

36. ročník matematické olympiády na základních školách

Milan Koman (editor); Vladimír Repáš (editor): 36. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1986/87. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404845>

Terms of use:

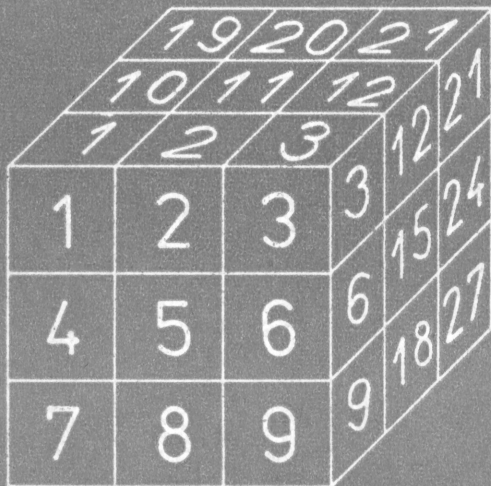
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MO

36. ročník matematické olympiády na základních školách



SPN

Signál č. 85 ze 7. 11. 89

TŘICÁTÝ ŠESTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA ZÁKLADNÍCH ŠKOLÁCH

Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1986/87

ÚLOHY A JEJICH ŘEŠENÍ

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ PRAHA

Zpracovali

RNDr. Milan Koman, CSc., RNDr. Vladimír Repáš

Lektorovali

RNDr. Miluše Hozová, PhDr. Jitka Kučerová, RNDr. Václav Šůla

© Milan Koman, Vladimír Repáš, 1989

ISBN 80-04-23726-6

Obsah

Předmluva	5
Zpráva o průběhu matematické olympiády na základních školách ve školním roce 1986/87	9
Seznamy úspěšných řešitelů III. kol kategorie Z8	24
Seznam úspěšných řešitelů, kteří soutěžili ve vyšší kategorii Z	31
Kategorie Z8	32
Úlohy I. kola	32
Úlohy II. kola	47
Úlohy III. kola	55
Kategorie Z7	66
Úlohy I. kola	66
Úlohy II. kola	79
Kategorie Z6	86
Úlohy I. kola	86
Úlohy II. kola	99
Kategorie Z5	105
Úlohy I. kola	105
Úlohy II. kola	120
Kategorie Z4	128
Úlohy I. kola	128
Úlohy II. kola	135
Příloha: Úlohy ze soutěží Dejte hlavy dohromady	140

Ve školním roce 1986/87 se konal již 36. ročník matematické olympiády (MO). Při svém založení v roce 1951 byla však MO vyhlášena pouze pro žáky středních škol. Pro žáky základních škol byla poprvé soutěž organizována až v roce 1953, tj. od 3. ročníku MO. Tehdy se zúčastnili soutěže žáci posledních ročníků základní školy. Pro ně je tedy letošní soutěž 34. ročníkem. Pro žáky z ostatních ročníků základních škol je tato soutěž ještě daleko mladší. Přitom vývoj MO v ČSR a SSR měl některé odlišnosti. Rychlejší vývoj byl v SSR.

V roce 1980 vznikla v SSR tzv. Malá matematická olympiáda (MaMO), kterou řídila v letech 1980—1984 pod vedením prof. RNDr. Jozefa Moravčíka, DrSc., komise MO při ÚV Jednoty slovenských matematiků a fyziků (JSMF). Soutěž byla experimentálně organizována pro žáky 5., 6. a 7. ročníků ZŠ. Na základě získaných zkušeností rozšířila tato komise v roce 1983 soutěž i do 4. ročníků ZŠ, tentokrát už pod názvem matematická olympiáda základních škol (MOZ).

V ČSR probíhá rozšiřování MO do dalších ročníků základní školy pomaleji. V roce 1984 se ministerstva školství ČSR a SSR dohodla o celostátním rozšíření MO do 7. ročníků. V tomto školním roce byla poprvé experimentálně

rozšířena MO v celé ČSSR i do 6. ročníků ZŠ. Tak vznikly postupně dvě nové kategorie MO, a to kategorie Z7 pro žáky 7. ročníků a kategorie Z6 pro žáky 6. ročníků. Dosavadní kategorie Z určená pro žáky 8. ročníků změnila své označení na Z8.

V SSR organizuje JSMF i nadále soutěže v kategoriích Z5 a Z4 pro žáky 5. a 4. ročníků. Zbývá doufat, že i v ČSR dojde k brzkému rozšíření MO o tyto dvě kategorie.

Príslibem je, že na některých školách v ČSR se řeší v 5. a 4. ročnících úlohy MO ze SSR. Letáky s úlohami ochotně poskytuje subkomise pro ZŠ ustanovená při slovenské komisi MO JSMF (adresa subkomise: JSMF, Gorkého ul. 5, Bratislava, PSČ 811 01). Kromě toho pořádají některé ZŠ nebo okresy ČSR vlastní soutěže pro nižší ročníky. Propagaci matematických soutěží v nižších ročnících, a to v celé ČSSR, napomáhají i korespondenční semináře, které organizují krajské a okresní výbory MO, pobočky JČSMF a JSMF i mnozí učitelé ze základních, středních i vysokých škol. Rozvoj MO na ZŠ v ČSR a SSR od roku 1980 ukazují velmi názorně tabulky na str. 7.

Rozšíření MO do dalších ročníků ZŠ kladně ovlivňuje i počet soutěžících na středních školách a úroveň jejich znalostí. Stačí malé srovnání. Od roku 1984 se setkáváme v nejvyšší kategorii A s účastníky, kteří v SSR začínali soutěžit v MO na základní škole již v nižších kategoriích Z7, Z6 případně i Z5. To se projevuje v tom, že narůstá ve III. celostátním kole kategorie A podíl účastníků z SSR.

Účast v matematické olympiádě je dobrovolná a nesouvisí s klasifikací žáků v matematice. Dlouholeté zkušenosti ukazují, že tato soutěž s úspěchem plní své poslání zlepšovat

ČSR

	80/81	81/82	82/83	83/84	84/85	85/86	86/87
Z7							
Z6							
Z5							
Z4							

SSR

	80/81	81/82	82/83	83/84	84/85	85/86	86/87
Z7							
Z6							
Z5							
Z4							

zájem žáků o matematiku, rozšiřovat a prohlubovat jejich dovednosti i znalosti a vyhledávat mezi soutěžícími talentované žáky. Soutěž vede žáky i k dalšímu studiu matematiky, které jim usnadňuje řešení soutěžních úloh. Pro mnohé žáky se

proto může stát tato ročenka MO první knížkou, ze které budou buď samostatně, nebo v zájmových kroužcích matematiky či v kroužcích MO pod vedením svých učitelů pronikat poprvé do tajů matematiky mimo školní učebnice.

Ročenky MO mají pro žáky jednu výhodu. Učí je řešit úlohy. To je zejména pro žáky ZŠ lákavější než studium matematické »teorie«. V ročence najdou všichni zájemci všechny úlohy 36. ročníku MO a jejich řešení. A nejen to. U mnohých úloh jsou uvedena různá řešení a občas i další poznámky, ukazující na hlubší souvislosti, možnosti zobecnění úlohy ap. Další výhodou je, že ročenku není nutno číst a studovat najednou. Žáci či jejich učitelé si mohou vybrat úlohy, které jsou obdobné k úlohám, které jsou zařazeny do soutěže, která právě probíhá. Proto se může tato ročenka stát velmi aktuální pro soutěžící i v dalších ročnících MO.

Vítěze III. kol MO v kategorii Z8 jistě potěší, jestliže se najdou v seznamech úspěšných řešitelů, které jsou také zařazeny do této ročenky.

Milí čtenáři,

přejeme vám proto při studiu této ročenky, v pořadí již druhé, která je věnována výlučně kategoriím Z, mnoho radosti i úspěchů. Všem soutěžícím v MO ať už v kategoriích Z, nebo v dalších letech ve vyšších kategoriích přejeme úspěšné řešení soutěžních úloh.

V listopadu 1987

Autoři

Zpráva o průběhu matematické olympiády na základních školách ve školním roce 1986/87

Matematická olympiáda je celostátní soutěž, kterou každoročně vyhlašují a pořádají obě ministerstva školství ČSR a SSR ve spolupráci s Jednotou československých matematiků a fyziků (JČSMF), Jednotou slovenských matematiků a fyziků (JSMF), Matematickým ústavem ČSAV a Socialistickým svazem mládeže. Soutěž z pověření MŠ ČSR a MŠ SSR řídí ústřední výbor matematické olympiády (ÚV MO), který je jmenován vždy na tříleté období. V letech 1986—1989 zastával funkci předsedy ÚV MO RNDr. František Zítek, CSc., z MÚ ČSAV, místopředsedy ÚV MO jsou prof. RNDr. Miroslav Fiedler, člen korespondent z MÚ ČSAV, doc. RNDr. Branislav Rován, CSc., z MFF UKo Bratislava a RNDr. Milan Koman, CSc., z MÚ ČSAV. Garanty pro kategorii Z jsou společně RNDr. Milan Koman, CSc., a RNDr. Vladimír Repáš z EF SVŠT Bratislava.

V roce 1986/87 se konala matematická olympiáda na středních školách v kategoriích A, B, C, P*) a na základních školách v kategoriích Z8, Z7, Z6, určených po řadě žákům 8., 7. a 6. ročníků. Se souhlasem okresních výborů MO (OV MO)

*) Další podrobnosti najde čtenář v samostatné ročence 36. ročníku MO na středních školách.

mohli žáci soutěžit ve vyšší kategorii, než která je jim určena. Soutěžit mohli i žáci, pro které nebyla soutěž vypsaná, např. žáci 5. ročníku se mohli přihlásit k účasti v kategorii Z6. Účast v soutěžích byla dobrovolná a nesouvisela s klasifikací z matematiky.

V SSR probíhala ještě národní soutěž pro žáky 5. a 4. ročníků ZŠ, kterou jako v předešlých letech vyhlašovala a pořádala Jednota slovenských matematiků a fyziků. Soutěž řídila subkomise pro ZŠ při komisi MO ustanovená při ÚV JSMF. Předsedou této subkomise byl RNDr. Vladimír Repáš. Žáci soutěžili v kategoriích Z5 a Z4 podle ročníku, který navštěvovali.

Žáci základních škol v celé ČSSR mohli se souhlasem krajského výboru MO (KV MO) soutěžit i v některé z kategorií A, B, C, P určených žákům středních škol.

V kategoriích Z4 až Z7 se soutěžilo ve 2 kolech, v kategorii Z8 ve 3 kolech. V I. kole řešili žáci všech kategorií doma nebo v kroužcích MO zadaných 6 soutěžních úloh. Mohli se přitom radit se svými učiteli a vedoucími kroužků. Úlohy byly hodnoceny třemi klasifikačními stupni: 1 - výborně, 2 - dobře, 3 - nevyhovuje. Ze soutěžících, kteří řešili úspěšně aspoň 4 úlohy, vybraly OV MO nejlepší řešitele, kteří postoupili do II. kola.

Druhá kola pro kategorie Z5 až Z8 se konala v okresních městech, a to pro kategorii Z8 dne 4. února 1987 a pro kategorie Z5 až Z7 dne 22. dubna 1987. Pro kategorii Z4 se konalo II. kolo na škole. Ve všech kategoriích měla soutěž formu písemné práce. V kategoriích Z5 až Z8 řešili žáci 4 úlohy, v kategorii Z4 jen 3 úlohy. Časový limit byl odstupňován podle kategorií. Soutěžící v kategorii Z8 měli 4 hodiny

Úlohy I. kola byly uveřejněny v českém a slovenském letáku MO dodávaném přímo na školy. Dále byly otištěny v časopisech Matematika a fyzika ve škole, Rozhledy matematicko-fyzikální a Sedmička pionýrů. Úlohy ostatních kol byly tajné a byly zasílány organizátorům v zapečetěných obálkách těsně před soutěžním kolem.

Potěšujícím jevem je, že rok od roku narůstá počet organizovaných a zejména spontánních akcí pořádaných na pomoc řešitelům MO, učitelům, referentům MO a vedoucím kroužků MO. Mnohé z těchto akcí přerůstají rámec MO a mají širší poslání. Pomáhají vyhledávat a vychovávat talentované žáky v matematice bez ohledu, zda se tito žáci zúčastňují, nebo nezúčastňují soutěže MO. Není možné na tomto místě vyjmenovat všechny tyto akce. Řada z nich vychází z iniciativy a fandovství nadšených učitelů matematiky, kteří se věnují ve svém volném čase svým žákům. Jejich práce, zejména jde-li o systematickou péči, je nenahraditelná a často přináší mnohem větší užitek, než některé oficiální, ale spíše jednorázové akce. O akcích věnovaných na pomoc MO neexistuje centrální evidence a proto uvedeme v dalším jen ty nejznámější. Náš dík za záslužnou činnost patří všem, i těm nejmenovaným.

Péče o nadané žáky a jejich vyhledávání je součástí činnosti JČSMF a JSMF. Při HV JČSMF byla ustanovena pod předsednictvím prof. dr. M. Fiedlera, člena korespondenta ČSAV, komise pro talentované žáky v matematice a fyzice. Členy této komise jsou též zástupci JSMF. Tato komise uspořádala 2 týdenní semináře určené učitelům, pracovníkům domů pionýrů a mládeže a studentům z vysokých škol o výměně zkušeností s prací s nadanými žáky. Semináře se

konaly v Alšovicích v listopadu 1986, jeden byl věnován středním a jeden základním školám. Mezi pozvanými lektory byli i zástupci ze SSR, kde mají s podobnými akcemi bohatší zkušenosti než v ČSR. Účastníci vysoko hodnotili oba semináře a doporučili, aby se v nich každoročně pokračovalo. Velkou zásluhu o tyto akce má jednatel komise pro talenty dr. A. Vrba, CSc.

Na Slovensku již několik let vyvíjí činnost seminář zájmové matematiky známý pod zkratkou ZAMAT. V roce 1987 převzal po dr. V. Burjanovi vedení Z. Kocsis, studující MFF UKo v Bratislavě. Seminář má bohatou činnost a daří se mu pro své účastníky a další zájemce vydávat v omezeném nákladu i různé materiály. Jejich vydávání zajišťuje FO SZM matematicko-fyzikální fakulty UKo v Bratislavě.

Před několika lety začaly slovenští matematikové organizovat korespondenční semináře pro žáky základních škol. Je potěšující, že i v ČSR během posledních dvou let se podobné semináře rychle rozšiřují. Korespondenční semináře lze rozdělit do dvou hlavních kategorií:

1. Semináře pro žáky 7. a 8. ročníků ZŠ, velmi často označované jako PIKOMAT. To je zkrácený název pro »**pionýrský korespondenční seminář matematiky**«.

2. Seminář pro žáky 4. až 6. ročníků ZŠ, označovaný v mnoha případech jako KOMINÁR. I v tomto případě jde o zkratku a to pro »**korespondenční seminář matematiky**«. Velkou předností KOMINÁRU, který organizují bratislavští matematikové, je, že úlohy jsou otiskovány v časopise Zenit pionierov, časopis vychází na Slovensku, ale PNS jej zájemcům doručuje i do českých zemí.

Účastníci korespondenčních seminářů řeší zadané úlohy

a svá řešení zasílají organizátorům. Ti je opraví a vrátí řešitelům. Výsledky se vyhodnocují. Vítězové jsou zpravidla pozváni na několikadenní soustředění nebo na letní tábory, kde výuka pokračuje.

Pro vítěze MO pořádají mnohé pobočky JČSMF a JSMF a také OV MO a KV MO letní školy.

Z dalších známějších akcí uvedme jen stručně »Klub učitelů matematiky základních škol« v Bratislavě, »Klub mladých matematiků« pořádaný v Opavě pro žáky ZŠ, různé soutěže pro jednotlivce (např. Kalkulačkiáda) i pro týmy (např. Matboj, Algopretek, Dejte hlavy dohromady).

Opavský Klub mladých matematiků patří mezi nejstarší formy péče o talentované žáky v matematice na základních školách. Byl založen v roce 1966 a navštěvuje ho každoročně více než 200 žáků ze 6. až 8. tříd celého okresu. Výuka trvá od října do května. Klub vede s celým kolektivem spolupracovníků dr. L. Hozová z okresního pedagogického střediska.

Uvedeme nyní akce evidované, případně přímo organizované KV MO, které byly určeny žákům. Jak jsme již uvedli, jde spíše o ukázky než o úplný výčet. Cílem je upozornit KV MO na různé možnosti.

Praha

Pracovní přednášky pro řešitele kategorie Z8 na 7 pražských obvodech. Celkem 44 přednášek po 2 hodinách. Průměrná účast 14 žáků na každé přednášce.

Dvě letní týdenní školy pro vítěze MO a Pythagoriády z 5. až 8. ročníků pořádala pobočka JČSMF. Účast 90 žáků.

Pro žáky 6. tříd ZŠ s rozšířeným vyučováním matematiky a přírodovědných předmětů uspořádána týmová soutěž Dej-
te hlavy dohromady. Účast 96 žáků z Prahy a Středočeského
kraje. Organizovala opět pobočka JČSMF.

Středočeský kraj

Soustředění vítězů III. kola kategorie Z8 v červnu 1987
v Telnici v délce 1 týdne. Účast 30 žáků.

Jihočeský kraj

Krajský korespondenční seminář PIKOMAT pro žáky
6. až 8. ročníků. Zadány 2 série úloh pro 300 žáků. Letní tábor
PO s matematickým zaměřením pro žáky z okresu Pelhřimov
v délce trvání 1 týdne. V okrese Český Krumlov dvoudenní
seminář pro řešitele MO.

Západočeský kraj

Týdenní soustředění mladých matematiků pro 60 účastníků
v Trhanově v červenci 1987.

Severočeský kraj

Týdenní letní škola pro 33 žáků ze 6. až 8. ročníků. Pořádala
pobočka JČSMF a OV MO v Liberci. 7 půldenních seminářů
pro řešitele kategorie Z8, pořádaly OV MO v Liberci a Tep-
licích.

Východočeský kraj

Příprava žáků na MO probíhala v rámci kroužků MO.

Jihomoravský kraj

Celoroční seminář pro brněnské řešitele MO kategorií Z. Celkem 14 lekcí v délce 2 — 3 hodin. Zúčastňovalo se průměrně 20 — 25 žáků.

Severomoravský kraj

Zájmové matematické kroužky jedenkrát týdně na jednotlivých základních školách. Desetidenní prázdninové soustředění pro úspěšné řešitele kategorie Z8 v červenci 1987 v Bruntále. Soustředění bylo společné s kategorií C, ze ZŠ bylo 10 účastníků.

Bratislava

Korespondenční seminář PIKOMAT pro 121 žáků. Zadáno 6 sérií úloh. Seminář KOMINÁR pro 88 žáků, kteří řešili 6 sérií úloh. Dvě pětidenní soustředění pro 35 žáků v únoru a červnu 1987.

Západoslovenský kraj

Pětidenní soustředění účastníků III. kola kategorie Z8 v Budmericích, kterého se zúčastnilo 40 žáků.

Středoslovenský kraj

Tábor mladých matematiků, který pořádal KV MO pro 40 žáků. Termín 4. až 14. 8. 1986. Další matematické tábory pořádaly ODPM v okresech Povážská Bystrica, Čadca, Liptovský Mikuláš. Krajský korespondenční seminář z matematiky, fyziky, šachu a programování pro 62 účastníků. Bylo organizováno 5 kol.

Korespondenční seminář pro kategorii Z7 pro 250 účastníků, kteří řešili 2 série po 8 úlohách. Soustředění korespondenčního semináře 1. až 5. 12. 1986 v Lipovci pro 30 účastníků.

Je potěšitelné, že do soutěže MO se zapojuje převážně většina škol. Podrobnosti udávají tabulky se statistikami MO na str. 20 až 23. Zde uvedeme jen stručný výtah:

Účast škol v kategorii			
	Z8	Z7	Z6
ČSR	82 %	74 %	52 %
SSR	84 %	83 %	87 %

Menší zapojení do kategorie Z6 v ČSR je nepochybně ovlivněno tím, že soutěž v 6. ročníku v ČSR probíhala v tomto školním roce poprvé.

Úspěšnost soutěžících v I. kole se pohybovala kolem 50 %. Ve II. kole byly větší odchylky. Jako nejobtížnější se ukázalo II. kolo kategorie Z8, kde úspěšnost byla jen 15 %. V ostatních kategoriích se pohybovala od 23 do 37 %. Nejvyšší úspěšnost byla ve II. kole kategorie Z8 - průměrně kolem 80 %.

Učitelé hodnotili většinou úlohy jako obtížné nebo středně těžké. Žádají, aby byly do soutěže zařazovány i lehké úlohy, které se úžeji přimykají k probíranému učivu. Obtížnost úloh a malá návaznost na předchozí kolo se nejvíce projevily ve II. kole kategorie Z8. Komise pro kategorii Z se touto situací vážně zabývala a připravila pro III. kolo přiměřenější sérii úloh, což učitelé velmi přivítali.

Kategorii Z7 hodnotili učitelé jako přiměřenou, kladně ocenili i návaznost II. kola na I. kolo. U části učitelů vzbudila však jisté rozpaky netradičnost zařazených úloh. Většina učitelů však považovala úlohy za vhodně zvolené zejména proto, že šlo o úlohy na úsudek. Za nevýhodu II. kola se považoval krátký čas na řešení.

Úlohy kategorie Z6 byly vybrány tak, aby se při jejich řešení uplatnil více úsudek a vtip než matematické znalosti. V tom někteří učitelé viděli malou návaznost na školní matematiku. Naproti tomu většina učitelů pozitivně hodnotila dobrou návaznost úloh II. kola na úlohy I. kola.

Ve všech kategoriích patřily již tradičně úlohy z geometrie k méně úspěšným. To se ostatně projevuje i ve vyšších kategoriích A, B, C. Zdá se, že úroveň geometrie není problémem jen MO, ale celé naší školy.

Mezi vítězi a úspěšnými řešiteli MO ve všech kategoriích se uplatňují zejména ti žáci, kteří navštěvují třídy s rozšířeným vyučováním matematiky a přírodovědných předmětů. Právě tito žáci také patří nejčastěji mezi ty, kteří soutěží ve vyšší kategorii, než která je jim určena. V kategoriích A, B, C se však žáci ZŠ vyskytují jen výjimečně. Mezi úspěšnými řešiteli kategorie C najdeme jen dva žáky z Prahy.

