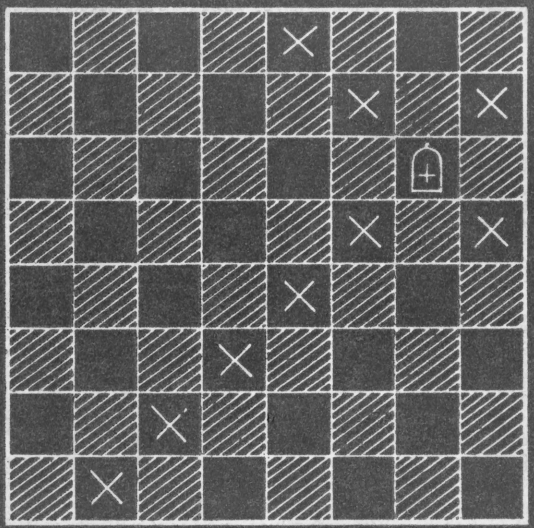
37. ročník matematické olympiády na středních školách

37. ročník matematické olympiády na středních školách



SPN

TŘICÁTÝ SEDMÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1987/88

29. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ
PRAHA

Za přispění spolupracovníků zpracovali
doc. RNDr. Leo Boček, CSc., RNDr. Luboš Brim, CSc.,
RNDr. Tomáš Hecht, CSc., RNDr. Karel Horák, CSc.

Lektorovali RNDr. Vladimír Burjan, RNDr. Libor Jelínek,
RNDr. Václav Šůla, RNDr. Pavel Töpfer

ISBN 80-04-24245-6

Obsah

O průběhu 37. ročníku matematické olympiády

Matematická olympiáda je soutěž v matematice a v programování pro žáky základních a středních škol. Pořádají ji ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR, ministerstvo školství, mládeže a tělesné výchovy SR, Jednota československých matematiků a fyziků a Jednota slovenských matematiků a fyziků. Soutěž řídí ústřední výbor matematické olympiády (ÚV MO), jehož předsedou byl ve školním roce 1987—88 *RNDr. František Zítek, CSc.*, z Matematického ústavu ČSAV v Praze, místopředsedy *prof. RNDr. Miroslav Fiedler, člen korespondent ČSAV* z téhož ústavu a *doc. RNDr. Branislav Rovan, CSc.*, z matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Komenského v Bratislavě. Výše uvedená ministerstva zastupovali v ÚV MO *RNDr. Václav Šůla* a *RNDr. Júlia Lukátšová*, funkci tajemníků ÚV MO zastávali *doc. RNDr. Leo Boček, CSc.*, z matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze a *RNDr. Karel Horák, CSc.*, z Matematického ústavu ČSAV v Praze.

Tato brožurka je věnována pouze matematické olympiádě na středních školách, o matematické olympiádě na základních školách vychází jiná publikace. Žáci středních škol soutěží v MO ve 4 kategoriích. Kategorie P je určena žákům všech tříd středních škol a je zaměřena na úlohy z programování. Ostatní kategorie jsou určeny žákům, kteří soutěží v mate-

matice mimo programování, přičemž kategorie A je pro žáky 3. a 4. ročníků, kategorie B pro žáky 2. ročníků a kategorie C pro žáky prvních ročníků. V I. kole řeší soutěžící všech kategorií úlohy doma nebo v matematických kroužcích, mohou přitom použít různou literaturu a konzultovat například s učitelem matematiky. V kategoriích A, B, C má I. kolo ještě část klauzurní, při které řeší soutěžící ve škole 3 úlohy formou písemné práce. Podobně jako klauzurní část probíhá ve všech kategoriích II. kolo, krajské, jež obsahuje v každé kategorii tři nebo čtyři úlohy. V kategoriích A a P se koná ještě III. kolo, celostátní. V něm řeší soutěžící v kategorii A 6 úloh, v kategorii P 4 úlohy ve dvou půldnech. Celostátní kola 37. ročníku MO se konala v Bratislavě, ve dnech 24.—27. dubna 1988 celostátní kolo kategorie A a hned navazovalo ve dnech 27.—30. dubna celostátní kolo kategorie P, neboť hodně žáků se probojovalo do nejvyššího kola v obou kategoriích. Na slavnostním zahájení přednesl po krátkém kulturním programu úvodní slovo *prof. RNDr. Miroslav Fiedler, člen korespondent ČSAV* a místopředseda ústředního výboru MO. Vyzval soutěžící, aby se zapojili do boje proti průměrnosti ve studiu a aby v budoucnosti využili své matematické znalosti všude, kde budou pracovat, i v nematematických oborech. Ředitel odboru gymnázií a středních odborných škol ministerstva školství, mládeže a tělesné výchovy SR *PaedDr. Ondrej Bartko* konstatoval potěšující jev - Bratislava se stává líhní mladých matematických talentů, mnozí z dřívějších slovenských úspěšných účastníků MO jsou dnes již významnými vědeckými a pedagogickými pracovníky, například *docenti I. Korec, T. Marcisová, B. Sivák.*

Všechny krajské a okresní výbory MO věnují ve spolu-

práci s odbory školství příslušných národních výborů a s pobočkami JČSMF a JSMF talentovaným žákům v matematice velkou péči a pořádají pro ně různá matematická soustředění, korespondenční semináře, přednášky apod., pro učitele instruktáže k úlohám MO i k dalším matematickým tématům. Ve všech krajích se konala soustředění úspěšných řešitelů úloh MO, někde společné soustředění řešitelů matematické a fyzikální olympiády. Například v Jihočeském kraji uspořádali i seminář pro řešitele úloh MO kategorie P. Pokud se v některém kraji nepořádal korespondenční seminář, byla žákům umožněna účast v korespondenčním semináři v jiném kraji, například žáci Středočeského kraje se zapojili do pražského korespondenčního semináře, který organizoval KV MO Praha na matematicko-fyzikální fakultě Karlovy univerzity v Praze. V Severomoravském kraji se již vžily sobotní besedy MO, jež se konají pro řešitele MO kategorií A, B, C na Palackého univerzitě v Olomouci. V Slovenské republice se pořádají akce pro nadané žáky ve spolupráci s domy pionýrů a mládeže, například v Košicích se schází jednou týdně v krajském domě pionýrů a mládeže Klub mladých matematiků.

ÚV MO pořádal jako v předcházejících letech celostátní korespondenční seminář, který byl též přípravou pro československou účast na mezinárodní matematické olympiádě. Podrobněji se o korespondenčním semináři ÚV MO dočtete dále, rovněž mezinárodní matematické olympiádě je v této brožurce věnována samostatná část. Po obsahové stránce zajišťoval ÚV MO také dvě soustředění vybraných žáků, z nichž pak byli vybráni českoslovenští účastníci MMO. První se konalo u Bratislavy, druhé v Pardubicích. Spolu s ÚV fy-

zikální olympiády zajišťoval ÚV MO celostátní soustředění MO a FO, které se konalo v Jevíčku.

Velkou pomocí řešitelům úloh MO je edice Škola mladých matematiků, kterou vydává ÚV MO v nakladatelství Mladá fronta. V edici vyšlo již 59 svazků, posledním vydaným svazkem je brožurka *Morávek, Vlach: Oddělitelnost množin*, která vyšla již v druhém vydání. Ve Státním pedagogickém nakladatelství vydává ÚV MO sbírky vybraných úloh MO a v každém roce dvě brožurky o uplynulém ročníku MO, jedna je věnována MO na středních školách, druhá na základních školách. Jednu z nich, popisující 37. ročník MO na středních školách, máte právě v ruce. Obsahuje všechny úlohy včetně jejich řešení. Úlohy jsou označeny kategorií, kolem a pořadovým číslem úlohy, například B-I-5, P-III-2. Úlohy školní - klauzurní - části I. kola kategorií A, B, C jsou označeny písmenem S místo I za označením kategorie, např. A-S-2. Dále najdete v brožurce úlohy celostátního korespondenčního semináře ÚV MO (bez řešení) a úlohy mezinárodní matematické olympiády.

Počty zúčastněných žáků v I. kole 37. ročníku MO

Kraj	Kategorie								Celkem	
	A		B		C		P			
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	113	74	118	68	153	122	39	29	423	293
Středočeský	189	50	178	55	271	163	17	9	655	277
Jihočeský	96	60	154	56	201	127	17	11	468	254
Západočeský	126	44	124	40	200	101	12	7	462	192
Severočeský	189	64	206	83	374	171	14	9	783	327
Východočeský	77	58	118	87	222	147	6	4	423	296
Jihomoravský	300	133	321	133	433	227	33	20	1087	513
Severomoravský	171	69	318	106	507	253	23	16	1019	444
Bratislava	164	151	127	49	203	163	47	30	541	393
Západoslovenský	168	121	171	157	298	261	32	16	669	555
Středoslovenský	253	91	325	116	361	188	29	13	968	408
Východoslovenský	313	90	504	192	1211	411	57	38	2085	731
ČSR	1261	552	1537	628	2361	1311	161	105	5320	2596
SSR	898	453	1127	514	2073	1023	165	97	4263	2087
ČSSR	2159	1005	2664	1142	4434	2334	326	202	9583	4683

S ... počet všech soutěžících U ... počet úspěšných řešitelů

Účast středních škol v 37. ročníku MO

Kraj	Gymnázia						Ostatní střední školy				
	Celkem v kraji	zapojeno v kategorii				Aspoň v jedné kategorii	zapojeno v kategorii				Aspoň v jedné kategorii
		A	B	C	P		A	B	C	P	
Praha	21	13	16	17	8	20	1	0	0	2	3
Středočeský	23	20	23	23	7	23	1	3	10	0	11
Jihočeský	18	12	16	15	9	16	4	6	9	1	10
Západočeský	15	12	15	14	5	15	0	1	8	0	8
Severočeský	22	18	20	21	6	21	6	8	15	0	15
Východočeský	35	12	21	24	4	32	0	1	1	1	1
Jihomoravský	38	25	35	36	9	38	3	8	14	2	14
Severomoravský	39	17	28	33	8	35	1	7	11	0	12
Bratislava	11	9	8	10	4	10	0	0	0	1	1
Západoslovenský	38	24	28	37	8	38	4	13	26	1	30
Středoslovenský	36	39	26	33	8	36	11	18	23	1	37
Východoslovenský	38	26	34	37	11	38	3	13	42	2	43
ČSR	211	129	174	183	56	200	16	34	68	6	74
SSR	123	98	96	117	31	122	18	44	91	5	111
ČSSR	334	227	270	300	87	322	34	78	159	11	185

Počty zúčastněných žáků v II. kole 37. ročníku MO

Kraj	Kategorie								Celkem	
	A		B		C		P			
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	68	22	64	42	107	52	28	19	267	135
Středočeský	49	7	55	16	152	28	7	2	263	53
Jihočeský	54	9	52	20	119	35	10	6	235	70
Západočeský	44	10	40	20	87	20	6	4	177	54
Severočeský	61	8	80	54	163	26	9	2	313	90
Východočeský	56	18	83	26	144	60	4	1	287	105
Jihomoravský	129	24	117	30	201	45	19	8	466	107
Severomoravský	66	8	101	37	251	90	15	10	433	145
Bratislava	150	59	46	42	152	98	30	18	378	217
Západoslovenský	114	10	143	37	245	58	15	8	517	113
Středoslovenský	74	15	76	23	132	23	15	9	297	70
Východoslovenský	86	20	121	39	282	36	28	4	517	99
ČSR	527	106	592	245	1224	356	98	52	2441	759
SSR	424	104	386	141	811	215	88	39	1709	499
ČSSR	951	210	978	386	2035	571	186	91	4150	1258

S ... počet všech soutěžících U ... počet úspěšných řešitelů

Počty zúčastněných žáků v III. kole 37. ročníku MO

Kraj	Kategorie A			Kategorie P		
	S	U	V	S	U	V
Praha	9	8	6	12	7	5
Středočeský	2	1	—	2	2	—
Jihočeský	1	—	—	3	2	1
Západočeský	6	2	—	2	1	1
Severočeský	2	1	—	1	—	—
Východočeský	5	2	—	1	—	—
Jihomoravský	10	7	3	5	3	2
Severomoravský	5	4	2	5	1	—
Bratislava	29	12	9	13	6	2
Západoslovenský	3	1	—	3	2	1
Středoslovenský	5	2	—	3	3	1
Východoslovenský	3	3	1	1	—	—
ČSR	40	25	11	31	16	9
SSR	40	18	10	20	11	4
ČSSR	80	43	21	51	27	13

S ... počet všech soutěžících
U ... počet úspěšných řešitelů
V ... počet úspěšných, kteří byli prohlášeni za vítěze

ÚSPĚŠNÍ ŘEŠITELÉ CELOSTÁTNÍHO KOLA MO KAT. A

Uvádíme pořadí žáka, jeho jméno a příjmení, ročník, školu a počet dosažených bodů ze 42 možných. U žáků z tříd se zaměřením studijního oboru 01 Matematika, resp. 02 Matematika a fyzika, je za označením ročníku uvedeno M, resp. MF. Všichni byli žáky gymnázií - G.

Vítězové

1.	*Petr Hliněný*, 2 M, G M. Koperníka, Bílovec	34
2.—3.	*Petr Čížek*, 3 M, G W. Piecka, Praha	29
	Pavol Gvozdjak, 4 M, G A. Markuša, Bratislava	29
4.—5.	*David Pancza*, 4 M, G A. Markuša, Bratislava	28
	Ondřej Pokluda, 4 M, Brno, tř. kpt. Jaroše	28
6.	*Stanislav Krajči*, 4 M, Košice, Šmeralova	26
7.—12.	*Štěpán Kasal*, 1 M, G W. Piecka, Praha	25
	Martin Kraus, 2 M, G W. Piecka, Praha	25
	Ilja Martišovitš, 3 MF, G J. Hronca, Bratislava	25
	Pavol Ševera, 2 M, G A. Markuša, Bratislava	25
	Marek Velešík, 3, Brno, Koněvova	25
	Martin Žufan, 3 M, Brno, tř. kpt. Jaroše	25
13.—14.	*František Kuminiak*, 3 M, G A. Markuša, Bratislava,	24
	Ondrej Šuch, 2 M, G A. Markuša, Bratislava	24

15.—17.	*Petr Brož*, 3 M, G W. Piecka, Praha	22
	Martin Kučera, 3 M, G M. Koperníka, Bílovec	22
	S. Januschke, 3 MF, G J. Hronca, Bratislava	22
18.—21.	*Tibor Bartoš*, 4 M, G A. Markuša, Bratislava	21
	Andrej Doboš, 3 M, G A. Markuša, Bratislava	21
	Ondřej Kalenda, 2 M, G W. Piecka, Praha	21
	Arnošt Kobylka, 3 M, G W. Piecka, Praha	21

Další úspěšní řešitelé

22.	*Daniel Elleder*, 3 M, G W. Piecka, Praha	19
23.—24.	*Tomáš Brodský*, 3 M, Brno, tř. kpt. Jaroše	18
	Radomír Měch, 4 M, G M. Koperníka, Bílovec	18
25.—26.	*Dalibor Procházka*, 4 MF, Karlovy Vary	17
	Zbyněk Šír, 3 M, G J. K. Tyla, Hr. Králové	17
27.—28.	*Vladimír Ďuračka*, 2 MF, G J. Hronca, Bratislava	16
	Jiří Zatloukal, 4 M, G M. Koperníka, Bílovec	16
29.—31.	*Peter Eliáš*, 4, Prešov, Konštantínova	15
	Jaroslav Masár, 4 M, G A. Markuša, Bratislava	15
	Jan Vomlel, 2 M, G J. K. Tyla, Hr. Králové	15
32.—36.	*Tomáš Dvořák*, 4 M, Brno, tř. kpt. Jaroše	13
	Jiří Fürst, 3 M, G J. Fučíka, Plzeň	13
	Dalibor Jakuš, 4 M, Žilina, V. Okružná	13
	Vladimír Komár, 2 M, Košice, Šmeralova	13
	Milan Sekanina, 4 M, Brno, tř. kpt. Jaroše	13
37.—43.	*Radovan Čížek*, 4 MF, Mladá Boleslav	12
	Karol Hrivnák, 4 M, G A. Markuša, Bratislava	12
	David Krásenský, 2 M, Brno, tř. kpt. Jaroše	12
	Jozef Skokan, 2 M, Žilina, V. Okružná	12
	Marta Sochorová, 4 M, G W. Piecka, Praha	12

Pavel Truhlář, 4 M, Liberec, Partyzánská 12
Gabriel Varga, 3, Šamorín, mad. G 12

Žáci z tříd jiného studijního zaměření než 01 Matematika se umístili v tomto pořadí:

1.—2. *Ilja Martišovitš*, 3, G J. Hronca, Bratislava
Marek Velešík, 3, Brno, Koněvova
3. *Stanislav Januschke*, 3, G J. Hronca, Bratislava
4. *Dalibor Procházka*, 4, Karlovy Vary
5. *Vladimír Ďuračka*, 2, G J. Hronca, Bratislava
6. *Peter Eliáš*, 4, Prešov, Konštantínova
7.—8. *Radovan Čížek*, 4, Mladá Boleslav
Gabriel Varga, 3, Šamorín, mad. G

ÚSPĚŠNÍ ŘEŠITELÉ CELOSTÁTNÍHO KOLA MO KAT. P

Uvádíme pořadí žáka, jeho jméno a příjmení, ročník a školu a počet dosažených bodů ze 40 možných. Všichni byli žáky gymnázií (G).

Vítězové

1.	*Petr Brož*, 3, G W. Piecka, Praha	40
2.—3.	*Arnošt Kobylka*, 3, G W. Piecka, Praha	38
	Marek Velešík, 3, Brno, Koněvova	38
4.—5.	*Václav Bohdanecký*, 3, G W. Piecka, Praha	37
	Petr Čížek, 3, G W. Piecka, Praha	37
6.	*Juraj Šimko*, 4, Nitra, Párovská	36
7.	*Ilja Martišovitš*, 3, G J. Hronca, Bratislava	34
8.	*Jiří Fürst*, 3, G J. Fučíka, Plzeň	31
9.	*Jozef Saniga*, 4, Žilina, V. Okružná	29
10.	*Štěpán Kasal*, 1, G W. Piecka, Praha	28
11.	*Vladimír Chvátil*, 2, Brno, Koněvova	27
12.—13.	*Martin Bujdák*, 4, G A. Markuša, Bratislava	25
	Pavel Kozlovský, 4, Jindřichův Hradec	25

14.—16.	*Andrej Lúčny*, 3, Piešťany	24
	Zdeněk Pavlas, 3, Brno, tř. kpt. Jaroše	24
	René Pázman, 3, G J. Hronca, Bratislava	24
17.—18.	*Martin Dindoš*, 2, G J. Hronca, Bratislava	23
	Gregor Rayman, 3, Žilina, Wolkerova	23
19.—21.	*Jan Macháček*, 2, Pelhřimov	22
	Marta Sochorová, 4, G W. Piecka, Praha	22
	Vladimír Šolc, 2, Beroun	22
22.—24.	*Miroslav Šrol*, 4, G J. Hronca, Bratislava	21
	Petr Štěpán, 3, G W. Piecka, Praha	21
	Petr Vyhňák, 4, Mladá Boleslav,	21
25.	*Štefan Dobrev*, 3, G A. Markuša, Bratislava	20
26.—27.	*Jozef Gemela*, 4, Prievidza	19
	Radek Porazil, 4, G M. Koperníka, Bílovec	19

NEJÚSPĚŠNĚJŠÍ ŘEŠITELÉ II., KRAJSKÉHO KOLA MO

Z každého kraje a v každé kategorii je uvedeno nejvýše prvních deset nejúspěšnějších řešitelů. Pokud není uvedeno jinak, byli všichni uvedení žáci v kategorii B žáky 2. ročníku, v kategorii C žáky 1. ročníku střední školy. V kategoriích A a P je za jménem uveden ročník. Není-li uveden typ školy, byl řešitel žákem gymnázia (G). Označení M, resp. MF, v kategoriích A, B, C znamená zaměření studijního oboru 01 Matematika, resp. 02 Matematika a fyzika.

Praha

Kategorie A

1. *Petr Čížek*, 3 M, G W. Piecka
2. *Tomáš Rylek*, 3 M, G W. Piecka
3.—5. *Daniel Elleder*, 3 M, G W. Piecka
Martin Kraus, 2 M, G W. Piecka
Marta Sochorová, 4 M, G W. Piecka
6. *Petr Knobloch*, 4 MF, Praha 10, Voděradská
7.—9. *Ondřej Kalenda*, 2 M, G W. Piecka
Štěpán Kasal, 1 M, G W. Piecka
Arnošt Kobylka, 3 M, G W. Piecka

Kategorie B

1. *Jakub Cvach*, M, G W. Piecka
2.—3. *Petr Toman*, M, G W. Piecka
Jan Žemlička, Praha 8, U libeňského zámku
4.—9. *Karel Hejtmánek*, M, G W. Piecka
Petr Kolman, Praha 3, Sladkovského nám.
Jan Macháček, M, G W. Piecka
Richard Němeček, Praha 8, U libeňského zámku
Lubomír Rulíček, M, G W. Piecka
David Schreib, M, G W. Piecka

Kategorie C

1.—2. *Štěpán Kasal*, M, G W. Piecka
Michal Kubeček, 8. třída, základní škola,
Praha 4, Na planině
3. *Jan Hannig*, M, G W. Piecka
4. *Jakub Těšínský*, M, G W. Piecka
5.—8. *Karel Fridrich*, M, G W. Piecka
Jan Kolář, M, G W. Piecka
Petr Mourek, M, G W. Piecka
Milan Šebesta, Praha 8, U libeňského zámku
9. *Petr Novotný*, 8. třída, základní škola,
Praha 7, F. Křížka

Kategorie P

1.—3. *Petr Čížek*, 3
Arnošt Kobylka, 3
Marta Sochorová, 4
4. *Jan Hannig*, 1
5. *Václav Bohdanecký*, 3
6. *Pavel Plachký*, 4
7.—9. *David Obdržálek*, 4
Petr Štěpán, 3
Ludvík Tesař, 3
10. *Petr Brož*, 3, všichni G W. Piecka

Středočeský kraj

Kategorie A

1. *Radovan Čížek*, 4 MF, Mladá Boleslav
2. *Vladimír Šolc*, 2 MF, Beroun
3. *Pavel Krejčíř*, 4 MF, Mladá Boleslav
4. *Richard Suchý*, 4 MF, Benešov
5.—7. *Martin Šmíd*, 4 MF, Beroun
Karel Špáda, 3 MF, Mladá Boleslav
Radek Tezaur, 4, Vlašim

Kategorie B

1. *Vladimír Šolc*, MF, Beroun
2. *Michal Gruncl*, SPŠ Kutná Hora

3. *Bořivoj Strach*, Mladá Boleslav
4.—5. *Jan Brychta*, Kolín
Jan Soubusta, Benešov
6.—9. *Petr Doňar*, Kralupy n. V.
Zdeněk Kohout, Kladno
Hana Křížová, Beroun
Martin Vyšohlíd, Mladá Boleslav

Kategorie C

1. *Pavlína Kuthanová*, Kralupy n. V.
2.—7. *Oldřich Baroch*, Kladno
Zdenka Beranová, Kolín
Jan Červenka, Kladno
Lenka Kurzweilová, Mladá Boleslav
Klára Městecká, Mladá Boleslav
Miroslav Vaic, Kladno

Kategorie P

1. *Petr Vyhňák*, 4, Mladá Boleslav
2. *Vladimír Šolc*, 2, Beroun

Jihočeský kraj

Kategorie A

1. *David Boukal*, 3 M, České Budějovice, Jírovcova
2. *Jaroslav Pavlíček*, 3, SPŠ Písek

3.—4. *Martin Hanuš*, 3 MF, G K. Šatala, Č. Budějovice
Milan Předota, 2, České Budějovice, Jírovcova
5.—9. *Jan Balák*, 2 M, České Budějovice, Jírovcova
Michael Humpál, 4 MF, G K. Šatala, Č. Budějovice
Pavel Kozlovský, 4, Jindřichův Hradec
Martin Kronika, 4 MF, G K. Šatala, Č. Budějovice
Martin Řehout, 2 M, České Budějovice, Jírovcova

Kategorie B

1. *Jan Balák*, M, České Budějovice, Jírovcova
2.—3. *Michal Koblížek*, Jindřichův Hradec
Petr Mach, M, České Budějovice, Jírovcova
4. *Milan Předota*, M, České Budějovice, Jírovcova
5. *Martin Řehout*, M, České Budějovice, Jírovcova
6.—7. *Milena Beranová*, Strakonice
Jakub Čermák, M, České Budějovice, Jírovcova
8.—10. *Josef Jestřáb*, Písek
Jan Macháček, Pelhřimov
Radim Žáček, Humpolec

Kategorie C

1. *Jiří Sedlák*, M, České Budějovice, Jírovcova
2.—3. *Jan Dvořák*, M, České Budějovice, Jírovcova
Karel Netočný, M, České Budějovice, Jírovcova
4. *Richard Váňa*, Písek
5.—8. *Daniel Bican*, Milevsko

Lenka Krejzarová, Písek
Vít Pešek, Písek
Denisa Vránková, Tábor

Kategorie P

1. *Pavel Kozlovský*, 4, Jindřichův Hradec
2. *Jakub Čermák*, 2, České Budějovice, Jírovcova
3. *Jan Macháček*, 2, Pelhřimov
4.—6. *Miroslav Nerad*, 4, České Budějovice, Česká
Tomáš Parkos, 4, České Budějovice, Česká
Jiří Rataj, 3, Strakonice

Západočeský kraj

Kategorie A

1.—2. *Jiří Fürst*, 3 M, G J. Fučíka, Plzeň
Šimon Kos, 3 M, G J. Fučíka, Plzeň
3.—5. *Dalibor Procházka*, 4 MF, Karlovy Vary
Zdeněk Tryner, 4 M, G J. Fučíka, Plzeň
Pavel Vinter, 4, Plzeň, ul. Pionýrů
6. *Miroslav Vicher*, 3 MF, Karlovy Vary
7.—8. *Pavel Käss*, 3 M, G J. Fučíka, Plzeň
Miroslav Lávička, 3 M, G J. Fučíka, Plzeň
9.—10. *Martin Bareš*, 2 M, G J. Fučíka, Plzeň
Petr Hejda, 4 M, G J. Fučíka, Plzeň

Kategorie B

1. *Jan Štrunc*, M, G J. Fučíka, Plzeň
2. *Jan Nepraš*, M, G J. Fučíka, Plzeň
3. *Martin Hanák*, MF, Klatovy
4.—6. *Jolana Černá*, MF, Plzeň, Opavská
Petr Knap, MF, Plzeň, ul. Pionýrů
Tomáš Míka, MF, Plzeň, ul. Pionýrů
7. *Miloš Brejcha*, MF, G J. Fučíka, Plzeň
8. *Petr Somol*, Mariánské Lázně
9.—10. *Michal Fried*, MF, Plzeň, ul. Pionýrů
Martin Schaffer, MF, Karlovy Vary

Kategorie C

1. *Tomáš Kadlec*, M, G J. Fučíka, Plzeň
2. *Martin Sobotka*, Klatovy
3.—8. *Dana Benešová*, M, G J. Fučíka, Plzeň
Martin Čihák, MF, Karlovy Vary
Aleš Hodina, M, G J. Fučíka, Plzeň
František Šteifl, MF, Karlovy Vary
Zdeňka Svobodová, MF, Cheb
Zdeněk Valečko, M, G J. Fučíka, Plzeň

Kategorie P

1. *Jiří Fürst*, 3 M, G J. Fučíka, Plzeň
2. *Jiří Gogela*, 4 MF, G J. Fučíka, Plzeň

3. *Vítězslav Babický*, 3 M, G J. Fučíka, Plzeň
4. *Petr Kodl*, 3 M, G J. Fučíka, Plzeň

Severočeský kraj

Kategorie A

1.—2. *Vladimír Richter*, 4 M, Liberec, Partyzánská
Pavel Truhlář, 4 M, Liberec, Partyzánská
3. *Jaroslav Trnka*, 4 M, Liberec, Partyzánská
4. *Petr Noháč*, 3 M, Liberec, Partyzánská
5.—6. *Jan Dvořák*, 4 MF, Ústí n. L.
David Swigoň, 4 M, Liberec, Partyzánská
7.—8. *Štěpánka Lazarová*, 3, Děčín,
Daniel Šuta, 4, Chomutov

Kategorie B

1. *Tomáš Burger*, MF, Teplice
2.—8. *Pavel Hoza*, MF, Ústí n. L.
Miroslav Johanovský, MF, Ústí n. L.
Marie Kovářová, M, Liberec, Partyzánská
Michal Řízek, MF, Ústí n. L.
Pavel Semerád, MF, Rumburk
Marta Slavíková, MF, Teplice
Ladislav Šimek, M, Liberec, Partyzánská
9.—10. *Tomáš Horkel*, Ústí n. L.
Josef Marx, M, Liberec, Partyzánská

