

## 39. ročník matematické olympiády na středních školách

---

Leo Boček (editor); Jiří Binder (editor); Vladimír Burjan (editor); Karel Horák (editor); Pavel Töpfer (editor): 39. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1989/90. 31. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1992.

### **Terms of use:**

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404897>

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>



## 39. ročník matematické olympiády na středních školách





# TŘICÁTÝ DEVÁTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1989/1990

31. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ PRAHA

**Za přispění spolupracovníků zpracovali**  
doc. RNDr. Leo Boček, CSc., RNDr. Jiří Binder, CSc.,  
RNDr. Vladimír Burjan, RNDr. Karel Horák, CSc.,  
RNDr. Pavel Töpfer, CSc.

**Lektorovali doc. RNDr. Emil Calda, CSc.,**  
RNDr. Libor Jelínek, doc. RNDr. Václav Sedláček, CSc.,  
RNDr. Václav Šůla

© Leo Boček za kolektiv, 1992

**ISBN 80-04-25995-2**

# Obsah

|                                                       |     |
|-------------------------------------------------------|-----|
| O průběhu 39. ročníku matematické olympiády . . . . . | 5   |
| <b>Kategorie C</b> . . . . .                          | 45  |
| Texty úloh . . . . .                                  | 45  |
| Řešení úloh . . . . .                                 | 49  |
| <b>Kategorie B</b> . . . . .                          | 62  |
| Texty úloh . . . . .                                  | 62  |
| Řešení úloh . . . . .                                 | 65  |
| <b>Kategorie A</b> . . . . .                          | 74  |
| Texty úloh . . . . .                                  | 74  |
| Řešení úloh . . . . .                                 | 79  |
| <b>Kategorie P</b> . . . . .                          | 106 |
| Texty úloh . . . . .                                  | 106 |
| Řešení úloh . . . . .                                 | 121 |
| <b>Korespondenční seminář ÚV MO 1989/90</b> . . . . . | 175 |
| Úlohy korespondenčního semináře . . . . .             | 176 |
| Řešení úloh korespondenčního semináře . . . . .       | 185 |
| <b>Ako sme počítali v Pekingu</b> . . . . .           | 260 |
| Texty soutěžních úloh . . . . .                       | 268 |
| Řešení úloh . . . . .                                 | 270 |



## O průběhu 39. ročníku matematické olympiády

Soutěž Matematická olympiáda pořádají pro žáky středních a základních škol ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR a ministerstvo školství, mládeže a sportu SR ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků, Jednotou slovenských matematiků a fyziků a Matematickým ústavem ČSAV. Soutěž řídí ústřední výbor matematické olympiády (ÚV MO) prostřednictvím krajských a okresních výborů matematické olympiády (KV MO, OV MO). Členy KV MO a OV MO jmenují odbory školství krajských a okresních národních výborů, členy ÚV MO jmenují MŠMT ČR a MŠMS SR. Na začátku školního roku 1989/90 určilo ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR a ministerstvo školství, mládeže a sportu SR na návrh hlavních výborů JČMF a JSMF toto složení ÚV MO na další pětileté období:

### Předsednictvo ÚV MO

předseda: *doc. RNDr. Leo Boček, CSc., MFF UK, Praha*

místopředsedové: *prof. RNDr. Miroslav Fiedler,*

člen korespondent ČSAV, MÚ ČSAV, Praha

*doc. RNDr. Eva Gedeonová, CSc.,*

MFF UK, Bratislava

zástupce MŠMT ČR: *RNDr. Václav Šůla,*

MŠMT ČR, Praha

zástupce MŠMS SR: *RNDr. Ján Lastivka*,

MŠMS SR, Bratislava

tajovníci: *RNDr. Jiří Binder, CSc.*, PF UK, Praha

*RNDr. Karel Horák, CSc.*, MÚ ČSAV, Praha

další členové predsedníctva

*RNDr. Pavol Černek, CSc.*, SF SVŠT, Bratislava

*RNDr. Tomáš Hecht, CSc.*, MFF UK, Bratislava

*doc. RNDr. Jozef Hvorecký, CSc.*, MFF UK, Bratislava

*doc. RNDr. Milan Koman, CSc.*, PF UK, Praha

*PhDr. Helena Ladrová, MŠMT ČR*, Praha

*RNDr. Vladimír Repáš, EF SVŠT*, Bratislava

*RNDr. Jiří Sedláček, CSc.*, MÚ ČSAV, Praha

*Stanislav Rypáček*, gymnázium, Praha 3

*doc. RNDr. Bohuslav Sivák, CSc.*, PF, Banská Bystrica

*RNDr. Pavel Töpfer*, MFF UK, Praha

Další členové ÚV MO

*RNDr. Gabriela Andrejková*, PŕF UPJŠ, Košice

*RNDr. Andrej Blaho*, MFF UK, Bratislava

*RNDr. Luboš Brim, CSc.*, PŕF MU, Brno

*RNDr. Vlado Burjan, CSc.*, gymnázium A. Markuša,  
Bratislava

*PhDr. Ivan Bušek*, Ped. ústav hl. m. Prahy, Praha

*RNDr. Milan Cirjak*, Krajský ped. ústav, Prešov

*RNDr. Vladimír Dřízal*, PF UK, Praha

*RNDr. Libuše Hozová, ZŠ*, Lid. milicí, Opava

*RNDr. Libor Jelínek*, gymnázium, Pardubice

*RNDr. Jan Kratochvíl, CSc.*, MFF UK, Praha

*doc. PhDr. Karol Križalkovič, CSc.*, PF, Nitra

*Olga Maříková*, Nár. výbor hl. m. Prahy, Praha

*Vlasta Michálková*, UDPM KG, Bratislava



*RNDr. Oliver Ralík, PF, Nitra*

*RNDr. Jaromír Šimša, CSc., MÚ ČSAV, Brno*

*Ing. Oldřich Skopal, gymnázium, Brno*

*RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., PřF UP, Olomouc*

*RNDr. Ladislav Topolský, gymnázium, Banská Bystrica*

*RNDr. Jiří Vinárek, CSc., MFF UK, Praha*

*PhDr. Marta Volfová, CSc., PF, Hradec Králové*

*Jana Žužičová, ZŠ, Bratislava*

*Členy ÚV MO jsou také předsedové KV MO*

*prof. RNDr. Karel Drbohlav, DrSc., MFF UK, Praha*

*František Šturm, gymnázium, Benešov*

*RNDr. Pavel Pech, PF, České Budějovice*

*doc. RNDr. Josef Polák, CSc., VŠSE, Plzeň*

*doc. RNDr. Miroslav Bělík, CSc., PF, Ústí n. Lab.*

*RNDr. Josef Kubát, gymnázium, Pardubice*

*doc. RNDr. Jaroslav Bayer, CSc., EF VUT, Brno*

*RNDr. Vladimír Vlček, CSc., PřF UP, Olomouc*

*doc. dr. Ladislav Mišík, DrSc., Bratislava*

*prof. RNDr. Ondřej Šedivý, CSc., PF, Nitra*

*doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., VŠDS Žilina*

*RNDr. Božena Mihalíková, CSc., PřF UPJŠ, Košice*

V průběhu 39.ročníku MO se konala dvě zasedání ÚV MO, první ve dnech 11.–12. prosince 1989 v Praze, druhé 24.–25.4.1990 v Jihlavě při celostátním kole MO. Hlavním bodem obou zasedání bylo hodnocení průběhu soutěže, zabezpečení celostátních soustředění úspěšných řešitelů MO včetně soustředění pro přípravu na MMO, korespondenční seminář ÚV MO a organizace dalších kol soutěže. Byla projednávána též ediční činnost ÚV MO, především příprava dalších svazků edice Škola mladých matematiků. Byla

diskutována vhodnost výběru úloh MO. Pracovní předsednictvo se scházelo jednou měsíčně a zabývalo se hlavně výběrem úloh pro všechna kola soutěže.

V organizaci MO nedošlo k žádným změnám. Kategorie A byla určena žákům 3. a 4. ročníků středních škol, kategorie B byla pro žáky 2. ročníků a v kategorii C soutěžili žáci 1. ročníků. Pro žáky všech tříd středních škol byla určena ještě kategorie P, zaměřená na úlohy z programování a matematické informatiky.

V kategoriích A, B, C má I. kolo dvě části. V první části řeší soutěžící 6 úloh doma nebo v matematických kroužcích a mohou se při tom radit se svými učiteli, vedoucími kroužků apod. Druhá část má formu klauzurní práce, v níž řeší žáci tři úlohy v omezeném čase 4 hodin.

V kategoriích A a P se koná ještě třetí, celostátní kolo. V něm je vlastní soutěž rozdělena do dvou dnů. V kategorii A řeší soutěžící každý den tři úlohy v časovém limitu čtyři hodiny, v kategorii P ve stejném limitu vždy dvě úlohy. Organizací celostátního kola byl ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy ČR pověřen Jihomoravský kraj. Uskutečnilo se v Jihlavě ve dnech 23.–25.4.1990 (kat. A) a 26.–28.4.1990 (kat. P). Soutěže včetně pěkného doprovodného programu zabezpečoval tým zkušených organizátorů pod vedením profesora Jana Beneše z jihlavského gymnázia.

Vybrané družstvo se zúčastnilo Mezinárodní matematické olympiády i mezinárodní soutěže v programování. Těmto soutěžím je věnována samostatná kapitola v závěru brožury.

Hlavní náplň následujících kapitol tvoří texty úloh všech kategorií včetně jejich řešení. Každá úloha je označena kate-

gorií, římskou číslicí udávající kolo nebo písmenem S, které značí školní, klauzurní část I. kola, a číslem úlohy.

Nyní uvádíme přehled akcí pořádaných pro žáky v průběhu školního roku v jednotlivých krajích a akcí organizovaných ÚV MO.

*Praha.* Pro řešitele MO v jednotlivých kategoriích byly uspořádány instruktáže (pro kategorie A, B a C celkem 16–20 hodin, pro kategorie P 8 hodin), s průměrnou účastí 25–35 žáků. Pro 32 řešitelů korespondenčního semináře a MO se v únoru konalo třídní soustředění. Soustředění pro řešitele kategorií B a C proběhlo v červnu, trvalo 5 dní a zúčastnilo se ho 33 žáků.

*Středočeský kraj.* Týdenní soustředění pro 40 žáků 1. až 3. ročníků se konalo v září. V červnu se uskutečnilo krajské soustředění žáků 8. tříd jako příprava na kategorii C. Byly provedeny instruktáže učitelů k úlohám I. kola. Pro žáky, řešitele úloh MO, proběhly instruktáže na vybraných gymnáziích.

*Jihočeský kraj.* Letní škola pro úspěšné řešitele jednotlivých kategorií MO se konala v červnu, trvala jeden týden a zúčastnilo se jí 25 řešitelů kategorie A, 25 v kategorii B a 50 řešitelů kategorie C. Dále byly uspořádány instruktáže pro učitele středních škol (celkem 3 dny), přednášky pro řešitele MO na Pedagogické fakultě v Českých Budějovicích a dvoudenní soustředění řešitelů kategorie A. Korespondenční seminář měl tři série úloh.

*Západočeský kraj.* V Plzni, Klatovech a Karlových Varech se konalo vždy po dvou přednáškách k úlohám jednotlivých

kategorií. Úlohy korespondenčního semináře pro kategorii A řešilo 46 žáků, pro kategorie B a C 62 žáků.

*Severočeský kraj.* V červnu proběhlo v Krupce soustředění pro 51 řešitelů kategorií A, B a C. V Liberci byly pořádány semináře pro řešitele MO.

*Jihomoravský kraj.* V Brně, v Jihlavě a ve Zlíně se konaly pro řešitele úloh MO semináře, zvláště pro každou kategorii s průměrnou účastí 20 žáků. Jednou týdně se pořádal seminář pro žáky z třídy zaměřené na matematiku na gymnáziu v Brně, tř. kpt. Jaroše. Pro 15 vybraných řešitelů kategorie A probíhal v březnu a dubnu seminář zaměřený na přípravu na celostátní kolo MO. Týdenní soustředění úspěšných řešitelů kategorie B a C proběhlo v Ivančicích v červnu. Zúčastnilo se ho celkem 60 žáků.

*Severomoravský kraj.* V září proběhly instruktáže referentů MO, zúčastnilo se 39 učitelů. Na sobotních besedách MO byla průměrná účast 32 žáků. Na gymnáziu M. Koperníka v Bílovci se konaly jednou týdně semináře pro řešitele MO (26 účastníků). Korespondenční seminář pro kategorie A, B, C (3 série úloh) řešilo celkem 260 účastníků. Seminář byl doplněn dvěma týdenními soustředěními v únoru a v dubnu. V červnu se konalo pro 40 úspěšných řešitelů MO desetidení soustředění. V červnu též proběhlo třídení soustředění žáků 3. ročníků tříd gymnázií se zaměřením na matematiku (30 účastníků).

*Bratislava.* Pro řešitele MO byly pro každou kategorii uspořádány instruktáže. Dále probíhal korespondenční seminář doplněný soustředěním.

*Západoslovenský kraj.* Instruktaží učitelů a vedoucích kroužků MO (pro kategorie A, B, C i P) se zúčastnilo 60 učitelů. Soustředění úspěšných řešitelů MO kategorií B a C bylo týdenní a zúčastnilo se ho 40 žáků. V korespondenčním semináři řešilo 72 žáků úlohy pěti sérií, z toho 18 nejlepších bylo pozváno na čtyřdenní soustředění.

*Středoslovenský kraj.* V říjnu proběhly instruktáže pro učitele. Krajský korespondenční seminář pro kategorii A a kategorie B, C měl 2 série a byl doplněn soustředěním. Korespondenční seminář byl organizován též pro žáky středních odborných učilišť. Soustředění pro úspěšné řešitele MO proběhlo v září v Terchové.

*Východoslovenský kraj.* Pro každou kategorii se uskutečnily samostatné instruktáže referentů MO. V kraji probíhaly korespondenční semináře doplněné dvěma soustředěními (září a únor). V Košicích a Prešově byly organizovány matematické kroužky pro řešitele úloh kategorie A. Kroužky navštěvovalo průměrně 15 účastníků. Při KDPM v Košicích fungoval Klub mladých matematiků. Scházel se jednou týdně a navštěvovalo ho 15–20 žáků.

*Ústřední výbor MO.* Ústřední výbor MO zajišťoval tři celostátní soustředění. Pro žáky nematurujících ročníků to bylo již tradiční soustředění 80 řešitelů úloh MO a FO. Proběhlo ve dnech 11.–22.6. 1990 v Jevíčku. Další dvě soustředění byla věnována přípravě československého družstva na Mezinárodní matematickou olympiádu. První se konalo 28.3.–5.4. 1990 v Modré u Bratislavy (12 účastníků), druhé 18.–28.6. 1990 v Pardubicích (8 účastníků). ÚV MO též zajišťoval celostátní korespondenční seminář (semináři je vě-

nována samostatná část této brožury). V edici Škola mladých matematiků vydával ÚV MO v nakladatelství Mladá fronta matematické brožury pro žáky. V průběhu 39. ročníku už žádný nový svazek nevyšel, nevyšla ani žádná reedice starších titulů.

Tabulka 1

## Počty středních škol zapojených do 39. ročníku MO

| Kraj             | Gymnázia          |                           |     |     |     |                                 | Ostatní střední školy     |    |    |    |                                 |
|------------------|-------------------|---------------------------|-----|-----|-----|---------------------------------|---------------------------|----|----|----|---------------------------------|
|                  | celkem<br>v kraji | zapojeno<br>v kategoriích |     |     |     | aspoň<br>v jedné<br>kategoriích | zapojeno<br>v kategoriích |    |    |    | aspoň<br>v jedné<br>kategoriích |
|                  |                   | A                         | B   | C   | P   |                                 | A                         | B  | C  | P  |                                 |
| Praha            | 21                | 10                        | 12  | 15  | 11  | 18                              | 0                         | 0  | 1  | 1  | 2                               |
| Středočeský      | 23                | 22                        | 22  | 23  | 11  | 23                              | 2                         | 6  | 8  | 1  | 11                              |
| Jihočeský        | 18                | 10                        | 13  | 14  | 12  | 15                              | 2                         | 4  | 3  | 2  | 5                               |
| Západočeský      | 16                | 10                        | 15  | 14  | 5   | 15                              | 1                         | 1  | 3  | 0  | 4                               |
| Severočeský      | 23                | 17                        | 22  | 20  | 5   | 22                              | 3                         | 6  | 8  | 1  | 8                               |
| Východočeský     | 35                | 14                        | 22  | 22  | 9   | 29                              | 1                         | 1  | 1  | 0  | 2                               |
| Jihomoravský     | 38                | 22                        | 32  | 34  | 12  | 37                              | 3                         | 6  | 6  | 1  | 8                               |
| Severomoravský   | 65                | 24                        | 35  | 38  | 14  | 38                              | 2                         | 6  | 11 | 2  | 12                              |
| Bratislava       | 11                | 9                         | 10  | 10  | 6   | 10                              | 0                         | 1  | 0  | 1  | 2                               |
| Západoslovenský  | 40                | 31                        | 35  | 39  | 12  | 40                              | 5                         | 10 | 17 | 2  | 18                              |
| Středoslovenský  | 37                | 20                        | 28  | 27  | 10  | 32                              | 3                         | 7  | 9  | 2  | 17                              |
| Východoslovenský | 39                | 24                        | 36  | 31  | 22  | 39                              | 2                         | 9  | 24 | 4  | 18                              |
| ČR               | 239               | 129                       | 173 | 180 | 79  | 197                             | 14                        | 30 | 41 | 8  | 52                              |
| SR               | 127               | 84                        | 109 | 107 | 50  | 121                             | 10                        | 27 | 50 | 9  | 55                              |
| ČSFR             | 366               | 213                       | 282 | 287 | 129 | 318                             | 24                        | 57 | 91 | 17 | 107                             |

## Počty žáků středních škol soutěžících v I. kole 39. ročníku MO

| Kraj             | Kategorie |     |       |       |       |       |     |     | Celkem |       |
|------------------|-----------|-----|-------|-------|-------|-------|-----|-----|--------|-------|
|                  | A         |     | B     |       | C     |       | P   |     |        |       |
|                  | S         | U   | S     | U     | S     | U     | S   | U   | S      | U     |
| Praha            | 106       | 54  | 153   | 83    | 206   | 83    | 88  | 50  | 553    | 270   |
| Středočeský      | 183       | 52  | 173   | 71    | 199   | 75    | 32  | 19  | 587    | 217   |
| Jihočeský        | 92        | 45  | 111   | 66    | 184   | 59    | 30  | 23  | 417    | 193   |
| Západočeský      | 62        | 40  | 121   | 74    | 112   | 59    | 20  | 12  | 315    | 185   |
| Severočeský      | 184       | 76  | 170   | 112   | 251   | 86    | 20  | 11  | 625    | 285   |
| Východočeský     | 58        | 41  | 123   | 98    | 149   | 103   | 36  | 27  | 366    | 269   |
| Jihomoravský     | 205       | 105 | 269   | 176   | 296   | 217   | 46  | 40  | 816    | 538   |
| Severomoravský   | 244       | 107 | 288   | 163   | 367   | 139   | 49  | 47  | 948    | 456   |
| Bratislava       | 112       | 85  | 169   | 89    | 187   | 73    | 32  | 19  | 500    | 266   |
| Západoslovenský  | 156       | 113 | 215   | 184   | 352   | 186   | 52  | 44  | 775    | 527   |
| Středoslovenský  | 181       | 91  | 289   | 156   | 243   | 70    | 36  | 27  | 749    | 344   |
| Východoslovenský | 273       | 112 | 443   | 203   | 680   | 206   | 80  | 52  | 1 476  | 573   |
| ČR               | 1 134     | 520 | 1 408 | 843   | 1 876 | 821   | 321 | 229 | 4 607  | 2 413 |
| SR               | 722       | 401 | 947   | 632   | 1 462 | 535   | 200 | 142 | 3 500  | 1 710 |
| ČSFR             | 1 856     | 921 | 2 435 | 1 475 | 2 338 | 1 356 | 521 | 371 | 8 107  | 4 123 |

S ... počet všech soutěžících

U ... počet úspěšných řešitelů



Tabulka 3

## Počty žáků středních škol soutěžících v II. kole 39. ročníku MO

| Kraj             | Kategorie |     |      |     |      |     | Celkem |     |      |      |
|------------------|-----------|-----|------|-----|------|-----|--------|-----|------|------|
|                  | A         |     | B    |     | C    |     |        |     | P    |      |
|                  | S         | U   | S    | U   | S    | U   | S      | U   | S    | U    |
| Praha            | 53        | 28  | 82   | 17  | 80   | 56  | 47     | 32  | 262  | 133  |
| Středočeský      | 44        | 9   | 63   | 7   | 68   | 17  | 19     | 9   | 194  | 42   |
| Jihočeský        | 45        | 12  | 53   | 9   | 56   | 32  | 22     | 14  | 176  | 67   |
| Západočeský      | 38        | 16  | 66   | 25  | 54   | 22  | 17     | 12  | 175  | 75   |
| Severočeský      | 61        | 18  | 100  | 9   | 78   | 29  | 9      | 7   | 248  | 63   |
| Východočeský     | 39        | 9   | 79   | 6   | 85   | 32  | 24     | 3   | 227  | 50   |
| Jihomoravský     | 86        | 36  | 149  | 14  | 189  | 56  | 41     | 24  | 465  | 130  |
| Severomoravský   | 104       | 25  | 158  | 52  | 134  | 72  | 46     | 32  | 442  | 181  |
| Bratislava       | 78        | 34  | 88   | 21  | 94   | 49  | 28     | 16  | 288  | 120  |
| Západoslovenský  | 107       | 15  | 175  | 18  | 172  | 35  | 38     | 15  | 492  | 83   |
| Středoslovenský  | 74        | 31  | 99   | 7   | 69   | 40  | 24     | 15  | 266  | 93   |
| Východoslovenský | 79        | 13  | 130  | 5   | 206  | 49  | 49     | 21  | 464  | 88   |
| ČR               | 470       | 153 | 750  | 139 | 744  | 316 | 225    | 133 | 2189 | 741  |
| SR               | 338       | 93  | 492  | 51  | 541  | 173 | 139    | 67  | 1510 | 384  |
| ČSFR             | 808       | 246 | 1242 | 190 | 1285 | 489 | 364    | 200 | 3699 | 1125 |

S ... počet všech soutěžících

U ... počet úspěšných řešitelů

## Počty účastníků III. kola 39. ročníku MO kategorie A a P

| Kraj             | Kategorie A     |                    |               | Kategorie P     |                    |               |
|------------------|-----------------|--------------------|---------------|-----------------|--------------------|---------------|
|                  | Počet účastníků | Úspěšných řešitelů | Z toho vítězů | Počet účastníků | Úspěšných řešitelů | Z toho vítězů |
| Praha            | 17              | 12                 | 5             | 9               | 4                  | 3             |
| Středočeský      | 3               | 1                  | 0             | 3               | 1                  | 1             |
| Jihočeský        | 4               | 1                  | 0             | 2               | 1                  | 0             |
| Západočeský      | 3               | 1                  | 0             | 1               | 0                  | 0             |
| Severočeský      | 2               | 0                  | 0             | 2               | 1                  | 0             |
| Východočeský     | 4               | 2                  | 0             | 1               | 0                  | 0             |
| Jihomoravský     | 16              | 7                  | 4             | 7               | 4                  | 3             |
| Severomoravský   | 5               | 3                  | 2             | 9               | 3                  | 2             |
| Bratislava       | 16              | 10                 | 8             | 6               | 5                  | 2             |
| Západoslovenský  | 1               | 0                  | 0             | 1               | 0                  | 0             |
| Středoslovenský  | 6               | 2                  | 0             | 0               | 0                  | 0             |
| Východoslovenský | 3               | 1                  | 1             | 7               | 4                  | 1             |
| ČR               | 54              | 27                 | 11            | 34              | 14                 | 9             |
| SR               | 26              | 13                 | 9             | 14              | 9                  | 3             |
| ČSFR             | 80              | 40                 | 20            | 48              | 23                 | 12            |

Výsledky celostátního kola 39. ročníku MO  
kategorie A

Vítězové

|         |                                                     |       |
|---------|-----------------------------------------------------|-------|
| 1.-2.   | <i>Michal Konečný</i> , 3M, tř. kpt. Jaroše, Brno   | 39 b. |
| 1.-2.   | <i>Štěpán Kasal</i> , 3M, Korunní, Praha 2          | 39 b. |
| 3.      | <i>Ondřej Šuch</i> , 4M, G A. Markuša, Bratislava   | 38 b. |
| 4.-5.   | <i>Martin Dindoš</i> , 4MF, G J. Hronca, Bratislava | 36 b. |
| 4.-5.   | <i>Viliam Búr</i> , 1M, G A. Markuša, Bratislava    | 36 b. |
| 6.-9.   | <i>Pavol Ševera</i> , 4M, G A. Markuša, Bratislava  | 35 b. |
| 6.-9.   | <i>Michal Stehlík</i> , 2M, tř. kpt. Jaroše, Brno   | 35 b. |
| 6.-9.   | <i>Michal Kubeček</i> , 2M, Korunní, Praha 2        | 35 b. |
| 6.-9.   | <i>Petr Hliněný</i> , 4M, G M. Koperníka, Bílovec   | 35 b. |
| 10.-12. | <i>Vladimír Špitálský</i> , 3M, GAM, Bratislava     | 30 b. |
| 10.-12. | <i>Vladimír Skalský</i> , 4, T. Ševčenka, Prešov    | 30 b. |
| 10.-12. | <i>Aleš Kuběna</i> , 3M, G M. Koperníka, Bílovec    | 30 b. |
| 13.-14. | <i>Petr Mourek</i> , 3M, Korunní, Praha 2           | 28 b. |
| 13.-14. | <i>Ondřej Kalenda</i> , 4M, Korunní, Praha 2        | 28 b. |
| 15.     | <i>Zdeněk Pezlar</i> , 3M, tř. kpt. Jaroše, Brno    | 27 b. |
| 16.     | <i>Ján Bajcsy</i> , 4M, G A. Markuša, Bratislava    | 26 b. |
| 17.-19. | <i>Pavol Mederly</i> , 2M, GAM, Bratislava          | 25 b. |
| 17.-19. | <i>Jan Kolář</i> , 3M, Korunní, Praha 2             | 25 b. |
| 17.-19. | <i>Vladimír Chvátil</i> , 4MF, Vídeňská, Brno       | 25 b. |
| 20.     | <i>Miloš Volauf</i> , 1M, GAM, Bratislava           | 22 b. |

## *Další úspěšní řešitelé*

|                                                             |       |
|-------------------------------------------------------------|-------|
| 21.–23. <i>Milan Předota</i> , 4M, Jírovcova, Č. Budějovice | 21 b. |
| 21.–23. <i>Antonín Jančařík</i> , 3M, Korunní, Praha 2      | 21 b. |
| 21.–23. <i>Jan Hannig</i> , 3M, Korunní, Praha 2            | 21 b. |
| 24.–29. <i>Jan Večer</i> , 4M, Korunní, Praha 2             | 20 b. |
| 24.–29. <i>Petr Tobiška</i> , 3M, G J. K. Tyla, Hr. Králové | 20 b. |
| 24.–29. <i>Vladimír Šolc</i> , 4MF, Beroun                  | 20 b. |
| 24.–29. <i>Richard Kollár</i> , 2M, GAM, Bratislava         | 20 b. |
| 24.–29. <i>Vladimír Glasnák</i> , 3MF, V. Okružná, Žilina   | 20 b. |
| 24.–29. <i>Martin Čížek</i> , 4, Rožnov p. Radhoštěm        | 20 b. |
| 30. <i>Karel Janeček</i> , 3M, Korunní, Praha 2             | 19 b. |
| 31. <i>Jaroslav Šprongl</i> , 3M, Korunní, Praha 2          | 18 b. |
| 32.–33. <i>Boris Štítnický</i> , 2M, GAM, Bratislava        | 16 b. |
| 32.–33. <i>Martin Bureš</i> , 4M, G J. Fučíka, Plzeň        | 16 b. |
| 34.–35. <i>Petr Toman</i> , 4M, Korunní, Praha 2            | 15 b. |
| 34.–35. <i>Jiří Kalvoda</i> , 3M, tř. kpt. Jaroše, Brno     | 15 b. |
| 36. <i>Jan Vomlel</i> , 4M, G J. K. Tyla, Hr. Králové       | 14 b. |
| 37. <i>Jan Mutl</i> , 2M, tř. kpt. Jaroše, Brno             | 13 b. |
| 38.–40. <i>Šimon Malý</i> , 3MF, Ždiar n. Hronom            | 12 b. |
| 38.–40. <i>Pavel Horák</i> , 4MF, Zlín                      | 12 b. |
| 38.–40. <i>Jiří Hanika</i> , 1M, Korunní, Praha 2           | 12 b. |

U tříd se zaměřením studijního oboru 01 Matematika je za ročníkem označení M, u žáků z tříd se zaměřením studijního oboru 02 Matematika a fyzika je za ročníkem označení MF. Všichni úspěšní řešitelé byli žáci gymnázia.