2. místo *Štěpán Kasal* 21 + 6 bodů

32. místo *Jan Hannig* 13 + 3 body

Oba byli žáci 8. roč. ZŠ s rozšířeným vyučováním matematiky a přírodovědných předmětů, Praha 1, Uhelný trh.

Počty základních škol v ČSSR, které se zúčastnily 36. roč. MO
Kategorie Z8, Z7, Z6

Kraj	ZŠ celkem	Účast ZŠ							
		v I. kole				ve II. kole			
		Z8	Z7	Z6	Celkem*)	Z8	Z7	Z6	Celkem*)
Praha	214	184	176	134	201	167	162	100	182
Středočeský	278	218	198	165	234	178	172	146	178
Jihočeský	184	158	151	140	162	133	134	106	149
Západočeský	214	171	106	89	171	171	106	89	171
Severočeský	293	221	193	179	221	162	152	122	180
Východočeský	320	296	252	214	296	261	212	192	261
Jihomoravský	465	371	361	180	371	334	323	127	334
Severomoravský	470	398	386	174	412	320	314	174	331
Bratislava	84	81	80	80	81	76	73	74	77
Západoslovenský	479	422	379	418	458	374	361	382	376
Středoslovenský	412	306	330	357	357	243	307	332	332
Východoslovenský	400	351	360	340	391	306	329	314	336
ČSR	2 438	2 017	1 823	1 275	2 068	1 735	1 575	1 056	1 786
SSR	1 375	1 160	1 149	1 195	1 287	999	1 070	1 102	1 121
ČSSR	3 813	3 177	2 972	2 470	3 355	2 734	2 645	2 158	2 907
									415

*) Účast škol aspoň v jedné z kategorií Z6 až Z8.

Počty žáků soutěžících v ČSSR v 36. ročníku MO
Kategorie Z8

Kraj	Kategorie Z8					
	I. kolo		II. kolo		III. kolo	
	S	U	S	U	S	U
Praha	1 375	894	511	101	40	34
Středočeský	1 202	614	524	73	36	28
Jihočeský	1 331	488	323	41	39	30
Západočeský	1 371	591	397	58	53	43
Severočeský	1 698	631	506	64	56	44
Východočeský	1 482	691	443	153	41	36
Jihomoravský	2 658	1 402	977	79	44	38
Severomoravský	2 874	1 351	912	133	84	77
Bratislava	487	463	449	67	45	38
Západoslovenský	2 684	1 052	878	106	40	25
Středoslovenský	1 689	736	613	67	41	38
Východoslovenský	2 724	1 282	763	144	50	15
ČSR	13 991	6 662	4 593	702	393	330
Úspěšnost v %		47,6 %		15,3 %		84,0 %
SSR	7 584	3 533	2 703	384	176	116
Úspěšnost v %		46,6 %		14,2 %		65,9 %
ČSSR	21 575	10 195	7 296	1 086	569	446
Úspěšnost v %		47,3 %		14,9 %		78,4 %

S — počet všech soutěžících
U — počet úspěšných řešitelů

Počty záku soutěžících v ČSSR v 36. ročníku MO
Kategorie Z7 a Z6

Kraj	Kategorie Z7				Kategorie Z6			
	I. kolo		II. kolo		I. kolo		II. kolo	
	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	1 400	862	539	159	1 027	530	289	135
Středočeský	1 135	669	513	101	1 103	542	431	127
Jihočeský	1 187	542	410	70	902	391	330	89
Západočeský	853	398	268	69	740	368	256	110
Severočeský	1 566	647	480	83	1 370	529	407	122
Východočeský	1 320	580	428	232	730	292	196	112
Jihomoravský	2 852	1 580	1 011	184	1 904	798	318	97
Severomoravský	3 646	1 602	983	187	1 997	837	137	92
Bratislava	321	312	303	93	392	368	365	117
Západoslovenský	2 523	1 125	738	146	3 292	1 538	783	306
Středoslovenský	1 992	953	718	100	2 490	1 154	832	170
Východoslovenský	3 536	1 848	653	218	3 455	1 810	629	225
ČSR	13 959	6 880	4 632	1 085	9 773	4 287	2 364	884
Úspěšnost v %	49,3 %		23,4 %		43,9 %		37,4 %	
SSR	8 372	4 238	2 412	557	9 629	4 870	2 609	818
Úspěšnost v %	50,6 %		23,1 %		53,6 %		31,4 %	
ČSSR	22 331	11 118	7 044	1 642	19 402	9 157	4 973	1 702
Úspěšnost v %	49,8 %		23,3 %		47,8 %		34,2 %	

S — počet všech soutěžících

U — počet všech úspěšných řešitelů

**Počty základních škol v SSR, které se zúčastnily 36. roč. MO
Kategorie Z5 a Z4**

Kraj	Účast ZŠ			
	v I. kole		ve II. kole	
	Z5	Z4	Z5	Z4
Bratislava	75	74	62	61
Západoslovenský	378	424	368	329
Středoslovenský	319	343	299	269
Východoslovenský	318	423	302	412
SSR	1 090	1 264	1 031	1 071

**Počty žáků soutěžících v SSR v 36. ročníku MO
Kategorie Z5 a Z4**

	Kategorie Z5				Kategorie Z4			
	I. kolo		II. kolo		I. kolo		II. kolo	
	S	U	S	U	S	U	S	U
Bratislava	553	406	356	162	739	525	467	393
Západoslovenský	3 058	1 783	735	314	5 848	3 629	3 107	1 812
Středoslovenský	2 433	1 217	816	276	4 298	2 885	2 070	1 099
Východoslovenský	3 731	2 052	665	263	6 739	3 672	3 839	2 141
SSR	9 775	5 458	2 572	1 015	17 624	10 711	9 483	5 445
Úspěšnost v %.	55,8 %		39,5 %		60,8 %		57,4 %	

S — počet všech soutěžících
U — počet úspěšných řešitelů

Seznamy úspěšných řešitelů

III. kol kategorie Z8

V každém kraji uvádíme seznam deseti úspěšných řešitelů, který je případně doplněn o další žáky, kteří se ještě dělili o 10. místo. Pokud není jinak uvedeno, jsou uvedeni řešitelé žáci 8. ročníků ZŠ.

Praha

1. – 2. *Jan Hannig*, ZŠ Praha 1, Uhelny trh
Štěpán Kasal, ZŠ Praha 1, Uhelny trh
3. *Tomáš Víšek*, ZŠ Praha 4, Na planině
4. – 5. *Michal Kubeček*, ZŠ Praha 4, Na planině
Michal Pravda, ZŠ Praha 8, Tř. Rudé armády
6. – 11. *Michal Vojtíšek*, ZŠ Praha 1, Ostrovní
Karel Fridrich, ZŠ Praha 2, Makarenkova
Karel Janeček, ZŠ Praha 3, Lupáčova
Ondřej Najman, ZŠ Praha 6, Bílá
Petr Novotný, ZŠ Praha 7, Fr. Křížka
Petr Ostrouchov, ZŠ Praha 8, Na Šutce

Středočeský kraj

1. *Jan Kolář*, 3. ZŠ Slaný

- 2.— 4. *Lenka Kurzweilová*, 6. ZŠ Mladá Boleslav
Tomáš Pračka, 2. ZŠ Říčany
Jan Červenka, ZŠ Středokluky
5. *Pavčina Kuthanová*, 2. ZŠ Neratovice
6. *Petr Mourek*, ZŠ Dušana Šuberta, Rakovník
7. *Jan Novotný*, 6. ZŠ Příbram
8.— 9. *Miroslav Bárta*, 1. ZŠ Vlašim
10.—11. *Alena Přecechtělová*, 2. ZŠ Kolín
Josef Václavík, 1. ZŠ Čáslav

Jihočeský kraj

- 1.— 2. *Jiří Fontán*, ZŠ Blatná
Richard Váňa, ZŠ Písek
3.— 4. *Ondřej Macháček*, II. ZŠ Třeboň
Karel Netočný, ZŠ Besednice
5.— 6. *Jan Bělík*, ZŠ Kaplice
Josef Lexa, ZŠ České Budějovice
7. *Pavel Kopřiva*, ZŠ Dačice
8.—10. *Renata Mrázová*, ZŠ Rožnov, České Budějovice
Zdeněk Petrášek, ZŠ Netolice
Miroslav Barčí, 3. ZŠ Tábor

Západočeský kraj

1. *Zdeněk Valečko*, ZŠ Karlovy Vary, Tuhnice
2. *Sylva Šnebergová*, ZŠ Dýšinná
3.— 4. *Martin Čihák*, ZŠ Karlovy Vary, St. Role
Jan Slabý, 1. ZŠ Cheb
5.— 7. *Miroslav Černý*, ZŠ Karlovy Vary, Tuhnice

- Luboš Metl*, 22. ZŠ Plzeň
Karel Soukeník, 5. ZŠ Plzeň
8. — 10. *Jan Nejezchleba*, 29. ZŠ Plzeň
Pavla Mačková, ZŠ Žinkovy
Karolina Ptáčková, ZŠ Karlovy Vary, Tuhnice

Severočeský kraj

1. *Radek Škoda*, ZŠ Liberec, Na bojišti
2. — 6. *Petr Jiříčka*, 7. roč., ZŠ Liberec, Na bojišti
Roman Kliment, ZŠ Liberec, Harusova
Martin Blovský, ZŠ Teplice, Buzulucká
Ladislav Šimek, ZŠ Ústí n. L., Karla IV.
Filip Bartl, ZŠ Varndorf, nám. 25. února
7. — 13. *Aleš Hubáček*, ZŠ Česká Lípa, A. Sovy
Jiří Fiala, ZŠ Liberec, Na bojišti
Kamil Šafka, ZŠ Liberec, Na Perštýně
Petra Fišerová, ZŠ Frýdlant, Rudé armády
Ondřej Wolf, 7. roč., ZŠ Teplice, Buzulucká
Jan Viola, ZŠ Jílové
Jana Reissigová, 3. ZŠ Most

Východočeský kraj

1. *Petr Křeček*, ZŠ Náchod, Komenského
2. *Petr Tobiška*, ZŠ Hradec Králové, Bezručova
3. *Jitka Hertíková*, ZŠ Dobruška, P. Kupky
4. — 7. *Jiří Horák*, ZŠ Pardubice, Koněvovo nám.
Jiří Lakosil, ZŠ Havlíčkův Brod, V sadech
Roman Mikan, ZŠ Chrast

- Svatopluk Tomšů*, ZŠ Hradec Králové, S. Allende
8.—11. *Petr Červinka*, ZŠ Jablonec n. Jizerou
Jaroslav Jirák, ZŠ Pardubice, Koněvovo nám.
Ladislav Jireš, ZŠ Žamberk, 28. října
Jakub Trnka, ZŠ Svobodné Dvory

Jihomoravský kraj

1. *Bohdan Farník*, ZŠ Brno, Sirotkova
2.— 4. *Michal Uhde*, ZŠ Brno, Sirotkova
Michal Relich, ZŠ Brno, Sirotkova
Jan Kasprzak, ZŠ Brno, Sirotkova
5. *Katarina Kopúnová*, ZŠ Brno, Sirotkova
6.— 8. *Jiří Prunkát*, ZŠ Zastávka u Brna
Petr Dobiáš, ZŠ Žďár nad Sázavou, Komenského
Lucie Jarošová, ZŠ Prostějov, J. V. Chráze
9.—12. *Jan Stránský*, ZŠ Letovice, Komenského
Lucie Doušková, ZŠ Brno, Sirotkova
Robert Batůšek, ZŠ Chropyně
Stanislav Urbanec, ZŠ Luhačovice

Severomoravský kraj

- 1.— 7. *David Habrnál*, ZŠ Frýdek-Místek, Rudé armády
Pavel Rychlý, ZŠ Olomouc, Fr. Stupky
Michal Ševčík, ZŠ Olomouc, Fr. Stupky
Radek Horenský, 3. ZŠ Šternberk
Jan Komárek, 3. ZŠ Šternberk
Radim Vojtek, 3. ZŠ Šternberk
Ivan Pur, 5. ZŠ Šumperk

8. — 10. *Aleš Stempěn*, ZŠ Frýdek-Místek, Rudé armády
Radim Kubacki, ZŠ Ostrava 3, Kosmonautů
Evžen Machytka, ZŠ Ostrava 1, Ostrčilova

Bratislava

1. — 2. *Ladislav Kis*, 7. roč., ZŠ Bratislava, Košická
Július Vanko, ZŠ Bratislava, Bierutova
3. — 4. *Miroslav Kočan*, ZŠ Bratislava, Beňovského
Pavol Mederly, 7. roč., ZŠ Bratislava, Košická
5. — 7. *Martin Fedor*, ZŠ Bratislava, Batkova
Martin Mačaj, ZŠ Bratislava, Batkova
Martin Vojtko, ZŠ Bratislava, Košická
8. — 9. *Kristína Kostková*, ZŠ Bratislava, Jesenského
Andrea Zieglerová, ZŠ Bratislava, Riazanská
10. — 13. *Miroslava Dubcová*, ZŠ Bratislava, Dubová
Slávka Franeková, ZŠ Bratislava, Jesenského
Andrej Hronec, 7. roč., ZŠ Bratislava, Nevädzova
Michal Mrocek, ZŠ Bratislava, Kladnianská

Západoslovenský kraj

1. *Norbert Kučerka*, ZŠ Levice, Jesenského
2. *Anita Juhoszová*, ZŠ Dunajská Streda, Školská
3. *Martin Škubla*, ZŠ Šala
4. *Juraj Bálek*, ZŠ Trenčín, Hodžova
5. *Drahošlav Cagán*, ZŠ Nové Zámky, Mostná
6. *Anna Sadíková*, ZŠ Myjava, Obr. mieru
7. *Igor Pleško*, ZŠ Lubina
8. *Peter Salzman*, ZŠ Nové Zámky, Mostná

9. *Michal Slezák*, ZŠ Nitra, Alexiho
10. *Jan Chvoščík*, ZŠ Komárno, ul. Slobody

Středoslovenský kraj

1. *Rudolf Pazdernatý*, ZŠ Púchov, Komenského
2. – 3. *Vladimír Húževka*, ZŠ Žilina, Konevova
Vladimír Glasnák, ZŠ Čadca, Žarec
4. – 8. *Šimon Malý*, ZŠ Žiar nad Hronom
Richard Rusnák, ZŠ Lučenec, ul. SNP
Radoslav Harman, ZŠ Liptovský Mikuláš, Ml.
hrdinov
Roman Tlsták, ZŠ Bobrovec
Valerián Valášek, ZŠ Banská Bystrica, nám.
Červenej armády
9. *Marián Kollárik*, ZŠ Banská Bystrica, Mládežnícka
10. – 16. *Karol Mravec*, ZŠ Banská Bystrica, nám. Červenej
armády
Boris Cejpek, ZŠ Banská Bystrica, Spojová
Martin Balta, ZŠ Martin, Východná
Zuzana Kvopková, ZŠ Martin, Východná
Martin Ragas, ZŠ Dubnica nad Váhom
Rastislav Illo, ZŠ Považská Bystrica, Slov.
partyzánů
Ján Mjartan, ZŠ Bojnice

Východoslovenský kraj

1. *Slavomír Hrinko*, ZŠ Prešov, Mir. Nešpora
2. *Martin Mudroň*, ZŠ Prešov, Gottwaldova

3. *Peter Čmilanský*, ZŠ Prešov, Šmeralova
4. *Algonz Luca*, ZŠ Prešov, Prostejovská
5. *Peter Pašteka*, ZŠ Košice, Dneperská
6. *Martin Kálovec*, ZŠ Poprad, Pionierská
7. *Erik Majerčák*, ZŠ Košice, Jenisejská
8. – 11. *Jozef Lapoš*, ZŠ Humenné, Kudlovská
Martina Ferencová, ZŠ Košice, Febr. víťazstva
Lubica Mašlejová, ZŠ Michalovce
Martina Žipajová, ZŠ Sol', okr. Vranov

Seznam úspěšných řešitelů, kteří soutěžili ve vyšší kategorii Z

Kategorie Z7 *Vít Novák*, 6. roč., ZŠ Praha 4, Na planině

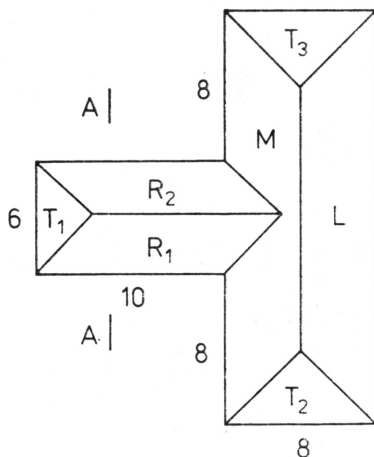
Kategorie Z6 *Ondřej Vích*, 5. roč., ZŠ Praha 10, Gutova
 Ondřej Palát, 5. roč., ZŠ Praha 8, Na Šutce
 Ondřej Váňa, 5. roč., ZŠ Praha 8, Na Šutce
 Kateřina Pavlovská, 5. roč., ZŠ Praha 8,
 Na Šutce

V ostatních krajích ČSSR nebyli žádní úspěšní řešitelé ve vyšších kategoriích Z zaznamenáni.

ÚLOHY I. KOLA

Z8 - I - 1

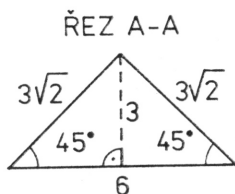
Na obrázku 1 je zobrazen půdorys střechy, rozměry jsou uvedeny v metrech. Všechny střešní plochy mají též spád,



Obr. 1

přičemž nižší hřeben je 3 metry vysoko nad rovinou okapů. Vypočítejte celkový povrch střechy.

1. řešení. Sestrojíme řez nižší části střechy rovinou kolmou k hřebenu, obr. 2. Dostaneme rovnoramenný trojúhelník se základnou dlouhou 6 m a výškou 3 m. Proto mají všechny střechy sklon 45° . Odtud snadno zjistíme, že trojúhelník T_1 a rovnoběžníky R_1 a R_2 (obr. 1) mají ve skutečnosti výšky $v = 3 \cdot \sqrt{2}$. Podobně zjistíme, že trojúhelníky T_2 , T_3 a lichoběžník L mají ve skutečnosti výšky $w = 4 \cdot \sqrt{2}$.



Obr. 2

Rovnoběžníky R_1 a R_2 mají stejné obsahy S_1 :

$$S_1 = 10 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 30 \cdot \sqrt{2}$$

Součet obsahů trojúhelníku T_1 a mnohoúhelníku M se rovná obsahu S_2 lichoběžníku L . Lichoběžník L má delší základnu dlouhou 22 m (2.8 m + 6 m), kratší základnu - hřeben - dlouhou 14 m (22 m - 2.4 m) a výšku $w = 4 \cdot \sqrt{2}$.

Proto je

$$S_2 = \frac{22 + 14}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} = 72 \sqrt{2}.$$

Konečně trojúhelníky T_2 , T_3 mají také stejné obsahy

$$S_3 = \frac{8}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} = 16 \sqrt{2}.$$

Obsah celé střechy je roven

$$S = 2 \cdot S_1 + 2 \cdot S_2 + 2 \cdot S_3$$

$$S = 60 \sqrt{2} + 144 \sqrt{2} + 32 \sqrt{2} = 236 \sqrt{2} \doteq 333$$

$$S = 333 \text{ m}^2.$$

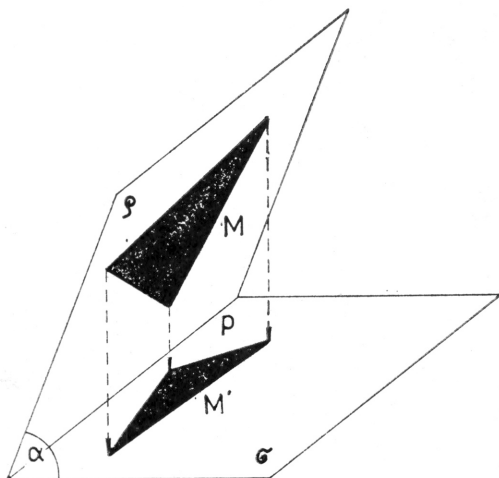
Obsah střechy je roven 333 m^2 .

2. řešení. Stejně jako v 1. řešení se ukáže, že sklon všech střech je roven 45° . Nyní použijeme větu:

Nechť obrazec M leží v rovině ϱ a M' je jeho pravoúhlý průmět do roviny σ , která svírá s rovinou ϱ úhel α . (Obr. 3, kde obrazec M je trojúhelník.) Potom obsah S' obrazce M' můžeme vypočítat z obsahu S obrazce M podle vzorce

$$S' = S \cdot \cos \alpha.$$

Tuto větu snadno sami dokážete nejdříve pro trojúhelníky,



Obr. 3

které mají jednu stranu rovnoběžnou s průsečnicí p rovin ρ a σ . Odtud pak snadno plyne důkaz pro libovolný mnohoúhelník.

Podle této věty platí pro obsah střechy S a obsah jejího půdorysu S' vzorec

$$S' = S \cdot \cos 45^\circ$$

neboli

$$S = \frac{S'}{\cos 45^\circ} = S' \cdot \sqrt{2}.$$

Obsah půdorysu S' je roven

$$S' = 6.10 + 8.22 = 236,$$

takže

$$S = 236.\overline{12} \doteq 333.$$

Dostáváme stejný výsledek jako při 1. řešení.

Z8 - I - 2

Dokažte nerovnost

$$\frac{1}{201} + \frac{1}{202} + \dots + \frac{1}{300} > \frac{1}{3}.$$

Řešení. Na levé straně nerovnosti je 100 zlomků. Každý, kromě posledního, je větší než $\frac{1}{300}$. (Odůvodněte sami.)

Proto je

$$\begin{aligned} \frac{1}{201} + \frac{1}{202} + \dots + \frac{1}{300} &> \underbrace{\frac{1}{300} + \frac{1}{300} + \dots + \frac{1}{300}}_{100\text{krát}} = \\ &= \frac{100}{300} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Poznámka k úloze Z - I - 2. Na levé straně nerovnosti je část tzv. harmonické řady, tj. řady

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \\ + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots$$

Je překvapující, že tato řada má nekonečný součet, i když přičítáme stále menší a menší číslo. K důkazu se použije podobný postup jako při řešení úlohy Z8 - I - 2.