Kategorie C

1.—2. *Radek Škoda*, M, Liberec, Partyzánská
Štěpánka Zitková, M, Liberec, Partyzánská
3.—4. *Jiří Fiala*, M, Liberec, Partyzánská
Aleš Hácha, M, Liberec, Partyzánská
5. *Roman Hanzl*, Jablonec
6. *Jaroslav Švébiš*, M, Liberec, Partyzánská
7.—9. *Stanislav Dunaj*, MF, Ústí n. L.
Petr Jiřička, 8. třída, základní škola, Liberec, Na bojišti
Vít Smékal, M, Liberec, Partyzánská

Kategorie P

1. *Miroslav Hoblík*, 3, Liberec, Partyzánská
2. *Oldřich Vojtíšek*, 3, Liberec, Partyzánská

Východočeský kraj

Kategorie A

1. *Jan Vomlel*, 2 M, G J. K. Tyla, Hradec Králové
2. *Tomáš Pospíchal*, 2 M, G J. K. Tyla, Hradec Králové
3. *Zbyněk Vašata*, 3, G J. K. Tyla, Hradec Králové
4. *Štěpán Holub*, 3 MF, Trutnov
5. *Zbyněk Šír*, 3 M, G J. K. Tyla, Hradec Králové

Kategorie B

1. *Jan Vomlel*, M, G J. K. Tyla, Hradec Králové
2. *Josef Otčenášek*, Dvůr Králové
3.—5. *Aleš Dryák*, Nový Bydžov
Martin Horký, MF, Pardubice
Tomáš Pospíchal, M, G J. K. Tyla, Hradec Králové
6.—7. *Ondřej Baudyš*, Hlinsko v Č.
Roman Heřman, MF, Pardubice

Kategorie C

1. *Daniela Loskotová*, Havlíčkův Brod
2.—4. *Miroslav Hiršl*, Náchod
Petr Křečil, M, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Jiří Postupa, M, G J. K. Tyla, Hradec Králové
5. *Jiří Cyrany*, Havlíčkův Brod
6. *Aleš Hlavsa*, Náchod

Kategorie P

1. *Štěpán Holub*, 3, Trutnov

Jihomoravský kraj

Kategorie A

1. *Tomáš Dvořák*, 4 M, Brno, tř. kpt. Jaroše
2. *Marek Velešík*, 3, Brno, Koněvova

3. *Tomáš Brodský*, 3 M, Brno, tř. kpt. Jaroše
4. *Radek Vystavěl*, 4, Prostějov
5. *Ondřej Pokluda*, 4 M, Brno, tř. kpt. Jaroše
6. *David Krásenský*, 2 M, Brno, tř. kpt. Jaroše
7.—9. *Josef Pojsl*, 2 M, Brno, tř. kpt. Jaroše
Milan Sekanina, 4 M, Brno, tř. kpt. Jaroše
Martin Vondráček, 4 M, Brno, tř. kpt. Jaroše

Kategorie B

1. *Pavel Horák*, MF, Gottwaldov
2. *David Krásenský*, M, Brno, tř. kpt. Jaroše
3. *Vladimír Chvátil*, MF, Brno, Koněvova
4. *Jana Bendová*, M, Brno, tř. kpt. Jaroše
5.—6. *Marek Brejl*, M, Brno, tř. kpt. Jaroše
Eva Rohovská, M, Brno, tř. kpt. Jaroše
7.—9. *Tomáš Pitner*, M, Brno, tř. kpt. Jaroše
Radoslav Rusina, M, Brno, tř. kpt. Jaroše
Radek Vašín, M, Brno, tř. kpt. Jaroše
10. *Tomáš Urbánek*, M, Brno, tř. kpt. Jaroše

Kategorie C

1. *Michal Konečný*, M, Brno, tř. kpt. Jaroše
2.—3. *Michal Bulant*, M, Brno, tř. kpt. Jaroše
Bohdan Farník, M, Brno, tř. kpt. Jaroše
4. *Michal Stehlík*, 8. třída, základní škola, Brno, Křídlovická

5.—7. *Jiří Kalvoda*, M, Brno, tř. kpt. Jaroše
Pavel Růžička, 8. třída, základní škola, Brno, Křídlovická
Radek Svoboda, Boskovice
8. *Jan Kasprzak*, M, Brno, tř. kpt. Jaroše
9.—10. *Petra Mášová*, MF, Brno, Křenová
Vít Schorm, M, Brno, tř. kpt. Jaroše

Kategorie P

1.—2. *Vladimír Chvátil*, 2, Brno, Koněvova
Marek Velešík, 3, Brno, Koněvova
3. *Miloslav Hledík*, 4, Ivančice
4. *Miloš Ondrák*, 4, Žďár n. S.
5. *Zdeněk Pavlas*, 3, Brno, tř. kpt. Jaroše
6. *Petr Kolenčík*, 2, Brno, Koněvova
7. *Martin Dlouhý*, 4, SEŠ Třebíč
8. *Radim Halíř*, 4, Brno, tř. kpt. Jaroše

Severomoravský kraj

Kategorie A

1. *Petr Hliněný*, 2 M, G M. Koperníka, Bílovec
2.—3. *Martin Kučera*, 3 M, G M. Koperníka, Bílovec
Jiří Zatloukal, 4 M, G M. Koperníka, Bílovec
4. *Radomír Měch*, 4 M, G M. Koperníka, Bílovec
5.—6. *Jan Slovák*, 4, Uničov

Zdeněk Šarman, 4 M, G M. Koperníka, Bílovec

7.—8. *Ondřej Blaha*, 4 M, G M. Koperníka, Bílovec
Radek Porazil, 4 M, G M. Koperníka, Bílovec

Kategorie B

1.—2. *Petr Hliněný*, M, G M. Koperníka, Bílovec
Aleš Kuběna, 1 M, G M. Koperníka, Bílovec

3.—5. *Jiří Běták*, M, G M. Koperníka, Bílovec
Štěpán Čábelka, M, G M. Koperníka, Bílovec,
Libor Šindlar, Nový Jičín

6.—9. *Tomáš Duraj*, SPŠE Frenštát p. R.
Martin Pavlica, M, G M. Koperníka, Bílovec
Tomáš Rosinský, SPŠE Frenštát p. R.
Luděk Vecsey, M, G M. Koperníka, Bílovec

10. *Petr Lindovský*, M, G M. Koperníka, Bílovec

Kategorie C

1. *Jiří Svoboda*, M, G M. Koperníka, Bílovec

2.—5. *Oldřich Doseděl*, M, G M. Koperníka, Bílovec
Adrian Horzyk, Český Těšín, polské G
Radim Kubacki, M, G M. Koperníka, Bílovec
Tomáš Němeček, Opava

6.—7. *Mario Boháč*, M, G M. Koperníka, Bílovec
Radek Hořenský, Olomouc, tř. J. z Poděbrad

Kategorie P

1. *Radek Porazil*, 4, G M. Koperníka, Bílovec
2. *Vladimír Stiller*, 4, G M. Koperníka, Bílovec
3. *Zdeněk Peštuka*, 4, G M. Koperníka, Bílovec
4. *Richard Vlach*, 3, Rožnov p. R.
5. *Petr Večerek*, 4, Ostrava, Šmeralova
6.—7. *Radmila Ryšková*, 4, Frýdek-Místek
David Šindler, 3, G M. Koperníka, Bílovec
8. *Michal Prokeš*, 4, Ostrava-Hrabůvka
9.—10. *Vladimír Solnický*, 4, Opava
Pavel Špatný, 4, Rožnov p. R.

Bratislava

Kategorie A

1. *Ilja Martišovitš*, 3 MF, G J. Hronca
2.—4. *Andrej Doboš*, 3 M, G A. Markuša
Pavol Gvozdjak, 4 M, G A. Markuša
Ondrej Šuch, 2 M, G A. Markuša
5. *František Komora*, 4 M, G A. Markuša
6.—7. *Tibor Bartoš*, 4 M, G A. Markuša
Robert Bodi, 4 M, G A. Markuša
8.—10. *Martin Dindoš*, 2 MF, G J. Hronca
David Pancza, 4 M, G A. Markuša
Stanislav Šimunek, 4 M, G A. Markuša

Kategorie B

1.—4. *Ján Bajcsy*, M, G A. Markuša
Martin Dindoš, MF, G J. Hronca
Pavol Ševera, M, G A. Markuša
Ondrej Šuch, M, G A. Markuša
5. *Tomáš Szalay*, M, G A. Markuša
6.—7. *Štefan Dobák*, M, G A. Markuša
Martin Pavlík, M, G A. Markuša
8.—9. *Martin Kobetič*, M, G A. Markuša
Rudolf Sedmina, MF, G J. Hronca

Kategorie C

1. *Pavol Mederly*, 8. třída, základní škola, Košická ul.
2. *Peter Kaboš*, M, G A. Markuša
3. *Matej Kordoš*, 8. třída, základní škola, Košická ul.
4.—5. *Miroslav Kočan*, MF, G J. Hronca
Kristína Kostková, MF, G J. Hronca

Kategorie P

Západoslovenský kraj

Kategorie A

1. *Juraj Šimko*, 4 MF, Nitra, Párovská
2. *Ján Trojan*, 4 MF, Nitra, Párovská

3. *Gabriel Varga*, 3, Šamorín, mad. G
4. *Katarína Kis Petiková*, 4 MF, Komárno, mad G
5. *Martin Nehéz*, 2, Levice
6. *Eva Fašangová* 3, Želiezovce, mad G
7. *Ondrej Šedivý*, 2 MF, Nitra, Párovská
8. *Ivo Kluvanec*, 2 MF, Nitra, Párovská
9. *Roman Greguš*, 4 MF, G E. Gudernu, Nitra
10. *Štefan Bakalár*, 4, Topoľčany

Kategorie B

1. *Ondrej Šedivý*, MF, Nitra, Párovská
2.—3. *Daniel Bršel*, Hlohovec
Jozef Mičuch, SPŠE Piešťany
4. *Vladimír Králik*, Zlaté Moravce
5.—7. *Henrich Harant*, MF, Nitra, Párovská
Tomáš Hrno, MF, G E. Gudernu, Nitra
Martin Nehéz, Levice
8. *Angela Nagyová*, MF, Komárno, mad. G
9.—10. *Radovan Dermíšek*, Skalica
Gabriel Šabík, MF, Nitra, Párovská

Kategorie C

1. *Peter Šedík*, MF, Trenčín
2.—4. *Jela Abelová*, MF, Trenčín
Marián Mrva, Šaľa
Mária Ondrušková, Trenčín

5. *Pavol Čechvala*, Piešťany
6.—9. *Ignác Bugár*, Galanta, mad. G
Jana Dolníková, Hlohovec
Tatiana Halabrinová, G E. Gudernu, Nitra
Vladimír Kulich, Trnava

Kategorie P

1. *Andrej Lúčny*, 3, Piešťany
2.—3. *Jozef Sklenár*, 2, Piešťany
Juraj Šimko, 4, Nitra, Párovská
4.—5. *Viktor Bódi*, 4, G E. Gudernu, Nitra
Jozef Gerhát, 3, Topoľčany
6. *Drahoslav Ondruška*, 4, G E. Gudernu, Nitra
7.—8. *Silvia Černušková*, 4, Trnava
Marián Jamriška, 4, G E. Gudernu, Nitra

Středoslovenský kraj

Kategorie A

1. *Vladimír Šošovička*, 4 M, Žilina, V. Okružná
2. *Dalibor Jakuš*, 4 M, Žilina, V. Okružná
3.—4. *Peter Botek*, 4 M, Žilina, V. Okružná
Peter Oravec, 4 M, Žilina, V. Okružná
5.—6. *Róbert Mitka*, 3 M, Žilina, V. Okružná
Jozef Skokan, 2 M, Žilina, V. Okružná
7. *Jozef Saniga*, 4 M, Žilina, V. Okružná

Kategorie B

1. *Jozef Skokan*, M, Žilina, V. Okružná
2. *Eduard Omasta*, Ružomberok
3. *Stanislav Ťažiar*, MF, Prievidza
4. *Martin Pavlenda*, MF, Banská Bystrica, Tajovského
5.—7. *Juraj Kodýdek*, MF, Banská Bystrica, Tajovského
Pavol Rafaj, MF, Banská Bystrica, Tajovského
Peter Vanoch, M, Žilina, V. Okružná
8. *Peter Mičúch*, Žilina, Wolkerova

Kategorie C

1. *Šimon Malý*, Žiar n. H.
2. *Juraj Lorinc*, Banská Bystrica, Tajovského
3. *Ružena Zimanová*, MF, Prievidza
4.—10. *Roland Cagáň*, M, Žilina, V. Okružná
Karol Dókuš, Banská Bystrica, Tajovského
Radoslav Harman, Liptovský Hrádok
Peter Malčovský, MF, Prievidza
Roman Tlsták, MF, Liptovský Mikuláš
Valerián Valášek, Banská Bystrica, Tajovského
Peter Višňovský, MF, Martin

Kategorie P

1. *Jozef Gemela*, 4, Prievidza
2. *Gregor Rayman*, 3, Žilina, Wolkerova

3. *Jozef Saniga*, 4, Žilina, V. Okružná
4. *Dalibor Jakuš*, 4, Žilina, V. Okružná
5. *Eduard Omasta*, 4, Ružomberok
6.—7. *Martin Bubniak*, 4, Banská Bystrica, Tajovského
Robert Hagara, 3, Prievidza
8. *Marian Kollarik*, 1, Banská Bystrica, Tajovského
9. *Michal Hrabovec*, 3, Žilina, Wolkerova

Východoslovenský kraj

Kategorie A

1. *Stanislav Krajči*, 4 M, Košice, Šmeralova
2. *Vladimír Komár*, 2 M, Košice, Šmeralova
3. *Peter Eliáš*, 4, Prešov, Konštantínova
4.—6. *Zdeno Kálnassy*, 4, Prešov, Konštantínova
Vladimír Korba, 4, SPŠE Prešov
Maroš Rusňák, 3 M, Košice, Šmeralova
7. *Roman Vávra*, 4, Rožňava
8.—10. *Peter Fúsek*, 3, Poprad, Leninovo nábr.
Rudolf Krejči, 4, Poprad, Leninovo nábr.
Slavomír Onderko, 4, Michalovce

Kategorie B

1. *Vladimír Skalský*, Prešov, T. Ševčenka
2.—3. *Slavomír Gmitro*, Prešov, Konštantínova
Vladimír Komár, M, Košice, Šmeralova

4. *Martin Tomko*, Košice, Šrobárova
5.—6. *Miroslav Bobovský*, SPŠ Poprad
Peter Haluška, M, Košice, Šmeralova
7.—10. *Rastislav Hagovský*, Spišská Nová Ves
Radoslav Jenčuš, M, Košice, Šmeralova
Marek Kolesár, Košice, Šrobárova
Martin Mrva, Prešov, T. Ševčenka

Kategorie C

1. *Marián Raučina*, Poprad, Zápotockého
2. *Peter Varga*, Košice, Šrobárova
3.—8. *Michaela Bodnárová*, Košice, Šrobárova
Zuzana Horváthová, Prešov, T. Ševčenka
Slavomír Hrinko, Prešov, Konštantínova
Martin Kalovec, Poprad, Zápotockého
Vladimír Koťo, Snina
Ľubomír Kušnír, Prešov, T. Ševčenka

Kategorie P

1. *Róbert Mráz*, 4, Poprad
2. *Marek Bednár*, 2, Košice, Trebišovská
3. *Alena Murová*, 4, Košice, Opatovská
4. *Slavomír Hrinko*, 1, Prešov, Konštantínova

Hodnocení 37. ročníku matematické olympiády na středních školách

Počtem účastníků se tento ročník jen málo lišil od předcházejících. Ve všech kategoriích se MO zúčastnilo 9 500 středoškoláků, z toho přes 300 v kategorii P zaměřené na programování. Porovnávat úspěšnost v jednotlivých kategoriích s odpovídajícími údaji předcházejících let je velmi problematické, asi jako bychom porovnávali dosažené časy v různých závodech přespolního běhu. Tak jak tady závisí čas hlavně na výběru tratě, jsou výsledky v MO závislé na výběru úloh. V každém případě však můžeme s potěšením konstatovat, že úspěšnost v II. kole 37. ročníku MO kategorií A, B, C, P byla přes 30 % proti 12 % roku předcházejícího. Podle hodnocení krajských výborů MO k tomu přispěl lepší výběr úloh lépe odpovídající osnovám, a tedy znalostem žáků, a také nově zavedený způsob bodování. Spočíval v tom, že všechny 4 úlohy II. kola byly rovnocenné a žáci si nevybírali 3. úlohu ze dvou variant. Přitom úspěšným řešitelem se stal ten soutěžící, který získal více bodů než byla polovina plného počtu bodů za tři úlohy. Tento systém se osvědčil, bude se používat i v dalších ročnících MO.

V celostátním kole jsou úlohy náročnější, v kategorii A se jevila nejtěžší úloha čtvrtá, ze sedmi možných bodů byl průměrný výsledek pouze 0,44 bodu. Nejlehčí byla úloha první s průměrným ziskem 4,94 bodu, přičemž každý z prv-

ních 28 účastníků ji vyřešil na plný počet, tj. 7 bodů. Z celkového počtu 80 účastníků bylo přes 70 % z tříd gymnázií se studijním zaměřením 01 Matematika. Svědčí to o dobrém výběru těch nejlepších žáků do těchto tříd, na druhé straně je dobře, že i žáci ostatních tříd se dovedou prosadit a zařadit se nejen do celostátního kola MO, ale i mezi jeho vítěze.

Domníváme se, že matematická olympiáda i v 37. ročníku splnila cíl daný jí organizačním řádem - prohloubit a rozšířit vědomosti a dovednosti žáků v matematice, pomáhat rozvíjet schopnosti a nadání žáků, vést je k samostatné tvůrčí práci. Zvláště se slibným rozvojem kategorie P vystupuje do popředí úloha MO při rozvoji algoritmického myšlení a orientace středoškoláků na uplatnění matematiky v různých oborech, především technických.

Kategorie C

C - I

1. Označme $\mathsf{A} = \{0, 1, 2\}$. Najděte všechny trojice reálných čísel a, b, c ($c \neq 0$), pro které platí

$$x \in \mathsf{A} \text{ a } y \in \mathsf{A} \Rightarrow ax + by + cxy \in \mathsf{A}\,.$$

2. Pro která přirozená čísla n je číslo $n^2 + 5n + 8$ dělitelné číslem 49?

3. Jsou-li p, q, pq a $p + q$ délky stran čtyřúhelníku, kde $p \geqq 3$, $q \geqq 3$ jsou přirozená čísla, pak jedna z jeho úhlopříček má délku menší než 11. Dokažte.

4. Je dán pravidelný trojboký hranol $ABCA'B'C'$ s podstavnou hranou délky a a výškou v. Označme S střed stěny $BCC'B'$ a K, L ty body na hranách BB', CC', pro něž jsou lomené čáry AKS a ALS nejkratší. Vypočítejte poměr objemů jehlanu $AKLS$ a daného hranolu.

5. Ve volejbalovém turnaji se utkalo $n \geqq 3$ družstev. Dokažte, že existuje takové družstvo A, že ke každému jinému družstvu B najdeme třetí družstvo C tak, že ve vzájemných zápasech družstev A, B, C vyhrálo A aspoň jednou a družstvo B nejvýše jednou.

6. V pravidelném devítiúhelníku $ABCDEFGHI$ označme K, L, M průsečíky dvojic přímek AD a CG, BF a CG, AD a BF. Najděte 18 různých trojúhelníků podobných s trojúhelníkem KLM, jejichž všechny vrcholy jsou vrcholy daného devítiúhelníku.

C - S

1. Výpočtem ověřte, že délka strany pravidelného dvanáctiúhelníku vepsaného kružnici o poloměru 2 je $\sqrt{6} - \sqrt{2}$.

2. Najděte všechna čtyřciferná čísla končící číslicí 9, která jsou dělitelná každou svou číslicí.

3. V tenisovém klubu se hrál turnaj tak, že hráč, který dvakrát prohrál, byl vyřazen. Po 45. zápase zbyl jediný hráč - - vítěz turnaje. Mohl vítěz projít turnajem bez porážky? Kolik bylo účastníků turnaje?

C - II

1. Jarda napsal na tabuli čtyři přirozená čísla. Součet prvních dvou byl 707, součet druhého a třetího byl 700, třetího a čtvrtého 689. Určete
   a) součet prvního a čtvrtého čísla,
   b) nejmenší možnou hodnotu prvního čísla.

2. V daném lichoběžníku určete takový bod, jehož spojnice se středy stran rozdělí lichoběžník na čtyři čtyřúhelníky stejného obsahu.

3. Je dáno čtyřciferné číslo A. Zaměníme-li v čísle A první

číslici s poslední, dostaneme čtyřciferné číslo B. Největším společným dělitelem čísel A, B je číslo 63. Určete čísla A, B.

4. Do kružnice k je vepsán pětiúhelník $ABCDE$ tak, že $AB \parallel DE$ a $AE \parallel BC$. Dokažte, že tečna kružnice k v bodě A je rovnoběžná s přímkou CD.

B - I

1. Jaký největší počet figurek lze na šachovnici $n \times n$ rozmístit tak, aby žádné dvě nesousedily? (Za sousední považujeme ta políčka, která mají společný alespoň jeden vrchol.)

2. Dokažte, že polynom
$$P_n(x) = x^{(2n)^2} - x^{(2n-1)^2} + x^{(2n-2)^2} - x^{(2n-3)^2} + \ldots$$
$$\ldots + x^4 - x + 1$$
nemá reálný kořen pro žádné přirozené číslo n.

3. Rozhodněte, zda existuje nenulové zobrazení F množiny mřížových bodů v rovině (tj. bodů s celočíselnými souřadnicemi) do množiny reálných čísel takové, že pro každý pravoúhlý trojúhelník ABC s vrcholy v mřížových bodech a odvěsnami délky 1 platí
$$F(A) + F(B) + F(C) = 0. \qquad (1)$$
Existuje takové zobrazení F, požadujeme-li, aby rovnost (1) platila pouze pro takové pravoúhlé trojúhelníky ABC, jejichž osa pravého úhlu je rovnoběžná s osou prvního kvadrantu?

4. Vyjádřete součet čtverců délek tělesových úhlopříček rovnoběžnostěnu pomocí délek jeho hran.

5. Uvažujme řez krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně délky a rovinou, která je kolmá k úhlopříčce AC' a prochází bo-

dem K hrany $A'B'$, přičemž $|A'K| = t$. Spočtěte obvod o a obsah P řezu a zjistěte, pro které hodnoty $t \in \langle 0, a \rangle$ nabývá funkce P maximum a minimum.

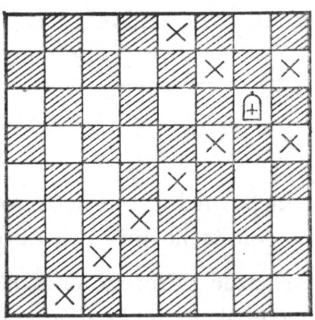
6. Posloupnost (x_n) je definována rekurentně vztahy

$$x_{n+2} = \frac{1 - x_n x_{n+1}}{2 - x_n - x_{n+1}}, \quad x_1 = x_2 = 0 .$$

Ukažte, že pro každé přirozené číslo n, $n \geqq 3$ je $0 < x_n < 1$.

B - S

1. Na obrázku 1 je šachovnice 8×8 s jedním střelcem. Rozmístěte na ni dalších sedm střelců tak, aby každé neobsazené pole šachovnice bylo ohroženo některým ze střelců. (Například střelec na obrázku ohrožuje všechna pole označená $\times$.)



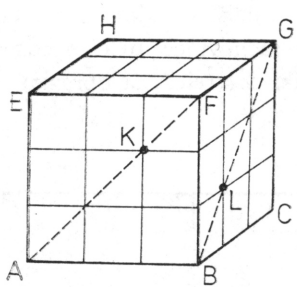
Obr. 1

2. Nechť a, b jsou reálná čísla. Jestliže pro každé celé kladné číslo x je číslo $ax^{1988} + b$ celé, jsou i čísla a, b celá. Dokažte.

3. Je dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně délky 2. Pro $t \in \langle 0, 1 \rangle$ označme P_t bod hrany EF takový, že $|EP_t| = t$. Určete obsah řezu dané krychle rovinou procházející bodem P_t a rovnoběžnou s rovinou BGP_1.

B - II

1. Krychle $ABCDEFGH$ o hraně délky 3 je rozdělena na 27 krychliček o hraně 1 (obr. 2). Ukažte, že přímka KL je kolmá na stěnové úhlopříčky AF a BG.



Obr. 2

2. Dokažte, že na šachovnici 8×8 nelze rozmístit 7 střelců tak, aby všechna pole šachovnice byla ohrožena.

3. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n ($n \geqq 1$) existuje polynom f stupně n takový, že hodnoty $f(1), f(2), \ldots, f(n)$, $f(n + 2)$ jsou celá čísla a číslo $f(n + 1)$ není celé.

4. Na rovnoběžných hranách AA', BB', CC' kolmého trojbokého hranolu $ABCA'B'C'$ jsou zvoleny po řadě body K, L, M. Vyjádřete objem tělesa $ABCKLM$ pomocí obsahu S trojúhelníku ABC a délek p, q, r úseček AK, BL, CM.

Kategorie A

A - I

1. Najděte mnohočlen nejmenšího stupně s racionálními koeficienty, který má kořen $\sqrt[1987]{2}$.

2. Dokažte, že střed kulové plochy opsané pravidelnému čtyřstěnu má ze všech bodů prostoru nejmenší součet vzdáleností od jednotlivých vrcholů čtyřstěnu.

3. Předpokládejme, že každý bod roviny je obarven jednou ze dvou barev. Dokažte, že v této rovině existuje rovnostranný trojúhelník, jehož vrcholy jsou obarveny stejnou barvou.

4. Označme P, Q středy stran BC, CA trojúhelníku ABC a T jeho těžiště. Dokažte, že trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou AB, právě když je čtyřúhelník $TPCQ$ tečnový.

5. Přiřaďme každé dvojici přirozených čísel (x, y) reálné číslo $f(x, y) \geq 1$. Pak pro libovolné přirozené číslo k existují přirozená čísla m, n taková, že
$$m + n \geq k \text{ a } f(m, n) < f(m + 1, n) + f(m, n + 1).$$
Dokažte.

6. Zjistěte, zda existuje přirozené číslo, jehož dekadický zápis má 23 číslice a které není dělitelné 11, ani když změníme libovolnou z jeho číslic.

A - S

1. Určete nejmenší číslo r, pro které je možno čtverec o straně 10 pokrýt dvěma shodnými kruhy o poloměru r.

2. Určete všechna přirozená čísla n ($n \geqq 2$), pro která má rovnice
$$x^n - 4x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + 1 = 0$$
s reálnými koeficienty všechny kořeny reálné a nezáporné.

3. V prostoru jsou dány body A, P, Q, které neleží na přímce. Popište konstrukci krychle $ABCDEFGH$ takové, že polopřímka AG prochází bodem P a polopřímka BH prochází bodem Q. Najděte podmínky řešitelnosti.

A - II

1. Jestliže čtyři shodné kruhy o poloměru r pokrývají jednotkový čtverec, je $r \geqq \frac{\sqrt{2}}{4}$. Dokažte.

   Zjistěte, zda lze jednotkový čtverec pokrýt pěti shodnými kruhy o poloměru menším než $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

2. Najděte všechna komplexní čísla a, b, pro která má rovnice
$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + ax + b = 0$$
v oboru komplexních čísel jen reálné kořeny.

3. V prostoru jsou dány dva různé body P, Q a rovina δ. Popište konstrukci pravidelného čtyřstěnu $ABCD$, jehož

hrana AB leží na úsečce PQ, vrchol D leží v rovině δ, $|\sphericalangle APD| = 30°$ a $|\sphericalangle BQD| = 45°$. Proveďte diskusi.

4. Je dáno přirozené číslo n. Jaké největší hodnoty může nabýt součet

$$|p(1) - 1| + |p(2) - 2| + \ldots + |p(n) - n|\,,$$

je-li p prosté zobrazení množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ na sebe?

A - III

1. Nechť f je zobrazení množiny $\mathsf{M} = \{1, 2, \ldots, 1988\}$ do M. Pro libovolné přirozené n položme $x_1 = f(1)$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Zjistěte, zda existuje takové m, že $x_{2m} = x_m$.

2. Jestliže pro koeficienty rovnice

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0\,,$$

jejíž všechny kořeny jsou reálné, platí $a^2 = 2(b + 1)$, potom $|a - c| \leqq 2$. Dokažte.

3. Je dán čtyřstěn $ABCD$ s hranami $|AD| = |BC| = a$, $|AC| = |BD| = b$, $|AB| = c$, $|CD| = d$. Určete nejmenší hodnotu součtu $|AX| + |BX| + |CX| + |DX|$, kde X je libovolný bod prostoru.

