Jírovcova
- 2.—5. *Petr Bílek*, 4., P, Tábor
Fatima Cvrčková, 4., P, Strakonice
Bohumír Sládek, 3., SPŠE Písek
Petr Tiller, 4., P, Tábor
- 6.—7. *Tomáš Drtina*, 3., P, České Budějovice, Jírovcova
Ludmila Dvořáková, 4., P, Milevsko

Kategorie B

Žádný úspěšný řešitel

Kategorie C

1. *Milan Štěch*, MF, G K. Šatala, České Budějovice
2. *Petr Jaroš*, P, Pelhřimov
3. *Jiří Božík*, SPŠE Písek
4. *Martina Vovesná*, P, Písek
5. *Aleš Beránek*, P, Tábor
6. *Stanislav Benda*, MF, G K. Šatala, České Budějovice
7. *Josef Fictum*, SPŠ Volyně
- 8.—9. *Stanislav Hora*, SPŠ Volyně
Milan Theier, P, Kaplice
10. *Jaroslav Kostra*, SPŠ stav., České Budějovice

Západočeský kraj

Kategorie A

1. *Jaromír Vajgert*, 4., P, Klatovy
2. *Stanislav Jelen*, 4., MF, Karlovy Vary
3. *Michaela Křižanovská*, 3., MF, G J. Fučíka, Plzeň
4. *Miroslav Plevný*, 3., P, Cheb
5. *Radek Machačka*, 3., MF, G J. Fučíka, Plzeň
- 6.—7. *Josef Běláč*, 3., MF, G J. Fučíka, Plzeň
Štěpán Trojan, 4., P, Cheb
8. *František Adamec*, 3., P, Ostrov n. O.
9. *Tomáš Martínek*, 3., P, Ostrov n. O.

Kategorie B

1. *Ladislav Hanyk*, MF, Karlovy Vary
- 2.—3. *Šárka Nová*, MF, Karlovy Vary
Ivan Vrzal, MF, Karlovy Vary
4. *Jaromír Matas*, P, Sušice
5. *Dominika Janíková*, MF, Karlovy Vary
6. *Libor Martínek*, MF, G J. Fučíka, Plzeň

Kategorie C

- 1.—2. *Radovan Osoba*, MF, Plzeň, ul. Pionýrů
Jiří Pittner, MF, G J. Fučíka, Plzeň
3. *Pavel Samek*, MF, G J. Fučíka, Plzeň
- 4.—5. *Felix Wintz*, P, Cheb
Michal Wittner, MF, Karlovy Vary
6. *Tomáš Mecl*, MF, Plzeň, ul. Pionýrů
7. *Jakub Yaghob*, MF, G J. Fučíka, Plzeň
8. *Lubomír Perk*, MF, G J. Fučíka, Plzeň
9. *Hynek Valenta*, MF, Plzeň, ul. Pionýrů
10. *Kamil Meisl*, MF, G J. Fučíka, Plzeň

Severočeský kraj

Kategorie A

1. *Pavel Vítovec*, 4., P, Litvínov
2. *Martin Klazar*, 3., P, Louny
- 3.—4. *Pavel Krtouš*, 2., MF, Liberec
Radek Mojdl, 4., P, Most
- 5.—8. *Jaromír Drábek*, 4., P, Jablonec n. N.
Petr Jaklin, 3., P, Ústí n. L.

ĽirĽi Kunc, 4., P, ŰstĽ n. L.

Pavel Satrapa, 4., P, Kadaň

9.—10. *Michal KrejĽík, 4., P, Jablonec n. N.*

Ľaroslav Novák, 4., P, Liberec

Kategorie B

1.—2. *Pavel Krtouš, MF, Liberec*

Herbert Salov, P, Rumburk

3. *David Veverka, P, Litoměřice*

Kategorie C

1. *Petr Šleich, P, DěĽín*

2.—3. *Pavel BenĽíĽek, P, Źatec*

Michal Janus, P, Tanvald

4. *Michal Kukla, P, Tanvald*

5. *Ondřej Pavlata, P, Jablonec n. N.*

6.—8. *Ivan Perman, P, Liberec*

Daniel Svoboda, P, Roudnice n. L.

Milan VodiĽka, P, Litoměřice

9.—10. *Marek ŠpĽka, SPŠ stroj. a el., Liberec*

Renata Flajšmanová, P, Tanvald

VýchodoĽeský kraj

Kategorie A

1.—3. *Martin Štěpánek, 4., P, Jaroměř*

František VenĽ, 4., P, Ľeská Třebová

ĽirĽi Votinský, 4., MF, Pardubice

4. *Aleš Kratochvíl*, 4., P, Hořice
5. *Petr Daniel*, 4., MF, G J. K. Tyla, Hradec Králové
6. *Magda Pražanová*, 4., P, Polička
- 7.—8. *Jiří Hofman*, 4., P, Hořice
Zbyněk Linhart, 3. MF, Pardubice

Kategorie B

1. *Luděk Brukner*, MF, Pardubice
2. *Petra Sekyrová*, MF, Hradec Králové, Šimkova
3. *Radka Joudalová*, MF, Hradec Králové, Šimkova
4. *Jiří Kristek*, SPŠ el., Pardubice
5. *Aleš Hýbner*, MF, G J. K. Tyla, Hradec Králové
6. *Hana Partyková*, P, Havlíčkův Brod
7. *Ivan Pícek*, MF, Hradec Králové, Šimkova
8. *Veronika Majerechová*, MF, Pardubice
9. *Jaroslav Tachovský*, MF, G J. K. Tyla, Hradec Králové
10. *Jan Tunys*, P, Semily

Kategorie C

1. *Michal Blažej*, P, Trutnov
2. *Luboš Dvořák*, MF, Pardubice
3. *Nataša Formanová*, P, Rychnov n. K.
4. *Jiří Nováček*, P, Jaroměř
5. *Jan Vávra*, P, Lanškroun
6. *Michal Fiala*, P, Litomyšl
7. *Zbyněk Novotný*, MF, Hradec Králové, Šimkova

Kategorie A

1. *Jaroslav Smejkal*, 4., P, Velké Meziříčí
2. *Jaroslav Štefánek*, 4., P, Strážnice
- 3.—4. *Tomáš Nekvapil*, 3., P, Brno, Elgartova
Petr Slavík, 4., MF, Brno, Koněvova
5. *Martin Kolář*, 4., P, Brno, Křenová
6. *Ivo Panáček*, 4., P, Jihlava
7. *Zdeněk Kovář*, 3., P, Brno, Slovanské nám.
- 8.—9. *Dušan Vaškovice*, 4., MF, Uherský Brod
Tomáš Werner, 4., MF, Brno, kpt. Jaroše
10. *Radek Páleníč*, 4., P, Prostějov

Kategorie B

1. *Martin Kovář*, MF, Brno, kpt. Jaroše
- 2.—3. *Olga Pekárková*, P, Gottwaldov
Zuzana Manová, SPŠ Brno, Kotlářská
4. *Karel Skoupý*, P, Blansko
5. *Jiří Čírtek*, P, Znojmo
- 6.—7. *Vít Kratochvíl*, P, Třebíč
Miroslav Skoupý, P, Blansko

Kategorie C

1. *Michal Krupka*, MF, Brno, kpt. Jaroše
2. *Petr Brada*, P, Třebíč
3. *Richard Seda*, P, Blansko
4. *Libor Skříčka*, MF, Brno, kpt. Jaroše

5. *Petr Bartl*, MF, Brno, kpt. Jaroše
6. *Marek Průša*, P, Brno, Koněvova

Severomoravský kraj

Kategorie A

1. *Martin Grajcar*, 3., M, G M. Koperníka, Bílovec
2. *Ladislav Švec*, 4., P, Šternberk
3. *Vladan Pecha*, 4., M, G M. Koperníka, Bílovec
- 4.—5. *Petr Adámek*, 2., M, G M. Koperníka, Bílovec
Miroslav Ryška, 3., P, Frýdek-Místek
- 6.—7. *Bronislav Suchý*, 4., M, G M. Koperníka, Bílovec
Miloslav Vašíček, 4., P, Ostrava, Šmeralova
8. *Pavel Kráčmar*, 3., M, G M. Koperníka, Bílovec
- 9.—10. *Aleš Cieplý*, 4., P, Ostrava, Šmeralova
Ivo Čermák, 3., M, G M. Koperníka, Bílovec

Kategorie B

1. *Petr Adámek*, M, G M. Koperníka, Bílovec
2. *Žarmila Ranošová*, M, G M. Koperníka, Bílovec
- 3.—4. *Jiří Kopecký*, SPŠE Olomouc, Božetěchova
Petr Pánek, P, Rožnov p. R.
5. *Přemysl Dědic*, M, G M. Koperníka, Bílovec
6. *Ivo Staněk*, M, G M. Koperníka, Bílovec
7. *Miroslav Hošek*, P, Bruntál
- 8.—9. *Vladimír Jašek*, SPŠE Olomouc, Božetěchova
Roman Kantor, M, G M. Koperníka, Bílovec

Kategorie C

1. *Vladimír Kordula*, M, G M. Koperníka, Bílovec
2. *Martin Blatný*, M, G M. Koperníka, Bílovec
3. *Aleš Pořízka*, M, G M. Koperníka, Bílovec
- 4.—5. *Antonín Franek*, M, G M. Koperníka, Bílovec
Tomáš Skalický, P, Olomouc, Jiřího z Poděbrad
6. *Michal Hrabák*, M, G M. Koperníka, Bílovec
7. *Roman Staněk*, M, G M. Koperníka, Bílovec
- 8.—9. *Otto Jünger*, M, G M. Koperníka, Bílovec
Radim Novák, P, Ostrava-Poruba
10. *Jana Holušová*, M, G M. Koperníka, Bílovec

Bratislava

Kategorie A

1. *Hana Riečanová*, 4., MF, G J. Hronca, Bratislava
- 2.—6. *Marián Blecha*, 4., M, G A. Markuša, Bratislava
Peter Borovanský, 4., MF, G J. Hronca, Bratislava
Juro Dúbrava, 4., M, G A. Markuša, Bratislava
Viktor Martišovič, 4., MF, G J. Hronca, Bratislava
Martin Zeman, 4., P, Bratislava, Tomášikova
- 7.—8. *Roman Bačík*, 4., M, G A. Markuša, Bratislava
Ján Šefčík, 2., M, G A. Markuša, Bratislava
9. *Milan Kuchta*, 4., M, G A. Markuša, Bratislava
10. *Xaver Gubáš*, 4., M, G A. Markuša, Bratislava

Kategorie B

1. *Ján Šefčík*, M, G A. Markuša, Bratislava
2. *Eva Kopecká*, MF, G J. Hronca, Bratislava

3. *Peter Volek*, P, Bratislava, Metodova
4. *Martin Knor*, M, G A. Markuša, Bratislava
5. *Martin Foltin*, M, G A. Markuša, Bratislava
6. *Peter Fedor*, P, Bratislava, Metodova
7. *Marián Šumšala*, M, G A. Markuša, Bratislava

Kategorie C

- 1.—2. *Juraj Griač*, MF, G J. Hronca, Bratislava
Ivan Polách, MF, G J. Hronca, Bratislava
- 3.—4. *Stanislav Meduna*, MF, G J. Hronca, Bratislava
Róbert Trávník, MF, G J. Hronca, Bratislava
- 5.—6. *Katarína Petrovičová*, MF, G J. Hronca, Bratislava
Anna Vojtková, MF, G J. Hronca, Bratislava
7. *Zuzana Šemmerová*, MF, G J. Hronca, Bratislava
- 8.—9. *Mária Orgonášová*, MF, G J. Hronca, Bratislava
Martin Uher, MF, G J. Hronca, Bratislava
10. *Vladimír Potisk*, MF, G J. Hronca, Bratislava

Západoslovenský kraj

Kategorie A

1. *Roman Šášik*, 4., P, Nitra-Párovce
- 2.—3. *Vladimír Beňuš*, 4., P, Zlaté Moravce
Anna Valkóová, 3., P, Levice
- 4.—5. *Danica Rapúková*, 3., P, Trenčín
Jozef Roháč, 4., P, G E. Gudernu, Nitra
- 6.—10. *Juraj Baranovič*, 4., P, Trnava
Igor Kravár, 4., P, Nitra-Párovce
Tibor Lovász, 4., P, maďarské G, Komárno

Hyacint Mircz, 4., P, maďarské G, Galanta
Norbert Oriskó, 4., P, maďarské G, Galanta

Kategorie B

1. *Dušan Kusenda, SPŠE Piešťany*
2. *Juraj Bátora, P, Bánovce n. B.*
3. *Pavol Kučerák, P, Myjava*
4. *Viktor Csiba, SPŠCh Šaľa*
5. *Štefan Hajdín, P, Malacky*
6. *Ján Mrázik, SPŠE Piešťany*

Kategorie C

1. *Peter Eliáš, SPŠE Stará Turá*
2. *Štefan Ľuríček, P, Skalica*
3. *Róbert Ľakubík, P, Levice*
4. *Peter Klein, 8. třída 7. ZŠ Piešťany*
5. *Katarína Rekošová, P, Nitra-Párovce*
6. *Zsuzsa Ivanicsová, P, maďarské G, Komárno*
7. *Ivan Kovár, P, Myjava*
8. *Ernest Meňhart, P, Levice*
9. *Ladislav Oreško, P, G E. Gudernu, Nitra*
10. *Rudolf Bocán, P, Levice*

Středoslovenský kraj

Kategorie A

1. *Dušan Pospíšil, 3., P, Považská Bystrica*
- 2.—3. *Martin Gažo, 4., P, Martin*
Ľudmila Moravčíková, 4., H, Žilina, Wolkerova

4. *Peter Dubec*, 4., P, Rimavská Sobota
- 5.—6. *Ľuboš Aláč*, 3., MF, Zvolen
Ján Daněk, 4., MF, Žilina, Wolkerova
7. *Roman Gajdošech*, 3., M, Žilina, Veľká Okružná

Kategorie B

1. *Igor Odrobina*, MF, Žilina, Veľká Okružná
2. *Miroslav Menšík*, P, Banská Bystrica, Tajovského
- 3.—4. *Richard Nemec*, P, Banská Bystrica, Tajovského
Alexander Vengrin, P, Rimavská Sobota

Kategorie C

1. *Jozef Čierny*, MF, Žilina, Veľká Okružná
2. *Milan Kubala*, MF, Žilina, Veľká Okružná
3. *Gabriela Leštáková*, P, Banská Bystrica, Tajovského
4. *Katarína Gemelová*, P, Prievidza
5. *Juraj Buchta*, P, Čadca
6. *Katarína Styková*, P, Banská Bystrica, Tajovského
7. *Peter Uher*, P, Prievidza
8. *Roman Ježo*, P, Dubnica n. V.
9. *Robert Germič*, MF, Žilina, Veľká Okružná

Východoslovenský kraj

Kategorie A

1. *Vladimír Dančík*, 4., M, Košice, Šmeralova
2. *Marek Hatala*, 4., M, Košice, Šmeralova
3. *Peter Karailiev*, 4., P, Michalovce

4. *Ignác Tereščák*, 3., P, Michalovce
5. *František Bobenič*, 3., M, Košice, Šmeralova
- 6.—7. *Peter Belčák*, 4., M, Košice, Šmeralova
Dušan Čupka, 3., P, Poprad

Kategorie B

1. *Jana Goceliaková*, P, Kežmarok
2. *Peter Trembecký*, M, Košice, Šmeralova
- 3.—4. *Peter Čajka*, P, Košice, Šrobárova
Ján Lúžny, SPŠE Prešov

Kategorie C

- 1.—2. *Mária Čurneková*, M, Košice, Šmeralova
Jana Ištvaníková, M, Košice, Šmeralova
- 3.—5. *Peter Čirip*, P, Prešov, Konštantínova
Daniela Gavalcová, M, Košice, Šmeralova
Vladimír Hašík, SPŠE Košice
6. *Anton Gromoczki*, SPŠE Košice
7. *Roman Maslenka*, M, Košice, Šmeralova
8. *Beáta Vavrínčíková*, M, Košice, Šmeralova
- 9.—10. *Igor Bilák*, P, Prešov, Konštantínova
Mária Medvidová, P, Košice, Šrobárova

Kategorie Z

ÚLOHY I. KOLA

Z - I - 1

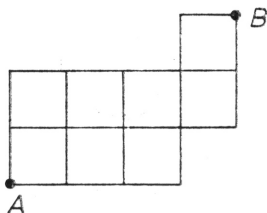
Každý ze šesti kamarádů má dřevěnou kostku, jejíž každá stěna je obarvena jednou z barev bílá, žlutá, červená, zelená, modrá, černá. Na žádném kostce nejsou dvě různé stěny obarveny stejně a proti bílé stěně je vždy stěna černá. Kostky se liší pouze umístěním dalších barev, například Alšova kostka má proti zelené stěně stěnu modrou, kdežto u Honzovy kostky jsou zelená a modrá stěna sousedními stěnami. Mohou být kostky všech šesti kamarádů obarveny tak, aby se každé dvě lišily?

Řešení. Každou z kostek můžeme jediným způsobem položit před sebe na stůl tak, že horní stěna je bílá (dolní stěna je tudíž černá) a přední stěna červená. Jednotlivé kostky se pak liší podle toho, jakou barvu mají zadní, levá a pravá stěna kostky. Je-li například zadní stěna modrá, může být levá stěna zelená a pravá žlutá nebo levá stěna žlutá a pravá zelená. Další dvě možnosti dostaneme, když je zadní stěna zelená, levá strana může být žlutá a pravá modrá, nebo obráceně. Konečně může být zadní stěna žlutá, dostaneme tak ještě dvě

možnosti - buď je levá stěna modrá a pravá zelená, nebo obráceně. Celkem máme šest možností, jak obarvit zadní a obě boční stěny krychle. Kostky všech šesti kamarádů mohou být tedy obarveny tak, aby se každé dvě kostky lišily.

Z - 1 - 2

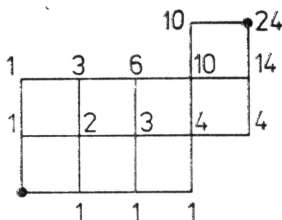
Mezi místy A a B tvoří ulice čtvercovou síť, strana každého čtverce měří 100 m (obr. 1). Jakou nejmenší vzdálenost musí ujít chodec, aby se dostal z místa A po ulicích do místa B? Kolika možnými způsoby to může provést? Přitom považujeme dvě cesty za různé, jakmile se liší aspoň jedním úsekem.



Obr. 1

Řešení. Nejkratší cesta z místa A do místa B bude taková, při které jde chodec vždy jen »doprava« nebo »nahoru«, neverací se zpět »dolů« nebo »doleva«. Přitom musí ujít čtyři úseky doprava a tři úseky nahoru, nejkratší vzdálenost je tedy 700 m. Chodec nemůže ovšem nejdřív ujít všechny čtyři úseky doprava, nejvýše po třech úsecích doprava musí jít aspoň jeden úsek nahoru. Připíšme si na plánu města ke každé křižovatce číslo, které udává, kolika možnými způsoby lze k této

křížovatec dojít nejkratším způsobem z bodu A. Začneme u křížovatek, které leží nejbližší k bodu A, a postupujeme až k bodu B. Každé připsané číslo je součtem těch čísel, která stojí od něho nalevo a pod ním. Jdeme-li totiž nejkratším způsobem, můžeme ke každé křížovatce přijít jen zleva nebo zdola. Výsledek je znázorněn na obr. 2. Celkem je 24 možností, jak dojít nejkratší cestou z místa A do místa B.



Obr. 2

Z - I - 3

Sedminásobný součet dvou dvojčíferných čísel je desetkrát větší než jejich rozdíl. Určete všechny takové dvojice.

Řešení. Hledaná čísla označíme x, y , jejich sedminásobný součet je $7(x + y)$ a ten má být desetkrát větší než jejich rozdíl $x - y$. Má tedy platit $7(x + y) = 10(x - y)$. Tuto rovnici upravíme na tvar $17y = 3x$. Je tedy číslo $3x$ dělitelné číslem 17, a protože jsou čísla 3 a 17 nesoudělná, musí být číslo x dělitelné číslem 17. Zároveň víme, že je to číslo dvojčíferné, může se proto rovnat pouze některému z čísel 17, 34, 51, 68, 85. Ke každé z těchto hodnot x vypočteme z rovnice

$17y = 3x$ číslo y . Dostaneme tak dvojice $(17, 3)$, $(34, 6)$, $(51, 9)$, $(68, 12)$ a $(85, 15)$. Jelikož číslo y má být také dvojčíferné, má naše úloha pouze dvě řešení: $x = 68$, $y = 12$ a $x = 85$, $y = 15$.

Z - 1 - 4

Z krychlí o hraně 1 cm jsme slepili krychli o hraně 4 cm. Potom jsme stěnám velké krychle přiřadili čísla 1, 2, 3, 4, 5 a 6 stejným způsobem jako na hrací kostce, tj. na protějších stěnách jsou čísla 1 a 6, 2 a 5, 3 a 4. Každé z těchto čísel jsme napsali na příslušné stěně do každého pole čtvercové sítě vytvořené hranami malých krychlí. Velkou krychli jsme pak opět rozdělili na původní malé krychle a pro každou malou krychli jsme vypočetli součet všech čísel, která na ní byla napsána.

Zjistěte:

- a) Kolik je celkem malých krychlí se součtem rovným číslu 2 ?
- b) Kolik je celkem malých krychlí se součtem rovným číslu 6 ?
- c) Jaký je největší možný součet a kolik existuje malých krychlí s tímto největším součtem ?

Řešení. Na některých malých krychlích nebude napsáno žádné číslo; je jich 8 a jsou to ty, které ležely uvnitř velké krychle. Potom můžeme ke každému z čísel 1, 2, ..., 6 najít čtyři malé krychle, které mají toto číslo napsáno na jedné své stěně a k dalším stěnám nemají připsáno žádné číslo. Jsou to ty malé krychle, které leží při stěnách velké krychle, avšak ne při jejích hranách. Vynecháme-li ty malé krychle, které leží v rozích velké krychle, leží při každé hraně velké krychle dvě malé krychle, které mají na svých stěnách připsána právě dvě

různá čísla. Nejsou to však taková dvě čísla, jejichž součet je 7. Konečně je v každém rohu velké krychle jedna malá rohová krychle, která bude mít připsána tři čísla; žádná dvě z nich nemají součet rovný číslu 7.