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \\ + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}}_{> 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \dots$$

Tedy součet této řady je větší než součet

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

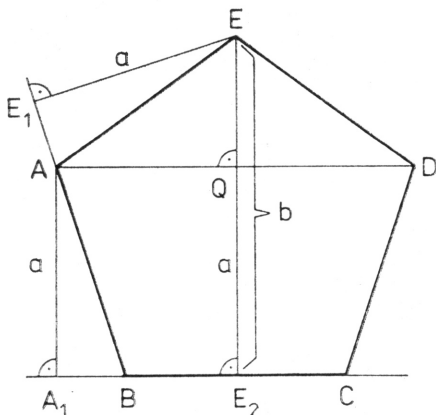
Sčítanců je nekonečně mnoho a tedy i jejich součet je nekonečný.

Z8 - I - 3

Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Označme a , b vzdálenosti vrcholu E od přímek AB a BC . Určete vzdálenost bodu E od úhlopříčky AD pomocí a , b .

Řešení. Všimneme si obrázku 4. Protože jde o pravidelný pětiúhelník, je úhlopříčka AD kolmá k přímce EE_2 . Ze stejných důvodů je vzdálenost bodu E od přímky AB stejná jako vzdálenost bodu A od přímky BC , tedy $|AA_1| = a$. Protože AA_1E_2Q je obdélník, je $|QE_2| = a$. Odtud dostáváme:

$$v(E, AD) = |EQ| = b - a$$



Obr. 4

Z8 - I - 4

Určete nejmenší a největší čtyřciferné číslo s těmito vlastnostmi:

- a) číslo je dělitelné jedenácti,

b) rozdíl tohoto čísla a jeho ciferného součtu je dělitelný číslem 17.

Řešení. Nejdříve najdeme nejmenší a největší čtyřciferné číslo, které je dělitelné jedenácti.

$$1\ 000 = 11 \cdot 90 + 10$$

$$1\ 001 = 11 \cdot 91 \quad (\text{nejmenší})$$

$$9\ 999 = 11 \cdot 909 \quad (\text{největší})$$

Sestavíme tabulku násobků čísla 11 a budeme počítat požadované rozdíly a dělit je číslem 17.

Číslo (násobek 11)	Ciferný součet	Rozdíl
1 001	2	$999 = 17 \cdot 58 + 13$
1 012	4	$1\ 008 = 17 \cdot 59 + 5$
1 023	6	$1\ 017 = 17 \cdot 59 + 14$
1 034	8	$1\ 026 = 17 \cdot 60 + 6$
1 045	10	$1\ 035 = 17 \cdot 60 + 15$
1 056	12	$1\ 044 = 17 \cdot 61 + 7$
1 067	14	$1\ 053 = 17 \cdot 61 + 16$
1 078	16	$1\ 062 = 17 \cdot 62 + 8$
1 089	18	$1\ 071 = 17 \cdot 63$
9 999	36	$9\ 963 = 17 \cdot 586 + 1$
9 988	34	$9\ 963 = 17 \cdot 585 + 9$
9 977	32	$9\ 945 = 17 \cdot 585$

Hledaná čísla jsou 1 089 a 9 977.

V rovnici

$$\frac{x+b}{a+b} + \frac{x-b}{a-b} = \frac{x+b}{a^2+2ab+b^2} - \frac{x-b}{a^2-b^2} + \frac{2x}{a}$$

s neznámou x a reálnými čísly a, b

- a) udejte podmínky řešitelnosti,
- b) najděte reálný kořen,
- c) proveďte zkoušku.

Řešení. a) Aby měla rovnice smysl, musejí být všechny jmenovatele různé od nuly.

- (1) $a + b \neq 0$
- (2) $a - b \neq 0$
- (3) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \neq 0$
- (4) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \neq 0$
- (5) $a \neq 0$

Tedy $a \neq 0$. Z podmínek (1) a (2) plyne $b \neq \pm a$. Za těchto podmínek jsou splněny i nerovnosti (3) a (4).

b) Nyní budeme rovnici řešit. Abychom z rovnice odstranili zlomky, násobíme celou rovnici součinem výrazů $(a + b)^2 \cdot (a - b)a$ (tj. společným jmenovatelem). Po vykrácení zlomků dostaneme:

$$\begin{aligned}
 & (x+b)(a+b)(a-b) \cdot a + (x-b)(a+b)^2 \cdot a = \\
 & = (x+b)(a-b) \cdot a - (x-b)(a+b) \cdot a + \\
 & \quad + 2x(a+b)^2(a-b)
 \end{aligned}$$

Nejdříve upravíme levou stranu:

$$\begin{aligned}
 L &= x(a^3 - ab^3) + (a^3b - b^3) + x(a^3 + 2a^2b + ab^2) - \\
 & \quad - (a^3b + 2a^2b^2 + ab^3) = \\
 &= x(2a^3 + 2a^2b) - (b^3 + 2a^2b^2 + ab^3)
 \end{aligned}$$

Pak upravíme pravou stranu:

$$\begin{aligned}
 P &= x(a^2 - ab) + (a^2b - ab^2) - x(a^2b - ab^2) + \\
 & \quad + 2x(a^3 + 2a^2b + ab^2 - a^2b - 2ab^2 - b^3) = \\
 &= x(2a^3 + a^2b - ab^2 - 2b^3 + a^2 - ab) + (a^2b - ab^2)
 \end{aligned}$$

Dostaneme rovnici

$$\begin{aligned}
 & x(2a^3 + 3a^2b) - (b^3 + 2a^2b^2 + ab^3) = \\
 & = x(2a^3 + a^2b - ab^2 - 2b^3 + a^2 - ab) + (a^2b - ab^2).
 \end{aligned}$$

Nyní členy s neznámou x převedeme na levou stranu a ostatní členy na pravou stranu rovnice. Po zjednodušení dostaneme

$$(6) \quad 2xb(a + ab + b^2) = 2ab(a + ab + b^2);$$

pokud je

$$(7) \quad b \neq 0,$$

$$(8) \quad a + ab + b^2 \neq 0,$$

můžeme celou rovnici dělit součinem

$$2b(a + ab + b^2)$$

a dostaneme kořen

$$x = a.$$

Nyní si všimneme vyloučených případů (7) a (8).

Je-li $b = 0$ nebo $a + ab + b^2 = 0$, dostaneme po dosazení do rovnice (6)

$$x \cdot 0 = 0.$$

Kořen této rovnice je libovolné reálné číslo.

Můžeme tedy shrnout:

a) Podmínkou řešitelnosti je splnění nerovnosti

$$a \neq 0 \quad \text{a} \quad b \neq \pm a.$$

b) Je-li $b \neq 0$ a $a + ab + b^2 \neq 0$, má rovnice jediný reálný kořen

$$x = a.$$

Je-li $b = 0$ nebo $a + ab + b^2 = 0$, je kořenem rovnice každé reálné číslo.

c) Provedeme zkoušku. Nejdříve pro případ $b \neq 0$ a $a +$

$+ ab + b^2 \neq 0$. Kořen $x = a$ dosadíme do levé a pravé strany rovnice:

$$L = \frac{a + b}{a + b} + \frac{a - b}{a - b} = 1 + 1 = 2$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{a + b}{a^2 + 2ab + b^2} - \frac{a - b}{a^2 - b^2} + \frac{2a}{a} = \\ &= \frac{1}{a + b} - \frac{1}{a + b} + 2 = 2 \end{aligned}$$

Tedy skutečně $L = P$.

Zkouška pro případ $b = 0$. (Od žáků se v tomto případě zkouška nepožadovala.) Dosadíme do levé i pravé rovnice; x je libovolné číslo.

$$L = \frac{x}{a} + \frac{x}{a} = \frac{2x}{a}$$

$$P = \frac{x}{a^2} - \frac{x}{a^2} + \frac{2x}{a} = \frac{2x}{a}$$

Tedy $L = P$.

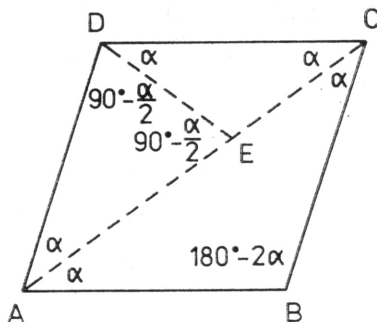
Zkoušku pro případ $a + ab + b^2 = 0$ provádět nebudeme. Také v tomto případě se zkouška od soutěžících nepožadovala. Zkoušku je možné provést, ale výpočet je složitý. Z rovnosti $a + ab + b^2 = 0$ se vypočítá $a = \frac{-b^2}{1 + b}$. Za toto a se dosadí do původní rovnice. Vzniknou dosti složité složené

zlomky. Jejich úpravou se dá zjistit, že levá strana rovnice se pro všechna x rovná pravé straně rovnice.

Z8 - I - 6

Existuje rovnoběžník, který se dá složit ze tří nepřekrývajících se rovnoramenných trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné? Pokud ano, ukažte jeden takový.

Řešení. Budeme předpokládat, že takový rovnoběžník $ABCD$ existuje. Zkusíme, zda se dá složit z trojúhelníků ABC , AED a DEC (obr. 5).



Obr. 5

V trojúhelníku ABC označíme velikosti úhlů při základně AC písmenem α . Vypočítáme velikost úhlu při vrcholu B .

$$|\sphericalangle ABC| = 180^\circ - 2\alpha$$

Úhly BCA a CAD jsou střídavé úhly, proto je

$$|\sphericalangle CAD| = \alpha.$$

Podobně i úhly BAC a ACD jsou střídavé, takže také

$$|\sphericalangle ACD| = \alpha.$$

V trojúhelníku AED známe velikost úhlu při hlavním vrcholu A . Můžeme vypočítat velikosti vnitřních úhlů při základně DE .

$$|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle EDA| = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

V trojúhelníku DEC známe velikost úhlu při vrcholu C . Je to úhel při základně, proto i druhý úhel při základně je roven

$$|\sphericalangle CDE| = \alpha.$$

V rovnoběžníku je vždy součet velikostí dvou sousedních úhlů roven 180° , proto je např.

$$|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle ADC| = 180^\circ.$$

Podle obr. 5 je však také

$$|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle ADC| = 2\alpha + \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) + \alpha = \frac{5}{2}\alpha + 90^\circ.$$

Porovnáním dostaneme rovnici

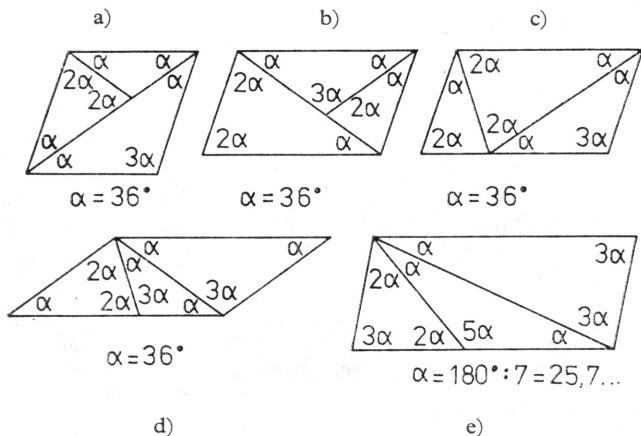
$$180^\circ = \frac{5}{2}\alpha + 90^\circ.$$

Jejím kořenem je

$$\alpha = 36^\circ.$$

Tím jsme aspoň jeden takový rovnoběžník sestrojili. Je to kosočtverec s jedním vnitřním úhlem velikosti $2\alpha = 72^\circ$.

Úloha však má i další řešení, viz obr. 6a—e; z nich obrázek



Obr. 6a — e

6a udává právě nalezené řešení. Z uvedených pěti řešení je nejzajímavější řešení z obr. 6e. Ukazuje, že existuje rovnoběžník, který lze složit ze tří nepřekrývajících se rovnoramenných trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné, ale dokonce ani podobné.

Zobecnění úlohy Z8 - I - 6. Řešení úlohy z obr. 6d, e naznačují, že úlohu je možno zobecnit takto:

Nechť n je libovolné přirozené číslo větší než 2. Ukažte, že existují rovnoběžníky, které lze složit z n rovnoramenných nepřekrývajících se trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné (podobné).

ÚLOHY II. KOLA

Z8 - II - 1

Najděte aspoň jedno přirozené číslo n , pro které platí:

$$(1) \quad \frac{2}{3} > \frac{1}{301} + \frac{1}{302} + \dots + \frac{1}{n} > \frac{2}{5} \quad (5 \text{ bodů})$$

Řešení. Pro zjednodušení označíme $n = 300 + m$. Potom nerovnosti (1) můžeme přepsat takto:

$$\frac{2}{3} > \frac{1}{301} + \frac{1}{302} + \dots + \frac{1}{300 + m} > \frac{2}{5}$$

Výraz

$$V = \frac{1}{301} + \frac{1}{302} + \dots + \frac{1}{300 + m}$$

je součtem m sčítanců, z nichž každý, s výjimkou posledního,

je větší než $\frac{1}{300 + m}$. Zároveň je každý z těchto sčítanců (bez výjimky) menší než $\frac{1}{300}$. Tedy

$$\frac{m}{300} > V > \frac{m}{300 + m}.$$

Nyní najdeme přirozené číslo m tak, aby

$$\frac{2}{3} \geq \frac{m}{300} \quad \text{a} \quad \frac{m}{300 + m} \geq \frac{2}{5}.$$

V obou nerovnostech rozšíříme známé zlomky číslem 100, takže dostaneme

$$\frac{200}{300} \geq \frac{m}{300} \quad \text{a} \quad \frac{m}{300 + m} \geq \frac{200}{500}.$$

Z toho je vidět, že stačí volit m tak, aby

$$200 \geq m \quad \text{a} \quad m \geq 200.$$

Tomu vyhovuje číslo $m = 200$ a hledané přirozené číslo n je proto

$$n = 300 + m = 500.$$

Poznámka. Číslo $n = 500$ není jediné, které vyhovuje

nerovností (1). Můžeme provést přesnější odhady. Například nejdříve odhadneme součet

$$a = \frac{1}{301} + \frac{1}{302} + \dots + \frac{1}{400}.$$

Pro každý z těchto sčítanců platí, že je větší nebo roven $\frac{1}{400}$ a menší než $\frac{1}{300}$. Proto je

$$\frac{1}{3} = \frac{100}{300} > a > \frac{100}{400} = \frac{1}{4}.$$

Můžeme tedy hledat n tak, aby platilo

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3} > \frac{1}{401} + \frac{1}{402} + \dots + \frac{1}{n} > \frac{2}{5} - \frac{1}{4}$$

neboli

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{401} + \frac{1}{402} + \dots + \frac{1}{n} > \frac{3}{20}.$$

Snadno sami stejným způsobem odhadnete, že tyto nerovnosti platí pro všechna n splňující nerovnosti

$$533 \geq n \geq 471.$$

Z8 - II - 2

Najděte nejmenší šesticiferné číslo s navzájem různými číslicemi, které má tyto dvě vlastnosti:

- je dělitelné číslem 72,
 - v jeho desetinném zápise se nevyskytují číslice 0, 8, 9.
- (5 bodů)

Řešení. Číslo $72 = 9 \cdot 8$. Proto je hledané číslo dělitelné oběma čísly 9 a 8. V hledaném čísle se mohou vyskytnout jen číslice 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Protože hledáme šesticiferné číslo, musíme jednu číslici vynechat. Hledané číslo má být dělitelné devíti, takže musí mít ciferný součet také dělitelný devíti. Protože

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28,$$

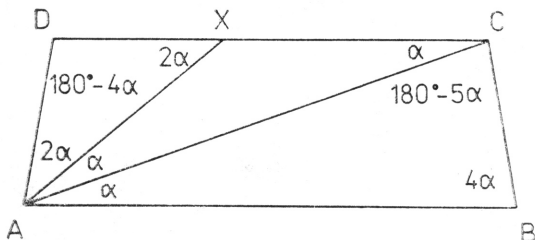
musíme vynechat číslici 1. Hledané číslo má být co nejmenší a musí být sudé (jinak by nemohlo být dělitelné osmi). Takové číslo je 234 576. Protože je toto číslo dělitelné osmi, je to hledané číslo.

Z8 - II - 3

Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB délky 10 cm, jestliže víte, že je možno jej rozdělit dvěma přímkami procházejícími bodem A na tři rovnoramenné trojúhelníky, z nichž jeden je trojúhelník ABC .

(5 bodů)

Řešení. Načrtneme si hledaný lichoběžník a zvolíme označení podle obr. 7.



Obr. 7

V žádném rovnoramenném trojúhelníku nemůže být při základně vnitřní úhel tupý. Proto musí být v trojúhelníku AXD hlavní vrchol bod D a v rovnoramenném trojúhelníku ACX hlavní vrchol bod X . Úhly při základně rovnoramenného trojúhelníku ACX označme α . Úhly DCA a CAB jsou střídavé, proto je úhel CAB roven také α . Podobně jsou střídavé úhly DXA a XAB . Protože je úhel $XAB = 2\alpha$, je i úhel $DXA = 2\alpha$. Trojúhelník AXD má základnu AX a tedy i úhel $DAX = 2\alpha$. Třetí úhel ADX trojúhelníku AXD je roven $180^\circ - 4\alpha$. V rovnoramenném lichoběžníku jsou úhly při základnách shodné, proto je

$$|\sphericalangle ABC| = 4\alpha; |\sphericalangle DCB| = 180^\circ - 4\alpha.$$

Odtud dostaneme, že

$$|\sphericalangle ACB| = (180^\circ - 4\alpha) - \alpha = 180^\circ - 5\alpha.$$

Trojúhelník ABC je rovnoramenný. Mohou nastat dvě možnosti:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \alpha = 180^\circ - 5\alpha \\ \text{(b)} & 4\alpha = 180^\circ - 5\alpha \end{array}$$

V případě (a) dostaneme:

$$\begin{array}{l} 6\alpha = 180^\circ \\ \alpha = 30^\circ \end{array}$$

Z toho však plyne, že $|\sphericalangle ABC| = 4\alpha = 120^\circ$. Ale to není možné, protože strana AB je v lichoběžníku $ABCD$ delší základnou a proto musí být úhel $ABC < 90^\circ$.

V případě (b) dostaneme

$$\begin{array}{l} 9\alpha = 180^\circ \\ \alpha = 20^\circ \end{array}$$

Lichoběžník $ABCD$ má tedy při delší základně vnitřní úhly $4\alpha = 80^\circ$ a při kratší základně vnitřní úhly $180^\circ - 4\alpha = 100^\circ$.

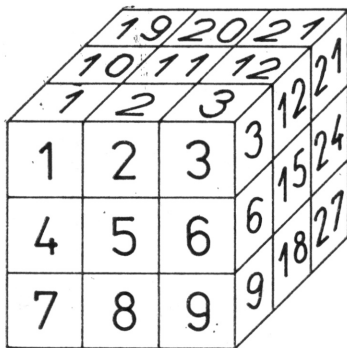
Konstrukce lichoběžníku $ABCD$

1. AB ; $|AB| = 10$ cm
2. $\triangle ABC$; (*usu*); $|\sphericalangle CAB| = 20^\circ$, $|\sphericalangle ABC| = 80^\circ$ (úhly sestrojíme pomocí úhloměru)
3. $\triangle ACD$; (*usu*); $|\sphericalangle DAC| = 60^\circ$, $|\sphericalangle DCA| = 20^\circ$, D je v polorovině opačné k polorovině ACB
4. $ABCD$; lichoběžník

Zkouška. (V soutěži nebyla požadována.) Musíme ukázat, že lichoběžník $ABCD$ lze opravdu rozdělit na 3 rovnoramenné trojúhelníky. Sestrojíme bod X na základně CD tak, aby $|\sphericalangle XAB| = 40^\circ$. Výpočtem velikostí úhlů se snadno ověří, že všechny tři trojúhelníky ABC , ACX , AXD jsou rovnoramenné.

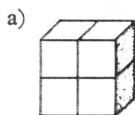
Z8 - II - 4

Na obrázku 8 je znázorněna krychle slepená ze 27 menších shodných krychlí. Zjistěte, jaké různé počty menších krychlí můžeme odebrat z velké krychle, aby zůstalo těleso, ve kterém se každá menší krychle dotýká právě dvěma svými stěnami s jinými menšími krychlemi. Pro každý možný počet stačí uvést jeden příklad. Úloha má 7 řešení. (5 bodů)

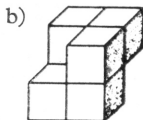


Obr. 8

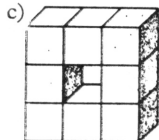
Řešení. Těleso, které zůstane, může se skládat ze 4, 6, 8,



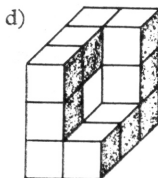
1 * 2 * 5 * 4



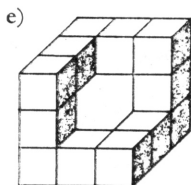
2 * 5 * 4 *
* 13 * 10 * 11



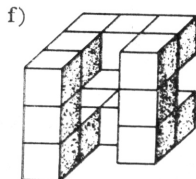
1 * 2 * 3 * 6 *
* 9 * 8 * 7 * 4



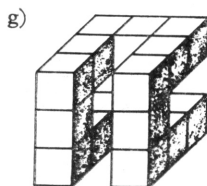
1 * 4 * 7 * 8 *
* 17 * 26 *
* 23 * 20 *
* 19 * 10



1 * 4 * 7 * 8 * 9 * 18 * 27 * 24 *
* 21 * 20 * 19 * 10



1 * 4 * 7 * 16 * 25 * 26 * 27 * 18 *
* 15 * 12 * 21 * 20 * 19 * 10



1 * 4 * 7 * 16 * 25 * 26 * 27 * 18 *
* 9 * 6 * 3 * 12 * 21 * 20 * 19 * 10

Обр. 9a — g

10, 12, 14, 16 krychlí. Odebrat můžeme tedy 23, 21, 19, 17, 15, 13 nebo 11 krychlí.

Ukázky řešení jsou na obr. 9a až g; čísla u obrázků udávají čísla zbylých krychlí.