*Pořadí úspěšných řešitelů z tříd,  
které nejsou se zaměřením studijního oboru 01 Matematika*

- |       |                                                     |       |
|-------|-----------------------------------------------------|-------|
| 1.    | <i>Martin Dindoš</i> , 4MF, G J. Hronca, Bratislava | 36 b. |
| 2.    | <i>Vladimír Skalský</i> , 4, T. Ševčenka, Prešov    | 30 b. |
| 3.    | <i>Vladimír Chvátil</i> , 4MF, Vídeňská, Brno       | 25 b. |
| 4.-6. | <i>Vladimír Šolc</i> , 4MF, Beroun                  | 20 b. |
|       | <i>Vladimír Glasnák</i> , 3MF, V. Okružná, Žilina   | 20 b. |
|       | <i>Martin Čížek</i> , 4, Rožnov p. Radhoštěm        | 20 b. |
| 7.-8. | <i>Šimon Malý</i> , 3MF, Žiar n. Hronom             | 12 b. |
|       | <i>Pavel Horák</i> , 4MF, Zlín                      | 12 b. |

U tříd se zaměřením studijního oboru 02 Matematika a fyzika je za ročníkem označení MF. Všichni úspěšní řešitelé byli žáci gymnázia.

Výsledková listina celostátního kola 39. ročníku MO  
kategorie P

*Vítězové*

|        |                                                    |       |
|--------|----------------------------------------------------|-------|
| 1.     | <i>Igor Malý</i> , 3MF, GJH, Bratislava            | 31 b. |
| 2.     | <i>Štěpán Kasal</i> , 3M, Korunní, Praha           | 29 b. |
| 3.-4.  | <i>Radek Křivánek</i> , 4MF, Vídeňská, Brno        | 25 b. |
|        | <i>Martin Čížek</i> , 4, Rožnov p. Radhoštěm       | 25 b. |
| 5.     | <i>Martin Ondrušek</i> , 1MF, GJH, Bratislava      | 24 b. |
| 6.-7.  | <i>Jan Macháček</i> , 4M, Korunní, Praha           | 23 b. |
|        | <i>David Krásenský</i> , 4M, tř. kpt. Jaroše, Brno | 23 b. |
| 8.-12. | <i>Herbert Vojčík</i> , 2M, Šmeralova, Košice      | 22 b. |
|        | <i>Vladimír Šolc</i> , 4MF, Beroun                 | 22 b. |
|        | <i>Radek Maric</i> , 3M, GMK, Bílovec              | 22 b. |
|        | <i>Martin Mataš</i> , 7. tř., ZŠ, Na šutce, Praha  | 22 b. |
|        | <i>Jan Kasprzak</i> , 3M, tř. kpt. Jaroše, Brno    | 22 b. |

*Další úspěšní řešitelé*

|         |                                                     |       |
|---------|-----------------------------------------------------|-------|
| 13.     | <i>Tomáš Doležal</i> , 4M, Partyzánská, Liberec     | 21 b. |
| 14.-15. | <i>Vladimír Skalský</i> , 4, T. Ševčenka, Prešov    | 20 b. |
|         | <i>Zdeněk Pezlar</i> , 3M, tř. kpt. Jaroše, Brno    | 20 b. |
| 16.-19. | <i>Martin Vojtko</i> , 3MF, G J. Hronca, Bratislava | 19 b. |
|         | <i>Petr Hliněný</i> , 4M, GMK, Bílovec              | 19 b. |
|         | <i>Martin Dindoš</i> , 4M, G J. Hronca, Bratislava  | 19 b. |

|         |                                                    |       |
|---------|----------------------------------------------------|-------|
|         | <i>Radovan Brečka</i> , 2, Snina                   | 19 b. |
| 20.–23. | <i>Ondrej Šuch</i> , 4M, G A. Markuša, Bratislava  | 18 b. |
|         | <i>Jaroslav Šprongl</i> , 3M, Korunní, Praha       | 18 b. |
|         | <i>Peter Haluška</i> , 4M, Šmeralova, Košice       | 18 b. |
|         | <i>Jakub Čermák</i> , 4M, Jírovcova, Č. Budějovice | 18 b. |

U tříd se zaměřením studijního oboru 01 Matematika je za ročníkem označení M, u žáků z tříd se zaměřením studijního oboru 02 Matematika a fyzika je za ročníkem označení MF. Všichni úspěšní řešitelé byli žáci gymnázia.

**Nejúspěšnější řešitelé II. kola MO  
v kategoriích A, B, C a P**

Z každého kraje a z každé kategorie je uvedeno nejvýše prvních deset řešitelů. Pokud není uvedena škola, byl řešitel žákem gymnázia. Označení G znamená gymnázium, M, resp. MF zaměření studijního oboru 01 Matematika, resp. 02 Matematika a fyzika.

Praha

*Kategorie A*

- 1.-4. *Michal Kubeček*, 2M, Korunní  
*Antonín Jančařík*, 3M, Korunní  
*Štěpán Kasal*, 3M, Korunní  
*Petr Toman*, 4M, Korunní
- 5.-6. *Jan Kolář*, 3M, Korunní  
*Ondřej Kalenda*, 4M, Korunní
- 7. *Michal Maruška*, 4, Na vítězné pláni
- 8.-10. *Jiří Hanika*, 1M, Korunní  
*Petr Mourek*, 3M, Korunní  
*Jan Hannig*, 3M, Korunní



## *Kategorie B*

1. *Petr Novotný*, 2M, Korunní
2. *Michal Kubeček*, 2M, Korunní
3. *Petra Bidlasová*, 2M, Korunní
- 4.-10. *Igor Gottwald*, 2M, Korunní  
*Michal Kabát*, 2M, Korunní  
*František Veselý*, 2M, Korunní  
*Jan Matoušek*, 2M, Korunní  
*Petr Kardaš*, 2MF, Sladkovského  
*J. Lepš*, 2, Na vítězné pláni  
*Tomáš Pardubický*, 2MF, Voděradská

## *Kategorie C*

- 1.-9. *Petr Zvára*, 1M, Korunní  
*Jakub Adámek*, 1M, Korunní  
*Tomáš Dušek*, 1M, Korunní  
*Milan Kratochvíl*, 1M, Korunní  
*Jiří Náprstek*, 1M, Korunní  
*Vít Novák*, 1M, Korunní  
*Jan Tichý*, 1M, Korunní  
*Jiří Vaníček*, 1M, Korunní  
*Pavel Kos*, 1MF, Voděradská
- 10.-12. *Pavel Kraemer*, 8. tř., ZŠ, Na dlouhém lánu  
*Petr Smolík*, 1MF, Sladkovského  
*Ondřej Pořádek*, 1M, Korunní

## *Kategorie P*

1. *Štěpán Kasal*, 3M, Korunní
- 2.-3. *Michal Kubeček*, 2M, Korunní  
*Jaroslav Šprongl*, 3M, Korunní
4. *Jan Hannig*, 3M, Korunní
5. *Jan Milota*, 4M, Korunní
6. *Petr Novotný*, 2M, Korunní
- 7.-8. *Jan Macháček*, 4M, Korunní  
*Martin Mareš*, 7. tř., ZŠ, Na Šutce
9. *Jan Vaňous*, 4, Přípotoční
10. *Michal Maruška*, 4, Na vítězné pláni

## Středočeský kraj

### *Kategorie A*

1. *Vladimír Šolc*, 4MF, Beroun
2. *Tomáš Pračka*, 3, Říčany
3. *Josef Soukal*, 3MF, Mladá Boleslav
- 4.-5. *Martin Vyšohlíd*, 4MF, Mladá Boleslav  
*Ondřej Cínek*, 4MF, Mladá Boleslav
- 6.-7. *Petr Hantych*, 4, Kralupy nad Vltavou  
*Jan Němec*, 3, Nymburk
- 8.-9. *Tomáš Vrbata*, 3MF, Kladno  
*Jan Brychta*, 4MF, Kolín

### *Kategorie B*

1. *Dušan Janovský*, 2, Slaný
2. *Tomáš Němec*, 2MF, Beroun
3. *Adrian Trčka*, 2MF, Beroun
- 4.-5. *Vladimír Tučan*, 2MF, Kladno  
*Pavel Tolar*, 2, Říčany
- 6.-7. *Karel Kvapil*, 2, Čáslav  
*Lenka Maršíková*, 2, Říčany

### *Kategorie C*

1. *Viktor Elšík*, 1, Kralupy
- 2.-3. *Karel Duda*, 1MF, Kladno  
*Vladimír Mašín*, 1, Poděbrady
4. *Martin Janeček*, 1MF, Mladá Boleslav
5. *Miloš Mojžíš*, 1, Slaný
- 6.-7. *Petr Kníže*, 1MF, Kladno  
*Jan Žák*, 1, Nymburk
- 8.-9. *Jan Bláha*, 1MF, Beroun  
*Dagmar Pavlišťová*, 1MF, Mladá Boleslav
- 10.-11. *Helena Dvořáková*, 1MF, Mladá Boleslav  
*Bohdan Špaček*, 1MF, Kutná Hora

### *Kategorie P*

1. *Vladimír Šolc*, 4MF, Beroun
2. *Jan Tolar*, 3, Říčany
3. *Martin Helmich*, 2MF, Mladá Boleslav
4. *Ivan Žučenko*, 2MF, Mladá Boleslav

5. *Stanislav Hecht*, 3, Rakovník
6. *Jan Bláha*, 1MF, Beroun
7. *Vlastimil Juříček*, 2MF, Mladá Boleslav
8. *Pavel Klobása*, 4, SPŠ, Kutná Hora
9. *Marcel Vorlíček*, 4MF, Beroun

## Jihočeský kraj

### *Kategorie A*

- 1.-2. *Jan Macháček*, 4, Pelhřimov  
*Milan Předota*, 4, Jírovcova, České Budějovice
- 3.-4. *Jan Balák*, 4, Jírovcova, České Budějovice  
*Milan Šimánek*, 3MF, Pelhřimov
5. *Stanislav Havelka*, 4, G K. Šatala, České Budějovice
- 6.-7. *Martin Řehout*, 4, Jírovcova, České Budějovice  
*Michael Schenk*, 2M, Jírovcova, České Budějovice
8. *Karel Netočný*, 3, Jírovcova, České Budějovice
9. *Jiří Fontán*, 3M, Jírovcova, České Budějovice
- 10.-12. *Martin Duspiva*, 3, G K. Šatala, České Budějovice  
*Jan Januška*, 3, SPŠ, Písek  
*Josef Šilha*, 3, Tábor

### *Kategorie B*

1. *Michael Schenk*, 2M, Jírovcova, České Budějovice
- 2.-3. *Dalibor Jelínek*, 2, G K. Šatala, České Budějovice  
*Petr Macháček*, 2, Pelhřimov
4. *Ladislav Nagy*, 2, Jírovcova, České Budějovice
- 5.-7. *Tomáš Kimmer*, 2, Pelhřimov

- Jan Lepič, 2, Jírovčova, České Budějovice*  
*Radim Skalický, 2, Tábor*  
8.-9. *Libor Dušek, 2, Jindřichův Hradec*  
*Monika Mertenová, 2, Jírovčova, České Budějovice*

### *Kategorie C*

- 1.-4. *Vít Pekárek, 1, Jindřichův Hradec*  
*Daniel Průša, 1, Tábor*  
*Miloš Beran, 1MF, Pelhřimov*  
*Vojtěch Franěk, 1M, Jírovčova, České Budějovice*  
5.-7. *Jana Hözllová, 1M, Jírovčova, České Budějovice*  
*Pavel Jaruš, 1M, Jírovčova, České Budějovice*  
*Petra Miksová, 1M, Jírovčova, České Budějovice*  
8.-10. *Oleg Hanzal, 1, Dačice*  
*Pavel Fořt, 1M, Jírovčova, České Budějovice*  
*Luděk Hajíček, 1M, Jírovčova, České Budějovice*

### *Kategorie P*

1. *Jakub Čermák, Jírovčova, České Budějovice*  
2. *Jan Macháček, Pelhřimov*  
3. *Stanislav Havelka, G K. Šatala, České Budějovice*  
4. *Milan Předota, Jírovčova, České Budějovice*  
5. *Petr Macháček, Pelhřimov*  
6.-8. *Martin Duspiva, G K. Šatala, České Budějovice*  
*Luděk Laštovka, G K. Šatala, České Budějovice*  
*Richard Vlk, Pelhřimov*  
9.-10. *Anna Matasová, Humpolec*  
*Milan Šimánek, Pelhřimov*

## Západočeský kraj

### *Kategorie A*

1. *Martin Bureš*, 4M, G1, Plzeň
2. *Alan Svoboda*, 4M, G1, Plzeň
3. *Jan Nepraš*, 4M, G1, Plzeň
4. *Tomáš Kadlec*, 3M, G1, Plzeň
5. *Martin Hanák*, 4MF, Klatovy
- 6.-9. *Martin Kraus*, 4MF, Karlovy Vary  
*Martin Čihák*, 3MF, Karlovy Vary  
*Karel Soukeník*, 4M, G1, Plzeň  
*Martin Müller*, 4M, G1, Plzeň

### *Kategorie B*

1. *Jan Kotas*, 2M, G1, Plzeň
2. *Milan Štětina*, 2M, G1, Plzeň
3. *Jan Smolík*, 2M, G1, Plzeň
- 4.-5. *Miroslav Černý*, 2MF, Karlovy Vary  
*Martin Marx*, 2MF, Cheb
6. *Petr Hamerník*, 2M, G1, Plzeň
- 7.-15. *Jan Šembera*, 2M, G1, Plzeň  
*Martin Kohout*, 2M, G1, Plzeň  
*Jan Klička*, 2M, G1, Plzeň  
*Bohumil Nováček*, 2M, G1, Plzeň  
*Daniel Horák*, 2M, G1, Plzeň  
*Jan Kuneš*, 2MF, G2, Plzeň  
*Luboš Motl*, 2MF, G2, Plzeň  
*Václav Nováček*, 2MF, Klatovy

*Kategorie C*

1. *Helena Nyklová, 1MF, Karlovy Vary*
- 2.-3. *Jiří Černý, 1M, G1, Plzeň*  
*Roman Kníže, 1MF, Cheb*
- 4.-5. *Miroslav Skala, 1MF, G2, Plzeň*  
*Jitka Drábková, 1M, G1 Plzeň*
6. *Romana Lavičková, 1M, G1, Plzeň*
7. *Ivana Janová, 1MF, G3, Plzeň*
8. *Vladimír Menol, 1MF, Karlovy Vary*
9. *Daniel Němeček, 1MF, G2, Plzeň*
- 10.-13. *Pavel Wünsch, 1, Rokycany*  
*Jan Krapáč, 1, Ostrov*  
*Lenka Syrovátková, 1MF, Cheb*  
*Tomáš Kubr, 1MF, G2, Plzeň*

*Kategorie P*

1. *Martin Bureš, 4M, GJF, Plzeň*
2. *Jan Štrunc, 4M, GJF, Plzeň*
3. *Jiří Urban, 2MF, Karlovy Vary*
4. *Jan Kotas, 4M, GJF, Plzeň*
- 5.-6. *Martin Černý, 4MF, Karlovy Vary*  
*Luděk Kovář, 4M, GJF, Plzeň*
7. *Dagmar Nováková, 4MF, Cheb*
8. *Alan Svoboda, 4M, GJF, Plzeň*
- 9.-10. *Martin Pittermann, 4M, GJF, Plzeň*

*Kategorie A*

1. *Radek Škoda*, 3M, Partyzánská, Liberec
2. *Jiří Fiala*, 3M, Partyzánská, Liberec
3. *Jaromír Oščádal*, 3, SPŠE, Liberec
4. *Ladislav Šubr*, 4M, Partyzánská, Liberec
- 5.-6. *Ladislav Šimek*, 3MF, Jateční, Ústí nad Lab.  
*Dalimil Kolčaba*, 3M, Partyzánská, Liberec
- 7.-8. *Stanislav Dunaj*, 3MF, Jateční, Ústí nad Lab.  
*Kateřina Jágrová*, 4M, Partyzánská, Liberec
9. *Pavel Šimek*, 4M, Partyzánská, Liberec

*Kategorie B*

1. *Tomáš Zellerin*, 2MF, Jateční, Ústí nad Lab.
2. *Aleš Bednařík*, 2M, Partyzánská, Liberec
3. *Petr Jiříčka*, 2M, Partyzánská, Liberec
- 4.-7. *Bohumil Cimbál*, 2M, Partyzánská, Liberec  
*Hans Ginzl*, 2M, Partyzánská, Liberec  
*Daniel Morávek*, 2M, Partyzánská, Liberec  
*Silvie Tvrdá*, 2, Chomutov
8. *Jindřich Pluhař*, 2M, Partyzánská, Liberec
9. *Jana Perná*, 2, Frýdlant

*Kategorie C*

- 1.-2. *Daniel Havelka*, 1M, Partyzánská, Liberec  
*Martin Kačer*, 1M, Partyzánská, Liberec



3. *Antonín Nebuželský*, 1MF, Jateční, Ústí nad Lab.
- 4.-5. *Michal Nešvara*, 1MF, Partyzánská, Liberec  
*Tomáš Marek*, 1M, Partyzánská, Liberec
- 6.-7. *Jiří Lahvička*, 1M, Partyzánská, Liberec  
*Michal Gust*, 1, SPŠ, Chomutov
- 8.-12. *Martin Jareš*, 1MF, Jateční, Ústí nad Lab.  
*Pavel Kodýtek*, 1MF, Jateční, Ústí nad Lab.  
*Sylva Rydvalová*, 1MF, Teplice  
*Libor Fidler*, 1M, Partyzánská, Liberec  
*Petr Škoda*, 1M, Partyzánská, Liberec

### *Kategorie P*

1. *Karel Egem*, 4, Litoměřice
2. *Tomáš Doležal*, 4M, Liberec
3. *Vladimír Soukal*, 4MF, Ústí nad Labem
4. *Jiří Hoblík*, 4, Liberec
- 5.-7. *Martin Čmuchař*, 3MF, Ústí nad Labem  
*Milan Kocian*, 3MF, Ústí nad Labem  
*Karel Nechvíle*, 4MF, Ústí nad Labem
8. *Jaromír Kohout*, 2, Žatec
9. *Vojtěch Dohnal*, 1, Liberec

### Východočeský kraj

### *Kategorie A*

1. *Petr Tobiška*, 3M, GJKT, Hradec Králové
2. *Pavel Čížek*, 3M, GJKT, Hradec Králové
3. *Jan Vomlel*, 4M, GJKT, Hradec Králové

4. *Lenka Eslerová*, 3, SPŠE, Pardubice
5. *Jiří Horák*, 3, Pardubice
6. *Tomáš Pospíchal*, 3MF, Pardubice
7. *Petr Ledvina*, 3MF, Pardubice

### *Kategorie B*

1. *Martin Dvořák*, 2MF, Pardubice
2. *Jarmil Škop*, 2MF, Pospíchalova, Hradec Králové
3. *Jaroslav Vávra*, 2MF, Pardubice
4. *Bohumila Píšová*, 2MF, Pardubice
5. *Filip Lázníček*, 2MF, Pospíchalova, Hradec Králové
6. *Jiří Kratochvíl*, 2M, GJKT, Hradec Králové

### *Kategorie C*

1. *Josef Ďurech*, 1MF, Pardubice
2. *Michal Šorel*, 1MF, Pardubice
3. *Jan Zeithaml*, 1MF, Pardubice
4. *Jan Kříž*, 1MF, Pardubice
5. *Michal Dočekal*, 1MF, Pardubice
6. *Rudolf Čejka*, 1M, GJKT, Hradec Králové
7. *Petr Plašil*, 1MF, Pardubice
8. *Tomáš Kokoška*, 1MF, Trutnov
9. *Rudolf Vágenknecht*, 1MF, Trutnov
10. *Petr Gregor*, 1, Chotěboř

### *Kategorie P*

1. *Martin Horký*, 4, Pardubice

2. *Petr Blümel*, 3, Pardubice
3. *Petr Tobiška*, 4M, GJKT, Hradec Králové

## Jihomoravský kraj

### *Kategorie A*

- 1.-2. *Vladimír Chvátil*, 4MF, Vídeňská, Brno  
*Zdeněk Pezlar*, 3M, tř. kpt. Jaroše, Brno
- 3.-5. *Michal Konečný*, 3M, tř. kpt. Jaroše, Brno  
*Michal Stehlík*, 2M, tř. kpt. Jaroše, Brno  
*Milan Zamazal*, 3M, tř. kpt. Jaroše, Brno
6. *Jan Velešík*, 4P, Vídeňská, Brno
- 7.-9. *Radim Křivánek*, 4MF, Vídeňská, Brno  
*Jan Mutl*, 2M, tř. kpt. Jaroše, Brno  
*Josef Pojzl*, 4M, tř. kpt. Jaroše, Brno
- 10.-11. *Filip Munz*, 2M, tř. kpt. Jaroše, Brno  
*Jana Syrovátková*, 1M, tř. kpt. Jaroše, Brno

### *Kategorie B*

1. *Pavel Vrbachý*, 2M, tř. kpt. Jaroše, Brno
2. *Jan Mutl*, 2M, tř. kpt. Jaroše, Brno
3. *Michal Stehlík*, 2M, tř. kpt. Jaroše, Brno
4. *Pavel Růžička*, 2M, tř. kpt. Jaroše, Brno
5. *Miloš Dvořák*, 2M, tř. kpt. Jaroše, Brno
- 6.-8. *Jiří Fuchs*, 2M, tř. kpt. Jaroše, Brno  
*Josef Menšík*, 2M, tř. kpt. Jaroše, Brno  
*Filip Münz*, 2M, tř. kpt. Jaroše, Brno
9. *Jan Pazdziora*, 2M, tř. kpt. Jaroše, Brno

*Kategorie C*

- 1.-2. *Václav Komínek*, 1M, tř. kpt. Jaroše, Brno  
*Jana Syrovátková*, 1M, tř. kpt. Jaroše, Brno
- 3.-5. *Pavel Filipenský*, 1, Kyjov  
*Petr Konečný*, 1M, tř. kpt. Jaroše, Brno  
*Markéta Trefilová*, 1M, tř. kpt. Jaroše, Brno
- 6.-10. *David Kruml*, 1M, tř. kpt. Jaroše, Brno  
*Jaroslav Křivánek*, 1M, tř. kpt. Jaroše, Brno  
*Pavel Matula*, 1M, tř. kpt. Jaroše, Brno  
*Zdeněk Špaček*, 1M, tř. kpt. Jaroše, Brno  
*Petr Špatka*, 1M, tř. kpt. Jaroše, Brno

*Kategorie P*

1. *David Krásenský*, 4, tř. kpt. Jaroše, Brno
2. *Zdeněk Pezlar*, 3, tř. kpt. Jaroše, Brno
3. *Jan Kasprzak*, 3, tř. kpt. Jaroše, Brno
4. *Radim Gottwald*, 4, Kyjov
5. *Vladimír Chvátil*, 4, Vídeňská, Brno
- 6.-7. *Petr Dobiáš*, 3, Žďár nad Sázavou  
*Radim Křivánek*, 4, Vídeňská, Brno
- 8.-12. *Dušan Dobeš*, 4, Boskovice  
*Zdeněk Hlávka*, 4, Jihlava  
*Miroslav Kovář*, 2, Vídeňská, Brno  
*Jan Pavelka*, 3, tř. kpt. Jaroše, Brno  
*Zdeněk Salvét*, 4, Uherský Brod

## Severomoravský kraj

### *Kategorie A*

- 1.-2. *Petr Hliněný*, 4M, G M. Koperníka, Bílovec  
*Aleš Kuběna*, 3M, G M. Koperníka, Bílovec
3. *Martin Čížek*, 4, Rožnov p. Radhoštěm
- 4.-5. *Oldřich Doseděl*, 3M, G M. Koperníka, Bílovec  
*Radim Kubacki*, 3M, G M. Koperníka, Bílovec
6. *Michal Ševčík*, 3M, Jiřího z Poděbrad, Olomouc
7. *Lumír Budínský*, 4MF, Komenského, Havířov
- 8.-9. *Mario Boháč*, 3M, G M. Koperníka, Bílovec  
*Robert Wadura*, 3M, G M. Koperníka, Bílovec

### *Kategorie B*

1. *Marek Blahuta*, 2M, G M. Koperníka, Bílovec
- 2.-3. *Jiří Tengler*, 2M, G M. Koperníka, Bílovec  
*Pavel Viceník*, 2, SPŠE, Božetěchova, Olomouc
- 4.-5. *Roman Solich*, 2M, G M. Koperníka, Bílovec  
*Martin Masár*, 2M, G M. Koperníka, Bílovec
- 6.-17. *Tomáš Fojta*, 2M, G M. Koperníka, Bílovec  
*Lukáš Abram*, 2M, G M. Koperníka, Bílovec  
*Roman Koch*, 2M, G M. Koperníka, Bílovec  
*Alexander Kupčo*, 2M, G M. Koperníka, Bílovec  
*Petra Coufalíková*, 2, Komenského, Třinec  
*Pavel Vavřík*, 2MF, G ČSLA, Frýdek-Místek  
*Richard Menšík*, 2MF, G ČSLA, Frýdek-Místek  
*Romana Kozlová*, 2, Nový Jičín  
*Michal Popule*, 2, Ostrava-Zábřeh

*Ludmila Novotná*, 2, Ostrava-Zábřeh  
*Irena Ježková*, 2, Ostrava-Zábřeh  
*Radek Hanáček*, 2, Rožnov pod Radhoštěm

### *Kategorie C*

- 1.-7. *Martin Beneš*, 1M, G M. Koperníka, Bílovec  
*David Havrlant*, 1M, G M. Koperníka, Bílovec  
*Markéta Matušová*, 1M, G M. Koperníka, Bílovec  
*Radek Pastyřík*, 1M, G M. Koperníka, Bílovec  
*Radovan Pekař*, 1M, G M. Koperníka, Bílovec  
*Richard Zlámal*, 1M, G M. Koperníka, Bílovec  
*Petr Masopust*, 8. tř., ZŠ, tř. Rudé armády,  
Frýdek-Místek
- 8.-10. *Jana Uhrová*, 1M, G M. Koperníka, Bílovec  
*Marcela Hlawiczková*, 1, Komenského, Třinec  
*Radim Wystyrk*, 8. tř., ZŠ, tř. Rudé armády,  
Frýdek-Místek

### *Kategorie P*

1. *Ivan Dvorský*, 4, G ČSLA, Frýdek-Místek  
2. *Petr Hliněný*, 4, G M. Koperníka, Bílovec  
3.-4. *Radim Moric*, 3, G M. Koperníka, Bílovec  
*Martin Čížek*, 4, Rožnov pod Radhoštěm  
5. *Radek Lučan*, 4, G ČSLA, Frýdek-Místek  
6. *Jarmil Halamíček*, 3, Rožnov pod Radhoštěm  
7.-8. *Karel Holub*, 4, G M. Koperníka, Bílovec  
*Pavel Skotnica*, 4, G M. Koperníka, Bílovec  
9. *Rostislav Gemrot*, 4, G M. Koperníka, Bílovec