4. Dokažte, že každé z čísel $1, 2, 3, \ldots, 2^n$ lze zapsat jednou ze dvou barev (červenou a modrou) tak, že žádná nekonstantní $2n$-členná aritmetická posloupnost vybraná z těchto čísel není jednobarevná.

5. Najděte všechna čísla $a \in (-2, 2)$, pro která je mnohočlen $x^{154} - ax^{77} + 1$ násobkem mnohočlenu $x^{14} - ax^7 + 1$.

6. V trojúhelníku $A_1A_2A_3$ se stranami a_1, a_2, a_3 jsou dány tři body, které označíme P_1, P_2, P_3 tak, aby součin jejich vzdáleností od odpovídajících stran a_1, a_2, a_3 byl co největší. Dokažte, že trojúhelníky $P_1A_2A_3$, $A_1P_2A_3$, $A_1A_2P_3$ pokrývají trojúhelník $A_1A_2A_3$.

Korespondenční seminář ÚV MO

1. Řešte rovnici

$$\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}=p,$$

kde p je reálný parametr.

2. a) Označme E, F, G body na stranách AB, BC, CA trojúhelníku ABC, pro něž platí

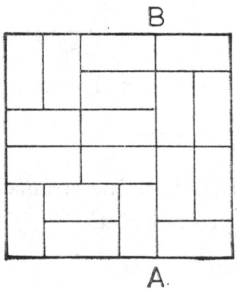
$$\frac{|AE|}{|EB|}=\frac{|BF|}{|FC|}=\frac{|CG|}{|GA|}=k, \qquad 0<k<1.$$

Najděte poměr obsahu trojúhelníku KLM určeného přímkami AF, BG, CE a obsahu trojúhelníku ABC.
b) Rozdělte daný trojúhelník šesti přímkami na takové části, z nichž by bylo možno složit sedm shodných trojúhelníků.

3. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu A. Označme D patu výšky z vrcholu A a sestrojme kružnici k se středem L nad průměrem AD. Průsečíky kružnice k s odvěsnami AB a AC označme K, M. Určete úhly trojúhelníku ABC, víte-li, že délky úseček AK, AL, AM tvoří geometrickou posloupnost.

4. Uvažujme okraj čtvercové šachovnice $n \times n$ o šířce dvou polí. Dokažte, že lze $8(n-2)$ polí tohoto okraje obejít šachovým koněm, právě když $n-1$ je dělitelné čtyřmi.

5. Je možné 18 dominových kostek o rozměru 2×1 složit do čtverce tak, aby nevznikl žádný šev spojující protější strany čtverce a jdoucí po hranách kostek? (Např. uspořádání na obr. 3 se nehodí, neboť obsahuje šev AB.)



Obr. 3

6. Devatenáctistěnu je vepsána koule o poloměru 10. Dokažte, že na jeho povrchu existují dva body, jejichž vzdálenost je větší než 21.

7. Uvažujme nekonečný list čtverečkovaného papíru. V každém čtverečku je napsáno číslo, přičemž součet čísel v libovolném čtverci, jehož strany leží na přímkách čtvercové sítě, v absolutní hodnotě není větší než 1. Dokažte, že existuje takové číslo c, že součet čísel v libovolném pravoúhelníku, jehož strany leží na přímkách dané sítě, je nejvýše c.

Dokažte, že uvedené tvrzení platí pro $c = 4$. Může být $c = 3$ nebo $c = 2$?

8. V každé ze tří nádob je celočíselný počet litrů vody. Do kterékoli nádoby je dovoleno přelít stejné množství vody, které již v nádobě je, z jiné nádoby. Dokažte, že pomocí takových přelévání můžete jednu z nádob vyprázdnit. (Nádoby jsou dostatečně velké, do každé se vejde celé množství použité vody.)

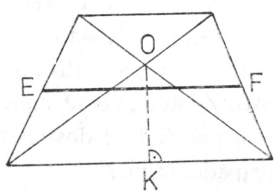
9. Obdélníková tabulka s m řádky a n sloupci je vyplněna čísly. Srovnejme čísla v každém řádku podle velikosti. Dokažte, že srovnáte-li pak i čísla v každém sloupci podle velikosti, budou i čísla v jednotlivých řádcích srovnána zas podle velikosti. Zjistěte, co se stane, budete-li rovnat nejdříve sloupce a pak řádky: dostanete stejnou tabulku jako v prvním případě, či ne?

10. V tabulce $m \times n$ jsou zapsána čísla tak, že v libovolném pravoúhelníku (tvořeném dvěma řádky a dvěma sloupci tabulky) jsou součty čísel v protějších vrcholech stejné. Část čísel byla smazána, přesto ale bylo možno tabulku jednoznačně doplnit. Dokažte, že v tabulce zůstalo aspoň $n + m - 1$ čísel.

11. Dva hráči hrají »piškvorky« na neohraničeném listu čtverečkovaného papíru podle následujících pravidel. První udělá křížek do libovolného čtverečku. V každém dalším tahu pak dělá křížek do libovolného volného políčka, které sousedí s jedním z políček, na němž už je křížek (sousední políčka jsou ta, která mají společný aspoň jeden vrchol). Druhý hráč udělá v každém svém tahu tři ko-

lečka do libovolných tří volných políček. Dokažte, že ať hraje první hráč jakkoli, druhý ho může »zavřít«, tj. může dosáhnout toho, že první hráč nebude mít kam dát křížek.

12. Na tabuli byl narýsován lichoběžník se střední příčkou EF a kolmicí OK z průsečíku O úhlopříček na větší základnu (obr. 4). Pak byl lichoběžník smazán. Jak lze znovu sestrojit původní lichoběžník ze zachovaných úseček EF, OK?



Obr. 4

13. Je dáno $2n + 1$ kladných čísel takových, že rozdíl mezi součtem libovolných $n + 1$ daných čísel a součtem zbylých n čísel je kladný. Dokažte, že pro součin B všech $\binom{2n+1}{n+1}$ takových rozdílů a součin A všech $2n + 1$ daných čísel platí

$$B^n \leqq A^{\binom{2n}{n-1}}.$$

14. Je dán konvexní n-úhelník M. Pro mnohoúhelník s vrcholy ve středech stran mnohoúhelníku M platí, že jeho obvod není menší než polovina obvodu M (pro $n \geqq 3$)

a jeho obsah není menší než polovina obsahu M (pro $n \geqq 4$). Dokažte.

15. a) Vrcholu A_1 pravidelného dvanáctiúhelníku $A_1A_2 \ldots$ $\ldots A_{12}$ je připsáno znaménko $-$, v ostatních vrcholech je $+$. Je dovoleno změnit znaménko na opačné v libovolných šesti po sobě jdoucích vrcholech daného mnohoúhelníku. Dokažte, že ani po několika takových operacích nelze dojít k tomu, že by ve vrcholu A_2 bylo minus a v ostatních vrcholech plus.

b) Dokažte totéž tvrzení, je-li dovoleno měnit současně znaménka ne v šesti, ale ve čtyřech po sobě jdoucích vrcholech.

c) Dokažte totéž tvrzení, je-li dovoleno měnit současně znaménka ve třech po sobě jdoucích vrcholech.

16. Jestliže ke každé stěně daného konvexního mnohostěnu sestrojíme v některém jejím bodě vektor k ní kolmý, který bude směřovat ven z tělesa a jehož velikost bude rovna obsahu příslušné stěny, pak bude součet všech takovýchto vektorů roven nule. Dokažte.

17. Dokažte, že pro libovolných n reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ existuje takové přirozené číslo $k \leqq n$, že každé z k čísel $a_k, \frac{1}{2}(a_{k-1} + a_k), \frac{1}{3}(a_{k-2} + a_{k-1} + a_k), \ldots, \frac{1}{k}(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)$ je nejvýše rovno číslu $\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$.

18. Množina přirozených čísel má následující vlastnost: ani jedno z čísel množiny nedělí jiné, ale mezi libovolnými

třemi čísly vždy některé dělí součet ostatních dvou. Jaký je největší možný počet prvků takové množiny? Jaký je největší možný počet prvků takové množiny, požadujeme-li navíc, aby to byla lichá čísla?

19. Je dáno n reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rozmístěných na kružnici, přičemž $|x_i| = 1$ $(1 \leqq i \leqq n)$ a pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ jsou součty n součinů všech dvojic čísel vzdálených od sebe k míst vždy nulové $(x_{n+i} = x_i)$:

$$x_1x_{1+k} + x_2x_{2+k} + \ldots + x_nx_k = 0$$

Dokažte, že n je čtvercem celého čísla. Čtveřice $-1, 1, 1, 1$ je příkladem takových čísel pro $n = 4$. Existuje taková n-tice pro $n = 16$? Pro jaká n taková n-tice existuje?

20. Dokažte, že pro každé přirozené $n > 1$ platí

$$\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \sin\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) \ldots \sin\left(x + \frac{n-1}{n}\pi\right) = \\ = c_n \sin nx\,,$$

kde c_n je nějaké číslo závislé na n. Najděte c_n.

21. S daným přirozeným číslem budeme provádět následující operace:

A) připíšeme k němu číslici 4;

B) připíšeme k němu číslici 0;

C) vydělíme ho číslem 2 (je-li sudé).

Provedeme-li např. s číslem 4 postupně operace C, C, A a B, dostaneme číslo 140. Jak dostaneme pomocí operací A, B, C z čísla 4 číslo 1988? Dokažte, že z čísla 4 lze popsaným způsobem dostat libovolné přirozené číslo.

22. Najděte všechna přirozená čísla m, pro něž

$$1!.3!.5! \ldots (2m-1)! = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)! .$$

23. Je dán trojúhelník ABC a kladná čísla p, q. Uvnitř daného trojúhelníku najděte bod O s následující vlastností: pro libovolnou přímku procházející bodem O a protínající strany AB a BC v bodech K, L platí

$$p\frac{|AK|}{|KB|} + q\frac{|CL|}{|LB|} = 1 .$$

24. Označme $s(n)$ ciferný součet přirozeného čísla n (v desítkové soustavě). Přirozené číslo m nazveme »zvláštní«, jestliže je nemůžeme vyjádřit ve tvaru $m = n + s(n)$ pro nějaké přirozené n. Existuje zvláštních čísel jen konečně mnoho?

25. Sestrojíme-li v tětivovém čtyřúhelníku osy úhlů sevřených jeho prodlouženými protějšími stranami, jsou jejich průsečíky se stranami čtyřúhelníku vrcholy kosočtverce. Dokažte.

26. Pomocí čísel 1, 2, ..., k utvořme množinu M všech uspořádaných n-tic $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (je jich k^n). Uvažujme dvě podmnožiny P, Q množiny M, pro které platí: Je-li $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathsf{P}$ a $(q_1, q_2, \ldots, q_n) \in \mathsf{Q}$, je $p_i = q_i$ pro aspoň jedno $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dokažte, že jedna z množin P nebo Q má nejvýše k^{n-1} prvků.

27. Najděte nutnou a postačující podmínku pro čísla a, b, α, β, aby šlo obdélník $a \times b$ rozřezat na obdélníky $\alpha \times \beta$.

28. Dva hrají následující hru: Jeden postupně volí číslici,

kterou druhý zapíše na místo jedné hvězdičky v následujícím rozdílu

$$\begin{array}{r} \star\ \star\ \star\ \star \\ -\ \star\ \star\ \star\ \star \\ \hline \end{array}$$

atd., celkem osmkrát. Ten, který určuje číslice, se snaží, aby byl rozdíl co největší, druhý zas, aby byl co nejmenší. Dokažte, že:

a) druhý může umísťovat číslice tak, aby vzniklý rozdíl nebyl větší než 4 000 bez ohledu na to, jaké číslice volí první hráč;

b) první může volit číslice tak, aby rozdíl nebyl menší než 4 000 bez ohledu na to, kam je druhý umístí.

29. Najděte poměr velikostí stran trojúhelníku, jehož jedna těžnice je vepsanou kružnicí rozdělena na tři stejné části.

30. Nechť a, b jsou celá čísla. Pro jaká a, b lze rozdělit napůl $a + b$ litrů mléka, máme-li jen nádoby o objemu a, b, $a + b$ litrů?

31. A se zavazuje platit B průměrně $\sqrt{2}$ korun za den. Domluvili se, že n-tý den dostane B celé číslo a_n korun ($a_n \in \{1, 2\}$) tak, aby celková suma po n dnech (tj. $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$) byla co nejblíže číslu $n\sqrt{2}$ (např. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$). Dokažte, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ není periodická.

32. Nechť a, b, m, n jsou přirozená čísla, přičemž a, b jsou nesoudělná a $a > 1$. Dokažte, že pokud $a^n + b^n$ dělí $a^m + b^m$, pak n dělí m.

33. Jestliže součet n kladných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je 1, označme S největší z čísel

$$\frac{x_1}{1 + x_1}, \frac{x_2}{1 + x_1 + x_2}, \ldots, \frac{x_n}{1 + x_1 + \ldots + x_n}.$$

Najděte nejmenší možnou hodnotu S. Pro jaká čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se nabývá?

34. Je možno rozestavit číslice 0, 1, 2 na pole čtverečkovaného papíru o rozměrech 100×100 tak, aby v každém pravoúhelníku 3×4 čtverečky byly tři nuly, čtyři jedničky a pět dvojek?

35. Po skončení hokejového turnaje (jednokolově každý s každým) se ukázalo, že pro libovolnou skupinu mužstev existuje mužstvo, které v zápasech s mužstvy zvolené skupiny získalo lichý počet bodů. Dokažte, že v turnaji hrál sudý počet mužstev.

Kategorie C

C - I - 1

Nechť uspořádaná trojice (a, b, c) reálných čísel vyhovuje podmínkám úlohy. Do výrazu $ax + by + cxy$ dosadíme za x, y postupně hodnoty 0, 1, 2. Podle předpokladu úlohy tím zjistíme, že do množiny A patří čísla a, b, $2a$, $2b$, $a + b + c$, $2a + b + 2c$, $a + 2b + 2c$, $2a + 2b + 4c$. Je-li $a = b = 0$, musí do A patřit čísla c, $2c$, $4c$, což vzhledem k podmínce $c \neq 0$ není možné. Zkusíme teď $a = 1$, $b = 0$, do A pak musí patřit čísla $1 + c$, $2 + 2c$, $1 + 2c$, $2 + 4c$. Protože $1 + c$ je prvkem A, je $c = 1$ nebo $c = -1$. Pak však nepatří do A číslo $1 + 2c$, takže nemůže být $a = 1$, $b = 0$. Stejně tak nemůže být $a = 0$, $b = 1$. Je-li $a = b = 1$, patří do A čísla $2 + c, 3 + 2c, 4 + 4c$. To je splněno pouze pro $c = -1$. Nemůže být $a = 2$, protože by do A nepatřil prvek $2a$, podobně pro $b = 2$. Úloha má tedy jediné řešení $(a, b, c) = (1, 1, -1)$.

C - I - 2

Je-li číslo $n^2 + 5n + 8$ dělitelné číslem 49, je tím spíše dělitelné sedmi. Každé přirozené číslo n se dá napsat právě v jednom z tvarů $7k$, $7k + 1$, ..., $7k + 6$, kde k je přirozené číslo nebo 0. Dosadíme-li postupně každý z uvedených tvarů

za n do výrazu $n^2 + 5n + 8$, dostaneme pouze v případě $n = 7k + 1$ číslo dělitelné sedmi, a to číslo $49k(k + 1) + 14$. Toto číslo je dělitelné sedmi, ale není dělitelné číslem 49. Tím jsme dokázali, že pro žádné přirozené číslo n není číslo $n^2 + 5n + 8$ dělitelné číslem 49.

Uveďme ještě jiný důkaz. Je $n^2 + 5n + 8 = n^2 - 2n + 1 + 7n + 7 = (n - 1)^2 + 7(n + 1)$. Aby bylo toto číslo dělitelné sedmi, musí být nutně číslo $(n - 1)^2$, a tedy i číslo $n - 1$, dělitelné sedmi, tedy $n = 7k + 1$. Pak je číslo $(n - 1)^2$ dělitelné číslem 49, číslo $7(n + 1)$ ale pouze sedmi. Docházíme ke stejnému výsledku jako při předcházejícím postupu.

C - I - 3

Nechť p, q, $p + q$, pq jsou délky stran čtyřúhelníku. Můžeme předpokládat, že $p \geqq q$. Součet délek každých tří stran čtyřúhelníku je větší než délka čtvrté strany, takže musí například platit $p + q + (p + q) > pq$, tj. $4 > (p - 2)(q - 2)$. Odtud je vidět, že $(p - 2, q - 2)$ může být pouze jednou z dvojic (3, 1), (2, 1), (1, 1), takže máme tyto tři možnosti pro p, q, u nichž uvádíme i odpovídající hodnoty $p + q$, pq:

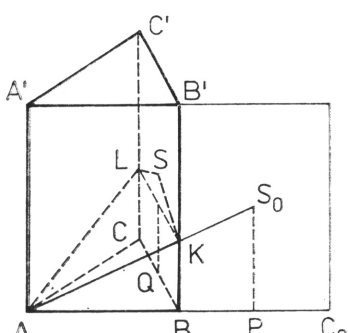
$$p = 5, q = 3, p + q = 8, pq = 15$$
$$p = 4, q = 3, p + q = 7, pq = 12$$
$$p = 3, q = 3, p + q = 6, pq = 9$$

Ve všech třech případech má nejkratší strana délku 3, nejdelší stranou je strana s délkou pq, což je 15, 12 nebo 9. Ze zbývajících dvou stran musí aspoň jedna s nejkratší stranou sousedit. V prvním případě mají tedy dvě sousední strany délky 3 a 5 nebo 3 a 8, v druhém případě 3 a 4 nebo 3 a 7,

v posledním případě mají dvě sousední strany délku 3 nebo jedna délku 3, druhá 6. Vidíme, že ve všech šesti možnostech je součet délek dvou sousedních stran nejvýše 11. Podle trojúhelníkové nerovnosti je proto délka úhlopříčky, která tvoří s těmito dvěma stranami trojúhelník, menší než 11, což jsme měli dokázat.

C - I - 4

Předpokládejme, že jsme si rovinu BCC' otočili kolem přímky BB' do roviny ABB' tak, že se bod C otočí do bodu C_0 a bod B je středem úsečky AC_0 (obr. 5). Střed S přejde přitom do bodu S_0, bod K je průsečíkem úseček BB' a AS_0, protože pouze tak je $|AK| + |KS| = |AK| + |KS_0|$ nejmenší. Označme P patu kolmice vedené bodem S_0 na přímku BC_0. Z podobnosti trojúhelníků ABK, APS_0 plyne, že $|BK| = \frac{1}{3}v$,



Obr. 5

protože $|PS_0| = \frac{1}{2} v$ a $|AB| = \frac{2}{3} |AP|$. Stejně tak je $|CL| = \frac{1}{3} v$. Dále je $KL \parallel BC$, $|KL| = a$, výška na tuto stranu v trojúhelníku KLS je $\frac{1}{2} v - \frac{1}{3} v = \frac{1}{6} v$, jeho obsah je proto $\frac{1}{12} av$. Pata Q výšky v jehlanu $KLSA$ na stěnu KLS splývá se středem úsečky BC a má tedy délku $\frac{1}{2} a\sqrt{3}$. Proto se objem jehlanu $KLSA$ rovná $\frac{1}{72} a^2 v\sqrt{3}$, objem daného hranolu je $\frac{1}{4} a^2 v\sqrt{3}$, hledaný poměr je $\frac{1}{18}$.

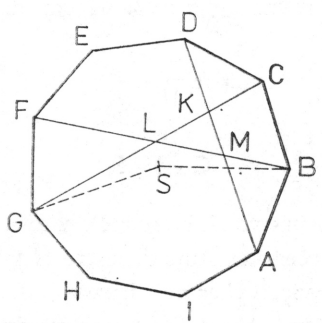
C - I - 5

Jistě existuje družstvo A, které mělo v turnaji největší počet výher, přesněji řečeno existuje družstvo A tak, že žádné další družstvo nemělo více výher než družstvo A. Nechť B je libovolné další družstvo. Mohly nastat právě dvě možnosti, buď družstvo A vyhrálo nad družstvem B, nebo s ním prohrálo. V prvním případě vezmeme za C libovolné další družstvo a požadavky úlohy budou splněny. Složitější situace nastane v druhém případě, kdy družstvo A prohrálo s mužstvem B. Pak ale musí existovat družstvo C, se kterým A vyhrálo a B prohrálo, jinak by mělo družstvo B více výher než družstvo A. Ve vzájemných střetnutích mezi A, B, C pak mělo družstvo A právě jednu výhru (nad C) a družstvo B také právě jednu

výhru (nad A). Opět je požadavek úlohy splněn a tím je tvrzení úlohy dokázáno.

C - I - 6

Z věty o obvodovém a středovém úhlu plyne (obr. 6), že $|\sphericalangle BFG| = 80°$, neboť $|\sphericalangle BSG| = 4.\frac{360°}{9} = 160°$, S jsme označili střed kružnice k opsané danému devítiúhelníku. Stejně tak odvodíme, že $|\sphericalangle FGC| = 60°$, takže $|\sphericalangle FLG| = 40°$, neboť součet úhlů v trojúhelníku je 180°. Úhly CLB a FLG



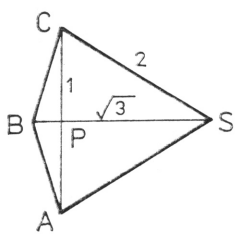
Obr. 6

jsou vrcholové, proto je také $|\sphericalangle KLM| = 40°$. Obdobně odvodíme, že $|\sphericalangle KML| = 60°$, $|\sphericalangle MKL| = 80°$. Obvodový úhel kružnice k odpovídající jedné straně devítiúhelníku má velikost 20°. Vrcholy trojúhelníku s vnitřními úhly 40°, 60° a 80°, jež jsou zároveň vrcholy devítiúhelníku, dělí proto kružnici k na tři oblouky odpovídající dvěma, třem a čtyřem stra-

nám devítiúhelníku. Takovými trojúhelníky jsou například trojúhelníky ACF a ACG. Úloze vyhovuje dále všech 8 trojúhelníků, které dostaneme otočením trojúhelníku ACF kolem bodu S o celý násobek 40°, a 8 trojúhelníků, které dostaneme stejným způsobem z trojúhelníku ACG. Celkem je tedy těch trojúhelníků 18.

C - S - 1

Označme A, C sousední vrcholy k vrcholu B dvanáctiúhelníku, který je pravidelný a je vepsán kružnici o středu S a poloměru 2 (obr. 7). Označme dále P průsečík úseček AC,



Obr. 7

BS. Trojúhelník ACS je rovnostranný, P je střed úsečky AC, proto je $|CP| = 1$, $|PS| = \sqrt{3}$, $|BP| = 2 - \sqrt{3}$. Podle Pythagorovy věty je $|CB|^2 = 1 + (2 - \sqrt{3})^2 = 4(2 - \sqrt{3})$, $|CB| = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Protože $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 = 8 - 2\sqrt{12} = 4(2 - \sqrt{3}) = |CB|^2$, je také $|CB| = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

C - S - 2

Protože číslo končící devítkou není dělitelné ani dvěma, ani pěti, musí být zbývající tři číslice hledaných čísel z množiny 1, 3, 7, 9. Jejich součet musí být dělitelný devíti, takže přicházejí v úvahu pouze trojice (1, 1, 7), (3, 3, 3) a (9, 9, 9). Čísla 1179 a 1719 nejsou dělitelná sedmi, takže hledanými čísly jsou právě čísla 7119, 3339 a 9999.

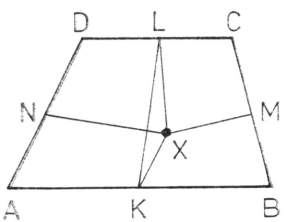
C - S - 3

Z každého zápasu odchází právě jeden hráč poražený. Kromě vítěze prohrál každý hráč dvakrát. Protože zápasů bylo 45, tedy lichý počet, musel v jednom zápase prohrát vítěz. Ve zbývajících 44 zápasech byli všichni ostatní hráči vyloučeni, bylo jich tedy $44 : 2 = 22$. Celkem se turnaje zúčastnili 23 hráči.

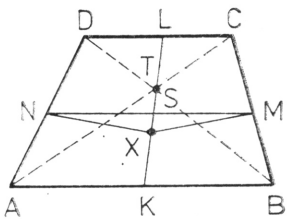
C - II - 1

Jde o lehčí úlohu, kterou vyřešila většina účastníků krajského kola. Hledaná čísla si označíme po řadě a, b, c, d. Podle podmínek úlohy platí $a + b = 707$, $b + c = 700$, $c + d = 689$. Z poslední rovnice vyjádříme c, dosadíme do druhé, vyjádříme z ní b a dosadíme do první. Dostaneme postupně $c = 689 - d$, $b = 11 + d$, $a + d = 696$, takže součet prvního a čtvrtého čísla je 696. Odečtením prvních dvou rovnic dostaneme $a - c = 7$, takže a je aspoň 8. Je-li $a = 8$, je $b = 699$, $c = 1$, $d = 688$. Nejmenší možná hodnota prvního čísla je tudíž 8.

Uvádíme řešení podle *Michala Kubečka*, žáka 8. třídy základní školy v Praze 4, Na planině. Vrcholy lichoběžníku označil A, B, C, D tak, že $a = |AB| > |CD| = c$, $AB \parallel CD$. Středy stran AB, BC, CD, DA označíme K, M, L, N (obr. 8). Mají-li čtyřúhelníky $NAKX$, $LDNX$, $MCLX$ a $KBMX$ stejné obsahy, rovnají se sobě součty obsahů prvních dvou a posledních dvou, oba součty se rovnají polovině obsahu lichoběžníku $ABCD$. Jelikož úsečka KL dělí lichoběžník na dva lichoběžníky stejného obsahu, musí ležet bod X na úsečce KL. Označme S střed úsečky MN (obr. 9), v výšku lichoběžníku



Obr. 8



Obr. 9

a h vzdálenost bodu X ležícího na úsečce SK od přímky MN. Stačí určit h, a tedy bod X tak, aby se sobě rovnaly obsahy čtyřúhelníků $NAKX$ a $LDNX$, pak se již budou sobě rovnat obsahy čtyřúhelníků $MCLX$ a $KBMX$. Obsah čtyřúhelníku $LDNX$ dostaneme sečtením obsahů lichoběžníku $LDNS$ a trojúhelníku NSX, obsah čtyřúhelníku $NAKX$ se rovná rozdílu obsahů lichoběžníku $NAKS$ a trojúhelníku NSX, takže pro h platí

$$\frac{v}{2}\cdot\frac{\frac{c}{2}+\frac{a+c}{4}}{2}+\frac{a+c}{4}\cdot\frac{h}{2}=\frac{v}{2}\cdot\frac{\frac{a}{2}+\frac{a+c}{4}}{2}-\frac{a+c}{4}\cdot\frac{h}{2},$$

odkud $h=\frac{v}{2}\cdot\frac{a-c}{a+c}$. Dále je $|SX|:h=|KL|:v$, takže $|SX|=\frac{a-c}{2(a+c)}|KL|$, $|LX|=\frac{a}{a+c}|KL|$, $|KX|=\frac{c}{a+c}\cdot|KL|$. Tím je bod X určen, dělí úsečku KL v poměru $a:c$ a leží blíž k bodu K. Průsečík T úhlopříček AC, BD lichoběžníku leží také na úsečce KL a z podobnosti trojúhelníků CDT a ABT plyne, že $|LT|:|KT|=c:a$. Je proto $|KX|=|LT|$, $|LX|=|KT|$. To dává rychlou konstrukci bodu X: Na úsečku KL naneseme od bodu K vzdálenost $|LT|$, dostaneme tak bod X.

C - II - 3

Uvádíme málo upravené řešení, které v soutěži předložil *Václav Korál*, žák I. ročníku gymnázia v Praze 4, Postupická ul. Čísla A, B zapíšeme ve tvarech $A=10^3a+10^2b+10c+d$, $B=10^3d+10^2b+10c+a$. Jelikož jsou obě dělitelná číslem 63, je dělitelný číslem 63 i jejich rozdíl $A-B=999(a-d)$, tj. $999(a-d)=63n$, n přirozené číslo, tedy $111(a-d)=7n$. Číslo 111 není dělitelné sedmi, proto musí být dělitelné sedmi číslo $a-d$. Je proto $a=8$, $d=1$ nebo $a=9$, $d=2$. Případ $a=d$ můžeme totiž hned vyloučit, protože by bylo $A=B$ a největším společným dělitelem čísel A, B by bylo čtyřmístné číslo A, a tedy ne číslo 63.