ÚLOHY III. KOLA

Z8 - III - 1

Najděte všechna 8ciferná čísla dělitelná číslem 72, která vzniknou z čísla 40 756 424 832 vyškrtnutím tří číslic. Napište tato čísla. (6 bodů)

1. řešení. Protože $72 = 8 \cdot 9$, musí být hledané číslo dělitelné jak číslem 8, tak číslem 9. Začneme s dělitelností číslem 9. Ciferný součet daného čísla je

$$4 + 0 + 7 + 5 + 6 + 4 + 2 + 4 + 8 + 3 + 2 = 45.$$

Hledané číslo má být dělitelné devíti, proto i jeho ciferný součet musí být dělitelný devíti. Z daného čísla proto musíme škrtnout takové tři číslice, aby i jejich ciferný součet byl dělitelný devíti, tedy tři číslice, jejichž ciferný součet je 9 nebo 18.

Vypíšeme všechny možnosti (viz tabulku na str. 56).

Škrtnuté číslíce		Zůstalo číslo	Vyhovuje ANO - NE
1	0, 7, 2	4- -56 4-4 832	ANO
2	0, 7, 2	4- -56 424 83-	NE - není dělitelné 8
3	0, 6, 3	4- 75- 424 8-2	NE - není dělitelné 8
4	4, 0, 5	-- 7-6 424 832	ANO
5	0, 5, 4	4- 7-6 -24 832	ANO
6	0, 5, 4	4- 7-6 42- 832	ANO
7	5, 2, 2	40 7-6 4-4 83-	NE - není dělitelné 8
8	4, 2, 3	-0 756 4-4 8-2	NE - není dělitelné 8 a není 8ciferné
9	4, 2, 3	40 756 --4 8-2	NE - není dělitelné 8
10	2, 4, 3	40 756 4-- 8-2	NE - není dělitelné 8
11	4, 3, 2	-0 756 424 8--	NE - není 8ciferné
12	4, 3, 2	40 756 -24 8--	ANO
13	4, 3, 2	40 756 42- 8--	NE - není dělitelné 8
14	7, 8, 3	40 -56 424 --2	NE - není dělitelné 8
15	4, 6, 8	-0 75- 424 -32	NE - není 8ciferné
16	6, 4, 8	40 75- -24 -32	ANO
17	6, 4, 8	40 75- 42- -32	ANO
18	7, 5, 6	40 --- 424 832	ANO

Našli jsme celkem 8 čísel:

45 644 832	47 624 832	40 756 248	40 754 232
76 424 832	47 642 832	40 752 432	40 424 832

2. řešení. Nejdříve škrtneme takové tři číslice, aby vzniklé číslo bylo dělitelné osmi. Musí být tedy poslední trojčíslí (číslo určené posledními třemi číslicemi) dělitelné osmi. Protože škrteme pouze 3 číslice, mohou být poslední trojčíslí vybrána z posledních šesti číslic, jsou to

832, 432, 448, 248, 232, 424.

Sestavíme opět tabulku. Škrtat budeme opět 3 číslice s cifer-
ným součtem dělitelným devíti.

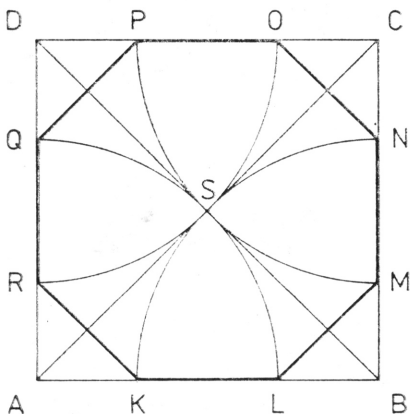
	Poslední trojčíslí	Škrtnuté číslíce	Zbylé číslo	Vyhovuje ANO - NE
1	. 832	0, 7, 2	4- -56 4-4 832	ANO
2		4, 0, 5	-- 7-6 424 832	ANO
3		0, 5, 4	4- 7-6 -24 832	ANO
4		0, 5, 4	4- 7-6 42- 832	ANO
5		7, 5, 6	40 --- 424 832	ANO
6	432	4, 6, 8	-0 75- 424 - 32	NE
7		6, 4, 8	40 75- -24 - 32	ANO
8	448	nelze		
9	248	4, 3, 2	-0 756 424 8- -	NE
10		4, 3, 2	40 756 -24 8- -	ANO
11	232	6, 4, 8	40 75- 42- - 32	ANO
12	424	nelze		

Dostáváme opět 8 možností, uvedených již při 1. řešení.

Z8 - III - 2

Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky 1 dm. Průsečík jeho
úhlopříček označte S . Sestrojte čtyři kružnice se středy

A, B, C, D o poloměrech AS . Tyto kružnice protnou strany čtverce v osmi bodech. Dokažte, že jsou to vrcholy pravidelného osmiúhelníku (má shodné strany a shodné vnitřní úhly). (6 bodů)



Obr. 10

Řešení. Načrtneme si obrázek 10 a označíme vrcholy osmiúhelníku. Úhlopříčka AC čtverce $ABCD$ má délku $|AC| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Proto je $|AS| = \frac{1}{2} \sqrt{2}$. Snadno vy-
počítáme

$$|AK| = |AB| - |BK| = 1 - \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

Podobně je $|BL| = 1 - \frac{1}{2} \sqrt{2}$. Proto je

$$|KL| = |AB| - |AK| - |BL| = 1 - 2\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} - 1.$$

Délku RK vypočítáme podle Pythagorovy věty z pravoúhlého trojúhelníku AKR .

$$|RK| = \sqrt{|AK|^2 + |AR|^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2}$$

Odtud dostaneme

$$|RK| = \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1.$$

Je tedy skutečně $|RK| = |KL|$. Sestrojený osmiúhelník má proto všechny strany shodné. Ale má i všechny vnitřní úhly shodné, neboť mají velikost rovnou $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

Z8 - III - 3

Pepík se chlubil: »Když budu mít 9 závaží o hmotnostech 1 g, 2 g, 3 g, ..., 9 g, dokážu je rozdělit na 3 skupiny o stejných hmotnostech«.

Jirka: »To nic není, já umím rozdělit na takové 3 skupiny i 33 závaží o hmotnostech od 1 g do 33 g«.

Karel: »Já umím rozdělit těch 33 závaží na 4 skupiny o stejných hmotnostech«.

Zjistěte, kdo z nich mohl svůj slib splnit. Jestliže rozdělení jde provést, uveďte příklad, když ne, uveďte proč.

(6 bodů)

Řešení. a) Pepík mohl závaží rozdělit například takto:

1. skupina: 1, 2, 3, 4, 5

2. skupina: 6, 9

3. skupina: 7, 8

V každé skupině je součet hmotností 15 g, neboť

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 6 + 9 = 7 + 8 = 15.$$

Rozdělení je možno provést i jinak; například: (4, 5, 6), (1, 2, 3, 9), (7, 8). Sami najdete jistě snadno i další možnosti.

b) Jirka může rozdělení také provést. Využije dělení, které provede Pepík. Skupiny dále doplní například takto:

1. skupina: (10, 33), (13, 30), (16, 27), (19, 24)

2. skupina: (11, 32), (14, 29), (17, 26), (20, 23)

3. skupina: (12, 31), (15, 28), (18, 25), (21, 22)

Jirka tedy rozdělí závaží od 10 g do 33 g na 12 dvojic tak, aby v každé dvojici byl součet hmotností závaží roven 43 g. Těchto 12 dvojic pak rozdělí do 3 skupin po čtyřech dvojicích. Všech 33 závaží rozdělí tedy do 3 skupin o celkových hmotnostech 187 g ($15 + 4 \cdot 43 = 187$).

Hmotnost všech 33 závaží je tedy $3 \cdot 187 \text{ g} = 561 \text{ g}$.

Poznámka. Celkovou hmotnost všech 33 závaží z úlohy Z8 - III - 3 je možno vypočítat také takto:

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 30 + 31 + 32 + 33 = \\ & = \underbrace{(1 + 33) + (2 + 32) + (3 + 31) + \dots + (16 + 18)}_{16\text{krát } 34} + 17 = \\ & = 16 \cdot 34 + 17 = 561 \end{aligned}$$

Zkuste sami stejným způsobem vypočítat celkovou hmotnost závaží a) od 1 g do 99 g; b) od 1 g do 100 g.

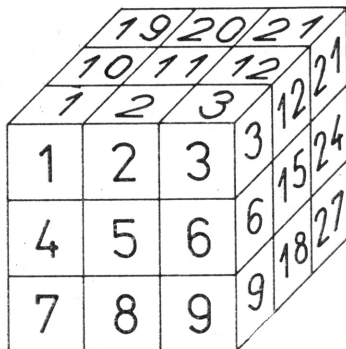
c) Karel nemůže 33 závaží od 1 g do 33 g v žádném případě rozdělit na 4 skupiny o stejných hmotnostech, protože celková hmotnost těchto závaží je 561 g a to není číslo dělitelné čtyřmi.

Z8 - III - 4

Ukažte, že z krychle K složené ze 27 menších krychlí (obr. 11) je možno ubrat 1 krychli, 2 krychle, 3 krychle, ..., 14 krychlí tak, že vzniklá tělesa mají stejný povrch s krychlí K . Pro každou ze 14 možností stačí uvést čísla krychlí, které uberete. (6 bodů)

Poznámka 1. Těleso, které zůstane, se nesmí rozpadnou na dvě nebo více částí. Nemůžeme tedy například odebrat krychle 1, 2, 4, 5, 7, 8, 12, 21, 15, 24, 18, 27.

Řešení. Všechny možnosti dostaneme například postupným odebíráním krychlí



Obr. 11

3, 2, 6, 5, 12, 11, 15, 14

a dále krychlí:

10, 13, 20, 23, 8, 17.

Na obrázcích 12a až 12d jsou znázorněna zbylá tělesa po odebrání krychlí:

3, 2, 6, 5, 12, 11, 15, 14 (obr. 12a)

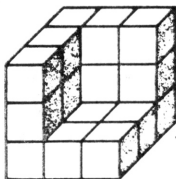
3, 2, 6, 5, 12, 11, 15, 14, 10, 13 (obr. 12b)

3, 2, 6, 5, 12, 11, 15, 14, 10, 13, 20, 23 (obr. 12c)

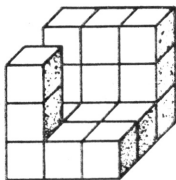
3, 2, 6, 5, 12, 11, 15, 14, 10, 13, 20, 23, 8, 17 (obr. 12d)

Poznámka 2. Původní krychle má povrch složený ze $6 \cdot 9 = 54$ stěn menších krychlí. Všechna zbylá tělesa se stejným povrchem byla složena nejméně ze 13 menších krychlí. Pokusy se dá ověřit, že nelze najít těleso se stejným povrchem, ale složené jen ze 12 nebo dokonce méně krychlí. Můžeme to však i dokázat.

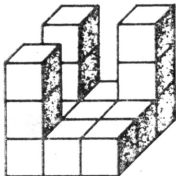
a)



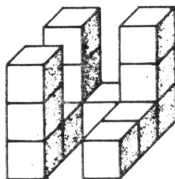
c)



b)



d)



Obr. 12a — d

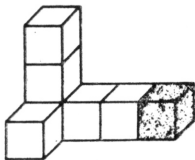
Nejdříve dokážeme větu:

Když je těleso slepeno z n shodných krychlí, pak je slepeno aspoň podél $n - 1$ společných dvojic stěn.

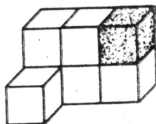
Pro konkrétní n , např. $n = 13$, můžete větu ověřit pomocí tělesa z obrázku 12d.

Nyní naznačíme důkaz věty pro libovolné n . Předpokládejme, že těleso je slepeno z n krychlí a počet slepených dvojic stěn označíme s . Odebereme-li 1 krychli, ubude aspoň 1 dvojice slepených stěn. Pro $n = 7$ si to ověřte na obr. 13a, b; odebíráme tmavou krychli. Tedy těleso z $n - 1$ krychlí má slepeno nejvýše $s - 1$ dvojic stěn. Tedy odebráním 1 krychle ubude aspoň 1 dvojice slepených stěn. Podobně se dá ukázat, že odebráním 2 krychlí ubudou aspoň 2 dvojice slepených stěn; odebráním 3 krychlí ubudou aspoň 3 dvojice slepených stěn atd.

a)



b)



Obr. 13a, b

Po odebrání $n - 1$ krychlí zbude jediná krychle. Přitom bude aspoň $s - (n - 1)$ dvojic slepených stěn. Ale protože zbyla jediná krychle, nezůstala žádná dvojice slepených stěn. Tedy

$$s - (n - 1) = 0,$$

neboli

$$s = n - 1.$$

Konkrétně, máme-li slepeno 12 krychlí, je slepeno aspoň 11 dvojic stěn. Spočítejme nyní povrch tohoto tělesa:

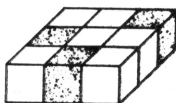
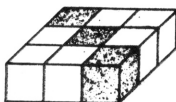
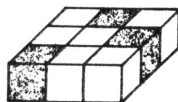
$$S = 12 \cdot 6 - 11 \cdot 2 = 72 - 22 = 54$$

12 krychlí	11 dvojic
po 6 stěnách	slepených stěn

anebo méně (je-li slepeno více než 11 dvojic stěn). Ale toto těleso má menší povrch než původní krychle.

Poznámka 3. Někteří soutěžící úlohu řešili tak, že odebírali z původní krychle menší krychle až do počtu 18, takže zbylo jen 9 krychlí. V tomto případě však nevznikne jedno těleso, ale skupina těles, jejichž povrch však je skutečně stejný s původní krychlí. Například skupina

devíti krychlí s čísly 1, 6, 9, 12, 14, 16, 20, 22, 27; jejich rozmístění ve třech vodorovných vrstvách je na obr. 14 vyznačeno tmavými krychlemi



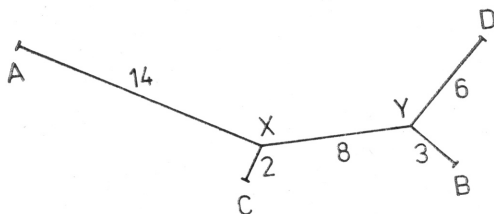
Obr. 14

Počet krychlí už není možno zmenšit. Odůvodněte sami.

ÚLOHY I. KOLA

Z7 - I - 1

Přátelé Kouba a Mácha jsou řidiči tramvají. Kouba jezdí na trati č. 1 vedoucí z A do B , Mácha na trati č. 2 spojující C a D . Čísla na plánu (obr. 15) udávají vzdálenosti v kilometrech. Tramvaje jezdí rychlostí 60 km za hodinu. Řidiči mají na každé konečné zastávce 5 minut na odpočinek. Přesně ve 12 hodin vyjel Kouba z konečné A a Mácha z konečné C . Kolikrát se v době od 12 do 19 hodin potkají na úseku XY ? Udejte přesné časy a místa jejich setkání.



Obr. 15

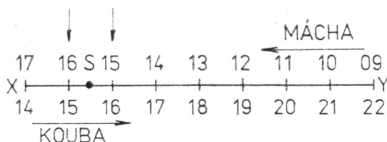
1. řešení. Jsou dva druhy setkání. Při prvním jede Kouba z X do Y a zároveň Mácha z Y do X . Ve druhém případě jede Kouba z Y do X a Mácha naopak z X do Y .

Rychlost jízdy obou linek je 1 km za minutu. Kouba jede jedním i druhým směrem 25 minut. Protože na každé konečné čeká 5 minut, situace na jeho trati se opakuje po 60 minutách. Mácha jede jedním i druhým směrem 16 minut. Započítáme-li přestávky, zjistíme, že situace na jeho trati se opakuje po 42 minutách.

Sestavíme tabulky pro 1. druh setkání.

Mácha z Y do X			Kouba z X do Y	
Y	X		X	Y
12.27	12.35	← 1. setkání →	12.14	12.22
13.09	13.17		13.14	13.22
13.51	13.59		14.14	14.22
14.33	14.41	← 2. setkání →	15.14	15.22
15.15	15.23		16.14	16.22
15.57	16.05		17.14	17.22
16.39	16.47	← 3. setkání →	18.14	18.22
17.21	17.29			
18.03	18.11			
18.45	18.53			

V prvním případě dojde ke 3 setkáním. Přesný čas a místo setkání najdeme například pomocí časové osy; pro 1. setkání viz obr. 16. Čísla udávají kolikátou minutu po 14. hodině projížděli řidiči příslušným místem. Řidiči se setkali ve



Obr. 16

13.15:30 (13 h 15 min 30 s) uprostřed mezi body s označením 15, 16 v místě S vzdáleném od X 1,5 km.

Údaje o dalších dvou setkáních dává tabulka:

Čas setkání	13.15:30	15.18:30	17.21:30
Vzdálenost SX	1,5	4,5	7,5

Stejně řešíme úlohu o setkání ve 2. případě.

Mácha z X do Y			Kouba z Y do X	
X	Y		Y	X
12.02	12.10		12.33	12.41
12.44	12.52	1. setkání	13.33	13.41
13.26	13.34		14.33	14.41
14.08	14.16	2. setkání	15.33	15.41
14.50	14.58		16.33	16.41
15.32	15.40	3. setkání	17.33	17.41
16.14	16.22		18.33	18.41
16.56	17.04			
17.38	17.46			
18.20	18.28			

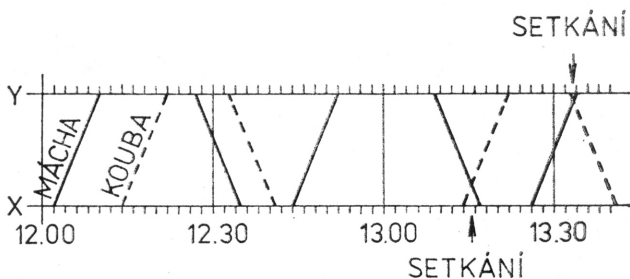
Přesný čas a polohu místa setkání S udává následující tabulka.

Čas setkání	12.33:30	15.36:30	17.33:30
Vzdálenost SX	7,5	4,5	1,5

Tím jsme řešili úlohy, kdy se řidiči setkají při jízdách opačnými směry. Může však nastat ještě další případ. Řidiči se setkají v místě X a společně pokračují do Y nebo se setkají v místě Y a společně pokračují do X .

V 1. případě je to v časovém intervalu 16.14 až 16.22, ve 2. případě v intervalu 14.33 až 14.41.

2. řešení. Úlohu můžeme řešit také pomocí grafu, ve kterém vyznačíme pohyb obou tramvají v úseku mezi X a Y . Část grafu je na obr. 17. Mácha je vyznačen plnou čarou, Kouba čárkovanou čarou.



Obr. 17

Z7 - I - 2

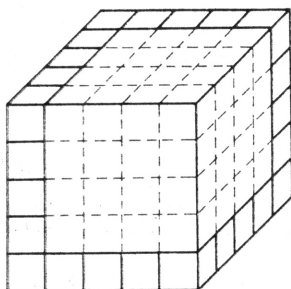
Krychle o hraně 15 cm byla sestavena ze 62 menších krychlí dvou různých velikostí. Najděte taková dvě sestavení, která

se liší nejen způsobem sestavení, ale i velikostmi menších krychlí. Načrtněte názorný obrázek složené krychle.

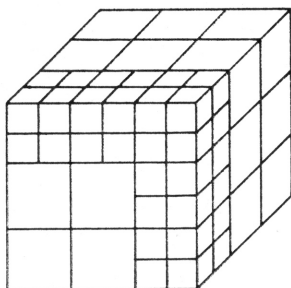
Řešení. *První způsob.* Danou krychli sestavíme nejdříve z většího počtu krychlí menší velikosti. Z nich pak některé slepíme ve větší krychle.

Krychli sestavíme ze 125 menších krychlí. Z nich pak 64 slepíme v jednu krychli (obr. 18a). Celkový počet krychlí tedy bude

$$125 - 64 + 1 = 62$$



a)



b)

Obr. 18a, b

Druhý způsob. Danou krychli sestavíme nejdříve z menšího počtu krychlí větší velikosti. Z nich pak některé rozdělíme na ještě menší krychle.

Krychli sestavíme ze 27 krychlí. Z nich vezmeme 5 a každou rozdělíme na 8 menších krychlí (obr. 18b). Celkový počet krychlí je

$$27 - 5 + 5 \cdot 8 = 62.$$

Číslo na poznávací značce automobilu nazveme šťastným číslem, jestliže ciferný součet prvních dvou číslic se rovná cifernému součtu druhých dvou číslic. Zjistěte, kolik je šťastných čísel na poznávacích značkách začínajících písmeny *ABZ*.

Řešení. Čísla rozdělíme do skupin podle ciferného součtu prvních dvou číslic. Tento součet může být číslo od 1 do 18. (Součet nemůže být nula, neboť číslo *ABZ* - 00 00 neexistuje.) Nejdříve určíme počty dvojciferných čísel s ciferným součtem $u = 1, 2, 3, \dots, 18$.

Ciferný součet	Čísla	Počet čísel
1	01 10	2
2	02 11 20	3
3	03 12 21 30	4
4	04 13 22 31 40	5
5	05 14 23 32 41 50	6
...		...
8	08 17 26 atd. 80	9
9	09 18 27 atd. 90	10
10	19 28 37 atd. 91	9
11	29 38 47 atd. 92	8
...		...
17	89 98	2
18	99	1

Nyní najdeme počet šťastných čísel. Všimneme si nejdříve například šťastných čísel, která mají ciferný součet

prvních dvou číslic roven 1, 2 a 3. Čísla sestavíme do přehledných tabulek (řádky udávají 1. dvojici číslic, sloupec 2. dvojici číslic).

	01	10		02	11	20
01	01-01	01-10	02	02-02	02-11	02-20
10	10-01	10-10	11	11-02	11-11	11-20
			20	20-02	20-11	20-20

	03	12	21	30
03	03-03	03-12	03-21	03-30
12	12-03	12-12	12-21	12-30
21	21-03	21-12	21-21	21-30
30	30-03	30-12	30-21	30-30

Počty šťastných čísel jsou v těchto případech po řadě rovny 2^2 , 3^2 , 4^2 . Tak to zřejmě pokračuje i dále.

Hledaný počet šťastných čísel je tedy roven

$$S = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 9^2 + \\ + 8^2 + \dots + 1^2.$$

Tedy šťastných čísel je

$$S = 669.$$

Poznámka. Potřebujeme-li sečíst více po sobě jdoucích 2. mocnin přirozených čísel, můžeme použít vzorce, který zde uvedeme bez důkazu

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

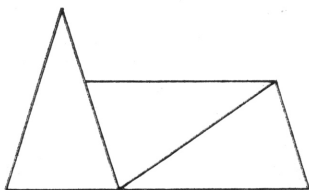
Například pro $n = 7$ platí

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = \frac{1}{6} 7 \cdot 8 \cdot 15$$

Ověřte správnost této rovnosti sami.