Bratislava

*Kategorie A*

- 1.-3. *Martin Dindoš*, 4MF, G J. Hronca  
*Vladimír Špitálský*, 3M, G A. Markuša  
*Ondrej Šuch*, 4M, G A. Markuša  
4. *Juraj Džubas*, 3M, G A. Markuša  
5.-6. *Viliam Búr*, 1M, G A. Markuša  
*Pavol Mederly*, 2M, G A. Markuša  
7.-9. *Ján Bajcsy*, 4M, G A. Markuša  
*Miloš Volauf*, 1M, G A. Markuša  
*Pavol Ševera*, 4M, G A. Markuša

*Kategorie B*

- 1.-2. *Pavol Mederly*, 2M, G A. Markuša  
*Richard Kollár*, 2M, G A. Markuša  
3. *Rastislav Ňukovič*, 2M, G A. Markuša  
4. *Miroslav Ozorák*, 2M, G A. Markuša  
5. *Ladislav Kis*, 2M, G A. Markuša  
6. *Matej Kordoš*, 2M, G J. Hronca  
7.-15. *Lenka Fedorová*, 2M, G A. Markuša  
*Juraj Lányi*, 2M, G A. Markuša  
*Andrea Richterová*, 2M, G A. Markuša  
*Kristína Gendiarová*, 2M, G A. Markuša  
*Martin Benča*, 2M, G J. Hronca  
*Marek Kalavský*, 2M, G J. Hronca

*Andrej Lupták*, 2M, G J. Hronca  
*Peter Halák*, 2M, G A. Markuša  
*Ľubomír Gulán*, 2, Tomášikova

### *Kategorie C*

- 1.-9. *Kamil Budinský*, 1M, G J. Hronca  
*Vladimír Krno*, 1M, G J. Hronca  
*Pavol Marton*, 1M, G A. Markuša  
*Martin Niepel*, 8. tř., ZŠ, Ho Či Minova  
*Matej Ondrušek*, 1M, G J. Hronca  
*Juraj Slanička*, 1M, G A. Markuša  
*Daniel Štefankovič*, 1M, G A. Markuša  
*Jozef Vároš*, 1M, G A. Markuša  
*Miloš Volauf*, 1M, G A. Markuša  
10. *Marek Mačuha*, 8. tř., ZŠ, Ho Či Minova

### *Kategorie P*

1. *Martin Dindoš*, 4, G J. Hronca  
2.-3. *Vladimír Ďuračka*, 4, G J. Hronca  
*Igor Malý*, 3, G J. Hronca  
4. *Matej Ondrušek*, 4, G J. Hronca  
5.-6. *Ondrej Šuch*, 4, G A. Markuša  
*Martin Vojtko*, 3, G J. Hronca  
7.-8. *Miroslav Kočan*, 3, G J. Hronca  
*Rudolf Sedmina*, 4, G J. Hronca  
9. *Martin Stanek*, 3, G J. Hronca  
10.-11. *Monika Obrancová*, 4, G J. Hronca  
*Ján Repiský*, 4, G J. Hronca



*Kategorie A*

1. *Peter Šedík*, 4, G, Trenčín
2. *Alexander Tomík*, 3, G, Piešťany
3. *Daniel Bršel*, 4, G, Hlohovec
- 4.-6. *Marek Macháč*, 3, G, Sereď  
*Gabriela Pilljaková*, 3, G E. Gudernu, Nitra  
*Radovan Deríšek*, 4, G, Skalica

*Kategorie B*

- 1.-2. *Petrík Rampášek*, G, Šurany  
*Miroslav Svitek*, G, Komárno
- 3.-4. *František Sladký*, G, Partizánské  
*Jaroslav Tužimský*, G, Levice
- 5.-9. *Dušan Foltín*, G, Šurany  
*Andrej Hrmo*, G E. Gudernu, Nitra  
*Kamil Krajčovič*, G, Partizánské  
*Ingrid Szabó*, G, maď., Komárno  
*Monika Tóthová*, G, Párovská, Nitra

*Kategorie C*

1. *Milan Valky*, G, Párovská, Nitra
2. *Peter Galovič*, G, Piešťany
3. *Gábor Rác*, G, Dunajská Streda
- 4.-6. *Pavol Gregor*, SPŠE, Nové Zámky  
*Peter Holík*, G, Piešťany

*Jozef Nagy, G, Levice*

7. *Peter Márkus, G, Dunajská Streda*

8. *Andrej Huček, G, Párovská, Nitra*

9. *Michal Dovičan, G, Bánovce nad Bebravou*

### *Kategorie P*

1. *Marián Gašparovič, G E. Gudernu, Nitra*

2. *Roman Pták, G, Pezinok*

3. *Roman Tóda, G E. Gudernu, Nitra*

4.-6. *Igor Klepoch, SPŠE, Nové Zámky*

*Michal Slezák, G E. Gudernu, Nitra*

*Tomáš Klein, G, Piešťany*

7.-9. *Ján Jendrichovský, G, Modra*

*Jozef Sklenár, G, Piešťany*

*Peter Ďurfina, G E. Gudernu, Nitra*

10. *Ľubomír Štuller, G, Levice*

### *Středoslovenský kraj*

### *Kategorie A*

1. *Vladimír Glasnák, 3MF, Veľká Okružná, Žilina*

2. *Šimon Malý, 3MF, Žiar nad Hronom*

3.-6. *Ivan Milan, 3, Brezno*

*Juraj Lörinc, 3M, Tajovského, Banská Bystrica*

*Valerián Valášek, 3M, Tajovského, Banská Bystrica*

*Elena Šerešová, 4MF, Zvolen*

7.-8. *Jozef Skokan, 4M, Veľká Okružná, Žilina*

*Stanislav Mores, 4M, Veľká Okružná, Žilina*

9. *Eduard Omasta*, 4, Ružomberok  
10.-12. *Vojtech Goculiak*, 3M, Tajovského, Banská Bystrica  
*Stanislav Ťažiar*, 4, Prievidza  
*Ivan Valent*, 4, Lučenec

### *Kategorie B*

1. *Martin Berka*, 2M, Tajovského, Banská Bystrica  
2.-3. *Dušan Svitek*, 2M, Tajovského, Banská Bystrica  
*Peter Sviták*, 2M, Veľká Okružná, Žilina  
4. *Soňa Šimanová*, 2M, Tajovského, Banská Bystrica  
5.-6. *Martin Lancz*, 2M, Tajovského, Banská Bystrica  
*Jaroslava Kucianová*, 2M, Veľká Okružná, Žilina  
7. *Ján Vozár*, 2M, Tajovského, Banská Bystrica

### *Kategorie C*

- 1.-2. *Ján Žabka*, 1M, Veľká Okružná, Žilina  
*Marek Žabka*, 1M, Tajovského, Banská Bystrica  
3.-4. *Anton Ostrechovský*, 1M, Veľká Okružná, Žilina  
*Ján Šimon*, 1M, Tajovského, Banská Bystrica  
5. *Vojtech Bálint*, 1M, Veľká Okružná, Žilina  
6. *Pavol Durec*, 1MF, V. Pauliny Tótha, Martin  
7.-10. *Miroslav Dobrota*, 1M, Tajovského, Banská Bystrica  
*Martin Klimo*, 1M, Veľká Okružná, Žilina  
*Ivan Ľupták*, 1MF, Lučenec  
*Jana Pilníková*, 1MF, Žiar nad Hronom

## *Kategorie P*

1. *Eduard Omasta*, 4, Ružomberok
2. *Pavol Chalmoviansky*, 3, Prievidza
3. *Peter Vanoch*, 4, Veľká Okružná, Žilina
- 4.-5. *Richard Farkaš*, 4, Lučenec  
*Juraj Hrabovec*, 3, Wolkerova, Žilina
6. *Peter Malčovský*, 3, Prievidza
7. *Pavel Uhliar*, 4, Liptovský Hrádok
8. *František Kossuth*, 4, SPŠ, Dubnica
- 9.-10. *Miroslav Bielik*, 4, Wolkerova, Žilina  
*Anton Janetka*, 4, Veľká Okružná, Žilina

## Východoslovenský kraj

### *Kategorie A*

- 1.-2. *Peter Haluška*, 4M, Šmeralova, Košice  
*Vladimír Skalský*, 4, T. Ševčenka, Prešov
3. *Radoslav Jenčuš*, 4M, Šmeralova, Košice
- 4.-5. *Slavomír Gmitro*, 4, Konštantínova, Prešov  
*Mirko Chladný*, 2M, Šmeralova, Košice
6. *Radovan Teleki*, 3, kpt. Nálepku, Sp. Nová Ves
7. *Vladimír Komár*, 4M, Šmeralova, Košice
- 8.-10. *Milan Benedik*, 3, Leninova, Poprad  
*Slavomír Hrinko*, 3, Konštantínova, Prešov  
*Marián Raučina*, 3, Západná, Poprad

### *Kategorie B*

1. *Ľuboš Pástor*, 2M, Šmeralova, Košice
2. *Oskár Hritz*, 2M, Šmeralova, Košice
3. *Ján Maňuch*, 2M, Šmeralova, Košice
- 4.-5. *Herbert Vojčík*, 2M, Šmeralova, Košice  
*Marek Gura*, 2, Leninova, Poprad

### *Kategorie C*

- 1.-5. *Milan Matoš*, 1, Leninova, Poprad  
*Ján Šoltis*, 1, Leninova, Poprad  
*Peter Kopča*, 1, Humenné  
*Peter Katuščák*, 1M, Košice  
*Elena Halešová*, 1M, Košice
6. *Juraj Barát*, 1, Šrobárova, Košice
- 7.-8. *Pavol Diko*, 1M, Košice  
*Silvia Kulcsárová*, 1, Šmeralova, Košice
9. *Peter Kováčik*, 1M, Košice
10. *Martina Hruščáková*, 1, Leninova, Poprad

### *Kategorie P*

- 1.-2. *Vladimír Skalský*, 4, G T. Ševčenka, Prešov  
*Herbert Vojčík*, 2, Šmeralova, Košice
- 3.-5. *Tomáš Vinar*, ZŠ, Hronská, Košice  
*Slavomír Gmitro*, 4, Konštantínova, Prešov  
*Peter Haluška*, 4, Šmeralova, Prešov
6. *Lubomír Zlacký*, 3, G Gottw., Michalovce
7. *Radovan Brecka*, 3, G Gottw., Snina

8.-10. *Marek Gura*, 2, Leninova, Poprad  
*Peter Budai*, 2, Opatsk., Košice  
*Maroš Grund*, 3, Šrobárova, Košice

# Kategorie C

## Texty úloh

### C – I – 1

Čtverec  $100 \times 100$  je rozdělen na 10 000 jednotkových čtverců. Do nich jsou libovolným způsobem vepsána čísla 1 až 10 000 (do různých čtverců různá čísla). Dokažte, že pak existují dva sousední čtverce, v nichž jsou čísla lišící se aspoň o 51. Čtverce považujeme za sousední, mají-li společnou stranu.

### C – I – 2

Nechť  $n$  je přirozené číslo a  $a_n = 888 \dots 8$  je  $n$ -místné přirozené číslo zapsané v desítkové soustavě  $n$  osmičkami. Dokažte, že pro počty  $d(n)$ ,  $d(a_n)$  dělitelů čísel  $n$ ,  $a_n$  platí  $d(a_n) \geq 8d(n) - 8$ .

### C – I – 3

Na kružnici je napsáno 108 přirozených čísel, přičemž součet libovolných dvaceti vedle sebe stojících čísel se rovná 1 990. Dále víme, že na 37. místě stojí číslo 158, na 66. místě číslo 1 a na 83. místě číslo 200. Jaké číslo stojí na 40. místě?

## C – I – 4

Je dán rovnostranný trojúhelník  $ABC$  se stranou délky  $a$ . Na straně  $AC$  je dán bod  $L$  tak, že  $|AL| < \frac{a}{2}$ . Na stranách  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  sestrojíme po řadě body  $M$ ,  $N$ ,  $P$  tak, aby  $LM \parallel BC$ ,  $MN \parallel AC$ ,  $NP \parallel AB$ . Vypočítejte obvod a obsah čtyřúhelníku  $LMNP$ . Při které volbě bodu  $L$  je jeho obsah největší?

## C – I – 5

V rovině jsou dány shodné kružnice  $k_1(P, r)$ ,  $k_2(Q, r)$  a délka  $d$ , přičemž kružnice  $k_1$ ,  $k_2$  nemají společný bod. Najděte všechny dvojice bodů  $X$ ,  $Y$  takové, že  $|XY| = d$ , bod  $X$  leží na kružnici  $k_1$ , bod  $Y$  leží na kružnici  $k_2$  a přímka  $XY$  prochází středem úsečky  $PQ$ .

## C – I – 6

Je dáno přirozené číslo s lichým počtem číslic. Dokažte, že jednu z jeho číslic lze škrtnout tak, aby číslo, které vznikne, mělo na sudých i na lichých místech stejný počet sedmiček.

## C – S – 1

Najděte nejmenší přirozené číslo  $k$ , pro které mají součiny  $384 \cdot k$ ,  $2592 \cdot k$  stejný počet dělitelů.

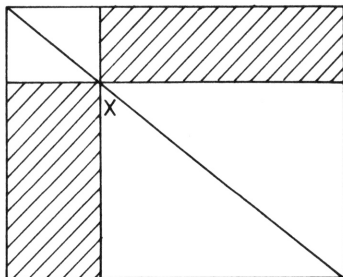


## C – S – 2

Určete číslice  $a, b$  tak, aby číslo, jež je v desítkové soustavě zapsáno ve tvaru  $a0b5$ , bylo druhou mocninou přirozeného čísla.

## C – S – 3

Na úhlopříčce obdélníku se stranami délek 4 cm a 3 cm je zvolen bod  $X$ . Při které poloze bodu  $X$  (obr. 1) je obsah vyšrafované části největší? Svou odpověď zdůvodněte.



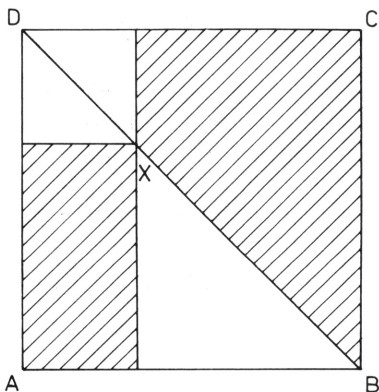
Obr. 1

## C – II – 1

Najděte všechna přirozená čísla  $n$ , pro která má číslo  $n$  v množině přirozených čísel právě tři dělitele a číslo  $n + 32$  právě pět dělitelů.

## C – II – 2

Na úhlopříčce  $BD$  čtverce  $ABCD$  je zvolen bod  $X$ . Při které poloze bodu  $X$  je obsah vyšrafované části na obr. 2 největší? Svou odpověď zdůvodněte.



Obr. 2

## C – II – 3

Dokažte, že číslo  $111\dots1222\dots225$ , ve kterém se číslice 1 vyskytuje  $k$ -krát a číslice 2  $(k+1)$ -krát, je druhou mocninou přirozeného čísla. Určete toto číslo.

## C – II – 4

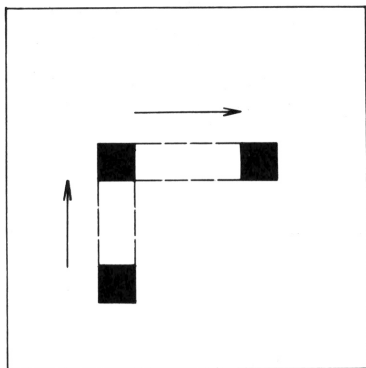
Je dána čtvercová síť se stranou délky 1, přirozené číslo  $r$  a v rovině sítě kružnice  $k$  o poloměru  $r$  se středem ve vrcholu

některého čtverce sítě. Dokažte, že kružnice  $k$  neprochází středem žádného čtverce sítě.

## Řešení úloh

### C – I – 1

V některém políčku je napsáno číslo 1, v jiném číslo 10 000. Od prvního k druhému políčku se dostaneme například tak, že půjdeme nejdříve svisle (nahoru nebo dolů), až se dostaneme do stejného řádku, v jakém je druhé pole (obr. 3). Pak přejdeme vodorovně do tohoto druhého pole.



Obr. 3

Jsou-li obě uvažovaná pole v témže řádku, jdeme jen vodorovně. Jsou-li obě políčka v témže sloupci, jdeme pouze svisle. V každém případě obsahuje naše cesta nejvýše 100 políček z téhož sloupce a nejvýše dalších 99 políček v řadě.

Přejdeme tedy nejvýše 198krát z jednoho políčka do políčka sousedního. Kdyby byl rozdíl čísel v sousedních políčkách vždy nejvýše 50, mohlo by se číslo v posledním políčku naší cesty rovnat nejvýše  $1 + 198 \cdot 50 = 9901$ . Protože tam však stojí číslo 10 000, musí se na naší cestě objevit aspoň jednou přírůstek větší než 50.

## C - I - 2

Je zřejmé  $a_n = 8 \cdot 111 \dots 11$ , kde je  $b_n = 111 \dots 11$   $n$ -místné číslo zapsané  $n$  jedničkami. Je to číslo liché, takže není dělitelné dvěma, tím méně čtyřmi nebo osmi. Proto má číslo  $a_n$  právě čtyřikrát více dělitelů než číslo  $b_n$ . Je-li totiž číslo  $p$  dělitelem čísla  $b_n$ , jsou děliteli čísla  $a_n$  čísla  $p$ ,  $2p$ ,  $4p$  a  $8p$ . A také platí, že každý dělitel čísla  $a_n$  se rovná některému z čísel  $p$ ,  $2p$ ,  $4p$ ,  $8p$ , kde  $p$  je dělitel čísla  $b_n$ . Stačí tedy zabývat se počtem dělitelů čísla  $b_n$ . Jestliže přirozené číslo  $k$  dělí číslo  $n$ , je

$$\begin{aligned} b_n &= \underbrace{111 \dots 11}_n = \underbrace{11 \dots 1}_k \underbrace{11 \dots 1}_k \dots \underbrace{11 \dots 1}_k = \\ &= 11 \dots 1 \cdot (1 + 10^k + \dots + 10^{n-k}) = b_k \cdot c_k, \end{aligned}$$

kde je  $c_k$  přirozené číslo. Je-li  $k = 1$ , je  $b_k = 1$ ,  $c_k = b_n$ . Při  $k = n$  je  $c_n = 1$ . Je-li  $1 < k < n$ , končí číslo  $c_k$  dvojčíslím 01 a nerovná se tedy žádnému z čísel  $b_n$ . Vidíme tudíž, že děliteli čísla  $b_n$  jsou čísla 1,  $b_n$  a též čísla  $b_k$ ,  $c_k$  pro ta čísla  $k$ , která dělí číslo  $n$ . Má-li tedy číslo  $n$  kromě 1 a  $n$  ještě  $d(n) - 2$  netriviálních dělitelů, má číslo  $b_n$  kromě 1 a  $b_n$  ještě aspoň  $2[d(n) - 2]$  dalších dělitelů, celkem tudíž aspoň

$2d(n) - 2$  dělitelů. Číslo  $a_n$  pak má aspoň  $4[2d(n) - 2] = 8d(n) - 8$  dělitelů, což jsme měli dokázat. Tvrzení platí i pro  $n = 1$ , kdy je  $b_n = 1$ .

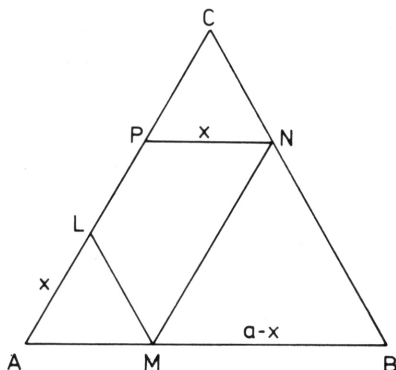
Poznamenejme, že šlo o úlohu náročnou, která vyžadovala od řešitelů nejdříve rozbor několika konkrétních případů.

## C – I – 3

Součet každých 20 vedle sebe stojících čísel je vždy 1 990. Také součet každých 108 vedle sebe stojících čísel je stejný, rovná se prostě součtu  $p$  všech čísel umístěných na kružnici. Zvolme nyní osm vedle sebe stojících čísel. Ostatních 100 čísel tvoří pět skupin po dvaceti vedle sebe stojících číslech, proto se součet zvolených osmi čísel rovná  $p - 5 \cdot 1\,990$ , je tedy také stejný pro každých osm čísel stojících vedle sebe. To pak platí také pro 16 čísel. A když je stejný součet každých dvaceti a rovněž každých šestnácti vždy vedle sebe stojících čísel, platí to i pro každá čtyři vedle sebe stojící čísla. Pak to však znamená, že se čísla vždy po čtyřech opakují, páté se rovná prvnímu, šesté druhému atd. Součet každých čtyř vedle sebe stojících čísel je  $1\,990 : 5 = 398$ . Na 37. místě stojí číslo 158, na 38. místě stojí stejné číslo jako na 66. místě, neboť  $66 = 38 + 7 \cdot 4$ , tedy číslo 1. Dále je  $39 = 83 - 11 \cdot 4$ , takže na 39. místě stojí číslo 200. Proto na 40. místě stojí číslo  $398 - 158 - 1 - 200 = 39$ .

## C – I – 4

Označme  $x = |AL|$ . Trojúhelníky  $AML$ ,  $MBN$  a  $PNC$  jsou rovnostranné (obr. 4) se stranami délek  $x$ ,  $a - x$ ,  $x$ . Proto je  $|PL| = a - 2x$  a obvod lichoběžníku  $MNPL$  je  $a -$



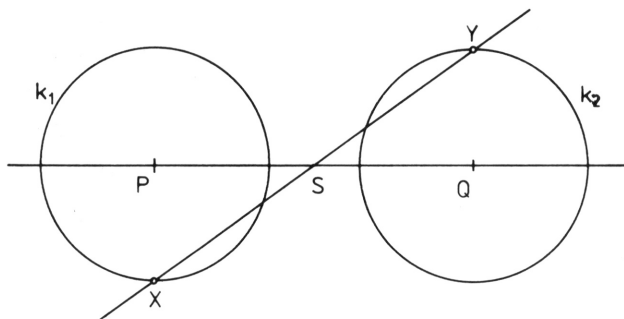
Obr. 4

$-2x + x + a - x + x = 2a - x$ , jeho obsah je  $\frac{1}{2}(a - x + a - 2x)v$  kde  $v$  je jeho výška. Ta se rovná též výšce  $v$  trojúhelníku  $AML$ , takže  $v = \frac{x}{2}\sqrt{3}$ . Obsah lichoběžníku je  $\frac{\sqrt{3}}{4}x(2a - 3x)$ , výsledek upravíme na tvar  $\frac{\sqrt{3}}{4} \left[ -3 \left( x - \frac{a}{3} \right)^2 + \frac{a^2}{3} \right]$ .

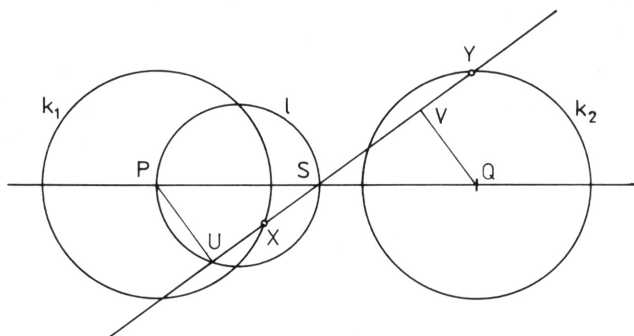
Vidíme, že tento obsah je největší pro  $x = \frac{a}{3}$ , kdy se rovná  $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$ .

## C – I – 5

Označme  $S$  střed úsečky  $PQ$  a předpokládejme, že body  $X, Y$  splňují podmínky úlohy. Pak jsou možné pouze dva případy, buď jsou body  $X, Y$  souměrně sdružené podle bodu  $S$  (obr. 5), nebo tomu tak není (obr. 6).



Obr. 5



Obr. 6

Uvažujme nejdříve první případ. Je pak  $|XS| = |YS| = \frac{d}{2}$ , takže bod  $X$  leží na průniku kružnic  $k_1$  a  $k\left(S, \frac{d}{2}\right)$ . Je-li obráceně  $X$  společným bodem těchto kružnic, leží bod

$Y$  k němu souměrně sdružený podle bodu  $S$  na kružnici  $k_2$  a dvojice  $X, Y$  je řešením úlohy. Počet řešení je v tomto případě 2, 1 nebo 0 podle toho, mají-li kružnice  $k_1, k$  dva, jeden nebo žádný společný bod. Přitom dva společné průsečíky mají uvažované kružnice právě tehdy, je-li  $|SP| - r < \frac{d}{2} < |SP| + r$ , tj.  $|PQ| - 2r < d < |PQ| + 2r$ .

Jeden společný bod mají kružnice  $k, k_1$  právě tehdy, je-li  $d = |PQ| - 2r$  nebo  $d = |PQ| + 2r$ . V ostatních případech nemají tyto kružnice žádný společný bod.

Přejdeme k druhé možnosti. Body  $P, Q$  vedme kolmice k přímkce  $XY$ , jejich paty označme  $U, V$ . Ze středové souměrnosti plyne  $|YV| = |UX|$ , takže  $|XY| = |UV| = d$ ,  $|SU| = \frac{d}{2}$ . Bod  $U$  leží tedy na kružnici  $k$  a současně na

Thaletově kružnici  $l$  nad průměrem  $SP$ , neboť úhel  $SUP$  je pravý. Přitom je bod  $U$  bodem vnitřní oblasti kružnice  $k_1$ , protože přímka  $XY$  je sečnou kružnice  $k_1$  (má s kružnicí společný bod  $X$  a nemůže být tečnou, v tom případě by byly body  $X, Y$  souměrně sdružené podle bodu  $S$ ). Je-li

obráceně bod  $U$  průsečíkem kružnic  $k$  a  $l$ , je  $\frac{d}{2} \leq |SP|$  a  $U$  je bodem vnitřní oblasti kružnice  $k_1$  právě tehdy, když je  $|PU| < r$ , kde  $|PU| = \sqrt{|SP|^2 - \frac{d^2}{4}}$ . Ke každému takovému bodu  $U$  sestrojíme dvě dvojice bodů  $X, Y$ , které jsou řešením úlohy, bod  $X$  je jedním nebo druhým průsečíkem

přímky  $SU$  s kružnicí  $k_1$ . Je-li  $0 < \sqrt{|PQ|^2 - d^2} < 2r$ , dostaneme dva takové body  $U$ , a tedy čtyři řešení úlohy. Pro  $d = |PQ|$  je  $U = P$  a úloha má kromě nalezených řešení



v první části ještě dvě řešení, pro která není bod  $S$  středem úsečky  $XY$ . Celkový počet řešení v závislosti na délce  $d$  můžeme přehledně vyčíst z této tabulky:

|                                           |     |          |
|-------------------------------------------|-----|----------|
| $d <  PQ  - 2r$                           | ... | 0 řešení |
| $d =  PQ  - 2r$                           | ... | 1 řešení |
| $ PQ  - 2r < d \leq \sqrt{ PQ ^2 - 4r^2}$ | ... | 2 řešení |
| $\sqrt{ PQ ^2 - 4r^2} < d <  PQ $         | ... | 6 řešení |
| $d =  PQ $                                | ... | 4 řešení |
| $ PQ  < d <  PQ  + 2r$                    | ... | 2 řešení |
| $d =  PQ  + 2r$                           | ... | 1 řešení |
| $d >  PQ  + 2r$                           | ... | 0 řešení |

## C – I – 6

Vezměme libovolné číslo s lichým počtem číslic a označme  $p$  počet jeho sedmiček na lichých místech a  $q$  počet sedmiček na sudých místech v jeho zápisu v desítkové soustavě. Ubráním dvou sedmiček stojících vedle sebe nebo obráceně jejich přidáním se nezmění rozdíl  $p - q$ . Totéž platí při ubrání nebo přidání dvou číslic stojících vedle sebe, jestliže žádné z nich není sedmička. Budeme-li takto stále podle možnosti ubírat, dojdeme opět k číslu s lichým počtem číslic, v němž se budou střídát sedmičky s číslicemi různými od sedmičky. Může se ovšem stát, že na jeho prvním místě bude stát číslice 0. V takto získaném čísle pak stačí škrtnout prostřední číslici (je to sedmička, mělo-li původní číslo

lichý počet sedmiček, jinak je to číslice různá od sedmičky), abychom dostali číslo se stejným počtem sedmiček na lichých a na sudých místech. K němu pak vrátíme ty dvojice čísel, které jsme předtím ubrali. Tím dostaneme vždy číslo požadovaných vlastností. Ukážeme si popsany postup na příkladě čísla 12 375 707 727. Vynecháním dvojic 12, 77, pak 02 a pak opět 77 dostaneme číslo 375, z něhož vynecháme prostřední číslici 7. K výsledku 35 přidáme zpět ty dvojice, které jsme předtím vynechali. Konečným výsledkem je číslo 1 235 707 727.