Nechť je tedy $a=8$, $d=1$. Pak je $A=8001+10^2b+10c$,

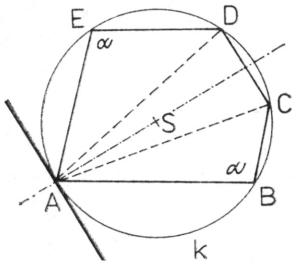
$B = 1008 + 10^2b + 10c$. Čísla 8001, 1008 jsou obě dělitelná číslem 63, proto musí být dělitelné číslem 63 i číslo $10(10b + c)$, takže $10b + c = 0$ nebo $10b + c = 63$. Dvojice (8001, 1008) a (8631, 1638) skutečně vyhovují podmínkám úlohy.

Nechť je $a = 9$, $d = 2$ a tedy $A = 9002 + 10^2b + 10c$, $B = 2009 + 10^2b + 10c$. Čísla 2009, 9002 jsou dělitelná sedmi, proto musí být dělitelné sedmi i číslo $10b + c$. Kromě toho musí být čísla A, B dělitelná devíti, tedy musí být dělitelný devíti jejich ciferný součet $2 + b + c$, takže $b + c = 7$ nebo $b + c = 16$. Z nejvýše dvouciferných násobků sedmi vyhovují této podmínce pouze čísla 7 a 70, takže $A = 9072$, $B = 2079$ nebo $A = 9702$, $B = 2709$. První dvojice však nevyhovuje všem podmínkám úlohy, protože největším společným dělitelem čísel 9072, 2079 je číclo $3.63 = 189$, druhá dvojice je řešením úlohy.

Úloha má právě tři řešení: (8001, 1008), (8631, 1638) a (9702, 2709).

C - II - 4

Označme $\alpha = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle AED|$ (obr. 10). Čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, proto $|\sphericalangle ADC| = 180° - \alpha$, podobně

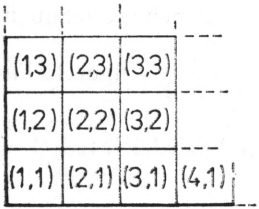


Obr. 10

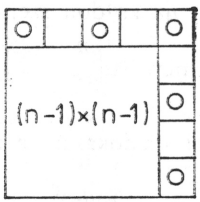
$|\sphericalangle DCA| = 180° - \alpha$. Trojúhelník ADC je tedy rovnoramenný, osa jeho základny DC prochází bodem A i středem S kružnice k. Je tudíž kolmá na přímku DC i na tečnu kružnice k v bodě A, a proto jsou přímka DC a tečna kružnice k v bodě A spolu rovnoběžné.

B - I - 1

Označme každé pole šachovnice $n \times n$ uspořádanou dvojicí (i, j) přirozených čísel podle obr. 11. Postavíme-li figurky na všechna pole, pro která jsou obě čísla i, j lichá, nebudou žádné dvě figurky sousedit, neboť pole sousední k poli (i, j) s lichými čísly i, j je označeno dvojicí čísel, z nichž je aspoň jedno sudé. Při lichém n jsme tak na šachovnici rozmístili $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ figurek, při sudém n jsme rozmístili $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ figurek. Ukážeme ještě, že více figurek nelze při dodržení podmínky úlohy rozmístit. Důkaz provedeme matematickou indukcí. Při $n = 1$ a $n = 2$ skutečně nelze rozmístit více než jednu figurku. Předpokládejme, že n je liché číslo, $n \geqq 3$. Šachovnici $n \times n$ pak můžeme rozdělit na šachovnici $(n-1) \times (n-1)$ a jeden řádek a jeden sloupec (obr. 12), přičemž tyto mají společné

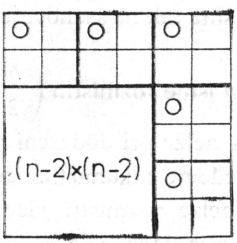


Obr. 11



Obr. 12

jedno pole. V tomto řádku a sloupci je celkem $2n - 1$ polí a můžeme na nich rozmístit nejvýše n figurek, nemají-li žádné dvě sousedit. Podle indukčního předpokladu můžeme na šachovnici $(n - 1) \times (n - 1)$ rozmístit nejvýše $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ figurek, celkem nejvýše $n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ figurek, což jsme měli dokázat. Při sudém n rozdělíme šachovnici $n \times n$ na šachovnici $(n - 2) \times (n - 2)$ a na $n - 1$ šachovnic typu 2×2 (obr. 13). Na šachovnici $(n - 2) \times (n - 2)$ můžeme



Obr. 13

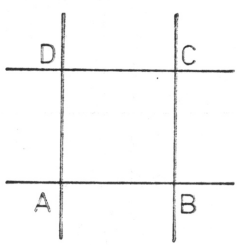
podle indukčního předpokladu rozmístit nejvýše $\left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ figurek, na každou šachovnici 2×2 nejvýše jednu figurku, celkem nejvýše $\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 + n - 1 = \left(\frac{n}{2}\right)^2$ figurek. Tím je indukční krok dokázán i při sudém n. Výsledek je tedy $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ při lichém n, $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ figurek při sudém n.

B - I - 2

Zřejmě 0 ani 1 nejsou kořeny mnohočlenu $P_n(x)$ při žádném n. Jeli $x > 1$, je vždy $x^{(2k)^2} - x^{(2k-1)^2} > 0$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Sečtením těchto nerovností s nerovností $1 > 0$ dostaneme $P_n(x) > 0$. Při $x < 0$ je $-x^{(2k-1)^2} > 0$, a tedy také $P_n(x) > 0$. Pro $x \in (0, 1)$ je $-x^{(2k-1)^2} + x^{(2k-2)^2} > 0$, pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Sečtením těchto nerovností a nerovnosti $x^{(2n)^2} > 0$ dostaneme $P_n(x) > 0$ i pro $x \in (0, 1)$. Dokázali jsme tudíž, že pro všechna reálná čísla x je $P_n(x) > 0$, tedy pro žádné reálné číslo x není $P_n(x) = 0$.

B - I - 3

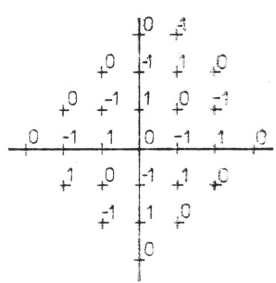
Zvolme jednotkový čtverec $ABCD$ s vrcholy v mřížových bodech roviny (obr. 14). Předpokládejme, že zobrazení F



Obr. 14

splňuje podmínku úlohy. Pak je $F(A) + F(D) + F(C) = 0$, $F(D) + F(C) + F(B) = 0$, takže $F(A) = F(B)$. Stejně tak dokážeme, že $F(B) = F(C)$. Přiřazuje tedy zobrazení F

každým dvěma sousedním mřížovým bodům, a tudíž každým dvěma mřížovým bodům, totéž číslo, jež se podle podmínky (1) v textu úlohy musí rovnat nule. Tudíž nenulové zobrazení požadovaných vlastností neexistuje. Budeme-li platnost (1) požadovat jen pro pravoúhlé trojúhelníky, jejichž přepona je rovnoběžná s přímkou BD, dostaneme pouze podmínku $F(A) = F(C)$, a to použitím trojúhelníků ABD a BDC. Víme pak, že zobrazení F přiřazuje stejnou hodnotu každým takovým dvěma mřížovým bodům, jejichž spojnice je rovnoběžná s přímkou AC. Za F můžeme vzít třeba zobrazení, které mřížovému bodu o souřadnicích $[x, y]$ přiřadí číslo 0, 1 nebo -1 podle toho, je-li číslo $y - x$ dělitelné třemi, dává při dělení třemi zbytek 1 nebo zbytek 2. Na obr. 15 je k několika mřížovým bodům připsána hodnota, kterou jim zobrazení F přiřazuje.

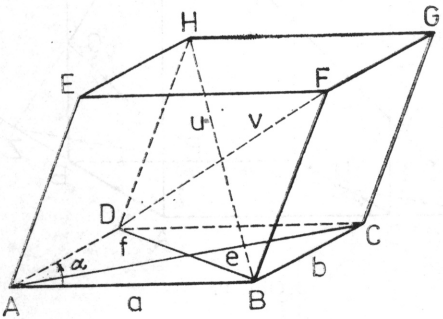


Obr. 15

B - I - 4

Označme e, f délky úhlopříček v rovnoběžníku $ABCD$, který je jednou stěnou rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$

(obr. 16), dále označíme $a = |AB|$, $b = |BC|$ délky hran a $\alpha = |\sphericalangle DAB|$. Podle kosinové věty je $f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$, $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$, takže $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$. Označme ještě u, v délky tělesových úhlopříček BH, DF rovnoběžnostěnu a $c = |AE|$ délku jeho třetí hrany. Podobně jako při předcházejícím postupu odvodíme, že



Obr. 16

$$u^2 + v^2 = 2(f^2 + c^2),\ w^2 + z^2 = 2(e^2 + c^2),$$

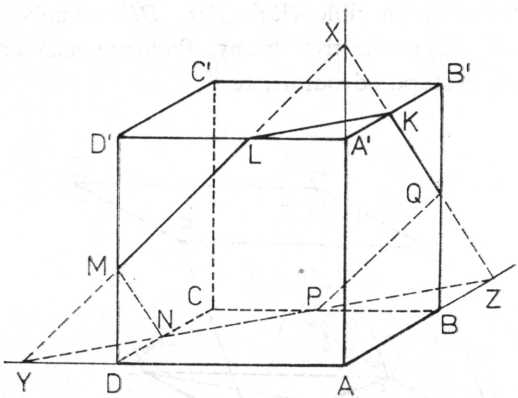
kde $w = |AG|$, $z = |CE|$ jsou délky zbývajících dvou tělesových úhlopříček rovnoběžnostěnu. Sečtením dostaneme

$$u^2 + v^2 + w^2 + z^2 = 2(e^2 + f^2) + 4c^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2).$$

Tím je úloha vyřešena. Je možné ji řešit také pomocí skalárního součinu vektorů. Označíme-li $\mathbf{u} = H - B$, $\mathbf{v} = F - D$, $\mathbf{w} = G - A$, $\mathbf{z} = E - C$, $\mathbf{a} = B - A$, $\mathbf{b} = D - A$, $\mathbf{c} = E - A$, je $\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{a} + \mathbf{c}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{b} + \mathbf{a} + \mathbf{c}$, $\mathbf{w} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{z} = -\mathbf{b} - \mathbf{a} + \mathbf{c}$, takže

$$|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{w}|^2 + |\mathbf{z}|^2 = 4(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2).$$

Přímka BD je kolmá k přímkám AC i AA', proto je kolmá k rovině CAA' (obr. 17), a tedy i k přímce AC'. Stejně tak



Obr. 17

dokážeme, že $BA' \perp AC'$, takže je k přímce AC' kolmá rovina BDA'. Roviny BDA' a $B'D'C$ jsou rovnoběžné, je tedy i rovina $B'D'C$ kolmá k přímce AC'. Rovina uvažovaného řezu je s těmito rovinami rovnoběžná. Je-li $t = 0$, tj. $K = A'$, je řezem trojúhelník BDA', je-li $t = a$, je řezem trojúhelník $B'D'C$. Je-li K vnitřním bodem úsečky $A'B'$, je řezem šestiúhelník $KLNMPQ$, přičemž $KL \parallel NP \parallel BD$, $LM \parallel PQ \parallel CB'$, $MN \parallel QK \parallel BA'$. Rovina řezu protne přímky AA', AD a AB v bodech X, Y, Z, které tvoří rovnostranný trojúhelník o straně délky $(a - t)\sqrt{2} + 2t\sqrt{2} = (a + t)\sqrt{2}$. Obvod o šestiúhelníku je $3(a - t)\sqrt{2} +$

$+ 3t\sqrt{2} = 3a\sqrt{2}$, neboť $|KL| = |KX| = t\sqrt{2}$, $|PN| = (a - t)\sqrt{2}$. Obsah S šestiúhelníku $KLMNPQ$ dostaneme, když od obsahu trojúhelníku XYZ odečteme obsahy trojúhelníků XKL, YMN, ZPQ, tedy trojnásobek obsahu rovnostranného trojúhelníku o straně délky $t\sqrt{2}$, takže

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + 2at - 2t^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{3a^2}{2} - 2\left(t - \frac{a}{2}\right)^2\right].$$

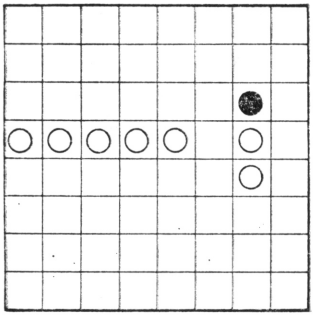
Vidíme, že pro $t \in \langle 0, a\rangle$ je obsah S maximální při $t = \frac{a}{2}$, minimální při $t = 0$ nebo $t = a$, kdy se však šestiúhelník redukuje na trojúhelník. Obvod o na t nezávisí, je konstantní.

B - I - 6

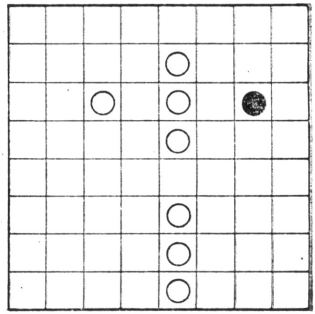
Důkaz provedeme matematickou indukcí. Je $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{2}{3}$. Pro $n = 3$ a $n = 4$ dokazované nerovnosti $0 < x_n < 1$, tedy platí. Předpokládejme, že platí pro všechna $k \leqq n + 1$. Pak je $2 - x_n - x_{n+1} > 0$, $1 - x_n x_{n+1} > 0$, takže $x_{n+2} > 0$. Je pak také $(1 - x_n)(1 - x_{n+1}) > 0$, tj. $2 - x_n - x_{n+1} > > 1 - x_n x_{n+1} > 0$, odkud plyne $x_{n+2} < 1$. Dokázali jsme $0 < x_{n+2} < 1$. Tím je tvrzení úlohy matematickou indukcí dokázáno.

B - S - 1

Úloha má více řešení, dvě jsou uvedena na obr. 18 a 19.



Obr. 18



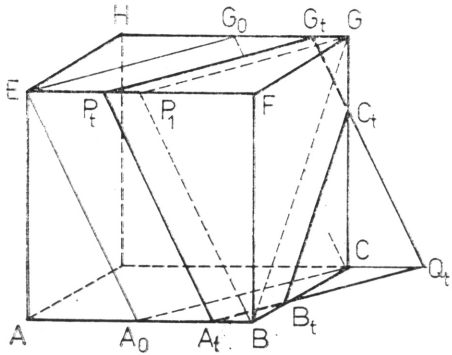
Obr. 19

B - S - 2

Pro $x = 1$ a $x = 2$ dostaneme celá čísla $a + b$, $2^{1988}a + b$, jejich rozdíl $a(2^{1988} - 1)$ je tedy také celé číslo, takže je číslo a racionální. Nechť je $a = \frac{p}{q}$, čísla p, q celá. Položíme-li $x = q$, vidíme, že číslo $aq^{1988} + b = pq^{1987} + b$ je číslo celé. To však znamená, že je i číslo b celé. Jelikož b je celé a číslo $a + b$ rovněž, je i číslo a celé. Tím je důkaz tvrzení úlohy dokončen, a i b jsou čísla celá.

B - S - 3

Trojúhelník BGP_1 (obr. 20) je rovnoramenný se základnou délky $2\sqrt{2}$, délky ramen BP_1 a GP_1 jsou $\sqrt{5}$. Jeho výška příslušná k základně má tudíž délku $\sqrt{3}$, obsah trojúhelníku BGP_1 je $S_1 = \sqrt{6}$. Pro $t = 0$ je řezem kosočtverec EA_0CG_0,



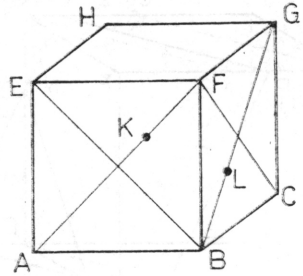
Obr. 20

jehož obsah je $2S_1 = 2\sqrt{6}$. Pro $t \in (0, 1)$ je řezem pětiúhelník $P_tA_tB_tC_tG_t$, který dostaneme z kosočtverce $P_tA_tQ_tG_t$ odříznutím trojúhelníku $B_tQ_tC_t$. Z podobnosti trojúhelníků $B_tQ_tC_t$ a GP_1B plyne, že se obsah trojúhelníku $B_tQ_tC_t$ rovná $t^2\sqrt{6}$. Obsah S_t řezu $P_tA_tB_tC_tG_t$ je tudíž $(2 - t^2)\sqrt{6}$.

B - II - 1

Dále uvedené řešení je od *Marty Bendové*, žákyně 2. ročníku gymnázia v Praze 1, Štěpánské ul. Přímka BG je kolmá k rovině EFC, protože je kolmá k přímkám FC a FE (obr. 21). Pak je však přímka BG také kolmá k přímce EC. Podobně dokážeme, že je rovina EBC kolmá k přímce AF, takže je $EC \perp AF$, $EC \perp BG$. Zřejmě je $KL \parallel EC$, takže je $KL \perp AF$ a $KL \perp BG$, což jsme měli dokázat.

Jiný důkaz se opírá pouze o Pythagorovu větu. Polo-



Obr. 21

žíme-li $|AB| = 3$, je $|KL| = \sqrt{3}$, $|BL| = \sqrt{2}$ a $|BK| = \sqrt{5}$, takže je trojúhelník KLB pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu L. Stejně tak dokážeme, že je trojúhelník FKL pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu K, takže $KL \perp BG$ a $KL \perp AF$.

B - II - 2

Úloha úzce navazuje na úlohu B - S - 1, velmi pěkně ji řešil *Vladimír Šolc*, žák 2. ročníku gymnázia v Berouně, jehož řešení zde uvádíme. Stojí-li na šachovnici 7 střelců, existuje jedna barva (bílá nebo černá) tak, že na polích této barvy stojí nejvýše tři střelci. Můžeme předpokládat, že je to barva bílá. Při kraji šachovnice je 14 bílých polí, přitom každý střelec na bílém poli může ohrozit nejvýše 4 bílá krajní pole šachovnice. Celkem tedy může být ohroženo nejvýše 12 bílých okrajových polí, nejméně dvě ohrožena nebudou.

B - II - 3

Žák *Ondřej Kalenda* z 2. ročníku gymnázia W. Piecka v Praze ukázal, že podmínkám úlohy vyhovuje mnohočlen

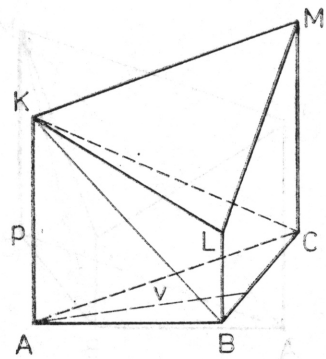
$$f(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-1)(x-2)\ldots(x-n),$$

jeho spolužák *Jakub Cvach* uvedl polynom

$$g(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-2)(x-3)\ldots(x-n)[x-(n+2)].$$

B - II - 4

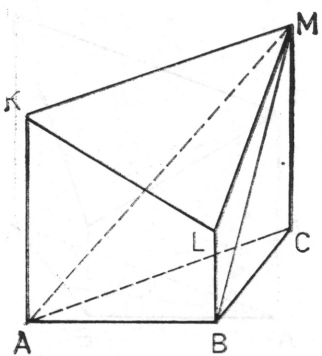
Velmi pěkné řešení uvedl v soutěži *Lubomír Rulíšek*, žák 2. ročníku gymnázia W. Piecka v Praze. Postupoval asi takto: Těleso *ABCKLM* (obr. 22) se skládá z jehlanu *ABCK*



Obr. 22

a jehlanu $BCMLK$. První jehlan má objem $\frac{1}{3}Sp$, objem druhého jehlanu je $\frac{1}{3}Pv$, kde v je výška jehlanu na stěnu $BLMC$, což je zároveň výška v trojúhelníku ABC na stranu BC, P je obsah lichoběžníku $BLMC$. Proto je $P = \frac{1}{2}(q + r)\,a$, kde $a = |BC|$. Je tudíž $\frac{1}{3}Pv = \frac{1}{6}(q + r)\,av = \frac{1}{3}(q + r)\,S$, celkový objem tělesa $ABCKLM$ je proto $\frac{1}{3}S(p + q + r)$.

Jiné řešení ukázal *Jan Macháček* z 2. ročníku téhož gymnázia. Rozložil těleso $ABCKLM$ na jehlany $ABCM$, $ABML$ a $ALMK$. Objem jehlanu $ABML$ (obr. 23) se rovná objemu



Obr. 23

$ABCL$, protože tyto jehlany mají stejnou podstavu ABL a body M, C jsou od ní stejně vzdáleny. Obsah trojúhelníku AKL se rovná obsahu trojúhelníku AKB, takže objem jehlanu $AKLM$ se rovná objemu jehlanu $AKBM$ a ten se rovná objemu jehlanu $AKBC$, neboť poslední dva jehlany mají stejnou podstavu AKB, od níž jsou body M, C stejně vzdáleny. Jehlany $ABCM$, $ABCL$, $ABCK$ mají objemy $\frac{1}{3} Sq$, $\frac{1}{3} Sr$, $\frac{1}{3} Sp$, takže celkový objem tělesa $ABCKLM$ je $\frac{1}{3} S(p + q + r)$.

A - I - 1

Uvažujeme množinu M všech mnohočlenů s požadovanými vlastnostmi. Množina M je neprázdná, protože do ní patří mnohočlen $m(x) = x^{1987} - 2$. Označme p ten z mnohočlenů v množině M, který má nejmenší stupeň. Potom p dělí každý mnohočlen v M, tedy i m. To plyne z dělitelnosti mnohočlenů: Je-li $n \in \mathsf{M}$, označme q jeho podíl při dělení mnohočlenem p a r příslušný zbytek, tj. mnohočlen s racionálními koeficienty stupně menšího, než je stupeň mnohočlenu p. Protože n i p leží v množině M, plyne z rovnosti

$$n = pq + r,$$

že je také $r \in \mathsf{M}$. Protože předpokládáme, že p má v množině M nejmenší stupeň, musí být $r = 0$.

Mnohočlen $m(x) = x^{1987} - 2$ má kořeny

$$x_k = \sqrt[1987]{2}\left(\cos\frac{2\pi k}{1987} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi k}{1987}\right),\ 0 \leqq k \leqq 1986.$$

Mnohočlen p má reálné koeficienty, takže s každým kořenem x_k má i komplexně sdružený kořen $\bar{x}_k$ $(1 \leqq k \leqq 1986)$. Odtud vyplývá, že mnohočlen p je součinem některých trojčlenů

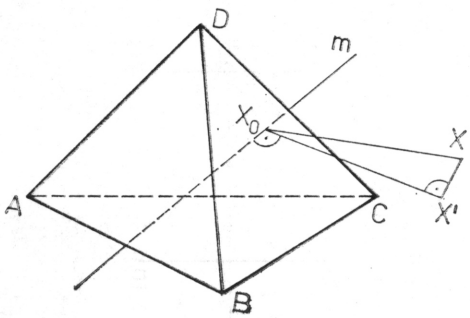
$$(x - x_k)(x - \bar{x}_k) = x^2 - 2x\,\mathrm{Re}\,x_k + |x_k|^2 =$$
$$= x^2 - 2x\cos\frac{2\pi k}{1987} + \sqrt[1987]{4}$$

a případně i dvojčlenu $x - x_0 = x - \sqrt[1987]{2}$. Jeho absolutní člen je pak tvaru $\sqrt[1987]{2^j}$ pro nějaké $j \in \{1, 2, \ldots, 1987\}$. To je ale racionální číslo jen pro $j = 1987$. Je tedy $p = m$ a hledaný mnohočlen je $x^{1987} - 2$.

Poznámka. Tvrzení, že odmocnina $\sqrt[1987]{2^j}$ je racionální jen pro čísla $j = 1987 j_1$, není asi každému zřejmé. Dokáže se ale obdobně jako známé tvrzení, že $\sqrt{2}$ je iracionální. Předpokládejme, že $\sqrt[1987]{2^j} = \frac{p}{q}$ pro nějaká nesoudělná celá čísla p, q, tj. že platí $q^{1987} . 2^j = p^{1987}$, odkud plyne, že p je sudé. A protože q musí být liché a 2^{1987} dělí $q^{1987} . 2^j$, vychází, že exponent j je násobkem čísla 1987.

A - I - 2

Označme m spojnici středů hran AB a CD (jejich společnou osu) a pro libovolný bod X prostoru označme X_0 jeho



Obr. 24

pravoúhlý průmět na přímku m (obr. 24). Je-li X' pravoúhlý průmět bodu X do roviny ABm, je

$$|AX| + |BX| = \sqrt{|AX'|^2 + |XX'|^2} + \sqrt{|BX'|^2 + |XX'|^2} \geqq$$
$$\geqq |AX'| + |BX'| \geqq |AX_0| + |BX_0|$$

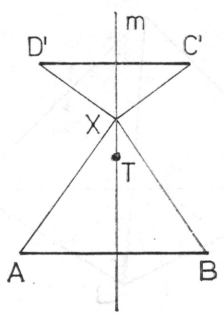
(přímky AB a X_0X' jsou rovnoběžné!) s rovností, právě když bod X leží na m nebo na úsečce AB. Podobně dostaneme nerovnost

$$|CX| + |DX| \geqq |CX_0| + |DX_0|$$

s rovností, právě když bod X leží na m nebo na úsečce CD. Stačí tedy zkoumat jen body X ležící na přímce m.

Otočme úsečku CD kolem přímky m do roviny určené přímkami AB a m; dostaneme úsečku $C'D'$ (obr. 25). Pro každý bod $X \in m$ potom je

$$|AX| + |BX| + |CX| + |DX| =$$
$$= |AX| + |BX| + |C'X| + |D'X|,$$



Obr. 25

přitom

$$|AX| + |D'X| \geqq |AT| + |D'T|,$$
$$|BX| + |C'X| \geqq |BT| + |C'T|,$$

kde T je střed (těžiště) daného čtyřstěnu, takže

$$|AX| + |BX| + |C'X| + |D'X| \geqq$$
$$\geqq |AT| + |BT| + |CT| + |DT|$$

s rovností, právě když $X = T$.

Jiné řešení. Pro libovolný bod X prostoru označme

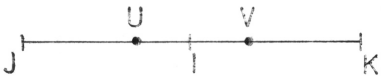
$$f(X) = |AX| + |BX| + |CX| + |DX|.$$

Protože podle předcházejícího řešení funkce f může nabývat minima pouze v některém bodě ležícím na ose dvou protějších hran daného čtyřstěnu, stačí ukázat, že funkce f má minimum. Funkce f pak nabývá minima v průsečíku obou os protějších hran čtyřstěnu, což je střed S opsané kulové plochy.

Funkce f je zřejmě spojitá. Uvažujme kouli K se středem A a poloměrem $f(S)$. Daný čtyřstěn leží celý v kouli K, což je omezená a uzavřená množina, na které nabývá spojitá funkce f svého minima. A vně koule K už je $f(X) > f(S)$.

A - I - 3

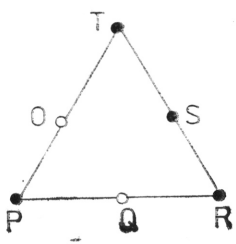
Nejprve ukážeme, že vždy existují tři stejně obarvené body R, S, T takové, že bod S půlí úsečku RT. Jistě existují dva body U, V obarvené stejnou barvou. Uvažujme body I, J, K (obr. 26) takové, že I půlí úsečku UV, U je střed úsečky JV a V je střed úsečky UK. Pokud nejsou stejno-



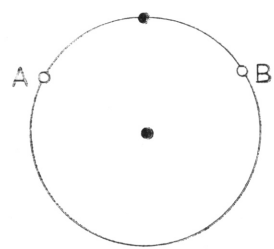
Obr. 26

barevné trojice bodů U, I, V; J, U, V; U, V, K, mají tři body I, J, K stejnou barvu, přičemž I je středem úsečky JK.

Mějme tedy tři stejnobarevné body R, S, T, kde S půlí úsečku RT, a uvažujme rovnostranný trojúhelník PRT (obr. 27). Pokud má některý z bodů O, P, Q stejnou barvu



Obr. 27

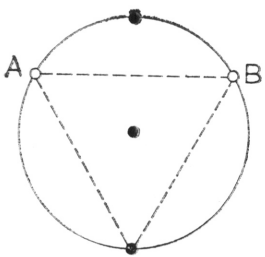


Obr. 28

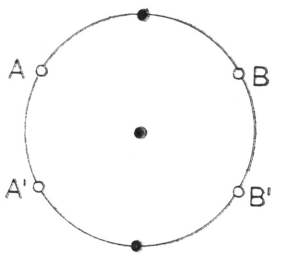
jako body R, S, T, jsme hotovi (vznikne stejnobarevný rovnostranný trojúhelník OST, resp. PRT, resp. QRS). V opačném případě bude mít rovnostranný trojúhelník OPQ stejně obarvené vrcholy.