Z7 - I - 4

- Co děláš?
- Skládám ze tří shodných rovnoramenných trojúhelníků pětiúhelníky. Zatím jich mám šest. Jeden vypadá například takto (obr. 19):



Obr. 19

- A jak jsou dlouhé strany těch trojúhelníků?
- To ti nepovím. Ale řeknu ti, že z těch šesti pětiúhelníků mají dva obvod 19 cm a čtyři 23 cm. To by ti mělo stačit. Ale prozradím ti ještě, že délky stran trojúhelníků jsou celá čísla.

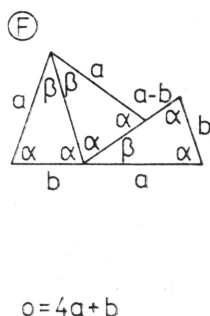
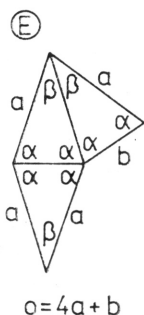
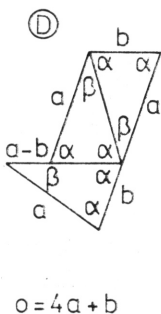
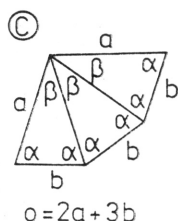
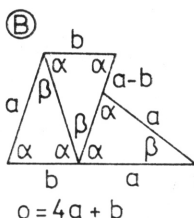
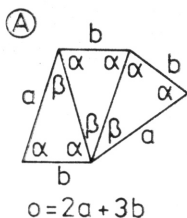
Úkol pro vás:

- Určete délky stran všech tří rovnoramenných trojúhelníků.

b) Narýsujte všech 6 pětiúhelníků, které lze sestavit z těchto tří trojúhelníků.

Řešení.. Označme délky stran shodných rovnoramenných trojúhelníků, z nichž se skládají pětiúhelníky: a = délka ramen, b = délka základny.

Nyní sestavíme všechny možné pětiúhelníky a vypočítáme jejich obvody (obr. 20).



Obr. 20

Aby to byly pětiúhelníky, nesmí být $a = b$, tzn. nesmějí to být rovnostranné trojúhelníky.

V případech B, D, F jde skutečně o pětiúhelníky (a nikoli

o šestiúhelníky), neboť součet vnitřních úhlů při vrcholu společném všem třem trojúhelníkům je roven

$$2\alpha + \beta = 180^\circ.$$

V případě A to není naopak čtyřúhelník, neboť

$$\alpha + 2\beta < 2\alpha + \beta = 180^\circ.$$

Ze šesti pětiúhelníků na obr. 20 mají dva obvod $o = 2a + 3b$ a čtyři obvod $o = 4a + b$. Podle zadání je tedy

$$2a + 3b = 19$$

$$4a + b = 23$$

Řešením této soustavy dostaneme

$$a = 5 \text{ cm}, b = 3 \text{ cm}.$$

Jiné řešení neexistuje.

Poznámka. Na obrázku 20 jsme předpokládali, že $a > b$. Kdyby bylo $a < b$, pak bychom sestrojili podobným způsobem 6 pětiúhelníků, ale jejich obvody by byly pětkrát $2a + 3b$ a jedenkrát $4a + b$. Tím by nebyla podmínka úlohy splněna. (Načrtněte si sami tyto případy.) Úloha má tedy opravdu jen jedno řešení.

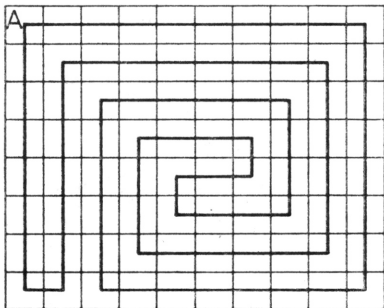
Z7 - I - 5

Obrazárnu tvoří 80 čtvercových místností o straně 4 metry (obr. 21). Hlídač koná každou hodinu obhlídku všech míst-

ností podle plánu. Začíná i končí v místnosti *A*. Přitom projde středem každé místnosti.

a) Kolik metrů celkem ujde?

b) Zjistěte, zda by si mohl délku procházky nějak zkrátit.



Obr. 21

Řešení. Uvnitř každé místnosti projde hlídač dráhu dlouhou 4 metry. Protože projde 80 místností, ujde celkem dráhu dlouhou 320 metrů ($= 80 \cdot 4$ m). Přitom vůbec nezáleží na tom, jaký tvar má dráha, kterou hlídač projde. Cestu si tedy nemůže zkrátit.

Z7 - I - 6

Množina *M* se skládá ze všech osmiciferných čísel zapsaných pouze pomocí 1 a 3. Najděte v množině *M* číslo, které je beze zbytku dělitelné číslem 7 a přitom

a) je co nejmenší,

b) je co největší,

c) má co největší počet číslic 3,

d) má co největší počet číslic 1.

Řešení. a) Budeme vypisovat čísla množiny M podle velikosti počínaje od nejmenšího a zkoumat, zda jsou dělitelná 7.

$$11\ 111\ 111 = 7 \cdot 1\ 587\ 301 + 4$$

$$11\ 111\ 113 = 7 \cdot 1\ 587\ 301 + 6$$

$$11\ 111\ 131 = 7 \cdot 1\ 587\ 304 + 3$$

$$11\ 111\ 133 = 7 \cdot 1\ 587\ 304 + 5$$

$$11\ 111\ 311 = 7 \cdot 1\ 587\ 330 + 1$$

$$11\ 111\ 313 = 7 \cdot 1\ 587\ 330 + 3$$

$$\underline{11\ 111\ 331 = 7 \cdot 1\ 587\ 333}$$

Nejmenší hledané číslo je 11 111 331.

b) Podobně budeme hledat největší číslo. Zápis uvedeme už stručněji. Zapišeme jen čísla a příslušný zbytek při dělení sedmi:

$$33\ 333\ 333 \text{ (zb. 5)} \qquad 33\ 333\ 133 \text{ (zb. 1)}$$

$$33\ 333\ 331 \text{ (zb. 3)} \qquad 33\ 333\ 131 \text{ (zb. 6)}$$

$$33\ 333\ 313 \text{ (zb. 6)} \qquad \underline{33\ 333\ 111 \text{ (zb. 0)}}$$

$$33\ 333\ 311 \text{ (zb. 5)}$$

Hledané číslo je 33 333 111.

c) Číslo z 8 trojek není dělitelné sedmi. Budeme vyšetřovat čísla zapsaná 7 trojkami; stačí ta, která jsme nezkoumali v případě b. První z nich je již násobek 7.

$$33\ 331\ 333 \text{ (zb. 0)}$$

Jedno číslo jsme našli. Zjistíme, zda není ještě další možné číslo - zda úloha nemá více řešení.

$$\begin{array}{ll} 33\ 313\ 333 \text{ (zb. 4)} & 31\ 333\ 333 \text{ (zb. 3)} \\ 33\ 133\ 333 \text{ (zb. 2)} & 13\ 333\ 333 \text{ (zb. 6)} \end{array}$$

Úloha má jediné řešení, je to číslo 33 331 333.

d) Postupujeme podobně jako v případě c.

$$\begin{array}{ll} 11\ 113\ 111 \text{ (zb. 2)} & 13\ 111\ 111 \text{ (zb. 6)} \\ 11\ 131\ 111 \text{ (zb. 5)} & 31\ 111\ 111 \text{ (zb. 3)} \\ \underline{11\ 311\ 111 \text{ (zb. 0)}} & \end{array}$$

Úloha má jediné řešení, a to číslo 11 311 111.

Poznámka. Výpočty zbytků při dělení sedmi je možno zjednodušit použitím věty:

Nechť přirozená čísla A , B dávají při dělení číslem n (např. $n = 7$) po řadě zbytky a , b . Potom součet $A + B$ dává při dělení číslem n stejný zbytek jako je zbytek při dělení součtu $a + b$ číslem n .

Důkaz této věty ověříme na konkrétním případě, jeho podstata má však obecnou platnost. Položme např. $A = 11\ 111\ 111$, $B = 20$ a $n = 7$. Potom je

$$A = 11\ 111\ 111 = 7 \cdot 1\ 587\ 301 + 4,$$

tedy $a = 4$. Podobně

$$B = 20 = 7 \cdot 2 + 6,$$

tedy $b = 6$. Součet

$$\begin{aligned} A + B &= (7 \cdot 1\,587\,301 + 4) + (7 \cdot 2 + 6) = \\ &= \underbrace{7 \cdot (1\,587\,301 + 2)}_{\text{násobek 7}} + \underbrace{(4 + 6)}_{\text{součet zbytků}} \\ &\qquad\qquad\qquad a + b \end{aligned}$$

Z toho je vidět, že $A + B$ i $a + b$ dávají při dělení sedmi stejný zbytek, který se rovná 3.

Porovnejte s řešením úlohy Z7 - I - 6; $A + B = 11\,111\,131$.

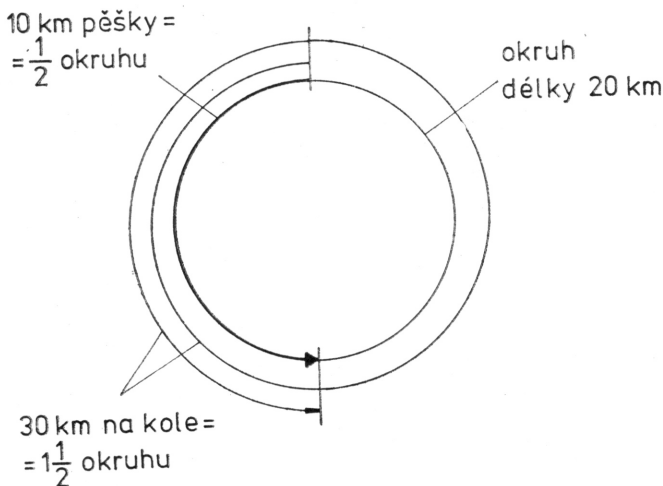
ÚLOHY II. KOLA

Z7 - II - 1

Jirka a Karel mají co nejrychleji absolvovat dvakrát závodní okruh délky 20 km. Mají jedno kolo, na kterém se mohou střídát. Každý může jet na kole rychlostí 30 km/h a běžet rychlostí 10 km/h. Mohou absolvovat závod za dobu kratší než $2\frac{1}{2}$ hodiny? Jak se musejí střídát? Jak jim to bude dlouho trvat? (5 bodů)

Řešení. Střídání mohou provést takto: Jeden z nich vyrazí pěšky a druhý na kole. Za 1 hodinu první uběhne 10 km a uběh-

ne tak půl okruhu. Za stejnou dobu druhý ujede 30 km a ujede tedy $1\frac{1}{2}$ okruhu. Tím předhoní prvního o celé kolo (obr. 22). V tomto okamžiku si úlohy vymění. Za další hodinu oba dokončí 2. okruh. Cesta jim bude trvat pouze 2 hodiny.



Obr. 22

Poznámka. Kdyby závodníci měli absolvovat jen 1 okruh, trvalo by jim to déle než 1 hodinu. Zřejmě nejvýhodnější by bylo toto střídání:

Jeden ujede půl okruhu na kole za 20 minut, pak kolo položí a zbytek doběhne. To mu bude trvat 1 hodinu. Druhý poběží 1 hodinu, kde v polovině okruhu najde kolo, na které nasedne a do cíle dorazí za dalších 20 minut. Oběma to bude tedy trvat 1 hodinu 20 minut.

To ovšem za samozřejmého předpokladu, že poběží stejným směrem. Jeden z řešitelů úlohy však objevil, že znění úlohy nevylučuje, aby se oba závodníci pohybovali po okruhu opačnými směry. V tomto

případě mohou i jeden okruh absolvovat za pouhou hodinu. Řešení jistě objevíte snadno sami.

Z7 - II - 2

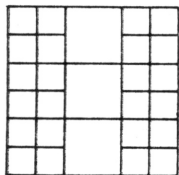
Čtverec o straně 1 m byl beze zbytku pokryt 27 čtvercovými dlaždicemi dvou různých velikostí.

a) Udejte aspoň dvě možnosti pro rozměry dlaždic a pokrytí načrtněte.

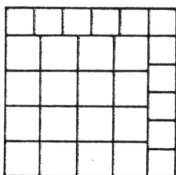
b) Můžete najít takové pokrytí, které je souměrné podle středu daného čtverce? (5 bodů)

Řešení. Myšlenka řešení je obdobná jako při řešení 2. úlohy I. kola. Jedna možnost je rozdělit čtverec na menší počet čtverců, než je 27, a dodatečně některé z nich rozdělit ještě na menší čtverce. Tak dostaneme řešení z obr. 23a.

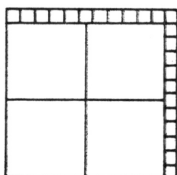
Druhá možnost je rozdělit čtverec nejdříve na větší počet čtverců, než je 27. Potom některé z nich spojit v jeden čtverec a ten případně znovu rozdělit na nové čtverce. Tak dostaneme řešení z obr. 23b, c.



a)



b)



c)

Obr. 23 a — c

Snadno vypočítáme ve všech třech případech z obr. 23a, b, c délky stran čtverců:

$$\text{a) } \frac{1}{6} \text{ m, } \frac{1}{3} \text{ m; } \quad \text{b) } \frac{1}{6} \text{ m, } \frac{5}{24} \text{ m; } \quad \text{c) } \frac{1}{12} \text{ m, } \frac{11}{24} \text{ m.}$$

Řešení z obrázku 23a vyhovuje i druhé části úlohy.

Z7 - II - 3

Zjistěte, kolik můžete celkem napsat čtyřciferných čísel, ve kterých se sobě rovnají ciferné součty prvních dvou a posledních dvou číslic a také ciferné součty krajních a vnitřních číslic. Odůvodněte, že jste našli všechna uvažovaná čísla. (5 bodů)

Řešení. Čísla zapíšeme ve tvaru $xyuv$. Podle podmínky úlohy je:

$$\begin{array}{r} x + y = u + v \\ x + v = u + y \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right) -$$

Od 1. rovnice odečteme 2. rovnici. Dostaneme:

$$\begin{array}{r} y - v = v - y \quad | + y + v \\ 2y = 2v \\ \underline{y = v} \end{array}$$

Odtud po dosazení do původních rovnic vypočítáme, že i

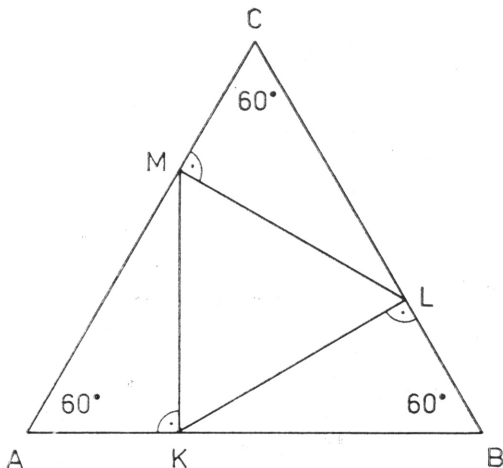
$$\underline{x = u.}$$

Ve všech hledaných číslech se tedy musí rovnat první dvojčíslí druhému dvojčíslí. Každé z těchto dvojčíslí může být libovolné z čísel 10, 11, 12, ..., 99. Těchto čísel je 90 a tedy i hledaných čtyřciferných čísel je 90. Jsou to

1 010, 1 111, 1 212, 1 313, ..., 9 898, 9 999.

Z7 - II - 4

Narýsujte rovnostranný trojúhelník ABC o straně $a = 6$ cm a rozdělte jej třemi úsečkami na 4 části, z nichž jedna je opět rovnostranný trojúhelník a zbylé tři jsou shodné pravoúhlé trojúhelníky. Vypočítejte délky stran všech vzniklých trojúhelníků, výsledek přesně narýsujte. (5 bodů)



Obr. 24

Řešení. Nejdříve musíme mít nápad, jak bude asi rozdělení vypadat. Protože mají vzniknout tři shodné pravoúhlé trojúhelníky, lze snadno uhodnout, že každý bude při jednom vrcholu daného trojúhelníku ABC (obr. 24 na str. 83).

Ze shodnosti trojúhelníků AKM , BLK a CML plyne, že

$$(1) \quad |AK| = |BL| = |CM|, \quad |AM| = |BK| = |CL|.$$

Protože trojúhelníky AKM , BLK a CML jsou pravoúhlé s jedním ostrým úhlem velikosti 60° , jsou to »poloviny« rovnostranných trojúhelníků. Z toho dostaneme

$$|AM| = 2|AK|, \quad |BK| = 2|BL|, \quad |CL| = 2|CM|.$$

Spolu s rovnostmi (1) odtud zjistíme, že

$$|BK| = 2|AK|, \quad |CL| = 2|BL|, \quad |AM| = 2|CM|.$$

Protože je $|AB| = 6$ cm, je:

$$|AK| = |BL| = |CM| = 2 \text{ cm}$$

$$|AM| = |BK| = |CL| = 4 \text{ cm}$$

Z pravoúhlého trojúhelníku AKM vypočítáme pomocí Pythagorovy věty:

$$|MK| = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$$

$$|MK| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$|MK| \doteq 3,46 \text{ cm} \doteq 3,5 \text{ cm}$$

Protože trojúhelníky AKM , BLK , CML jsou shodné, je trojúhelník KLM rovnostranný.

Protože známe polohy bodů K , L , M na stranách trojúhelníku ABC , můžeme řešení již snadno narýsovat.

ÚLOHY I. KOLA

Z6 - I - 1

K dispozícii máte ľubovoľný počet červených a modrých tyčiek rovnakej dĺžky. Z ôsmych z nich môžete urobiť model pravidelného štvorbokého ihlana. Koľko takýchto rôznych modelov môžete urobiť? Dva modely sú rôzne, ak ich nemôžeme postaviť vedľa seba tak, aby všetky odpovedajúce hrany boli rovnakej farby.

Riešenie. Ihlan má dva druhy hrán: 4 bočné hrany a 4 hrany podstavy.

Hľadáme možnosti ich zafarbenia:

Všetky hrany modré 1 možnosť

1 červená (ostatné modré) - červená môže byť buď bočná hrana, alebo hrana podstavy (obr. 25)

..... 2 možnosti



Obr. 25

2 červené - 2 hrany podstavy: susedné, alebo protilahlé (obr. 26) 2 možnosti



Obr. 26

2 bočné hrany: v jednej stene, alebo nie (obr. 27) 2 možnosti



Obr. 27

1 hrana podstavy, 1 bočná hrana (obr. 28) 4 možnosti



Obr. 28

spolu 8 možnosti

3 červené - 3 hrany podstavy 1 možnost
 3 bočné hrany 1 možnost
 1 bočná hrana, 2 hrany podstavy (obr. 29)
 6 možností



Obr. 29

2 bočné hrany, 1 hrana podstavy (obr. 30)
 6 možností



Obr. 30

spolu 14 možností

4 červené - 4 hrany podstavy 1 možnost
 4 bočné hrany 1 možnost
 1 bočná hrana, 3 hrany podstavy (obr. 31)
 4 možnosti



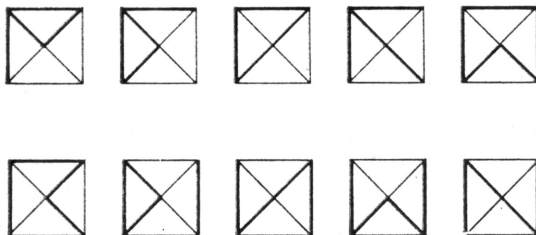
Obr. 31

3 bočné hrany, 1 hrana podstavy (obr. 32)
 4 možnosti



Obr. 32

2 bočné hrany, 2 hrany podstavy (obr. 33)
 10 možnosti



Obr. 33

spolu 20 možnosti

5 červených - to sú 3 modré (teda rovnako ako 3 červené)	14 možností
6 červených - to sú 2 modré (teda rovnako ako 2 červené)	8 možností
7 červených - to je 1 modrá (teda rovnako ako 1 červená)	2 možnosti
8 červených.....	1 možnosť

Spolu 70 možností.

Z6 - 1 - 2

Vyriešte algebrogram:

$$\begin{array}{r}
 \text{\textit{Š}} \text{\textit{K}} \text{\textit{O}} \text{\textit{L}} \text{\textit{A}} \\
 \text{\textit{L}} \text{\textit{E}} \text{\textit{N}} \\
 \text{\textit{L}} \text{\textit{E}} \text{\textit{N}} \\
 \hline
 \text{\textit{Z}} \text{\textit{M}} \text{\textit{Y}} \text{\textit{L}} \text{\textit{A}}
 \end{array}$$

Riešenie. Označme $a \oplus b$ - zvyšok pri delení 10 súčtu $a + b$. Napríklad: $8 \oplus 6 = 4$, $8 \oplus 6 \oplus 9 = 3$. Operáciu $\oplus$ používame len kvôli prehľadnosti a stručnosti zápisu riešenia úlohy. Od riešiteľov sa taký zápis nepožadoval.

Pretože $N \oplus N \oplus A = A$, musí byť $N = 5$, alebo $N = 0$. $N = 5$ nemôže byť, pretože by potom v súčte na mieste desiatok nemohlo byť L .

Teda $N = 0$.

Podobne $E = 5$, alebo $E = 0$, ale $N = 0$, teda $E = 5$.

Pretože v súčte je na mieste desaťtisícov Z a v sčítanci je $\check{S}$, musí byť $K = 9$ (prípadne $K = 8$).

Nech $K = 9$,

potom $Z = \check{S} + 1$

$M = K + 1$, alebo $M = K + 2$.

Keby $M = K + 1$ a $K = 9$, potom $M = 0$ (a to nemôže byť, lebo $N = 0$), teda $M = K + 2$.

$K + 2$ musí ísť »cez desaťtku«, nakoľko $Z = \check{S} + 1$.

Jediná možnosť je $M = 1$ a $K = 9$ (teda nemôže byť $K = 8$).

$O + L + L$ musí ísť »cez dvadsiatku«, teda $L > 5$.

Po vyskúšaní všetkých možností vyhovuje len $L = 8$.