Uvedeme ještě aspoň stručně jiný postup, který by si však vyžádal podrobnější diskusi. Obsahuje-li dané číslo lichý počet sedmiček, je zřejmé, že bude třeba vynechat některou sedmičku. Začneme první sedmičkou zleva. Nejdříve ukážeme, že pokud po jejím vynechání je více sedmiček na sudých místech, nebude tomu tak při vynechání poslední sedmičky. Pak ještě ukážeme, že počet sedmiček na sudých místech po vynechání některé sedmičky se nezmění, nebo se zvětší o 1, nebo se zmenší o 1, jestliže místo ní vynecháme hned sedmičku další. Jinými slovy, počet sedmiček na sudých místech po vyškrtnutí některé sedmičky se změní nejvýše o jednu, škrtne-li místo ní tu, která je k ní nejbližší. Z toho pak plyne, že pro jednu sedmičku zbude po jejím vynechání stejný počet sedmiček na sudých a na lichých místech. Podobně bychom postupovali při sudém počtu sedmiček, kdy musíme vynechat některou číslici různou od sedmičky.

## C – S – 1

Je  $384 = 2^7 \cdot 3$ ,  $2\,592 = 2^5 \cdot 3^4$ . Položme  $k = 2^a \cdot 3^b \cdot c$ , kde  $c$  není dělitelné dvěma ani třemi. Pak je  $384 \cdot k = 2^{a+7} \cdot 3^{b+1} \cdot c$ , počet dělitelů tohoto čísla je  $(a+8)(b+2)d$ , kde  $d$  je počet dělitelů čísla  $c$ . Počet dělitelů druhého součinu je  $(a+6)(b+5)d$ . Jelikož  $k$  má být nejmenší, je  $c = d = 1$  a pro  $a, b$  má platit  $(a+8)(b+2) = (a+6)(b+5)$ , tedy  $2b = 3a + 14$ . Nejmenší  $k$  dostaneme při  $a = 0$ ,  $b = 7$ , je tedy  $k = 3^7 = 2\,187$ .

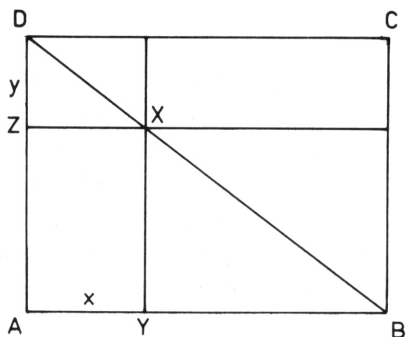
## C – S – 2

Končí-li druhá mocnina přirozeného čísla pětkou, končí i základ pětkou. Druhá mocnina čísla končícího pětkou končí dvojčíslím 25, je tedy nutně  $b = 2$ . Kromě toho je  $(10n+5)^2 = 25 + 100n(n+1)$ . Hledáme tedy přirozené číslo  $n$  tak, aby číslo  $n(n+1)$  bylo dvojmístné a násobkem dešeti. Jediná řešení jsou  $n = 4, 5$  nebo  $9$ , tedy  $a = 2, 3$  nebo  $9$ . Řešením úlohy jsou právě tyto dvojice  $(a, b)$ :  $(2, 2)$ ,  $(3, 2)$  a  $(9, 2)$ .

## C – S – 3

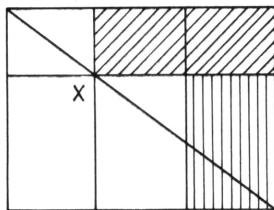
Označme  $x = |AY|$ ,  $y = |DZ|$  (obr. 7). Je  $y : x = 3 : 4$ , obsah vyšrafované části je  $x(3-y) + y(4-x)$ . Po dosazení za  $y$  a úpravě dostaneme výraz  $6 - \frac{3}{2}(x-2)^2$ . Proto je obsah největší při  $x = 2$ , kdy je bod  $X$  středem úhlopříčky.

Úloha navazovala na úlohu C–I–4, avšak zcela jiný, velmi jednoduchý postup zvolil žák *Michal Kružhak* z I. ročníku gymnázia v Námestove. Podal toto jednoduché řešení:

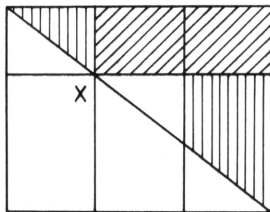


Obr. 7

Je-li  $X$  středem úhlopříčky, rovná se obsah vyšrafované části polovině obsahu obdélníku. Není-li bod  $X$  středem úhlopříčky, rovná se obsah vyšrafované části nejdříve obsahu vyšrafované části na obr. 8 a ten pak obsahu vyšrafované části na obr. 9, který je menší než polovina obsahu obdélníku.



Obr. 8



Obr. 9

## C – II – 1

Číslo  $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \dots$  má právě  $(a+1)(b+1)(c+1) \dots$  dělitelů. Má-li číslo  $n$  právě tři dělitele, je nutně  $n = p^2$  pro nějaké prvočíslo  $p$ . Jelikož číslo  $n + 32$  má mít právě 5 dělitelů, musí být  $n + 32 = q^4$ , kde  $q$  je rovněž prvočíslo. Pak je  $32 = q^4 - p^2 = (q^2 - p)(q^2 + p)$ . Rozložíme proto číslo 32 na součin dvou přirozených čísel. Rozklady  $32 = 1 \cdot 32$  a  $32 = 4 \cdot 8$  nevedou k žádnému výsledku. Položíme-li  $q^2 - p = 2$ ,  $q^2 + p = 16$ , dostaneme  $q = 3$ ,  $p = 7$ . Jediné řešení je  $n = 49$ .

## C – II – 2

Označíme-li  $x$  vzdálenost bodu  $X$  od přímky  $AD$ , je obsah vyšrafované části  $2x(a - x) + \frac{1}{2}(a - x)^2 = \frac{2}{3}a^2 - \frac{3}{2}(x - \frac{1}{3}a)^2$ . Obsah je tedy největší pro  $x = \frac{1}{3}a$ , kde  $a$  je strana čtverce. Bod  $X$  je dán například podmínkou  $|BX| = 2|DX|$ .

## C – II – 3

Jelikož  $1\,225 = 35^2$ ,  $112\,225 = 335^2$ , docházíme k domněnce, že hledaným číslem je číslo  $333 \dots 35$ , ve kterém se počet trojek rovná číslu  $k$ . Domněnku dokážeme užitím známého vztahu z úlohy C-S-2  $(10n + 5)^2 = 100n(n + 1) + 25$ . Stačí ukázat, že součin čísla  $333 \dots 3$  ( $k$  trojek) s číslem o 1 větším se rovná číslu  $111 \dots 1222 \dots 2$ , které obsahuje  $k$  jedniček a stejný počet dvojek. To však plyne ihned z rovnosti  $333 \dots 34 \cdot 3 = 1000 \dots 02$ .

Velmi pěkné a zcela korektní řešení podal žák I. ročníku gymnázia v Dolním Kubíně *František Malá*. Ukázal, že se

dané číslo dá napsat ve tvaru

$$\frac{10^k - 1}{9} \cdot 10^{k+2} + \frac{10^{k+1} - 1}{9} \cdot 2 \cdot 10 + 5,$$

což po jednoduchých algebraických úpravách dává

$$\left( \frac{10^{k+1} + 5}{3} \right)^2.$$

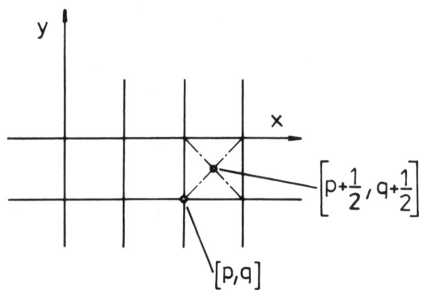
Stačí nyní ukázat, že  $\frac{10^{k+1} + 5}{3}$  je přirozené číslo, tedy že je číslo  $10^{k+1} + 5$  dělitelné třemi. To však plyne ihned z toho, že jeho ciferný součet je 6, a tudíž dělitelný třemi. A číslo je dělitelné třemi, právě když je dělitelný třemi jeho ciferný součet.

## C – II – 4

Podle Pythagorovy věty se vzdálenost středu některého čtverce sítě od vrcholu libovolného čtverce sítě rovná

$$\sqrt{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(q + \frac{1}{2}\right)^2},$$

kde  $p, q$  jsou celá čísla. Můžeme si totiž představit, že jsme počátek soustavy souřadnic zvolili v uvažovaném vrcholu (obr. 10) čtverce sítě a osy soustavy souřadnic jsou prodloužením stran tohoto čtverce. Uvažovaný střed pak má souřadnice  $\left[p + \frac{1}{2}, q + \frac{1}{2}\right]$ , kde  $p, q$  jsou celá čísla. Druhá mocnina zkoumané vzdálenosti, a tedy ani vzdálenost sama není celé číslo, nemůže se tudíž rovnat přirozenému číslu  $r$ .



Obr. 10

# Kategorie B

## Texty úloh

### B – I – 1

Je dáno liché přirozené číslo  $n$ . Najděte aspoň jednu dvojici přirozených čísel  $x, y$  tak, aby největším společným dělitelem čísel  $x, y$  bylo číslo  $n$  a aby největším společným dělitelem čísel  $xy + x, xy + y$  bylo číslo  $2n$ .

### B – I – 2

Reálná nezáporná čísla  $x, y$  splňují nerovnosti  $x + y \leq 1$ ,  
 $x \geq \frac{n}{n+1}$ , kde  $n$  je přirozené číslo. Dokažte, že

$$x^n(1-x) \geq y(1-y)^n.$$

### B – I – 3

Trojúhelník  $ABC$  s obsahem 10 je těžnicí  $CD$  a úsečkou  $AE$  rozdělen na čtyři části (bod  $E$  leží uvnitř strany  $BC$ ,  $D$  je střed strany  $AB$ ). Obsah trojúhelníku  $AFC$  je 4,  $F$  je průsečík  $CD$  a  $AE$ . Určete obsahy trojúhelníků  $ADF, CEF$  a čtyřúhelníku  $BDFE$ .



## B – I – 4

Určete největší přirozené číslo, které se nedá vyjádřit jako součet dvou přirozených čísel, z nichž má každé ciferný součet aspoň 10.

## B – I – 5

Pro reálná čísla  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $n \geq 3$ ) platí  $x_1 \geq x_3 + n$ ,  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ ,  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n^2$ . Dokažte, že  $x_1 + x_2 \geq 3n - 2$ . Kdy platí rovnost  $x_1 + x_2 = 3n - 2$ ?

## B – I – 6

V rovině je dána úsečka  $AB$ . Najděte množinu všech vrcholů  $Z$  pravoúhlých trojúhelníků  $XYZ$ , jejichž přepočna je částí úsečky  $AB$  a  $|AX| = |XZ|$ ,  $|BY| = |YZ|$ .

## B – S – 1

Je dáno přirozené číslo  $n$ . Najděte aspoň jednu dvojici přirozených čísel  $x, y$  tak, aby  $D(x, y) = D(xy + x, xy + y) = n$ .  $D(a, b)$  značí největšího společného dělitele čísel  $a, b$ .

## B – S – 2

V trojúhelníku  $ABC$  je  $D$  střed strany  $AB$ ,  $E$  je bod úsečky  $BC$ ,  $F$  je průsečík úseček  $AE$  a  $CD$ . Obsah trojúhelníku  $ABC$  je 15, obsah trojúhelníku  $CFE$  je 4. Určete obsahy trojúhelníků  $AFC$ ,  $ADF$  a čtyřúhelníku  $DBEF$ .

## B – S – 3

Najděte všechny uspořádané dvojice  $(n, k)$  celých čísel  $n, k$ , které splňují rovnici  $k^3 - 3k^2n + 3kn^2 - 61 = 0$ .

## B – II – 1

Je dáno přirozené číslo  $n$ . Najděte aspoň jednu dvojici přirozených čísel  $x, y$  tak, aby to byla čísla nesoudělná a aby největším společným dělitelem čísel  $xy + x, xy + y$  bylo číslo  $n$ .

## B – II – 2

Je dána kružnice  $k$ . Sestrojte trojúhelník  $ABC$  se středem  $D$  strany  $BC$  tak, aby byl trojúhelník  $ABD$  kružnici  $k$  vepsán, přímka  $AC$  byla tečnou kružnice  $k$  a  $|AC| = 2|AD|$ .

## B – II – 3

Pro nezáporná čísla  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  platí  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{10}$ ,  $x_1 - x_6 \geq 3$ ,  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 = 25$ . Jakou nejmenší hodnotu může mít součet  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$ ?

## B – II – 4

V konvexním čtyřúhelníku  $ABCD$  označme  $E$  průsečík úhlopříček a  $S$  střed kružnice opsané trojúhelníku  $ABE$ . Potom jsou přímky  $CD$  a  $SE$  kolmé, právě když je čtyřúhelník  $ABCD$  tětiový. Dokažte.

## B – I – 1

Úlohu vyřešíme nejdříve pro některá konkrétní  $n$ . Například pro  $n = 15$  můžeme vzít  $x = 15$ ,  $y = 45$ . Při obecném  $n$  zkusíme  $x = n$ ,  $y = kn$ . Snadno zjistíme, že číslo  $k$  musí být liché. Zvolme  $k = 3$ , pak je  $xy + x = n(3n + 1)$ ,  $xy + y = n(3n + 3)$ . Čísla  $3n + 1$ ,  $3n + 3$  jsou sudá a kromě jedničky a dvojky nemají společného dělitele. Ten by totiž musel dělit jejich rozdíl, tj. číslo 2. Odtud plyne, že největším společným dělitelem čísel  $xy + x$ ,  $xy + y$  je číslo  $2n$ .

## B – I – 2

Položme  $z = 1 - y$ . Potom  $\frac{n}{n+1} \leq x \leq z$  a máme dokázat nerovnost  $x^n(1-x) \geq z^n(1-z)$ . Jinými slovy máme dokázat, že funkce  $f(x) = x^n(1-x)$  je pro  $x \geq \frac{n}{n+1}$  klesající. To lze snadno dokázat pomocí derivace uvažované funkce, neodpovídá to však osnovám 2. ročníku středních škol. Bez užití derivace můžeme postupovat takto:

Pro  $z > x \geq \frac{n}{n+1}$  máme dokázat, že  $x^n(1-x) > z^n(1-z)$ , tj.  $z^n - x^n < z^{n+1} - x^{n+1}$ . Vydělením nezáporným číslem  $z - x$  dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$\begin{aligned} z^{n-1} + z^{n-2}x + \dots + zx^{n-2} + x^{n-1} < \\ < z^n + z^{n-1}x + \dots + zx^{n-1} + x^n, \end{aligned}$$

tj.

$$(1-x)(z^{n-1} + z^{n-2}x + \dots + zx^{n-2} + x^{n-1}) < z^n.$$

Pro  $x > 1$  to zřejmě platí, neboť levá strana je pak záporná.

Je-li  $x \leq 1$ , je  $1-x$  nezáporné. Jelikož  $x \geq \frac{n}{n+1}$ , je  $1-x \leq$

$\leq \frac{1}{n+1}$ . Dále je

$$z^{n-1} + z^{n-2}x + \dots + zx^{n-2} + x^{n-1} < nz^{n-1},$$

takže

$$(1-x)(z^{n-1} + z^{n-2}x + \dots + zx^{n-2} + x^{n-1}) < \frac{nz^{n-1}}{n+1} \leq z^n,$$

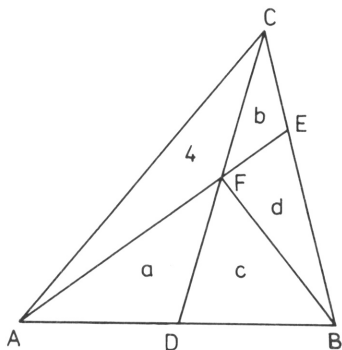
což jsme měli dokázat.

### B - I - 3

Označme  $a, b, c, d$  obsahy trojúhelníků  $ADF, EFC, BDF, BFE$  (obr. 11). Potom  $a + 4 = 5, b + c + d = 5$ , dále je  $a = c$ , neboť  $|AD| = |BD|$ . Konečně platí  $b : d = (b+4) : (a+c+d) = |CE| : |BE|$ . Je tedy  $a = c = 1, b + d = 4, b(2+d) = (b+4)d$ , takže  $b = 2d$ , odkud  $d = \frac{4}{3}, b = \frac{8}{3}$ . Hledané obsahy jsou  $1, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}$ .

### B - I - 4

Dá-li se číslo  $N$  napsat jako součet dvou přirozených čísel  $A, B$ , z nichž má každé ciferný součet aspoň 10, jsou čísla  $A,$



Obr. 11

$B$  aspoň dvojciferná a větší nebo rovna 19, takže  $N$  je větší než 37. Pro  $A = B = 99$  dostaneme číslo 198. Avšak číslo 199 se nedá napsat požadovaným způsobem. Kdyby totiž bylo  $199 = (100 + 10a + b) + (10c + d)$ , muselo by platit současně  $b + d = 9$ ,  $a + c = 9$ , takže součet ciferných součtů obou sčítanců by byl 19, a tudíž by nemohly být oba ciferné součty rovny aspoň 10. Zkusmo zjistíme, že náhodně zvolená čísla větší než 199 se požadovaným způsobem zapsat dají. Pokusíme se tedy dokázat, že každé číslo  $N \geq 200$  se dá napsat jako součet  $A + B$ , kde  $A, B$  mají ciferný součet větší než 9. V následující tabulce je uvedeno, jak zvolit poslední číslice  $y, z$  čísel  $A, B$ , je-li poslední číslice čísla  $N$  rovna  $x$ :

|     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $u$ |
| $y$ | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 5 | $v$ |
| $z$ | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 4 | $w$ |

V další tabulce je uvedeno, jak zvolit předposlední číslice  $v$ ,  $w$  čísel  $A$ ,  $B$ , je-li předposlední číslice čísla  $N$  rovna  $u$  a  $x \neq 9$ :

| $u$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v$ | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 |
| $w$ | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 |

Je-li  $x = 9$ , zvolíme při daném  $u$  hodnoty  $v$ ,  $w$  podle první tabulky. Vidíme, že již součet posledních dvou číslic čísla  $A$  i čísla  $B$  je aspoň 10, kromě případů, kdy  $N$  končí některým z dvojčíslicí 00, 09 nebo 99. Pak můžeme vždy zvolit  $A = 145$  a  $B$  tak, aby končilo dvojčíslicím 55, resp. 64, resp. 54, končí-li  $N$  dvojčíslicím 00, resp. 09, resp. 99. V posledním případě je však číslo  $B$  aspoň trojčiferné, protože  $A + B \geq 200$ . Takže v každém případě je ciferný součet čísla  $A$  i čísla  $B$  větší než 9.

## B – I – 5

Je účelné pokusit se řešit úlohu nejprve úsudkem. Při pevně zvoleném  $x_3$  je  $x_1 + x_2$  aspoň  $2x_3 + n$ , neboť  $x_1 \geq x_3 + n$  a  $x_2 \geq x_3$ . Přitom  $x_1 + x_2 = 2x_3 + n$  právě tehdy, když  $x_1 = x_3 + n$ ,  $x_2 = x_3$ . Vzhledem k tomu, že součet čísel  $x_1, x_2, \dots, x_n$  je pevný, rovná se  $n^2$ , je  $x_1 + x_2$  nejmenší, když je součet  $x_3 + x_4 + \dots + x_n$  největší. Avšak  $x_3 + \dots + x_n \leq (n - 2)x_3$ , rovnost platí právě tehdy, když  $x_n = x_{n-1} = \dots = x_4 = x_3$ . Můžeme tedy říci, že  $x_1 + x_2$  nabývá nejmenší hodnoty  $2x_3 + n$ , když  $x_1 = x_3 + n$ ,

$x_2 = x_3 = \dots = x_n$ . Pak ale musí platit  $x_3 + n + x_3 + (n - 2)x_3 = n^2$ , tedy  $x_3 = n - 1$ ,  $2x_3 + n = 3n - 2$ .

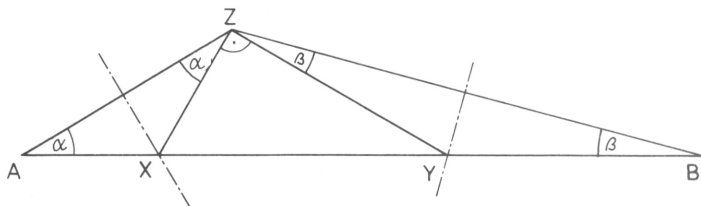
Jiný postup: Sečtením nerovností  $x_1 \geq x_3 + n$ ,  $x_2 \geq x_3$  dostaneme  $x_1 + x_2 \geq 2x_3 + n$ . Užitím nerovností  $x_i \leq x_3$  pro  $i = 3, 4, \dots, n$  dostaneme

$$n^2 = x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq x_1 + x_2 + (n - 2)x_3,$$

takže je  $x_1 + x_2 \geq n^2 - (n - 2)x_3$ . Sečtením s nerovností  $x_1 + x_2 \geq 2x_3 + n$  vynásobenou faktorem  $\frac{n-2}{2}$  dostaneme požadovanou nerovnost.

## B - I - 6

Nechť trojúhelník  $XYZ$  má požadované vlastnosti. Pak je (obr. 12)



Obr. 12

$$|\sphericalangle ZAX| = |\sphericalangle AZX| = \alpha, \quad |\sphericalangle ZBY| = |\sphericalangle BZY| = \beta, \\ 2\alpha + 2\beta + 90^\circ = 180^\circ,$$

takže  $\alpha + \beta = 45^\circ$ ,  $|\sphericalangle AZB| = \alpha + \beta + 90^\circ = 135^\circ$ . Proto leží bod  $Z$  nutně na jednom ze dvou kruhových oblouků,

jež jsou tvořeny všemi body, z nichž je vidět úsečka  $AB$  pod úhlem  $135^\circ$ . Jsou to menší kruhové oblouky ohraničené body  $A, B$  (bez bodů  $A, B$ ) na kružnicích se středy  $S_1, S_2$ , přičemž  $|\sphericalangle AS_1B| = |\sphericalangle AS_2B| = 90^\circ$ . Je-li obráceně  $Z$  bod některého z těchto oblouků, je  $|\sphericalangle AZB| = 135^\circ$ , osy úseček  $AZ, BZ$  procházejí bodem  $S_1$  nebo  $S_2$  a protínají úsečku  $AB$  v bodech  $X, Y$ . Označme  $|\sphericalangle XZY| = \gamma$ ,  $|\sphericalangle ZAX| = |\sphericalangle AZX| = \alpha$ ,  $|\sphericalangle ZBY| = |\sphericalangle BZY| = \beta$ . Je tedy  $\alpha + \gamma + \beta = 135^\circ$  a  $2\alpha + 2\beta + \gamma = 180^\circ$ , odkud  $\gamma = 90^\circ$ . Hledanou množinou je množina všech bodů uvažovaných dvou oblouků.

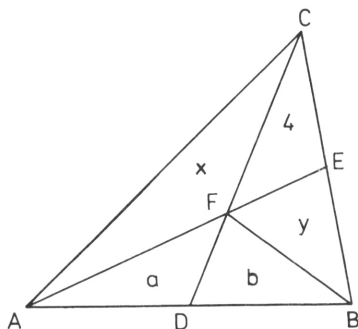
## B – S – 1

Stačí položit  $x = n, y = 2n$ . Je pak  $D(x, y) = n, xy + x = n(2n + 1), xy + y = n(2n + 2)$ . Čísla  $2n + 1, 2n + 2$  jsou nesoudělná, jejich společný dělitel by musel dělit i jejich rozdíl, tj. číslo 1. Je tedy též  $D(xy + x, xy + y) = n$ .

## B – S – 2

Označme obsahy trojúhelníků  $ADF, BDF, AFC, BFE$  po řadě  $a, b, x, y$  (obr. 13). Je  $b = a, a + x = 7,5, b + y = 3,5, y : 4 = (2a + y) : (x + 4)$ . Úpravou poslední rovnice máme  $xy = 8a$ , po dosazení za  $x, y$  dostaneme rovnici  $a^2 - 19a + \frac{105}{4} = 0$ . Kořen  $a = 17,5$  nevyhovuje, pro  $a = 1,5$  je  $x = 6, y = 2$ . Tyto hodnoty vyhovují, hledané obsahy jsou 6, 1,5 a 3,5.





Obr. 13

### B – S – 3

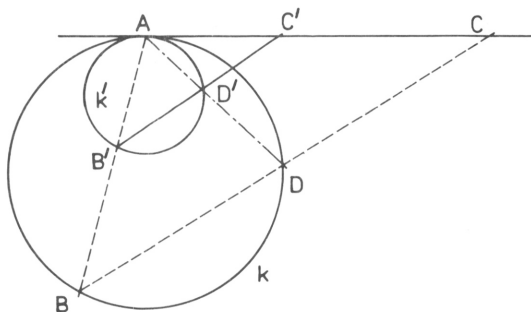
Je  $k(k^2 - 3kn + 3n^2) = 61$ . Číslo 61 je prvočíslo, takže se  $k$  může rovnat pouze některému z čísel 1,  $-1$ , 61,  $-61$ , pro  $n$  pak dostaneme vždy kvadratickou rovnici. Ta má pouze v případě  $k = 1$  nezáporný diskriminant a kořeny 5,  $-4$ . Úloha má proto právě dvě řešení: (5, 1) a  $(-4, 1)$ .

### B – II – 1

Je  $xy + x = x(y + 1)$ ,  $xy + y = y(x + 1)$ . Čísla  $x$ ,  $y$  mají být nesoudělná, největším společným dělitelem čísel  $x + 1$ ,  $y + 1$  musí být číslo  $n$ . Položíme-li  $x + 1 = n$ ,  $y + 1 = 2n$ , je tato podmínka splněna a čísla  $x = n - 1$ ,  $y = 2n - 1$  jsou nesoudělná (jejich společný dělitel by musel dělit i číslo  $y - 2x = 1$ ). Pouze v případě  $n = 1$  není číslo  $n - 1$  přirozené, můžeme však pro  $n = 1$  zvolit  $x = 1$ ,  $y = 2$ .