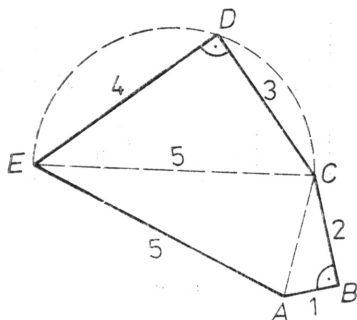
Součet 2 mají pouze ty čtyři malé krychle, které mají připsáno číslo 2 na jedné své stěně a ostatní stěny prázdné. Součet 6 mají ty čtyři krychle, které mají popsánu jen jednu stěnu, a to číslem 6, dále ty malé krychle, které mají připsána právě jen dvě čísla, a to čísla 1 a 5 nebo 2 a 4, celkem tedy opět čtyři krychle, a konečně ta jedna rohová krychle s připsanými čísly 1, 2, 3. Celkem je tudíž devět malých krychlí se součtem 6. Největší součet může být jen $6 + 5 + 4 = 15$ a patří k němu jediná malá krychle v rohu velké krychle.

Z - 1 - 5

Sestrojte pětiúhelník $ABCDE$, jestliže platí $|AB| = 1$, $|BC| = 2$, $|CD| = 3$, $|DE| = 4$, $|AE| = 5$ a úhly ABC a CDE jsou pravé.

Řešení. Předpokládejme, že pětiúhelník požadovaných vlastností existuje. Protože je úhel CDE pravý, $|CD| = 3$, $|DE| = 4$, musí být podle Pythagorovy věty $|CE| = 5$. Odtud již plyne konstrukce hledaného pětiúhelníku: Sestrojíme pravoúhlý trojúhelník ABC s odvěsnami $|AB| = 1$, $|BC| = 2$. Dále sestrojíme rovnoramenný trojúhelník ACE se základnou AC , jehož ramena AE , CE mají délku 5. To lze, protože $\frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2}\sqrt{5} < 5$. Nad přeponou CE pak sestrojíme pravoúhlý trojúhelník CDE s odvěsnami $|CD| = 3$, $|DE| = 4$. Úloha má sice více řešení, protože při konstrukci bodu E

i bodu D máme vždy dvě možnosti, avšak jen jeden pětiúhelník požadovaných vlastností je konvexní (obr. 3).

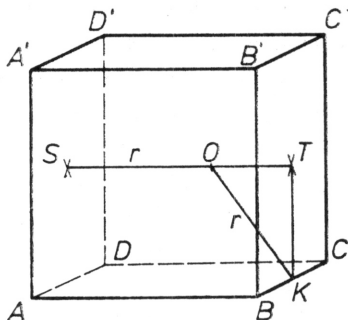


Obr. 3

Z - 1 - 6

Je dána krychle $ABCD A' B' C' D'$ o hraně délky 10. Kulová plocha protíná stěnu BCC' v kružnici vepsané čtverci $BCC' B'$ a prochází středem S protější stěny $ADD' A'$. Určete střed a poloměr této kulové plochy.

Řešení. Označme O střed uvažované kulové plochy a r její poloměr. Protože protíná stěnu BCC' v kružnici vepsané čtverci $BCC' B'$, leží její střed O na přímce, která prochází středem T tohoto čtverce a je k jeho rovině kolmá. Tato přímka protíná stěnu ADD' ve středu S čtverce $ADD' A'$ (obr. 4). V něm se kulová plocha stěny $ADD' A'$ dotýká. Označme ještě K střed úsečky BC ; uvažovaná kulová plocha jím prochází, proto je $|OK| = r$. Bod O leží na polopřímce ST , $|SO| = r$, proto je $|OT| = 10 - r$ nebo $|OT| = r - 10$, podle toho, zda je r větší nebo menší než 10. Užitím Pythago-



Obr. 4

rovy věty na pravoúhlý trojúhelník OTK dostáváme pro r rovnost

$$r^2 - (10 - r)^2 = 25,$$

odkud plyne $r = 6,25$. Střed O naší kulové plochy leží na polopřímce ST ve vzdálenosti 6,25 od bodu S .

ÚLOHY II. KOLA

Z - II - 1

Třináctinásobný rozdíl dvou dvojčiferných čísel je devětkrát větší než jejich součet. Najděte všechny takové dvojice.

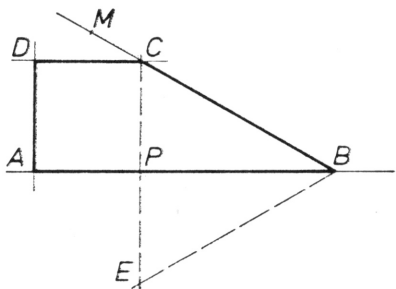
Řešení. Označíme-li hledaná čísla x , y , má platit $13(x - y) = 9(x + y)$, tedy $4x = 22y$. Na rozdíl od podobné úlohy v I. kole nemůžeme nyní z poslední rovnice tvrdit,

že číslo x je dělitelné číslem 22. Rovnici musíme nejdříve dělit dvěma, dostaneme $2x = 11y$. Čísla 2 a 11 jsou nesoudělná, a proto musí být číslo x dělitelné číslem 11. Protože je dvojciferné, přicházejí v úvahu čísla 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, a žádná jiná. Vynásobíme-li každé z těchto čísel dvěma a dělíme číslem 11, dostaneme příslušnou hodnotu y : 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18. První čtyři nejsou dvojciferná, řešením úlohy jsou tyto čtyři dvojice: (55, 10), (66, 12), (77, 14), (88, 16) a (99, 18).

Z - II - 2

Sestrojte lichoběžník $ABCD$, pro který platí $|AB| = 8$, $|BC| = 6$, $|\sphericalangle ABC| = 30^\circ$ a úhel při vrcholu A je pravý. Vypočtete délky stran AD , CD .

Řešení. Sestrojíme úsečku AB délky 8, dále polopřímku BM tak, aby $|\sphericalangle ABM| = 30^\circ$ (obr. 5), na ní bod C tak, aby $|BC| = 6$. Bodem C vedeme rovnoběžku s přímkou AB , její průsečík s kolmicí k přímce AB vedenou bodem A je



Obr. 5

vrchol D . Označme P patu kolmice vedené bodem C k přímkce AB a E bod souměrně sdružený k bodu C podle přímky AB . Trojúhelník CBE je rovnostranný, protože $|CB| = |CE|$ a $|\sphericalangle CBE| = 60^\circ$. Podle Pythagorovy věty nebo podle vzorce pro velikost výšky v rovnostranném trojúhelníku je $|PB| = 3\sqrt{3}$, a tudíž $|CD| = |AB| - |PB| = 8 - 3\sqrt{3}$, $|AD| = |PC| = 3$.

Z - II - 3

Dřevěnou krychli o hraně délky 7 cm natřeme červeně a pak rozřízneme rovinnými řezy na 7^3 krychlíček, z nichž každá bude mít hranu dlouhou 1 cm. Kolik krychlíček bude mít jednu červenou stěnu, kolik bude mít dvě červené stěny a kolik tři?

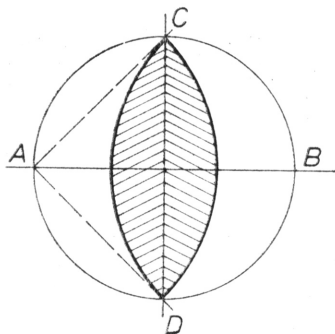
Řešení. Ty krychličky, které vzniknou z rohů velké krychle, budou mít každá tři červené stěny. Takových krychlíček je 8. Ty krychličky, které jsou umístěny při hranách velké krychle, avšak nikoli v rozích, mají obarvené dvě stěny. Krychle má 12 hran, při každé hraně je 5 krychlíček uvažovaného typu, celkem tedy 60. Jednu červenou stěnu budou mít ty krychličky, které leží při stěnách původní krychle, nikoli však při hranách. Při každé stěně je jich 25, celkem $6 \cdot 25 = 150$. Výsledek je tudíž 150, 60, 8.

Z - II - 4

Na kružnici k o poloměru $r = 10$ cm jsou zvoleny body A , B , C , D tak, že AB a CD jsou kolmé průměry kružnice k . Vypočítejte obsah průniků kruhů, které jsou ohraničeny

kružnicemi procházejícími body C, D , když jedna z nich má střed v bodě A , druhá v bodě B .

Řešení. Úhel CAD je pravý (obr. 6), protože $ABCD$ je čtverec. Vypočítáme obsah čtvrtkruhu ohraničeného poloměry



Obr. 6

AC, AD , odečteme obsah trojúhelníku ACD . Tím dostaneme obsah jedné ze dvou shodných kruhových úsečí, ze kterých se skládá průnik kruhů ze zadání úlohy. Hledaný obsah je proto

$$P = 2 \left(\frac{1}{4} \pi a^2 - \frac{1}{2} a^2 \right), \text{ kde je } a = |AC| = r \sqrt{2} = 10 \sqrt{2},$$

tedy

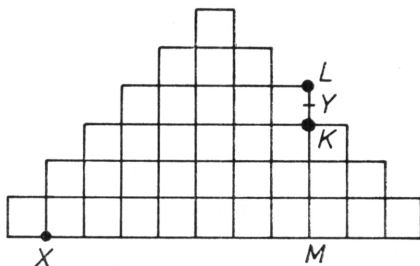
$$P = 100 (\pi - 2) \doteq 114.$$

ÚLOHY III. KOLA V ČSR

Úlohy připravil KV MO Středočeského kraje

Z - III - 1

Mnohoúhelník na obr. 7, který se skládá z 36 čtverců o straně 7 mm, rozdělte přímkou procházející bodem X na dva obrazce o stejném obsahu.



Obr. 7

Řešení. Spojíme-li bod X přímkou s bodem K , skládá se ta část mnohoúhelníku, která leží pod přímkou XK , z trojúhelníku XMK a šesti čtverců o straně 7 mm; celkový obsah

je $\frac{1}{2} 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 + 6 \cdot 7^2 = 16,5 \cdot 7^2$ (mm²), což je méně než

polovina obsahu celého mnohoúhelníku. Vedeme-li přímkou bodem X a bodem L , skládá se část mnohoúhelníku pod přímkou XL opět z šesti čtverců o straně 7 mm a z trojúhelníku XML ; celkový obsah této části je $\frac{1}{2} 7 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 7 +$

$+ 6.7^2 = 20.7^2$ (mm²). To je více než polovina obsahu celého mnohoúhelníku. Hledaná přímka bude proto procházet některým bodem Y na úsečce KL . Označme v vzdálenost bodu Y od bodu K . Obsah části mnohoúhelníku pod přímkou XY se pak rovná $\frac{1}{2} 7.7 \cdot (3.7 + v) + 6.7^2$ a to má být polovina obsahu celého mnohoúhelníku, tedy 18.7^2 , odkud plyne $v = 3$ mm. Tím je bod Y určen, a tím též hledaná přímka.

Z - III - 2

Součet tří celých kladných čísel, z nichž jedno se rovná součinu zbývajících dvou, je 47. Která jsou to čísla? Najděte všechna řešení úlohy.

Řešení. Hledaná čísla označíme x, y, z . Nechť se číslo z rovná součinu zbývajících, tedy $z = xy$. Podle podmínky úlohy má platit $x + y + xy = 47$, což můžeme psát ve tvaru $(x + 1)(y + 1) = 48$. Protože x, y jsou kladná celá čísla, jsou čísla $x + 1, y + 1$ celá a větší než 1. Rozložme číslo 48 v součin dvou celých čísel větších než 1, dostaneme tyto možnosti (nepřihlížíme k pořadí činitelů): $48 = 2.24$, $48 = 3.16$, $48 = 4.12$ a $48 = 6.8$. Čísla x, y jsou pak vždy o 1 menší než vypsané činitele, číslo z je součinem čísel x, y . Dostaneme tak čtyři trojice čísel, které jsou řešením úlohy: $(1, 23, 23)$, $(2, 15, 30)$, $(3, 11, 33)$ a $(5, 7, 35)$.

Z - III - 3

Na číselnou osu umístíme do obrazu čísla O figurku. Figurkou pohybujeme tak, že ji při každém tahu přemístíme

do obrazu sousedního celého čísla, doprava nebo doleva. Figurka se může vracet, obrazem některého čísla může projít několikrát. Z obrazu čísla O se máme dostat do obrazu čísla 5 právě devíti tahy. Kolika různými cestami může figurka jít?

Řešení. Je zřejmé, že z devíti tahů musíme sedmkrát táhnout doprava (k většímu číslu) a dvakrát doleva. Záleží teď na tom, při kterých dvou tazích táhneme doleva. Možností je tolik, kolika způsoby je možno vybrat dvě čísla z čísel $1, 2, \dots, 9$. To je možno 36 způsoby.

Z - III - 4

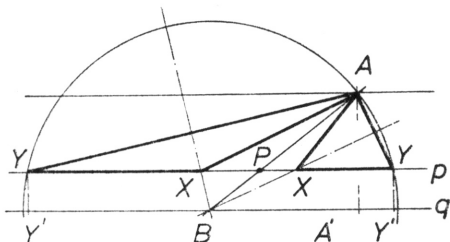
Je dána přímka p a na ní bod P . Narýsujte úsečku AB , která obsahuje bod P , jestliže je vzdálenost bodu A od přímky p 3 cm, vzdálenost bodu B od přímky p se rovná 1,5 cm a $|AP| = 5$ cm. Na přímce p sestrojte body X, Y tak, aby byl trojúhelník AXY rovnoramenný s rameny XA, XY a aby přímka BX půlila úhel AXY . Vypočítejte velikost základny rovnoramenného trojúhelníku AXY .

Řešení. Ve vzdálenosti 3 cm od přímky p sestrojíme přímku rovnoběžnou s přímkou p a zvolíme na ní bod A tak, aby $|AP| = 5$ cm. Bod B leží na polopřímce opačné k polopřímce PA a na přímce q rovnoběžné s přímkou p ve vzdálenosti 1,5 cm. Je-li trojúhelník AXY rovnoramenný se základnou AY a je-li přímka BX osou úhlu AXY , je tato přímka i osou základny AY . Proto je $|BA| = |BY|$. Bod Y tedy sestrojíme jako průsečík přímky p a kružnice o středu B , procházející bodem A . Takové průsečíky jsou dva. Zvolíme-li libovolný z nich za bod Y , sestrojíme k němu bod X

jako průsečík přímky p s osou úsečky AY . Úloha má dvě řešení (obr. 8). Označme A' a Y' paty kolmic vedených body A , Y na přímku q . Z pravoúhlých trojúhelníků BAA' a $BY Y'$ plyne (všechny vzdálenosti udáváme v cm):

$$|BA'| = \sqrt{7,5^2 - 4,5^2} = 6,$$

$$|BY'| = \sqrt{7,5^2 - 1,5^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}.$$



Obr. 8

Při jednom řešení je $|A'Y'| = |BY'| - |BA'| = 3\sqrt{6} - 6$, pro druhé řešení platí $|A'Y'| = |BY'| + |BA'| = 3\sqrt{6} + 6$. Dále je $|AY|^2 = |A'Y'|^2 + 3^2$, takže $|AY|^2 = 9(11 - 4\sqrt{6})$ při prvním řešení a $|AY|^2 = 9(11 + 4\sqrt{6})$ při druhém řešení.

ÚLOHY III. KOLA V SSR

Z - III - 1

K dvojcifernému prirodzenému číslu připočítajte prirodzené číslo k nemu obrátené, tj. číslo, ktoré dostanete

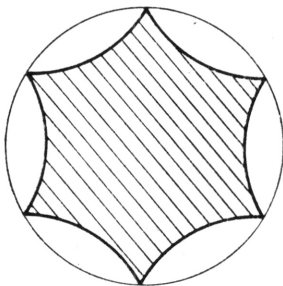
zámenou číslic daného dvojčíferného čísla. Nájďte všetky dvojčíferné prirodzené čísla, o ktorých platí, že súčet daného čísla a čísla k nemu obráteného je druhou mocninou prirodzeného čísla.

Řešení. Je-li dané číslo $10a + b$, je obrátené číslo $10b + a$, jejich součet je $11(a + b)$. Má-li být toto číslo druhou mocninou přirozeného čísla, musí být $a + b$ vhodným násobkem čísla 11, a protože nemůže být větší než 18, musí být $a + b = 11$. Řešením úlohy jsou dvojčíferná čísla 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 a 92.

Z - III - 2

Pomocou kruhovej formy s polomerom 10 cm vykrojila Anička nasledujúci koláčik (obr. 9). Určte veľkosť plošného obsahu koláčika. (Vrcholy koláčika sú vrcholmi pravidelného šesťuholníka.)

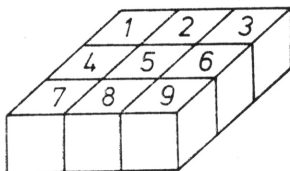
Řešení. $(3\sqrt{3} - \pi) 10^2 \doteq 205 \text{ cm}^2$, stačí od obsahu šestiúhelníku odečíst rozdíl obsahů kruhu a šestiúhelníku.



Obr. 9

Z - III - 3

Drevený kváder s rozmermi $3\text{ cm} \times 3\text{ cm} \times 1\text{ cm}$ celý zafarbíme na červeno, potom ho 4 rovinami rozrežeme na 9 kociek s rozmermi $1\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$. Vrchné steny kociek označíme 1 až 9 (obr. 10) a kocky pomiešame. Koľkými rôznymi spôsobmi sa dá z kociek opäť zložiť červený kváder, v ktorom sú všetky čísla na hornej stene?



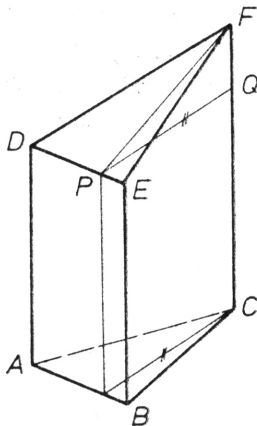
Obr. 10

Řešení. Kostka číslo 5 musí být vždy uprostřed a kostky 1, 3, 7 a 9 v rozích. Celkem máme $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ možností jejich umístění. Rovněž tak máme 24 možností pro umístění kostek s čísly 2, 4, 6 a 8 na místa zbývajících. Celkem máme $24 \cdot 24 = 576$ různých možností, jak složit červený kvádr. To považujeme však za různé i takové dva kvádry, z nichž jeden dostaneme pouhým otočením z druhého. Jinak jich bude jen $576 : 4 = 144$.

Z - III - 4

Je daný zrezaný 3-boký hranol $ABCDEF$, velikost hrany AB je 10 cm, velikost hrany AD je 13 cm, velikost BE je

tiež 13 cm a veľkosť hrany CF je 16 cm (obr. 11). Obsah hornej podstavy je 25 cm^2 . Zistite obsah dolnej podstavy.



Obr. 11

Řešení. Velikost výšky na stranu DE v trojúhelníku DEF je 5 cm. Označme P patu této výšky a Q bod na úsečce CF , pro který je $|CQ| = 13$ cm. Podle Pythagorovy věty vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku PQF velikost úsečky $|PQ| = 4$ cm. To je zároveň velikost výšky v trojúhelníku DEQ a také velikost výšky na stranu AB v trojúhelníku ABC . Jeho obsah je proto 20 cm^2 .

ÚLOHY I. KOLA — DOMÁCÍ ČÁST

C - I - 1

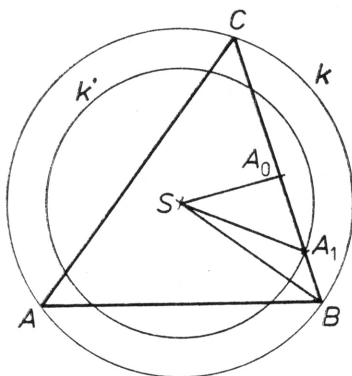
Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Kružnice, která je mu opsána, má střed S a poloměr r . Zvolme soustřednou kružnici o poloměru $r' < r$, která však také protíná všechny strany trojúhelníku ve dvou bodech. Označme u, v, w velikosti tětiv, které tato kružnice vytíná na stranách trojúhelníku ABC . Dokažte, že

$$u^2 + v^2 + w^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 12(r^2 - r'^2),$$

kde a, b, c značí velikosti stran trojúhelníku ABC ($|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$).

Řešení. Protože trojúhelník ABC je ostroúhlý, leží střed S uvnitř trojúhelníku. Označme (obr. 12) A_0 střed strany BC a A_1 jeden z průsečíků kružnice k' se stranou BC . Z Pythagorovy věty pro pravoúhlé trojúhelníky BA_0S a A_1A_0S plyne

$$|SA_0|^2 = r^2 - \frac{a^2}{4} = r'^2 - \frac{u^2}{4},$$



Obr. 12

takže

$$u^2 = a^2 - 4(r^2 - r'^2).$$

Obdobně pro ostatní úseky dostaneme

$$v^2 = b^2 - 4(r^2 - r'^2),$$

$$w^2 = c^2 - 4(r^2 - r'^2)$$

a sečtením

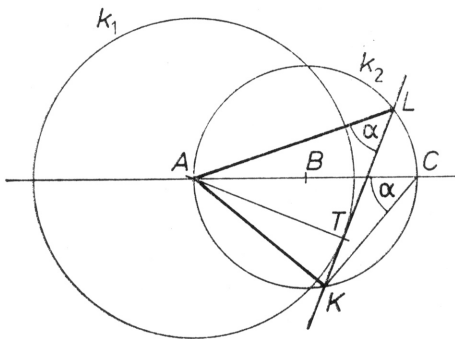
$$u^2 + v^2 + w^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 12(r^2 - r'^2),$$

což je rovnost, kterou jsme měli dokázat.