Súčet potom je

$$\begin{array}{r} 29786 \\ 850 \\ 850 \\ \hline 31486 \end{array}$$

Úloha má jediné riešenie.

Z6 - I - 3

Vypočítajte, akú časť obsahu obdĺžnika $ABCD$ (obr. 34, str. 92) tvorí obsah

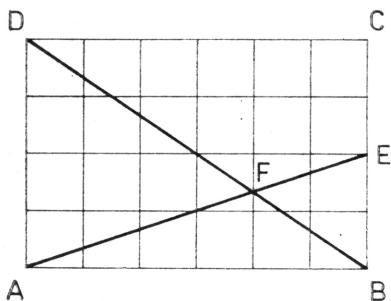
a) trojuholníka ABF ,

c) štvoruholníka $DFEC$,

b) trojuholníka BFE ,

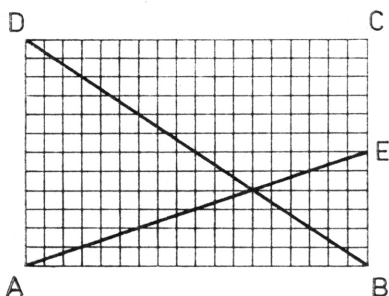
d) trojuholníka AFD .

1. riešenie. Označme $|XYZ|$ obsah trojuholníka XYZ . Sieť z úlohy si zahustíme ďalším delením strán štvorčiek na



Obr. 34

3 časti (obr. 35). Obsah budeme počítat v štvorčkoch zjeme-
nenej siete.



Obr. 35

Potom pre obsahy trojuholníkov ABF , BEF a AFD platí:

$$|ABF| = \frac{18 \cdot 4}{2} = 36 \qquad |BEF| = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18$$

$$|AFD| = \frac{12 \cdot 12}{2} = 72$$

Potom

$$|ABF| \text{ je } \frac{36}{18 \cdot 12} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6} \text{ celku,}$$

$$|BEF| \text{ je } \frac{18}{18 \cdot 12} = \frac{1}{12} \text{ celku,}$$

$$|AFD| \text{ je } \frac{72}{18 \cdot 12} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \text{ celku.}$$

$$\text{Teda } |DFEC| \text{ je } 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{12} \text{ celku.}$$

2. riešenie. Obsah obdĺžnika $ABCD$ je (pozri obr. 34)

$$|ABCD| = 6 \cdot 4 = 24.$$

Ďalej platí:

$$|ABD| = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 = |BDC|$$

$$|ABE| = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6$$

$$|AFD| = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$$

$$|BFE| = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$

$$|ABF| = |ABE| - |BFE| = 6 - 2 = 4$$

$$|DFEC| = |BCD| - |BFE| = 12 - 2 = 10$$

Pomery obsahov vypočítame podobne ako v 1. riešení.

Z6 - I - 4

17. mája 1985 je deň s matematickým dátumom. Súčin čísel označujúcich deň a mesiac sa rovná poslednému dvojčíslu letopočtu:

$$17.5 = 85$$

Zistite, ktoré roky 20. storočia neobsahujú ani jeden deň s matematickým dátumom.

Riešenie. Aby sme sa mohli ľahšie vyjadrovať, budeme hovoriť, že rok, ktorý neobsahuje deň s matematickým dátumom, je smutný. Máme teda nájsť množinu smutných rokov 20. storočia.

1. postup. Môžeme ísť po rade. Rok 1900 je zrejme smutný. Roky 1901 až 1931 nie. Vďaka dňom 1. 1. až 31. 1. Rok 1932 tiež nie (16. 2.), 1933 takisto (11. 3.) atď. Postupne preveríme všetky roky.

2. postup. 1900 je smutný rok, 1901 až 1931 vďaka januárovým dňom nie. Ktoré roky zachránia pred smútkom februárové dni? Všetky tie, ktorých koncové dvojčíslenie je dvojnásobkom čísla menšieho ako 29. V zozname čísel 32 až 99 si ich preto vyškrtne. Prečo len dvojnásobky čísel menších ako 29? Pretože február má normálne 28 dní. »Prestupný«

29. február by bol záchrancom - dňom s matematickým dátumom - v roku 1958, ten však nie je prestupný.

Pokračujeme marcovými dňami a škrťáme zo zoznamu trojnásobky čísel od 1. 3. do 31. 3. (marec má 31 dní). Nasledujú aprílové dni a násobky 4, atď. Podobnosť s Eratostenovým sitom zrejme nie je náhodná. Pokračujeme ešte s »prvočíselnými« mesiacmi, piatym a siedmym. Končíme. Ostatné mesiace by zachraňovali roky už zachránené (aj november!). Nevyškrtnuté roky sú pochopiteľne smutné.

3. *postup*. Vhodný pre tých, čo nemajú radi experimentálne postupy a majú podozrenie, že smutný rok nesmie mať koncové dvojčíslo bohaté na deliteľov.

Označme $\check{c}$ koncové dvojčíslenie letopočtu. Nech $\check{c} = a.b.c$, pričom a, b, c sú navzájom rôzne celé čísla väčšie ako 1. Ukážeme, že takýto rok, teda rok, ktorého koncové dvojčíslenie má aspoň troch rôznych deliteľov väčších ako 1, nie je smutný:

Aspoň jedno z čísel a, b, c je menšie ako 5. Keby nie, bolo by dvojčíslo $\check{c} \geq 125$, čo nie je možné. Označme toto číslo a . Teda $2 \leq a < 5$ a zároveň $b.c < 50$. Podobne musí byť jedno z čísel b, c menšie ako 8. Označme ho b . Je teda $a.b \leq 28$. Ak je $c < 13$, má c -ty deň v $a.b$ -tom mesiaci matematický dátum. (Keďže $a.b.c \leq 99$, $a.b \geq 6$ neprekročí ani číslo $a.b$, ani c prípustné hranice.)

Preskúmajme teraz letopočty s koncovým dvojčíslom, ktoré má iba dvojprvkový rozklad $\check{c} = a.b$, pričom a, b sú celé čísla, a, b musia potom byť prvočísla. Inak by mohol byť rozklad viacprvkový.

Podme teraz hľadať smutné roky medzi letopočtami s koncovkou $\check{c} = 2.p$. Ak je prvočíslo p menšie ako 27, dostávame

rok, ktorý má februárový deň s matematickým dátumom. Pre p väčšie ako 27 však už dostávame smutné roky. Sú to roky s koncovkou 2.29, 2.31, 2.37, 2.41, 2.43 a 2.47. Dvojnásobok ďalšieho prvočísla je už väčší ako 99. Medzi letopočtami s koncovkou $\check{c} = k \cdot p$, kde k, p sú prvočísla a k je väčšie ako 2, už nenájdeme smutný rok. V k -tom mesiaci p -ty deň má matematický dátum.

Teraz preskúmame letopočty s koncovkou, ktorá má iba jednoprvkový rozklad na čísla väčšie ako 1. Sú to letopočty s prvočíselnou koncovkou. Ak je $\check{c} \leq 31$, obsahuje rok januárový deň s matematickým dátumom. Ak je $\check{c}$ prvočíslo väčšie ako 31 a pochopiteľne menšie ako 100, dostávame smutný rok.

Zhrnieme. K už známym rokom 1958, 1962, 1974, 1982, 1986, 1994 sme našli ďalšie 1937, 1941, 1943, 1947, 1953, 1959, 1961, 1967, 1971, 1973, 1979, 1983, 1989, 1997.

Vyšetritť musíme rok s nulovou koncovkou, ktorý sme si zatiaľ nevšimli. Je to rok 1900 a je zrejme smutný.

Z6 - I - 5

Pod každou dvojicou susedných čísel na obrázku vľavo je ich súčin. Napr. $1,5 \cdot 6 = 9$, $6 \cdot 2 = 12$ atď.

Namiesto bodiek na obrázku vpravo napíšte čísla tak, aby bol pod každou dvojicou susedných čísel vždy ich súčin.

1,5	6	2		1,5	4	.	.	2
	9	12			6	.	3	.
		108				.	.	.
							72	.

Riešenie. Označme tretie číslo v prvom riadku x . Potom tabuľku môžeme vyplniť takto:

1,5	4	x	$3 : x$	2
6	$4 \cdot x$	3	.	.
$24 \cdot x$	$12 \cdot x$	.	.	.
	72	.	.	.
		.	.	.

Vidíme, že musí platiť

$$\begin{aligned}
 24 \cdot x \cdot 12 \cdot x &= 72 \\
 12 \cdot x \cdot x &= 72 : 24 \\
 12 \cdot x \cdot x &= 3 \\
 x \cdot x &= 0,25 \\
 x &= 0,5
 \end{aligned}$$

Tabuľka doplnená chýbajúcimi číslami bude takáto:

1,5	4	0,5	6	2
6	2	3	12	
12	6	36		
	72	216		
	15	552		

Do riešenia musíme zahrnúť i možnosť $x = -0,5$. Pre takéto x tiež platí $x \cdot x = 0,25$. Potom tabuľka vyzerá takto:

$$\begin{array}{cccccc}
 1,5 & & 4 & & -0,5 & & -6 & & 2 \\
 & 6 & & -2 & & 3 & & -12 & \\
 & & -12 & & -6 & & -36 & & \\
 & & & 72 & & 216 & & & \\
 & & & & 15552 & & & &
 \end{array}$$

Z6 - I - 6

Nájdite všetky trojice jednociferných čísel, pre ktoré platí, že ich súčin je pätnásobkom ich súčtu.

Riešenie. Hľadané čísla označme a, b, c . Čísla a, b, c sú jednociferné, teda 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Má platiť

$$a \cdot b \cdot c = 5(a + b + c).$$

Z toho vidíme, že aspoň jedno z hľadaných čísel musí byť 5 (jednociferné a deliteľné 5). Nech je $a = 5$. Hľadáme b, c . Má platiť

$$\begin{aligned}
 5 \cdot b \cdot c &= 5 \cdot (5 + b + c) \\
 \underline{b \cdot c} &= \underline{5 + b + c}
 \end{aligned}$$

Z toho vidíme

- a) $b \cdot c$ je viac ako 5,
- b) $b \cdot c$ je menej ako $5 + 9 + 9 = 23$,
- c) ani jedno z čísel nemôže byť 1 (lebo ak napr. $b = 1$, potom by bolo $c = 6 + c$).

Písmenom b označíme menšie z čísel b, c . To musí byť menšie ako 5 (prečo?).

Stačí preskúmať možnosti $b = 2, 3, 4$.

Nech $b = 2$, potom $2 \cdot c = 7 + c$.

$$\underline{c = 7}$$

Nech $b = 3$, potom $3 \cdot c = 8 + c$.

$$\underline{c = 4}$$

Nech $b = 4$, potom $4 \cdot c = 9 + c$.

$$\underline{c = 3.}$$

Úloha má dve riešenia. Hľadané trojice sú 5, 2, 7; 5, 3, 4.
(Ak uvažujeme usporiadané trojice, potom úloha má 12 riešení.)

ÚLOHY II. KOLA

Z6 - II - 1

Pred tromi rokmi som oslavoval narodeniny v deň so zvláštnym dátumom. Môj spolužiak Juro na tejto oslave zistil, že súčin čísel označujúcich deň, mesiac a počet rokov, ktoré som práve dovŕšil, sa rovná letopočtu.

Kedy som sa narodil?

(4 body)

Riešenie. (Uvedomme si, že úloha sa riešila roku 1987.)
Označme si číslo dňa d , mesiaca m a počtu rokov r . Potom zo zadania

$$d \cdot m \cdot r = 1987 - 3 = 1984.$$

Aby sme zistili prirodzené čísla d , m , r , rozložíme si číslo 1984 na prvočinitele.

$$1984 = 2^6 \cdot 31$$

Z rozkladu vidíme, že jedno z čísel d , m , r musí byť 31, alebo násobok 31. Mesiac to nemôže byť, počet rokov žiaka tiež nebýva viac ako 30. To znamená 31 určuje deň v mesiaci. Číslo mesiaca musí byť 1, alebo mocnina 2. Keby bolo číslo mesiaca rovné 1, bolo by spolužiakovi 64 rokov a to nie je možné. Číslo mesiaca musí byť mocninou 2. Teda február, apríl, august. Z nich len august má 31 dní.

Jurov spolužiak sa narodil 31. 8., v roku 1984 mal 8 rokov. Narodil sa 31. augusta 1976.

Z6 - II - 2

Miesto bodiek vpíšte čísla tak, aby pod každou dvojicou susedných čísel bol ich súčin. Nájdite kladné riešenia.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0,5 & & & 2 \\
 & \cdot & & & \cdot & & \\
 & & 9 & & & & \\
 & & & \cdot & & \cdot & \\
 & & & & & 16 & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & 162 & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & &
 \end{array}$$

(5 bodov)

Riešenie. Uvažujme pravý horný »trojuholník«.

$$\begin{array}{ccc}
 0,5 & x & 2 \\
 & \cdot & \cdot \\
 & & 16
 \end{array}$$

Označme si podľa obrázku neznáme číslo x . Potom na miestach bodiek budú $0,5x$ a $2x$. Teda

$$0,5x \cdot 2x = 16$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4$$

Uvažujme teraz ľavý »trojuholník« počítajúc od druhého riadku.

$$9 \quad y \quad 2$$

$$162$$

Označme si podľa obrázku neznáme číslo y . Na miestach bodiek budú $9y$ a $2y$. Teda

$$9y \cdot 2y = 162$$

$$18y^2 = 162$$

$$y^2 = 9$$

$$y = 3$$

Ďalej už tabuľku jednoznačne vyplníme.

1,5	6	0,5	4	2
9	3	2	8	
27	6	16		
162	96			
	1552			

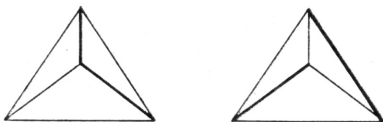
K dispozícii máte ľubovoľný počet červených a modrých tyčiek rovnakej dĺžky. Zo šiestich z nich môžete urobiť model pravidelného štvorstena (tetraédra).

Koľko rôznych takýchto modelov štvorstena môžete urobiť? (Štvorsteny sú rôzne, ak ich nevieme postaviť vedľa seba tak, aby odpovedajúce hrany boli rovnakej farby.)

(4 body)

Riešenie. Uvážme všetky typy štvorstenov, podľa počtu rovnako zafarbených hrán:

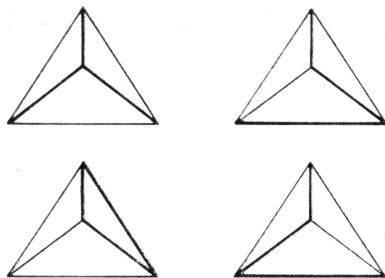
všetky tyčky modré	1 možnosť
5 modrých, 1 červená.....	1 možnosť
4 modré, 2 červené (obr. 36).....	2 možnosti



Obr. 36

3 modré, 3 červené (obr. 37).....	4 možnosti
2 modré, 4 červené	2 možnosti
1 modrá, 5 červených.....	1 možnosť
všetky červené	1 možnosť

Spolu 12 rôznych modelov.



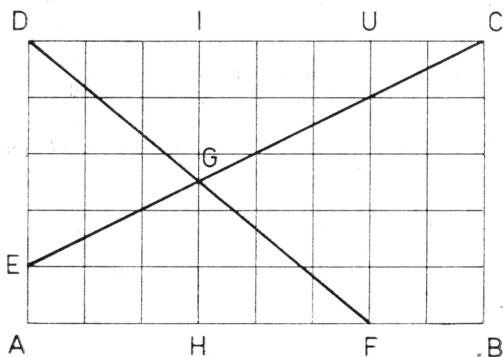
Obr. 37

Z6 - II - 4

Akú časť obsahu obdĺžnika $ABCD$ (obr. 38) tvorí obsah

- | | |
|---------------------------|-------------------------|
| a) štvoruholníka $AFGE$, | c) trojuholníka GCD , |
| b) štvoruholníka $FBCG$, | d) trojuholníka EGD . |

(5 bodov)



Obr. 38

Riešenie. Pretože priamka EC stúpa jeden štvorček na dva, pretne úsečku HI v strede strany štvorčeka. Pretože HI je stredná priečka obdĺžnika $AFUD$, pretne ju jeho uhlopriečka DF práve v polovici. Z toho plynie, bod G leží v polovici HI . Potom pre obsah trojuholníka GCD (označme $|GCD|$) platí:

$$|GCD| = \frac{8 \cdot 2,5}{2} = 10$$

Ďalej

$$|EGD| = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$|FBCG| = 2 \cdot 4 + \frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{4 \cdot 3}{2} = 15$$

$$|AFGE| = 8 \cdot 5 - (10 + 6 + 15) = 9.$$

Teda: Obsah štvoruholníka $AFGE$ je $\frac{9}{40}$ obsahu obdĺžnika

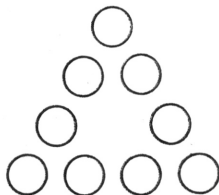
$ABCD$. Obsah štvoruholníka $FBCG$ sú jeho $\frac{3}{8}$, obsah troj-

uholníka GCD jeho $\frac{1}{4}$ a obsah trojuholníka EGD jeho $\frac{3}{20}$.

ÚLOHY I. KOLA

Z5 - I - 1

Do každého krúžku na obrázku 39 vpíšte jedno z čísel 1, 2, 3, 4, ..., 9 (každé len raz) tak, aby súčet čísel umiestnených na každej strane trojuholníka bol vždy 20. Nájdite čo najviac rôznych riešení.



Obr. 39

Riešenie. $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$. Súčet na jednej strane je 20; $20 \cdot 3 = 60$; čísla vo vrcholoch sa započítavajú dvakrát, teda ich súčet musí byť $60 - 45 = 15$. Vo vrcholoch môžu byť len čísla, ktorých súčet je 15. To sú:

951

861

762

654

942

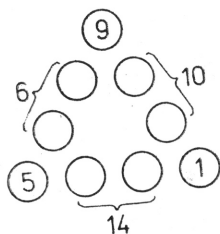
852

753

843

Až na poradie to iné nemôžu byť. Uvážme teraz jednotlivé možnosti. Na obrázkoch 40 — 47 sú znázornené čísla vo vrcholoch. Chýbajúce čísla v krúžkoch medzi nimi musia dať vždy doplnok do 20. Tento treba rozložiť na dve čísla tak, aby každé bolo zapísané len raz.

1° Vo vrcholoch trojuholníka sú čísla 9, 5, 1.



Obr. 40a

$$6 = 5 + 1 \dots 5 \text{ tam už je}$$

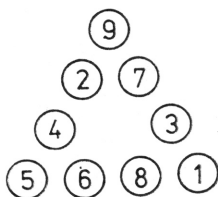
$$= \underline{4 + 2} \dots \text{môže byť}$$

$$10 = 9 + 1 \dots 9 \text{ tam už je}$$

$$= 8 + 2 \dots 2 \text{ tam už je}$$

$$= \underline{7 + 3} \dots \text{môže byť}$$

$$= 6 + 4 \dots 4 \text{ tam už je}$$



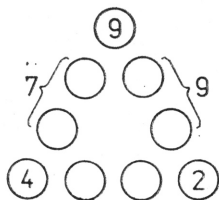
Obr. 40b

Potom $14 = \underline{8 + 6} \dots$

jediné možné doplnenie.

Výsledne doplnenie je na obr. 40b.

2° Vo vrcholech trojuholníka sú čísla 9, 4, 2.



Obr. 41

$$7 = \underline{6 + 1} \dots \text{môže byť}$$

$$= 5 + 2 \dots 2 \text{ tam už je}$$

$$= 4 + 3 \dots 4 \text{ tam už je}$$

$$9 = 8 + 1 \dots 1 \text{ tam už je}$$

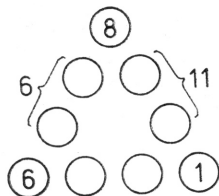
$$= 7 + 2 \dots 2 \text{ tam už je}$$

$$= 6 + 3 \dots 6 \text{ tam už je}$$

$$= 5 + 4 \dots 4 \text{ tam už je}$$

Teda, nedá sa doplniť.

3° Vo vrcholech trojuholníka sú čísla 8, 6, 1.



Obr. 42

$$6 = 5 + 1 \dots 1 \text{ tam už je}$$

$$= \underline{4 + 2} \dots \text{môže byť}$$

$$11 = 9 + 2 \dots 2 \text{ tam už je}$$

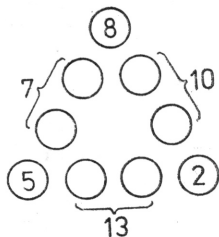
$$= 8 + 3 \dots 8 \text{ tam už je}$$

$$= 7 + 4 \dots 4 \text{ tam už je}$$

$$= 6 + 5 \dots 6 \text{ tam už je}$$

Teda, nedá sa doplniť.

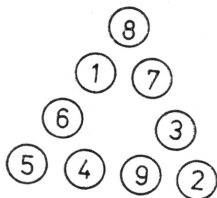
4° Vo vrcholech trojuholníka sú čísla 8, 5, 2.



Obr. 43a

$$\begin{aligned}
 7 &= \underline{6 + 1} \dots \text{môže byť} \\
 &= 5 + 2 \dots 2 \text{ tam už je} \\
 &= \underline{4 + 3} \dots \text{môže byť}
 \end{aligned}$$

a) Nech $7 = \underline{6 + 1}$



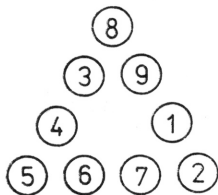
Obr. 43b

$$\begin{aligned}
 10 &= 9 + 1 \\
 \dots 1 \text{ tam už je}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 8 + 2 \\
 \dots 2 \text{ tam už je}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \underline{7 + 3} \\
 \dots \text{môže byť}
 \end{aligned}$$

b) Nech $7 = \underline{4 + 3}$



Obr. 43c

$$\begin{aligned}
 10 &= \underline{9 + 1} \\
 \dots \text{môže byť}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 8 + 2 \\
 \dots 2 \text{ tam už je}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 7 + 3 \\
 \dots 3 \text{ tam už je}
 \end{aligned}$$

$$= 6 + 4$$

... 6 tam už je

$$= 6 + 4$$

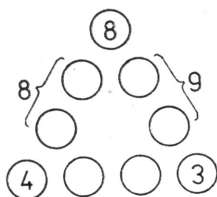
... 4 tam už je

Potom $13 = \underline{4 + 9}$

Potom $13 = \underline{6 + 7}$

Pozri obr. 43b, c.