## B – II – 2

Z mocnosti bodu  $C$  ke kružnici  $k$  plyne  $|AC|^2 = 2|CD|^2$ , takže  $|AC| : |CD| : |AD| = 2 : \sqrt{2} : 1$ . V libovolném bodě  $A$  kružnice  $k$  (obr. 14) sestrojíme tečnu, na ní bod  $C'$  tak, aby  $|AC'| = 2$ . Body  $A, C'$  doplníme na trojúhelník  $AC'D'$  tak, aby  $|AD'| = 1$ ,  $|C'D'| = \sqrt{2}$ . Bod  $B'$  zvolíme tak, aby byl bod  $D'$  středem úsečky  $C'B'$ . Kružnice  $k'$  opsaná trojúhelníku  $AD'B'$  se pak v bodě  $A$  dotýká přímky  $AC'$ . To vyplývá z mocnosti bodu ke kružnici. Stejnolehlost se



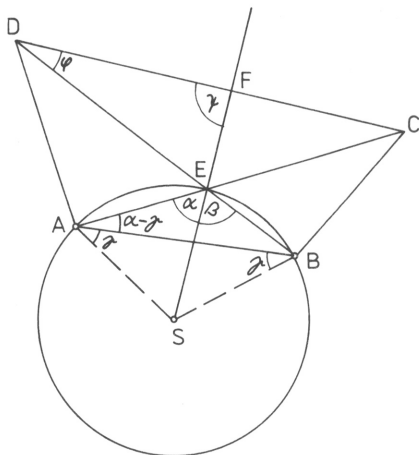
Obr. 14

středem v bodě  $A$  zobrazující  $k'$  na kružnici  $k$  zobrazuje body  $C', D', B'$  na hledané body  $C, D, B$ . Až na shodnost má úloha právě jedno řešení.

## B – II – 3

Postupujeme podobně jako v úloze B-I-5, hledanou nejmenší hodnotu dostaneme v případě  $x_1 = x_6 + 3$ ,  $x_2 = x_3 = \dots = x_{10}$ , kdy je  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = \dots = x_{10} = 1$ . Hledaná nejmenší hodnota je 20.

Trojúhelníky  $ABS$ ,  $AES$ ,  $BES$  (obr. 15) jsou rovnoramenné, jejich vnitřní úhly při základně označme  $\gamma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , dále označme  $\varphi = |\angle CDE|$ ,  $\psi = |\angle DFE|$ , kde  $F$  je průsečík  $CD$  a  $SE$ . Z trojúhelníku  $ABE$  plyne  $\alpha + \beta - \gamma = 90^\circ$ . Je  $\psi = 180^\circ - \varphi - \beta$ , a tedy  $\psi = 90^\circ$  právě tehdy, když je  $\varphi = 90^\circ - \beta = \alpha - \gamma$ . Podmínka  $\varphi = \alpha - \gamma$  je podle věty o obvodových úhlech ekvivalentní s tím, že čtyřúhelník  $ABCD$  je tětivový. Podobně bychom postupovali v případě, kdyby byl bod  $S$  bodem trojúhelníku  $ABE$ .



Obr. 15

# Kategorie A

## Texty úloh

### A – I – 1

Určete nejmenší přirozené číslo  $n$ , pro které v prostoru existuje konvexní mnohostěn  $K$  s následujícími vlastnostmi:

- a)  $K$  má alespoň 10 vrcholů,
- b) každé jeho dva různé vrcholy lze po hranách spojit alespoň čtyřmi různými cestami, z nichž žádné dvě už nemají další společný vrchol,
- c)  $K$  má  $n$  hran.

### A – I – 2

Ukažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel  $n$  s touto vlastností: Čísla  $0, 0, 1, 1, \dots, n, n$  lze seřadit do posloupnosti tak, že mezi dvěma výskyty čísla  $k$  je právě  $k$  jejích členů ( $0 \leq k \leq n$ ).

### A – I – 3

Je dán čtyřstěn  $ABCD$ , středy dvou jeho protilehlých hran označme  $K$  a  $L$ . Dokažte, že každá rovina procházející body  $K, L$  dělí daný čtyřstěn na dvě části stejného objemu.

## A – I – 4

Předpokládejme, že délky  $a, b, c$  stran trojúhelníku a délky jeho těžnic jsou celá čísla. Dokažte, že pak  $a, b, c$  jsou sudá a pro délky těžnic platí: Buď jsou všechny dělitelné třemi, anebo žádná z nich není dělitelná třemi.

## A – I – 5

Je-li  $G$  graf takový, že z každého jeho vrcholu vychází nejméně  $2m - 1$  hran, lze vrcholy grafu rozdělit do dvou disjunktních množin  $A$  a  $B$  tak, že z každého vrcholu v  $A$  vychází nejméně  $m$  hran do vrcholů v  $B$  a z každého vrcholu v  $B$  vychází nejméně  $m$  hran do vrcholů v  $A$ . Dokažte.

## A – I – 6

Najděte všechna reálná čísla  $\alpha$  s vlastností: Jsou-li  $x, y, z$  délky stran trojúhelníku, pak

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq \alpha(xy + yz + zx).$$

## A – S – 1

Jsou dány posloupnosti  $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ , kde

$$a_n = \frac{1}{2} \left( (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \right),$$
$$b_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( (2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n \right).$$

Najděte čísla  $c$ ,  $d$  a  $p$ ,  $q$  tak, aby pro každé přirozené  $n$  platily následující vztahy

$$\begin{aligned}a_{n+2} &= ca_{n+1} + da_n, \\ pa_n^2 + qb_n^2 &= 1.\end{aligned}$$

## A – S – 2

V rovině je dáno  $n \geq 3$  bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Pak existuje aspoň  $\frac{1}{6}n(n-1)$  trojúhelníků s vrcholy v daných bodech, které neobsahují žádný další z daných bodů. Dokažte.

## A – S – 3

Spomedzi štvorstenov  $ABCD$  s danými dĺžkami  $a$ ,  $c$  hrán  $AB$ ,  $CD$  a danou vzdialenosťou  $d$  stredov hrán  $AB$ ,  $CD$  nájdite ten, ktorý má najväčší objem, a tento objem určte.

## A – II – 1

Postupnosť  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  je daná vzťahmi

$$\begin{aligned}a_1 &= 1, \quad a_2 = 4, \\ a_{2^k+j} &= -a_j \quad \text{pre } 1 \leq j \leq 2^k, \quad k = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Vypočítajte súčet  $a_1 + a_2 + \dots + a_{1\,990}$ .

## A – II – 2

Spomedzi štvorstenov  $ABCD$  s danými dĺžkami  $a$ ,  $c$  hrán  $AB$ ,  $CD$  a danou vzdialenosťou  $d$  stredov hrán  $AB$ ,  $CD$  nájdite ten, ktorý má najväčší povrch, a tento povrch určte.

### A – II – 3

Najděte nejmenší  $\varepsilon$ , pro které platí: Je-li  $T$  ostroúhlý trojúhelník s úhly  $\alpha, \beta, \gamma$ , pak existuje rovnoramenný nebo pravoúhlý trojúhelník s úhly  $\alpha', \beta', \gamma'$  takový, že

$$|\alpha - \alpha'| \leq \varepsilon, |\beta - \beta'| \leq \varepsilon, |\gamma - \gamma'| \leq \varepsilon.$$

### A – II – 4

Zjistěte, kolik existuje pořadí  $(a_1, a_2, \dots, a_{10})$  čísel 1, 2, ..., 10 takových, že  $a_i > a_{2i}$  ( $1 \leq i \leq 5$ ) a  $a_j > a_{2j+1}$  ( $1 \leq j \leq 4$ ).

### A – III – 1

Postupnost  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  je daná vztahmi

$$a_1 = 1, \\ a_{2^k+j} = -a_j \quad \text{pre } 1 \leq j \leq 2^k, k = 0, 1, 2, \dots$$

Dokážte, že daná postupnosť nie je periodická.

### A – III – 2

Nájdite všetky reálne čísla  $\alpha$ , pre ktoré má každé kladné riešenie  $(x, y, z)$  nerovnice

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq \alpha(xy + yz + zx)$$

tú vlastnosť, že existuje trojuholník so stranami dĺžok  $x, y, z$ .

### A – III – 3

Je dána krychle  $ABCDEFGH$ . Najděte všechna čísla  $\varphi > \frac{1}{2}\pi$ , pro která existuje rovina, jejíž průnik se čtyřstěnem  $ABDE$  je tupouhlý trojúhelník s tupým úhlem  $\varphi$ .

### A – III – 4

Určete největší číslo  $k \geq 0$  takové, že pro všechny  $n$ -tice  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $n \geq 2$ ) nezáporných čísel platí

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1) \geq \\ \geq k(x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + \dots + x_{n-1}^2x_n^2 + x_n^2x_1^2).$$

### A – III – 5

V zemi jsou každá dvě města spojena právě jednou silnicí. Každá z nich je jednosměrná a je určena buď jen pro motorová vozidla, anebo jen pro cyklisty. Silnice se křižují pouze ve městech (jinde mají mimoúrovňové křížení). Dokažte, že existuje město, z něhož lze do libovolného jiného města dojet bez změny dopravního prostředku.

### A – III – 6

Dokažte, že pro každé přirozené číslo  $k$  existuje systém  $S$  dvouprvkových podmnožin množiny  $\{1, 2, \dots, 2k\}$  takový, že platí: Jsou-li  $M_1, M_2, \dots, M_{2k}$  libovolné množiny takové, že

$$M_i \cap M_j \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \{i, j\} \in S,$$

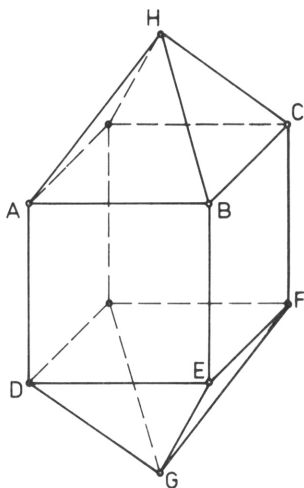
pak množina  $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_{2k}$  obsahuje aspoň  $k^2$  prvků.



## A – I – 1

Aby byla splněna podmínka b) úlohy, musí zřejmě z každého vrcholu vycházet aspoň 4 hrany. Označíme-li  $v$  počet vrcholů takového mnohostěnu, platí podle a) pro jeho počet hran  $n$  nerovnost  $n \geq 2v \geq 20$  (sčítáme-li počet hran pro všechny vrcholy, počítáme každou hranu dvakrát).

Mnohostěn  $K$  na obr. 16 má právě 10 vrcholů, 20 hran a z každého vrcholu vycházejí právě 4 hrany. Zbývá ověřit,



Obr. 16

že skutečně každé dva vrcholy mnohostěnu  $K$  mají požadovanou vlastnost. Vzhledem k souměrnosti uvedeného mnohostěnu stačí spočítat, kolik různých cest vede mezi dvoji-

cemi vrcholů  $A, B; A, C; A, D; A, E; A, F; A, G; A, H$  a  $H, G$ .

Nejmenší hledané  $n$  s uvedenými vlastnostmi je tedy  $n = 20$ .

## A – I – 2

Poměrně snadno zjistíme, že pro  $n = 1, 2$  taková posloupnost neexistuje. Pro  $n = 3$  vyhovuje např. posloupnost  $(0, 0, 3, 1, 2, 1, 3, 2)$ . Těžko se podaří najít nějaký obecný předpis, který by dával požadovanou posloupnost pro přirozené  $n$  jistého tvaru. Ukážeme několik návodných pozorování:

1. Ze sudých čísel  $0, 0, 2, 2, \dots, 2k, 2k$  snadno sestavíme posloupnost s požadovanou vlastností:

$$2k, \dots, 4, 2, 0, 0, 2, 4, \dots, 2k.$$

2. Pro lichá čísla  $1, 1, 3, 3, \dots, 2k+1, 2k+1$  to jde, když jedno místo vynecháme:

$$2k+1, \dots, 3, 1, *, 1, 3, \dots, 2k+1.$$

3. Z posloupnosti  $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}, a_{2n+2}$  pro  $n$  dostaneme „roztažením“ část jiné posloupnosti (s lichými čísly  $1, 3, \dots, 2n+1$ ) takto:

$$2a_1+1, *, 2a_2+1, *, \dots, *, 2a_{2n+1}+1, *, 2a_{2n+2}+1$$

Mějme posloupnost  $(a_1, a_2, \dots, a_{2n+2})$ , která vyhovuje pro nějaké  $n \geq 3$  (obsahuje čísla  $0, 0, 1, 1, \dots, n, n$ ). Sestrojíme následující posloupnost, která bude vyhovovat pro

$$n' = 4n + 3:$$

$$\begin{aligned} &2n, 2n - 2, \dots, 2, 0, 0, 2, \dots, 2n - 2, 2n, \\ &4n + 3, \underline{2a_1 + 1}, 4n + 2, \underline{2a_2 + 1}, 4n + 1, \dots, \\ &\quad 2n + 2, \underline{2a_{2n+2} + 1}, \\ &4n + 3, 4n + 2, 4n + 1, \dots, 2n + 3, 2n + 2 \end{aligned}$$

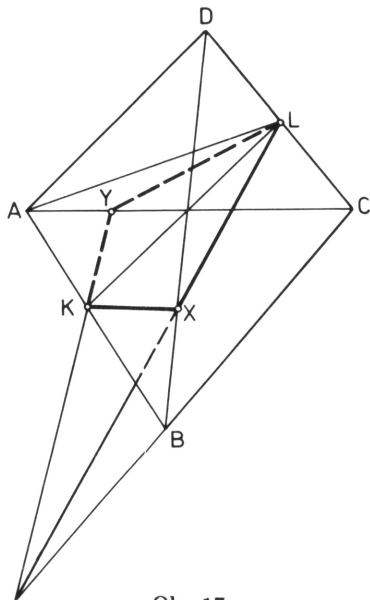
(nejprve podle 1. uspořádáme všechna sudá čísla  $0, 2, \dots, 2n$ , pak podle 3. roztáhneme danou posloupnost  $(a_1, \dots, a_{2n+2})$  a do příslušných mezer umístíme postupně všechna čísla  $4n + 3, 4n + 2, \dots, 2n + 2$  a ta pak ještě jednou zopakujeme na konci posloupnosti. Je zřejmé, že nová posloupnost obsahuje každé z čísel  $0, 1, \dots, 4n + 3$  právě dvakrát, a snadno se přesvědčíme, že je splněna i podmínka úlohy.

Pro  $n = 4 \cdot 3 + 3 = 16$  tak dostaneme posloupnost  $(6, 4, 2, 0, 0, 2, 4, 6, 15, 1, 14, 1, 13, 7, 12, 3, 11, 5, 10, 3, 9, 7, 8, 5, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8)$ . Z uvedené konstrukce plyne, že každé přirozené číslo tvaru  $4n + 3$  pro  $n \geq 3$  má požadovanou vlastnost.

## A – I – 3

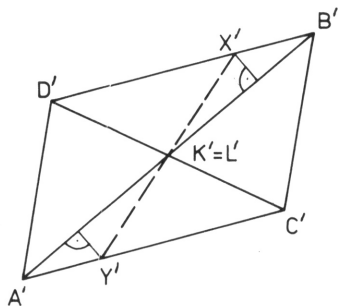
Pro rovinu  $ABL$  je tvrzení zřejmé, protože body  $C, D$  mají od roviny  $ABL$  stejnou vzdálenost.

Uvažujme rovinu, která protne hranu  $BD$  v bodě  $X$  a hranu  $AC$  v bodě  $Y$  (obr. 17). Nyní si stačí uvědomit, že těleso  $KXLYAD$  vznikne z čtyřstěnu  $ABLD$  přidáním čtyřstěnu  $AKLY$  a ubráním čtyřstěnu  $KBLX$ . Jejich podstavy  $AKL$  a  $KBL$  mají stejný obsah, stačí tedy dokázat, že oba čtyřstěny mají i stejnou výšku, tj. body  $X$  a  $Y$  jsou od roviny



Obr. 17

$ABL$  stejně vzdáleny. To je nejlépe vidět, když promítne-  
me daný čtyřstěn do roviny kolmé na přímkou  $KL$  (obr. 18).



Obr. 18

Protože  $|AK| = |BK|$  a  $|CL| = |DL|$ , je uvedeným průmětem rovnoběžník  $A'C'B'D'$  a rovina  $KLX$  se promítne do přímky  $X'Y'$  procházející jeho středem  $K' = L'$ , přičemž vzdálenosti bodů  $X, Y$  od roviny  $ABL$  se promítnou ve skutečné velikosti. Stejně postupujeme i v případě, kdy uvažovaná rovina protíná hrany  $BC$  a  $AD$ . Tím je tvrzení dokázáno.

**Poznámka.** Tvrzení úlohy lze zobecnit na případ, kdy body  $K$  a  $L$  dělí příslušné hrany v daném poměru. Ve stejném poměru jsou pak i objemy příslušných částí čtyřstěnu, jež vzniknou řezem nějakou rovinou procházející body  $K$  a  $L$ .

## A – I – 4

K řešení potřebujeme vyjádřit délky těžnic pomocí délek stran trojúhelníku. Je-li např.  $A_1$  střed strany  $BC$ , vyjádříme v trojúhelníku  $ABA_1$  délku  $t_a = |AA_1|$  a v trojúhelníku  $ABC$  zase délku  $b$  pomocí kosinové věty. Vyloučením  $\cos \beta$  vyjde vzorec

$$4t_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2 \quad (1)$$

(další dva dostaneme cyklickou záměnou  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$ ). Odtud hned plyne, že  $a^2$  (a tedy i  $b^2, c^2$ ) jsou sudá čísla, tudíž i  $a, b, c$  musí být sudá.

Druhé tvrzení úlohy dostaneme sečtením vzorců (1) pro všechny tři těžnice,

$$4(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Výsledná rovnost říká, že  $t_a^2 + t_b^2 + t_c^2$  je číslo dělitelné třemi (protože čísla 3 a 4 jsou nesoudělná). Nyní si stačí uvědomit, že druhá mocnina každého celého čísla dává při dělení

třemi zbytek 0 nebo 1 (podle toho, zda je základ sám dělitelný třemi, či nikoli). Odtud plyne, že součet tří čtverců je dělitelný třemi, jen když jsou všechna tři čísla dělitelná třemi, anebo žádné z nich není třemi dělitelné.

**Poznámka.** Poslední úvahu lze nahradit i dalším využitím vzorců (1). Odečtením dvou z nich vyjde např.

$$4(t_a^2 - t_b^2) = 3(b^2 - a^2),$$

takže hned vidíme, že čísla  $t_a^2$ ,  $t_b^2$  (a tedy i číslo  $t_c^2$ ) dávají stejný zbytek (mod 3), a tedy všechna tři čísla  $t_a^2$ ,  $t_b^2$ ,  $t_c^2$  mají stejný zbytek (mod 3).

## A – I – 5

Hledáme vlastně takový disjunktní rozklad  $V = A \cup B$  ( $A \cap B = \emptyset$ ) množiny  $V$  vrcholů daného grafu  $G$ , aby mezi množinami  $A$  a  $B$  bylo „mnoho hran“. Vezměme proto ze všech možných rozkladů ten, pro který je příslušný počet hran co největší. Takový rozklad má už požadovanou vlastnost, protože kdyby z nějakého vrcholu  $v \in A$  vedlo do  $B$  nejvýše  $m - 1$  hran, dostali bychom přemístěním  $v$  z  $A$  do  $B$  nový rozklad  $A \setminus \{v\}$ ,  $B \cup \{v\}$ , který bude mít mezi oběma množinami více hran, protože  $v$  je podle předpokladu s ostatními vrcholy v  $A$  spojen aspoň  $m$  hranami.

## A – I – 6

Předpoklad, že  $x$ ,  $y$ ,  $z$  jsou délky stran trojúhelníku, znamená, že platí

$$x + y - z > 0, \quad x - y + z > 0, \quad -x + y + z > 0. \quad (1)$$

Nerovnost, která nás zajímá, má jednu charakteristickou vlastnost: je symetrickou funkcí proměnných  $x, y, z$  (tj. při jejich libovolné permutaci se nezmění). Z (1) dostaneme symetrickou nerovnost tak, že sečteme součiny každých dvou výrazů v (1), takže

$$\begin{aligned} & (x + y - z)(x - y + z) + (x + y - z)(-x + y + z) + \\ & \quad + (x - y + z)(-x + y + z) = \\ & = 2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2) > 0, \end{aligned}$$

tj. uvažovaná nerovnost platí pro každé  $\alpha \geq 2$ .

Podívejme se, co se stane pro  $x = y = 1$  (pak musí být  $0 < z < 2$ ). Vyjde nerovnost

$$z^2 - 2\alpha z - \alpha + 2 \leq 0, \quad (2)$$

která pro  $\alpha < 2$  jistě nebude platit, vezmeme-li  $z > 0$  dostatečně malé. Kvadratický trojčlen (2) má totiž pro  $\alpha < 1$  záporný diskriminant (tj. je vždy  $z^2 - 2\alpha z - \alpha + 2 > 0$ ) a pro  $1 \leq \alpha < 2$  jeho kořeny  $z_1, z_2$  splňují nerovnosti  $0 < z_1 < \alpha < z_2$  (takže pro  $0 < z < z_1$  bude zase  $z^2 - 2\alpha z - \alpha + 2 > 0$ ).

Řešením úlohy jsou všechna  $\alpha \geq 2$ .

**Jiné řešení.** Položme

$$2a = x - y + z, \quad 2b = x + y - z, \quad 2c = -x + y + z,$$

neboli

$$x = a + b, \quad y = b + c, \quad z = c + a.$$

Podle předpokladu jsou  $x, y, z$  délky stran trojúhelníku, takže  $a, b, c > 0$ . Dosazením do dané nerovnosti dostaneme po úpravě nerovnost

$$(2 - \alpha)(a^2 + b^2 + c^2) + (2 - 3\alpha)(ab + bc + ca) \leq 0, \quad (3)$$

která zřejmě platí pro každé  $\alpha \geq 2$ .

Uvažujme teď  $\alpha < 2$  a položme  $a = b = 1$ ; pak

$$\begin{aligned} (2 - \alpha)(a^2 + b^2 + c^2) + (2 - 3\alpha)(ab + bc + ca) &= \\ &= (2 - \alpha)c^2 + 2(2 - 3\alpha)c + 6 - 5\alpha. \end{aligned}$$

Protože  $2 - \alpha > 0$ , víme z vlastností kvadratické funkce, že existuje kladné číslo  $c_0$  takové, že

$$(2 - \alpha)c_0^2 + 2(2 - 3\alpha)c_0 + 6 - 5\alpha > 0.$$

Čísla  $a = b = 1, c = c_0$  tedy nesplňují nerovnost (3), a proto ani čísla  $x = 2, y = z = 1 + c_0$ , jež vyhovují trojúhelníkovým nerovnostem, nesplňují požadovanou nerovnost.

## A – S – 1

Dosazením do požadovaného rekurentního vztahu (a po vydělení  $\frac{1}{2}$ ) dostaneme rovnost

$$\begin{aligned} (7 + 4\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^n + (7 - 4\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^n &= \\ = c(2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^n + c(2 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^n + \\ + d(2 + \sqrt{3})^n + d(2 - \sqrt{3})^n &= \\ = (2c + d + c\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^n + (2c + d - c\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^n. \end{aligned}$$



Porovnáním obou stran získaného vztahu dostaneme, že předpokládaná rovnost je splněna pro  $c = 4$ ,  $d = -1$ .

Protože

$$\begin{aligned} ((2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n)^2 &= (7 + 4\sqrt{3})^n + (7 - 4\sqrt{3})^n + 2 = \\ &= ((2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n)^2 + 4, \end{aligned}$$

plyne odtud rovnost

$$4a_n^2 - 3b_n^2 = 4, \quad \text{tj.} \quad a_n^2 - \frac{3}{4}b_n^2 = 1.$$

Druhému požadavku úlohy tedy vyhovují čísla  $p = 1$ ,  $q = -\frac{3}{4}$ .

**Jiné řešení** dostaneme, pokud máme základní znalosti z teorie diferenčních rovnic. Odtud plyne, že posloupnosti  $(a_n)$  odpovídá charakteristická rovnice  $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$  (její kořeny jsou  $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ ), takže příslušný rekurentní vztah, který uvedená posloupnost splňuje, je

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n,$$

tj.  $c = 4$ ,  $d = -1$ .

Rovněž je možno spočítat první čtyři členy posloupnosti  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 7$ ,  $a_3 = 26$ ,  $a_4 = 97$  a pro neznámá čísla sestavit dvě lineární rovnice. Jejich řešením dostaneme  $c = 4$ ,  $d = -1$ . Zbývá ovšem dokázat (nejlépe matematickou indukcí), že uvažovaná posloupnost splňuje získaný vztah pro každé přirozené  $n$ . Podobně můžeme vyřešit i druhou část úlohy. Pro  $n = 1$  a  $n = 2$  dostaneme dvě lineární rovnice.

## A – S – 2

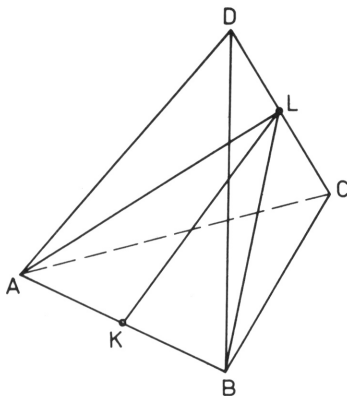
Z daných  $n$  bodů vezměme libovolné dva body  $X, Y$ . K nim z daných bodů určíme třetí bod  $Z$  tak, aby výška trojúhelníku  $XYZ$  na stranu  $XY$  byla co nejmenší. V takovém případě už nebude trojúhelník  $XYZ$  obsahovat žádný jiný z daných bodů. Ke každé z  $\binom{n}{2}$  dvojic daných bodů jsme tak našli jeden „prázdný“ trojúhelník, přitom jsme ale mohli každý takový trojúhelník počítat nejvýše třikrát (pro každou stranu jednou). Existuje tedy aspoň  $\frac{1}{3} \binom{n}{2} = \frac{1}{6} n(n-1)$  trojúhelníků s požadovanou vlastností, což jsme měli dokázat.

## A – S – 3

Označme  $K, L$  středy hran  $AB, CD$  uvažovaného čtyřstěnu. Objem čtyřstěnu  $ABCD$  pak můžeme spočítat tak, že ho rozdělíme rovinou  $ABL$  na dva čtyřstěny  $ABLC$  a  $ABLD$  (obr. 19). Pro objem  $V(ABCD)$  uvažovaného čtyřstěnu pak zřejmě platí

$$V(ABCD) \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |AB| \cdot |KL| \cdot |CD| = \frac{1}{6} adc$$

s rovností, právě když  $KL$  je výškou trojúhelníku  $ABC$  a  $CD$  je kolmá na rovinu  $ABL$ , což je právě tehdy, jsou-li obě mimoběžné hrany  $AB$  a  $CD$  navzájem kolmé a zároveň obě kolmé na spojnici svých středů. Objem odpovídajícího čtyřstěnu pak bude  $\frac{1}{6} acd$ .