Jsou dány dvě kružnice $k_1 = (A; r_1)$, $k_2 = (B; r_2)$, přičemž $r_1 < 2r_2$, $A \in k_2$. Na kružnici k_1 zvolme libovolný bod T tak, aby tečna v něm sestrojená ke kružnici k_1 protála k_2 v různých bodech K, L . Dokažte, že $|AK| \cdot |AL| = \text{konst.}$

Řešení. Označme C druhý průsečík přímky AB s kružnicí k_2 , průsečíky tečny s kružnicí k_2 označme K, L tak, aby v případě, že oba leží na téže oblouku AC , bylo jejich pořadí A, K, L, C (obr. 13). Pak bude podle věty o obvodových úhlech

$$|\sphericalangle ACK| = |\sphericalangle ALK|.$$



Obr. 13

Protože $|\sphericalangle ATL| = |\sphericalangle AKC| = 90^\circ$, jsou trojúhelníky ATL a AKC podobné, takže musí platit

$$|AT| : |AK| = |AL| : |AC|.$$

Dosadíme-li $|AT| = r_1$, $|AC| = 2r_2$, dostaneme

$$|AL| \cdot |AK| = 2r_1r_2 = \text{konst.}$$

Jiné řešení. Nechť KL je tětiva kružnice $k = (S; r)$, pak pro libovolný bod X na kružnici k , který je různý od bodů K a L , platí

$$\sin |\sphericalangle KXL| = \frac{|KL|}{2r}.$$

Pro obsah trojúhelníku AKL z úlohy pak dostáváme

$$P = \frac{1}{2} |AK| \cdot |AL| \sin |\sphericalangle KAL| = \frac{1}{2} |AK| \cdot |AL| \cdot \frac{|KL|}{2r_2}$$

a zároveň

$$P = \frac{1}{2} |KL| \cdot r_1,$$

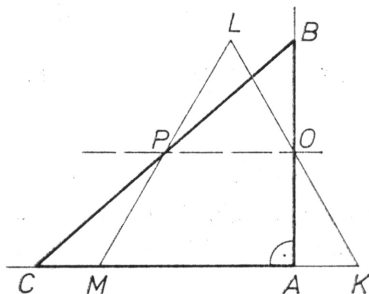
takže opět

$$|AK| \cdot |AL| = 2r_1r_2 = \text{konst.}$$

C - 1 - 3

Je dán rovnostranný trojúhelník KLM a uvnitř jeho strany KL bod O . Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC , jehož odvěsna AC leží na přímce KM , bod O je středem odvěsny AB a střed přepony BC leží na přímce LM .

Řešení. Označme P střed strany BC hledaného pravoúhlého trojúhelníku ABC (obr. 14); pak je OP střední příčkou trojúhelníku ABC . Odtud plyne konstrukce. Nejdříve sestrojíme odvěsnu AB , která je kolmá k přímce KM a jejímž středem je bod O . Bodem O vedeme rovnoběžku s přímkou KM a její průsečík s přímkou LM bude bod P . Přímka BP pak protne přímku KM v bodě C .



Obr. 14

C - I - 4

Najděte všechna přirozená čísla, jejichž třetí mocnina končí skupinou cifer 56 789.

Řešení. Má-li třetí mocnina čísla n končit skupinou cifer 56 789, musí být především

$$n = 10a + 9,$$

pak

$$\begin{aligned} n^3 &= (10a + 9)^3 = 100a^3 + 30 \cdot 81a^2 + 729 = \\ &= 100a' + 10 \cdot 3a + 29, \end{aligned}$$

takže musí být $a = 10a' + 2$, tj. $n = 100b + 29$, pak

$$n^3 = 10^3\beta + 300.29^2b + 29^3 = 10^3\beta' + 100.3b + 389,$$

takže musí být $b = 10b' + 8$, tj. $n = 10^3c + 829$, pak

$$n^3 = 10^4\gamma + 3.10^3c.829^2 + 829^3 = 10^4\gamma' + 10^3.3c + 2789,$$

takže musí být $c = 10c' + 8$, tj. $n = 10^4d + 8\,829$, pak

$$\begin{aligned} n^3 &= 10^5\delta + 3.10^4d.8\,829^2 + 8\,829^3 = \\ &= 10^5\delta' + 10^4.3d + 6\,789, \end{aligned}$$

takže musí být $d = 10d' + 5$, tj. $n = 10^5e + 58\,829$. Dostáváme tak celkový výsledek. Uvedenou podmínku splňují všechna přirozená čísla, která končí pětičíslím 58 829.

C - I - 5

605 koulí stejného průměru je srovnáno do dvou pyramid, z nichž jedna má ve spodní vrstvě koule uspořádané do čtverce, druhá do rovnostranného trojúhelníku. Obě pyramidy mají stejný počet vrstev. Určete, v kolika vrstvách byly koule srovnány v každé z pyramid a kolik koulí bylo v jednotlivých pyramidách.

Řešení. V úloze se použijí obrazcová čísla trojúhelníková a čtvercová. Čísla (počty koulí) uspořádáme do tabulky:

vrstva	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
čtvercová pyramida	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
trojúhelníková pyramida	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
součet koulí v n vrstvách	2	9	24	50	90	147	224	324	450	605

Koule byly srovnány v 10 vrstvách. V pyramidě s trojúhelníkovou podstavou bylo 220 koulí a v pyramidě se čtvercovou podstavou 385 koulí. Pokud již známe nebo dovedeme odvodit vzorec pro počet koulí v n -té vrstvě trojúhelníkové pyramidy (počítáno od vrcholu)

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

a pro součet koulí v n vrstvách čtvercové pyramidy

$$c_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

pak pro součet koulí v n vrstvách trojúhelníkové pyramidy dostaneme

$$\begin{aligned}
t_n &= 1 + 3 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \\
&= \frac{1}{2} (1 + 2^2 + \dots + n^2 + 1 + \dots + n) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{n(n+1)}{2} \right) = \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} n(n+1)(2n+1+3) = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2).
\end{aligned}$$

Pro součet koulí obou pyramid má platit (n je počet vrstev)

$$T_n = c_n + t_n = \frac{1}{2} n(n+1)^2 = 605.$$

Protože n je přirozené a má být

$$n(n+1)^2 = 1210 = 10 \cdot 11^2,$$

dostáváme $n = 10$, $t_n = 220$, $c_n = 385$.

C - I - 6

Pro každé dva trojúhelníky se stranami a, b, c a p, q, r platí

$$\begin{aligned}
(a+1)^2 + (b-1)^2 + (c+1)^2 - 2(ap + bq + cr) &> \\
> 6 - (p+1)^2 - (q-1)^2 - (r+1)^2.
\end{aligned}$$

Dokažte.

Řešení. Nejprve danou nerovnost upravíme pomocí ekvivalentních úprav

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 + 2(a - b + c) - 2(ap + bq + cr) > \\ > 6 - (p^2 + q^2 + r^2) - 2(p - q + r) - 3,$$

máme tedy dokázat nerovnost

$$a^2 + b^2 + c^2 + p^2 + q^2 + r^2 - 2(ap + bq + cr) + \\ + 2(a - b + c) + 2(p - q + r) > 0.$$

Levou stranu poslední nerovnosti můžeme ale psát jako

$$(a - p)^2 + (b - q)^2 + (c - r)^2 + 2(a - b + c) + \\ + 2(p - q + r),$$

což je vždy kladné vzhledem k trojúhelníkovým nerovnostem

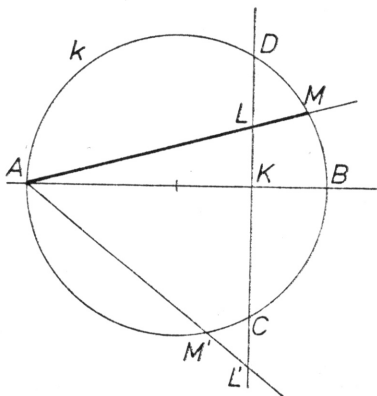
$$a - b + c > 0, \quad p - q + r > 0.$$

ÚLOHY I. KOLA — ŠKOLNÍ ČÁST

C - S - 1

Na kružnici k sú dané body A, B, C, D tak, že AB je priemer kružnice k a tetiva CD je kolmá na AB . Na úsečke CD je daný bod L . Nech M je priesečník priamky AL s kružnicou k , $M \neq A$. Dokážte, že súčin $|AL| \cdot |AM|$ je nezávislý na polohe bodu L .

Řešení. Označme K průsečík přímek AB a CD . Buď nyní L libovolný bod na přímce CD , M průsečík přímky AL a kružnice k (takový vždy existuje právě jeden) (obr. 15). Trojúhelník ABM je podle Thaletovy věty pravouhlý.



Obr. 15

Trojúhelníky ABM a AKL jsou podobné, protože jsou oba pravouhlé a mají společný úhel $|\sphericalangle LAK| = |\sphericalangle MAB|$. Je tedy

$$|AL| : |AK| = |AB| : |AM|,$$

tj.

$$|AL| \cdot |AM| = |AB| \cdot |AK|,$$

a hodnota vpravo na poloze bodu L nezávisí.

C - S - 2

Dokážte, že pre reálne čísla a, b, p, q platí

$$\begin{aligned} a^2p^2 + a^2q^2 + b^2p^2 + b^2q^2 + a^2 + b^2 + p^2 + q^2 &\geq \\ &\geq (ap + bq)^2 + 2ap + 2bq. \end{aligned}$$

Zistite, kedy platí rovnosť.

Řešení. Umocněním dvojčlenu vpravo a ekvivalentní úpravou nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} a^2q^2 + b^2p^2 + a^2 + b^2 + q^2 + p^2 - 2ap - 2bq - \\ - 2apbq \geq 0, \end{aligned}$$

což lze upravit na nerovnost

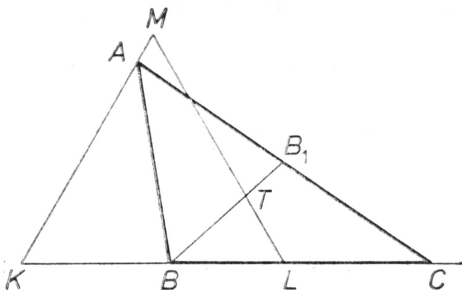
$$(aq - bp)^2 + (a - p)^2 + (b - q)^2 \geq 0,$$

která platí vždy. Přitom je zřejmé, že rovnost v poslední nerovnosti, a tedy i v nerovnosti původní, nastane právě tehdy, když $a = p$, $b = q$ (pak je i $aq = bp$).

C - S - 3a

Je dán rovnostranný trojúhelník KLM . Uvnitř jeho stran KL a ML jsou po řadě dány body B a T , přitom platí $3|TL| \leq |ML|$. Sestrojte trojúhelník ABC , jehož vrcholy A, C leží po řadě na přímkách KM, KL a jehož těžištěm je bod T .

Řešení. Z rozboru (obr. 16) je zřejmé, že známe střed B_1 strany AC a že vrcholy A a C jsou středově souměrné podle středu B_1 . Odtud plyne konstrukce: Na polopřímce BT



Obr. 16

najdeme bod B_1 tak, aby $|BB_1| = \frac{3}{2}|BT|$. Sestrojíme nyní přímku p středově souměrnou s přímkou KL podle středu B_1 , její průsečík s přímkou KM bude vrchol A , vrchol C dostaneme např. z bodu A středovou souměrností podle středu B_1 . ABC je pak trojúhelník požadovaných vlastností. Podmínka $3|TL| \leq |ML|$ nám navíc zaručuje, že bod A bude ležet uvnitř strany KM .

C - S - 3b

Najděte všechny prirodzené čísla n také, že číslo $n^2 - n$ je dělitelné číslem 50.

Řešení. Protože číslo $n^2 - n = n(n - 1)$ je vždy dělitelné dvěma (ze dvou po sobě jdoucích čísel je aspoň jedno sudé), stačí zjistit, kdy je dělitelné 25 (čísla 2 a 25 jsou navzájem nesoudělná). Ale 25 dělí součin $n(n - 1)$, právě když 25 dělí n nebo 25 dělí $n - 1$, tedy hledaná přirozená čísla n jsou tvaru

$$n = 25k \quad \text{nebo} \quad n = 25k + 1,$$

kde k je libovolné přirozené číslo. Řešením jsou tedy všechna přirozená čísla zakončená dvojčíslím

$$00, 25, 50, 75 \quad \text{nebo} \quad 01, 26, 51, 76.$$

ÚLOHY II. KOLA

C - II - 1

Určete všechna trojčiferná přirozená čísla n , pro která se poslední trojčíslí dekadického zápisu čísla n^2 neliší od posledního trojčíslí dekadického zápisu čísla $(n + 32)^2$.

Řešení. Úlohu je možno řešit postupným zjišťováním, čemu se musí rovnat poslední cifra čísla n , jeho předposlední cifra atd. Označíme-li např. poslední cifru čísla n jako c , musí být číslo $(c + 2)^2 - c^2 = 4c + 4$ dělitelné 10, takže 5 dělí $2(c + 1)$ a může být jen $c = 4$ nebo $c = 9$. Dále rozlišujeme dva případy. Označíme-li další cifru jako b , musí pak např. pro $c = 4$ být číslo $(10b + 36)^2 - (10b + 4)^2 = 640b + 1280$ dělitelné 100, tedy 5 dělí $b + 2$, takže je buď $b = 3$, nebo $b = 8$. Jak je vidět, je tento postup značně zdlouhavý. Uvědomíme si rovnou, že poslední trojčíslí dekadického zápisu čísla a se neliší od posledního trojčíslí dekadického zápisu čísla b , právě když 1000 dělí $a - b$. Pro číslo n z naší úlohy musí tedy platit $(100 \leq n \leq 999)$, že 1000 dělí

$$(n + 32)^2 - n^2 = 64n + 1024 = 64(n + 16),$$

což je právě tehdy, když 125 dělí $n + 16$. Číslo n je tedy tvaru

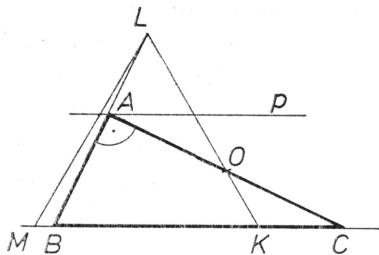
$$n = 125k - 16.$$

Vzhledem k podmínce $100 \leq n \leq 999$ může být jen $1 \leq k \leq 8$, takže úloze vyhovují čísla 109, 234, 359, 484, 609, 734, 859 a 984.

C - II - 2

Je dán rovnostranný trojúhelník KLM a uvnitř jeho strany KL takový bod O , že $|KO| < \frac{1}{2} |KL|$. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC , jehož přepona BC leží na přímce KM , bod O je středem odvěsny AC a přímka AB prochází bodem L .

Řešení. Protože O má být středem strany AC a vrchol C leží na přímce KM , bude A ležet na přímce p středově souměrné podle středu O s přímkou KM , $p \parallel KM$ (obr. 17).



Obr. 17

Dále si uvědomíme, že úhel OAL je pravý, takže vrchol A bude ležet na Thaletově kružnici k nad průměrem OL . Odtud již plyne konstrukce: Sestrojíme bod A jako průsečík přímky p a kružnice k , vrcholy B a C dostaneme jako průsečíky přímky KM s přímkami AL a AO . Z podmínky $|KO| < \frac{1}{2} |KL|$ plyne, že přímka p obsahuje právě jeden vnitřní bod úsečky OL , takže vždy najdeme dva různé průsečíky přímky p s kružnicí k . Úloha tedy bude mít vždy dvě různá řešení.

C - II - 3a

Úhlopříčky daného čtyřúhelníku jsou osami jeho vnitřních úhlů. Určete jeho obsah, jestliže jedna strana a jedna z jeho úhlopříček mají shodně délku 2 cm.

Řešení. Necht' $ABCD$ je daný čtyřúhelník a $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ příslušné vnitřní úhly. Označme O průsečík úhlopříček. Protože úhlopříčky jsou zároveň osami úhlů, musí být

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\gamma + \delta}{2},$$

neboť úhly AOB a COD jsou shodné. Protože součet úhlů ve čtyřúhelníku je 360° , musí být $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^\circ$, takže úhlopříčky jsou na sebe kolmé. Úhlopříčky jsou však zároveň osami úhlů, jsou tedy trojúhelníky ABC , BCD , CDA a DAB rovnoramenné, $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = 2$, čtyřúhelník $ABCD$ je kosočtverec a jeho obsah je

roven $4 P_{AOB}$, kde AOB je pravoúhlý trojúhelník s přeponou délky 2 cm a jednou odvěsnou délky 1 cm. Jeho obsah tedy je $\frac{\sqrt{3}}{2}$ a obsah kosočtverce $ABCD$ pak bude $2\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

C - II - 3b

Nájdite všechny trojice reálných čísel x, y, z , pro které platí $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ a současně $x^4 + y^4 + z^4 = 16$.

Řešení. Z uvedených rovnic plyne

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^4 + y^4 + z^4,$$

takže

$$x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = 0.$$

Je tedy

$$xy = xz = yz = 0.$$

Tento vztah je splněn, právě když aspoň dvě z čísel x, y, z jsou rovna nule. Pro třetí číslo pak dostáváme z první rovnice hodnotu ± 2 . Řešením soustavy jsou tedy právě trojice

$$(0, 0, 2), (0, 0, -2), (0, 2, 0), (0, -2, 0), (2, 0, 0), \\ (-2, 0, 0).$$

ÚLOHY I. KOLA – DOMÁCÍ ČÁST

B - I - 1

Dokažte, že žádné z čísel $3^{1982} + 2^{1981}$ a $3^{1982} - 2^{1981}$ není prvočíslo.

Řešení. Dokážeme, že první číslo je dělitelné jedenácti a druhé sedmi. Je totiž $3^{1982} + 2^{1981} = (3^2)^{991} + 2^{1981} = (11 - 2)^{991} + 2^{1981} = 11 T - 2^{991} + 2^{1981} = 11 T + 2^{991} (2^{990} - 1)$. Nyní stačí dokázat, že číslo $2^{990} - 1$ je dělitelné číslem 11. Je $2^{990} - 1 = (2^{10})^{99} - 1 = 1024^{99} - 1 = (1024 - 1) Q$, kde Q je stejně jako T číslo přirozené. A protože je 1023 dělitelné jedenácti, je první část úlohy dokázána. Vezmeme druhé ze zadaných čísel. Je $3^{1982} - 2^{1981} = (7 + 2)^{991} - 2^{1981} = 7 R + 2^{991} - 2^{1981} = 7 R - 2^{991} [(2^3)^{330} - 1]$ a $8^{330} - 1 = (8 - 1) S$, čísla R , S jsou přirozená. První číslo je tedy dělitelné jedenácti, druhé sedmi a přitom se těmito čísly nerovnají, jsou mnohem větší. Proto to nejsou prvočísla.

B - I - 2

Určete množinu všech bodů v rovině, která je grafem relace

$$G = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (x - m)^2 + (y - n)^2 \leq \right. \\ \left. \leq \frac{1}{16} \wedge \left(x - \frac{1}{2} - p \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} - q \right)^2 \leq \frac{(2\sqrt{2} - 1)^2}{16} \right. \\ \left. \text{pro některá celá čísla } m, n, p, q \right\}.$$

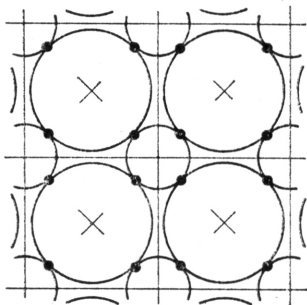
Řešení. Pro reálná čísla m, n je množinou všech bodů $[x, y]$, splňující podmínku $(x - m)^2 + (y - n)^2 \leq \frac{1}{16}$, kruh se středem v bodě $[m, n]$ o poloměru $\frac{1}{4}$. Podobně je množinou všech bodů, jejichž souřadnice x, y splňují nerovnici

$$\left(x - \frac{1}{2} - p \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} - q \right)^2 \leq \frac{(2\sqrt{2} - 1)^2}{16}$$

kruh se středem $\left[p + \frac{1}{2}, q + \frac{1}{2} \right]$ o poloměru $\frac{2\sqrt{2} - 1}{4}$. Bod $[x, y]$ patří tedy do grafu relace G právě tehdy, leží-li v některém kruhu o poloměru $\frac{1}{4}$, jehož střed má celočíselné souřadnice, a současně patří bod $[x, y]$ do některého kruhu o poloměru $\frac{2\sqrt{2} - 1}{4}$, přičemž souřadnice středu tohoto

kruhu se liší od celého čísla o $\frac{1}{2}$. Můžeme také říci, že střed tohoto kruhu splývá se středem jednotkového čtverce, jehož vrcholy mají celočíselné souřadnice. Budeme stručně mluvit

o kruzích první soustavy a kruzích druhé soustavy. Bod patří do grafu relace G právě tehdy, patří-li do některého kruhu první soustavy a zároveň do některého kruhu soustavy druhé. Každý kruh jedné soustavy se dotýká čtyř kruhů druhé soustavy (obr. 18). Hledaná množina se skládá ze všech takto obdržených bodů dotyku, tedy ze všech bodů



Obr. 18

$$\left[m + \frac{\sqrt{2}}{8}, n + \frac{\sqrt{2}}{8} \right], \left[m + \frac{\sqrt{2}}{8}, n - \frac{\sqrt{2}}{8} \right],$$

$$\left[m - \frac{\sqrt{2}}{8}, n + \frac{\sqrt{2}}{8} \right], \left[m - \frac{\sqrt{2}}{8}, n - \frac{\sqrt{2}}{8} \right],$$

kde m, n jsou celá čísla.