Jiné řešení. Uvažujme šest bodů ve vrcholech pravidelného šestiúhelníku a střed opsané mu kružnice. Má-li střed šestiúhelníku např. černou barvu, můžeme předpokládat, že jeho vrcholy nejsou všechny dejme tomu bílé, jinak bychom

byli hotovi. Podobně nám vyjde, že i body A, B (obr. 28) budou bílé a k nim příslušný vrchol rovnostranného trojúhelníku černý (obr. 29). Konečně musí být zbývající dva body bílé (obr. 30), jinak jsme s vybarvováním bodů roviny



Obr. 29



Obr. 30

hotovi. Přidáme-li ale k uvedeným sedmi bodům další bod podle obr. 30, vidíme, že ať ho obarvíme jakkoli, dostaneme stejnobarevný rovnostranný trojúhelník.

A - I - 4

Využijme známou skutečnost, že čtyřúhelník $TPCQ$ je tečnový, právě když

$$|TP| + |CQ| = |PC| + |TQ|. \qquad (1)$$

Je-li trojúhelník ABC rovnoramenný se základnou AB, je $|TP| = |TQ|$ a $|CP| = |CQ|$, takže podle (1) je $TPCQ$ tečnový čtyřúhelník. Označme $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AP| = |BQ| = t_b$; z (1) pak plyne:

$$\frac{1}{3}\,t_a + \frac{b}{2} = \frac{1}{3}\,t_b + \frac{a}{2},$$

a tedy

$$2(t_a - t_b) = 3(a - b). \tag{2}$$

Kružnice vepsaná čtyřúhelníku $TPCQ$ je vepsána též trojúhelníkům APC a BQC, které mají stejný obsah S. Pro poloměr ϱ vepsané kružnice platí

$$\varrho = \frac{2S}{|AP| + |PC| + |AC|} = \frac{2S}{|BQ| + |QC| + |CB|},$$

takže

$$t_a + \frac{a}{2} + b = t_b + \frac{b}{2} + a,$$
$$2(t_a - t_b) = a - b. \tag{3}$$

Z rovností (2) a (3) dostáváme $a - b = 0$, tj. $a = b$ a trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou AB.

Jiné řešení. Dokážeme jen druhou implikaci. Při stejném označení jako v prvním řešení spočteme velikosti těžnic podle kosinové věty

$$t_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4},$$
$$t_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4},$$

(napíšeme kosinovou větu pro strany AP, AB trojúhelníků APC, ABC, které mají společný úhel, vyloučením členu

s $\cos\gamma$ dostaneme první rovnost, druhou odvodíme analogicky či cyklickou záměnou), takže dostaneme

$$t_b^2 - t_a^2 = \frac{3}{4}(a^2 - b^2).$$

Odtud je vidět, že $a > b$, právě když $t_b > t_a$, zatímco ze vztahu (2) plyne, že $a > b$, právě když $t_a > t_b$. Je proto nutně $a = b$ a trojúhelník ABC je rovnoramenný.

A - I - 5

Předpokládejme, že tvrzení neplatí, tj. že existuje přirozené číslo k takové, že pro každá dvě přirozená čísla m, n, $m + n \geqq k$, platí

$$f(m, n) \geqq f(m + 1, n) + f(m, n + 1) \geqq 2.$$

Odtud ale dále plyne

$$f(m, n) \geqq f(m + 2, n) + f(m + 1, n + 1) + \\ + f(m + 1, n + 1) + f(m, n + 2) \geqq 2^2,$$

takže pro pevně zvolená dvě čísla m, n, $m + n \geqq k$, matematickou indukcí dostaneme, že

$$f(m, n) \geqq 2^N$$

pro libovolné přirozené N. To je spor.

Jiné řešení. Pro dané k přirozené označme

$$c = \inf_{x+y \geqq k} f(x, y),$$

zřejmě je $c \geqq 1$. Z vlastností infima plyne, že existují přirozená čísla $m, n, m + n \geqq k$, taková, že

$$c \leqq f(m, n) < 2c.$$

Odtud ale plyne nerovnost

$$f(m, n) < 2c \leqq f(m + 1, n) + f(m, n + 1)$$

pro všechna přirozená čísla m, n taková, že $m + n \geqq k$.

A - I - 6

Předpokládejme, že takové číslo existuje a že

$$n = \sum_{i=0}^{22} 10^i a_i$$

je jeho zápis v desítkové soustavě. Protože

$$10^{2i+1} \equiv -1 \text{ a } 10^{2i} \equiv 1 \pmod{11},$$

dává číslo n při dělení 11 zbytek

$$z \equiv \sum_{i=0}^{11} a_{2i} - \sum_{i=0}^{10} a_{2i+1} \pmod{11},$$

kde $1 \leqq z \leqq 10$. Jak teď můžeme změnou jedné číslice dostat číslo dělitelné 11? Je-li např. pro nějaké $i \in \{0, 1, \ldots, 11\}$ $a_{2i} \geqq z$, změníme číslici a_{2i} na $a_{2i} - z$, je-li naopak $a_{2i} \leqq z - 2$, napíšeme místo a_{2i} číslici $a_{2i} + 11 - z$ a dostaneme tak nové číslo, které bude dělitelné 11. Musí tedy být $a_{2i} = z - 1$, $1 \leqq i \leqq 11$. Podobně pro číslice na lichých místech nemůže být ani $a_{2i+1} \leqq 9 - z$, ani $a_{2i+1} \geqq 11 - z$. Vychází tedy jediná možnost $a_{2i+1} = 10 - z$, $1 \leqq i \leqq 10$.

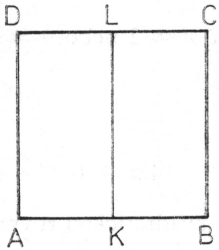
V úvahu proto přichází jedině číslo n, které má na lichých místech číslici $10 - z$ a na sudých $z - 1$. Pro jeho zbytek z při dělení 11 však máme kongruenci

$$z \equiv 12(z - 1) - 11(10 - z) \equiv z - 1 \pmod{11},$$

což nejde. Číslo požadovaných vlastností tedy neexistuje.

A - S - 1

Označme A, B, C, D vrcholy daného čtverce a K, L středy jeho protějších stran AB, CD (obr. 31). Kruhy, jejichž hraniční kružnice jsou opsány obdélníkům $AKLD$, $KBCL$, zřejmě pokryjí celý čtverec a jejich poloměr je $\frac{5}{2}\sqrt{5}$.



Obr. 31

Předpokládejme, že čtverec $ABCD$ je pokryt dvěma shodnými kruhy o poloměru r. Ze čtyř jeho vrcholů aspoň dva leží v jednom z kruhů. Jsou-li to protější vrcholy, vyjde $2r \geqq 10\sqrt{2} > 5\sqrt{5}$. V opačném případě musí jeden z kruhů obsahovat dvojici sousedních vrcholů (např. B, C) a druhý

kruh protější dvojici A, D. Protože aspoň jeden z kruhů musí obsahovat taky bod K, je vidět, že $2r \geqq 5\sqrt{5}$. Je tedy $r = \frac{5}{2}\sqrt{5}$ hledaný nejmenší poloměr.

A - S - 2

Jsou-li $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kořeny uvažované rovnice, dostaneme roznásobením kořenových činitelů

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 4,$$
$$x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n.$$

Je hned vidět, že n nemůže být liché, protože všechna x_i jsou nezáporná. Z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pak plyne, že $\frac{4}{n} \geqq 1$, je tedy nutně $n = 2$ nebo $n = 4$.

Pro $n = 4$ vyjde $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ a rovnice má tvar

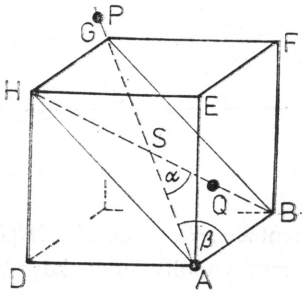
$$(x - 1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Pro $n = 2$ dostaneme kvadratickou rovnici

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

s nezápornými kořeny $2 \pm \sqrt{3}$. Požadavkům úlohy vyhovují obě čísla $n = 2$ i $n = 4$.

Jestliže krychle $ABCDEFGH$ splňuje podmínky úlohy, leží obdélník $ABGH$ v rovině APQ a je $|BG| = |AB|\sqrt{2}$ (obr. 32). Obdélníkem $ABGH$ je krychle jednoznačně určena (až na záměnu označení hran CD, FE).

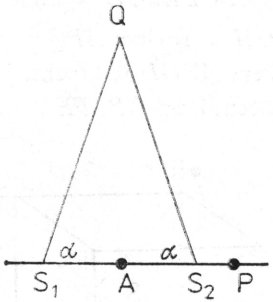


Obr. 32

Označme S střed krychle, který je zároveň středem obdélníku $ABGH$. Známe velikost α úhlu, který svírají tělesové úhlopříčky AG a BH, je to velikost úhlu úhlopříček v obdélníku, jehož strany jsou v poměru $\sqrt{2} : 1$. Označme ještě β velikost úhlu SAB. Přitom je $\beta < \alpha$, jak snadno zjistíme $\left(\alpha > \frac{\pi}{3}\right)$.

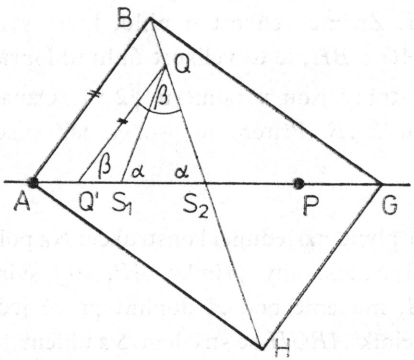
Z rozboru plyne následující konstrukce: Na polopřímce AP zvolíme bod S tak, aby přímky AP, SQ svíraly úhel α. Je-li $S \neq A$, můžeme bod A doplnit právě jedním způsobem na obdélník $ABGH$ se středem S a úhlem $|\sphericalangle ASB| = \alpha$ (bod B leží na přímce QS).

Pro volbu bodu S máme dvě možnosti, označme je S_1 a S_2 (obr. 33), jejich pořadí volíme tak, aby orientace S_1S_2



Obr. 33

byla stejná jako orientace AP. Obdélník $ABGH$ se středem S_1 bude splňovat podmínky úlohy, právě když bod S_1 bude ležet na polopřímce AP, $S_1 \neq A$ (bod B pak bude ležet na polopřímce opačné k polopřímce S_1Q). Obdélník $ABGH$ se



Obr. 34

středem S_2 bude splňovat podmínky úlohy, právě když bod B ležící tentokrát na polopřímce S_2Q nepadne dovnitř úsečky QS_2 (obr. 34), tj. právě když bod Q' souměrně sdružený s bodem Q podle osy úhlu QS_2A bude ležet na polopřímce AP. Podle toho má úloha buď dvě řešení (Q' leží na polopřímce AP), nebo jedno řešení (Q' leží vně polopřímky AP a $S_1 \neq A$ leží na polopřímce AP), anebo žádné řešení neexistuje.

A - II - 1

Uvažujme čtyři vrcholy daného jednotkového čtverce a jeho střed. Jestliže je čtverec pokryt čtyřmi shodnými kruhy o poloměru r, obsahuje jeden z kruhů aspoň dva z uvedených pěti bodů. A protože každé dva z těchto pěti bodů mají vzdálenost aspoň $\frac{\sqrt{2}}{2}$, plyne odtud, že je $r \geqq \frac{\sqrt{2}}{4}$.

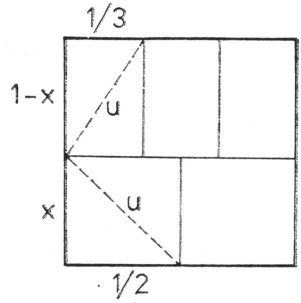
Jednotkový čtverec pokryjeme pěti kruhy opsanými obdélníkům podle obr. 35 (jejich úhlopříčky jsou shodné). Z rovnosti

$$u^2 = \frac{1}{9} + (1 - x)^2 = \frac{1}{4} + x^2$$

plyne $x = \frac{31}{72}$, takže

$$u^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{31}{72}\right)^2 < \frac{1}{2}.$$

Příslušné kruhy tedy mají poloměr menší než $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

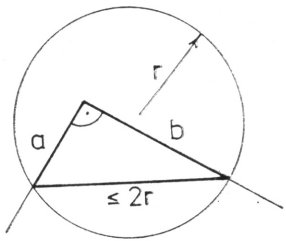


Obr. 35

Poznámky. Mnoho účastníků II. kola místo racionálního důkazu vyšlo ze »zřejmé« skutečnosti, že optimální pokrytí čtverce čtyřmi shodnými kruhy musí být symetrické (podle středu). Žel, takováto heuristická úvaha k opravdovému důkazu nestačí, jak ostatně ukázala druhá část uvedené úlohy. Vycházejíce ze souměrnosti, usuzovali tito »řešitelé« většinou na to, že pokrytí pěti shodnými kruhy pro $r < \frac{\sqrt{2}}{4}$ rovněž neexistuje... Na druhé straně se však v žákovských řešeních objevily i následující dva pěkné nápady:

Pro $r < \frac{\sqrt{2}}{4}$ nelze úhlopříčku jednotkového čtverce pokrýt dvěma shodnými kruhy, takže na to potřebujeme kruhy aspoň tři. Ale žádný z těchto kruhů nemůže obsahovat zbylé dva vrcholy druhé úhlopříčky, a ty nelze jedním kruhem o poloměru $r < \frac{\sqrt{2}}{4}$ oba najednou pokrýt (Jaroslav Trnka, 4. roč. G Liberec).

Kruh o poloměru $r < \frac{1}{2}$ pokryje nejvýše $2\sqrt{2}\,r$ z obvodu jednotkového čtverce (obr. 36), neboť $a + b \leqq 2\sqrt{2}\,r$. Čtyři



Obr. 36

shodné kruhy tak celkem pokryjí nejvýše $8\sqrt{2}\,r$ z obvodu čtverce. Proto musí být $8\sqrt{2}\,r \geqq 4$, tj. $r \geqq \frac{\sqrt{2}}{4}$.

A - II - 2

Předpokládejme, že daná rovnice má reálné kořeny x_1, x_2, x_3, x_4, takže

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + ax + b = (x - x_1) \ldots (x - x_4)\,.$$

Porovnáním koeficientů dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -4\,, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 &= 6\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Odtud plyne, že

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4\,. \tag{2}$$

Protože pro reálná čísla u_1, u_2, u_3, u_4 platí (Cauchyova) nerovnost

$$(u_1 + u_2 + u_3 + u_4)^2 \leqq 4(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2),$$

plyne z (1) a (2), že pro kořeny dané rovnice v uvedené nerovnosti nastane rovnost. To znamená, že existuje reálné k, pro které je $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = k$. Z (1) pak vyjde $k = -1$. Uvedená rovnice má proto jediný (čtyřnásobný) kořen -1 a je

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + ax + b = (x + 1)^4,$$

takže $a = 4$, $b = 1$.

Jiné řešení. Protože

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + ax + b = (x + 1)^4 - 4x - 1 + ax + b = \\ = (x + 1)^4 + (x + 1)(a - 4) + b - a + 3,$$

dostaneme po substituci $u = x + 1$ rovnici

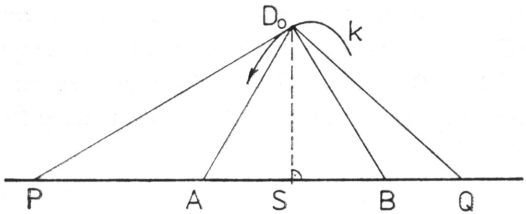
$$u^4 = pu + q, \quad p = 4 - a, \quad q = a - b - 3.$$

Ta může mít čtyři reálné kořeny jen v tom případě, když se přímka $v = pu + q$ dotýká bikvadratické paraboly $v = u^4$ ve vrcholu (pak má jeden čtyřnásobný kořen), tedy jen pro $p = q = 0$. Odtud plyne $a = 4$, $b = 1$.

A - II - 3

Předpokládejme, že hledaný čtyřstěn $ABCD$ existuje. Trojúhelník PQD je určen podle věty usu. Tím jsou zároveň jednoznačně (až na uspořádání) určeny body A, B, neboť vzdálenost bodu D od úsečky PQ je výškou rovnostranného

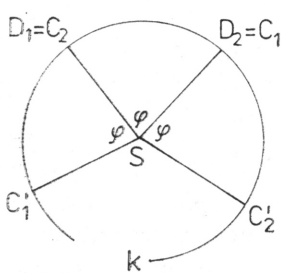
trojúhelníku ABD. Sestrojíme tedy v libovolné rovině $\varrho \ni PQ$ bod D_0 tak, aby $|\sphericalangle QPD_0| = 30°$, $|\sphericalangle PQD_0| = 45°$. Vrchol D čtyřstěnu bude pak ležet na kružnici k (obr. 37), kterou do-



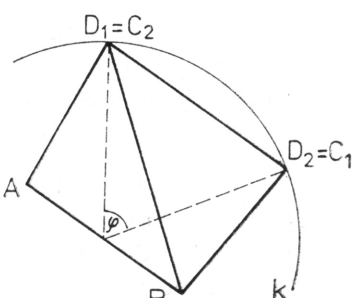
Obr. 37

staneme otáčením bodu D_0 kolem osy PQ, a zároveň v rovině δ. Trojúhelník ABD pak doplníme na pravidelný čtyřstěn, který bude řešením úlohy.

Počet řešení závisí na vzájemné poloze roviny δ a kružnice k. Pokud $k \cap \delta = \emptyset$, nemá úloha řešení; je-li průnik jedno-



Obr. 38a



Obr. 38b

bodový, má úloha dvě řešení souměrně sdružená podle roviny ABD; a leží-li kružnice k v rovině δ, existuje nekonečně mnoho řešení. Zbývá případ, kdy kružnice k má s rovinou δ dva společné body D_1, D_2. Každý z trojúhelníků ABD_1, ABD_2 můžeme doplnit na pravidelný čtyřstěn dvěma způsoby. Je-li však $|\sphericalangle D_1AD_2| = 60°$ (obr. 38), dva ze čtyřstěnů splynou ($ABC_2D_2 = ABC_1D_1$) a úloha má jen tři řešení. V opačném případě ($|\sphericalangle D_1AD_2| \neq 60°$) dostaneme čtyři různá řešení.

A - II - 4

Označme $d(p)$ uvažovaný součet. Ukážeme, že největší součet se nabývá pro permutaci p_0, kde $p_0(i) = n - i + 1$, $1 \leqq i \leqq n$. Permutace p_0 má tu vlastnost, že je klesající, tj. pro každé $i < j$ je $p_0(i) > p_0(j)$. Je-li $p \neq p_0$, existuje k, pro které je $p(k) < p(k+1)$. Prohozením hodnot $p(k)$, $p(k+1)$ dostaneme novou permutaci p', pro kterou je

$$p'(i) = p(i), \quad k \neq i \neq k+1,$$
$$p'(k) = p(k+1), \quad p'(k+1) = p(k),$$
$$d(p') - d(p) = |p(k) - k - 1| + |p(k+1) - k| - |p(k) - k| - |p(k+1) - k - 1|.$$

Pro $p(k) < p(k+1) \leqq k$ i pro $k+1 \leqq p(k) < p(k+1)$ vyjde $d(p') = d(p)$, pro $p(k) \leqq k < k+1 \leqq p(k+1)$ je $d(p') - d(p) = 2$. Je tedy $d(p') \geqq d(p)$. Přitom počet těch dvojic $i < j$, pro něž je $p(i) < p(j)$, se uvedenou změnou zmenšil. Po konečném počtu kroků tak dojdeme k permutaci p_0, pro kterou je

$$d(p_0) = n-1+n-3+\ldots+2+2+\ldots+n-1 =$$
$$= 2\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n-1}{2} = \frac{n^2-1}{2} \text{ pro } n \text{ liché},$$
$$= n-1+n-3+\ldots+3+1+1+\ldots+n-1 =$$
$$= 2\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2} = \frac{n^2}{2} \text{ pro } n \text{ sudé},$$

což můžeme jednoduše zapsat jako $d(p_0) = \left[\frac{n^2}{2}\right]$.

Jiné řešení. Pro danou permutaci p odstraňme v součtu

$$d(p) = \sum_{i=1}^{n} |p(i) - i|$$

absolutní hodnoty. Je zřejmé, že v získaném součtu bude n sčítanců s kladným znaménkem a n sčítanců se záporným znaménkem. Přitom každé z čísel $1, 2, \ldots, n$ se v uvedeném součtu vyskytne právě dvakrát. Je tedy jasné, že platí (viz též poznámky)

$$d(p) \leqq n+n+(n-1)+\ldots+\left[\frac{n+3}{2}\right]+\left[\frac{n+3}{2}\right]-$$
$$-\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{2}\right]-\ldots-2-2-1-1 =$$
$$= 2\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)\left[\frac{n}{2}\right] = 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right] = \left[\frac{n^2}{2}\right].$$

Nyní stačí zjistit, zda existuje nějaká permutace, pro kterou uvedená situace nastane. Tomuto požadavku vyhovuje např. permutace

$$p_0(i) = n - i + 1, \quad 1 \leqq i \leqq n.$$

(Permutací s maximálním součtem $d(p)$ existuje ovšem více, jejich počtem se zabývá např. úloha 24 v knize A. Vrby Kombinatorika, Škola mladých matematiků č. 45.)

Jiné řešení. Pro danou permutaci p označme A množinu těch čísel $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pro která je $i < p(i)$, a předpokládejme, že A má k prvků ($0 \leqq k \leqq n-1$). Pak platí

$$\begin{aligned} d(p) &= \sum_{i \in \mathsf{A}} (p(i) - i) + \sum_{i \notin \mathsf{A}} (i - p(i)) = \\ &= \sum_{i \in \mathsf{A}} p(i) + \sum_{i \notin \mathsf{A}} i - \sum_{i \in \mathsf{A}} i - \sum_{i \notin \mathsf{A}} p(i) \leqq \\ &\leqq (n + n - 1 + \ldots + n - k + 1) + \\ &\quad + (n + n - 1 + \ldots + (k+1)) - \\ &\quad - (1 + 2 + \ldots + k) - (1 + 2 + \ldots + (n-k)) = \\ &= k \frac{2n - k + 1}{2} + (n-k) \frac{n + k + 1}{2} - k \frac{k+1}{2} - \\ &\quad - (n-k) \frac{n - k + 1}{2} = 2k(n-k) \leqq \left[\frac{n^2}{2} \right]. \end{aligned}$$

Dále stačí dokázat, že existuje permutace, pro kterou zde nastane rovnost.

Jiné řešení. Pro danou permutaci p a pro $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ spočtěme, kolik je takových dvojic $(i, p(i))$, že $i \leqq k < p(i)$ nebo $p(i) \leqq k < i$. Označme tento počet d_k. Nyní je důležité si uvědomit, že je vlastně

$$\sum_{i=1}^{n} |p(i) - i| = \sum_{k=1}^{n-1} d_k .$$

Odtud dostaneme vhodný odhad, protože pro $k \leqq \frac{n}{2}$ je odpo-

vídajících dvojic nejvýše $2k$, tj. $d_k \leqq 2k$, a pro $k > \frac{n}{2}$ je zase $d_k < 2(n-k)$, takže dohromady je

$$d(p) \leqq \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} 2k + \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1} 2(n-k) =$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} k + 2 \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} k = \left[\frac{n^2}{2}\right],$$

jak postupně spočteme. Dále stačí ukázat, že existuje permutace, pro kterou nastane rovnost.

Poznámky. Výpočty v 2. řešení vypadají trochu kouzelně, ale jinak bychom nemohli uvedené vztahy zapsat najednou pro lichá i sudá n; rozlišením obou možností snadno ověříte, že je vše v pořádku. Podobně není těžké ověřit, že pro každé přirozené n platí

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] = n, \; 2\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[\frac{n^2}{2}\right].$$

Pro ty, kteří hned nevidí např. rovnost

$$n + n - 1 + \ldots + n - k + 1 = k\frac{2n - k + 1}{2},$$

připomínáme, že pro součet konečné aritmetické posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_k$ kromě známého vzorečku platí i

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = k\frac{a_1 + a_k}{2}.$$

A - III - 1

Protože M je konečná, existují indexy r, $r + p$ takové, že $x_r = x_{r+p}$. Pak už je zřejmě $x_n = x_{n+p}$ pro každé $n \geqq r$ a dokonce $x_n = x_{n+kp}$ pro každé $n \geqq r$ a $k \geqq 0$. Vezmeme-li $m = kp$ tak, aby bylo $m > r$, bude $x_m = x_{kp} = x_{kp+kp} = x_{2m}$.

A - III - 2

Pro kořeny x_1, x_2, x_3 dané rovnice platí

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a\,,$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b\,,$$
$$x_1x_2x_3 = -c\,,$$

takže z podmínky $a^2 - 2b = 2$ plyne

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2\,.$$

Je tedy

$$\begin{aligned}
&4 - (a - c)^2 = 4 - a^2 + 2ac - c^2 = 2 - 2b + 2ac - c^2 = \\
&= 2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + \\
&\quad + 2(x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2) - x_1^2x_2^2x_3^2 = \\
&= 2(1 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_2 + x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2 - \\
&\quad - x_1^2x_2^2x_3^2) + x_1^2x_2^2x_3^2 = \\
&= 2(1 - x_1x_2)(1 - x_2x_3)(1 - x_3x_1) + x_1^2x_2^2x_3^2 \geqq 0\,,
\end{aligned}$$

neboť pro každé $i \in \{1, 2, 3\}$ platí (indexy počítáme mod 3)

$$\begin{aligned}
2(1 - x_ix_{i+1}) &= 2 - 2x_ix_{i+1} = \\
&= x_i^2 + x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2 - 2x_ix_{i+1} = \\
&= (x_i - x_{i+1})^2 + x_{i+2}^2 \geqq 0\,.
\end{aligned}$$

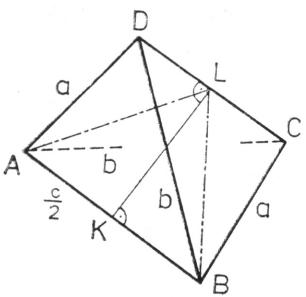
Získaná nerovnost je ekvivalentní nerovnosti $|a - c| \leqq 2$.

Označme K, L středy hran AB, CD. Ze shodnosti trojúhelníků ACD, BDC (obr. 39) plyne $|BL| = |AL|$, takže $KL \perp AB$. Podobně je i $KL \perp CD$. Jestliže bod X neleží na přímce KL a bod X' je jeho kolmý průmět na přímku KL, je

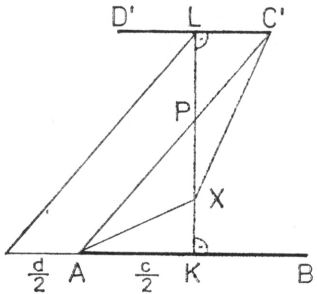
$$|CX| + |DX| > |CX'| + |DX'|,$$
$$|AX| + |BX| > |AX'| + |BX'|,$$

jak už víme z řešení úlohy A - I - 2. Stačí tedy uvažovat body X na přímce KL.

Otočme úsečku CD do roviny ABL, dostaneme tak úsečku $C'D'$ (obr. 40), $|C'D'| = |CD|$. Pro každý bod X přímky KL



Obr. 39



Obr. 40

je $|CX| = |C'X|$, $|DX| = |D'X|$, takže pro uvedený součet platí

$$s = |AX| + |BX| + |CX| + |DX| = 2(|AX| + |C'X|) \geqq$$
$$\geqq 2|AC'|$$

s rovností pro průsečík P úseček KL a AC'. Je tedy

$$s = 2\sqrt{\left(\frac{c+d}{2}\right)^2 + |KL|^2}$$

a z trojúhelníků ABL, BCD postupně spočteme (BL je těžnice v trojúhelníku BCD)

$$|KL|^2 = |BL|^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2+d^2}{4}.$$

Odtud vychází $s = \sqrt{2(a^2+b^2+cd)}$.

A - III - 4

Všech obarvení daných čísel je 2^{2^n}. Každá aritmetická posloupnost je určena svým prvním členem a diferencí d. V uvedeném případě je $d \leqq \frac{2^n}{2n-1}$, takže z daných čísel lze vybrat nejvýše $\frac{(2^n)^2}{2n-1}$ takových posloupností. Ke každé $2n$-členné posloupnosti existuje celkem 2^{2^n-2n} obarvení zbylých $2^n - 2n$ čísel, při nichž je tato posloupnost jednobarevná (má jednu ze dvou možných barev). Existuje tedy nejvýše

$$2 \cdot \frac{2^{2^n-2n} \cdot 2^{2n}}{2n-1} = 2^{2^n} \cdot \frac{2}{2n-1} < 2^{2^n} \quad (n > 1)$$

obarvení, při nichž je některá $2n$-členná aritmetická posloupnost jednobarevná. Odtud plyne existence požadovaného obarvení pro $n > 1$, pro $n = 1$ je jeho existence zřejmá.