5° Vo vrcholoch trojuholníka sú čísla 8, 4, 3.



Obr. 44

$$8 = \underline{7 + 1} \dots \text{môže byť}$$

$$= \underline{6 + 2} \dots \text{môže byť}$$

$$= 5 + 3 \dots 3 \text{ tam už je}$$

a) Nech $8 = \underline{7 + 1}$

$$9 = 8 + 1$$

... 8 tam už je

$$= 7 + 2$$

... 7 tam už je

$$= 6 + 3$$

... 3 tam už je

$$= 5 + 4$$

... 4 tam už je

Nedá sa doplniť.

b) Nech $8 = \underline{6 + 2}$

$$9 = 8 + 1$$

... 8 tam už je

$$= 7 + 2$$

... 2 tam už je

$$= 6 + 3$$

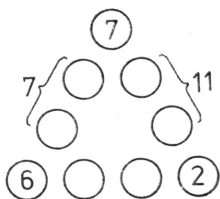
... 6 tam už je

$$= 5 + 4$$

... 4 tam už je

Nedá sa doplniť.

6° Vo vrcholov trojuholníka sú čísla 7, 6, 2.



Obr. 45

$$7 = 6 + 1 \dots 6 \text{ tam už je}$$

$$= 5 + 2 \dots 2 \text{ tam už je}$$

$$= \underline{4 + 3} \dots \text{môže byť}$$

$$11 = 9 + 2 \dots 2 \text{ tam už je}$$

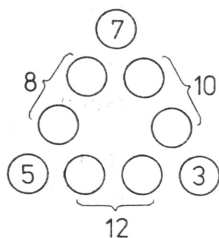
$$= 8 + 3 \dots 3 \text{ tam už je}$$

$$= 7 + 4 \dots 4 \text{ tam už je}$$

$$= 6 + 5 \dots 6 \text{ tam už je}$$

Nedá sa doplniť.

7° Vo vrcholov trojuholníka sú čísla 7, 5, 3.



Obr. 46a

$$8 = 7 + 1 \dots 7 \text{ tam už je}$$

$$= \underline{6 + 2} \dots \text{môže byť}$$

$$= 5 + 3 \dots 5 \text{ tam už je}$$

$$10 = \underline{9 + 1} \dots \text{môže byť}$$

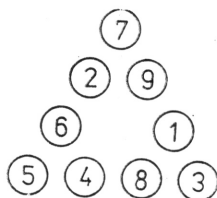
$$= 8 + 2 \dots 2 \text{ tam už je}$$

$$= 7 + 3 \dots 3 \text{ tam už je}$$

$$= 6 + 4 \dots 6 \text{ tam už je}$$

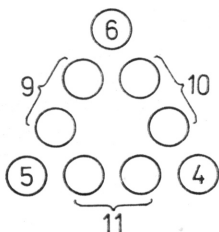
Potom

$$12 = \underline{4 + 8}$$



Obr. 46b

8° Vo vrcholov trojuholníka sú čísla 6, 5, 4.



Obr. 47a

$$9 = \underline{8 + 1} \dots \text{môže byť}$$

$$= \underline{7 + 2} \dots \text{môže byť}$$

$$= 6 + 3 \dots 6 \text{ tam už je}$$

$$= 5 + 4 \dots 5 \text{ tam už je}$$

a) Nech $9 = \underline{8 + 1}$

$$10 = 9 + 1$$

$\dots$ 1 tam už je

$$= 8 + 2$$

$\dots$ 8 tam už je

b) Nech $9 = \underline{7 + 2}$

$$10 = \underline{9 + 1}$$

$\dots$ môže byť

$$= 8 + 2$$

$\dots$ 2 tam už je

$$= \underline{7 + 3}$$

... môže byť

$$= 7 + 3$$

... 7 tam už je

$$= 6 + 4$$

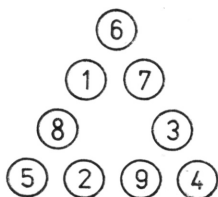
... 4 tam už je

$$= 6 + 4$$

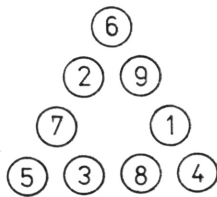
... 4 tam už je

Potom $11 = \underline{2 + 9}$

Potom $11 = \underline{3 + 8}$



Obr. 47b



Obr. 47c

Všetky riešenia (až na zmenu poradia vrcho ov, prípadne zmenu poradia čísel vnútri strán) sú tak zostrojené.

Z5 - I - 2

Hviezdičky nahraďte číslicami tak, aby vznikla správna úloha na násobenie:

$$\begin{array}{r}
 * * * 7 \\
 * * * \\
 \hline
 * * * * 6 \\
 * * 2 0 3 \\
 * 3 7 * * \\
 \hline
 * * * * * *
 \end{array}$$

Riešenie. Označme si neznáme cifry písmenami ako na obrázku:

			<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	7
				<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
		<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>	6
	<i>k</i>	<i>l</i>	2	0	3	
<i>m</i>	3	7	<i>n</i>	<i>o</i>		
	*	*	*	*	*	*

Potom *f* musí byť 8, lebo súčin 7 s iným jednociferným číslom nekončí na 6. Podobne *e* = 9.

Potom však $9 \cdot 7 = 63$ — napíšeme tri a 6 zostalo.

$$9 \cdot c + 6 = *0, \text{ teda } 9 \cdot c = *4, \text{ preto } \underline{c = 6}.$$

Potom však $9 \cdot 6 + 6 = 60$ — napíšeme nula a 6 zostalo.

$$9 \cdot b + 6 = *2, \text{ teda } 9 \cdot b = *6, \text{ preto } \underline{b = 4}.$$

$$9 \cdot 4 + 6 = 42 \text{ — napíšeme dva a } \underline{4 \text{ zostali}}.$$

Vráťme sa k číslam *g*, *h*, *i*, *j*. Vynásobením známej časti prvého činiteľa ôsmimi dostávame *j* = 3, *i* = 7.

Hľadáme teraz číslo *d*; *d*-násobok čísla *a*467 musí mať na mieste stoviek cifru 7.

Urobme si tabuľku:

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$d.\underline{a467}$	$\underline{a467}$	$\underline{*934}$	$\underline{*401}$	$\underline{*868}$	$\underline{*335}$	$\underline{*802}$	$\underline{*268}$	$\underline{*736}$	$\underline{*203}$

Teda $\underline{d = 8}$. Potom $\underline{o = 6}$, $\underline{n = 3}$. Pretože $d = f = 8$, je 1. a 3. riadok v súčine rovnaký. Teda $h = 3$. Zatiaľ máme:

		a	4	6	7	
			8	9	8	
	g	3	7	3	6	
	k	l	2	0	3	
	m	3	7	3	6	
	*	*	*	*	*	*

Sledujte výpočet súčinu:

$$a467.8 = g3736$$

$$8.7 = 56, \text{ napíšeme } 6 \text{ a } 5 \text{ zostalo}$$

$$8.6 + 5 = 53, \text{ napíšeme } 3 \text{ a } 5 \text{ zostalo}$$

$$8.4 + 5 = 37, \text{ napíšeme } 7 \text{ a } 3 \text{ zostali}$$

$$8.a + 3 = g3$$

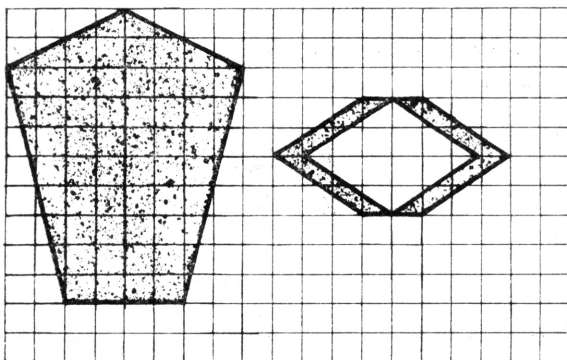
Teda $8.a = g0$, z čoho $a = 5$.

Výsledok je:

	5	4	6	7	
		8	9	8	
	4	3	7	3	6
4	9	2	0	3	
4	3	7	3	6	
4	9	0	9	3	6

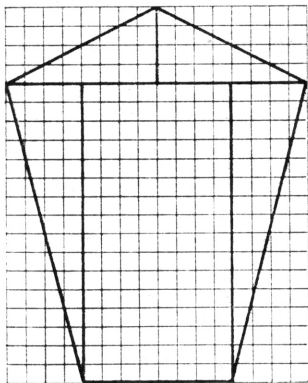
Z5 - I - 3

Určte obsah vyšrafovaných útvarov umiestnených v štvorčekovej sieti (obr. 48). Dĺžka strany štvorčeka je 1 cm.



Obr. 48

Riešenie. a) Prvý útvar si rozdelíme na pravouhlé trojuholníky (obr. 49, str. 116). Súčtom ich obsahov dostaneme obsah daného útvaru. Obsah je 56 cm^2 .



Obr. 49

b) Druhý útvar môžeme rozdeliť na štyri rovnaké rovnobežníky (obr. 50).



Obr. 50

Obsah takéhoto rovnobežníka vypočítame ak od obsahu obdĺžnika 2.4 cm^2 odčítame obsahy dvoch pravouhlých trojuholníkov $\frac{2.3}{2} \text{ cm}^2$. Teda $8 \text{ cm}^2 - 6 \text{ cm}^2 = 2 \text{ cm}^2$. Obsah jedného rovnobežníka je 2 cm^2 ; obsah štyroch a teda aj celého útvaru 8 cm^2 .

Prváčka Danka bola vždy veľmi zvedavá a netrpezlivo očakávala deň, kedy dostane svoje prvé vysvedčenie. Sú-družka učiteľka jej povedala: »Pri školskej bráne máme 8 schodov. Dohodnime sa, že od zajtra každý deň prejdeš po schodoch do školy iným spôsobom. Musíš však dodržať dve podmienky.

1. Každýkrát musíš stúpiť na prvý schod.

2. Z každého schodu môžeš stúpiť buď na nasledujúci, alebo jeden môžeš preskočiť a stúpiť hneď na ten ďalší.

V ten deň, keď vyčerpáš už aj poslednú možnosť, budeme rozdávať vysvedčenie.«

Koľkokrát musela Danka prejsť po schodoch, aby dostala vysvedčenie?

Riešenie (pozri obr. 51, str. 118). Na schody je možné stú-piť takto:

na 1. schod 1 spôsobom

na 2. schod 1 spôsobom

na 3. schod $1 + 1 = 2$ spôsobmi (prečo?)

na 4. schod $1 + 2 = 3$ spôsobmi

na 5. schod $2 + 3 = 5$ spôsobmi

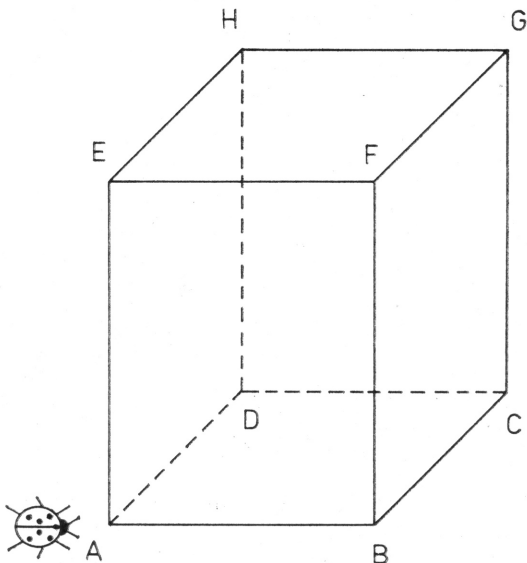
na 6. schod $3 + 5 = 8$ spôsobmi

na 7. schod $5 + 8 = 13$ spôsobmi

na 8. schod $8 + 13 = 21$ spôsobmi.

Danka musela prejsť po schodoch práve 21krát.

Poznámka. Stretli sme sa i s riešením, že Danka nemusí stúpiť na 8. schod (že ho preskočí). Žiak považoval za schod len »kváder scho-du«, »kachličky« za ním už schodom nie sú. Táto úvaha je tiež dobrá. Problém je v tom, že nemáme všetci rovnakú predstavu o tom, čo je

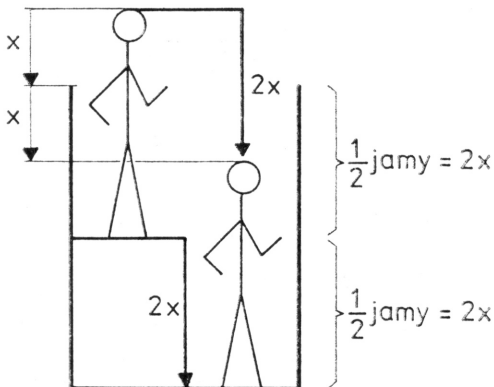


Obr. 52

Z5 - I - 6

Pýtali sa robotníka, akú hlbokú jamu kope. Odpovedal im takto: »Meriam 180 cm. Keď vykopem celú jamu, bude moja hlava pod povrchom zeme tak hlboko, koľko je teraz nad povrchom zeme. Mám vykopanú polovicu jamy.«

Riešenie. Označme vzdialenosť hlavy robotníka nad povrchom jamy x . Keď vykope druhú polovicu jamy, klesne mu hlava o $2x$. To znamená, že polovica jamy je hlboká $2x$, teda celá jama je hlboká $4x$.



Obr. 53

Avšak z obrázku (obr. 53) vidíme, že robotník je vysoký $4x - x = 3x$, teda $x = 60$ cm.

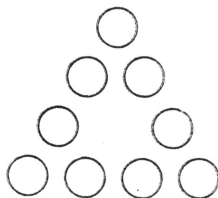
Jama bude hlboká 4.60 cm, tj. 240 cm.

ÚLOHY II. KOLA

Z5 - II - 1

Do krúžkov na obrázku 54 vpište čísla od 1 do 9, každé práve raz tak, aby súčet čísel umiestnených na každej strane trojuholníka bol vždy 21. Nájdite aspoň dve riešenia, ktoré sa líšia v množine čísel vo vrcholoch. (6 bodov)

Riešenie (pozri úlohu Z5 - I - 1). $1 + 2 + \dots + 9 = 45$.



Obr. 54

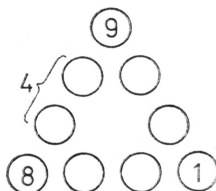
Súčet na jednej strane je 21; $21 \cdot 3 = 63$; čísla vo vrcholoch sa započítavajú dvakrát, teda ich súčet musí byť $63 - 45 = 18$.

Vo vrcholoch môžu byť čísla

9 8 1	8 7 3	7 6 5
9 7 2	8 6 4	
9 6 3		
9 5 4		

1° Vo vrcholoch sú čísla 9, 8, 1.

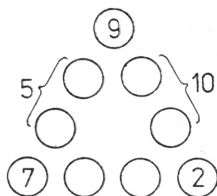
Do súčtu 21 chýbajú 4 (obr. 55). Tie sa však nedajú rozložiť na súčet dvoch čísel, ktoré v trojuholníku nie sú vo vrcholoch.



Obr. 55

2° Vo vrcholoch sú čísla 9, 7, 2.

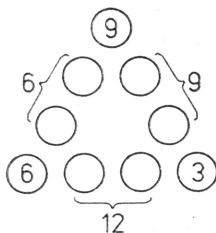
Jediná možnosť doplnenia $5 = 4 + 1$, ale potom sa už 10 nedá rozložiť (obr. 56).



Obr. 56

3° Vo vrcholoch sú čísla 9, 6, 3.

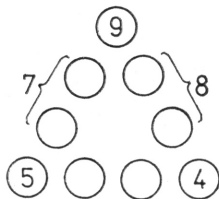
Sú dve možnosti (obr. 57): $6 = 5 + 1$, $6 = 4 + 2$. Ak $6 = 5 + 1$, tak $9 = 7 + 2$ a $12 = 4 + 8$. Ak $6 = 4 + 2$, tak $9 = 8 + 1$ a $12 = 5 + 7$.



Obr. 57

4° Vo vrcholoch sú čísla 9, 5, 4.

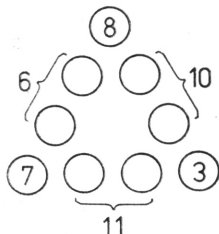
Jediná možnosť je $7 = 6 + 1$ (obr. 58). Ďalej sa však už nedá dopĺňovať.



Obr. 58

5° Vo vrcholoch sú čísla 8, 7, 3.

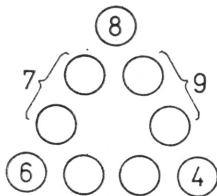
Sú dve možnosti (obr. 59): $6 = 5 + 1$, $6 = 4 + 2$. Ak $6 = 5 + 1$, tak $10 = 6 + 4$ a $11 = 9 + 2$. Ak $6 = 4 + 2$, tak $10 = 9 + 1$ a $11 = 5 + 6$.



Obr. 59

6° Vo vrcholov sú čísla 8, 6, 4.

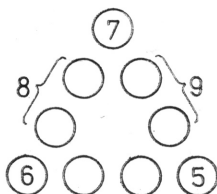
Jediná možnosť $7 = 6 + 1$ (obr. 60), ďalej sa však nedá doplniť.



Obr. 60

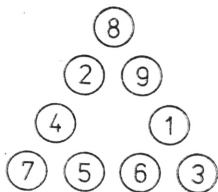
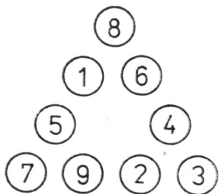
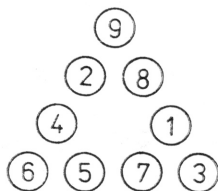
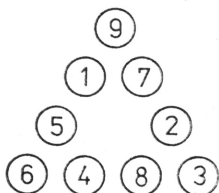
7° Vo vrcholov sú čísla 7, 6, 5.

Číslo 8 se nedá rozpísať ako súčet dvoch čísel, ktoré v trojuholníku ešte nie sú (obr. 61).



Obr. 61

Všetky riešenia (ktoré sa nelíšia zmenou poradia vrcholov, alebo zmenou poradia čísel vnútri strán) sú na obrázku 62.



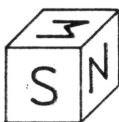
Obr. 62

Ktoré z ôsmich kociek na obrázkoch 63a—h si mohol Miro zhotoviť z papiera, ktorý si vystrihol z obrázku i.

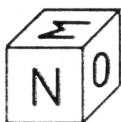
(4 body)



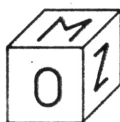
a)



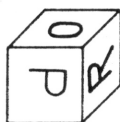
b)



c)



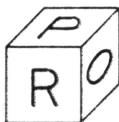
d)



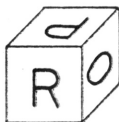
e)



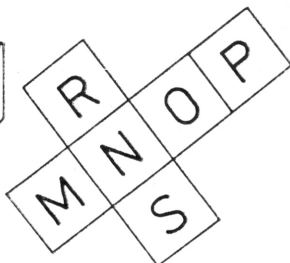
f)



g)



h)



i)

Obr. 63a — i

Riešenie. Všímame si písmená v stenách, ktoré spolu susedia.

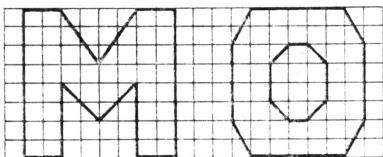
- Kocku a) nemožno zložiť, lebo stena S nesusedí so stenou R,
 b) nemožno zložiť, lebo v kocke sú písmená M, N »nad sebou«, ale v sieti »vedľa seba«,
 c) nemožno zložiť, lebo v kocke písmeno M »leží« nad N a v sieti sú postavené »vedľa seba«,

- d) nemožno zložiť, lebo v kocke sú M a O »vedľa seba«, v sieti sú na protiľahlých stenách,
- f) nemožno zložiť, lebo v kocke písmeno N »leží nad« S a v sieti písmeno N »stojí nad« S,
- g) nemožno zložiť, lebo v kocke písmeno P »stojí nad« R a v sieti písmeno P »stojí dolu hlavou« nad R.

Výsledok. Miro si mohol zhotoviť kocky e) a h).

Z5 - II - 3

Určte obsah útvaru umiestneného v štvorcovej sieti (obr. 64). (Dĺžka strany štvorčeka je 1 cm.) (5 bodov)



Obr. 64

Riešenie. Obsah M: $8 \cdot 8 - (12 + 6) = 46 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Obsah O: $7 \cdot 8 - (4 \cdot 1 + 10) = 42 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Z5 - II - 4

Pionierski vedúci kúpili pre deti čokoládové tyčinky. Jedny stáli 2,40 Kčs, druhé 3,20 Kčs. Spolu zaplatili 64 Kčs. Koľko ktorých tyčieniek kúpili? (Uveďte všetky možnosti.)

(5 bodov)

Riešenie

Vedúci kúpili	x kusov po 2,40 Kčs
	y kusov po 3,20 Kčs
Spolu zaplatili	$2,40 \cdot x + 3,20 \cdot y = 64$ Kčs

Urobme si tabuľku možností pre voľbu x . V tabuľke n znamená, že také celé číslo y neexistuje (y je počet kusov - musí byť celé). Ďalej vidíme, že x je násobkom 4.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	16	...	20	...	24
y	20	n	n	n	17	n	n	n	14	n	n	n	11	...	8	...	5	...	2

Úloha má 7 riešení.

ÚLOHY I. KOLA

Z4 - I - 1

Kráľ sa rozhodol rozdeliť stádo tiav (velbloudù) medzi svojich piatich synov. Tiav bolo viac ako 50 a menej ako 60.

Najmladšiemu dal najmenej tiav, staršiemu o 3 ľavy viac, ešte staršiemu o 3 viac a tak ďalej.

Kolko tiav dostal každý syn?

Riešenie. 1. *spôsob.* Urobme si tabuľku, koľko tiav dostal každý zo synov, ak prvý dostal 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... tiav.

1. syn	1	2	3	4	5	6	...
2. syn	4	5	6	7	8	9	...
3. syn	7	8	9	10	11	12	...
4. syn	10	11	12	13	14	15	...
5. syn	13	14	15	16	17	18	...
spolu	35	40	45	50	55	60	...