B - I - 3

Lineárním mnohočlenem tří proměnných x, y, z rozumíme funkci tvaru $(x, y, z) \mapsto ax + by + cz + d$, kde a, b, c, d

jsou reálná čísla, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Čísla a, b, c, d se nazývají koeficienty mnohočlenu. Zjistěte, zda existují takové lineární mnohočleny L_1, L_2, L_3, L_4 tří proměnných x, y, z s reálnými koeficienty, aby pro všechny $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ platilo $L_1(x, y, z) \cdot L_2(x, y, z) + L_3(x, y, z) \cdot L_4(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

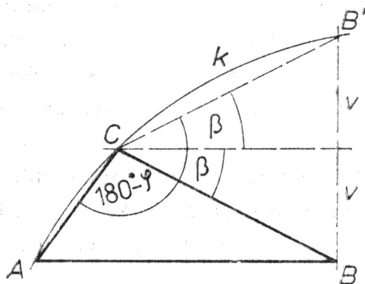
Řešení. Nulovým bodem mnohočlenu $R(x, y, z)$ tří proměnných nazýváme takovou uspořádanou trojici (x_0, y_0, z_0) reálných čísel, pro kterou platí $R(x_0, y_0, z_0) = 0$. Předpokládejme, že mnohočleny L_1, L_2, L_3, L_4 s vlastností popsanou v textu úlohy existují. Protože mnohočlen $P(x, y, z) = L_1(x, y, z) \cdot L_2(x, y, z) + L_3(x, y, z) \cdot L_4(x, y, z)$ se má pro každou trojici reálných čísel (x, y, z) rovnat mnohočlenu $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, musí mít oba mnohočleny stejné nulové body. Mnohočlen Q má však jediný nulový bod, je jím trojice $(0, 0, 0)$. Je tedy také $P(x, y, z) = 0$ pouze pro $x = y = z = 0$. Má-li některý z mnohočlenů L_1, L_2 společný nulový bod s některým z mnohočlenů L_3, L_4 , je to též nulový bod mnohočlenu P . Proto nemůže mít žádná z dvojic mnohočlenů $(L_1, L_3), (L_1, L_4), (L_2, L_3)$ nebo (L_2, L_4) společný nulový bod různý od bodu $(0, 0, 0)$. Je-li $L_1(x, y, z) = ax + by + cz + d$, musí se L_3 rovnat až na nenulový násobek mnohočlenu $ax + by + cz + d_3$, kde je $d_3 \neq d$. V opačném případě by měly mnohočleny L_1 a L_3 dokonce nekonečně mnoho společných nulových bodů. Je tedy $L_3(x, y, z) = p(ax + by + cz + d_3)$, podobně $L_4(x, y, z) = q(ax + by + cz + d_4)$ a také $L_2(x, y, z) = r(ax + by + cz + d_2)$, kde $pqr \neq 0, d_3 \neq d, d_4 \neq d, d_2 \neq d_3, d_2 \neq d_4$. Protože je $P(0, 0, 0) = 0$, je $d_1 d_2 + d_3 d_4 p q = 0$ a $P(x, y, z) = (r + pq)(ax + by + cz)^2 +$

$+ (dr + d_2r + p q d_3 + p q d_4) (ax + by + cz)$. Mnohočlen $ax + by + cz$ má však nekonečně mnoho nulových bodů, a tím jsme došli ke sporu. Lineární mnohočleny L_1, L_2, L_3, L_4 požadované vlastnosti neexistují.

B - I - 4

Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dána délka strany c , výška v na stranu c a rozdíl φ úhlů při vrcholech A, B hledaného trojúhelníku.

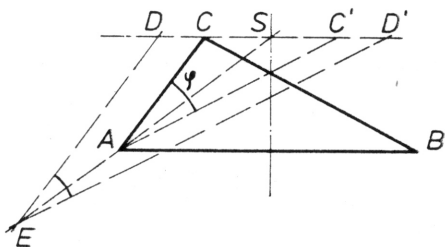
Řešení. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je $\alpha > \beta$, tedy $\varphi > 0$. Předpokládejme, že trojúhelník ABC má požadované vlastnosti. Bodem C vedme přímku p rovnoběžnou s přímkou AB . Necht' je B' bod souměrně sdružený k bodu B podle přímky p . Pak je úhel ABB' pravý a úhel ACB' má velikost $\gamma + 2\beta = 180^\circ - \varphi$ (obr. 19). Z popsaného rozboru již vyplývá konstrukce. Sestrojíme pravoúhlý trojúhelník ABB' s pravým úhlem při vrcholu B tak, že $|AB| = c$, $|BB'| = 2v$. Nad úsečkou AB' sestrojíme v polovině opačné k polovině $AB'B$ kruhový oblouk k , který



Obr. 19

je množinou všech těch bodů X této poloroviny, pro něž platí $|\sphericalangle AXB'| = 180^\circ - \varphi$. Vrchol C je pak průnikem oblouku k a přímky p , která je osou úsečky BB' . Úloha má vždy právě jedno řešení.

Jiné řešení využívá stejnolehlosti. Předpokládejme, že trojúhelník ABC splňuje podmínky úlohy. Necht' je C' bod souměrně sdružený k bodu C podle osy o úsečky AB (obr. 20).

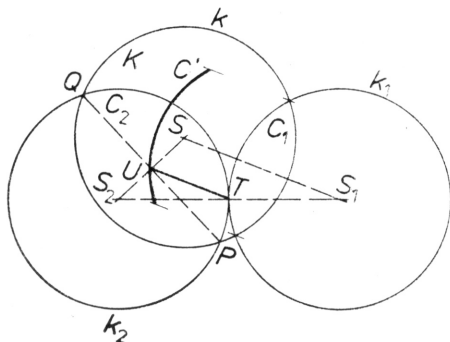


Obr. 20

Potom má úhel BAC' velikost β , a tedy úhel CAC' velikost φ . Toho využijeme při konstrukci trojúhelníku ABC . Sestrojíme úsečku AB délky c a na její ose o zvolíme bod S tak, aby měl od přímky AB vzdálenost v . Dále zvolíme úsečku DD' tak, aby byla rovnoběžná s přímkou AB a bod S byl jejím středem. Na polopřímce SA zvolíme bod E tak, aby $|\sphericalangle DED'| = \varphi$. Trojúhelník DED' je s hledaným trojúhelníkem CAC' stejnohlý, středem stejnolehlosti je bod S . Stačí tedy bodem A vést rovnoběžku s přímkou ED ; její průsečík s přímkou DD' je vrchol C hledaného trojúhelníku.

V kruhu K o poloměru 1 leží kruhový oblouk C_1 o totéž poloměru, jehož krajní body leží oba na hraniční kružnici kruhu K . Oblouku C_1 se dotýká další kruhový oblouk C_2 o poloměru 1, který leží v kruhu K a jehož krajní body P, Q leží na hraniční kružnici kruhu K . Najděte množinu středů tětiv PQ všech možných oblouků C_2 popsanych vlastností.

Řešení. Oblouk C_1 leží na kružnici k_1 se středem S_1 , podobně oblouk C_2 je částí kružnice, kterou označíme k_2 a její střed S_2 . Označme ještě k hraniční kružnici kruhu K a S její střed. Protože kružnice k, k_2 mají stejně velké poloměry a protínají se v bodech P, Q , splývá střed U úsečky PQ se středem úsečky SS_2 . Obdobně splývá bod dotyku T oblouků C_1, C_2 se středem úsečky S_1S_2 . Je tedy úsečka UT střední příčkou v trojúhelníku S_2SS_1 (obr. 21). Proto je bod U obrazem bodu T v posunutí, ve kterém se zobrazí bod S_1 na střed úsečky S_1S . Protože každý bod oblouku C_1



Obr. 21

je bodem dotyku oblouku C_1 a některého oblouku C_2 požadovaných vlastností, je množinou středů všech v textu úlohy popsanych úseček PQ oblouk C' , který dostaneme z oblouku C_1 zmíněným posunutím.

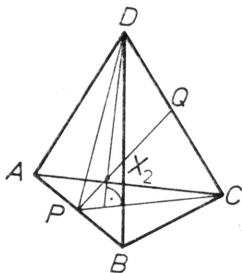
B - 1 - 6

Dvě protilehlé hrany h_1, h_2 čtyřřtěnu jsou na sebe kolmé, jejich vzdálenost označíme v . Zbývající hrany čtyřřtěnu jsou stejně dlouhé, jejich délku označíme d .

a) Ukažte, že výšky čtyřstěnu, které jsou vedeny krajními body hrany h_1 , jsou různoběžné. Jejich průsečík označíme X_1 . Podobně označíme X_2 průsečík výšek čtyřstěnu, které jsou vedeny krajními body hrany h_2 .

b) Dokažte, že vzdálenost bodů X_1 a X_2 závisí pouze na hodnotách v , d a že nezávisí na velikostech hran h_1 , h_2 .

Řešení. Označme vrcholy uvažovaného čtyřstěnu A, B, C, D a necht' AB, CD jsou ty hrany čtyřstěnu, které jsou na sebe kolmé, $|AB| = h_1, |CD| = h_2$. Trojúhelník ABC je rovnoramenný, proto jsou přímky AB a CP na sebe kolmé, když je P střed hrany AB (obr. 22). Stejně tak jsou kolmé

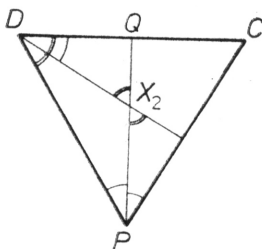


Obr. 22

přímky DP a AB , takže rovina CDP je kolmá na přímku AB . V této rovině leží tudíž výšky čtyřstěnu vedené body D , C , protože jsou též kolmé na přímku AB . Bod X_2 je proto průsečíkem výšek v trojúhelníku CDP , a leží tedy na spojnici PQ , kde Q je střed hrany CD . Z podobnosti trojúhelníků

PQD a DQX_2 plyne $|QX_2| = \frac{(h_2)^2}{4v}$, protože $|PQ| = v$

(obr. 23). Podobně odvodíme, že $|PX_1| = \frac{(h_1)^2}{4v}$ a $|X_1X_2| = |v - |PX_1| - |QX_2||$. Z pravoúhlých trojúhelníků PCQ a PBC pak plyne



Obr. 23

$$|PC|^2 = v^2 + \left(\frac{h_2}{2}\right)^2 = d^2 - \left(\frac{h_1}{2}\right)^2,$$

tedy

$$d^2 - v^2 = \left(\frac{h_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{h_2}{2}\right)^2,$$

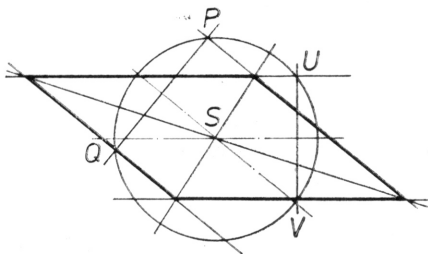
a proto $|X_1 X_2| = \frac{|2v^2 - d^2|}{v}$. Vidíme, že výsledek závisí pouze na hodnotách v, d , což jsme měli dokázat.

ÚLOHY I. KOLA - ŠKOLNÍ ČÁST

B - S - 1

Úsečky PQ a UV jsou dvě tětivy kružnice o středu S , které nejsou spolu rovnoběžné. V bodech P a Q vedeme kolmice k přímce PQ , body U , V vedeme kolmice k přímce UV . Obdržené čtyři přímky tvoří rovnoběžník. Dokažte, že jeho úhlopříčky procházejí bodem S .

Řešení. Osy úseček PQ a UV jsou středními příčkami uvažovaného rovnoběžníku a procházejí středem S kružnice, protože to jsou osy tětiv kružnice o středu S (obr. 24). Je tedy

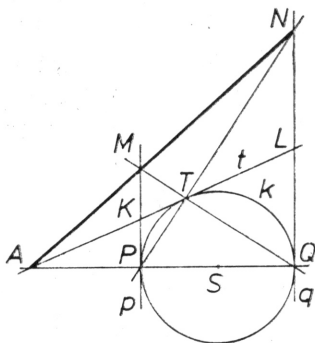


Obr. 24

bod S středem uvažovaného rovnoběžníku, a proto jím procházejí též obě jeho úhlopříčky.

V rovině je dána kružnice k o středu S a v její vnější oblasti bod A . Přímka t prochází bodem A a dotýká se kružnice k v bodě T . Označme P, Q průsečíky přímky AS s kružnicí k , tečny kružnice k v bodech P, Q označme p, q . Průsečík přímek p a QT označme M , průsečík přímek q a PT označme N . Dokažte, že body M, N, A leží na přímce.

Řešení. Označme K průsečík přímek p, t (obr. 25) a obdobně L průsečík přímek q, t . Protože jsou přímky p, q rovno-



Obr. 25

běžné, prochází přímka MN právě tehdy bodem A , když platí $|NQ| : |MP| = |LQ| : |KP|$. V pravoúhlém trojúhelníku NTQ je $|TL| = |LQ|$, protože úseky na tečnách kružnice vedených bodem L jsou stejně dlouhé. Je tedy bod L středem přepony NQ . Stejně tak je bod K středem úsečky MP . Platí tudíž $|MP| = 2|KP|$ a $|NQ| = 2|LQ|$, a tím také výše uvedená úměra. Proto také leží body N, M, A na přímce.

B - S - 3a

Dokažte, že číslo

$$1\,984 \cdot 12^4 - 1\,983 \cdot 12^3 + 1\,982 \cdot 12^2 - 1\,981 \cdot 12$$

je dělitelné číslem 13.

Řešení. Protože máme dokázat dělitelnost daného čísla číslem 13, napíšeme si číslo 12 jako $13 - 1$. Dané číslo napíšeme tedy ve tvaru $12[1\,984(13 - 1)^3 - 1\,983(13 - 1)^2 + + 1\,982(13 - 1) - 1\,981] = 12[1\,984(13^3 - 3 \cdot 13^2 + + 3 \cdot 13 - 1) - 1\,983(13^2 - 2 \cdot 13 + 1) + 1\,982(13 - 1) - - 1\,981] = 12(13a - 1\,984 - 1\,983 - 1\,982 - 1\,981)$, kde je a celé číslo. Stačí proto již jen dokázat, že je třinácti dělitelné číslo $1\,981 + 1\,982 + 1\,983 + 1\,984$, což je zřejmé, protože se tento součet rovná číslu $2 \cdot 3\,965 = 2 \cdot 13 \cdot 305$.

B - S - 3b

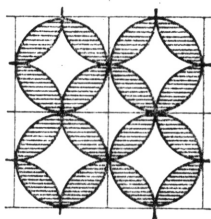
V rovině se zvolenou kartézskou soustavou souřadnic určete množinu všech bodů $[x, y]$, pro které platí: existují celá čísla m, n tak, že $(x - m)^2 + (y - n)^2 = \frac{1}{4}$, a zároveň existují

celá čísla r, s tak, že $\left(x - \frac{1}{2} - r\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} - s\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Řešení. První podmínka říká, že bod $[x, y]$ leží v některém kruhu o poloměru $\frac{1}{2}$, jehož střed má celočíselné souřadnice.

Druhá podmínka úlohy říká, že bod $[x, y]$ leží v některém kruhu o poloměru $\frac{1}{2}$, jehož střed má souřadnice $r + \frac{1}{2}, s + \frac{1}{2}$,

kde r, s jsou libovolná celá čísla. Hledaná množina se tedy skládá ze všech průniků libovolného kruhu první skupiny s libovolným kruhem druhé skupiny (obr. 26).



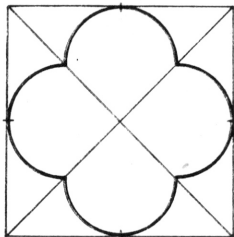
Obr. 26

ÚLOHY II. KOLA

B - II - 1

Je dán čtverec $ABCD$ se středem S a kružnice k , která je mu vepsána. Určete množinu všech bodů X s touto vlastností: k bodu X existuje na kružnici k bod Y tak, že bod X leží na úsečce SY a vzdálenost bodů X, Y se rovná vzdálenosti bodu Y od obvodu čtverce $ABCD$.

Řešení. Podle textu úlohy máme ke každému bodu Y kružnice k najít bod X tak, aby ležel na úsečce SY a aby se vzdálenost bodů X, Y rovnala vzdálenosti bodu Y od obvodu čtverce, a pak určit, co vyplní všechny takto obdržené body X . Uvažujme nejdříve jen ty body Y kružnice k , které leží zároveň v trojúhelníku DSC (obr. 27). Pro každý takový bod Y



Obr. 28

B - II - 2

Dokažte, že pro žádné prvočíslo p nemá jeho mocnina p^k s kladným sudým exponentem k tvar $2^s - 1$, kde je číslo s celé.

Řešení. Předpokládejme, že $p^k = 2^s - 1$, s celé. Je vidět, že nemůže být $s = 0$, protože $2^0 - 1 = 0$; s nemůže být také záporné, neboť pro záporné s je i $2^s - 1$ záporné. Je-li $p = 2$, je p^k dělitelné dvěma, poněvadž se předpokládá k kladné, zatímco $2^s - 1$ je číslo liché, a proto se čísla 2^k a $2^s - 1$ nemohou sobě rovnat. Je-li p jiné prvočíslo, je p liché. Položíme-li $k = 2l$, je $p^l = 2m + 1$ také liché a $p^k = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$. Toto číslo dává při dělení čtyřmi zbytek 1. Avšak čísla tvaru $2^s - 1$ mají při dělení čtyřmi zbytek tři pro každé celé s , $s \geq 2$. V případě $s = 1$ by však muselo být $p = 1$, což není prvočíslo. Tím je úloha dokázána.

B - II - 3a

Lineárním mnohočlenem tří proměnných x, y, z rozumíme funkci tvaru $(x, y, z) \mapsto ax + by + cz + d$, kde a, b, c, d jsou reálná čísla a aspoň jedno z čísel a, b, c je různé od nuly.

Ukažte, že lineární mnohočleny L, L_1, L_2, L_3, L_4 tří proměnných x, y, z takové, že pro všechna reálná čísla x, y, z a reálný parametr k platí

$$x^3 + y^3 + kz^3 = L(x, y, z).$$

. $[L_1(x, y, z) \cdot L_2(x, y, z) + L_3(x, y, z) \cdot L_4(x, y, z)]$, existují tehdy a jen tehdy, když je $k = 0$.

Řešení. Pro $k = 0$ máme

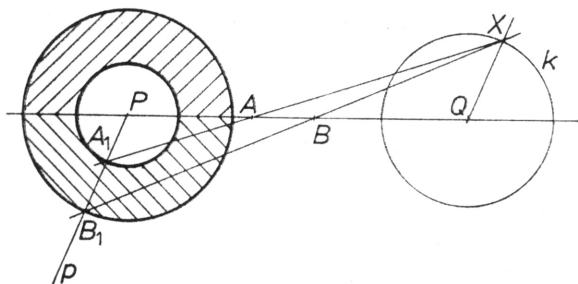
$$x^3 + y^3 = (x + y) [x(x - y) + y \cdot y],$$

stačí tedy položit $L = x + y, L_1 = x, L_2 = x - y, L_3 = L_4 = y$. Předpokládejme, že pro $k \neq 0$ a každé x, y, z je $x^3 + y^3 + kz^3 = L[L_1L_2 + L_3L_4]$. Položme $L(x, y, z) = ax + by + cz + d$. Protože je $k \neq 0$, musí být také $c \neq 0$. V opačném případě by mnohočlen $L[L_1L_2 + L_3L_4]$ neobsahoval proměnnou z ve třetí mocnině. Pak se však tento mnohočlen rovná nule pro libovolné hodnoty x, y a $z = -(ax + by + d)/c$. To ovšem znamená, že pro libovolná x, y je $x^3 + y^3 - k(ax + by + d)^3/c^3 = 0$. Dosadíme-li postupně za x, y uspořádané dvojice čísel $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1), (1, -1)$, dostaneme spor.

B - II - 3b

Uvnitř úsečky PQ jsou dány dva různé body A, B . Kružnice k má střed v bodě Q a poloměr r . Zvolme si libovolný bod X kružnice k , který neleží na přímce PQ , a označme p přímkou rovnoběžnou s přímkou QX procházející bodem P . Dále označme A_1 průsečík přímky p s přímkou XA a B_1 průsečík přímky p s přímkou XB . Jakou část roviny vyplní úsečky A_1B_1 , když bod X probíhá celou kružnici k kromě bodů přímky PQ ?

Řešení. Probíhá-li bod X kružnici k , probíhá bod A_1 kružnici o středu P a poloměru $\frac{|PA|}{|AQ|}r$, z obou kružnic musíme ovšem vynechat body na přímce PQ . Bod A_1 je totiž obrazem bodu X ve stejnolehlosti se středem A , ve které bodu Q odpovídá bod P (obr. 29). Podobně probíhá bod B_1 kružnici



Obr. 29

se středem P a poloměrem $\frac{|PB|}{|BQ|}r$. Úsečky A_1B_1 jsou úsečky, které jsou průnikem mezikruží ohraničeného uvedenými kružnicemi a polopřímkami s počátečním bodem P . Ze stejnolehlosti vyplývá, že i obráceně patří každá taková úsečka s výjimkou těch, které leží na přímce PQ , do hledané množiny. Výsledkem je tedy mezikruží se středem v bodě P bez těch bodů, které leží na přímce PQ .

Kategória A

ÚLOHY I. KOLA - DOMÁCA ČASŤ

A - I - 1

Nech k, n sú prirodzené čísla, $n \geq 2$. Ak prirodzené čísla x, y vyhovujú nerovnici

$$\left| \frac{x}{y} - \sqrt{k^2 + 1} \right| < \frac{1}{y^n}, \quad (1)$$

potom platí

$$\frac{x}{y} + k > y^{n-2} - 1.$$

Dokážte.