Pro $a \in (-2, 2)$ má rovnice $u^2 - au + 1 = 0$ dva komplexně sdružené kořeny u, $\bar{u}$, pro které platí $u\bar{u} = |u|^2 = 1$, $u + \bar{u} = 2 \operatorname{Re} u = a$. Je-li $u = \cos \alpha + \mathrm{i} \sin \alpha$, $\alpha \in (0, \pi)$, má rovnice $x^7 = u$ (a tedy i rovnice $x^{14} - ax^7 + 1 = 0$) kořeny

$$x_k = \cos \frac{\alpha + 2k\pi}{7} + \mathrm{i} \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{7}, \qquad k \in \{0, 1, \ldots, 6\}.$$

Mnohočlen $p(x) = x^{154} - ax^{77} + 1$ bude násobkem mnohočlenu $x^{14} - ax^7 + 1$, právě když $p(x_k) = (u^{11})^2 - au^{11} + 1 = 0$ pro všechna k, $0 \leqq k \leqq 6$, tj.

$$u^{11} = \cos 11\alpha + \mathrm{i} \sin 11\alpha = u = \cos \alpha + \mathrm{i} \sin \alpha,$$

anebo

$$u^{11} = \cos 11\alpha + \mathrm{i} \sin 11\alpha = \bar{u} = \cos \alpha - \mathrm{i} \sin \alpha.$$

Je tedy buď

$$11\alpha = \alpha + 2m\pi, \quad \alpha = \frac{m\pi}{5}, \quad m \in \{1, 2, 3, 4\},$$

nebo

$$11\alpha = -\alpha + 2n\pi, \quad \alpha = \frac{n\pi}{6}, \quad n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Protože $a = 2 \operatorname{Re} u = 2 \cos \alpha$, vyhovují úloze čísla $a \in \left\{-\sqrt{3}, -2 \cos \frac{\pi}{5}, -1, -2 \cos \frac{2}{5}\pi, 0, 2 \cos \frac{2}{5}\pi, 1, 2 \cos \frac{\pi}{5}, \sqrt{3}\right\}$.

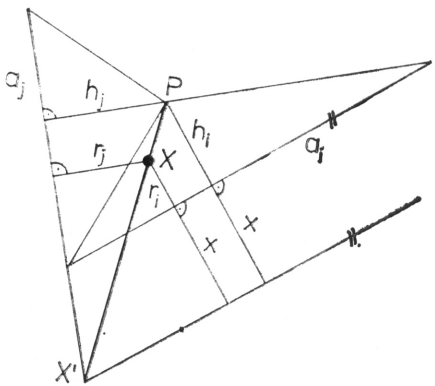
Předpokládejme, že v trojúhelníku $A_1A_2A_3$ existuje takový bod X, který neleží v žádném z uvedených trojúhelníků. Změníme tedy přiřazení bodů P_i a stran a_j daného trojúhelníku tak, abychom tento bod X pokryli. Protože ke každému bodu P trojúhelníku $A_1A_2A_3$ můžeme určit jeho stranu a_i tak, že trojúhelník Pa_i bude obsahovat bod X, můžeme najít stranu a_j, pro kterou je $X \in P_1a_j$, podobně k bodu P_j určíme stranu a_k tak, že $X \in P_ja_k$, a pokud $k \neq 1$, najdeme ještě stranu a_m, pro kterou $X \in P_ka_m$. Nyní je buď $m = 1$, anebo $m = j$.

Pokud $k = 1$, vezmeme místo trojúhelníků P_1a_1, P_ja_j trojúhelníky P_1a_j, P_ja_1, podobně pro $k \neq 1$ a $m = 1$ místo původních trojúhelníků vezmeme trojúhelníky P_1a_j, P_ja_k, P_ka_1. Pokud $k \neq 1 \neq m$, tedy $m = j$, vezmeme místo trojúhelníků P_2a_2, P_3a_3 trojúhelníky P_2a_3, P_3a_2 (vždy některé trojúhelníky neobsahující bod X nahrazujeme trojúhelníky, které bod X obsahují).

Označíme-li h_{ij} vzdálenost bodu P_i od strany a_j, z původního součinu $h_{11}h_{22}h_{33}$ dostaneme popsanou změnou součin $h_{1j}h_{j1}h_{33}$, anebo součin $h_{1j}h_{jk}h_{k1}$, či součin $h_{11}h_{23}h_{32}$. Ukážeme, že nové přiřazení bodů a stran trojúhelníku $A_1A_2A_3$ dá větší součin odpovídajících vzdáleností, což odporuje předpokladu úlohy.

Je-li P bod daného trojúhelníku a $X \in Pa_i$, $X \notin Pa_j$ (obr. 41), pak pro vzdálenosti h_i, h_j bodu P a vzdálenosti r_i, r_j bodu X od stran a_i, a_j platí

$$\frac{h_i}{r_i} > \frac{h_i + x}{r_i + x} = \frac{|PX'|}{|XX'|} = \frac{h_j}{r_j},$$



Obr. 41

kde X' je průsečík polopřímky PX s přímkou obsahující stranu a_j, pokud není rovnou

$$\frac{h_j}{r_j} < 1 < \frac{h_i}{r_i}$$

(to by bod X' neexistoval). Odtud plyne, že např. pro $k = 1$ bude

$$\frac{h_1 h_{j1} h_{33}}{r_1 r_2 r_3} > \frac{h_{11} h_{22} h_{33}}{r_1 r_2 r_3},$$

tedy i $h_1 h_{j1} h_{33} > h_{11} h_{22} h_{33}$. A podobně i v ostatních případech se příslušný součin odpovídajících vzdáleností zvětší. Tím je důkaz hotov.

Poznámka. Platí obecnější tvrzení, které v prostoru můžeme formulovat takto: Jsou-li $P_1, P_2, \ldots, P_n$ body uvnitř daného

konvexního n-stěnu M, pak lze jeho stěny označit a_1, a_2, ..., a_n tak, že jehlany $P_i a_i$ pokrývají celý mnohostěn M. (Stěny označíme tak, aby součin vzdáleností bodů P_i od odpovídajících stěn a_i byl co největší.)

Korespondenční seminář ÚV MO

Korespondenční seminář je jednou z forem péče o talentované žáky. Vznikl ve 24. ročníku MO proto, aby bylo možno věnovat individuální péči i těm žákům, kteří neměli možnost navštěvovat speciální školy a pracovat v tamních seminářích. Nyní, kdy existují i krajské korespondenční semináře a kdy speciální školy s třídami zaměřenými na matematiku najdeme v každém kraji, je cílem tohoto semináře zlepšit individuální přípravu všech studentů, kteří prokázali své schopnosti a matematický talent v předchozích ročnících matematické olympiády. Korespondenční seminář tak nadále zůstává důležitou součástí přípravy na mezinárodní matematickou olympiádu.

K účasti v korespondenčním semináři jsme pozvali všechny špičkové řešitele kategorie A spolu s těmi studenty, kteří nějak vynikli v krajském kole kategorií B a C předchozího ročníku MO. K účasti se tentokrát přihlásilo 75 řešitelů z celé republiky, z nichž jen 33 vydrželo až do posledního kola.

V průběhu 37. ročníku MO jim bylo postupně zasláno 5 sérií poměrně náročných úloh, jejichž texty najdete v úlohové části ročenky (bez řešení). Došlá řešení pak byla opravena, ohodnocena a s rozmnoženým komentářem vrácena účastníkům semináře. Nejlepšími v celkovém hodnocení byli

1. *Pavol Gvozdjak*, 4 G A. Markuša, Bratislava,
2. *Ilja Martišovitš*, 3 G J. Hronce, Bratislava,
3. *Radomír Měch*, 4 G M. Koperníka, Bílovec,
4. *Stanislav Krajči*, 4 G Šmeralova, Košice,
5. *Andrej Doboš*, 3 G A. Markuša, Bratislava,
6. *Vladimír Komár*, 2 G Šmeralova, Košice,
7. *Ondrej Šuch*, 2 G A. Markuša, Bratislava.

Korespondenční seminář byl řízen tajemníkem ÚV MO *Karlem Horákem*, který se staral o výběr a přípravu úloh a prováděl i redakci komentářů. Opravu pak zajišťovalo několik pracovníků MÚ ČSAV a několik studentů a aspirantů MFF UK Praha (všichni jsou bývalí olympionici).

P - I - 1

Je dáno celé číslo T a dvě konečné celočíselné posloupnosti $A_1, A_2, \ldots, A_N$ a $B_1, B_2, \ldots, B_N$ takové, že $N \geqq 1$, $A_1 < A_2 < \ldots < A_N$ a pro všechna i, $1 \leqq i \leqq N$, je $B_i > 0$. Na poště jsou tři přepážky poskytující stejné služby. Přepážky otvírají v čase T. Poštu navštíví během dne N zákazníků. Zákazník i přichází v čase A_i a požaduje službu v délce B_i časových jednotek. Zákazníci jsou obsluhováni v pořadí jejich příchodu na poštu. Přepážka je ihned po obsloužení jednoho zákazníka k dispozici pro obsluhu dalšího. Přepážky zavírají po obsloužení všech zákazníků.

Navrhněte a dokažte algoritmus, který určí celkovou dobu, po kterou na poště čeká na obsluhu alespoň jeden zákazník.

Řešení

Hledaná doba F je délka sjednocení intervalů $[A_i, C_i]$ pro $1 \leqq i \leqq N$, kde C_i je okamžik, kdy zákazník i přijde na řadu. Platí $A_i \leqq C_i$ pro všechna i, $C_1 \leqq C_2 \leqq \ldots \leqq C_N$.

Dále budeme hodnoty C_i počítat postupně pro zákazníky $i = 4, 5, \ldots, N$.

Označme d_i okamžik, kdy je zákazník i obsloužen. Platí $d_i = C_i + B_i$. Pro první tři zákazníky je určení okamžiku, kdy přijdou na řadu, snadné. Je to buď ihned v čase T, nebo, přijdou-li až po otevření pošty, ihned v čase A_i. Tj. $C_i = \max(T, A_i)$, $i = 1, 2, 3$.

Zákazník i ($i > 3$) přijde na řadu buď v čase A_i, je-li v době jeho příchodu alespoň jedna přepážka volná, nebo v opačném

případě (všechny přepážky jsou obsazené) v okamžiku, kdy se jedna z nich uvolní. V situaci, kdy jsou všechny přepážky obsazené, jsou u nich obsluhováni tři zákazníci z množiny $\{1, 2, \ldots, i-1\}$. Pro všechny z nich jsme již stanovili, kdy přišli na řadu (hodnoty C_j), a známe tedy i kdy byli nebo budou obslouženi (hodnoty d_j). Můžeme tedy i určit, kteří zákazníci jsou u přepážek: jsou to zákazníci x, y, z, pro něž platí $d_x, d_y, d_z > d_k$ pro všechna k z $\{1, 2, \ldots, i-1\} - \{x, y, z\}$.

Jedna z přepážek se uvolní, jakmile první ze zákazníků x, y, z odejde, a to bude v čase $\min(d_x, d_y, d_z)$. Z provedených úvah je vidět, že tento čas je dán třetí největší hodnotou z $\{d_1, d_2, \ldots, d_{i-1}\}$.

Shrneme-li, pak $C_i = \max(\max 3(d_1, d_2, \ldots, d_{i-1}), A_i)$, kde max 3 je třetí největší hodnota z hodnot uvedených v závorkách. V algoritmu budeme předpokládat, že prvky posloupností A a B jsou uloženy v polích $A[1..N]$ a $B[1..N]$, hodnoty C_i budeme ukládat do pole $C[1..N]$. Tři největší z doposud spočtených hodnot d_i budou průběžně uloženy v poli $D[1..3]$. Napišme proceduru max3, která ve svém výstupním parametru určí index j nejmenší hodnoty z $D[1]$, $D[2]$, $D[3]$, což znamená, že v $D[j]$ je uložena třetí největší hodnota z doposud spočtených hodnot d_i.

```
procedure max3 (var j: integer);
begin    if D[1] < D[2] then j := 1 else j := 2;
         if D[j] > D[3] then j := 3
end;
```

První část algoritmu počítá hodnoty C_i:

```
for i := 1 to min (3, N) do begin C[i] := max (T, A[i]);
```

```
                    D[i] := C[i] + B[i];
                end;
for i := 4 to N do
    begin max3 (j);
        C[i] := max(D[j], A[i]);
        D[j] := C[i] + B[i];
end;
```

Nyní máme N intervalů $[A_i, C_i]$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Platí $A_1 < A_2 < \ldots < A_N$, $C_1 \leqq C_2 \leqq \ldots \leqq C_N$. Máme určit délku jejich sjednocení. Předpokládejme, že známe délku sjednocení prvních i intervalů. Mohou nastat dva případy:
1. Je-li $A_i > C_{i-1}$, pak interval $[A_i, C_i]$ má prázdný průnik se všemi intervaly $[A_j, C_j]$ pro $j < i$ (neboť $C_{i-1} \geqq C_{i-2} \geqq \geqq \ldots \geqq C_1$) a délku je nutno zvětšit o $C_i - A_i$.
2. Je-li $A_i \leqq C_{i-1}$, pak interval $[A_i, C_{i-1}]$ je průnikem intervalů $[A_i, C_i]$ a $[A_{i-1}, C_{i-1}]$, a protože $C_{i-1} \geqq C_{i-2} \geqq \ldots \geqq \geqq C_1$, je délku nutno zvětšit o $C_i - C_{i-1}$.
Shrneme-li oba případy, pak dosavadní délku je nutno zvětšit o $C_i - \max(A_i, C_{i-1})$. Protože délku prvního intervalu známe, s využitím právě popsaného postupu dokončíme algoritmus:

```
F := C[1] - A[1];
for i := 2 to N do
    F := F + C[i] - max(A[i], C[i - 1]);
writeln(F).
```

Důkaz správnosti algoritmu byl prováděn současně s jeho návrhem, složitost je lineární.

Je dána konečná celočíselná posloupnost $X_1, \ldots X_N$ taková, že $N \geqq 2$ a $X_1 < \ldots < X_N$. Navrhněte a dokažte (co nejlepší) algoritmus, který určí celkový počet konečných celočíselných posloupností $V_0, \ldots V_N$ takových, že $V_0 \leqq \ldots \leqq V_N$ a pro všechna i, $1 \leqq i \leqq N$, platí $V_{i-1} + V_i = 2^* X_i$.

Řešení

Podle zadání platí:

$$V_{i-1} \leqq V_i \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{1}$$
$$V_{i-1} + V_i = 2X, \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{2}$$

Využitím (1) a (2) dostáváme:

$$2X_i = V_{i-1} + V_i \geqq V_{i-1} + V_{i-1} = 2V_{i-1} \Rightarrow X_i \geqq V_{i-1}\,,$$
$$i = 1, \ldots, N \tag{3}$$
$$2X_i = V_{i-1} + V_i \leqq V_i + V_i = 2V_i \Rightarrow X_i \leqq V_i$$
$$i = 1, 2, \ldots, N \tag{4}$$

Vztahy (3) a (4) dohromady dávají:

$$X_i \leqq V_i \leqq X_{i+1} \quad i = 1, 2, \ldots, N - 1 \tag{5}$$
$$V_0 \leqq X_1, \; X_N \leqq V_N \tag{6}$$

Každá z posloupností $V_0, V_1, \ldots, V_N$ je jednoznačně určena svým libovolným prvkem V_i (ostatní prvky se vypočítají z rovnic $V_{j-1} + V_j = 2X_j, j = 1, 2, \ldots, N$).

Celkový počet posloupností $V_0, V_1, \ldots, V_N$ je proto roven počtu celých čísel, která mohou být i-tým prvkem (pro libovolné pevné i, $0 \leqq i \leqq N$) nějaké z takových posloupností. Řekneme, že celé číslo c má vlastnost $v(i)$, $1 \leqq i < N$, jestliže $X_i \leqq c \leqq X_{i+1}$ a jestliže existuje celočíselná posloupnost

$V_0, V_1, \ldots, V_i$ taková, že $V_0 \leqq V_1 \leqq \ldots \leqq V_i = c$, a pro všechna j, $1 \leqq j \leqq i$ je $V_{j-1} + V_j = 2X_j$.
Označme jako $p(i)$ počet čísel s vlastností $v(i)$.
Potom $p(N-1)$ je rovno hledanému počtu posloupností $V_0, V_1, \ldots, V_N$. Platí: Jestliže $p(i) = 0$ pro nějaké i, pak $p(i+1) = p(i+2) = \ldots = p(N-1) = 0$. Dále platí $p(1) = X_2 - X_1 + 1$ (čísla s vlastností $v(1)$ jsou totiž právě jen všechna celá čísla splňující nerovnost $X_1 \leqq c \leqq X_2$).
Jsou-li c_1 a c_2 čísla s vlastností $v(i)$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$ taková, že $c_1 = c_2 - k$, $k \geqq 0$, pak pro čísla b_1, b_2 taková, že $c_1 + b_1 = 2X_{i+1}$, $c_2 + b_2 = 2X_{i+1}$, z těchto rovnic dostaneme $b_1 = b_2 + k$.
Je-li c rovněž číslo s vlastností $v(i)$ takové, že $c_1 \leqq c \leqq c_2$, pak číslo b takové, že $c + b = 2X_{i+1}$, vyhovuje nerovnosti $b_1 \geqq b \geqq b_2$. Z těchto úvah a z definice vlastnosti $v(i)$ vyplývá, že jsou-li všechna čísla s vlastností $v(i)$, $i = 1, 2, \ldots, N-2$, právě všechna celá čísla c splňující nerovnost $D \leqq c \leqq H$ pro nějaké D a H, pak všechna čísla b s vlastností $v(i+1)$ musí splňovat nerovnosti $2X_{i+1} - H \leqq b \leqq 2X_{i+1} - D$ a $X_{i+1} \leqq b \leqq X_{i+2}$ a zároveň každé celé číslo splňující tyto nerovnosti má vlastnost $v(i+1)$.
Protože čísla s vlastností $v(1)$ jsou všechna celá čísla vyhovující nerovnosti $X_1 \leqq c \leqq X_2$, jsme tedy schopni počítat počty $p(i)$ postupně pro $i = 2, 3, \ldots, N-1$, jak je zachyceno v algoritmu: {Předpokládáme, že prvky posloupnosti X jsou uloženy v poli $X[1..N]$}

$D := X[1]$; $H := X[2]$; počet $:= H - D + 1$;
{počet $= p(1)$}
$i := 2$;

```
while i < N and počet > 0 do
    begin {počet = p (i − 1)}
        D 1 := D;
        D := max (X [i], 2 * X [i] − H);
        H := min (X [i + 1], 2 * X [i] − D 1);
        if D ≦ H then počet := H − D + 1
                 else počet := 0;
        {počet = p (i)}
        i := i + 1
    end;
writeln (počet).
```

Algoritmus je lineární, důkaz správnosti je obsažen v návrhu algoritmu.

P - I - 3

Je dán následující program:

```
10 LET Y = 1
20 IF X > 100
THEN 60
30 LET X = X + 11
40 LET Y = Y + 1
50 GOTO 20
60 IF Y = 1
THEN 100
70 LET X = X − 10
80 LET Y = Y − 1
90 GOTO 20
100 STOP
```

```
Y := 1;
while (Y <> 1) or (X < = 100)
do if  X < = 100
  then
  begin X := X + 11;  {30}
        Y := Y + 1
  end
  else
  begin X := X − 10;  {70}
        Y := Y − 1
  end;
```

Nechť m je libovolná celočíselná hodnota vstupní proměnné X. Označme $A(m)$, resp. $B(m)$ počet provedení příkazu 30, resp. 70 při výpočtu pro m. Určete a zdůvodněte vztah mezi hodnotami $A(m)$ a $B(m)$.

Řešení

Současně s příkazem 30, resp. 70 se vždy provádí i příkaz bezprostředně následující, tj. $Y := Y + 1$, resp. $Y := Y - 1$. Na počátku je proměnné Y přiřazena hodnota 1, tj. před cyklem platí $Y = 1$. Cyklus končí při splnění podmínky $Y = 1$ **and** $X > 100$. Proto v případě ukončení cyklu je hodnota proměnné Y před jeho provedením a po jeho ukončení stejná, a tedy počet provedení příkazu 30 se rovná počtu provedení příkazu 70, tj. $A(m) = B(m)$.

Nyní dokážeme, že pro každé m cyklus končí. Je-li $m > 100$, pak se cyklus přímo ukončí. Předpokládejme proto dále, že $m \leqq 100$. Nejprve doplníme program o speciální pomocné proměnné i, j, n, tzv. čítače, které »počítají« počet skutečných průchodů cyklem:

```
Y := 1; i := 0; j := 0; n := 0;
while (Y ≠ 1) or (X ≧ 100) do
      begin {A} n := n + 1;
            if X ≦ 100 then
            begin X := X + 11;  {30}
                  Y := Y + 1;
                  i := i + 1
            end
            else
            begin X := X - 10;  {70}
```

```
        Y := Y − 1;
        j := j + 1
    end
end
```

Ukážeme, že hodnota čítače n je shora omezena konstantou, a tedy že cyklus končí. Je zřejmé, že v bodě A vždy platí

$$n = i + j. \tag{1}$$

Tento vztah umožňuje omezit n za pomoci omezení pro i a j. Poněvadž Y je zvětšeno o 1 vždy společně s i a zmenšeno o 1 vždy společně se zvětšením j o 1, platí v bodě A vždy podmínka

$$Y = i - j + 1. \tag{2}$$

Podobně platí i

$$X = 11i - 10j + m. \tag{3}$$

Dále si všimněme, že proměnné Y je na počátku přiřazena hodnota 1 a že Y je zmenšeno jen tehdy, když $Y > 1$. Proto v A vždy platí

$$Y \geqq 1, \tag{4}$$

což společně se vztahem (2) dává, že v A vždy platí

$$i \geqq j. \tag{5}$$

Užitím (5) a (3) dostáváme

$$X \geqq 11i - 10i + m = i + m \tag{6}$$

a

$$X \geqq 11j - 10j + m = j + m. \tag{7}$$

Sečtením posledních dvou nerovností dostaneme $2X \geqq i + j + 2m$ a užitím (1) získáme v bodě A podmínku

$$X \geqq n/2 + m. \tag{8}$$

Omezením hodnot proměnné X se nám tedy podaří omezit i hodnoty čítače n.

Při prvním vstupu výpočtu do bodu A platí $X = m$ **and** $Y = 1$ **and** $n = 0$. Podle našeho předpokladu je $m \leqq 100$, a proto v bodě A vždy platí $X \leqq 111$. Tedy v bodě A vždy platí

$$(X = m \textbf{ and } Y = 1 \textbf{ and } n = 0) \textbf{ or } X \leqq 111. \tag{9}$$

Z (8) a (9) nyní dostáváme

$$X \geqq n/2 + m \textbf{ and } [(X = m \textbf{ and } Y = 1 \textbf{ and } n = 0) \textbf{ or } X \leqq 111] \tag{10}$$

tedy

$$n = 0 \textbf{ or } n/2 + m \leqq 111.$$

Hodnota čítače n je shora omezena a cyklus musí skončit.

P - I - 4

(a) Navrhněte schéma S, které počítá součin dvou přirozených čísel.

(b) Navrhněte schéma S takové, že pro každé vstupní slovo X, tvořené znaky a, b, c, je výsledek Y výpočtu dán takto:

— $S(X) = X$, je-li délka X sudá, a

— $S(X)$ vznikne z X vynecháním každého třetího znaku b zleva, je-li délka slova X lichá.

Poznámka: Markovovy algoritmy

Konečnou posloupnost znaků nazveme slovem (například, *aba*, 01*AB*, 1234 jsou slova). Prázdnou posloupnost, značenou ε, nazveme prázdné slovo. Počet znaků ve slově nazveme délkou slova (slovo ε je délky 0, slovo *abaa* má délku 4). Zřetězení slova $P = a_1 \ldots a_n$ se slovem $Q = b_1 \ldots b_m$ je slovo $PQ = a_1 \ldots a_n, b_1 \ldots b_m$ (např.: Je-li $P = aabb$, $Q = bba$, pak $PQ = aabbbba$; je-li $Q' = \varepsilon$, pak $PQ' = aabb$).

Jsou-li P a Q slova, řekneme, že slovo P se vyskytuje v Q, jestliže existují slova U a T taková, že $Q = UPT$. Nejlevější výskyt P v Q je takový, pro který má slovo U nejmenší délku.

Nechť P a Q jsou slova. Výraz tvaru $P \to Q$ nazýváme obyčejné pravidlo, výraz tvaru $P \to .Q$ nazýváme koncové pravidlo. Zápis $P \to (.)Q$ znamená obyčejné nebo koncové pravidlo. Konečnou posloupnost pravidel

S: $P_1 \to (.)\, Q_1$

$\ldots$

$P_n \to (.)Q_n$

nazveme schéma. Každé schéma zadává (tzv. Markovův) algoritmus následujícím způsobem. Výpočet podle schématu S pro dané vstupní slovo X probíhá takto: Nalezneme první pravidlo $P_m \to (.)Q_m$ takové, že P_m se vyskytuje v X. Nejlevější výskyt slova P_m v X nahradíme slovem Q_m. Nechť R_1 je výsledek tohoto nahrazení (stručně budeme psát $X \vdash R_1$). Bylo-li použito koncové pravidlo $P_m \to .Q_m$, pak výpočet končí a výsledek výpočtu je slovo R_1. Bylo-li použito obyčejné pravidlo $P_m \to Q_m$, použijeme na R_1 stejný postup, který byl aplikován na X (schéma prohledáváme opět od

začátku) atd. Jestliže někdy nastane situace, kdy se žádné ze slov $P_1, \ldots, P_n$ nevyskytuje v právě zpracovaném slově R_i, pak výpočet končí s výsledkem R_i. Při tom je možné, že popsaný proces nikdy neskončí. Pak řekneme, že výsledek výpočtu není pro slovo X definován. Je-li výsledek výpočtu pro X definován, označíme ho $S(X)$.

Příklad 1

Navrhněte schéma S, které připíše na konec každého slova X, tvořeného ze znaků 1, 0, slovo 10. Řešením je schéma

S: $c1 \rightarrow 1c$
$c0 \rightarrow 0c$
$c \rightarrow .10$
$\varepsilon \rightarrow c$

Schéma S používá pomocný znak c. Jako první bude aplikováno pravidlo $\varepsilon \rightarrow c$, neboť předchozí pravidla obsahují na svých levých stranách znak c, a ten se nevyskytuje v žádném vstupním slově. Navíc, prázdné slovo se vyskytuje na začátku každého slova. Následuje opakované užití vždy jednoho z prvních dvou pravidel, a to tak dlouho, dokud se c »neposune« až na konec. Poté je aplikováno třetí pravidlo a výpočet končí, neboť se jedná o koncové pravidlo. Například pro vstupní slovo $X = 1011$ probíhá výpočet takto:

$R_1 = c1011$, $R_2 = 1c011$, $R_3 = 10c11$, $R_4 = 101c1$, $R_5 = 1011c$, $R_6 = 101110$. Stručně zapsáno $1011 \vdash c1011 \vdash 1c011 \vdash 10c11 \vdash 101c1 \vdash 1011c \vdash 101110$.

Poznamenejme ještě, že uvedené schéma S lze zapsat také ve zkrácené podobě ve tvaru:

S: $cx \rightarrow xc$

$c \rightarrow .10$

$\varepsilon \rightarrow c$

kde $x \in \{0, 1\}$, ve kterém jsou první dvě pravidla původního schématu zapsána jako jedno pravidlo.

Příklad 2

Navrhněte schéma S, které »zdvojuje« vstupní slovo X, tvořené ze znaků a, b, tj. $S(X) = XX$. Řešením je schéma

S: $za \rightarrow aAz$ (1)

$zb \rightarrow bBz$ (2)

$Aa \rightarrow aA$ (3)

$Ab \rightarrow bA$ (4)

$Ba \rightarrow aB$ (5)

$Bb \rightarrow Bb$ (6)

$z \rightarrow t$ (7)

$At \rightarrow ta$ (8)

$Bt \rightarrow tb$ (9)

$t \rightarrow \varepsilon$ (10)

$\varepsilon \rightarrow z$ (11)

Schéma S používá pomocné znaky A, B jako dvojníky pro znaky a, b a další pomocné znaky z, t.