Obr. 19

## A - II - 1

Zřejmě je  $a_3 = -1$ ,  $a_4 = -4$ , takže platí  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$ . Z toho, jak je uvedená posloupnost definována, snadno plyne, že součet prvních  $4n$  členů posloupnosti je pro libovolné přirozené  $n$  nulový: pro každé číslo  $n$  tvaru  $n = 2^k$  ( $k \geq 0$ ) to zřejmě platí, neboť

$$\begin{aligned} a_1 + \dots + a_{4 \cdot 2^k} &= \\ &= a_1 + a_2 + \dots + a_{2^{k+1}} + a_{2^{k+1}+1} + \dots + a_{2^{k+2}} = \\ &= a_1 + a_2 + \dots + a_{2^{k+1}} - (a_1 + a_2 + \dots + a_{2^{k+1}}) = 0. \end{aligned}$$

Předpokládejme navíc, že součet  $a_1 + a_2 + \dots + a_{4m}$  je nulový pro libovolné  $m < n$  (tj. i pro  $m = 0$ , kterému odpovídá prázdný součet). Pro každé  $n \geq 1$  a pro vhodné  $k \geq 2$  pak

můžeme psát  $4n = 2^k + 4m$ , kde  $0 \leq m < n$ , takže

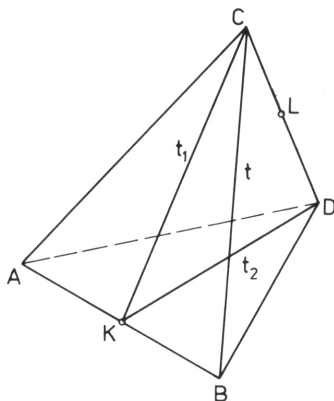
$$a_1 + a_2 + \dots + a_{4n} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2^k} - (a_1 + a_2 + \dots + a_{4m}) = 0$$

podle indukčního předpokladu. Podle definice dané posloupnosti tedy platí

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{1990} &= \\ &= a_{1989} + a_{1990} = -a_{965} - a_{966} = a_{453} + a_{454} = \\ &= -a_{197} - a_{198} = a_{69} + a_{70} = -a_5 - a_6 = a_1 + a_2 = 5. \end{aligned}$$

## A – II – 2

Označme  $K$  a  $L$  středy hran  $AB$ ,  $CD$  uvažovaného čtyřstěnu  $ABCD$ . Pro obsah stěn  $ABC$  a  $ABD$  zřejmě platí (obr. 20)  $S(ABC) \leq \frac{1}{2}at_1$ ,  $S(ABD) \leq \frac{1}{2}at_2$ , kde  $t_1 = |KC|$ ,  $t_2 = |KD|$  jsou délky příslušných těžnic. Rovnost



Obr. 20

v obou nerovnostech nastane, právě když obě těžnice  $CK$ ,  $DK$  budou kolmé na hranu  $AB$ , tj. právě když bude rovina  $CDK$  kolmá na  $AB$ . Pro část povrchu uvažovaného čtyřštěnu tak dostáváme odhad

$$S(ABC) + S(ABD) \leq \frac{a}{2}(t_1 + t_2). \quad (1)$$

Z kosinové věty pro trojúhelníky  $CKL$  a  $DKL$  plynou rovnosti

$$\begin{aligned} t_1^2 &= \frac{c^2}{4} + d^2 - cd \cos |\sphericalangle KLC|, \\ t_2^2 &= \frac{c^2}{4} + d^2 + cd \cos |\sphericalangle KLC|, \end{aligned}$$

takže podle známé nerovnosti  $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \leq \leq 2(x^2 + y^2)$  dostáváme nerovnost

$$(t_1 + t_2)^2 \leq 2(t_1^2 + t_2^2) = c^2 + 4d^2,$$

v níž nastane rovnost, právě když  $t_1 = t_2$ . Ze vztahu (1) tak vychází odhad

$$S(ABC) + S(ABD) \leq \frac{a}{2} \sqrt{c^2 + 4d^2}.$$

V nerovnosti (1) zřejmě nastane rovnost, právě když jsou obě těžnice  $t_1$  i  $t_2$  kolmé na  $AB$ , tj. právě když je rovina  $CDK$ , a tedy i hrana  $CD$  kolmá na  $AB$ . Z rovnosti  $t_1 = t_2$  pak navíc plyne, že je  $KL \perp CD$ .

Zcela analogicky odvodíme nerovnost

$$S(CDA) + S(CDB) \leq \frac{c}{2} \sqrt{a^2 + 4d^2}.$$

Podle předchozích úvah nastane v obou posledních nerovnostech rovnost, právě když jsou obě hrany  $AB$ ,  $CD$  navzájem kolmé a zároveň jsou obě kolmé na svoji střední příčku  $KL$ . Takový čtyřstěn  $ABCD$  pak má povrch

$$\frac{a}{2}\sqrt{c^2 + 4d^2} + \frac{c}{2}\sqrt{a^2 + 4d^2}.$$

## A – II – 3

Uvažujme ostroúhlý trojúhelník s úhly  $\alpha < \beta < \gamma$  a číslo  $\varepsilon > 0$  takové, že změnou libovolného z úhlů  $\alpha, \beta, \gamma$  o nejvýše  $\varepsilon$  nedostaneme ani pravoúhlý, ani rovnoramenný trojúhelník. Pak současně platí

$$\gamma < 90^\circ - \varepsilon, \quad \beta - \alpha > 2\varepsilon, \quad \gamma - \beta > 2\varepsilon.$$

Odtud plyne

$$\beta < \gamma - 2\varepsilon < 90^\circ - 3\varepsilon, \quad \alpha < \beta - 2\varepsilon < 90^\circ - 5\varepsilon,$$

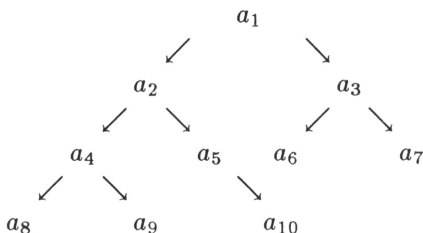
a protože  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ , vychází

$$180^\circ < 90^\circ - 5\varepsilon + 90^\circ - 3\varepsilon + 90^\circ - \varepsilon,$$

tedy  $9\varepsilon < 90^\circ$ ,  $\varepsilon < 10^\circ$ .

To znamená, že pro každé  $\varepsilon \geq 10^\circ$  už máme zaručenu existenci pravoúhlého či rovnoramenného trojúhelníku, jehož odpovídající úhly se od daných liší nejvýše o  $\varepsilon$ . A  $\varepsilon = 10^\circ$  je skutečně nejmenší číslo s touto vlastností, jak je vidět z trojúhelníku s úhly  $\alpha = 40^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = 80^\circ$ .

Předpokládejme, že pořadí  $(a_1, a_2, \dots, a_{10})$  splňuje uvedené nerovnosti. Čísla  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  pak můžeme uspořádat do následujícího schématu



v němž  $a_i \rightarrow a_j$  znamená, že  $a_i > a_j$  (relace  $>$  je ovšem tranzitivní).

Je jasné, že musí být  $a_1 = 10$ . Dále uvažujme jednu z  $\binom{9}{3}$  možností, jak zbylých devět čísel  $1, 2, \dots, 9$  rozdělit na dvě disjunktní množiny šesti a tří čísel. Pro každé takové rozdělení jsou hodnoty  $a_2$  a  $a_3$  jednoznačně určeny jako maximální prvky příslušných podmnožin, pro volbu hodnot  $a_6, a_7$  pak máme dvě možnosti, zatímco čísla  $a_4, a_5, a_8, a_9, a_{10}$  musíme ještě rozdělit do dvou disjunktních množin se třemi a dvěma prvky (to jde  $\binom{5}{2}$  způsoby). Pro každé takové rozdělení nám pak zbývají právě dvě možnosti jak určit  $a_8$  a  $a_9$  (prvky  $a_4, a_5$ , a tedy i  $a_{10}$  jsou takovým rozdělením už jednoznačně určeny!).

Celkem tedy existuje

$$\binom{9}{3} \cdot 2 \cdot \binom{5}{2} \cdot 2 = 3\,360$$

různých pořadí, která splňují požadované podmínky.

**Jiné řešení** (podle P. Tomana, 4. ročník GWP, Praha, a R. Kubackiho, 3. ročník GMK, Bílovec). Uvažujme všechna možná pořadí  $(a_1, a_2, \dots, a_{10})$  deseti čísel  $1, 2, \dots, 10$ , kterých je  $10!$ . Těch, která mají na prvním místě největší číslo 10, je  $9! = \frac{1}{10} 10!$ . Ze všech pořadí s  $a_1 = 10$  jich je zřejmě  $\frac{1}{6} = 5!/6!$  takových, že  $a_2$  je mezi čísly  $a_2, a_4, a_5, a_8, a_9, a_{10}$  největší. Podobně uvažujeme i pro  $a_4 > a_8, a_9$  (tyto dvě nerovnosti splňuje právě  $\frac{1}{3}$  všech vyhovujících pořadí), pro  $a_5 > a_{10}$  ( $\frac{1}{2}$  dosud vyčleněných pořadí) a konečně pro  $a_3 > a_6, a_7$  ( $\frac{1}{3}$  dosud vyčleněných pořadí). Celkem tedy je takových pořadí

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10! = 3\,360.$$

## A – III – 1

Pro  $j = 2^k$  dostáváme, že  $a_{2^{k+1}} = -a_{2^k}$ , tedy  $a_{2^k} = (-1)^k$ . Předpokládejme, že daná posloupnost má periodu  $p$ , tj. že pro každé přirozené  $m$  platí  $a_{m+p} = a_m$ . Vezměme  $k$  takové, že  $2^k \geq p$ . Potom

$$a_{2^k+p} = a_{2^k} = (-1)^k, \quad a_{2^{k+1}+p} = a_{2^{k+1}} = (-1)^{k+1},$$

tedy  $a_{2^k+p} \neq a_{2^{k+1}+p}$ . Přitom ale podle definice posloupnosti je pro  $p \leq 2^k$

$$a_{2^k+p} = -a_p = a_{2^{k+1}+p}.$$

Uvedená posloupnost tudíž nemůže být periodická.



Položíme-li  $x = y = 1$  a  $z = 2$ , vyjde  $6 \leq 5\alpha$ , takže daná nerovnost bude splněna pro všechna reálná čísla  $\alpha \geq \frac{6}{5}$ . Aby každé kladné řešení uvažované nerovnice dávalo strany trojúhelníku, musí proto platit  $\alpha < \frac{6}{5}$ .

Ukážeme, že pro  $\alpha < \frac{6}{5}$  má každé kladné řešení uvedené nerovnice požadovanou vlastnost. Kdyby nerovnice měla takové kladné řešení  $(x, y, z)$ , které by nesplňovalo trojúhelníkové nerovnosti, můžeme bez ztráty obecnosti předpokládat, že je  $t = z - (x + y) \geq 0$  (nerovnice je symetrická v proměnných  $x, y, z$ ). Dosazením do původní nerovnosti postupně pro  $\alpha < \frac{6}{5}$  dostaneme

$$x^2 + y^2 + (x + y + t)^2 < \frac{6}{5}(xy + y(x + y + t) + x(x + y + t)),$$

$$t^2 + \frac{4}{5}x^2 + \frac{4}{5}y^2 - \frac{8}{5}xy + \frac{4}{5}t(x + y) < 0,$$

$$t^2 + \frac{4}{5}(x - y)^2 + \frac{4}{5}t(x + y) < 0,$$

což nemůže platit, neboť na levé straně nerovnosti je kladné číslo.

Požadovanou vlastnost tedy mají všechna čísla  $\alpha < \frac{6}{5}$ .

**Jiné řešení** (podle M. Kubečka, 3. ročník GWP, Praha).

Pokud  $\alpha \geq \frac{6}{5}$ , má uvažovaná nerovnice kladné řešení  $x = y = 1, z = 2$ , pro které trojúhelník zřejmě neexistuje.

Na druhé straně, pokud pro nějaká kladná čísla  $x, y, z$  neexistuje trojúhelník se stranami délek  $x, y, z$ , můžeme předpokládat, že je  $x \leq y \leq z$ , a přitom  $x + y - z \leq 0$ . Umocněním této nerovnosti dostaneme

$$z^2 + x^2 + y^2 \geq 2xz + 2yz - 2xy,$$

zároveň ale platí

$$4z^2 \geq 4z(x+y),$$
$$4(x^2 + y^2) \geq 4 \cdot 2xy,$$

což dohromady dává nerovnost

$$5(x^2 + y^2 + z^2) \geq 6(xy + yz + zx).$$

Odtud vidíme, že taková čísla  $x, y, z$  nejsou řešením uvažované nerovnice pro  $\alpha < \frac{6}{5}$ .

### A – III – 3

Protože žádná ze stěn čtyřstěnu  $ABDE$  není tupoúhlý trojúhelník, můžeme předpokládat, že rovina řezu  $\varrho$  není s žádnou jeho stěnou rovnoběžná. Přitom dvě rovnoběžné roviny  $\varrho \parallel \varrho'$ , pokud příslušný pás neobsahuje žádný z vrcholů uvažovaného čtyřstěnu, dávají v řezu podobné útvary, takže bez újmy na obecnosti můžeme dále předpokládat, že rovina řezu  $\varrho$  prochází některým z vrcholů  $A$  nebo  $B$  (vrcholy  $B, D, E$  jsou zaměnitelné).

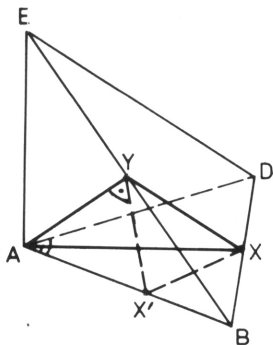
Budeme využívat následujících vlastností kolmého promítání úhlů, jež se snadno odvodí pomocí kosinové věty (obě vlastnosti jsou stručně dokázány v poznámce).

Při promítání do roviny obsahující jen jedno rameno úhlu se tupý úhel zvětší a ostrý úhel se zmenší.

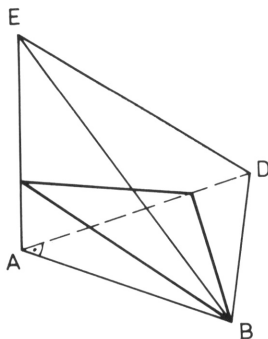
Tupý úhel se při promítání do roviny protínající obě jeho ramena zvětší.

Uvažujme tedy rovinu  $\varrho$  procházející vrcholem  $A$  a protínající podstavu  $BDE$  v úsečce  $XY$  (obr. 21). Protože úhel

$XAB$  je ostrý, je ostrý i úhel  $XAY$ . Bez újmy na obecnosti můžeme zřejmě předpokládat, že  $|AX| \geq |AY|$ . Z uvedených vlastností promítání nyní plyne, že úhel  $AYX$  je tupý, jen když je tupý i úhel  $AYB$ , přičemž  $|\sphericalangle AYB| < \frac{3}{4}\pi$ . Ze spojitosti snadno uvážíme, že pro každé  $\varphi$  z intervalu  $\frac{1}{2}\pi < \varphi < \frac{3}{4}\pi$  existuje rovina  $\varrho$  procházející vrcholem  $A$ , jejíž průnik se čtyřstěnem  $ABDE$  je tupoúhlý trojúhelník s úhlem  $\varphi$ . (Je-li  $Y$  vnitřní bod úsečky  $BE$  a bod  $X'$  uvnitř  $AB$  takový, že  $|\sphericalangle AYX'| = \frac{1}{2}\pi$ , pak pro odpovídající bod  $X$  na  $BD$ , jehož je bod  $X'$  průmětem do roviny  $ABE$ , bude rovněž  $|\sphericalangle AYX| = \frac{1}{2}\pi$ . Pro body  $Z$  uvnitř  $XB$  bude tupý úhel  $AYZ$  nabývat libovolné hodnoty menší než  $|\sphericalangle AYB|$ .)



Obr. 21

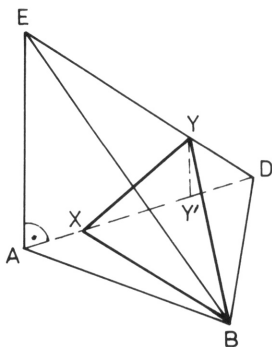


Obr. 22

Uvažujme teď rovinu  $\varrho$  procházející vrcholem  $B$ . Pokud rovina  $\varrho$  protíná obě kratší hrany uvažovaného čtyřstěnu (obr. 22), dostaneme v řezu ostroúhlý trojúhelník, proto-

že průměty uvažovaných úhlů do roviny  $ABD$  jsou vesměs ostré nebo pravé.

Protíná-li rovina  $\varrho$  např. hrany  $AD$  a  $DE$  v bodech  $X$  a  $Y$ , označme  $Y'$  kolmý průmět bodu  $Y$  do roviny  $ABD$  ( $Y'$  leží na hraně  $AD$ ). V každém případě ale je (obr. 23) jak  $\sphericalangle Y'XB < \frac{3}{4}\pi$ , tak i  $\sphericalangle XY'B < \frac{3}{4}\pi$ , takže i případný tupý úhel řezu  $BXY$  je menší než  $\frac{3}{4}\pi$ .



Obr. 23

**Poznámka.** Dokážeme ještě vlastnosti kolmého promítání úhlů použité v předchozím řešení. Podle kosinové věty pro trojúhelníky  $ABC, A'B'C'$  platí (obr. 24)

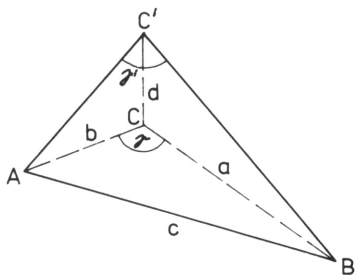
$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma, \\ c^2 + d^2 &= a^2 + d^2 + b^2 - 2b\sqrt{a^2 + d^2} \cos \gamma', \end{aligned}$$

takže

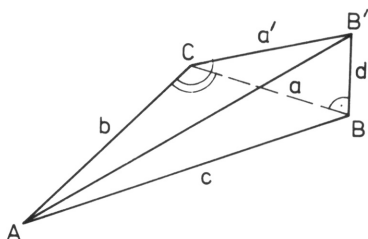
$$a \cos \gamma = \sqrt{a^2 + d^2} \cos \gamma'.$$

Odtud plyne, že

1. je-li  $0 < \gamma < \frac{1}{2}\pi$ , pak  $\cos \gamma > \cos \gamma' > 0$  a  $0 < \gamma < \gamma' < \frac{1}{2}\pi$ ,
2. je-li  $\gamma = \frac{1}{2}\pi$ , pak  $\gamma' = \frac{1}{2}\pi$ ,
3. je-li  $\frac{1}{2}\pi < \gamma < \pi$ , pak  $|\cos \gamma| > |\cos \gamma'|$  a  $\frac{1}{2}\pi < \gamma' < \gamma < \pi$ .



Obr. 24



Obr. 25

Podobně pro situaci na obr. 25 dostaneme

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

a zároveň

$$c^2 = a^2 + d^2 + b^2 + d^2 - 2\sqrt{a^2 + d^2} \sqrt{b^2 + d^2} \cos \gamma',$$

takže

$$ab \cos \gamma = \sqrt{a^2 + d^2} \sqrt{b^2 + d^2} \cos \gamma' - d^2.$$

To znamená, že pro  $\frac{1}{2}\pi < \gamma'$  je

$$-ab \cos \gamma = \sqrt{a^2 + d^2} \sqrt{b^2 + d^2} |\cos \gamma'| + d^2 > ab |\cos \gamma'|,$$

neboli

$$\gamma > \frac{\pi}{2} \quad \text{a} \quad |\cos \gamma| > |\cos \gamma'|,$$

tj.  $\gamma > \gamma'$ .

**Jiné řešení.** Každému trojúhelníkovému řezu uvažovaného čtyřstěnu odpovídá trojboký jehlan. Je-li jeho vrcholem bod  $A$ , je jeho podstavou (řezem) ostroúhlý trojúhelník, protože kolmým průmětem každého jeho úhlu je pravý úhel. Zbývá tedy možnost, že vrcholem odříznutého jehlanu je jeden z vrcholů  $B$ ,  $D$ ,  $E$ . Tento případ vyšetříme obdobně jako v předchozím řešení.

### A – III – 4

Vzhledem k tomu, že uvažovaná nerovnost se nezmění, když místo každého  $x_i$  píšeme  $\frac{x_i}{a}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) pro nějaké kladné  $a$ , můžeme předpokládat, že je  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ .

Pro  $n = 2$  pak bude mít uvažovaná nerovnost tvar

$$x_1 x_2 (1 - k x_1 x_2) \geq 0, \quad \text{tj.} \quad x_1 x_2 \leq \frac{1}{k}$$

(pokud  $x_1 x_2 > 0$ ). A protože pro nezáporná čísla  $x_1, x_2$  taková, že  $x_1 + x_2 = 1$ , platí

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2},$$

je vždy  $x_1 x_2 \leq \frac{1}{4}$  s rovností pro  $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ . Odtud plyne, že je  $k \leq 4$ .

Stejný odhad ovšem dostaneme i pro libovolné  $n \geq 2$ , když položíme  $x_3 = \dots = x_n = 0$ .

Ukážeme teď, že uvažovaná nerovnost platí pro  $k = 4$  a pro libovolné  $n \geq 2$ . Protože

$$x_i x_j \leq \left( \frac{1}{2}(x_i + x_j) \right)^2 \leq \left( \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \right)^2 = \frac{1}{4},$$

je  $1 - 4x_i x_j \geq 0$ , takže je také

$$x_1 x_2 (1 - 4x_1 x_2) + x_2 x_3 (1 - 4x_2 x_3) + \dots + x_n x_1 (1 - 4x_n x_1) \geq 0.$$

A to je nerovnost, která je pro  $k = 4$  s danou nerovností ekvivalentní.

## A – III – 5

Označíme-li  $n$  počet měst v zemi, je tvrzení pro  $n = 2$  zřejmé. Předpokládejme tedy, že uvedené tvrzení platí pro všechna přirozená čísla menší než  $n$ , a uvažujme zemi s  $n$  městy  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . Městu s požadovanou vlastností budeme říkat „hlavní“. Označme jako  $v$  hlavní město měst  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$  a uvažujme množinu  $A$  těch měst, do nichž se dá z  $v$  dojet motorovým vozidlem, a množinu  $B$  měst, do nichž se dá z  $v$  dojet na kole. Navíc můžeme předpokládat, že  $u_n$  nepatří do žádné z množin  $A, B$  (jinak bychom byli hotovi), takže z  $u_n$  do  $v$  vede jednosměrná silnice (bez ztráty obecnosti můžeme předpokládat, že je to např. cesta pro cyklisty).

Označme nyní  $w$  hlavní město množiny  $(A \setminus B) \cup \{u_n\}$ , v níž je nejvýše  $n - 1$  měst. Pokud  $w = u_n$ , jsme hotovi, protože z  $u_n$  se lze dostat i do libovolného města množiny  $B$ . Pokud  $w \neq u_n$  a z  $w$  se lze do  $u_n$  dostat na kole, jsme rovněž hotovi, protože pak je  $w$  hlavní město i všech měst

v B. Pokud ovšem vede z  $w$  do  $u_n$  cesta jen motorovým vozidlem, lze se do  $u_n$  dostat motorovým vozidlem i z města  $v$  (přes  $w$ ), takže  $v$  je hlavní město všech měst  $u_1, u_2, \dots, u_n$ .

**Jiné řešení** (podle V. Búra, 1. ročník GAM, Bratislava). Označíme-li  $n$  počet měst v zemi, jsou případy  $n = 2$  a  $n = 3$  jasné (buď z jednoho města vedou cesty do zbylých dvou, nebo jsou cesty mezi třemi městy uspořádány cyklicky a pak aspoň dvě z nich jsou stejného druhu).

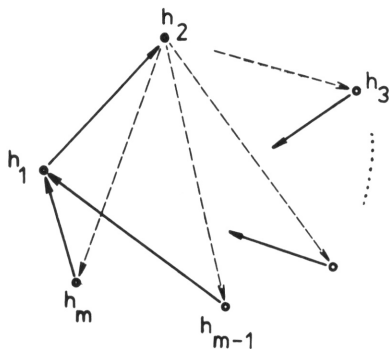
Předpokládejme, že tvrzení úlohy platí pro libovolné  $k \leq n - 1$ , a uvažujme  $n$  měst  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Vynecháme-li město  $m_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), bude mezi zbylými  $n - 1$  městy existovat jedno „hlavní město“  $h_i$ . Pokud pro nějaké dva indexy  $i \neq j$  dostaneme  $h_i = h_j$ , jsme hotovi, protože takové město je hlavním městem všech uvažovaných měst.

Budeme tedy dále předpokládat, že všechna „hlavní“ města  $h_1, h_2, \dots, h_n$  jsou vesměs různá a jsou přitom označena tak, že  $h_2$  je hlavní město, když vynecháme  $h_1$ ,  $h_3$  je hlavní město, když vynecháme  $h_2$ , atd. až nám vyjde, že  $h_1$  je hlavní město, když vynecháme nějaké  $h_m$  ( $3 \leq m \leq n$ ). Dostaneme tak „cyklus“, v němž neexistuje jednosměrná silnice z  $h_i$  do  $h_{i-1}$  (jinak bychom byli hotovi), ale naopak.

Bez újmy na obecnosti můžeme teď předpokládat, že silnice vedoucí z  $h_1$  do  $h_2$  je určena pro cyklisty. Z  $h_2$  do  $h_m$  pak musí vést cesta pro motoristy (jinak by existovala cesta z  $h_1$  do  $h_m$  a byli bychom hotovi) a ze stejného důvodu je existující silnice z  $h_m$  do  $h_1$  určena pro cyklisty (obr. 26). Tuto úvahu nyní zopakujeme (z  $h_2$  do  $h_{m-1}$  musí vést cesta pro motoristy, protože jinak by  $h_m$  bylo hlavním městem, takže z  $h_{m-1}$  do  $h_1$  vede cesta pro cyklisty, atd.) celkem



$(m - 3)$ -krát a zjistíme (pokud jsme nenašli hlavní město již dříve), že  $h_3$  je hlavním městem všech uvažovaných  $n$  měst.

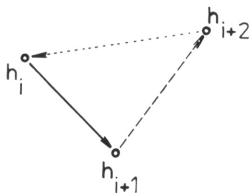


Obr. 26

**Jiné řešení** (podle M. Konečného, 3. ročník G, Brno, kpt. Jaroše). Předpokládejme, že tvrzení platí pro libovolné  $k \leq \leq n - 1$  a uvažujme situaci s  $n$  městy. Stejně jako v předchozím řešení přiřadíme každému městu „hlavní město“ zbylých  $n - 1$  měst (indukční předpoklad). Kdyby toto zobrazení množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$  do množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$  nebylo permutací, pak zřejmě najdeme hlavní město všech  $n$  měst.

Je-li uvedené přiřazení permutací, existuje v něm cyklus  $h_1 \rightarrow h_2 \rightarrow \dots \rightarrow h_m \rightarrow h_1$ , ve kterém je  $h_j$  hlavním městem všech  $n - 1$  měst vyjma  $h_{j-1}$  a v němž tedy vždy existuje jednosměrná silnice z  $h_j$  do  $h_{j+1}$ . Kdyby všechny uvedené silnice byly stejného druhu, je jasné, že libovolné z měst  $h_1, h_2, \dots, h_m$  by bylo hlavní. Můžeme tedy předpokládat, že existují tři města  $h_i, h_{i+1}, h_{i+2}$  (indexy počítáme

mod  $m$ ) taková, že např. z  $h_i$  do  $h_{i+1}$  vede silnice pro cyklisty a z  $h_{i+1}$  do  $h_{i+2}$  pro motoristy (obr. 27). Z  $h_{i+2}$  pak existuje nějaká cesta do  $h_i$  — je-li průjezdná pro cyklisty, je hlavním městem  $h_{i+2}$ , je-li určena pro motoristy, je hlavním městem  $h_{i+1}$ .



Obr. 27

## A – III – 6

Uvažujme  $2k$  bodů  $A_1, A_2, \dots, A_{2k}$  v rovině, z nichž žádné tři neleží v přímce. Pro každou dvojici  $\{i, j\} \in S$  spojíme odpovídající body úsečkou. Pokud takto nedostaneme žádný trojúhelník, budou mít libovolné tři množiny  $M_i, M_j, M_k$  prázdný průnik (jinak by odpovídající body musely být spojeny úsečkami). Můžeme tedy každé dvojici  $\{i, j\} \in S$  přiřadit prvek  $m_{ij} \in M_i \cap M_j$ , který už v žádné jiné z množin  $M_1, M_2, \dots, M_{2k}$  neleží. Sjednocení  $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_{2k}$  tedy obsahuje alespoň tolik prvků co množina  $S$ .

Vezmeme-li nyní za množinu  $S$  množinu těch dvojic  $\{i, j\} \subset \{1, 2, \dots, 2k\}$ , pro něž je součet  $i + j$  lichý, bude mít  $S$  právě  $k^2$  prvků, přičemž odpovídající úsečky nebudou tvořit žádný trojúhelník. Tím je důkaz hotov.