Riešenie. Je zrejmé, že za daných predpokladov je číslo

$$\frac{x}{y} + \sqrt{k^2 + 1}$$

kladné, a ak ním vynásobíme obe strany nerovnosti (1), dostaneme

$$\left| \frac{x^2}{y^2} - (k^2 + 1) \right| < \frac{1}{y^n} \left(\frac{x}{y} + \sqrt{k^2 + 1} \right). \quad (2)$$

Po vynásobení nerovnosti (2) kladným číslom y^n a po jednoduchej úprave dostávame ďalej

$$y^{n-2} |x^2 - y^2(k^2 + 1)| < \frac{x}{y} + \sqrt{k^2 + 1}. \quad (3)$$

Teraz najskôr ukážeme, že za daných predpokladov musí platiť

$$x^2 - y^2(k^2 + 1) \neq 0. \quad (4)$$

Ak by totiž neplatil vzťah (4), muselo by byť $x^2 = y^2(k^2 + 1)$, čo znamená, že číslo $k^2 + 1$ by muselo byť štvorcom prirodzeného čísla; to však nie je možné, pretože pre každé prirodzené číslo k platí

$$k^2 < k^2 + 1 < (k + 1)^2.$$

Tým je platnosť vzťahu (4) dokázaná a vzhľadom na to, že číslo na jeho ľavej strane je celé, vyplýva z toho, že

$$|x^2 - y^2(k^2 + 1)| \geq 1. \quad (5)$$

Ďalej je zrejmé, že pre prirodzené číslo k platí $k + 1 > \sqrt{k^2 + 1}$, z čoho vyplýva, že

$$\frac{x}{y} + k + 1 > \frac{x}{y} + \sqrt{k^2 + 1}. \quad (6)$$

Vzhľadom na (5) a (6) však z nerovnosti (3) vyplýva, že

$$y^{n-2} < \frac{x}{y} + k + 1,$$

odkiaľ už bezprostredne plyní správnosť dokazovanej nerovnosti.

A - 1 - 2

Nech $a_1, a_2, \dots, a_n$ sú kladné reálne čísla. Pre každú n -ticu kladných reálnych čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí nerovnosť

$$\frac{1}{n} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2} \right)} \geq \sqrt[n]{\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}}.$$

Dokážte. Kedy platí rovnosť?

Riešenie. Podľa známej Cauchyho nerovnosti platí

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2}} \geq \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} \quad (1)$$

a podľa nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom zasa

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} \geq \sqrt[n]{\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}}. \quad (2)$$

Z nerovnosti (1) vynásobenej kladným číslom $\frac{1}{n}$ a z nerovnosti (2) však už vyplýva správnosť dokazovanej nerovnosti. Rovnosť v danom vzťahu nastane zrejme práve vtedy, keď nastáva rovnosť vo vzťahu (1) a súčasne vo vzťahu (2). Rovnosť vo vzťahu (1) však nastáva práve vtedy, keď platí

$$x_1 a_1 = x_2 a_2 = \dots = x_n a_n, \quad (3)$$

a rovnosť vo vzťahu (2) nastáva práve vtedy, keď

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots = \frac{x_n}{a_n}. \quad (4)$$

Rovnosti (3) a (4) však súčasne platia práve vtedy, keď

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n \text{ a } a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$

A - I - 3

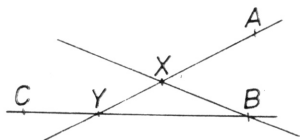
Množina φ bodov v rovine ϱ má tieto dve vlastnosti:
 V_1 : Spolu s každými svojimi dvoma navzájom rôznymi bodmi A, B obsahuje celú úsečku AB .

V_2 : V každom kruhu s polomerom 1 leží aspoň jeden bod z φ .

Potom platí $\varphi = \varrho$. Dokážte.

Riešenie. Ak nejaká množina bodov v rovine má vlastnosť V_1 , voláme ju konvexnou množinou. Množina φ je teda konvexnou množinou so špeciálnou vlastnosťou V_2 . Vzhľadom na to, že každý nenulový uhol v rovine obsahuje nejaký kruh s polomerom 1, vyplýva z V_2 , že každý nenulový uhol v rovine ϱ obsahuje aspoň jeden bod množiny φ .

Nech X je ľubovoľný bod roviny ϱ . Z vlastnosti V_2 vyplýva, že množina φ je neprázdna. Nech $A \in \varphi$. Ak je $X = A$, potom zrejme $X \in \varphi$. Nech $X \neq A$. Uvažujme o priamke AX , ktorá rozdelí rovinu ϱ na dve polroviny. Vzhľadom na vyššie uvedené vyplýva, že v každej z oboch polrovín, ktoré sú priamymi uhlami, leží bod z φ . Označme jeden z nich B . Bod B neleží na priamke AX . Preto dutý uhol určený polpriamkami opačnými ku polpriamkam XA a XB je nenulový a nachádza sa v ňom aspoň jeden bod $C \in \varphi$ (obr. 30). Označ-



Obr. 30

me Y priesečník priamok CB a XA . Bod Y leží zrejme na úsečke BC a vzhľadom na to, že bod C leží v polrovine opačnej k polrovine obsahujúcej bod A a určenej priamkou BX , leží bod Y taktiež na polpriamke opačnej k polpriamke XA . Z toho však podľa V_1 vyplýva, že $Y \in \varphi$ ako bod úsečky BC , a taktiež, že $X \in \varphi$ ako bod úsečky YA .

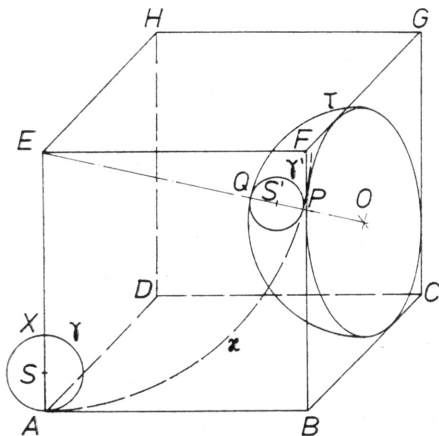
Tým sme dokázali, že každý bod roviny ϱ patrí do množiny φ , z čoho už vyplýva, že $\varphi = \varrho$.

A - I - 4

Je daná kocka $ABCDEFGH$ s hranou dĺžky a . Označme O stred steny $BCGF$ a τ guľu so stredom O a priemerom a . Bodom E vedte rovinu σ a zostrojte bod X na hrane AE tak,

aby guľi s priemerom AX v súmernosti podľa roviny σ odpovedala guľa najväčšieho priemeru, ktorá leží celá v guľi τ . Vypočítajte dĺžku tohto najväčšieho priemeru.

Riešenie (obr. 31). Pri ľubovoľnej polohe roviny σ , ktorá prechádza bodom E , leží obraz bodu A v súmernosti podľa



Obr. 31

roviny σ na guľovej ploche $\kappa(E; a)$. Guľa so stredom S na hrane AE s polomerom SA sa dotýka guľovej plochy κ (v bode A) a to isté platí i pre jej obraz v súmernosti podľa roviny σ . Guľová plocha γ požadovaných vlastností bude mať maximálny priemer práve vtedy, keď sa jej symetrický obraz γ' bude dotýkať oboch guľových plôch κ a τ a jej stred S' bude ležať súčasne na úsečke EO ako strednej oboch guľových

plôch. Označme P, Q v uvedenom poradí body dotyku guľovej plochy γ' s guľovými plochami α a τ .

Hľadaná rovina súmernosti σ zrejme rozpoluje uhol AEO a je kolmá na rovinu AEO . Veľkosť $|PQ|$ priemeru gule γ' vypočítame teraz z pravouhlého trojuholníka EFO . Zrejme platí:

$$|EP| + |OQ| = |EO| + |PQ|, \quad (1)$$

a z pravouhlého trojuholníka EFO máme

$$|EO|^2 = |EF|^2 + |FO|^2,$$

čiže

$$|EO|^2 = a^2 + \frac{a^2}{2},$$

odkiaľ

$$|EO| = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Z (1) po dosadení dostaneme

$$a + \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} + |PQ|,$$

z čoho po jednoduchšej úprave vyplýva

$$|PQ| = |AX| = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{6}).$$

A - I - 5

V rovine je daný štvorec $ABCD$ so stranou $|AB| = 1$.

a) Určte v rovine množinu M , ktorú vyplnia tretie vrcholy všetkých rovnostranných trojuholníkov, ktorých dva vrcholy ležia vo vnútri alebo na hranici daného štvorca $ABCD$.

b) Vypočítajte obsah množiny M .

Riešenie úlohy nájde čitateľ v ročenke 30. ročníka MO na str. 133—136 (úloha A-III-1).

A - I - 6

Pre dané prirodzené číslo n riešte sústavu n rovníc o n neznámych $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\binom{2}{2} \cdot x_1 = \binom{4}{4}, \quad (1_1)$$

$$\binom{3}{2} \cdot x_1 + \binom{2}{2} \cdot x_2 = \binom{5}{4}, \quad (1_2)$$

.....

$$\binom{n+1}{2} \cdot x_1 + \binom{n}{2} \cdot x_2 + \dots + \binom{2}{2} \cdot x_n = \binom{n+3}{4}. (1_n)$$

Riešenie. Ak od rovnice (1_k) odčítame rovnicu (1_{k-1}) postupne pre $k = n, n-1, \dots, 2$ a využijeme známe pravidlo o súčte kombinačných čísel

$$\binom{r}{s} + \binom{r}{s+1} = \binom{r+1}{s+1},$$

ktoré platí pre každú dvojicu nezáporných celých čísel r, s , dostaneme sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 &= 4, \\ &\dots\dots\dots \\ (n-1)x_1 + (n-2)x_2 + \dots + 2x_{n-2} + x_{n-1} &= \binom{n+1}{3}, \\ nx_1 + (n-1)x_2 + \dots + 3x_{n-2} + 2x_{n-1} + x_n &= \binom{n+2}{3}, \end{aligned}$$

ktorá je zrejmé s danou sústavou ekvivalentná. Ak pre túto sústavu zopakujeme algoritmus odčítania $(k-1)$ -tej rovnice od k -tej pre $k = n, n-1, \dots, 2$, dostaneme opäť ekvivalentnú sústavu

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_1 + x_2 &= 3, \\ &\dots\dots\dots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2} + x_{n-1} &= \binom{n}{2}, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n &= \binom{n+1}{2}. \end{aligned}$$

Po ďalšom zopakovaní použitého algoritmu dostávame konečne sústavu

$$x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_n = n,$$

ktorá predstavuje jediné riešenie danej sústavy.

Poznámka. Skutočnosť, že daná sústava má jediné riešenie,

je zrejmá už z jej tvaru. Toto riešenie by bolo možné určiť aj tak, že z prvej rovnice vypočítame $x_1 = 1$ a dosadíme do druhej rovnice, z ktorej jednoznačne určíme x_2 , atď.

ÚLOHY I. KOLA - ŠKOLSKÁ ČASŤ

A - S - 1

Nech je n prirodzené číslo. Uvažujme o všetkých usporiadaných n -ticiach reálnych čísel x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) takých, že pre žiadne $i = 1, 2, \dots, n$ nie je x_i celočíselným násobkom čísla $\frac{\pi}{2}$ a platí $\sum_{i=1}^n \operatorname{tg}^2 x_i = 1$. Nájdite najmenšiu možnú hodnotu súčtu

$$s = \sum_{i=1}^n \operatorname{cotg}^2 x_i.$$

Riešenie. Je

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{cotg}^2 x_i = \left(\sum_{i=1}^n \operatorname{cotg}^2 x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \operatorname{tg}^2 x_i \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n \operatorname{cotg} x_i \operatorname{tg} x_i \right)^2 = n^2$$

podľa Cauchyho nerovnosti. Z toho je zrejmé, že pri ľubovoľnej voľbe hodnôt x_i vyhovujúcich podmienkam úlohy je $s \geq n^2$. Ak však zvolíme všetky hodnoty x_i rovnaké a tak, aby

platilo $\operatorname{tg} x_i = \frac{1}{\sqrt{n}}$, je

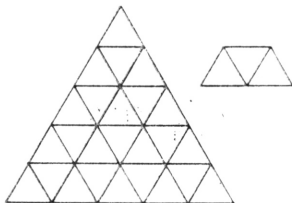
$$\sum_{i=1}^n \operatorname{tg}^2 x_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1, \quad \sum_{i=1}^n \operatorname{cotg}^2 x_i = \sum_{i=1}^n n = n^2.$$

Preto je n^2 najmenšia možná hodnota súčtu s .

A - S - 2

Určte všetky prirodzené čísla n , pre ktoré možno rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky n rozložiť na navzájom sa neprekrývajúce lichobežníky so stranami dĺžky 1, 1, 1, 2.

Riešenie. Rovnostranný trojuholník so stranou n (n prirodzené) sa dá rozložiť (obr. 32) na $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$



Obr. 32

rovnostranných trojuholníkov so stranou 1. Lichobežník so stranami dĺžok 1, 1, 1, 2 sa dá rozložiť na 3 rovnostranné trojuholníky so stranou 1. Z toho vyplýva, že ak sa rovnostranný trojuholník so stranou n dá rozložiť na lichobežníky uvažovaného tvaru, musí byť n^2 deliteľné číslom 3, čo znamená, že číslo n musí byť deliteľné číslom 3.

Nech obrátene platí: $n = 3k$, kde k je prirodzené číslo.

Potom sa rovnostranný trojuholník so stranou n dá rozložiť na rovnostranné trojuholníky so stranou 3 a každý rovnostranný trojuholník so stranou 3 sa dá rozložiť na 3 lichobežníky uvažovaného tvaru (obr. 33). Tým je dokázané, že tiež trojuholník so stranou $3k$ sa dá rozložiť na lichobežníky so stranami 1, 1, 1, 2.



Obr. 33

A - S - 3a

Vo vnútri kruhu K so stredom S a polomerom r je daný bod A . Nájdite množinu bodov v rovine, ktorú vyplnia vrcholy D všetkých rovnobežníkov $ABCD$, ktorých vrchol B i priesečník uhlopriečok leží vo vnútri alebo na hranici kruhu K .

Riešenie. Ukážeme, že hľadanou množinou M je kruh K_1 so stredom S a polomerom $3r$, z ktorého sú v prípade $S = A$ vyňaté všetky hraničné body a v prípade $S \neq A$ dva body X, Y , v ktorých hranicu kruhu K_1 pretína priamka SA .

Nech je totiž $D \in M$ a $ABCD$ rovnobežník vyhovujúci úlohe. Označme T priesečník jeho uhlopriečok. Potom platí:

$$\begin{aligned} |SD| &\leq |ST| + |TD| = |ST| + |TB| \leq \\ &\leq |ST| + |TS| + |SB| \leq 3r. \end{aligned}$$

Bod D leží teda v K_1 . Je zrejmé, že v prípade $S = A$ nemôže D ležať na hranici K_1 a v prípade $S \neq A$ nemôže byť bod D totožný s bodom X alebo Y .

Nech obrátene leží bod D v množine $K_1(S; 3r)$ s výnimkou uvedených bodov. Rozlíšime dva prípady:

a) $S \neq A$. Ak neleží D na priamke SA , stačí za bod B zvoliť vzdialenejší priesečník priamky DS s hranicou K a doplniť body A, B, D na rovnobežník $ABCD$ vyhovujúci požiadavkám úlohy. Ak D leží na priamke SA , je $X \neq D \neq Y$ podľa predpokladu. Označme K_D kruh, ktorý vznikne z K rovnolahlosťou so stredom D a koeficientom 2. Potom existuje bod $B \in K \cap K_D$, ktorý neleží na priamke SA . Stačí body B, D doplniť na rovnobežník $ABCD$ vyhovujúci požiadavkám úlohy.

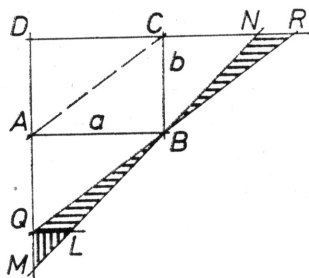
b) $S = A$. V tomto prípade volíme bod B podľa druhej konštrukcie časti a).

A - S - 3b

V rovine je daný pravouholník $ABCD$ so stranami $|AB| = a$, $|BC| = b$. Bodom B vedte priamku p tak, aby obsah trojuholníka ohraňovaného polpriamkami DC , DA a priamkou p bol minimálny.

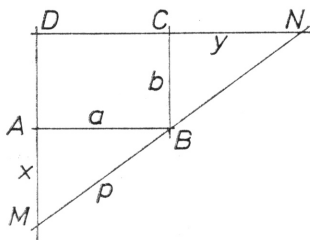
Riešenie (obr. 34). Bodom B vedieme priamku rovnobežnú s priamkou AC . Jej priesečníky s polpriamkami DA , DC v uvedenom poradí označme Q , R . Zrejme je $|CR| = a$,

$|AQ| = b$ a obsah trojuholníka DQR bude $ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab = 2ab$. Vedme bodom B inú priamku, ktorá pretína



Obr. 34

polpriamku DA v bode M a polpriamku DC v bode N . Je zrejmé, že buď N leží vo vnútri úsečky CR , alebo M leží vo vnútri úsečky AQ . Nech nastane napríklad prvá možnosť. Označme L priesečník priamky MN s priamkou vedenou bodom Q rovnobežne s priamkou DC . Potom sú trojuholníky QLB , RNB zhodné. Obsah lichobežníka $QLND$ sa rovná obsahu trojuholníka QRD , kým obsah trojuholníka DMN je pre $N \neq R$ väčší než obsah trojuholníka DQR . Hľadanou priamkou p je teda rovnobežka s priamkou AC vedená bodom B .



Obr. 35

Iné riešenie (obr. 35). Veďme bodom B priamku p , ktorá pretína polpriamku DA v bode M a polpriamku DC v bode N . Označme $|AM| = x$, $|CN| = y$. Z podobnosti trojuholníkov BNC , MBA , ktoré majú zrejme všetky uhly zhodné, vyplýva, že $x : b = a : y$ čiže $xy = ab$. Pre obsah P trojuholníka DMN platí:

$$\begin{aligned} P &= ab + \frac{1}{2}(ax + by) = ab + \frac{1}{2}\left(ax + \frac{ab^2}{x}\right) = \\ &= ab + \frac{a}{2} \frac{b^2 + x^2}{x}. \end{aligned}$$

Použitím nerovnosti $b^2 + x^2 \geq 2bx$ vyplývajúcej zo známej nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dvoch nezáporných čísel dostávame: $P \geq 2ab$, pričom znamienko rovnosti platí len pre $x = b$, kedy musí byť tiež $y = a$. V tom prípade však je zrejme priamka p rovnobežná s priamkou AC .

ÚLOHY II. KOLA

A - II - 1

Nech n je prirodzené číslo a nech pre reálne čísla α_i , $i = 1, 2, \dots, n$ platí

$$\sum_{i=1}^n \sin^2 \alpha_i = 1.$$

Potom

$$\left| \sum_{i=1}^n \sin 2\alpha_i \right| \leq 2\sqrt{n-1}.$$

Dokážte.

Riešenie. Podľa známej Cauchyho nerovnosti pre reálne čísla $x_i, y_i, i = 1, 2, \dots, n$ platí

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2. \quad (1)$$

Ak v (1) položíme $x_i = \sin \alpha_i, y_i = \cos \alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$, dostaneme

$$\left(\sum_{i=1}^n \sin^2 \alpha_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \cos^2 \alpha_i \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n \sin \alpha_i \cos \alpha_i \right)^2. \quad (2)$$

Pretože podľa predpokladu $\sum_{i=1}^n \sin^2 \alpha_i = 1$, postupne dostávame

$$\sum_{i=1}^n \cos^2 \alpha_i = \sum_{i=1}^n (1 - \sin^2 \alpha_i) = \sum_{i=1}^n 1 - \sum_{i=1}^n \sin^2 \alpha_i = n - 1,$$

na základe čoho z (2) vyplýva

$$\left(\sum_{i=1}^n \sin \alpha_i \cos \alpha_i \right)^2 \leq n - 1, \quad (3)$$

a pretože $\sin 2\alpha_i = 2 \sin \alpha_i \cos \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, po jednoduchej úprave z (3) dostaneme

$$\left| \sum_{i=1}^n \sin 2\alpha_i \right| \leq 2\sqrt{n-1},$$

čo sme mali dokázať.

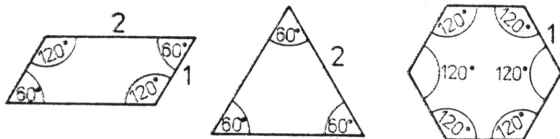
A - II - 2

Detská skladačka pozostáva z kameňov (plochých doštičiek) týchto troch typov:

- a) rovnobežník so stranami dĺžky 12 mm a 24 mm a ostrým vnútorným uhlom veľkosti 60° ;
- b) rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky 24 mm;
- c) pravidelný šesťuholník so stranou dĺžky 12 mm.

Rozhodnite, či je možné z kameňov uvedených typov zložiť rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky 180 mm tak, aby každý z bodov trojuholníka bol pokrytý niektorým kameňom, pričom by sa kamene vzájomne neprekrývali, ak predpokladáme, že kameňov každého typu je dostatočne veľký počet.

Riešenie. Odpoveď bude záporná, čo dokážeme nepriamo. Pripusťme, že naša snaha bola úspešná, a kvôli zjednodušeniu zvolme za jednotku dĺžky úsečku 12 mm dlhú. Potom náš predpoklad znamená, že rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky 15 možno vyjadriť ako zjednotenie konečného počtu navzájom sa neprekrývajúcich konvexných mnohouholníkov, z ktorých každý patrí k niektorému z týchto troch typov (obr. 36):



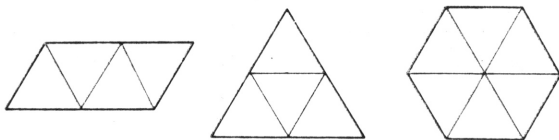
Obr. 36a, b, c

a) rovnobežník so stranami 1 a 2 a ostrým vnútorným uhlom veľkosti 60° ;

b) rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky 2;

c) pravidelný šesťuholník so stranou dĺžky 1.

Plošný obsah rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky 1 označme p (hodnotu p možno zrejme ľahko vyčísliť, ale nebudeme ju potrebovať). Pomocou p možno ľahko vyjadriť plošné obsahy mnohouholníkov všetkých troch typov z obr. 36, ako ukazuje obr. 37.