První bude aplikováno pravidlo (11), kterým se na začátek slova X připíše znak z. Pak jsou opakovaně aplikována pravidla (1) a (2) připisující za každý znak jeho dvojníka. Přitom se znak z posouvá doprava tak dlouho, dokud se nestane posledním znakem. Dále jsou aplikována pravidla (3)—(6), kterými se přesunou všechny znaky A, B doprava. Přitom zůstává zachováno vzájemné pořadí znaků a, b i vzájemné pořadí znaků A, B. Tím vznikne slovo tvořené vstupním

slovem X, následovaným jeho »dvojníkem«. Pravidlem (7) se znak z změní na znak t. Pravidly (8) a (9) jsou pak pomocné znaky A, B nahrazeny svými protějšky a, b. Výpočet končí užitím pravidla (10), které odstraní pomocný znak t ze středu slova. Například pro vstupní slovo $X = abb$ probíhá výpočet takto:

$X = abb \vdash zabb \vdash aAzbb \vdash aAbBzb \vdash aAbBbBz \vdash$
$\vdash abABbBz \vdash abAbBBz \vdash abbABBz \vdash abbABBt \vdash$
$\vdash abbABtb \vdash abbAtbb \vdash abbtabb \vdash abbabb.$

Markovovy algoritmy můžeme používat i k práci s přirozenými čísly. Pro její usnadnění se často přirozené číslo n reprezentuje slovem n, které je definováno induktivně takto: $0 = a$, $n + 1 = na$. Každou k-tici přirozených čísel $(n_1, \ldots, n_k)$ reprezentujeme slovem $(n_1, \ldots, n_k) = n_1 b n_2 b \ldots$ $\ldots b n_k$. Například $(3, 1, 2) = aaaabaabaaa$. Poznamenejme, že jsou možné i jiné reprezentace.

Příklad 3

Navrhněte schéma S, které počítá součet tří přirozených čísel. Vstupním slovem bude výše uvedená reprezentace této trojice. Řešením je schéma

$$S: ba \to \varepsilon$$

Každý výpočet podle schématu S končí po dvou aplikacích jediného pravidla schématu. Všimněte si, že na rozdíl od příkladů 1 a 2, kde výpočet končil aplikací koncového pravidla, zde končí výpočet tím, že pravidlo již nelze více aplikovat. Např. pro součet $1 + 1 + 2$ je vstupní slovo $X =$ $= aabaabaaa$ a výpočet proběhne takto: $aabaabaaa \vdash$ $\vdash aaabaaa \vdash aaaaa$. Výsledek reprezentuje číslo 4.

Řešení

a) Dvojici m, n přirozených čísel $(m, n \geqq 0)$ reprezentujeme

slovem $a^{m+1}ba^{n+1}$. Algoritmus je založen na postupném »sčítání«. Řešením je schéma

$$
\begin{aligned}
\text{S:}\quad & FXX \to FX && (1)\\
& FX \to a && (2)\\
& aX \to Xa && (3)\\
& EX \to XaE && (4)\\
& E \to D && (5)\\
& aDb \to bE && (6)\\
& Db \to F && (7)\\
& aD \to Da && (8)\\
& XD \to DX && (9)\\
& bD \to Db && (10)\\
& XC \to CX && (11)\\
& bC \to Db && (12)\\
& Ba \to XB && (13)\\
& B \to C && (14)\\
& Aaba \to bB && (15)\\
& Aa \to aA && (16)\\
& \varepsilon \to A && (17)
\end{aligned}
$$

Schéma S používá pomocné symboly A, B, C, D, E, F a X. Algoritmus má 4 části. Nejprve je vstupní slovo $a^{m+1}ba^{n+1}$ převedeno pravidly (15) – (17) na tvar a^mbBa^n. Ve druhé části (pravidla (11)–(14)) je toto slovo převedeno na tvar a^mDbX^n. Slovo X^n slouží k zapamatování druhého činitele pro potřeby sčítání. Třetí část (pravidla (3)–(10)) realizuje vlastní násobení. Pro každý symbol a vlevo od b je za X^n připsáno slovo a^n tak, že X^n je »zkopírováno«. Přesněji můžeme jeden krok činnosti algoritmu v této části popsat takto: $a^{m-i}DbX^na^{i\cdot n} \vdash a^{m-i-1}bEX^na^{i\cdot n} \vdash \ldots \vdash$

$a^{m-i-1}bX^n a^n Da^{i \cdot n} \vdash \ldots \vdash a^{m-i-1}DbX^n a^{(i+1) \cdot n}$ (pro $i > 0$). Tato část končí aplikací pravidla (6). Poslední část (pravidla (1)—(2)) pak již jen vymaže pomocné X a doplní jeden symbol a, čímž dostaneme výsledný tvar $a^{m \cdot n+1}$.

b) Řešením je schéma (ve zkráceném zápisu, kde $x, y \in \{a, b\}$)

S: Ba	$\to aB$	(1)
Bb	$\to bC$	(2)
Ca	$\to aC$	(3)
Cb	$\to bD$	(4)
Da	$\to aD$	(5)
Db	$\to B$	(6)
B	$\to .\varepsilon$	(7)
C	$\to .\varepsilon$	(8)
D	$\to .\varepsilon$	(9)
Axy	$\to xyA$	(10)
xE	$\to Ex$	(11)
E	$\to B$	(12)
Ax	$\to Ex$	(13)
A	$\to .\varepsilon$	(14)
ε	$\to A$	(15)

Schéma používá pomocné symboly A, B, C, D, E. Nejprve je pravidlem (10) pomocí A po dvojicích znaků procházeno vstupní slovo X. Je-li slovo sudé délky, pak je výsledek čtení tvaru YA, je-li liché délky, pak YAa nebo YAb. Pro lichou délku je pravidly (11)—(13) toto slovo převedeno na tvar BX a tím připraveno k provedení požadované modifikace. Následuje postupné procházení slovem pravidly (1)—(6), přičemž pomocný symbol určuje, kolikáté b (mod 3) je hledáno: B - první, C - druhé, D - třetí. Třetí symbol b

je pravidlem (6) vymazán. Výpočet končí aplikací jednoho z pravidel (7), (8), (9) po zpracování celého slova. Pro slovo sudé délky je pomocné A pravidlem (14) vymazáno a výpočet bezprostředně končí s $S(X) = X$.

P - II - 1

Jsou dána dvě celočíselná pole A, B $(1..N)$ taková, že $N > 2$, a pro všechna i, $1 \geqq i \leqq N$, platí $A(i) \leqq N$, $B(i) \leqq N$, $A(i) \neq B(i)$, $A(i) > i$ nebo $A(i) = 0$, $B(i) > i$ nebo $B(i) = 0$.

Mezi N městy, očíslovanými postupně od 1 do N, je vybudována jednosměrná silniční síť podle těchto pravidel:

1. Pro všechna i, $1 \leqq i \leqq N$, vede přímá silnice z města i do města $A(i)$, jestliže $A(i) > 0$, a z města i do města $B(i)$, jestliže $B(i) > 0$.

2. Žádné jiné silnice nejsou.

Navrhněte a dokažte (nejlépe lineární) algoritmus, který určí, kolika různými způsoby se lze dostat z města 1 do města N.

Poznámka. Algoritmus je lineární, jestliže existuje přirozené číslo L takové, že žádný krok algoritmu se neprovede vícekrát než $L * N$ krát.

Řešení

Z definice silniční sítě vyplývá, že každá přímá silnice vychází z města, jehož číslo je menší než číslo města do něhož vede, a že mezi žádnými městy nevede více než jedna přímá silnice. Čísla měst, kterými projíždíme při libovolné cestě v silniční síti, tvoří tedy vzestupnou posloupnost a do žádného města, kterým jsme projeli, se nemůžeme již vrátit.

Pro všechna i, $1 \leqq i \leqq N$, označme jako $p(i)$ počet cest z města 1 do města i a jako PŘED(i) množinu čísel těch měst, z nichž vede přímá silnice do města i. Definitoricky položme $p(1) = 1$. Z výše uvedených vlastností silniční sítě zřejmě plyne, že pro všechna i, $1 < i \leqq N$, je $p(i)$ rovno součtu všech $p(k)$, pro něž k patří do PŘED(i). Protože pro všechna k z množiny PŘED(i) platí $k < i$, můžeme hodnotu $p(i)$ stanovit, jakmile známe hodnoty $p(k)$ pro všechna k, $1 \leqq k < i$. To nás vede k tomu, že hodnoty $p(i)$ budeme zjišťovat pro města v pořadí $i = 2, 3, \ldots, N$.

Výpočet hodnoty $p(i)$, která je součtem zmíněných sčítanců, budeme průběžně provádět ve složce $c[i]$ pomocného pole $c[1 \ldots N]$ a budeme přitom vycházet ze způsobu zadání silniční sítě v polích $A[1..N]$ a $B[1..N]$.

Jestliže totiž $A[k] = i$ a $i \neq 0$, pak $k \in$PŘED(i), a máme-li již vypočtenou hodnotu $p(k)$, která je jedním ze sčítanců tvořících součet $p(i)$, můžeme ji hned přičíst k průběžnému součtu v $c[i]$. Analogická úvaha platí pro pole B.

Algoritmus navrhneme tak, aby byla zachovávána platnost tvrzení $P(i)$, $1 \leqq i \leqq N$.

$P(i)$: Pro všechna j, $1 < j \leqq N$, platí, že $c[j]$ je součet všech $p(k)$ takových, že $k \in$ PŘED (j) **and** $(k < i)$.

```
for i := 2 to N do c[i] := 0;
c[1] := 1;
{Zde platí c[1] = p(1)}
for i := 1 to N − 1 do
    begin      {zde platí P(i) a c[1] = p(1)}
        if A[i] ≠ 0 then c[A[i]] := c[A[i]] + c[i];
        if B[i] ≠ 0 then c[B[i]] := c[B[i]] + c[i];
```

{zde platí $P(i + 1)$}

end;

{zde platí $P(N) \Rightarrow$ v $c(N)$ je hledaný výsledek}

writeln ($c[N]$).

Z platnosti $P(i)$ a $c[1] = p(1)$ před provedením těla cyklu a z vlastností hodnot $p(j)$ plyne, že pro všechna j, $1 \leqq j \leqq i$, je $c[j] = p(j)$. Přičteme-li tedy známou hodnotu $p(i)$ k těm hodnotám $c[k]$, pro něž $i \in$ PŘED(k), splníme podmínku $P(i + 1)$. Algoritmus je lineární.

P - II - 2

H-sekvence je konečná posloupnost tvořená z 0 a 1 podle těchto pravidel:

1. 0 je H-sekvence,
2. Jsou-li H a H' dvě H-sekvence, pak i spojení $1HH'$ je H-sekvence a
3. žádné jiné H-sekvence nejsou.

Je dáno pole $H(1..N)$ tvořené z 0 a 1, $N \geqq 1$. Navrhněte a dokažte algoritmus, který rozhodne, zda konečná posloupnost $H(1) \ldots H(N)$ je H-sekvence.

Příklad

Posloupnost 1011000 je H-sekvence, neboť vznikla spojením podle bodu 2 ze sekvencí $H = 0$ a $H' = 11000$, při tom H je H-sekvence podle bodu 1, H' je H-sekvence, která vznikla opět podle bodu 2 z $H'' = 100$ a H-sekvence 0. Konečně H'' je spojením podle bodu 2 H-sekvencí 0 a 0.

Řešení

Nejprve si všimněme, že podle druhého pravidla je každá

(netriviální) H-sekvence tvaru $1H_1H_2$. Jestliže chceme zjistit, zda je zadaná posloupnost začínající 1 H-sekvencí, musíme zjistit, zda je zbytek této posloupnosti (po odstranění první 1) zřetězením dvou H-sekvencí. Předpokládejme, že H_1 je opět tvaru $1H_3H_4$. Původní posloupnost bude H-sekvencí, jestliže je zbytek posloupnosti H_1H_2 (opět po odstranění prvního symbolu) zřetězením $H_3H_4H_2$ tří H-sekvencí. Zobecnění těchto úvah nás přivádí k závěru, že úlohu umíme vyřešit, pokud můžeme zjistit, zda je nějaká posloupnost z 0 a 1 zřetězením určitého počtu H-sekvencí. Vzhledem k tomu, že vlastní začátek H-sekvence není H-sekvencí, lze posloupnost z 0 a 1 rozložit nejvýše jedním způsobem do zřetězení H-sekvencí. Počet H-sekvencí je při tom jednoznačně určen prvním symbolem posloupnosti, a sice takto:
(1) Posloupnost tvořená jedinou 0 je H-sekvencí (pravidlo 1). Tedy posloupnost z 0 a 1, která začíná 0, je zřetězením m H-sekvencí, $m \geqq 1$, právě když je zbytek této posloupnosti zřetězením $m - 1$ H-sekvencí.
(2) Posloupnost začínající 1, která je následována dvěma H-sekvencemi, je H-sekvence (pravidlo 2). Proto posloupnost z 0 a 1, která začíná 1, je zřetězením m H-sekvencí, $m \geqq 1$, právě když je zbytek této posloupnosti zřetězením $m + 1$ H-sekvencí. Algoritmus vychází bezprostředně z provedeného rozboru. Jeho idea je následující:
Budeme postupně procházet zadanou posloupností a na základě právě zpracovávaného symbolu určovat, z kolika H-sekvencí musí být zřetězen zbytek. Původní posloupnost bude H-sekvencí, právě když po zpracování celé posloupnosti má následovat nulový počet H-sekvencí.

```
m := 1; n := 0;
while (m ≠ 0) and (n ≠ N) do
      begin n := n + 1;
      if     H(n) = 0  then m := m − 1   {viz (1)}
                       else m := m + 1   {viz (2)}
      end;
if (m = 0) and (n = N) then write ('je H-sekvence')
                       else write ('není H-sekvence').
```

Algoritmus je lineární.

P - II - 3

V urně je m bílých a n černých kuliček, $m, n \geqq 0$, $m + n \geqq 2$. Náhodným způsobem vytáhneme z urny dvě kuličky. Jsou-li stejné barvy, vložíme místo nich do urny jednu černou kuličku; nejsou-li stejné barvy, vložíme místo nich do urny jednu bílou kuličku. Celý postup opakujeme tak dlouho, až v urně zbude jedna kulička. Předpokládejme při tom, že máme k dispozici neomezený počet černých kuliček.

a) Stanovte, po kolika krocích popsaný algoritmus skončí.

b) Pro všechny dvojice m, n takové, že $m + n = 4$, určete barvu poslední kuličky v urně.

c) Určete barvu poslední kuličky v urně v závislosti na m a n.

Řešení

a) Při každém kroku algoritmu odebereme z urny dvě kuličky a vrátíme jen jednu. Při každém kroku dojde tedy ke snížení počtu kuliček v urně o 1. Na počátku je v urně $m + n$ kuliček. Algoritmus končí, jestliže v urně zůstává jedna kulička. Algoritmus tedy končí po $m + n - 1$ krocích.

b), c) Zkcumejme nejprve, jaký vliv mají jednotlivé tahy na počet černých a bílých kuliček v urně:

— jsou-li taženy dvě černé, pak je vrácena jedna černá; počet bílých se nemění a počet černých se zmenší o 1;
— jsou-li taženy dvě bílé, pak se počet bílých sníží o 2 a počet černých se zvětší o 1;
— je-li tažena černá a bílá, pak po tahu je v urně o jednu bílou méně, ale po přidání další bílé (jejím vrácení) je jejich počet opět stejný jako před tahem a počet černých se zmenší o 1.

Z uvedené analýzy vyplývá, že po každém tahu je počet bílých kuliček v urně buď stejný jako před tahem, nebo o 2 menší. Proto poslední kulička v urně je černá, právě když počet bílých kuliček na počátku je sudý.
Odpověď na část b) dostáváme aplikací právě získaného závěru na případ, kdy $m + n = 4$.

P - II - 4

Nechť $P = a_0 \ldots a_n$ je neprázdné slovo. Slovo opačné ke slovu P je slovo $P' = a_n \ldots a_0$.
Navrhněte schéma S, které určí, zda vstupní slovo X, tvořené znaky A, B, C, je tvaru PP' pro nějaké slovo P, tj.

$$S(X) = \varepsilon \text{ právě když } X = PP,$$

pro nějaké slovo P (ε je prázdné slovo).
Řešení
Pokud by byl ve vstupním slovu vyznačen střed, tj. slovo by bylo tvaru PtP', $t \in \{A, B, C\}$, pak by řešením bylo schéma

$$ata \to t, \quad a \in \{A, B, C\}$$
$$t \quad \to .\varepsilon,$$

které od středu postupně maže symetrickou část. Určení středu však nemusí být snadné.

Všimněme si, že slovo X je tvaru PP' právě když slovo XX je tvaru RR', neboť $X = X'$ právě když X je tvaru PP'. Tato skutečnost dovoluje řešit nyní úlohu tak, že vstupní slovo X nejprve převedeme na slovo XtX s vyznačeným středem (»zdvojíme je«), a pak budeme zkoumat symetričnost shora uvedeným způsobem. Ke zdvojení použijeme jako pomocné symboly dvojníky A, B, C k symbolům A, B, C, symbol t k vyznačení středu a symbol z jako ukazatel používaný při procházení slovem. Řešením úlohy je schéma

S: $za \to aaz$ (1)
$ab \to ba$ (2)
$z \to t$ (3)
$at \to ta$ (4)
$ata \to t$ (5)
$t \to \varepsilon$ (6)
$\varepsilon \to z$ (7)

kde $a, b \in \{A, B, C\}$.

Nejprve je aplikováno pravidlo (7), kterým se na začátek slova X připíše symbol z (tj. $X \vdash zX$). Pak je opakovaně aplikováno pravidlo (1) připisující za každý znak jeho dvojníka. Aplikací pravidla (2) se přesunou všechny znaky A, B, C doprava za všechny znaky A, B, C. Zůstává zachováno vzájemné pořadí symbolů ve slově (tj. $zX \vdash \ldots \vdash XXz$). Pravidlo (3) mění z na t a pravidlo (4) mění dvojníky opět v původní symboly a současně vyznačí střed (tj. $XXz \vdash$

$\vdash \ldots \vdash XtX$). Pak je aplikací pravidla (5) prověřována symetričnost. Pravidlo (6) končí činnost algoritmu a právě v případě, že slovo bylo tvaru PP', je výsledkem prázdné slovo.

P - III - 1

Jsou dána dvě celočíselná pole A, $B(1..N)$ taková, že

$$N \geq 1,$$

$A(i) \geq 0$ a $B(i) > 0$ pro všechna i, $1 \leq i \leq N$,

$A(1) + \ldots + A(N) = B(1) + \ldots + B(N)$.

Podél kruhové závodní dráhy je umístěno N nádrží s benzínem, po řadě očíslovaných od 1 do N. Po nádrži s číslem N následuje opět nádrž s číslem 1. V nádrži i je $A(i)$ litrů benzínu a spotřeba benzínu při cestě od nádrže i k následující, tj. $(i \bmod N) + 1$, je $B(i)$ litrů benzínu.

Navrhněte a dokažte algoritmus (nejlépe lineární), který určí všechny nádrže, od kterých může vůz, s počátečně prázdnou a dostatečně velkou nádrží, projet celým okruhem (ve směru daném očíslováním nádrží).

Poznámka 1

$(i \bmod N)$ je zbytek po dělení čísla i číslem N.

Poznámka 2

Algoritmus je lineární, jestliže existuje přirozené číslo L takové, že žádný krok algoritmu se neprovede více než $L * N$.

Řešení

Ukažme nejprve, například matematickou indukcí vzhledem k počtu nádrží N, že existuje alespoň jedna nádrž, od které se dá objet celý okruh.

Pro $N = 1$ to zřejmě platí. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $N - 1$ a ukažme, že platí i pro N. Ze zadání plyne, že musí existovat nádrž j, od níž se dá dojet k nádrži $j + 1$. Vyřaďme nádrž $j + 1$ z okruhu tak, že její obsah přidáme do nádrže j (k $A(j)$ přičteme $A(j + 1)$) a upravíme spotřebu benzínu při jízdě od nádrže j k následující (k $B(j)$ přičteme $B(j + 1)$). Máme nyní okruh s $N - 1$ nádržemi splňující podmínky zadání. Podle předpokladu existuje nádrž k, od níž se dá objet celý okruh. Od téže nádrže k se dá ovšem objet i původní okruh s N nádržemi.

Definujeme funkci $S(i, j)$, která udává obsah nádrže automobilu po jízdě od nádrže i k nádrži j, přičemž vozidlo s počátečně prázdnou nádrží natankuje poprvé u nádrže i, poté u každé nádrže, kolem které projíždí, a dojede k nádrži j, aniž by u ní tankovalo.

$$S(i,j) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{j-1} (A(k) - B(k)) & \text{pro } i < j \\ \sum_{k=1}^{N} (A(k) - B(k)) + \sum_{k=1}^{j-i} (A(k) - B(k)) & \text{pro } i \geqq j. \end{cases}$$

Funkce (na rozdíl od reality) může nabývat i záporných hodnot. Platí $S(i, j) = S(i, j - 1) + A(j - 1) - B(j - 1)$. Od nádrže i, $1 \leqq i \leqq N$, se dá objet celý okruh právě tehdy, když splňuje podmínku

$d(i)$: pro všechna j, $1 \leqq j \leqq N$ je $S(i, j) \geqq 0$.

Budeme zjišťovat postupně pro nádrže $i = 1, 2, \ldots, N$, zda se od nich dá dojet k nádrži 1. Dá-li se od nádrže i dojet k nádržím $h = i + 1, i + 2, \ldots, j - 1$, kde $i \leqq j \leqq N$, tj. $S(i, h) \geqq 0$ pro všechna h, ale nedá se dojet k nádrži j, tj. $S(i, j) < 0$, pak ani jedna z nádrží h, $i \leqq h \leqq j - 1$,

nesplňuje podmínku $d(h)$ (při jízdě od i k j jsme jimi projížděli s nezáporným obsahem nádrže, a přesto jsme nedojeli) a jako následující budeme prověřovat nádrž j. Tímto způsobem najdeme minimální k takové, že od nádrže k se dá dojet k nádrži 1. Kdyby nádrž k nesplňovala podmínku d(k), nesplňovaly by podmínku d(h) ani nádrže $h = k + 1, \ldots, N$, a protože rovněž nádrže $m = 1, 2, \ldots, k - 1$ nesplňují d(m), byl by to spor s existencí alespoň jedné nádrže splňující podmínku d. Nádrž k tedy splňuje podmínku d(k) a všechny ostatní nádrže h splňující d(h) jsou ty, pro něž $S(k, h) = 0$.

Algoritmus

```
j := 1; k := 1, s: = 0;
while j ≦ N do
{zjišťuj, zda se dá od nádrže k dojet k nádrži l}
  begin s := s + A[j] − B[j]; j := j + 1;
        if s < 0 then begin k := j; s := 0 end
  end;
{od nádrže k se dá objet celý okruh, od 1, 2, ..., k − 1
nikoliv}
writeln(k); s := A[k] − B[k];
for j := k + 1 to N do
    begin if s = 0 then writeln(j);
                s := s + A[k] − B[k]
end;
```

Důkaz správnosti je obsažen v argumentaci pro návrh algoritmu. Algoritmus je lineární.

Je dáno celočíselné pole $A(1, \ldots, N)$, $N \geq 1$. P-sekvence délky k pro pole A je celočíselná posloupnost $p_1, \ldots, p_k$ taková, že $k \geq 1$, pro všechna i, $1 \leq i \leq k$, platí $1 \leq p_i \leq N$ a $p_{i-1} < p_i \leq A(p_{i-1})$.

Navrhněte a dokažte co nejlepší algoritmus, který určí maximální délku P-sekvence pro pole A.

Řešení

Jedním z mnoha způsobů řešení úlohy je nalézt pro každé j, $1 \leq j \leq N$, délku $m(j)$ nejdelší P-sekvence, jejíž poslední člen je j, a z hodnot $m(j)$ vybrat maximální.

Označme jako $P(j, i)$-sekvenci P-sekvenci, jejíž poslední člen je j a ostatní členy p vyhovují nerovnostem $1 \leq p$ a $p < i$. Označme dále jako $d(j, i)$ délku nejdelší $P(j, i)$-sekvence. Zřejmě $d(j, 1) = 1$, $d(j, k) \leq d(j, 1)$ pro $k < 1$ a $d(j, j) = m(j)$ pro všechna j, $1 \leq j \leq N$.

Hodnoty $d(j, 1)$ tedy známe, přirozeným dalším postupem je počítat hodnoty $d(j, i + 1)$ na základě znalostí hodnot $d(j, i)$. Hodnoty $d(j, i)$ budeme ukládat v pomocném poli $c[1..N]$, maximum z již vypočtených hodnot $m(j)$ v proměnné m a algoritmus budeme navrhovat tak, aby při výpočtu byla dodržována platnost tvrzení $Q(i)$:

$c[j] = d(j, i)$ pro všechna j, $\quad 1 \leq j \leq N$
a současně $m = \max\{m(1), m(2), \ldots, m(i)\}$.

První verze algoritmu může tedy vypadat takto:

for $i := 1$ **to** N **do** $c[i] := 1$;
$m := 1$;
{zde platí Q(1)}
for $i :=$ 1 **to** $N - 1$ **do**

```
    begin   {zde platí Q(i)}
        S;  {S je příkaz pro výpočet hodnot d(j, i + 1)}
            {zde platí Q(i + 1)}
    end;
{zde platí Q(N)}
writeln(m)
```

Počítáme-li hodnoty $d(j, i + 1)$ na základě již dříve vypočtených hodnot $d(j, i)$, vyjdeme z těchto faktů

— zřejmě $d(j, i + 1) = d(j, i)$ pro všechna j, $1 \leqq j \leqq i$,

— hodnota $d(j, i + 1)$ se může lišit od $d(j, i)$ jen tehdy, existuje-li P-sekvence s posledním členem j a předposledním členem i. Z definice P-sekvence plyne, že v tom případě musí být $j \leqq A[i]$.

Stačí tedy počítat jen hodnoty $d(j, i + 1)$ pro j splňující nerovnosti $i + 1 \leqq j, j \leqq N, j \leqq A[i]$.

Příkaz S můžeme částečně rozepsat:

```
for j := i + 1 to min(N, A[i]) do
    begin U;
    end;
M;
```

Jedinou $P(j, i + 1)$-sekvencí s délkou větší než $d(j, i)$ může být P-sekvence vytvořená z nejdelší $P(i, i)$-sekvence (její délka je $d(i, i)$) přidáním j jako posledního členu. Vzniklá P-sekvence je $P(j, i + 1)$-sekvencí a její délka je $d(i, i) + 1$. Toto využijeme při dokončení příkazu S.

```
for j := i + 1 to min(N, A[i]) do
    if c[i] + 1 > c[j] then c[j] := c[i] + 1;
{hodnota d(i + 1, i + 1) = m(i + 1) je nyní v c[i + 1]}
```

```
if  c[i + 1] > m then m := c[i + 1];
```

Konečná verze algoritmu:

```
for i := 1 to N do c[i] := 1;
m := 1;
{zde platí Q(1)}
for i := 1 to N − 1 do
    begin      {zde platí Q(i)}
        for j := i + 1 to min(N, A[i]) do
        if c[i] + 1 > c[j] then c[j] := c[i] + 1;
        if c[i + 1] > m then m := c[i + 1];
            {zde platí Q(i + 1)}
    end;
{zde platí Q(N)}
writeln(m).
```

Důkaz správnosti algoritmu byl prováděn současně s konstrukcí algoritmu. Uvedený algoritmus má kvadratickou složitost.

P - III - 3

Je dán kruh s 16 světly a vypínač. Každé světlo se nachází právě v jednom ze dvou stavů - svítí, nesvítí. Jedno otočení vypínačem vyvolá změnu stavu každého světla v závislosti na dosavadních stavech tohoto světla a světla následujícího (ve směru pohybu hodinových ručiček) podle těchto pravidel:

1. Jestliže světlo i jeho následovník svítí, pak světlo svítí dále.
2. Jestliže světlo svítí a jeho následovník nesvítí, pak světlo přestane svítit.

3. Jestliže světlo i jeho následovník nesvítí, pak se světlo rozsvítí.
4. Jestliže světlo nesvítí a jeho následovník svítí, pak světlo nesvítí dále.

Dokažte, že pro libovolné počáteční stavy světel budou nejvýše po 16 otočeních vypínačem svítit všechna světla.

Řešení

Máme dva možné stavy každého světla. Tyto stavy budeme modelovat pomocí pravdivostních hodnot (pravda, nepravda) a změnu stavu jako logickou funkci b argumentů i (číslo světla) a j (pořadové číslo otočení vypínačem), $i, j \geqq 0$, definovanou takto:

$b(i, j) \equiv$ »i-té světlo svítí po j-tém otočení«.

Uvažujme situaci po j otočeních a popišme situaci, která nastane po dalším otočení, tj. vyjádříme hodnotu $b(i, j + 1)$ pomocí hodnot $b(i, j)$ a $b(i + 1, j)$. Platí, že světlo i bude po $j + 1$ otočeních svítit, právě když světla i a $i + 1$ po j otočeních současně obě buď svítila, nebo nesvítila, což vyplývá z pravidel [1] a [2].

Formálně píšeme

$$b(i, j + 1) \equiv [b(i, j) \equiv b(i + 1, j)] . \tag{1}$$

Podobně z pravidel [3] a [4] dostáváme

$$b(i + 1, j) \equiv [b(i, j + 1) \equiv b(i, j)] . \tag{2}$$

Vztahy (1) a (2) zapíšeme (vzhledem k asociativitě logické ekvivalence) do jediného výrazu

$$b(i, j + 1) \equiv b(i, j) \equiv b(i + 1, j) . \tag{3}$$

Naším cílem je ukázat, že $b(i, j + 16)$ je pravda. Za tímto účelem dokážeme obecnější výsledek, a sice ten, že platí

$$H(k): \quad b(i, j + 2^k) \equiv b(i, j) \equiv b(i + 2^k, j) . \qquad (4)$$

Potom, protože $16 \equiv 2^4$ a $b(i, j) \equiv b(i + 16, j)$ je pravda, bude platit, že i $b(i, j + 16)$ je pravda. Vztah (4) dokážeme indukcí. Pro $k = 0$ je $2^0 = 1$ a $H(0)$ platí podle (3).