**Jiné řešení** (podle P. Hliněného, 4. ročník GMK, Bílovec).  
Hledaný systém je např. množina

$$S = \{ \{i, j\} : 1 \leq i \leq k, k+1 \leq j \leq 2k \}.$$

V takovém případě jsou množiny  $M_1, M_2, \dots, M_k$  po dvou disjunktní a totéž platí i o množinách  $M_{k+1}, \dots, M_{2k}$ . Přitom každá z množin  $M_1, M_2, \dots, M_k$  má neprázdný průnik s každou z množin  $M_{k+1}, \dots, M_{2k}$ , a protože množiny  $M_{k+1}, \dots, M_{2k}$  jsou navzájem disjunktní, musí být  $|M_i| \geq k$  pro všechna  $1 \leq i \leq k$ . Celkem tedy je

$$\begin{aligned} |M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_{2k}| &\geq |M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k| = \\ &= |M_1| + |M_2| + \dots + |M_k| \geq k \cdot k = k^2. \end{aligned}$$

# Kategorie P

## Texty úloh

### P – I – 1

Napište co nejlepší algoritmus, který vytiskne všechny různé rozklady zadaného přirozeného čísla  $N$  na součty přirozených čísel. Rozklady nepovažujeme za různé, jestliže se liší pouze pořadím sčítanců. Zdůvodněte správnost algoritmu.

Např. pro  $N = 5$  algoritmus vytiskne tyto rozklady (v libovolném pořadí a s libovolným pořadím sčítanců v jednotlivých rozkladech):

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$5 = 2 + 1 + 1 + 1$$

$$5 = 2 + 2 + 1$$

$$5 = 3 + 1 + 1$$

$$5 = 3 + 2$$

$$5 = 4 + 1$$

$$5 = 5$$

## P – I – 2

V rovině je pevně rozmístěno  $n$  bodů označených čísly 1, 2, ...,  $n$ . V zadaném poli  $D[1..n, 1..n]$  jsou uloženy jejich vzájemné vzdálenosti. Hodnota  $D[i, j]$  udává vzdálenost bodu  $i$  od bodu  $j$ . Dále je dáno číslo  $t$ . Zapište algoritmus, který zjišťuje, zda lze uvažovaných  $n$  bodů rozdělit do dvou skupin tak, aby vzájemné vzdálenosti všech bodů patřících do stejné skupiny byly menší než  $t$ . Pokud takové rozdělení bodů je možné, algoritmus vypíše jedno libovolné přípustné rozdělení. Zdůvodněte správnost algoritmu.

## P – I – 3

Je dán následující program:

PASCAL

**var**  $A, B, C, D, E, F$ : integer;

$I, N$ : integer;

**begin**

  read( $N$ );

$A := -1$ ;

$B := 0$ ;

$D := 0$ ;

$E := 0$ ;

**for**  $I := 1$  **to**  $N$  **do**

**begin**

$A := A + 2$ ;

$B := B + A$ ;

$C := B * I$ ;

$D := D + C$ ;

BASIC

10 INPUT N

20 LET A = -1

30 LET B = 0

40 LET D = 0

50 LET E = 0

60 FOR I = 1 TO N

70 LET A = A + 2

80 LET B = B + A

90 LET C = B \* I

100 LET D = D + C

|                 |                   |
|-----------------|-------------------|
| $E := E + I;$   | 110 LET E = E + I |
| $F := E * E;$   | 120 LET F = E * E |
| <b>end;</b>     | 130 NEXT I        |
| writeln( $D$ ); | 140 PRINT D       |
| writeln( $F$ ); | 150 PRINT F       |

**end.**

Vstupem programu je jedno celé číslo (hodnota proměnné  $N$ ).

a) Odvoďte a dokažte vztah mezi hodnotami proměnných  $D$  a  $F$  po ukončení výpočtu.

b) Napište program, který bude počítat výsledné hodnoty proměnných  $D$  a  $F$  v závislosti na vstupní hodnotě proměnné  $N$  co nejrychleji. Rychlost výpočtu oběma způsoby (tj. zde uvedeným způsobem a vaším vlastním programem) porovnejte z hlediska počtu provedených aritmetických operací.

**Poznámka.** Proměnné  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $E$  a  $I$  jsou pomocné, na jejich hodnotách po ukončení výpočtu nezáleží.

## P – I – 4

### Zásobníkový počítač

Nejprve se seznámíme se zásobníkovým počítačem a s jeho programovacím jazykem. Zásobníkový počítač pracuje výhradně s celými čísly. Oproti běžným počítačům má značná omezení v možnostech práce s paměťovými buňkami. Má sice paměť dostatečné velikosti, ale celá jeho paměť je organizována zásobníkovým způsobem. Zásobník má neomezenou hloubku, ukládají se do něj celá čísla. Čísla se v zásobníku uchovávají v tom pořadí, v jakém do něj byla vložena. To

číslo, které bylo do zásobníku vloženo jako poslední, je vždy na vrcholu zásobníku. Pouze číslo nacházející se na vrcholu zásobníku je v danou chvíli dostupné pro čtení nebo smazání. Po smazání čísla z vrcholu zásobníku se novým vrcholem zásobníku stává číslo uložené pod ním. Na začátku práce je zásobník prázdný. Kromě zásobníkové paměti má počítač k dispozici ještě jeden pracovní registr, do něhož je možné uložit jedno celé číslo. V registru lze provádět základní celočíselné aritmetické operace, prostřednictvím registru může počítač číst čísla ze vstupu a zapisovat čísla na výstup.

### Jednoduché příkazy

Základním operacím zásobníkového počítače odpovídají jednoduché příkazy jeho programovacího jazyka:

|                |                                                                                                                                                             |
|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| IN             | ze vstupu je přečteno jedno číslo a je uloženo do pracovního registru (pokud při provedení příkazu IN již na vstupu žádné číslo není, dojde k běhové chybě) |
| OUT            | číslo z pracovního registru je zapsáno na výstup, obsah registru zůstane nezměněn                                                                           |
| CONST <i>n</i> | do pracovního registru se uloží číslo „ <i>n</i> “, které je v instrukci CONST uvedeno jako přímý operand (jedná se o jediný příkaz s přímým operandem)     |
| PUSH           | číslo z pracovního registru je uloženo na zásobník (stane se novým vrcholem zásobníku), obsah registru zůstane nezměněn                                     |
| POP            | odstraní se jedno číslo ze zásobníku (číslo z vrcholu zásobníku); je-li při provedení příkazu POP zásobník prázdný, dojde k běhové chybě                    |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                    |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| TOP  | číslo nacházející se na vrcholu zásobníku je vloženo do pracovního registru, obsah zásobníku zůstane nezměněn (je-li při provedení příkazu TOP zásobník prázdný, dojde k běhové chybě)                                                             |
| EXCH | provede se vzájemná výměna čísel uložených v pracovním registru a na vrcholu zásobníku (je-li při provedení příkazu EXCH zásobník prázdný, dojde k běhové chybě)                                                                                   |
| ADD  | aritmetická operace sčítání: k číslu uloženému v pracovním registru se přičte číslo z vrcholu zásobníku, výsledný součet se uloží do registru, obsah zásobníku zůstane nezměněn                                                                    |
| SUB  | aritmetická operace odčítání: od čísla uloženého v pracovním registru se odečte číslo z vrcholu zásobníku, výsledný rozdíl se uloží do registru, obsah zásobníku zůstane nezměněn                                                                  |
| MUL  | aritmetická operace násobení: číslo uložené v pracovním registru se vynásobí číslem z vrcholu zásobníku, výsledný součin se uloží do registru, obsah zásobníku zůstane nezměněn                                                                    |
| DIV  | aritmetická operace celočíselné dělení: číslo uložené v pracovním registru se celočíselně vydělí číslem z vrcholu zásobníku, výsledný celočíselný podíl (tj. celá část z podílu obou čísel) se uloží do registru, obsah zásobníku zůstane nezměněn |

### Podmínky

Zásobníkový počítač dále může provádět testy, kterým odpovídají jednoduché podmínky jeho programovacího jazyka a jejich negace. Tyto podmínky lze použít pouze na



místě podmínky v některém složeném příkazu. Existují následující jednoduché podmínky:

**ZERO** číslo uložené v pracovním registru je rovno nule  
**POS** číslo uložené v pracovním registru je kladné  
**NEG** číslo uložené v pracovním registru je záporné  
**EMPTY** zásobník je prázdný  
**EOF** na vstupu již není žádné číslo

Negaci jednoduché podmínky zapisujeme klíčovým slovem **not** před jménem jednoduché podmínky. Tedy např. **not ZERO** znamená, že číslo v registru je nenulové.

### Složené příkazy

Program v programovacím jazyce zásobníkového počítače je tvořen posloupností příkazů oddělených mezerami. Každý příkaz je buď jednoduchý (jedenáct výše uvedených základních operací), nebo složený. Složené příkazy se vytvářejí pomocí těchto řídicích konstrukcí:

**if** ⟨podmínka⟩ **then** ⟨příkaz⟩      neúplný podmíněný příkaz

**if** ⟨podmínka⟩ **then** ⟨příkaz 1⟩  
                                         **else** ⟨příkaz 2⟩      úplný podmíněný příkaz

**while** ⟨podmínka⟩ **do** ⟨příkaz⟩      while-cyklus

**begin**

    ⟨příkaz 1⟩

    ⟨příkaz 2⟩

    ...

**end**

příkaz složený

z posloupnosti příkazů

Význam podmíněného příkazu, cyklu i příkazu složeného z posloupnosti příkazů je obdobný jako význam stejnojmenných

ných příkazů v Pascalu. Na místě příkazu může být uveden jednoduchý příkaz nebo opět některý složený příkaz.

**Poznámka.** Řešitelé, kteří neznají řídicí konstrukce programovacího jazyka Pascal a nemají možnost se s nimi seznámit, mohou místo uvedených složených příkazů použít číslování řádků programu a příkazů

GOTO ⟨číslo řádku⟩

a

IF ⟨podmínka⟩ THEN ⟨příkaz⟩

kde na místě příkazu může stát jednoduchý příkaz nebo příkaz GOTO ⟨číslo řádku⟩ (obdobně jako v jazyce Basic).

### Příklad

Způsob programování zásobníkového počítače ukážeme na následujícím příkladu. Naším úkolem bude napsat program, který ze vstupu přečte posloupnost čísel a určí, zda tato posloupnost obsahuje sudý počet kladných čísel menších než 10. Pokud ano, program vytiskne číslo 1, jinak vytiskne 0. Uvedeme zde program, který není nejrychlejším možným programem řešícím zadanou úlohu, ale který dobře ukazuje, jak se zásobníkový počítač programuje. Do závorek budeme zapisovat komentáře vysvětlující způsob práce programu.

**while not EOF do**

**begin**

IN (přečtení dalšího čísla)

**if POS then**

**begin** (číslo je kladné)

PUSH (číslo se uloží do zásobníku)

CONST 10

```

SUB                                (rozdíl „10 – číslo ze vstupu“)
if not POS then POP
                                (není-li číslo < 10, smaže se)

end
end
(nyní jsou ze vstupu přečtena všechna čísla a v zásobníku
jsou uložena ta z nich, která jsou kladná a zároveň menší
než 10)
CONST 1
while not EMPTY do
                                (čísla jsou vždy po dvou vybírána
                                ze zásobníku)

begin
POP
if EMPTY then CONST 0
                                (lichý počet čísel v zásobníku)
                                else POP
end
(zásobník je vyprázdněn, v pracovním registru je připravena
správná výsledná hodnota)
OUT                                (tisk výsledku)

```

### Soutěžní úloha

A. Je zadána posloupnost navzájem různých celých čísel tvořená alespoň třemi čísly. Rozhodněte, zda je možné pomocí zásobníkového počítače nalézt a vytisknout

- největší ze zadaných čísel,
- dvě největší ze zadaných čísel,
- tři největší ze zadaných čísel.

Pro každou z úloh a), b), c): Je-li to možné, napište pro-

gram v programovacím jazyce zásobníkového počítače, který tuto úlohu řeší a který pracuje co možná nejrychleji. Domníváte-li se, že to není možné, své stanovisko vysvětlete a zdůvodněte.

B. Je zadána posloupnost obsahující  $2n + 1$  celých čísel pro nějaké  $n$  celé, nezáporné. Jediným nulovým prvkem této posloupnosti je číslo s pořadím  $n + 1$  (tzn. prostřední prvek posloupnosti). Zjistěte pomocí zásobníkového počítače, zda je zadaná posloupnost symetrická, tzn. stejná při čtení zepředu i odzadu. Například posloupnost 2 8 -1 0 -1 8 2 je symetrická, zatímco posloupnost 3 0 5 symetrická není. Odpověď vytiskněte ve tvaru: 1 — je symetrická  
0 — není symetrická.

## P – II – 1

Je dáno pole  $A[1 \dots N, 1 \dots N]$  obsahující  $N^2$  navzájem různých celých kladných čísel. Navrhněte co nejrychlejší algoritmus, který vytiskne  $N$  největších čísel uložených v poli  $A$ . Původní obsah pole  $A$  nemusí být po ukončení výpočtu zachován. Zdůvodněte správnost navrženého algoritmu.

**Poznámka.** Optimální algoritmus řeší zadanou úlohu provedením nejvýše  $p \cdot N^2$  operací pro nějaké pevné číslo  $p$  (tzn. při vyjádření pomocí parametru  $N$  má kvadratickou časovou složitost).

## P – II – 2

Je dána konečná posloupnost celých čísel délky  $N$ . Prvky této posloupnosti označíme po řadě  $X(1), X(2), \dots, X(N)$ .

Podposloupností délky  $k$  vybranou ze zadané posloupnosti budeme rozumět libovolnou konečnou posloupnost tvaru  $X(i_1), X(i_2), \dots, X(i_k)$ , kde  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N$  (tzn. ze zadané posloupnosti je vybráno libovolných  $k$  čísel, přičemž je zachováno jejich pořadí).

Navrhňte co nejlepší algoritmus, který určí délku nejdelší rostoucí podposloupnosti vybrané ze zadané posloupnosti. To znamená, že určí maximální  $k$  takové, že  $X(i_1) < X(i_2) < \dots < X(i_k)$  pro  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N$ . Zdůvodněte správnost algoritmu.

### Příklad

Pro posloupnost 4 2 7 6 4 5 3 9 8 5 9 je  $k = 5$ , neboť maximální vybraná rostoucí podposloupnost 2 4 5 8 9 má délku 5.

## P – II – 3

Je dán následující program:

PASCAL

```
const N = 100;
var A: array [1..N] of integer;
    J, K, L, R, X: integer;
begin
  for J := 1 to N do read(A[J]);
  L := 2;
  R := N;
  K := N;
  repeat
    for J := R downto L do
```

```

    if  $A[J - 1] < A[J]$  then
        begin
             $X := A[J - 1]$ ;  $A[J - 1] := A[J]$ ;  $A[J] := X$ ;
             $K := J$ 
        end;
     $L := K + 1$ 
    for  $J := L$  to  $R$  do
        if  $A[J - 1] < A[J]$  then
            begin
                 $X := A[J - 1]$ ;  $A[J - 1] := A[J]$ ;  $A[J] := X$ ;
                 $K := J$ 
            end;
         $R := K - 1$ 
    until  $L > R$ ;
    for  $J := 1$  to  $N$  do writeln( $A[J]$ )
end.

```

## BASIC

```

10 LET N = 100
20 DIM A(N)
30 FOR J = 1 TO N
40 INPUT A(J)
50 NEXT J
60 LET L = 2
70 LET R = N
80 LET K = N
90 FOR J = R TO L STEP -1
100 IF A(J-1) >= A(J) THEN GOTO 150
110 LET X = A(J-1)
120 LET A(J-1) = A(J)

```

```

130 LET A(J) = X
140 LET K = J
150 NEXT J
160 LET L = K+1
170 FOR J = L TO R
180 IF A(J-1) >= A(J) THEN GOTO 230
190 LET X = A(J-1)
200 LET A(J-1) = A(J)
210 LET A(J) = X
220 LET K = J
230 NEXT J
240 LET R = K-1
250 IF L <= R THEN GOTO 90
260 FOR J = 1 TO N
270 PRINT A(J)
280 NEXT J

```

Vstupem programu je 100 celých čísel.

a) Zjistěte a zdůvodněte, co je výsledkem práce programu.

b) Proveďte alespoň přibližný horní odhad rychlosti výpočtu uvedeného programu. Uvažujte přitom pouze operace porovnání dvou čísel. To znamená, že vaším úkolem je zjistit, kolik porovnání bude při výpočtu maximálně provedeno. Úlohu řešte obecně a výsledek vyjádřete v závislosti na hodnotě konstanty  $N$ .

## P – II – 4

Studijní text k této úloze je shodný s textem pro soutěžní úlohu P-I-4 v domácím kole.

## Soutěžní úloha

Napište co nejlepší program v programovacím jazyce zásobníkového počítače, který přečte zadanou posloupnost čísel a určí počet kladných sudých čísel a jejich součet.

### P – III – 1

Je dáno pole celých čísel  $S[1..N]$  a funkce  $F$ , která každému celému číslu přiřazuje celočíselnou hodnotu z intervalu od 1 do  $K$  (včetně obou mezí). Přitom hodnota  $K$  je podstatně menší než počet prvků  $N$  uložených v poli  $S$ . Navrhněte algoritmus, který přerovná prvky pole  $S$  tak, aby byly uspořádány vzestupně podle hodnot, které jim přiřazuje funkce  $F$ . Po přerovnání tedy musí platit pro každou dvojici prvků  $S[i]$ ,  $S[j]$ , kde  $1 \leq i < j \leq N$ , že  $F(S[i]) \leq F(S[j])$ . V algoritmu nesmíte použít žádnou další datovou strukturu o rozsahu úměrném velikosti  $N$ , je povoleno užít nanejvýš takový počet pomocných paměťových buněk, který je úměrný hodnotě  $K$ . Existuje algoritmus s lineární časovou složitostí vzhledem k velikosti  $N$  zadaného pole, tzn. algoritmus, který vykoná požadované přerovnání provedením nejvýše  $p \cdot N$  operací pro nějaké pevné číslo  $p$ . Zdůvodněte správnost navrženého algoritmu.

### P – III – 2

Funkce  $V$  dvou proměnných je definována pro všechna celá nezáporná čísla následujícím rekurzivním předpisem:

$$\begin{aligned} V(0, y) &= y + 1 && \text{pro } y \geq 0 \\ V(x, 0) &= V(x - 1, x - 1) && \text{pro } x > 0 \\ V(x, y) &= V(x - 1, y + 1) + V(x, y - 1) && \text{pro } x > 0, y > 0 \end{aligned}$$



a) Určete minimální počet různých funkčních hodnot funkce  $V$ , které je třeba vypočítat, máme-li určit hodnotu  $V(m, n)$  pro daná čísla  $m, n$ . Výsledek vyjádřete v závislosti na hodnotách  $m, n$ .

b) Napište co nejlepší algoritmus pro výpočet hodnoty  $V(m, n)$  a zdůvodněte jeho správnost. Předpokládejte, že nezáporná celá čísla  $m, n$  zadaná na vstupu jsou dostatečně malá a že tedy nenastane situace, že by hodnota  $V(m, n)$  překročila maximální hodnotu zobrazitelnou v počítači při běžné práci s celočíselnou aritmetikou.

c) Jak se změní výsledek úlohy a), pokud pro  $x > 0, y > 0$  bude hodnota funkce  $V$  definována předpisem

$$V(x, y) = V(x - 1, y + 1) + V(x - 1, y - 1)?$$

### P – III – 3

Nejprve si zavedeme několik základních pojmů. Řekneme, že  $N$ -úhelník  $A(1)A(2) \dots A(N)$  je konvexní, jestliže všechny jeho vnitřní úhly jsou menší než 180 stupňů. Diagonálou konvexního  $N$ -úhelníku budeme rozumět každou úsečku spojující dva různé vrcholy  $N$ -úhelníku, které spolu nesousedí na obvodu (tj. nejsou spojené hranou  $N$ -úhelníku). Z každého vrcholu  $N$ -úhelníku tedy vychází celkem  $N - 3$  diagonál. Triangulací konvexního  $N$ -úhelníku nazveme každý takový soubor jeho navzájem se neprotínajících diagonál, které rozdělují plochu  $N$ -úhelníku na samé trojúhelníky. O součtu délek všech diagonál, které tvoří triangulaci konvexního  $N$ -úhelníku, budeme hovořit jako o velikosti triangulace.

## Zadání úlohy

Konvexní  $N$ -úhelník  $A(1)A(2)\dots A(N)$  je zadán kartézskými souřadnicemi svých vrcholů v rovině. Navrhnete co nejlepší algoritmus, který určí minimální velikost jeho triangulace. Zdůvodněte správnost navrženého algoritmu.

## P – III – 4

Studijní text k této úloze je shodný s textem pro soutěžní úlohu P–I–4 v domácím kole.

### Soutěžní úloha

a) Je zadána posloupnost celých čísel následujícího speciálního tvaru. Nejprve obsahuje několik čísel 10, potom několik čísel 20 a nakonec několik čísel 30. Přitom od každé z uvedených tří hodnot obsahuje alespoň jedno číslo.

Napište co nejlepší program v programovacím jazyce zásobníkového počítače, který zjistí, zda počet výskytů čísla 10 v zadané posloupnosti je roven počtu výskytů čísla 20 nebo počtu výskytů čísla 30 nebo zda počet výskytů čísla 20 je stejný jako počet výskytů čísla 30. Jestliže některá z uvedených tří rovností platí, tzn. obsahuje-li zadaná posloupnost shodný počet čísel alespoň dvou hodnot, program vypíše číslo 1, jinak je výsledkem 0.

Můžete předpokládat, že vstupní údaje jsou uvedeny správně podle zadání úlohy. Program tedy nemusí kontrolovat správnost zadané vstupní posloupnosti čísel.

b) Řešte tutéž úlohu bez použití příkazů SUB, MUL, DIV.

Úlohu je možné řešit různými způsoby. Ukážeme si zde, jak lze řešení elegantně vysvětlit a zapsat pomocí rekurze.

Rozklady zadaného čísla  $N$  budeme vytvářet postupně po krocích. V každém kroku prodloužíme již vytvořenou část rozkladu o jednoho dalšího sčítance. Abychom zbytečně nevytvářeli rozklady lišící se pouze pořadím sčítanců (takové rozklady podle zadání úlohy nepovažujeme za různé), zvolíme si pevné uspořádání sčítanců v rozkladu podle velikosti. Všechny rozklady budeme vytvářet tak, aby posloupnost sčítanců byla neklesající. Pro usnadnění výkladu budeme nadále předpokládat, že jednotlivé sčítance vytvořeného rozkladu ukládáme do pole  $A[1..N]$  a že  $P$  udává počet členů již vytvořené části rozkladu. Neustále tedy platí nerovnost  $A[1] \leq A[2] \leq \dots \leq A[P]$ .

Popíšeme nyní jeden krok našeho algoritmu. Předpokládejme, že již máme prvních  $P$  členů rozkladu zadaného čísla  $N$ ,  $P \geq 0$ ,  $A[1] \leq A[2] \leq \dots \leq A[P]$ . K rozložení ještě zbývá taková hodnota  $M$ , že

$$A[1] + A[2] + \dots + A[P] + M = N.$$

Chceme prodloužit vytvářený rozklad o jednoho sčítance, tj. o člen  $A[P+1]$ . Uvažujme, jakou hodnotu  $K$  může mít tento další sčítanec. Vzhledem k zavedenému uspořádání sčítanců v rozkladu podle velikosti musí být  $K \geq A[P]$ . Položíme nejprve  $K = A[P]$ . Musíme rozlišit dva případy. Jestliže zbytek  $M$  již není možné rozložit ani na dva sčítance velké

alespoň jako  $K$ , celá zbývající hodnota  $M$  se musí použít jako další sčítanec a rozklad je tím vytvořen. V opačném případě se další výpočet rozkladu rozvětví do dvou cest podle toho, zda se ve vytvářeném rozkladu použije nebo nepoužije další sčítanec o hodnotě  $K$ . Obě tyto varianty musíme zpracovat. Pokud se použije, bude  $A[P+1] = K$  a v dalším kroku budeme stejným způsobem vyšetřovat situaci s již vytvořeným úsekem rozkladu délky  $P+1$ . Jestliže se další sčítanec hodnoty  $K$  v rozkladu nepoužije, budeme stejným způsobem vyšetřovat situaci s nezměněným již vytvořeným úsekem rozkladu délky  $P$ , ale s hodnotou  $K$  zvětšenou o 1.

Uvedený postup zapíšeme v programovacím jazyce Pascal snadno s použitím rekurzivní procedury  $R$ . Užití rekurze je zde vhodné, neboť odpovídá charakteru našeho algoritmu. Není ovšem nezbytné, algoritmus by bylo možné naprogramovat bez užití rekurze s jedním pomocným polem.

**program** *ROZKLAD* (input, output);

**const**  $MAX = 50$ ;                      {maximální vstupní hodnota  $N$ }

**var**  $A$ : **array**[1.. $MAX$ ] **of** integer;  
                                             {ukládání rozkladů}  
 $N$ : integer;                              {rozkládané číslo}

**procedure**  $R$  ( $P$ ,  $K$ ,  $M$ : integer);

  { $P$  — počet členů rozkladu uložených v poli  $A$ ,  
    $K$  — uvažovaná hodnota dalšího sčítance,  
    $M$  — hodnota, kterou je ještě třeba rozložit;  
   invariant:  $A[1] + A[2] + \dots + A[P] + M = N$   
               &  $A[1] \leq A[2] \leq \dots \leq A[P] \leq K$



Algoritmus řeší úlohu postupným „obarvováním“ zadáných bodů. Na začátku výpočtu mají všechny body barvu 0 (nejsou obarveny). Během výpočtu každému z nich přiřadíme barvu 1 nebo barvu 2 podle toho, do které skupiny bude patřit. Existuje-li nějaké rozdělení bodů do dvou skupin podle zadání úlohy, budou po ukončení výpočtu všechny body obarveny a vzájemná vzdálenost libovolné dvojice bodů stejné barvy bude menší než  $t$ . Obarvení tedy bude udávat požadované rozdělení bodů do dvou skupin (jedno z možných, pokud existuje více různých takových rozdělení).

Popíšeme nyní postup obarvování. Začneme tím, že zvolíme jeden libovolný bod  $B$  a obarvíme ho na 1. Nyní projdeme všechny body, jejichž vzdálenost od  $B$  je větší nebo rovna  $t$ . Tyto body nesmějí být ve stejné skupině s bodem  $B$  a musí tedy mít opačnou barvu. Obarvíme je proto všechny na 2 a k bodu  $B$  si poznamenejme, že je „vyřešen“ (tj. je zajištěno, že nebude ve stejné skupině s nějakým bodem, který má od něj vzdálenost větší nebo rovnu  $t$ ).

Obecný krok algoritmu vypadá následovně. Část bodů je již obarvena, z nich některé jsou vyřešeny. Vybereme libovolný obarvený bod, který dosud není vyřešen (opět ho pracovníčně označíme  $B$ ). Pokud jsou všechny obarvené body vyřešeny, zvolíme za  $B$  libovolný dosud neobarvený bod a obarvíme ho třeba na 1 (zde na volbě barvy nezáleží, již vyřešené body si obarvení žádného dalšího bodu nevynucují a vlastně začínáme řešit úlohu od začátku se zbylými body). Neexistuje-li již žádný neobarvený bod, algoritmus

končí. Po zvolení bodu  $B$  projdeme všechny body, které mají od bodu  $B$  vzdálenost větší nebo rovnu  $t$ , a kontrolujeme jejich obarvení. Pokud takový bod není dosud obarven, přiřadíme mu opačnou barvu, než má  $B$  (nesmí být s bodem  $B$  ve stejné skupině). Jestliže již takový bod má opačnou barvu než  $B$ , je vše v pořádku a pokračujeme ve výpočtu. Pokud ovšem má barvu stejnou jako bod  $B$ , došlo k neřešitelnému konfliktu, stanoveným podmínkám obarvení nelze vyhovět. Požadované rozdělení bodů tedy neexistuje a algoritmus předčasně ukončí svoji práci. Nedošlo-li k tomuto předčasnému ukončení, označíme bod  $B$  za vyřešený. Celý postup se opakuje tak dlouho, dokud existuje nějaký nevyřešený bod.