Obr. 37a, b, c

Dostávame teda, že plošný obsah rovnobežníka typu a) je $4p$, plošný obsah trojuholníka typu b) je taktiež $4p$ a plošný obsah šesťuholníka typu c) je $6p$. Z podobnosti rovnostranného trojuholníka so stranou 15 s rovnostranným trojuholníkom so stranou 1 (koeficient podobnosti je zrejme 15)

dostávame, že plošný obsah trojuholníka so stranou dĺžky 15 je 15^2p .

Ak použijeme na zloženie trojuholníka so stranou 15 x rovnobežníkov typu a), y trojuholníkov typu b) a z šesťuholníkov typu c), kde x, y, z sú nezáporné celé čísla, potom platí:

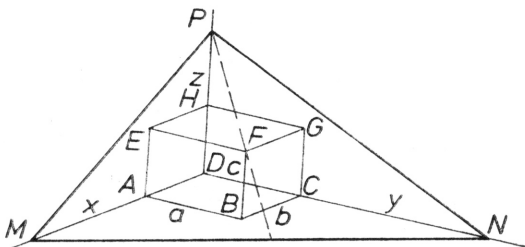
$$4px + 4py + 6pz = 15^2p \text{ čiže } 4x + 4y + 6z = 15^2.$$

V poslednej rovnosti však na ľavej strane máme číslo párne a na pravej číslo nepárne, čo znamená, že rovnosť neplatí pre žiadne celé nezáporné x, y, z . Tento spor potvrdzuje správnosť nášho tvrdenia, že sa uvedený trojuholník z kameňov skladačky zložiť nedá.

A - II - 3a

Je daný kváder $ABCDEFGH$ s rozmermi a, b, c . Jeho vrcholom F vedte rovinu ρ tak, aby objem štvorstena ohraňčeného rovinami ADC, CDH, HDA, ρ a obsahujúceho daný kváder bol minimálny.

Riešenie (obr. 38). Označme M, N, P v uvedenom po-



Obr. 38

radí priesečníky roviny ϱ s polpriamkami DA , DC , DH .
 Nech ďalej $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|BF| = c$. Predpokladajme,
 že štvorsten $DMNP$ už má požadovanú vlastnosť, a označme
 $|DM| = x$, $|DN| = y$, $|DP| = z$. Objem V štvorstena
 $DMNP$ sa zrejme rovná súčtu objemov štvorstenov $FMDP$,
 $FNDP$, $FMND$, ktorých výšky v uvedenom poradí majú
 veľkosti a , b , c . Preto platí:

$$V = \frac{1}{3} \frac{xz}{2} a + \frac{1}{3} \frac{yz}{2} b + \frac{1}{3} \frac{xy}{2} c. \quad (1)$$

Na druhej strane však zrejme platí:

$$V = \frac{1}{3} \frac{xy}{2} z = \frac{1}{6} xyz. \quad (2)$$

Preto z rovností (1), (2) vyplýva

$$axz + byz + cxy = xyz. \quad (3)$$

Ak rovnosť (3) vynásobíme kladným číslom $\frac{1}{xyz}$, dostaneme

$$\frac{a}{y} + \frac{b}{x} + \frac{c}{z} = 1. \quad (4)$$

K tomu, aby sme zistili, pri ktorých hodnotách x , y , z bude
 objem V minimálny, využijeme známu nerovnosť medzi
 aritmetickým a geometrickým priemerom

$$\frac{u + v + w}{3} \geq \sqrt[3]{uvw}, \quad (5)$$

ktorá platí pre ľubovoľné kladné reálne čísla u, v, w , pričom rovnosť vo vzťahu (5) nastáva práve vtedy, keď $u = v = w$.

Ak teraz vo vzťahu (5) položíme $u = \frac{a}{y}$, $v = \frac{b}{x}$, $w = \frac{c}{z}$, dostaneme vzhľadom na (4)

$$1 = \frac{a}{y} + \frac{b}{x} + \frac{c}{z} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{abc}{xyz}},$$

z čoho vyplýva, že $xyz \geq 27abc$. Vzhľadom na (2) preto platí

$$V \geq \frac{27}{6} abc = \frac{9}{2} abc. \quad (6)$$

Rovnosť vo vzťahu (6) však nastane zrejme práve vtedy, keď

$$\frac{a}{y} = \frac{b}{x} = \frac{c}{z},$$

z čoho vzhľadom na (4) vyplýva

$$x = 3b, y = 3a, z = 3c. \quad (7)$$

Pre hodnoty x, y, z určené vzťahom (7) bude teda objem V štvorstena $DMNP$ minimálny, rovný $\frac{9}{2} abc$.

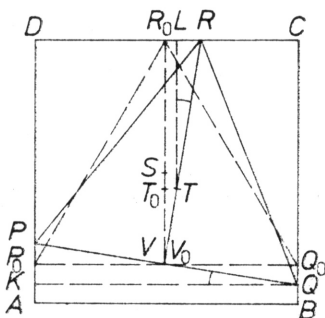
Z toho už priamo vyplýva konštrukcia roviny ϱ požadovaných vlastností.

A - II - 3b

V rovine je daný štvorec $ABCD$ so stranou $|AB| = 1$.

Určte v rovine množinu M ťažísk všetkých takých rovnostranných trojuholníkov, ktorých všetky tri vrcholy ležia na stranách daného štvorca $ABCD$.

Riešenie. Nech PQR je rovnostranný trojuholník, ktorého všetky tri vrcholy ležia na stranách štvorca $ABCD$ (obr. 39). Nech T je jeho ťažisko, V stred strany PQ , čiže



Obr. 39

päta výšky z vrcholu R na stranu PQ a S stred štvorca $ABCD$. Pretože $|RV| = \frac{\sqrt{3}}{2} |PQ|$, je zrejmé, že žiadne dva vrcholy tohto trojuholníka nemôžu ležať na tej istej strane daného štvorca. Vzhľadom na osovú symetriu rovno-

stranného trojuholníka i osovú a stredovú symetriu štvorca stačí preto uvažovať napríklad o prípade, keď $P \in AD$, $Q \in BC$, $R \in CD$. V ostatných prípadoch bude totiž situácia analogická. Označme R_0 stred strany CD a $P_0 \in AD$, $Q_0 \in BC$ také body hranice štvorca $ABCD$, pre ktoré platí: $|P_0R_0| = |Q_0R_0| = 1$. Potom $P_0Q_0R_0$ je rovnostranný trojuholník požadovaných vlastností. Nech T_0 je jeho ťažisko a V_0 stred strany P_0Q_0 . Oba tieto body ležia zrejme na pol-

priamke R_0S a platí: $|R_0T_0| = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Vzhľadom na

už spomenutú symetriu stačí dokonca uvažovať o prípade, keď $Q \in Q_0B$, $R \in R_0C$, $P \in P_0D$. Označme K , resp. L , päť kolmice z bodu Q , resp. T , na stranu AD , resp. CD (pozri obr. 39). Potom zrejme $|\sphericalangle LTR| = |\sphericalangle KQP|$ a pravouhlé trojuholníky PKQ a RLT sú podobné. Vieme, že platí:

$$|RT| = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} |PQ| = \frac{\sqrt{3}}{3} |PQ|.$$

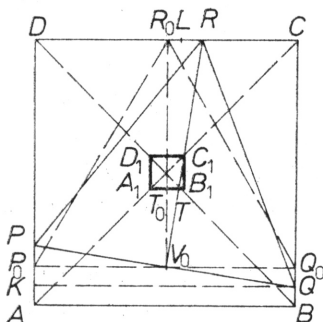
Z toho však vyplýva, že

$$|LT| = \frac{\sqrt{3}}{3} |KQ| = \frac{\sqrt{3}}{3} |AB| = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Znamená to teda, že ťažisko T každého rovnostranného trojuholníka uvažovaných vlastností leží vo vzdialenosti $\frac{\sqrt{3}}{3}$ od strany CD do vnútra štvorca $ABCD$. Z vyššie uve-

denej symetrie preto vyplýva, že ťažiská T všetkých rovnostranných trojuholníkov s vrcholmi na stranách štvorca $ABCD$ ležia na stranách štvorca $A_1B_1C_1D_1$ rovnoľahlého so štvorcom $ABCD$ v rovnoľahlosti (homotetii) so stredom S

a s koeficientom rovnoľahlosti $k = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} \right) : \frac{1}{2} =$
 $= \frac{1}{3} (2\sqrt{3} - 3)$ (obr. 40).



Obr. 40

Zostáva nám ešte ukázať, že každý bod T hranice štvorca $A_1B_1C_1D_1$ má požadovanú vlastnosť, tj. existuje rovnostranný trojuholník PQR s vrcholmi na stranách štvorca $ABCD$ a s ťažiskom v bode T . Vzhľadom na symetriu zrejme stačí, ak dôkaz urobíme pre body úsečky T_0B_1 . Z predchádzajúcej časti riešenia vieme, že pre bod T_0 je takým trojuholníkom trojuholník $P_0Q_0R_0$ so stranou 1. Nech $T \neq T_0$ je ľubovoľný bod úsečky T_0B_1 . Polpriamka V_0T pretína stranu CD štvorca $ABCD$ v bode R . Kolmica k priamke V_0R v bode V_0

pretína stranu AD štvorca $ABCD$ v bode P a stranu BC v bode Q . Trojuholník PQR je už rovnostranným trojuholníkom s ťažiskom v bode T .

Je totiž $|\sphericalangle R_0V_0R| = |\sphericalangle TV_0T_0| = |\sphericalangle LTR|$, kde $TL \parallel V_0R_0$ (obr. 40), z čoho vyplýva, že pravouhlé trojuholníky V_0R_0R , V_0T_0T , TLR sú podobné. Pretože $|V_0T_0| : |T_0R_0| = 1 : 2$, bude tiež $|V_0T| : |TR| = 1 : 2$. Ďalej platí: $|\sphericalangle PV_0P_0| = |\sphericalangle Q_0V_0Q| = |\sphericalangle PQK|$, kde $QK \parallel AB$. Preto sú podobné tiež pravouhlé trojuholníky P_0V_0P , Q_0V_0Q a PQK . Keďže $|P_0V_0| = |Q_0V_0|$, bude tiež $|PV_0| = |V_0Q|$. Preto pravouhlé trojuholníky RV_0P , RV_0Q sú zhodné. Z toho vyplýva, že RV_0 je ťažnica trojuholníka PQR a T je jeho ťažisko. Keďže platí $|RV_0| : |PV_0| = |R_0V_0| : |P_0V_0|$, sú tiež pravouhlé trojuholníky RV_0P a $R_0V_0P_0$ podobné, čo znamená, že $|\sphericalangle PRV_0| = |\sphericalangle P_0R_0V_0| = 30^\circ$ a $|\sphericalangle RPV_0| = |\sphericalangle R_0P_0V_0| = 60^\circ$. Trojuholník PQR je teda rovnostranný, ako sme chceli dokázať.

Záver: Množinou M ťažísk všetkých rovnostranných trojuholníkov, ktorých všetky tri vrcholy ležia na stranách daného štvorca $ABCD$, je hranica štvorca $A_1B_1C_1D_1$ rovnolahlého so štvorcom $ABCD$ v rovnolahlosti so stredom S

a koeficientom rovnolahlosti $\frac{1}{3} (2\sqrt{3} - 3)$.

A - III - 1

Nech $n \geq 1$ je dané prirodzené číslo. Uvažujme o všetkých n -ticiach takých reálnych čísel x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, pre ktoré platí:

$$\sum_{i=1}^n \sin^2 x_i = k, \quad (1)$$

kde $0 \leq k \leq n$ je dané reálne číslo. Určte, akú najväčšiu hodnotu nadobúda výraz

$$s = \left| \sum_{i=1}^n \sin 2x_i \right|.$$

Riešenie. Podľa známej Cauchyho nerovnosti platí

$$\left(\sum_{i=1}^n \sin^2 x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \cos^2 x_i \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n \sin x_i \cos x_i \right)^2. \quad (2)$$

Ak platí (1), potom

$$\sum_{i=1}^n \cos^2 x_i = \sum_{i=1}^n (1 - \sin^2 x_i) = \sum_{i=1}^n 1 - \sum_{i=1}^n \sin^2 x_i = n - k,$$

z čoho po dosadení do ľavej strany (2) a jednoduchšej úprave máme

$$4k(n-k) \geq \left(\sum_{i=1}^n \sin 2x_i \right)^2,$$

odkiaľ

$$s = \left| \sum_{i=1}^n \sin 2x_i \right| \leq 2\sqrt{k(n-k)}. \quad (3)$$

Ak zvolíme x_i pre $i = 1, 2, \dots, n$ tak, že $\sin x_i = \sqrt{\frac{k}{n}} \leq 1$,

$0 \leq x_i \leq \frac{\pi}{2}$, je $\cos x_i = \sqrt{\frac{n-k}{n}}$ a $s = 2\sqrt{k(n-k)}$.

Vzhľadom na (3) je teda táto hodnota za daných podmienok maximálna.

A - III - 2

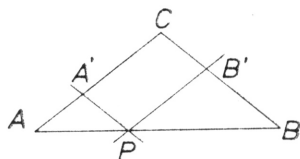
V rovine je daný trojuholník ABC . Dokážte, že pre každý bod P vnútra strany AB tohto trojuholníka platí:

$$|PC| \cdot |AB| < |PA| \cdot |BC| + |PB| \cdot |AC|,$$

kde $|XY|$ znamená vzdialenosť bodov X a Y .

Riešenie. Nech bod P je ľubovoľný pevný bod vnútra strany AB trojuholníka ABC (obr. 41). Vo vnútri strany AC zostrojíme bod A' a vo vnútri strany BC bod B' tak, aby platilo $PA' \parallel BC$, $PB' \parallel AC$. Z trojuholníkovej nerovnosti vyplýva

$$|PC| < |PA'| + |A'C| = |PA'| + |PB'|. \quad (1)$$



Obr. 41

Z podobnosti trojuholníkov APA' , ABC , PBB' dostaneme

$$|PA'| = \frac{|PA|}{|AB|} |BC|, \quad |PB'| = \frac{|PB|}{|AB|} |AC|,$$

z čoho po dosadení do (1) dostaneme

$$|PC| < \frac{|PA|}{|AB|} |BC| + \frac{|PB|}{|AB|} |AC|. \quad (2)$$

Vynásobením nerovnosti (2) kladným číslom $|AB|$ už dostávame nerovnosť, ktorej správnosť bolo treba dokázať.

Iné riešenie. Zavedme v rovine pravouhlú súradnicovú sústavu a označme a, b, c, p v uvedenom poradí polohové vektory bodov A, B, C, P . Označme ďalej $|v|$ dĺžku vektora v . Zrejme platí:

$$p = (1 - t)a + tb,$$

kde reálne číslo $0 < t < 1$ vyhovuje vzťahom

$$t = \frac{|p - a|}{|b - a|}, \quad 1 - t = \frac{|p - b|}{|b - a|}. \quad (3)$$

Použitím trojuholníkovej nerovnosti vzhľadom na (3) postupne dostaneme:

$$\begin{aligned}
 |PC| &= |c - p| = |tc + (1 - t)c - tb - (1 - t)a| = \\
 &= |(1 - t)(c - a) + t(c - b)| < \\
 &< (1 - t)|c - a| + t|c - b| = \\
 &= \frac{|p - a|}{|b - a|} |c - b| + \frac{|p - b|}{|b - a|} |c - a| = \\
 &= \frac{|PA|}{|AB|} |BC| + \frac{|PB|}{|AB|} |AC|,
 \end{aligned}$$

z čoho už priamo vyplýva dokazované tvrdenie. Ostrá nerovnosť v trojuholníkovej nerovnosti platí preto, lebo vektory $c - a$, $c - b$ sú lineárne nezávislé.

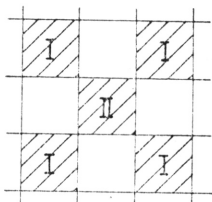
A - III - 3

Polia šachovnice 8×8 tvoria štvorce so stranou dĺžky 3 cm. Na šachovnicu položíme obdĺžnikový prúžok papiera s rozmermi 6 cm a 3 cm. Budeme hovoriť, že prúžok sa prekrýva s polom šachovnice, ak má s ním spoločný aspoň jeden vnútorný bod. Zistite, aký je najväčší počet čiernych polí, s ktorými sa môže daný obdĺžnikový prúžok papiera prekrývať.

Riešenie. Kvôli zjednodušeniu zvolíme úsečku veľkosti 3 cm za novú jednotku dĺžky. Potom je každé pole šachovnice štvorec so stranou 1 a na šachovnicu kladieme obdĺžnik so stranami 2 a 1.

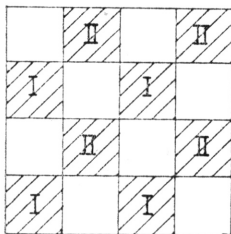
Najskôr ukážeme, že nie je možné nájsť takú polohu

obdĺžnika, aby sa prekryval so siedmimi poliami šachovnice. Predovšetkým si uvedomíme, že obdĺžnik sa nemôže prekryvať súčasne so štyrmi poliami označenými I na obr. 42.



Obr. 42

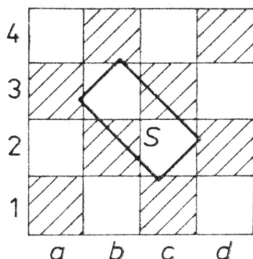
V opačnom prípade by musel totiž obsahovať aspoň jeden vnútorný bod každého z polí označených I, a teda aj celý konvexný obal týchto bodov. Vo vnútri konvexného obalu však leží zrejme celé pole označené II, čo je štvorec so stranou 1. Tento by však mal ležať vo vnútri obdĺžnika rozmerov 2×1 , čo je spor.



Obr. 43

Najdlhšou úsečkou daného obdĺžnika je zrejme jeho uhlopriečka, ktorej veľkosť je $\sqrt{5} < 3$. Z toho vyplýva, že daný obdĺžnik môže mať neprázdny prienik najviac so štyrmi riadkami a najviac so štyrmi stĺpcami šachovnice. Bude teda určite vždy ležať v nejakej časti šachovnice s rozmermi 4×4 polia (obr. 43). V tejto časti je práve 8 čiernych polí, ktoré označíme symbolmi I a II. Zo štyroch polí označených I sa však podľa vyššie uvedeného obdĺžnik prekrýva najviac s tromi a analogicky sa dokáže, že i z polí označených II sa môže prekrývať najviac s tromi. Z toho vyplýva, že daný obdĺžnik sa môže prekrývať najviac so 6 čiernymi poliami.

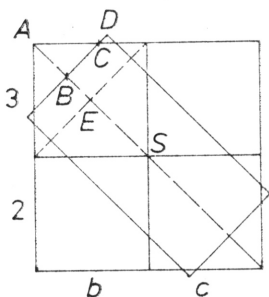
Teraz ukážeme, že skutočne existuje taká poloha obdĺžnika, pri ktorej sa prekrýva so 6 čiernymi poliami šachovnice. Stačí ho položiť tak, ako je to znázornené na obr. 44: jeho



Obr. 44

stred S leží v bode dotyku polí $b2, c3$ a jeho strany zvierajú so stranami šachovnice uhol 45° . Ak použijeme označenie

ako na obr. 45, je $|BS| = 1 > \frac{\sqrt{2}}{2} = |ES|$, $|BC| = |AB| =$
 $= |AS| - |BS| = \sqrt{2} - 1$, $|BD| = \frac{1}{2} > |BC|$. Preto obsa-



Obr. 45

huje úsečka BD vnútorný bod podľa $b4$. Zo súmernosti obdĺžnika podľa stredu S i podľa osi AS však vyplýva, že obdĺžnik má spoločné vnútorné body tiež s poliami $a3$, $c1$ a $d2$ a samozrejme aj s poliami $b2$ a $c3$.

Podľa riešenia *Ľ. Sgalla*, 4. tr.
 gymn. W. Piecka, Praha

A - III - 4

Nech $n \geq 2$ je dané prirodzené číslo a $a_0, a_1, \dots, a_n$ sú za sebou nasledujúce členy aritmetickej postupnosti. Potom platí:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a_k = 0. \quad (1)$$

Dokážte.

Riešenie. Pre každé k ($0 \leq k \leq n$) zrejme platí $a_k = a_0 + kd$, kde d je diferencia danej aritmetickej postupnosti. Označme L ľavú stranu rovnosti (1). Je teda

$$L = a_0 \left[\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \right] + d \left[-\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} - 3\binom{n}{3} + \dots + (-1)^n n \binom{n}{n} \right].$$

Výraz v prvej hranatej zátvorke je však podľa binomickej vety n -tou mocninou dvojčlena $1 - 1$ a tak sa pre $n \geq 2$ zrejme rovná nule. V druhej hranatej zátvorke sú sčítance tvaru

$$\begin{aligned} (-1)^k k \binom{n}{k} &= (-1)^k k \frac{n!}{(n-k)! k!} = \\ &= (-1)^k n \frac{(n-1)!}{(n-k)! (k-1)!} = (-1)^k n \binom{n-1}{k-1}, \end{aligned}$$

$k = 1, 2, \dots, n$. Súčet v tejto zátvorke sa teda rovná $-n(1-1)^{n-1} = 0$. Oba sčítance v L sú teda rovné nule, čím je správnosť rovnosti (1) dokázaná.

Určte všetky dvojice (x, y) prirodzených čísel, pre ktoré platí

$$\left| \frac{x}{y} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{y^3}. \quad (1)$$

Riešenie. Najskôr dokážeme, že pre každé riešenie (x, y) danej nerovnice (x, y) prirodzené) je $y < 3$. Ak totiž vynásobíme danú nerovnosť kladným číslom $y^2 \left(\frac{x}{y} + \sqrt{2} \right)$, dostaneme

$$|x^2 - 2y^2| < \frac{1}{y} \left(\frac{x}{y} + \sqrt{2} \right). \quad (2)$$

Vzhľadom na iracionálnosť čísla $\sqrt{2}$ nie je $x^2 - 2y^2 = 0$. Je teda $|x^2 - 2y^2| \geq 1$ a vzhľadom na to z (2) vyplýva

$$1 < \frac{1}{y} \left(\frac{x}{y} + \sqrt{2} \right). \quad (3)$$

Zo vzťahu $\left| \frac{x}{y} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{y^3}$ však vyplýva, že $\frac{x}{y} < \sqrt{2} + \frac{1}{y^3}$,

z čoho vzhľadom na (3) máme $1 < \frac{1}{y} \left(\frac{1}{y^3} + 2\sqrt{2} \right)$. Pre $y \geq 3$ je však

$$\frac{1}{y} \left(\frac{1}{y^3} + 2\sqrt{2} \right) < \frac{1}{3} \left(\frac{1}{27} + 2,84 \right) < 1,$$

čo je spor.