Nyní předpokládejme, že platí $H(k)$ pro $k > 0$, a dokažme platnost $H(k + 1)$. Podle indukčního předpokladu platí

$$b(i, j + 2^k + 2^k) \equiv b(i, j + 2^k) \equiv b(i + 2^k, j + 2^k) \quad (5)$$

a rovněž i

$$b(i + 2^k, j + 2^k) \equiv b(i + 2^k, j) \equiv b(i + 2^k + 2^k, j). \quad (6)$$

Spojením vztahů (5) a (6) dostáváme

$$b(i, j + 2^{k+1}) \equiv b(i, j + 2^k) \equiv b(i + 2^k, j) \equiv b(i + 2^{k+1}, j) . \quad (7)$$

Protože však

$$b(i, j + 2^k) \equiv b(i, j) \equiv b(i + 2^k, j) ,$$

platí i

$$H(k + 1): \quad b(i, j + 2^{k+1}) \equiv b(i, j) \equiv b(i + 2^{k+1}, j) .$$

P - III - 4

Libovolné přirozené číslo n je reprezentováno v unární soustavě slovem U_n, které obsahuje právě $n + 1$ znaků 1 ($U_0 = 1$, $U_1 = 11$, atd.). Označme B_n reprezentaci přirozeného čísla n v binární soustavě ($B_0 = 0$, $B_1 = 1$, $B_2 = 10$, atd.).

Navrhněte schéma S, které převádí unární reprezentaci přirozeného čísla na reprezentaci binární, tj. pro libovolné přirozené číslo n je

$S(U_n) = B_n$,
a dále navrhněte schéma T, které převádí binární reprezentaci přirozeného čísla na unární, tj. pro libovolné přirozené číslo n je
$T(B_n) = U_n$.
Řešení
a) Navrhneme schéma S, které převádí unární reprezentaci přirozeného čísla na binární. Převod bude realizován postupně, a proto budeme pracovat se slovem tvaru XBY, kde X reprezentuje doposud vytvořenou binární reprezentaci a Y zbývající část unární reprezentace. Začínáme slovem B_0BU_n a postupně pro každý symbol 1 v unární části přičteme jedničku k binární části.

S: $0A \rightarrow 1$ (1)
$1A \rightarrow A0$ (2)
$A \rightarrow 1$ (3)
$B11 \rightarrow AB1$ (4)
$B1 \rightarrow \varepsilon$ (5)
$\varepsilon \rightarrow 0B$ (6)

Schéma používá pomocné symboly A, B. Nejprve je pravidlem (6) převedeno vstupní slovo U_n na $0BU_n$. Pravidlem (4) je započato zpracování jednoho symbolu 1, které spočívá v jeho odstranění a v přičtení jedničky k levé části. Pravidla (1), (3) představují přičtení jedničky bez přenosu do vyšších řádů, (2) s přenosem. Výpočet končí vymazáním posledního symbolu 1 pravidlem (5).
b) Binární reprezentace B_n čísla n je posloupnost $a_m \ldots a_0$ cifer 0 nebo 1 taková, že platí

$$n = a_m.2^m + a_{m-1}.2^{m-1} + \ldots + a_1.2 + a_0 .$$

Po úpravě můžeme číslo n vyjádřit též ve tvaru

$$n = (\ldots(a_m.2 + a_{m-1}).2 + \ldots + a_1).2 + a_0 .$$

Řešením je proto schéma

T: $1X \rightarrow X11$ (1)
$X \rightarrow \varepsilon$ (2)
$C1 \rightarrow X1C$ (3)
$C0 \rightarrow XC$ (4)
$C \rightarrow 1$ (5)
$\varepsilon \rightarrow C$ (6)

Pravidly (3) a (4) je postupně odebírán nejlevější symbol z binární reprezentace a pravidlem (1) je vždy provedeno násobení dvěma, které končí aplikací pravidla (2). Pokud je odebírána cifra 1, pak je současně pravidlem (3) i přičtena jednička. Algoritmus končí aplikací pravidla (5), které doplňuje $(n + 1)$-ní jedničku do unární reprezentace čísla n.

29. medzinárodná matematická olympiáda sa konala v dňoch 9.—21. júla 1988 v Austrálii pri rekordnej účasti 268 súťažiacich zo 49 krajín. Ďalších 8 krajín - Fidži, Francúzska Polynézia, India, Nová Kaledónia, Reunion, Thajsko, Tonga a Západná Samoa vyslali pozorovateľov. Československo reprezentovalo úplné 6členné družstvo. Súťaž riadila medzinárodná porota, v ktorej každá zúčastnená krajina mala svojho zástupcu.

Porota pod vedením profesora *R. Pottsa* z Austrálie vybrala z návrhov úloh jednotlivých krajín 6 súťažných úloh a rozhodla, že každá úloha bude hodnotená maximálne siedmimi bodmi. Slávnostné zahájenie súťaže bolo popoludní 14. júla za prítomnosti austrálskeho ministra práce a vzdelávania p. *J. S. Dawkinsa*. Žiaci riešili úlohy 15. a 16. júla dopoludní, prvý deň prvú trojicu úloh, 2. deň druhú trojicu úloh, na riešenie bolo k dispozícii po 4,5 hodiny čistého času.

Texty úloh

(v zátvorke za úlohou je uvedena krajina, ktorá úlohu navrhla)

1. V rovine sú dané dve sústredné kružnice s polomermi R a r $(R > r)$ a bod P na menšej kružnici. Nech bod B

je (premenlivý) bod veľkej kružnice. Ďalej nech priamka BP znovu pretína veľkú kružnicu v bode C a kolmica l na priamku BP v bode P pretína malú kružnicu v bode A (ak l je dotyčnica ku kružnici v bode P, tak $A = P$). Potom

I. Nájdite množinu hodnôt výrazu $|AB|^2 + |AC|^2 + |BC|^2$.

II. Nájdite geometrické miesto bodov stredov úsečky AB. (Luxemburg)

2. Nech n je kladné celé číslo a nech $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{2n+1}$ sú podmnožiny množiny $\mathbf{B}$. Predpokladajme, že

a) $\mathbf{A}_i$ má práve $2n$ prvkov pre $i = 1, 2, \ldots, 2n + 1$

b) $\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j$ obsahuje práve jeden prvok pre všetky i, j $1 \leqq i < j \leqq 2n + 1$

c) každý prvok množiny $\mathbf{B}$ patrí aspoň do dvoch množín $\mathbf{A}_i$.

Pre ktoré čísla n existuje zobrazenie f: $\mathbf{B} \to \{0, 1\}$ tak, aby každá množina $\mathbf{A}_i$ obsahovala práve n prvkov, ktorým je priradená 0? (ČSSR)

3. Na množine kladných celých čísel je definovaná funkcia f nasledovne:

$$f(1) = 1, \quad f(3) = 3$$
$$f(2n) = f(n)$$
$$f(4n + 1) = 2f(2n + 1) - f(n)$$
$$f(4n + 3) = 3f(2n + 1) - 2f(n)$$

pre všetky kladné celé čísla n. Určte počet tých celých kladných čísel n neprevyšujúcich 1988, pre ktoré $f(n) = n$. (Veľká Británia)

4. Dokážte, že množina takých reálnych čísel x, pre ktoré

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x - k} \geqq \frac{5}{4}$$

je zložená z disjunktných intervalov, ktorých súčet dĺžok je 1988. (Írsko)

5. V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou BC označme D pätu výšky z vrcholu A. Priamka, ktorá spojuje stredy kružníc vpísaných trojuholníkom ABD a ACD pretína strany AB, AC po rade v bodoch K, L. Označme S, resp. T, obsah trojuholníka ABC, resp. AKL. Dokážte, že $S \geqq 2T$. (Grécko)

6. Nech a, b sú také kladné celé čísla, že číslo $ab + 1$ je deliteľom čísla $a^2 + b^2$. Dokážte, že číslo $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ je štvorcom prirodzeného čísla. (SRN)

Vybrané úlohy s výnimkou šiestej úlohy neboli ťažké, boli z klasických tém a ich obťažnosť bola primeraná úrovni súťaže. Šiesta úloha bola veľmi ťažká, vyriešilo ju len 11 súťažiacich, jej riešenie sa zakladalo na netradičnom obrate.

Koordinácia opráv úloh prebehla hladko, takže 19. júla na záverečnom zasadaní poroty sa rozhodovalo už len o bodových hraniciach pre jednotlivé ceny. Stanovili sa takto 33—42 bodov 1. cena, 23—31 2. cena, 14—22 3. cena. 20. júla bolo slávnostné odovzdávanie cien a ukončenie olympiády. Prvé ceny odovzdával austrálsky ministerský predseda p. *R. J. L. Hawke*. Medzi tými, čo získali prvú cenu bol aj 13-ročný Austrálčan *Terrence Tao* (bola to už jeho tretia medzinárodná olympiáda). Jedinú zvláštnu cenu za elegantné riešenie úlohy získal účastník z Bulharska. Výsledky členov československého družstva ako aj ostatných súťažiacich vidno z priloženej tabuľky.

Olympiáda sa konala v rámci osláv 200 rokov bieleho osídlenia Austrálie, bola veľmi dobre organizovaná a pre účastníkov bola veľkým zážitkom. Československé družstvo s výnimkou vedúceho delegácie, *dr. F. Zítka, CSc.*, ktorý ako člen jury priletel skôr, priletelo do Sydney 11. júla, 11.—13. júla strávilo prehliadkou Sydney, 14. júla nás previezli do Canberry, ktorá je asi 300 km na juhozápad od Sydney v horách. Všetky ďalšie činnosti boli potom v Canberre. 15. a 16. júla boli súťažné dni, 17. júla bola prehliadka Canberry, 19. júla výlet do neďalekej prírodnej rezervácie. S množstvom dojmov sme sa vrátili domov, do Prahy, 23. júla.

ČESKOSLOVENSKÁ ÚČASŤ NA MMO

Do súťaže na 29. MMO vyslalo Československo šesť žiakov vybraných na základe výsledkov dosiahnutých v domácej MO, na prípravných sústredeniach, korešpondenčnom seminári ÚV MO a iných podobných akciách. Dvaja boli v šk. roku 1987|88 študentami 2. ročníka, dvaja 3. ročníka a dvaja 4. ročníka gymnázia, piati boli zo špeciálnych matematických tried.

Výkon československého družstva trochu zaostal za očakávaním. Po vcelku dobrom výkone v 1. deň súťaže nastal 2. deň útlm a všetci šiesti súťažiaci dosiahli spolu len 26 bodov zo 126 možných, čo vzhľadom k ľahkej 4. úlohe (jej trik bol dobre známy z domácich súťaží) a nie ťažkej 5. úlohe, bolo málo. Čakalo sa najmä, že všetci československí účastníci získajú cenu. 12. miesto v neoficiálnom hodnotení družstiev medzi 49 krajinami opticky nie je zlé, avšak úroveň starostli-

vosti o talenty v ČSSR a tradície by dali tušiť výraznejšie úspechy.

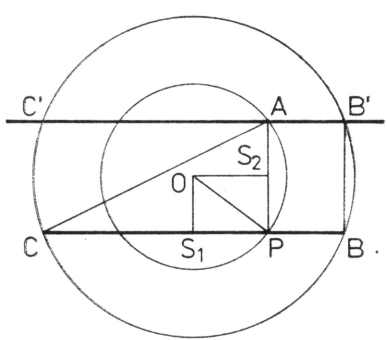
Československo prispelo na MMO aj prácou v jury. Jedna zo šiestich súťažných úloh (úloha č. 2) bola československá, všetky 3 úlohy z čsl. návrhu sa dostali do užšieho výberu úloh pre MMO.

Riešenia úloh

1. *Časť i).* Označme O spoločný stred oboch kružníc, S_1 stred tetivy BC, S_2 stred tetivy AP, $|PC| = c$, $|PB| = b$, $|PA| = a$. Z Pytagorovej vety pre trojuholníky APC, APB dostaneme

$$|AB|^2 + |AC|^2 + |BC|^2 = c^2 + a^2 + b^2 + a^2 + (b + c)^2 = \\ = 2(a^2 + b^2 + c^2 + bc) \qquad (1)$$

Zrejme $|S_2P| = \frac{a}{2}$, $|S_1P| = \left|\frac{c - b}{2}\right|$, $|S_1C| = \frac{b + c}{2}$ (obr. 42).



Obr. 42

Teraz napíšeme Pytagorovu vetu pre trojuholníky OS_2P a OS_1C

$$\left(\frac{c-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = r^2 \qquad (2)$$

$$\left(\frac{c+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = R^2 \qquad (3)$$

Ak vynásobíme rovnosť (2) dvoma a rovnosť (3) šiestimi a vynásobené rovnosti sčítame, tak dostaneme

$$2(a^2 + b^2 + c^2 + bc) = 2r^2 + 6R^2$$

t.j. vzhľadom na (1)

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |AC|^2 = 2r^2 + 6R^2$$

čo nezávisí na polohe bodu B.

Časť ii). Veďme bodom A rovnobežku s tetivou BC, jej priesečníky s väčšou kružnicou označme C', B'. Potom $APBB'$ aj $APCC'$ sú pravouholníky a stred uhlopriečky AB je zároveň aj stredom uhlopriečky PB'. Keď bod B prebehne celú veľkú kružnicu, tak aj bod B' prebehne celú veľkú kružnicu, to znamená, že hľadaným geometrickým miestom bodov je kružnica rovnoľahlá s veľkou kružnicou v rovnoľahlosti so stredom P a koeficientom $\frac{1}{2}$.

2. Ukážeme, že každý prvok množiny B patrí práve do dvoch množín A_i. Naozaj, keby prvok $a \in \mathsf{A}_i$ patril do aspoň ďalších dvoch množín $\mathsf{A}_j, \mathsf{A}_k$, tak zvyšných $2n - 1$ prvkov množiny A_i by patrili do zvyšných $2n - 2$ množín (okrem A_i, A_j, A_k) t.j. aspoň dva by patrili do nejakej

množiny A_l a teda $\mathsf{A}_i \cap \mathsf{A}_l$ by malo aspoň dva prvky.

Potom množina B má $n(2n+1)$ prvkov. Ak n je nepárne, tak požadované zobrazenie neexistuje, pretože ak označíme $\mathsf{B}_0 = \{X \in \mathsf{B} \mid f(X) = 0\}$, tak počet prvkov množiny B_0 by mal byť $\frac{n(2n+1)}{2}$ (totiž každý prvok patrí práve do dvoch množín), čo nie je možné. Na druhej strane, pre párne n taká funkcia existuje napr. pre $X \in \mathsf{B}$, $\{X\} = \mathsf{A}_i \cap \mathsf{A}_j$ položme $f(X) = 0$ práve vtedy, ak »vzdialenosť« medzi vrcholmi X_i, X_j pravidelného $2n+1$ uholníka $X_1X_2 \ldots X_{2n+1}$ je párna. (Vzdialenosťou tu rozumieme počet úsečiek najkratšej lomenej čiary pozostávajúcej zo strán $2n+1$ uholníka spájajúcej body X_i, X_j).

3. Vypočítajme niekoľko prvých hodnôt funkcie f

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f(n)$	1	1	3	1	5	3	7	1	9	5	13	3	11	7	15

Ak by sme čísla $n, f(n)$ zapísali v dvojkovej sústave, tak naša tabuľka by vyzerala takto

n	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011
$f(n)$	1	1	11	1	101	11	111	1	1001	101	1101

Vzniká hypotéza, že zápis čísla $f(n)$ v dvojkovej sústave vznikne zo zápisu čísla n v dvojkovej sústave obrátením poradia cifier (»čítaním odzadu«). Túto hypotézu dokážeme matematickou indukciou. Pre $n = 1$, $n = 3$ tvrdenie platí. Nech tvrdenie platí pre všetky $n < t$. Ukážeme, že platí aj pre t.

Ak $t = 2n$, tak $n, 2n$, a $f(n)$ majú podľa indukčného pred-

pokladu tvar uvedený v tabuľke. Potom $f(2n) = f(n)$ a pohľad do tabuľky nás presvedčí, že tvrdenie platí.

Ak $t = 4n + 1$ tak n, $2n + 1$, $4n + 1$, $f(n)$, $f(2n + 1)$ môžeme podľa indukčného predpokladu vyčítať z tabuľky a $f(4n + 1) = 2f(2n + 1) - f(n) = f(2n + 1) + (f(2n + 1) - f(n)) = (10c_0c_1 \ldots c_k)_2$ č. b. t. d.

Ak $t = 4n + 3$ postupujeme podobne využijúc rovnosť

$$f(4n + 3) = 3f(2n + 1) - 2f(2n) = 2(f(2n + 1) - f(n)) + f(2n + 1)$$

Dôkaz našej hypotézy je skončený. Teraz už vidíme, že $f(n) = n$ keď číslo n má symetrický zápis v dvojkovej sú-

Tabuľka 1

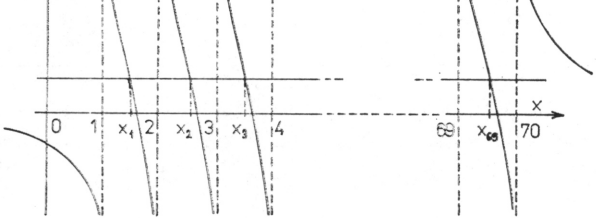
číslo	jeho zápis v dvojkovej sústave						
	2^{k+2}	2^{k+1}	2^k	2^{k-1}	$\ldots$ 2^2	2^1	2^0
n			c_k	c_{k-1}	c_2	c_1	c_0
$2n + 1$		c_k	c_{k-1}	c_{k-2}	c_1	c_0	1
$2n$		c_k	c_{k-1}	c_{k-2}	c_1	c_0	0
$4n + 1$	c_k	c_{k-1}	c_{k-2}	c_{k-3}	c_0	0	1
$4n + 3$	c_k	c_{k-1}	c_{k-2}	c_{k-3}	c_0	1	1
$f(n)$			c_0	c_1	c_{k-2}	c_{k-1}	c_k
$f(2n + 1)$		1	c_0	c_1	c_{k-2}	c_{k-1}	c_k
$f(2n + 1) - f(n)$		1	0	0	0	0	0
$2(f(2n + 1) - f(n))$	1	0	0	0	0	0	0

stave. Podľa predpokladu $n \leqq 1988$, teda n je nanajvýš 11 ciferné číslo (v dvojkovej sústave). Nasledujúca tabuľka udáva počet $p(k)$ symetrických k-ciferných čísel,

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$p(k)$	1	1	2	2	4	4	8	8	16	16	32

čo v súčte dáva 94 symetrických čísel. Avšak $1988 = (11111000100)_2$ a existujú len dve symetrické 11 ciferné čísla prevyšujúce 1988 a to $(11111011111)_2$ a $(11111111111)_2$, takže hľadaný počet je 92.

4. Označme $f(x)$ súčet $\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k}$. Na obrázku 43 vidíme nakreslený graf funkcie $y = f(x)$. Je totiž jasné, že na každom intervale $(i, i+1)$ $i = 1, 2, \ldots, 69$ je funkcia $f(x)$ ako súčet klesajúcich funkcií klesajúca. To samé platí pre intervaly $(-\infty, 1)$, $(70, \infty)$. Ďalej vidíme, že $\lim_{x \to i^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to i^+} f(x) = \infty$ pre $i = 1, 2, \ldots, 70$ a že $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$



Obr. 43

$= \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$. Tieto fakty implikujú, že graf funkcie $y = f(x)$ je kvalitatívne taký, ako je nakreslený na obrázku 43.

Z obrázku vidíme, že riešením našej nerovnice bude zjednotenie 70 disjunktných intervalov tvaru (i, x_i), kde x_i je koreň rovnice $\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} = \frac{5}{4}$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_{70}$ pre $i = 1, 2, \ldots, 70$. To však znamená že súčet dĺžok týchto 70 intervalov $S = \sum_{k=1}^{70} x_i - \sum_{i=1}^{70} i$. Upravujme našu rovnicu. Postupne dostávame:

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k(x-1)(x-2)\ldots(x-70)}{x-k} =$$

$$= \frac{5}{4}(x-1)(x-2)\ldots(x-70)$$

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-70) -$$

$$- \frac{4}{5} \sum_{k=1}^{70} \frac{k(x-1)(x-2)\ldots(x-70)}{x-k} = 0$$

teda rovnicu tvaru

$$x^{70} + a_{69}x^{69} + \ldots + a_0 = 0$$

Zo súvisu medzi koreňmi a koeficientami normovaného polynómu vieme, že $\sum_{k=1}^{70} x_i = -a_{69}$. Avšak

$$a_{69} = -\sum_{k=1}^{70} k - \frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70} k = -\frac{9}{5}\sum_{k=1}^{70} k$$

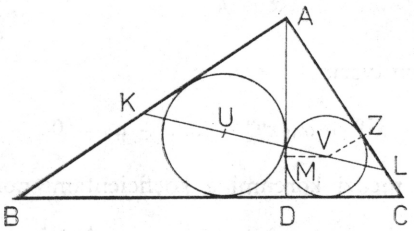
lebo k-tý sčítanec v sume má koeficient pri x^{69} rovný $\frac{4}{5}k$.

Potom $S = \sum_{i=1}^{70} x_i - \sum_{i=1}^{70} i = \frac{4}{5}\sum_{i=1}^{70} i = 1988$ č. b. t. d.

5. Označme U resp. V stred kružnice vpísanej trojuholníku ABD resp. trojuholníku ACD, Z resp. M bod dotyku kružnice vpísanej trojúholníku ACD a strany AC resp. AD. Dôkaz spravíme v troch krokoch:

a) ukážeme, že $\Delta\, UDV \sim \Delta\, BAC$
b) ukážeme, že $\Delta\, AKL$ je rovnoramenný a pravouhlý
c) ukážeme, že $|AL| = |AD|$

a) Nech r je polomer kružnice vpísanej trojuholníku BAC (obr. 44), r_1 trojuholníku ADC, r_2 trojuholníku ADB. Z podobnosti trojuholníkov ABC, DAC, DBA vyplýva, že



Obr. 44

$$r_1 = r\frac{|AC|}{|BC|},\ r_2 = r\frac{|AB|}{|BC|} \text{ teda } \frac{|DU|}{|DV|} = \frac{r_2\sqrt{2}}{r_1\sqrt{2}} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

čo spolu s kolmosťou strán UD, VD dokazuje, že trojuholník UDV je podobný s trojuholníkom BAC.

b) Všimnime si štvoruholník $CDUL$. Z podobnosti $\Delta\, ABC \sim \Delta\, DUV$ vyplýva, že $|\sphericalangle\, DUV| + |\sphericalangle\, BCA| = \frac{\pi}{2}$, čo spolu s faktom $|\sphericalangle\, UDC| = \frac{3}{4}\pi$ dáva rovnosť $|\sphericalangle\, ULC| = \frac{3}{4}\pi$, teda trojuholník KLA je rovnoramenný $\left(\text{lebo } |\sphericalangle\, KLA| = \frac{\pi}{4},\ |\sphericalangle\, BAC| = \frac{\pi}{2}\right)$.

c) $|ZL| = r_1$, lebo VZL je rovnoramenný trojuholník. Potom $|AL| = |AZ| + r_1 = |AM| + r_1 = |AD|$. Avšak $S = \frac{1}{2}|AD|.|BC|$, $2T = |AD|^2$. Požadovaná nerovnosť je potom ekvivalentná s nerovnosťou $|BC| \geqq 2|AD|$, ktorú ľahko nahliadneme, ak narysujeme Tálesovu kružnicu nad priemerom BC.

6. Nech $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = q$, $q \in N$. Potom

$$a^2 + b^2 = qab + q \qquad (1)$$

Dôkaz urobíme sporom. Ak tvrdenie neplatí, tak existujú celé kladné čísla a, b, q, ktoré spĺňajú (1) a navyše také, že q nie je štvorcom prirodzeného čísla. Spomedzi takýchto trojíc celých čísel, zvoľme tú, v ktorej je b najmenšie (ak je takýchto trojíc viac, tak ľubovoľnú z nich).

Nech je to trojica a_0, b_0, q_0. Potom q_0 nie je štvorec a zrejme $a_0 \geqq b_0 > 0$ (ináč by sme zamenili a_0, b_0 resp. $q_0 = a_0^2$). Ďalej kvadratická rovnica

$$x^2 - q_0 b_0 x + b_0^2 - q_0 = 0$$

má podľa (1) celočíselný koreň a_0. Potom aj jej druhý koreň a' je celočíselný a očividne platí $a_0 a' = b_0^2 - q_0 \neq 0$, teda

$$a' = \frac{b_0^2 - q_0}{a_0} < \frac{b_0}{a_0} \leqq \frac{b_0^2}{b_0} = b_0$$

Vzhľadom k rovnosti $a_0 a' = q_0 b_0$ je zrejme $a' > 0$.

Čísla a', b_0, q_0 tvoria tiež protipríklad a po zámene premenných a', b_0 dostávame protipríklad, v ktorom je $b < b_0$, čo je spor s predpokladom minimality b_0.

Celkové výsledky 29. MMO

Štát	Počet účast.	1. cena	2. cena	3. cena	Súčet bodov
Alžírsko	5		1		42
Argentína	3				23
Austrália	6	1		1	100
Belgicko	6			3	76
Brazília	6				39
Bulharsko	6		4	2	144
Cyprus	6				21
ČSSR	6		2	2	120
Čína	6	2	4		201
Ekuádor	1				1
Filipíny	5				29
Fínsko	6			2	65
Francúzsko	6	1	1	3	128
Grécko	6			1	65
Holandsko	6			3	85
Indonézia	3				6
Irán	6		1	3	86
Írsko	6				30
Island	4			1	37
Izrael	6	1		4	115
Južná Kórea	6			3	79
Kanada	6	1	1	2	124
Kolumbia	6			3	66
Kuba	6				35
Kuwait	6				23

Štát	Počet účast.	1. cena	2. cena	3. cena	Súčet bodov
Luxemburg	3		1	2	64
Maďarsko	6		2	2	109
Maroko	6			2	62
Mexico	6			1	40
NDR	5	1	4		145
NSR	6	1	4	1	174
Nórsko	6				33
Nový Zéland	6		1		47
Peru	6			1	55
Poľsko	3		1		54
Rakúsko	6	1	1	1	110
Rumunsko	6	2	4		201
Hong Kong	6			2	68
Singapúr	6		2	2	96
Španielsko	6				34
Švédsko	6	1		4	115
Taliansko	4			1	44
Tunis	4			3	67
Turecko	6			2	65
USA	6		5	1	153
Veľká Británia	6		3	2	121
Vietnam	6	1	4		166
Juhoslávia	6			4	92
ZSSR	6	4	2		217

Meno a škola	Počet bodov za úlohu 1	2	3	4	5	6	Celkom	Cena	Umiestnenie
Petr Čížek 3. r. GWP Praha	7	7	7	1	5	1	28	2.	38.–43.
Pavol Gvozdjak 4. r. GAM Bratislava	4	7	7	3	0	0	21	3.	73.–81.
Petr Hliněný, 2. r. Gymnázium Bílovec	6	0	1	2	1	0	10	—	166.–173.
Stanislav Krajčí 4 r. Gymn. Šmeralova, Košice	7	7	2	2	3	0	21	3.	73.–81.
Ilja Martišovitš, 3. r. Gym. Novohradská, Bratislava	7	7	7	0	7	0	28	2.	38.–43.
Ondrej Šuch 2. r. GAM Bratislava	4	0	7	1	0	0	12	—	140.–149.

Doc. RNDr. Leo Boček, CSc., RNDr. Luboš Brim, CSc.,
RNDr. Tomáš Hecht, CSc., RNDr. Karel Horák, CSc.

**TŘICÁTÝ SEDMÝ ROČNÍK
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH**

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství v Praze
roku 1990 jako svou publikaci č. 5-42-14/37
Edice Pomocné knihy pro žáky
Odpovědná redaktorka PaedDr. Jana Nováková
Výtvarný redaktor Václav Hanuš
Technická redaktorka Dita Novotná
Z nové sazby písmem Plantin
vytiskly Moravské tiskařské závody, s. p. Olomouc
Formát papíru 70 × 100 cm
Počet stran 164
AA 5,45 - VA 5,92
Náklad 300 výtisků
Tematická skupina a podskupina 03/2
1. vydání

14-613-90

ISBN 80-04-24245-6

matematická olympiáda

MO

SPN 42

5-42-14/[illegible]37

14-613-90 03/2

ISBN 80-04-24245-6