2. *spôsob.* Ak prvý syn dostane jednu ľavu, druhý dostane 4, tretí 7, štvrtý 10, piaty 15 - spolu dostanú 35 tiav. Ak prvý

dostane o 1 ľavu viac, každý dostane o jednu ľavu viac, spolu teda všetci piati o 5 tiav viac. Teda spolu môžu dostať 35 tiav, alebo 40, alebo 45, ... Sú to všetko násobky piatich. Medzi 50 a 60 je len jedna možnosť a to 55. Od 35 po 55 musíme pridať 4 pätky.

Teda prvý syn dostal $1 + 4 = 5$ tiav, druhý 8, tretí 11, štvrtý 14 a piaty 17 tiav.

Poznámka. Riešenie je neúplné, ak je uvedený len výsledok. »Synovia dostali 5, 8, 11, 14, 17 tiav. Je potrebné ukázať, že iné riešenie neexistuje. To zaručuje tabuľka uvedená pri 1. spôsobe riešenia, alebo úvaha o násobkoch medzi číslami 50 a 60 pri 2. spôsobe riešenia.

Z4 - I - 2

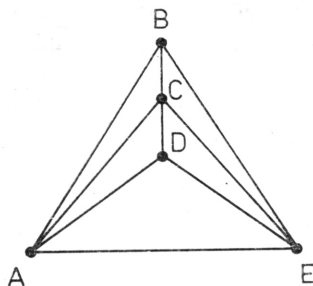
Nakresli 5 rôznych bodov A, B, C, D, E neležiacich na jednej priamke tak, aby boli vrcholmi

- a) čo najväčšieho počtu neprekrývajúcich sa trojuholníkov,
- b) čo najmenšieho počtu neprekrývajúcich sa trojuholníkov.

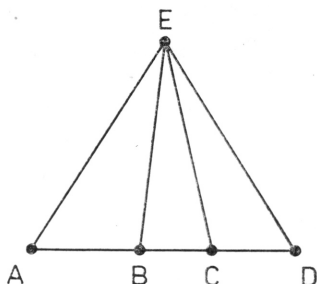
(Dva trojuholníky sa neprekrývajú, ak ich prienikom je buď prázdna množina, alebo bod, alebo úsečka.)

Poznámka: V letáku bol text: ...trojuholníky, ktorých strany sa nepretínajú. Takými sú v obrázku 65a aj trojuholníky ADE a ACE . To je však už iná úloha.

Riešenie. Najväčší počet je 5 takých trojuholníkov - pozri obr. 65a, najmenší počet sú 3 také trojuholníky - pozri obr. 65b.



a)



b)

Obr. 65a, b

Z4 - I - 3

Namiesto hviezdíček vpíš čísllice tak, aby bol súčet naznačených štvorciferných čísel správny.

6	*	5	1
5	*	*	7
*	5	7	*
*	2	4	8 0

Riešenie

6	<i>c</i>	5	1
5	<i>d</i>	<i>b</i>	7
<i>e</i>	5	7	<i>a</i>
<i>f</i>	2	4	8 0

Nahradíme si hviezdíčky písmenami *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* ako na obrázku. Potom na mieste *a* môže byť len číslica 2 - ostala nám 1 (desiatka), na mieste *b* môže byť len číslica 5 (pozor

na prechod cez desiatku) - ostala nám 1 (stovka). Súčet $c + d$ s číslom 5 a jednotkou, ktorá nám ostala pri prechode cez desiatku, nám musí dať číslo, ktoré má na mieste jednotiek číslicu 4. To sú čísla 4, 14, 24, ... Číslo 4 to nemôže byť (prečo?). Pri čísle 14 by číslice c , d museli dať súčet 8, pri čísle 24 by tento súčet musel byť 18. Číslo 34 a väčšie uvažovať nemusíme (prečo?).

To si zapamätáme a pozrieme sa, aké číslice možno dosadzovať za ďalšie písmená. Ak by na mieste stoviek vyšiel súčet 14 - ostala by 1 (tisícka). Potom na miesto e môžeme doplniť len cifru 0, ale nula by nemala byť na začiatku čísla. Teda na mieste stoviek musí vyjsť súčet 24.

To môže nastať len vtedy, keď c aj d sú deviatky. Pri súčte nám na mieste stoviek pri tomto nahradení ostanú 2 (tisíc-ky). Teda na mieste e musí byť číslica 9 a potom na mieste f číslica 2.

Výsledok je súčet:

6	9	5	1	
5	9	5	7	
9	5	7	2	
2	2	4	8	0

Z4 - I - 4

Do prázdnych okienok (obr. 66) vpiš čísla 1, 2, 3, 4, 5 tak, aby sa v každom riadku, v každom stĺpci a v obidvoch uhlopriečkach vyskytovalo každé číslo práve raz.

3	5	2		
		1		
				3

Obr. 66

Riešenie. Na mieste koliesok (obr. 67) môžu byť len 1 a 4, vzhľadom na to, že v prvom riadku sú už čísla 2, 3, 5. Ale v uhlopriečke je 1, teda prvý riadok musí byť ako na obrázku 68.

3	5	2	○	○
		1		
				3

Obr. 67

3	5	2	1	4
		1		
				3
				□

Obr. 68

Na mieste štvorčka (obr. 68) môže byť len 2, alebo 5. Ak uvažujeme 5, potom uhlopriečku môžeme doplniť len dvomi spôsobmi (obr. 69a, b).

V oboch prípadoch musí byť 5 v druhom riadku a štvrtom stĺpci. Potom ale ďalšie doplnenie uhlopriečky nie je možné, pretože 3 nevieme ďalej umiestniť. Teda na mieste štvorčka musí byť 2

3	5	2	1	4
	2		⑤	
		1		
	3		4	
2				5

a)

3	5	2	1	4
	4		⑤	
		1		
	2		2	
3				5

b)

Obr. 69a, b

Podobným spôsobom doplníme ostatné okienka. Výsledok je na obrázku 70.

3	5	2	1	4
2	4	5	3	1
4	3	1	2	5
1	2	4	5	3
5	1	3	4	2

Obr. 70

Z4 - I - 5

Janka a Danka bývajú v dome, ktorý je označený dvojčíferným číslom. Janka si zapísala zoznam všetkých dvojčíferných čísel, ktoré sú násobkami čísla 3 a sú menšie ako číslo domu. Danka si tiež zapísala zoznam, ale všetkých dvojčíferných čísel, ktoré majú v zápise číslicu 3 a sú menšie ako číslo domu.

Keď porovnali obidva zoznamy, zistili, že obsahujú rovnaký počet čísel.

Potom urobili to isté aj s číslom domu kamarátky Zuzky, ktorá býva v susednom dome na tej istej ulici. Aké bolo ich prekvapenie, keď zistili, že obidva zoznamy obsahujú znovu rovnaký počet čísel.

Viete určiť čísla domov, v ktorých bývajú tieto dievčatá?

Riešenie. Urobme si tabuľku dvojčíferných násobkov čísla 3 a dvojčíferných čísel, v ktorých sa vyskytuje číslica 3:

12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48
13	23	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	43

51	54	57	60	63	66	69	72	75	78	81	84	87
53	63	73	83	93								

90 93 96 99

Z tabuľky vidíme, že čísla, ktoré môžu označovať domy Janky a Danky a ich kamarátky Zuzky, môžu byť len 36, 37, 49, 50, 51, 54. Ďalej záleží na tom, či dievčatá bývajú v meste alebo na dedine. V meste sú totiž domy číslované v poradí tak, že na jednej strane ulice sú párne (sudá) a na náprotivnej strane sú nepárne (lichá) čísla. Ak je to v meste, sú susedné čísla 49, 51. Na dedine to môžu byť aj 36, 37, alebo 49, 50, alebo 50, 51.

Z4 - I - 6

Marienka išla s rodičmi autom na návštevu ku starým rodičom. Všimla si, že na tachometri je symetrické číslo

23932. Takéto číslo vyzerá spredu ako zozadu. Dalšie symetrické číslo sa na tachometri objavilo až po dvoch hodinách jazdy.

Koľko kilometrov prešli za tie dve hodiny?

Riešenie. Najbližšie symetrické číslo dostaneme zmenou strednej číslice (na mieste stoviek) o jednotku. Zmenou číslice na mieste jednotiek a desiatok sa pri symetrickom čísle mení aj číslica na mieste desaťtisícok a tisícok a tak by sme dostali už väčšie čísla.

Ale 9 sa takýmto spôsobom zmení na 0, teda musí nastať zmena o jednotku i na ďalšom mieste. Zmeníme ho na mieste desiatok, tým sa symetrické číslo zmení i na mieste tisícok. Ak by sme menili na mieste jednotiek, znamenalo by to zmenu i na mieste desaťtisícok a tým oveľa väčšie číslo.

Teda najbližšie symetrické číslo k číslu 23932 je číslo 24042;

$$24042 - 23932 = 110.$$

Za dve hodiny prešli 110 km.

ÚLOHY II. KOLA

Z4 - II - 1

Na miesta hviezdíčiek zapíšete cifry tak, aby naznačený rozdiel bol správny.

$$\begin{array}{r}
 6 \ 7 \ * \ * \ 3 \\
 - \ 2 \ 7 \ * \ 5 \ * \\
 \hline
 3 \ * \ 1 \ 2 \ 7
 \end{array}$$

(6 bodov)

Riešenie. 1. spôsob.

$$\begin{array}{r}
 6 \ 7 \ c \ b \ 3 \\
 - \ 2 \ 7 \ d \ 5 \ a \\
 \hline
 3 \ e \ 1 \ 2 \ 7
 \end{array}$$

Označme si hviezdčky ako na obrázku. Začíname odčítat od jednotiek. Číslica a musí byť 6, pri odčítaní sme prechádzali cez desiatku, ostala nám 1 (desiatka). Pričítame ju k 5, teda b musí byť 8, bez prechodu cez desiatku.

Na mieste stoviek môže byť c rovné 1 a d rovné 0. Ale potom by $7 - 7 = 0$ a $6 - 2 = 4$. Ale na mieste desaťtisícok vo výsledku je 3 a nie 4. Teda na mieste tisícok musí byť pri odčítaní prechod cez desiatku.

To ale znamená, že i na mieste stoviek je prechod cez desiatku, teda nemôže byť $1 - 0$, ale musí byť $0 - 9$.

Takže výsledný rozdiel je:

$$\begin{array}{r}
 6 \ 7 \ 0 \ 8 \ 3 \\
 - \ 2 \ 7 \ 9 \ 5 \ 6 \\
 \hline
 3 \ 9 \ 1 \ 2 \ 7
 \end{array}$$

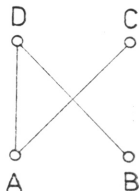
2. spôsob. Úlohu môžeme riešiť aj tak, že si rozdiel prevedieme na súčet:

2	7	*	5	*
3	*	1	2	7
6	7	*	*	3

Ďalšia úvaha je podobná ako v úlohe Z4 - I - 3.

Z4 - II - 2

Medzi štyrmi mestami A , B , C , D treba zriadiť tri letecké linky. Chceme, aby sa z každého mesta dalo lietadlom dostať do všetkých ostatných miest (priamo, alebo s prestupovaním). Jedno z riešení je na obrázku 71.



Obr. 71

Nájdite ostatné možnosti.

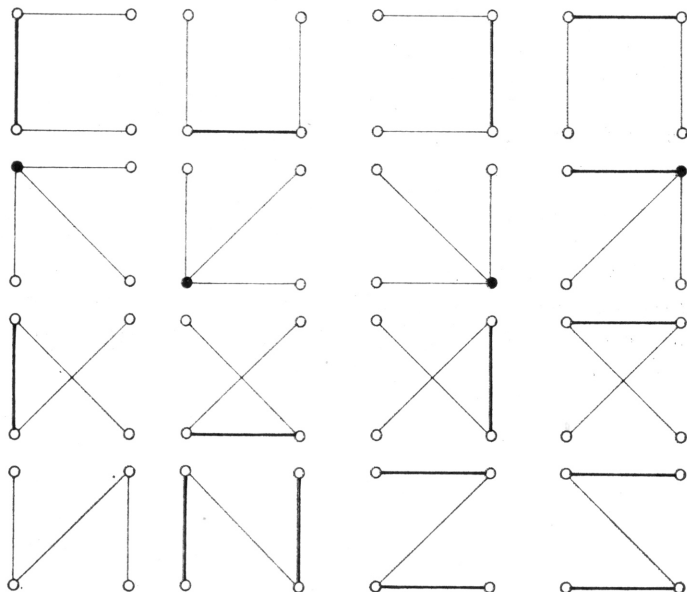
(6 bodov)

Riešenie. Sú štyri typy liniek, z každého sú štyri možnosti. Spolu 16 možností (obr. 72, str. 138).

Z4 - II - 3

Z číslíc 7, 0, 5, 8 treba vytvoriť také párne trojciferné čísla, ktoré majú v zápise navzájom rôzne cifry. Zistite súčet všetkých takýchto čísel.

(7 bodov)



Obr. 72

Riešenie. 1. spôsob vyberania. Párne (sudé) číslo musí mať na mieste jednotiek párnou (sudou) číslicu, v našom prípade 0, alebo 8.

0:	570	8:	578
	750		758
	850		508
	580		708
	870		
	780		

Číslica 0 na začiatku nemôže byť; nebolo by to trojciferné číslo.

2. *spôsob vyberania* (podľa veľkosti). 508, 570, 578, 580, 708, 750, 758, 780, 850, 870.

Spolu 10 čísel. Ich súčet je 6 952.

ÚLOHY ZE SOUTĚŽÍ

Dejte hlavy dohromady

Soutěž »Dejte hlavy dohromady« je určena pro 4členná družstva žáků ze 6. tříd základních škol s rozšířeným vyučováním matematiky a přírodovědných předmětů. Pro žáky z těchto škol je vhodným doplňkem k MO, protože v ní soutěží mezi sebou žáci s hlubším matematickým vzděláním jako sobě rovní partneři. Předložené úlohy řeší vždy celá družstva v časovém limitu 2 vyučovacích hodin.

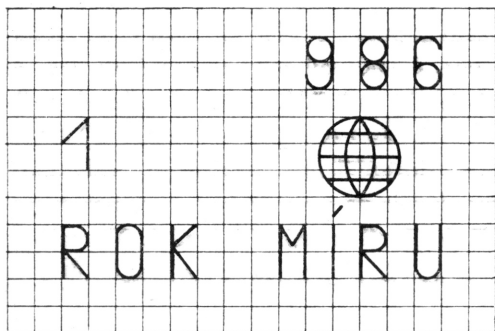
Znění úloh z této soutěže nabízíme i ostatním žákům z nespécializovaných tříd ze 6. i vyšších ročníků.

V roce 1986/87 byly organizovány dvě soutěže Dejte hlavy dohromady, a to v Praze a Opavě. V Praze pořádala soutěž již druhým rokem pražská pobočka JČSMF (úlohy připravili RNDr. V. Dřízal a RNDr. M. Koman, CSc.), v Opavě Klub mladých matematiků (úlohy připravila RNDr. L. Hozová).

Pražská soutěž

1. Rozstříhněte obdélník (obr. 73) s rozházeným nápisem na dvě části tak, aby z nich bylo možno složit plakát k Mezi-

národnímu roku míru (symbol zeměkoule má být vpravo od letopočtu 1986).



Obr. 73

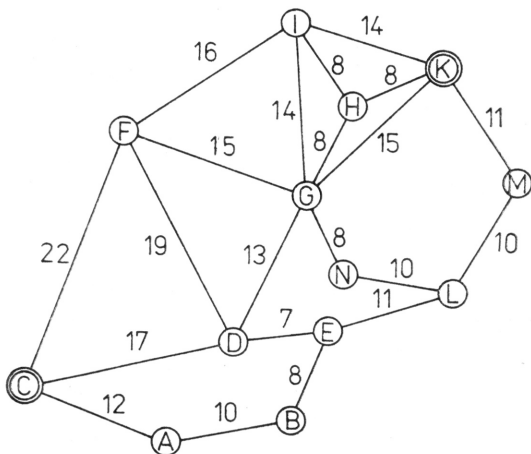
2. Dva řidiči mají v kanystru 16 litrů benzínu. Poradte jim, jak jej rozdělit přesně na polovinu pomocí dvou nádob o objemu 11 litrů a 6 litrů.

3. Sestrojte na samostatné listy papíru sítě všech možných různých čtyřstěnů, které mají nejvýše dvě hrany (tj. dvě nebo méně) dlouhé 13 cm a zbylé hrany dlouhé 7 cm. Sítě vystříhnete a zkontrolujete, zda z nich lze jehlany skutečně slepit.

4. Ze 22 pětimetrových latí se má vyrobit co největší počet obdélníkových rámečků, jejichž strany tvoří látky dlouhé 40 cm a 70 cm. Navrhněte způsob rozřezání latí. Kolik rámečků je možno vyrobit?

5. Daný čtverec rozdělte na dva shodné a) čtyřúhelníky, b) pětiúhelníky, c) šestiúhelníky, d) sedmiúhelníky, e) osmiúhelníky.

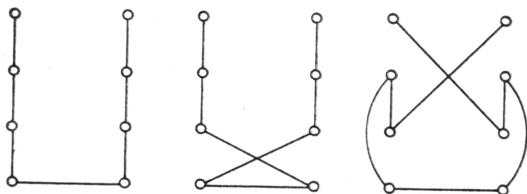
6. Obchodník putuje s oslem z města *C* do města *K*. Čísla na plánu (obr. 74) udávají dobu cesty v hodinách. Ale pozor! Osel je ochoten jít na každém rozcestí pouze do nejbližší osady (např. z *E* do *D* a z osady *G* do *N* nebo *H*). Chce-li přesto obchodník jít do vzdálenější osady, musí osla táhnout. Tím se cesta prodlužuje na dvojnásobek doby, než udává ukazatel (např. z *E* do *L* táhne osla 22 hodin). Vyznačte na plánu cestu z *C* do *K* tak, aby trvala co nejkratší dobu.



Obr. 74

(Úloha z knihy: M. Hejný - L. Niepel: Šestnáct matematických příběhů. Mladé letá, Bratislava 1983.)

7. Šněrovací bota má 4 páry dírek. Tkaničky šněrujeme od spodních dírek tak, aby vznikl vzorek souměrný podle svislé osy. Do každé dírky navlékáme tkaničku jen jednou a přitom nerozlišujeme, zda provlékáme tkaničku zespoda, nebo shora. Šněrování končíme v horních dírkách. Příklady jsou na obrázku 75. Najděte všechny možnosti takového šněrování. Výčet možností sestavte co nejpřehledněji.



Obr. 75

8. Do počítače vložíme přirozené číslo. Je-li toto číslo sudé, počítač ho dělí dvěma, je-li liché vynásobí ho číslem 3 a pak ještě přičte 1. Je-li výsledek »1«, počítač se zastaví. Když výsledek není »1«, počítač ho zpracuje podle stejného programu jako vložené číslo. Která čísla jsme mohli vložit do počítače, když se počítač zastavil po devíti krocích?

Opavská soutěž

1. Pět chlapců se vážilo na osobní váze tak, že se na ni vždy postavili dva najednou. Váha postupně ukázala následující údaje: 129, 125, 124, 123, 122, 121, 120, 118, 116, 114 (v kilogramech). Kolik vážili jednotliví chlapci?

2. Název města se píše pěti písmeny. Když každé písmeno nahradíme pořadovým číslem abecedy ($A = 1, B = 2, C = 3, D = 4, E = 5, F = 6, G = 7, H = 8, CH = 9 \dots$), dostaneme čísla, která mají tyto vlastnosti:

Součet všech pěti čísel se rovná $\frac{1}{4}$ z 256.

Třetí číslo je větší než všechna ostatní, a to o 10 než druhé, o 5 než první, o 2 než čtvrté a o 19 než páté.

Jaký je název města?

3. Vpište do tabulky 3×4 čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 tak, aby byly splněny všechny následující podmínky:

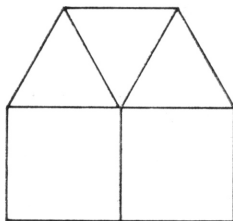
- 4 sousedí jen se svými násobky,
- 1 sousedí se všemi lichými prvočísly,
- 9 není v rohu a její sousedé dávají součet 28,
- součet v některém sloupci je méně než 13, ale v žádném sloupci nepřesahuje 27,
- všichni sousedé šestky jsou menší než ona.

(Dvě políčka jsou sousední, mají-li společnou stranu.)

4. Rovinný útvar budeme nazývat **PIKOMOZAIKOU**, když má tyto vlastnosti:

1. je složen jen ze čtverečků a rovnostranných trojúhelníků, přičemž všechny čtverečky i trojúhelníky jsou stejně velké a strana čtverce je stejně dlouhá jako strana trojúhelníku,
2. sousední útvary vždy sousedí celou stranou, ne jen její částí,
3. čtverec je aspoň jeden, ale nejvíce čtyři (trojúhelníků může být libovolné množství anebo žádný),
4. útvar je konvexní.

Nakresli všechny různé PIKOMOZAIKY.
Příklad PIKOMOZAIKY je na obrázku 76.



Obr. 76

(Dvě PIKOMOZAIKY považujeme za stejné, když po vy-
střihnutí z papíru je lze přemístit tak, že se přesně kryjí.)

RNDr. Milan Koman, CSc. - RNDr. Vladimír Repáš

**TŘICÁTÝ ŠESTÝ ROČNÍK
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
NA ZÁKLADNÍCH ŠKOLÁCH**

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství Praha
roku 1989 jako svou publikaci č. 5-42-11/36

Edice Pomocné knihy pro žáky

Odpovědná redaktorka RNDr. Ilona Fořtová a Anežka Bittnerová

Výtvarný redaktor Václav Hanuš

Technická redaktorka Irena Braná

Z nové sazby písmem Plantin vytiskly Moravské tiskařské závody, n. p.,
Olomouc

Formát papíru 70 cm × 100 cm

Počet stran 148

AA 4,60 (3,81 AA textu, 0,79 AA grafiky) - VA 5,02

Náklad 6 600 výtisků

Tematická skupina a podskupina 03/2

1. vydání

Cena brožovaného výtisku Kčs 6,50

505/21,825

14-672-89

Kčs 6,50

ISBN 80-04-23726-6

**matematická
olympiáda**



SPN

5-42-11/36

03/2

14-672-89

Kčs 6,50

ISBN 80-04-23726-6