Stačí teda vyšetrovať prípady $y = 1$ a $y = 2$, čo vedie k riešeniu nerovníc

$$|x - \sqrt{2}| < 1, \quad |x - 2\sqrt{2}| < \frac{1}{4}.$$

Prvá z nich má práve dve riešenia: $x = 1$, $x = 2$, a druhá jediné riešenie: $x = 3$.

Všetky riešenia v obore prirodzených čísel nerovnice (1) teda sú: (1, 1), (2, 1) a (3, 2).

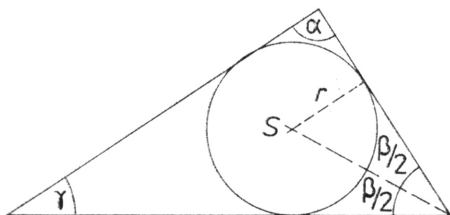
A - III - 6

Je daná kružnica $k = (S; r)$. Nech M je množina všetkých takých trojuholníkov s vpísanou kružnicou k , ktorých najväčší uhol sa rovná dvojnásobku najmenšieho uhla. Nájdite množinu všetkých bodov, ktorú vyplnia druhé od bodu S najvzdialenejšie vrcholy všetkých trojuholníkov z množiny M .

Riešenie. Nech T je ľubovoľný trojuholník z množiny M a $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ sú veľkosti jeho vnútorných uhlov. Platí teda $\alpha = 2\gamma$. Druhý od S najvzdialenejší vrchol trojuholníka T je vrchol odpovedajúci uhlu β a jeho vzdialenosť od S bude

$r / \sin \frac{\beta}{2}$ (obr. 46). Zrejme je

$$\alpha + \beta + \gamma = \beta + 3\gamma = \pi \quad \text{a} \quad \gamma \leq \beta \leq 2\gamma.$$



Obr. 46

Z toho vyplýva, že musí platiť

$$\frac{\pi}{4} \leq \beta \leq \frac{2\pi}{5}. \quad (1)$$

Nech teraz β je uhol vyhovujúci podmienke (1). Potom $\alpha = \frac{2}{3}(\pi - \beta)$, $\gamma = \frac{1}{3}(\pi - \beta)$ vyhovujú rovnostiam $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, $\alpha = 2\gamma$ a nerovnostiam $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. To znamená, že trojuholník T s vnútornými uhlami α , β , γ , ktorý patrí do množiny M , existuje.

Hľadanou množinou bodov je preto uzavreté medzikružie ohraničené kružnicami $k_1 = \left(S, r/\sin \frac{\pi}{5}\right)$, $k_2 = \left(S, r/\sin \frac{\pi}{8}\right)$.

Korespondenční seminář ÚV MO

Cílem korespondenčního semináře je dále zvyšovat úroveň špičkových řešitelů, kteří nejsou z Prahy ani z Bratislavy, a nemají tak možnost pracovat v tamních seminářích pro přípravu na mezinárodní MO. K účasti pozvalo předsednictvo ÚV MO na základě výsledků v MO, návrhů KV MO a individuálního zájmu asi 50 žáků, z nichž se přihlásilo a zúčastnilo 29 žáků - 3 ze Středočeského kraje, 2 z Jihočeského, 1 ze Západočeského, 5 ze Severočeského, 4 z Východočeského, 4 z Jihomoravského, 5 ze Severomoravského, 2 ze Středo-slovenského a 3 z Východoslovenského kraje. Pravidelně jim byly rozesílány série poměrně náročných úloh, které měli během 4 až 5 týdnů vyřešit. Došlá řešení byla opravena, ohodnocena a spolu s rozmnoženým komentářem vrácena účastníkům. Nejlepšími v celkovém hodnocení byli *Ignác Tereščák* (Michalovce), *Martin Klazar* (Louny), *Milan Kratka* (Prievidza), *František Vencl* (Česká Třebová), *Darina Neumannová* (Brno) a *Jiří Votinský* (Pardubice). Uvádíme znění všech úloh zadaných v korespondenčním semináři.

1. Geometrie

- 1.1 V prostoru je dána rovina ϱ a body A, B v opačných poloprostorech určených rovinou ϱ . Najděte v rovině ϱ všechny body X , pro které je $||XA| - |XB||$ maximální.
- 1.2 Bod X se pohybuje po přímce p konstantní rychlostí danou vektorem u , bod Y se pohybuje po přímce q konstantní rychlostí danou vektorem v . Přímky p a q jsou mimoběžné a v jednom okamžiku je bod X v bodě A , Y v bodě B . Najděte polohu bodů X, Y , při které je vzdálenost $|XY|$ minimální.
- 1.3 V rovině je dán trojúhelník ABC a bod P . Označme K, L, M paty kolmic vedených bodem P ke stranám trojúhelníku ABC . Udejte nutnou a postačující podmínku pro to, aby
- a) body K, L, M, P ležely na kružnici,
 - b) body K, L, M ležely na přímce.
- 1.4 V rovině je dán trojúhelník ABC . Kružnice k_A prochází bodem A a dotýká se strany BC v bodě B , kružnice k_B prochází bodem B a dotýká se strany CA v bodě C , kružnice k_C prochází bodem C a dotýká se strany AB v bodě A . Dokažte, že se kružnice k_A, k_B, k_C protínají v jednom bodě Q . Co platí o úhlech QAB, QBC, QCA ?
- 1.5 V prostoru jsou dány přímky p, q a rovina ϱ , dále kladné číslo d . Popište konstrukci úsečky délky d , která je rovnoběžná s rovinou ϱ , jeden její krajní bod leží na přímce p , druhý na přímce q .

2. Kombinatorika

- 2.1 Na rohovém poli šachovnice $n \times n$ ($n \geq 4$) stojí figura, kterou střídavě přemísťují dva hráči. První z nich táhne vždy dvakrát za sebou jako koněm (tj. dvě pole v jednom směru a jedno pole v kolmém směru), zatímco druhý táhne jednou jako koněm s prodlouženým skokem (tři pole v jednom směru a jedno pole ve směru kolmém). První hráč se snaží dostat do protějšího rohu, druhý se mu v tom snaží zabránit. Může první hráč zvítězit při jakékoli hře druhého hráče?
- 2.2 Je dán rovnostranný trojúhelník ABC . První hráč vybere bod X na straně AB , druhý hráč bod Y na straně BC a nakonec první hráč bod Z na straně AC .
- a) První hráč chce získat trojúhelník XYZ co možná největšího, druhý co možná nejmenšího obsahu. Jaký obsah si může první hráč zajistit?
 - b) První hráč se snaží získat trojúhelník XYZ nejmenšího možného obvodu, druhý co možná největšího. Jaký nejmenší obvod si může první hráč zajistit?
- 2.3 Dva hráči hrají následující hru: První si myslí dvě čísla od 1 do 25, druhý je musí uhádnout. Řekne vždy dvě čísla od 1 do 25 a první mu odpoví, kolik čísel (tj. 0, 1 nebo 2) uhodl. Za jaký nejmenší počet otázek může druhý hráč vždy určit myšlená čísla?
- 2.4 Na desce je několik hromádek kamenů. Dva hráči se střídají v tazích - při každém tahu se rozdělí každá hromádka mající alespoň dva kameny na dvě menší hromádky a to se děje tak dlouho, dokud na všech hromádkách není po jednom kamenu. Kdo učinil poslední tah, vyhrál.

- Který z hráčů si může zajistit výhru, jestliže na začátku bylo na každé hromádce méně než N kamenů? (Proveďte diskusi vzhledem k číslu N .)
- 2.5 Na čtverečkovaném papíře je vyznačen obdélník $m \times n$ čtverečků. Dva hráči po řadě vyškrtávají všechny čtverečky některé řady nebo sloupce, ve kterém byl ještě alespoň jeden nevyškrtnutý čtvereček. Vyhrává ten, kdo vyškrtne poslední čtverečky. Kdo si může zajistit výhru - začínající hráč, anebo jeho partner?
- 2.6 V řadě za sebou je N polí, na nejlevějším stojí bílá figurka, na nejpravějším černá. Dva hráči se střídají v tazích, při nichž vždy přemístí svou figurku o jedno pole doleva nebo doprava (je-li obsazované pole volné), vynechat tah není možno. Prohrává hráč, který nemůže táhnout. Kdo si může zajistit výhru - první, nebo druhý hráč?
- 2.7 Na tabuli je napsán mnohočlen $x^{10} + *x^9 + \dots + *x + 1$. Dva hráči postupně zaměňují hvězdičky u členů $x, x^2, \dots, x^9$ reálnými čísly (ne nutně v tomto pořadí). Jestliže výsledný mnohočlen nebude mít reálné kořeny, vyhrává první hráč; bude-li mít alespoň jeden reálný kořen, vyhrává druhý hráč. Který z hráčů si může zajistit vítězství?

3. Geometrická zobrazení

- 3.1 Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 a přímka q . Sestrojte přímku p rovnoběžnou s q tak, aby vytínala na k_1 a k_2 tětivy, jejichž délky dávají součet a .
- 3.2 Je dána přímka p a dva body A, B ve stejné polorovině určené přímkou p . Najděte na p takový bod X , že $|AX| + |XB| = a$.

- 3.3 Jsou dány čtyři soustředné kružnice k, l, m, n . Sestrojte přímkou p , která protíná kružnice po řadě v bodech A, B, C, D tak, že $|AB| = |CD|$.
- 3.4 Společným bodem A kružnic k, l vedeme libovolnou přímkou, která protíná kružnice v dalších bodech M_1 a M_2 . Potom sestrojíme tečny ke kružnicím k, l s body dotyku M_1 a M_2 a jejich průsečík označíme N ; dále vedeme středy kružnic S_1, S_2 přímkou S_1J, S_2J rovnoběžné s tečnami M_1N, M_2N . Dokažte, že přímka JN prochází jedním pevným bodem bez ohledu na volbu přímky M_1M_2 a úsečka JN má konstantní délku.
- 3.5 Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, který je tětiový (lze mu opsat kružnici) a jehož strany znáte.

4. Rovnice

- 4.1 Nechť f je reálná funkce s definičním oborem $(-\infty, \infty)$ taková, že pro jakákoli dvě reálná čísla x, y platí

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

$$f(xy) = yf(x) + xf(y).$$

Nechť ξ je reálný kořen některého mnohočlenu s celočíselnými koeficienty. Potom platí $f(\xi) = 0$. Dokažte.

- 4.2 Dokažte, že polynom

$$p(x) = x^n - a_1x^{n-1} - a_2x^{n-2} - \dots - a_{n-1}x - a_n,$$

kde $a_j \geq 0, j = 1, \dots, n$, a $\sum_{j=1}^n a_j > 0$, má právě jeden kladný kořen.

4.3 Dokažte, že polynom

$$x^4 + (-1 + i)x^3 + (3 + i)x^2 - 2(1 + i)x + 5 + i$$

nemá reálný kořen.

4.4 Pro které konstanty a, b, c, d platí identita

$$\begin{aligned} x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d &= \\ &= (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)? \end{aligned}$$

4.5 Rozložte výraz $(1 + x + x^2 + \dots + x^n)^2 - x^n$ na součin dvou polynomů (n je celé, $n > 1$).

4.6 Rovnice

$$x^3 - 5x^2 + x - 1 = 0$$

má kořeny x_1, x_2, x_3 . Vypočtěte hodnoty výrazů

$$(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)(1 - x_3^2) \text{ a } (1 - x_1^4)(1 - x_2^4)(1 - x_3^4).$$

4.7 Řešte rovnici

$$\frac{1}{ab + a + 1} + \frac{1}{bx + b + 1} + \frac{1}{ax + x + 1} = 1.$$

5. Teorie čísel

5.1 Dokažte, že na kružnici, jejíž střed má aspoň jednu souřadnici iracionální, leží nejvýše dva body s racionálními souřadnicemi, tj. obě souřadnice jsou racionální čísla.

5.2 Ukažte, že polynom

$$f(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + \frac{7x}{15}$$

v celých číslech x nabývá celočíselných hodnot.

5.3 Dokažte, že

$$a^n + b^n = c^n, \quad a > b, \quad n > b,$$

nemá řešení v celých kladných číslech.

5.4 Kvadratický polynom $f(x) = ax^2 + bx + c$ s celočíselnými koeficienty nemá celočíselné kořeny, pokud $f(3)$ a $f(6)$ jsou lichá čísla. Dokažte.

5.5 Dokažte, že pro největší společný dělitel a nejmenší společný násobek platí rovnost

$$\begin{aligned} (a, b, c) [ab, bc, ca] &= (ab, bc, ca) [a, b, c] = \\ &= (a, b, c) [a, b, c] [(a, b), (b, c), (c, a)] = abc. \end{aligned}$$

(a, b) je největší společný dělitel čísel a, b , $[a, b]$ je nejmenší společný násobek čísel a, b .

5.6 Necht' jsou posloupnosti $(a_1, a_2, \dots)$, $(b_1, b_2, \dots)$, $(c_1, c_2, \dots)$ dány rekurentními vztahy

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2^{a_n},$$

$$b_1 = 3, \quad b_{n+1} = b_n!,$$

$$c_1 = 3, \quad c_{n+1} = 3^{c_n}.$$

a) Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

b) Najděte co největší číslo f a co nejmenší číslo g tak, aby pro posloupnosti $(f_1, f_2, \dots), (g_1, g_2, \dots)$ definované

$$f_1 = f, \quad f_{n+1} = f^{f_n},$$

$$g_1 = g, \quad g_{n+1} = g^{g_n}$$

platilo

$$f_n \leq b_n \leq g_n \quad \text{pro } n \geq 2.$$

(Přibližte se k nejlepším hodnotám f a g aspoň tak, aby už nebylo možné f zvětšit a g zmenšit o 0,05.)

V tomto ročníku sa už po druhý raz vo všetkých kategóriách uplatňovala nová organizácia školského kola súťaže. V kategóriách A, B, C to znamenalo, že toto kolo bolo zakončené klauzúrnou súťažou na jednotlivých stredných školách a v kategórii Z sa riešenia školského kola odovzdávali v dvoch termínoch, ale ich počet sa zvýšil zo 4 na 6.

V kategórii A vo všetkých krajoch okrem Prahy a Západoslovenského kraja podstatne vzrástol počet riešiteľov školského kola. Celkove sa v porovnaní s predchádzajúcim ročníkom zvýšil o 34,6 % a počet úspešných riešiteľov tohto kola vzrástol dokonca o 38,6 %. Zo všetkých účastníkov školského kola tejto kategórie bolo úspešných 46,6 % (v 31. ročníku to bolo 45,2 % riešiteľov a pre porovnanie uveďme, že v 30. ročníku MO, keď ešte v školskom kole klauzúrna súťaž nebola, bola úspešnosť riešiteľov 82,9 %).

Nebývale vysoký je tiež počet úspešných riešiteľov krajského kola kategórie A: 288. To je viac než dvojnásobok počtu úspešných riešiteľov krajského kola v predchádzajúcich 3 rokoch. Prejavilo sa to aj na úspešnosti účastníkov krajského kola, ktorá dosiahla 40,2 % (v 31. ročníku 24,1 %, kým v 30. ročníku dokonca len 14 %).

Podobne v celoštátnom kole kategórie A sa prejavila dobrá

úroveň riešiteľov, keď viac než 50 % z nich dosiahlo aspoň polovicu možných bodov. Celkom dosiahli účastníci celoštátneho kola 51,3 % možných bodov a úspešnosť pri riešení jednotlivých úloh možno kvantitatívne vyjadriť takto: prvá 75,7 %, druhá 44,3 %, tretia 34,5 %, štvrtá 71,6 %, piata 35,4 % a šiesta 63,1 %. Najľahšími sa podľa očakávania ukázali prvá a štvrtá úloha a najťažšími tretia a piata. Prekvapuje pomerne veľmi nízka úspešnosť pri riešení druhej úlohy.

Podobne v kategóriách B a C, i keď v miere o niečo menšej, pokračovala tendencia zvyšovania počtu riešiteľov školského kola.

V kategórii B sa celkový počet riešiteľov v porovnaní s predchádzajúcim ročníkom zvýšil o 21,3 % a počet úspešných riešiteľov školského kola o 15,4 %, ale počet úspešných riešiteľov krajského kola tejto kategórie bol vo všetkých krajoch neúmerne nízky, na čom má zrejme podstatný podiel skutočnosť, že predsedníctvu ÚV MO sa nevydaril výber úloh krajského kola tejto kategórie. Úlohy síce tematicky nadväzovali na úlohy kola školského, ale svojou náročnosťou ich značne predstihovali. V klauzúrnej časti školského kola bola úspešnosť 50,2 % (v 31. ročníku 52,8 % a v I. kole 30. ročníka - ešte bez klauzúrnej časti - 83,8 %), v krajskom kole 10 % (v 31. ročníku 33,4 % a v 30. ročníku 13,6 %).

V kategórii C prekročil počet účastníkov školského kola číslo 3 000 a v porovnaní s minulým ročníkom ďalej vzrástol o 8,6 % (oproti 30. ročníku MO o 59,9 %), ale počet úspešných riešiteľov klauzúrnej časti školského kola poklesol, čo však v tomto prípade neprekvapuje, pretože v minulom ročníku sme konštatovali až príliš nízku náročnosť úloh tejto časti súťaže v kategórii C. Počet úspešných riešiteľov krajského

kola tejto kategórie sa zvýšil o 157 % proti vlnajšku (oproti 30. ročníku MO dokonca o 217,4 %), čo svedčí o tom, že výber úloh tejto kategórie sa predsedníctvu ÚV MO podstatne viac vydaril než v minulom ročníku i ako v kategórii B. Úspešnosť účastníkov klauzúrnej časti školského kola možno vyjadriť číslom 54,5 % (v 31. ročníku 72,3 % a v školskom kole 30. ročníku MO 78,7 %) a v krajskom kole tejto kategórie bolo úspešných 25,4 % účastníkov (v 31. ročníku MO 7,9 % a v 30. ročníku 8,2 %).

Zvláštnu pozornosť si zasluhuje skutočnosť, že počet účastníkov školského kola kategórie Z dosiahol takmer 25 tisíc a vzrástol oproti 31. ročníku o 28,7 % a oproti 30. ročníku dokonca o 33,2 %. Počet úspešných riešiteľov tohto kola sa oproti vlnajšku zvýšil o 46,6 % a počet úspešných riešiteľov okresného kola o 62,8 %. V školskom kole bolo úspešných 55,2 % účastníkov (v 31. ročníku 48,5 % a v 30. ročníku 59 %) a v okresnom kole 54,2 % (v 31. ročníku 44,7 %, v 30. ročníku 43,9 %). Tieto výsledky potvrdzujú správnosť výberu úloh pre túto kategóriu, a to ako z hľadiska tématiky, tak aj z hľadiska nadväznosti jednotlivých kôl.

I keď nechceme predbiehať, zdá sa, že nová organizácia školského kola MO prináša vcelku pozitívne trendy, ktoré však bude treba podporiť starostlivejším výberom úloh klauzúrnych súťaží, a to predovšetkým v kategóriách B a C.

Vyššie uvedený rozbor ukazuje, že 32. ročník MO i s prihliadnutím na výsledky dosiahnuté našou reprezentáciou na 24. MMO možno považovať za jeden z najúspešnejších v celej histórii našej súťaže.

24. MMO

Čtyřiaadvacátou mezinárodní matematickou olympiádu uspořádala Francie; konala se ve dnech 1. až 12. července 1983 v Paříži za účasti delegací z 32 zemí: Alžírsko, Austrálie, Belgie, Brazílie, Bulharsko, Československo, Finsko, Francie, Holandsko, Itálie, Izraele, Jugoslávie, Kanady, Kolumbie, Kuby, Kuvajtu, Lucembursko, Maďarsko, Maroko, NDR, NSR, Polsko, Rakousko, Rumunsko, Řecko, SSSR, Španělsko, Švédsko, Tunisko, USA, Velké Británie a Vietnamu. Byl to opět rekordní počet zúčastněných zemí; poprvé se na MMO objevilo Španělsko a Maroko, naopak nepřijely delegace z Mexika, Mongolska a Venezuely, které se v minulých letech již MMO účastnily a také tentokrát byly pozvány. Protože počet žáků v družstvu byl z dřívějších osmi snížen na šest, soutěžilo na 24. MMO 186 žáků (družstva Lucemburska a Španělska byla neúplná).

Vedoucí jednotlivých delegací, kteří tvoří mezinárodní porotu MMO, přijeli do Paříže již 1. července a ve dnech 2. až 5. července vybírali úlohy a připravovali soutěžní texty. Tato etapa práce poroty obvykle probíhá v přísné izolaci od soutěžících žáků, mnohdy v dosti vzdáleném místě. Francouzští organizátoři však pro práci poroty vybrali Mezinárodní pedagogické centrum v Sèvres, což je prakticky předměstí Pa-

říže, snadno dosažitelné městskou hromadnou dopravou. Nebylo to však na závalu regulérnímu chodu soutěže, nedošlo k žádnému úniku informací.

Z připravených 25 návrhů vybrala porota po diskusi těchto šest úloh pro soutěž:

1. Určete všechny funkce f , které zobrazují množinu $\mathbb{R}^+$ všech kladných reálných čísel do $\mathbb{R}^+$ a které vyhovují podmínkám:

(1) $f(x \cdot f(y)) = y \cdot f(x)$ pro všechna kladná reálná čísla x, y ;

(2) $f(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow +\infty$.

2. V rovině jsou dány dvě protínající se kružnice k_1 a k_2 se středy O_1 , resp. O_2 , o různých poloměrech; označme A jeden z jejich průsečíků. Jedna z obou společných tečen kružnic k_1, k_2 se dotýká kružnice k_1 v bodě P_1 a kružnice k_2 v bodě P_2 , druhá se dotýká kružnice k_1 v bodě Q_1 a kružnice k_2 v bodě Q_2 . Označme M_1 střed úsečky P_1Q_1 a M_2 střed úsečky P_2Q_2 . Dokažte, že platí

$$|\sphericalangle O_1AO_2| = |\sphericalangle M_1AM_2|.$$

3. Necht a, b, c jsou celá kladná čísla, po dvou nesoudělná. Dokažte, že

$$2abc - ab - bc - ca$$

je největší celé číslo, které se nedá vyjádřit ve tvaru

$$xbc + yca + zab,$$

kde x, y, z jsou celá nezáporná čísla.

4. Necht E je množina všech bodů ležících na obvodu rovnostranného trojúhelníku ABC . Rozhodněte, zda pro kaž-

dý rozklad množiny E na dvě podmnožiny existuje pravoúhlý trojúhelník, jehož všechny tři vrcholy leží v jedné z obou podmnožin.

5. Rozhodněte, zda lze najít 1983 vesměs různých přirozených čísel, ne větších než 10^5 , tak, aby žádná tři z nich nebyla třemi po sobě jdoucími členy aritmetické posloupnosti.

6. Jsou-li a, b, c délky stran libovolného trojúhelníku, potom platí

$$a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geq 0;$$

dokažte. Kdy platí rovnost?

Návrhy těchto šesti úloh zaslaly: Velká Británie, SSSR, NSR, Belgie, Polsko a USA.

Při jednáních o výběru úloh byla probírána také otázka jejich obtížnosti - porota se snažila, aby vybraná šestice nebyla příliš lehká. Proto také byly do ní zařazeny úlohy 5 a 6, které byly považovány za velmi obtížné. Naproti tomu úlohy 1 a 4 byly označeny za lehké. Přesto rozhodla porota o tom, že - podobně jako v posledních dvou letech - všechny úlohy mají být hodnoceny stejně, a to každá sedmi body.

Tato fáze práce poroty skončila překladem úloh do jazyků soutěžících, rozmnožením textů a jejich kontrolou - vše bylo hotovo v pondělí 4. července, takže následující den mohl být věnován exkurzi spojené s prohlídkou tří zámků na Loire: Chambord, Chenonceaux a Amboise.

V pondělí 4. července se do Paříže sjeli soutěžící žáci v doprovodu zástupců vedoucích. Byli ubytováni v internátě lycea Ludvíka Velikého v pařížské Latinské čtvrti. Lyceum bylo pak sídlem i celého dalšího průběhu 24. MMO.

Vlastní soutěž proběhla ve dnech 6. a 7. července. Slavnostní

zahájení se konalo ve středu 6. července dopoledne ve velkém amfiteátru pařížské Sorbonny za přítomnosti zástupců francouzského ministerstva školství i univerzity; hned potom následoval první soutěžní půlden (úlohy 1, 2 a 3). Soutěž pokračovala ve čtvrtek 7. července dopoledne, kdy již do lycea Ludvíka Velikého přesídlila také porota ze Sèvres. Během pátku a soboty byla žakovská řešení úloh opravena a zkoordinována, takže v sobotu večer mohla porota schválit definitivní výsledky.

Po delší a dosti vzrušené debatě se většina poroty přiklonila k názoru, že má být dodržena tradice MMO a že se tedy má udělit tolik cen, aby je získala přibližně polovina všech soutěžících. Vzhledem k tomu, že úlohy byly vcelku dost obtížné a bodové zisky žáků relativně nízké, znamenalo toto rozhodnutí velmi mírnou klasifikaci. K získání třetí ceny stačilo pouhých 15 bodů ze 42 možných. Některé delegace se k tomu rozhodnutí vyjadřovaly značně kriticky, neboť se tím podle jejich názoru snížila hodnota získaných cen, a proto požadovaly, aby alespoň prvních cen nebylo příliš mnoho, aby se nepřihlíželo k tradičnímu dělení cen v poměru 1 : 2 : 3. Nakonec bylo rozhodnuto udělit 9 prvních cen žákům, kteří dosáhli alespoň 38 bodů, 27 druhých cen žákům s 26 až 34 body a 57 třetích cen žákům s 15 až 25 body. Vedle toho byly uděleny tři zvláštní ceny za originální a elegantní řešení jednotlivých úloh; získali je žáci z Velké Británie (za 3. úlohu), z NDR (za 6. úlohu) a z NSR (za 6. úlohu).

V neděli 10. července byl pro všechny účastníky MMO uspořádán výlet do Versailles spojený s prohlídkou zámku a parku. V pondělí 11. července pak byla MMO zakončena. Odpoledne proběhlo slavnostní rozdělení cen - opět ve velkém

amfiteátru na Sorbonně - potom byli účastníci přijati na pařížské radnici a vše zakončila závěrečná společná večeře, která měla tentokrát zcela neformální ráz. V úterý 12. července již zahraniční delegace opouštěly Paříž.

Jako obvykle byl odborný program MMO doplněn o společenskou a kulturní část. Bohatství pařížských kulturních památek poskytovalo dostatek příležitostí k prohlídkám, jež delegace absolvovaly většinou jednotlivě. Společně byly pro žáky organizovány projížďka lodí po Seině, prohlídka muzea v Louvru a koncert klasické hudby v kostele sv. Severina. Pro vedoucí delegaci a jejich zástupce připravili pořadatelé návštěvu baletního představení v pařížské Opeře.

Československo vyslalo na 24. MMO delegaci v složení vedoucí delegace — *dr. František Zítek, CSc.*

Matematický ústav ČSAV, Praha
zástupkyně vedoucího — *dr. Júlia Lukášová*
Ministerstvo školství SSR,
Bratislava

žáci

Vladimír Dančík — Košice, 4. r., G Šmeralova ul.
Xaver Gubáš — Bratislava, 4. r., G A. Markuša
Igor Kříž — Praha, 4. r., G W. Piecka
Marián Neamțu — Bratislava, 4. r., G A. Markuša
 Jiří Sgall — Praha, 4. r., G W. Piecka
Jiří Witzany — Praha, 3. r., G W. Piecka

Kromě toho byl na MMO přítomen též *dr. Václav Šůla* z ministerstva školství ČSR jako pozorovatel.

V soutěži si naši žáci vedli se střídavými úspěchy; detailní výsledek obsahuje připojená tabulka:

Jméno	Body za úlohu číslo						Celkem	Cena
	1	2	3	4	5	6		
Sgall	7	6	7	7	7	4	38	I.
Kříž	7	7	7	7	7	1	36	II.
Dančík	7	7	4	7	0	0	25	III.
Witzany	3	0	7	7	0	0	17	III.
Gubáš	3	2	4	0	7	0	16	III.
Neamtu	1	2	0	7	0	0	10	—
Součet	28	24	29	35	21	5	142	—

Jak je vidět, největší potíže dělala našim žákům poslední, šestá úloha, s níž si žádný z nich nedokázal poradit. Tato úloha byla všeobecně považována za nejtěžší. Určité potíže měli také s úlohou pátou. Nezdá se však, že by našim žákům chyběly konkrétní vědomosti v určitém směru, ale spíše vyrovnanost a spolehlivost výkonu.

Ve srovnání s ostatními zúčastněnými družstvy dopadlo československé poměrně dobře: v neoficiálním pořadí podle součtu bodů zaujalo osmé místo. Celkový přehled o udělených cenách podává následující tabulka:

Země	Počet cen				Součet bodů
	I.	II.	III.	Zvl.	
Alžírsko	0	0	0	0	6
Austrálie	0	1	2	0	81
Belgie	0	0	0	0	25
Brazílie	0	0	3	0	77
Bulharsko	0	1	4	0	137
Československo	1	1	3	0	142
Finsko	0	0	3	0	103
Francie	0	2	3	0	123
Holandsko	1	3	0	0	143
Itálie	0	0	0	0	2
Izrael	0	0	5	0	96
Jugoslávie	0	0	5	0	89
Kanada	0	0	4	0	102
Kolumbie	0	0	0	0	21
Kuba	0	0	1	0	36
Kuvajt	0	0	0	0	4
Lucembursko	0	0	0	0	13*
Maďarsko	0	4	2	0	170
Maroko	0	0	0	0	32
NDR	0	0	5	1	117
NSR	4	1	0	1	212
Polsko	0	0	3	0	101
Rakousko	0	0	0	0	38
Rumunsko	1	2	3	0	161
Řecko	0	0	3	0	96
SSSR	1	3	2	0	169
Španělsko	0	0	0	0	37**
Švédsko	0	0	0	0	47
Tunisko	0	0	0	0	26
USA	1	3	2	0	171
Velká Británie	0	3	1	1	121
Vietnam	0	3	3	0	148

* Z Lucemburska přijeli jen dva žáci

** Ze Španělska přijeli jen čtyři žáci

Řešení úloh 24. MMO

1. Snadno se přesvědčíme, že funkce f definovaná v $\mathbb{R}^+$ vztahem

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (3)$$

vyhovuje podmínkám (1) i (2); ukážeme, že jiné řešení úloha nemá.

Označme S množinu těch $x \in \mathbb{R}^+$, pro něž je

$$f(x) = x. \quad (4)$$

Dosadíme-li $y = x$ do (1), vidíme, že pro každé $x \in \mathbb{R}^+$ je

$$f(x \cdot f(x)) = x \cdot f(x), \quad (5)$$

tj. $x \cdot f(x) \in S$; množina S je tedy neprázdná. Podle (1) pak pro libovolné $x \in S$ platí

$$x = f(x) = f(f(x)) = f(1 \cdot f(x)) = x \cdot f(1),$$

takže nutně

$$f(1) = 1, \quad (6)$$

tj. $1 \in S$. Dále platí toto tvrzení:

Jestliže $x \in S$, potom také $x^c \in S$ pro každé celé číslo c .

Tvrzení dokážeme nejprve pro $c \geq 0$, a to indukcí. Pro $c = 0$ je $x^0 = 1 \in S$ podle (6), pro $c = 1$ se platnost $x^1 \in S$ předpokládá. Nechť $x^n \in S$ pro některé $n \geq 1$, potom podle (1)

$$f(x^{n+1}) = f(x \cdot x^n) = f(x \cdot f(x^n)) = x^n \cdot f(x) = x^{n+1}.$$

Tvrzení tedy platí pro všechna $c \geq 0$. Z $x^c \in S$ však také plyne

$$1 = f(1) = f(x^{-c} \cdot x^c) = f(x^{-c} \cdot f(x^c)) = x^c \cdot f(x^{-c}),$$

tj.

$$f(x^{-c}) = x^{-c},$$

takže také $x^{-c} \in S$.

Jestliže $x > 1$, pak $x^c \rightarrow \infty$ pro $c \rightarrow \infty$, jestliže $x < 1$, pak $x^{-c} \rightarrow \infty$ pro $c \rightarrow \infty$; v obou případech tedy v S existuje neomezeně rostoucí (geometrická) posloupnost čísel splňujících (4). To je však ve sporu s podmínkou (2), proto jediným prvkem množiny S je číslo 1. To však znamená, že pro každé $x \in \mathbb{R}^+$ platí $x \cdot f(x) = 1$, neboli (3), což jsme měli dokázat.

2. Poněvadž kružnice k_1 a k_2 mají různé poloměry, protínají se jejich společné tečny v jednom bodě; označme jej V . Kružnice k_2 je pak obrazem kružnice k_1 ve stejnolehlosti se středem V a koeficientem daným poměrem obou poloměrů. Označme A' bod kružnice k_2 , který je obrazem bodu $A \in k_1$ v této stejnolehlosti. Dokážeme, že body A, A', O_2, M_2 leží

na jedné kružnici, a to tak, že budeme počítat mocnost bodu V k této kružnici.

Jelikož $A \in k_2$, $A' \in k_2$, je mocnost bodu V ke kružnici k_2 rovna součinu $|VA| \cdot |VA'|$; zároveň je však také rovna $|VP_2|^2$. Podle Eukleidovy věty však v pravoúhlém trojúhelníku VO_2P_2 platí $|VP_2|^2 = |VO_2| \cdot |VM_2|$, máme tak celkem

$$|VA| \cdot |VA'| = |VO_2| \cdot |VM_2|,$$

tzn. že skutečně body A , A' , O_2 , M_2 leží na jedné kružnici. Podle věty o obvodových úhlech tedy platí

$$|\sphericalangle O_2AM_2| = |\sphericalangle O_2A'M_2|.$$

Avšak trojúhelník $O_2A'M_2$ je obrazem trojúhelníku O_1AM_1 ve zmíněné stejnolehlosti, takže $|\sphericalangle O_2A'M_2| = |\sphericalangle O_1AM_1|$. Platí tedy $|\sphericalangle O_2AM_2| = |\sphericalangle O_1AM_1|$ a vzhledem k uspořádání bodů O_1 , O_2 , M_1 , M_2 na přímce O_1O_2 také

$$|\sphericalangle O_1AO_2| = |\sphericalangle M_1AM_2|,$$

což jsme měli dokázat.

3. Každé celé číslo N se dá vyjádřit ve tvaru

$$N = xbc + yac + zab, \quad (1)$$

kde x , y , z jsou celá čísla, a to dokonce různými způsoby. Vyjádříme-li dále čísla x , y , z ve tvaru

$$x = \xi a + \xi_0, y = \eta b + \eta_0, z = \zeta c + \zeta_0, \quad (2)$$

kde

$$0 \leq \xi_0 < a, 0 \leq \eta_0 < b, 0 \leq \zeta_0 < c, \quad (3)$$

dostaneme dosazením do (1) pro číslo N vyjádření

$$N = \xi_0 bc + \eta_0 ac + \zeta_0 ab + (\xi + \eta + \zeta) abc. \quad (4)$$

Za podmínek (3) jsou koeficienty ξ_0, η_0, ζ_0 a $(\xi + \eta + \zeta)$ ve vyjádření (4) jednoznačně určeny číslem N . Kdyby totiž pro totéž číslo N existovalo jiné vyjádření

$$N = \xi_0' bc + \eta_0' ac + \zeta_0' ab + \delta abc \quad (4')$$

s čísly $\xi_0', \eta_0', \zeta_0'$ rovněž splňujícími podmínky (3), dostali bychom odečtením (4') od (4) rovnost

$$0 = (\xi_0 - \xi_0') bc + (\eta_0 - \eta_0') ac + (\zeta_0 - \zeta_0') ab + (\xi + \eta + \zeta - \delta) abc.$$

Z ní vyplývá, že rozdíl $\xi_0 - \xi_0'$ musí být dělitelný číslem a , to však je při platnosti (3) možné jen když $\xi_0 = \xi_0'$. Obdobně odvodíme rovnosti $\eta_0 = \eta_0'$ a $\zeta_0 = \zeta_0'$, a potom ovšem také $\delta = \xi + \eta + \zeta$.

Různá vyjádření čísla N ve tvaru (1) se mohou mezi sebou tedy lišit pouze tak, aby čísla ξ_0, η_0, ζ_0 ve vyjádření (2) a součet $\xi + \eta + \zeta$ zůstaly zachovány. Přitom je zřejmé, že bude $x \geq 0$, resp. $y \geq 0$, resp. $z \geq 0$, právě když $\xi \geq 0$, resp. $\eta \geq 0$, resp. $\zeta \geq 0$.

Vezměme nyní celé číslo

$$N_0 = 2abc - bc - ac - ab.$$

Vyjádříme-li je ve tvaru (4), dostaneme

$$N_0 = (a - 1)bc + (b - 1)ac + (c - 1)ab - abc. \quad (5)$$

Při každém jeho vyjádření ve tvaru (1) je tedy $\xi + \eta + \zeta = -1$, což znamená, že čísla ξ, η, ζ - a tedy ani čísla x, y, z , v (1) - nemohou být všechna nezáporná.

Vezměme nyní libovolné celé číslo $N > N_0$. Rozdíl $N_0 - N$ je tedy záporný; odečteme-li (4) od (5), dostaneme

$$0 > N_0 - N = (a - 1 - \xi_0)bc + (b - 1 - \eta_0)ac + (c - 1 - \zeta_0)ab - (1 + \xi + \eta + \zeta)abc.$$

Poněvadž v důsledku (3) jsou čísla $a - 1 - \xi_0, b - 1 - \eta_0, c - 1 - \zeta_0$ vesměs nezáporná, musí být číslo $1 + \xi + \eta + \zeta$ kladné. Je tedy $\xi + \eta + \zeta > -1$, tj.

$$\xi + \eta + \zeta \geq 0.$$

Ve vyjádření čísla N ve tvaru (1) lze tedy volit x, y, z všechna nezáporná.

4. Dokážeme, že při libovolném rozkladu množiny E na dvě podmnožiny F, G

$$F \cup G = E, F \cap G = \emptyset,$$

existují v alespoň jedné z obou podmnožin tři body, které jsou vrcholy pravoúhlého trojúhelníku.

Na stranách AB , resp. AC , resp. CA daného rovnostranného trojúhelníku ABC najdeme body A_1, A_2 , resp. B_1, B_2 , resp. C_1, C_2 tak, aby

$$\begin{aligned} |AA_1| &= |A_1A_2| = |A_2B| = \\ &= |BB_1| = |B_1B_2| = |B_2C| = \\ &= |CC_1| = |C_1C_2| = |C_2A| = \frac{1}{3} |AB|. \end{aligned}$$

Ze tří bodů A_1, B_1, C_1 patří alespoň dva do jedné (stejně) z obou podmnožin F, G . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je $A_1 \in F, B_1 \in F$.

Jestliže některý z bodů B_2, C_2, C náleží rovněž do F , pak F obsahuje tři vrcholy pravoúhlého trojúhelníku $A_1B_1B_2$, resp. $A_1B_1C_2$, resp. A_1B_1C . Jestliže však všechny tři tyto body B_2, C_2, C náleží do G , pak G obsahuje tři vrcholy pravoúhlého trojúhelníku B_2C_2C . Tím je tvrzení dokázáno.

5. Označme M množinu všech přirozených čísel, která lze vyjádřit ve tvaru součtu

$$a_0 + 3a_1 + 3^2a_2 + \dots + 3^{10}a_{10},$$

kde $a_j (j = 0, 1, \dots, 10)$ jsou celá čísla, $0 \leq a_j \leq 1$. Množina M má $2^{11} - 1 = 2047$ prvků, největším z nich je číslo

$$1 + 3 + 9 + \dots + 3^{10} = 88\,573 < 10^5.$$

Vezměme tři prvky množiny M :

$$A = \sum_{j=0}^{10} a_j 3^j, B = \sum_{j=0}^{10} b_j 3^j, C = \sum_{j=0}^{10} c_j 3^j;$$

kdyby to byly tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, platilo by

$$A + C = 2B,$$

a tedy také

$$a_j + c_j = 2b_j$$

pro $j = 0, 1, 2, \dots, 10$. To je však možné pouze, když

$$a_j = c_j = b_j \quad (j = 0, 1, \dots, 10),$$

tj. když $A = B = C$.

Lze tedy najít nejen 1 983, ale i 2 047 (ba ještě více) přirozených čísel menších než 10^5 , z nichž žádná tři nejsou třemi po sobě jdoucími členy aritmetické posloupnosti.

6. Položme

$$x = \frac{b + c - a}{2}, y = \frac{a + c - b}{2}, z = \frac{a + b - c}{2};$$

z trojúhelníkové nerovnosti vyplývá, že čísla x, y, z jsou kladná, přitom platí

$$x + y = c, y + z = a, x + z = b. \quad (1)$$

Dosadíme-li do dané nerovnosti

$$a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geq 0 \quad (2)$$

podle (1), přejde (2) po úpravách v nerovnost

$$yz^3 + xy^3 + x^3z \geq xyz(x + y + z). \quad (3)$$

Vezměme nyní vektory

$$u = (\sqrt{z}, \sqrt{x}, \sqrt{y^3y})$$

a

$$v = (y\sqrt{xy}, z\sqrt{yz}, x\sqrt{xz^3y}).$$

Jejich skalární součin

$$u \cdot v = \sqrt{xyz}(y + z + x)$$

je nanejvýš roven součinu jejich délek $|u| \cdot |v|$. Avšak

$$|u|^2 = z + x + y$$

a

$$|v|^2 = xy^3 + yz^3 + x^3z.$$

Platí tedy

$$\sqrt{xyz}(x + y + z) \leq \sqrt{x + y + z} \cdot \sqrt{xy^3 + yz^3 + x^3z},$$

resp.

$$xyz(x + y + z) \leq x^3z + xy^3 + yz^3,$$

ale to je právě nerovnost (3), kterou jsme měli dokázat.

Rovnost platí právě pro rovnostranný trojúhelník.

Prof. dr. Jozef Moravčík, CSc.,
dr. Leo Boček, CSc.,
dr. Karel Horák, CSc.,
dr. František Zítek, CSc.

TŘICÁTÝ DRUHÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Obálku navrhl Jaromír Jarkovský
Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p.
v Praze roku 1985
jako svou publikaci č. 5-42-14/32
Edice Pomocné knihy pro žáky
Odpovědná redaktorka: dr. Ilona Mahlerová
Výtvarný redaktor: Václav Hanuš
Technická redaktorka: Eliška Pomajzlová
Z nové sazby písmem Plantin
vytiskly Moravské tiskařské závody, n. p., Olomouc
Formát papíru 70 cm × 100 cm
Počet stran 152
AA 4,17 - VA 4,52 - Náklad 3550 výtisků
Tematická skupina a podskupina 03/2
1. vydání
Cena brožovaného výtisku Kčs 6,00
505/21, 825

14-516-85 Kčs 6,00

**matematická
olympiáda**



SPN 5-42-14/32

14-516-85

03/2

Kčs 6,00