Pro programovou realizaci algoritmu zavedeme dvě pracovní pole. V poli  $B[1 \dots n]$  je uložena barva každého z bodů. Evidenci vyřešených a nevyřešených bodů provedeme jiným způsobem, abychom činnost algoritmu urychlili (abychom si ušetřili práci s prohledáváním pole při výběru nějakého dosud nevyřešeného bodu). Pole  $S[1 \dots n]$  budeme proto používat jako zásobník, v němž budou uložena čísla těch vrcholů, které jsou obarveny a nejsou dosud vyřešeny.

**program** *SKUPINY* (input, output);

**const**  $MAX = 100$ ; {maximální počet bodů}

**var**  $D$ : **array**[ $1 \dots MAX, 1 \dots MAX$ ] **of** real;

{vzdálenosti bodů}

$B$ : **array**[ $1 \dots MAX$ ] **of**  $0 \dots 2$ ; {obarvení bodů}

$S$ : **array**[ $1 \dots MAX$ ] **of**  $1 \dots MAX$ ;

{zásobník nevyřešených}

$SP$ : integer; {ukazatel do zásobníku}  
 $N$ : integer; {počet bodů}  
 $T$ : real; {mezí vzdálenost bodů}  
 $POC$ : integer; {počet obarvených bodů}  
 $I, J$ : integer; {pomocné proměnné}

**begin**

{Načtení vstupních údajů v pořadí  $N, D, T$ :}

read( $N$ );

**for**  $I := 1$  **to**  $N$  **do**

**for**  $J := 1$  **to**  $N$  **do** read( $D[I, J]$ );

read( $T$ );

{Inicializace proměnných — obarvení prvního bodu:}

$SP := 1$ ;

$S[1] := 1$ ;

$B[1] := 1$ ;

**for**  $I := 2$  **to**  $N$  **do**  $B[I] := 0$ ;

$POC := 1$ ;

{Vlastní výpočet:}

**repeat**

**while**  $SP <> 0$  **do**

**begin** {existuje obarvený nevyřešený bod}

$I := S[SP]$ ; {vezmi jeden takový bod  $\rightarrow I$ }

$SP := SP - 1$ ;

**for**  $J := 1$  **to**  $N$  **do** {vyřešení situace v bodě  $I$ :}

**if**  $D[I, J] >= T$  **then**

                { $J$  musí mít jinou barvu než  $I$ !}

**if**  $B[J] = 0$  **then**

**begin**



```

     $B[J] := 3 - B[I];$  {obarvení bodu  $J$ }
     $POC := POC + 1;$ 
     $SP := SP + 1;$ 
     $S[SP] := J$ 
    end
  else if  $B[J] = B[I]$  then
    begin
       $SP := 0;$       {konflikt v obarvení bodů  $I$ ,
                        $J \rightarrow$  umělé ukončení výpočtu}
       $POC := N + 1$  {zvláštní nastavení pro označení
                     konfliktu — využívá se v závěru}
    end
  end;
if  $POC < N$  then
  begin
    {existuje neobarvený bod}
     $I := 1;$ 
    while  $B[I] > 0$  do  $I := I + 1;$ 
     $B[I] := 1;$       {vybereme jeden takový a obarvíme}
     $POC := POC + 1;$ 
     $SP := 1;$ 
     $S[1] := I$ 
  end
until  $(POC \geq N)$  and  $(SP = 0);$ 

{Výpis výsledků algoritmu:}
if  $POC = N$  then
  begin
    writeln('Rozdeleni bodu do skupin:');
    write('1. skupina:');
    for  $I := 1$  to  $N$  do

```

```

    if  $B[I] = 1$  then write( $I : 4$ );
    writeln;
    write('2. skupina:');
    for  $I := 1$  to  $N$  do
        if  $B[I] = 2$  then write( $I : 4$ );
        writeln
    end
else {tzn.  $POC = N + 1$ }
    writeln('Rozdeleni bodu neni mozne!')
end.

```

Správnost našeho algoritmu vyplývá z výše uvedeného rozboru. Postupným obarvováním bodů je zajištěno, že body mající vzájemnou vzdálenost větší než  $t$  se nemohou dostat do stejné skupiny. Přitom bod je obarven (a tím zařazen do jedné z vytvářených skupin) jedině tehdy, je-li to vynuceno jeho vzdáleností od nějakého jiného bodu již zařazeného do některé ze skupin, popř. tehdy, jsou-li všechny požadavky uspokojeny a přitom ještě zbývají neobarvené body (potom barvu jednoho dalšího bodu lze zvolit libovolně).

Výpočet podle uvedeného algoritmu je konečný, neboť v každém kroku je právě jeden z bodů označen jako vyřešený (v programu je odstraněn ze zásobníku  $S$ ) a celý výpočet končí nejpozději po vyřešení všech bodů. Vykoná se tedy nejvýše  $N$  kroků výpočtu, kde  $N$  je pevně zadaný počet bodů.

Algoritmus má kvadratickou časovou složitost. V každém z  $N$  kroků výpočtu je vyřešen jeden bod. Přitom vyřešení každého bodu vyžaduje vyhodnotit jeho vzdálenost od

všech ostatních bodů (s případnými dalšími akcemi konstantní složitosti, jako je obarvování bodů apod.). V každém kroku se dále provádí výběr dalšího bodu ke zpracování. Tento výběr má ovšem také nejvýše lineární časovou složitost (v programu: hledání prvního neobarveného bodu, je-li zásobník prázdný). Celkově je tedy třeba provést maximálně počet operací úměrný hodnotě  $N^2$ .

## P – I – 3

a) Nejprve ukážeme, jakých hodnot nabývají během výpočtu jednotlivé proměnné  $A, B, C, D, E, F$ . Vyjádříme hodnoty těchto proměnných po  $K$  průchodech **for**-cyklem v programu.

– Hodnota proměnné  $A$  se zvyšuje od  $-1$  po  $2$ . Proměnná  $A$  tedy nabývá postupně hodnot  $1, 3, 5, \dots$ , a po  $K$  průchodech cyklu má hodnotu  $2K - 1$ .

– V proměnné  $B$  se sčítají všechny dosud vypočtené hodnoty proměnné  $A$ . Po  $K$  průchodech má tedy hodnotu

$$\sum_{j=1}^K (2j - 1) = 2 * \sum_{j=1}^K j - \sum_{j=1}^K 1 = 2 * \frac{K * (K + 1)}{2} - K = K^2.$$

– Hodnota proměnné  $C$  se v každém kroku vytváří nově (bez ohledu na svou předchozí hodnotu) jako součin hodnot proměnné  $B$  a parametru cyklu  $I$ . Tedy po  $K$ -tém průchodu bude mít  $C$  hodnotu  $K^2 * K = K^3$ .

– V proměnné  $D$  se sčítají všechny dosud vypočtené hodnoty proměnné  $C$ . Po  $K$  průchodech má tedy hodnotu

$$\sum_{j=1}^K j^3.$$

– V proměnné  $E$  se počítá součet všech hodnot parametru cyklu  $I$ . Po  $K$  průchozech cyklem má proto  $E$  hodnotu

$$\sum_{j=1}^K j = \frac{K * (K + 1)}{2}.$$

– Hodnota proměnné  $F$  se v každém kroku výpočtu počítá nově jako kvadrát hodnoty proměnné  $E$ . Po  $K$  průchozech nabude  $F$  hodnoty

$$\frac{K^2 * (K + 1)^2}{4}.$$

Po ukončení výpočtu, tzn. po  $N$  průchozech **for**-cyklem v programu, tedy proměnná  $D$  bude mít hodnotu  $\sum_{j=1}^N j^3$  a proměnná  $F$  hodnotu

$$\frac{N^2 * (N + 1)^2}{4}.$$

Ukážeme, že tyto hodnoty se sobě rovnají. Důkaz rovnosti provedeme matematickou indukcí:

1. pro  $N = 1$  rovnost zřejmě platí,
2. nechť platí dokazovaná rovnost pro  $N = x$ ; ukážeme, že platí i pro  $N = x + 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{x+1} j^3 &= \sum_{j=1}^x j^3 + (x + 1)^3 = \begin{array}{l} \text{podle} \\ \text{indukčního} \\ \text{předpokladu} \end{array} = \\ &= \frac{x^2 * (x + 1)^2}{4} + (x + 1)^3 = \\ &= \frac{(x + 1)^2 * (x^2 + 4x + 4)}{4} = \frac{(x + 1)^2 * (x + 2)^2}{4} \end{aligned}$$

Tedy i pro  $N = x + 1$  dokazovaná rovnost skutečně platí. Tím je celé tvrzení dokázáno.

Závěr: Po ukončení výpočtu mají obě proměnné  $D$  a  $F$  stejnou výslednou hodnotu, a to

$$\frac{N^2 * (N + 1)^2}{4}.$$

b) Program počítající výsledné hodnoty proměnných  $D$  a  $F$  co nejrychlejším způsobem využívá výsledku úlohy a):

```
var  $D, F, N$ : integer;
```

```
begin
```

```
  read( $N$ );
```

```
   $D := N * (N + 1)$ ;
```

```
   $D := (D * D) \text{ div } 4$ ;
```

```
   $F := D$ ;
```

```
  writeln( $D$ );
```

```
  writeln( $F$ )
```

```
end.
```

Zbývá porovnat rychlost výpočtu programu uvedeného v zadání úlohy a našeho zrychleného. Podle původního programu se provádělo  $N$  průchodů **for**-cyklem a při každém průchodu 6 aritmetických operací. Program tedy pracoval v lineárním čase (měřeno v závislosti na vstupní hodnotě proměnné  $N$ ) a prováděl celkem  $6N$  operací. Náš nový program dosáhne zcela stejných výsledků výrazně rychleji. Pracuje totiž v konstantním čase bez ohledu na vstupní hodnotu  $N$  a provádí celkem pouze 4 aritmetické operace.

A. a) Nalezení největšího ze zadaných čísel je snadné. Úlohu řeší následující jednoduchý program. Během výpočtu je v zásobníku uchováváno pouze jediné číslo, a sice hodnota dosud nalezeného maxima. Zadaná čísla ze vstupu není třeba vůbec ukládat do zásobníku.

```

IN
PUSH                                (uložení prvního čísla)
while not EOF do
  begin
    IN
    SUB                              (porovnání dalšího čísla ...)
    if POS then                      (... s dosud nalezeným max.)
      begin
        ADD
        EXCH                        (uložení nové hodnoty maxima)
      end
    end
  end
TOP
OUT                                (tisk výsledného maxima)

```

b) Nalezení dvou největších ze zadaných čísel je možné provést v principu dvěma odlišnými způsoby. Ukážeme si je postupně oba. V první variantě řešení jsou všechna čísla čtená ze vstupu ukládána do zásobníku, přičemž na vrcholu zásobníku se stále udržuje největší z nich. Nalezené maximum se po přečtení všech čísel vytiskne a odstraní se ze zásobníku. V další fázi výpočtu se hledá maximum ze zbylých čísel (tzn. celkově druhé největší číslo) při postupném

vybírání čísel ze zásobníku. Hodnota tohoto maxima se přitom udržuje a průběžně aktualizuje v pracovním registru počítače.

*IN*

*PUSH* (uložení prvního čísla)

**while not** *EOF* **do**

**begin**

*IN*

*SUB* (porovnání dalšího čísla ...)

**if** *POS* **then** (s dosud nalezeným maximem)

**begin**

*ADD*

*PUSH* (nová hodnota maxima na zás.)

**end**

**else**

**begin** (přečtené číslo není maximem)

*ADD*

*EXCH* (uložení do zásobníku pod ...)

*PUSH* (... dosud nalezené maximum)

**end**

**end**

*OUT* (vytisknutí největšího čísla)

*POP* (smazání největšího čísla)

*TOP*

*POP*

**while not** *EMPTY* **do** (hledání maxima ze zbylých č.)

**begin**

*SUB* (porovnání)

**if** *NEG* **then** *TOP* (nová hodnota maxima do reg.)

**else ADD** (obnovení původní hodnoty max.)

**POP**

**end**

**OUT** (vypsání druhého nejv. čísla)

Ve druhém způsobu řešení se čísla zadaná na vstupu do zásobníku neukládají. V zásobníku jsou stále uložena (a průběžně aktualizována) pouze dvě čísla: největší z dosud přečtených čísel a druhé největší (to je na vrcholu).

**IN**

**PUSH** (uložení prvního čísla)

**IN**

**SUB** (porovnání prvních dvou čísel)

**if POS then**

**begin**

**ADD**

**EXCH**

**end**

**else**

**ADD**

**PUSH** (připravena první dvě čísla  
v zásobníku, menší navrchu)

**while not EOF do**

**begin**

**IN**

**SUB** (porovnání dalšího čísla ...)

**if POS then** (... s druhým největším)

**begin**

**ADD** (je-li nové číslo větší, ...)



|                                  |                                 |
|----------------------------------|---------------------------------|
| <i>POP</i>                       | (... dosavadní vrchol se smaže) |
| <i>SUB</i>                       |                                 |
| <b>if</b> <i>POS</i> <b>then</b> | (porovnání s dosud max. číslem) |
| <b>begin</b>                     |                                 |
| <i>ADD</i>                       |                                 |
| <i>EXCH</i>                      |                                 |
| <b>end</b>                       |                                 |
| <b>else</b>                      |                                 |
| <i>ADD</i>                       |                                 |
| <i>PUSH</i>                      | (uložení ve správném pořadí ..) |
| <b>end</b>                       | (... do zásobníku)              |
| <b>end</b>                       |                                 |
| <i>TOP</i>                       |                                 |
| <i>POP</i>                       |                                 |
| <i>EXCH</i>                      | (nejdříve vypíšeme největší ..) |
| <i>OUT</i>                       | (... ze všech čísel)            |
| <i>TOP</i>                       |                                 |
| <i>OUT</i>                       | (vypsání druhého nejv. čísla)   |

c) Jestliže budeme do zásobníku našeho zásobníkového počítače ukládat pouze čísla čtená ze vstupu, popř. jiná čísla srovnatelné velikosti, úlohu nalézt tři největší ze zadaných čísel není možné řešit. Pro nalezení  $k$  největších čísel při jednom průchodu zadanou posloupností čísel je třeba mít k dispozici stále přístupných  $k$  paměťových míst. V případě zásobníkového počítače máme přímo přístupný pouze pracovní registr a vrchol zásobníku. Při čtení čísel ze vstupu je pracovní registr využíván pro čtení, takže je možné zároveň se čtením čísel ze vstupu a jejich ukládáním do zásobníku vyhledat pouze jedno největší ze zadaných čísel.

Při vybírání čísel ze zásobníku se využívá místo na vrcholu zásobníku, přes které se uskutečňuje přístup do zásobníku. Jako pracovní paměť zbývá k dispozici pouze registr, takže je možné vyhledávat opět pouze jedno, např. druhé největší ze zadaných čísel. Pokud bychom čtená čísla nechtěli do zásobníku vůbec ukládat, můžeme opět udržovat v zásobníku hodnoty pouze dvou největších čísel. Při třech bychom již nedokázali obnovovat potřebný stav zásobníku. Kdybychom totiž přečetli ze vstupu hodnotu nového maxima, nemáme kam odložit druhé a třetí největší číslo, abychom mohli uložit nové maximum na dno zásobníku.

Existuje ovšem řešení úlohy založené na možnosti zakódovat vhodným způsobem více čísel do jediného čísla, které pak uložíme do zásobníku. Na vrcholu zásobníku si tedy můžeme udržovat jediný záznam obsahující informaci o třech největších dosud nalezených číslech. Po přečtení každého dalšího čísla ze vstupu tento záznam rozkódujeme a po porovnání s nově přečtenou hodnotou opět zakódujeme (s případnými změnami) a uložíme. Možných kódů je celá řada, například lze použít součin příslušných mocnin tří pevně zvolených prvočísel. Trojici čísel  $a$ ,  $b$ ,  $c$  lze tedy uložit ve tvaru  $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ .

Toto řešení je sice zcela správné, ale má dvě nevýhody. Je velmi pracné a komplikované, příslušný program je značně rozsáhlý, a proto ho zde ani neuvádíme. Druhou, významnější a důležitější problematickou otázkou je velikost čísel ukládaných do zásobníku. I to nejúspornější zakódování tří čísel běžné velikosti do jediného vede k velmi velké výsledné hodnotě. V definici zásobníkového počítače nebylo stanoven žádný omezení na velikost čísel, která lze ukládat do

zásobníku, takže ve smyslu této definice je uvedené řešení správné. Je ovšem dobré uvědomit si, že takovéto řešení by bylo zcela nereálné v případě, že bychom programovali nějaký skutečně existující zásobníkový počítač, neboť u něj by velikost čísel, s nimiž se pracuje, byla jistě omezena.

B. Čísla ze vstupu postupně čteme a ukládáme do zásobníku tak dlouho, dokud nepřčteme prostřední prvek zadané posloupnosti (jednoznačně identifikovatelný tím, že jako jediný má hodnotu 0). Při čtení dalších čísel ze vstupu odbíráme čísla ze zásobníku a kontrolujeme, zda je splněna podmínka symetrie podle zadání.

*IN*

**while not *ZERO* do**

**begin**

*PUSH*

*IN*

**end**

(první polovina posloupnosti  
je uložena v zásobníku)

**while not *EOF* do**

**begin**

*IN*

(přečtení dalšího čísla)

*SUB*

**if *ZERO* then**

(při shodě s vrcholem zás. ...)

*POP*

(... snížíme úroveň zásobníku)

**else**

**while not *EOF* do** (jinak dočteme čísla ze vstupu)

*IN*

**end**

**if *ZERO* then *CONST* 1** (nastavení výsledné hodnoty)

else *CONST* 0  
*OUT* (tisk výsledku)

## P – II – 1

Zavedeme pomocné pole  $SLMAX[1..N]$ , které bude obsahovat informace o poloze maximálních hodnot v jednotlivých sloupcích pole  $A$ . Bude tedy platit  $SLMAX[J] = I$  právě tehdy, jestliže  $A[I, J]$  je největší ze všech čísel uložených v  $J$ -tém sloupci pole  $A$ .

Nejprve provedeme počáteční zaplnění pole  $SLMAX$  odpovídajícími hodnotami. Výběr  $N$  největších čísel uložených v poli  $A$  potom proběhne v  $N$  krocích následujícího výpočtu:

- pomocí pole  $SLMAX$  nalezneme největší hodnotu ze sloupcových maxim; tuto hodnotu získáme jako maximum z čísel  $A[SLMAX[J], J]$  pro  $J$  od 1 do  $N$ ; nechť je to číslo  $A[I, K]$

- číslo  $A[I, K]$  je tedy největším z čísel uložených v poli  $A$ ; vytiskneme ho a vypustíme ho z pole  $A$  dosazením nuly za  $A[I, K]$

- obnovíme informaci o poloze sloupcového maxima ve sloupci, v němž došlo ke změně, tzn. spočteme novou hodnotu  $SLMAX[K]$ .

**program** *MAXIMA* (input, output);

**const**  $M = 100$ ; {maximální přípustná hodnota  $N$ }

**var**  $N$ : integer; {velikost zadané matice}

$A$ : **array**  $[1..M, 1..M]$  of integer; {zadaná matice čísel}

$SLMAX$ : **array**  $[1..M]$  of integer;

{polohy sloup. maxim}

*MAX*: integer; {pro výběr max. hodnoty}

*I, J, K*: integer; {pomocné proměnné}

**procedure** *SLOUPEC*(*J*:integer);

{počítá polohu maximálního čísla v *J*-tém sloupci  
pole *A* a ukládá ji jako hodnotu *SLMAX*[*J*]  
do pom. pole *SLMAX*}

**var** *MX, I*: integer;

**begin** {*SLOUPEC*}

*MX* := 0;

**for** *I* := 1 to *N* do

**if** *MX* < *A*[*I, J*] **then**

**begin**

*MX* := *A*[*I, J*];

*SLMAX*[*J*] := *I*

**end**

**end**; {*SLOUPEC*}

**begin**

    read(*N*);

**for** *I* := 1 to *N* do

**for** *J* := 1 to *N* do read(*A*[*I, J*]);

                                {čtení zadané matice *A*}

**for** *J* := 1 to *N* do *SLOUPEC*(*J*);

                                {nastavení hodnot *SLMAX*}

**for** *I* := 1 to *N* do {*N* kroků výpočtu:}

**begin**

*MAX* := 0;

**for** *J* := 1 to *N* do {výběr největšího čísla}

**if** *A*[*SLMAX*[*J*], *J*] > *MAX* **then**

```

begin
  MAX := A[SLMAX[J], J];
                                {MAX je největší číslo}
  K := J {K je sloupec, odkud bylo
                                vybráno číslo MAX}

  end;
writeln(MAX); {vypsání největšího čísla}
A[SLMAX[K], K] := 0; {... a jeho smazání z A}
SLOUPEC(K) {nová hodnota největšího
            čísla ve sloupci K}

end
end.

```

Správnost algoritmu přímo plyne z úvodního rozboru. V každém kroku výpočtu je nalezena a vytištěna největší hodnota z maxim v jednotlivých sloupcích, což je jistě největší číslo momentálně se nacházející v poli  $A$ . Přepsání tohoto čísla nulou je vytisknuté číslo z pole  $A$  vynecháno (všechna čísla v poli  $A$  jsou podle zadání kladná!) a v dalším kroku se tedy bude vyhledávat největší ze všech zbývajících čísel. Celkem program po  $N$  krocích výpočtu vytiskne skutečně  $N$  největších čísel uložených původně v poli  $A$ . Výpočet je konečný, má předem omezený počet kroků hodnotou  $N$ .

Popsaný algoritmus má kvadratickou časovou složitost. Přčtení  $N^2$  čísel ze vstupu i počáteční zaplnění pole  $SLMAX$  jistě vyžadují řádově  $N^2$  operací. Vlastní výpočet je pak tvořen  $N$  kroky, přičemž v každém z nich je nejprve pomocí pole  $SLMAX$  vybráno maximum z  $N$  čísel a po jeho vypsání a smazání je opět výběrem maxima z  $N$  čísel

obnoveno správné zaplnění pole  $SLMAX$ . Celkem se tedy provede počet operací úměrný hodnotě  $N^2$ .

Rychlejší algoritmus řešící zadanou úlohu není možný, neboť již jenom počet hodnot, které je třeba zpracovat a z nichž každá může ovlivnit výsledek, je  $N^2$ .

**Poznámka.** Zkuste sami modifikovat zde uvedené řešení úlohy tak, aby původní obsah pole  $A$  zůstal zachován.

## P – II – 2

Postupně budeme procházet zadanou posloupnost čísel  $X$ . V  $i$ -tém kroku výpočtu budeme sledovat, jak mohou vypadat rostoucí podposloupnosti vybrané z počátečního úseku posloupnosti  $X$  délky  $i$ , tzn. z posloupnosti  $X(1), X(2), \dots, X(i)$ . Pro dosažení co nejúspornějšího a nejrychlejšího řešení úlohy si zavedeme pomocné pole  $M[1..N]$ , do něhož si budeme průběžně ukládat následující informaci: prvek  $M[j]$  je v každém okamžiku roven minimální dosud známé hodnotě posledního prvku vybrané rostoucí podposloupnosti délky  $j$ . Další průběžně aktualizovaná proměnná  $K$  udává délku maximální (tzn. nejdelší) dosud nalezené rostoucí podposloupnosti. V poli  $M$  jsou tedy definovány hodnoty  $M[1], M[2], \dots, M[K]$ . Po provedení  $i$ -tého kroku výpočtu budou tudíž splněny následující podmínky:

1.  $1 \leq i \leq N$
2.  $K$  je délka maximální rostoucí podposloupnosti vybrané z posloupnosti  $X(1), X(2), \dots, X(i)$
3.  $M[j] = \min\{X(i_j); \text{existují indexy } i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq i \text{ takové, že } X(i_1) < X(i_2) < \dots < X(i_j)\}$   
... pro  $j = 1, \dots, K$

Z poslední uvedené podmínky zřejmě plyne platnost nerovnosti  $M[1] < \dots < M[K]$ . Pokud totiž rostoucí vybraná podposloupnost délky  $j$  může končit číslem  $M[j]$ , pak existuje také vybraná podposloupnost délky  $j-1$ , která vznikne z předchozí uvažované podposloupnosti vynecháním posledního členu. Její poslední člen bude ovšem jistě menší než  $M[j]$ , a tedy skutečně platí  $M[j-1] < M[j]$ .

Po provedení všech  $N$  kroků výpočtu bude proměnná  $K$  obsahovat délku maximální rostoucí podposloupnosti vybrané z celé zadané posloupnosti  $X(1), \dots, X(N)$ , a právě to je požadovaný výsledek úlohy.

Zbývá ukázat, jakým způsobem provedeme aktualizaci hodnot proměnné  $K$  a údajů uložených v poli  $M$  při jednom kroku výpočtu. Uvažujme  $i$ -tý krok výpočtu a zpracování čísla  $X(i)$  ze zadané posloupnosti. Je-li  $X(i)$  větší než  $M[K]$ , je možné prodloužit dosud nejdelší nalezenou vybranou rostoucí podposloupnost o číslo  $X(i)$ . Zvětšíme tedy hodnotu proměnné  $K$  o jedničku a pro nové  $K$  definujeme údaj  $M[K]$  jako hodnotu čísla  $X(i)$ . V opačném případě není možné dosud maximální vybranou podposloupnost prodloužit a hodnota  $K$  se tedy nezmění. Může se ovšem stát, že číslo  $X(i)$  nám umožní snížit některou z dříve stanovených hodnot  $M[j]$ . Jak jsme již uvedli, platí stále nerovnost  $M[1] < \dots < M[K]$ . Je tedy možné najít takový index  $j$ , že buď

$$j = 1 \quad \text{a} \quad X(i) \leq M[1],$$

nebo

$$1 < j \leq K \quad \text{a} \quad M[j-1] < X(i) \leq M[j].$$



Nastane-li ostrá nerovnost  $X(i) < M[j]$ , můžeme nyní snížit hodnotu  $M[j]$  tím, že za ni dosadíme číslo  $X(i)$ . Existuje totiž rostoucí vybraná podposloupnost délky  $j - 1$  končící číslem  $M[j - 1]$ , a protože  $X(i) > M[j - 1]$ , číslo  $X(i)$  tuto podposloupnost prodlužuje na rostoucí vybranou podposloupnost délky  $j$ . Jejím posledním prvkem je právě číslo  $X(i)$ , které tedy sníží údaj  $M[j]$ , je-li to možné.

Uvedený rozbor je zároveň zdůvodněním správnosti navrženého algoritmu. Výpočet je jistě konečný, neboť je tvořen přesně  $N$  kroky, kde  $N$  je délka zpracovávané posloupnosti čísel. Časová složitost algoritmu je v optimálním případě  $N * \log_2(N)$ . Provádí se totiž  $N$  kroků výpočtu a v každém z kroků se kromě jednoduchých akcí s konstantní časovou složitostí musí vyhledávat v poli  $M$  index  $j$  určující, kterou hodnotu  $M[j]$  budeme modifikovat. Vzhledem k uspořádání pole  $M$  podle velikosti je možné určit index  $j$  binárním prohledáváním (půlením intervalů), a tedy s časovou složitostí  $\log_2(N)$ . Odtud plyne složitost celého algoritmu  $N * \log_2(N)$ .

**program** *PODPOSLOUPNOST* (input, output);

**const**  $MAX = 100$ ; {maximální délka posloupnosti}

**var**  $X$ : **array**[1 ..  $MAX$ ] **of** integer;

{zadaná posloupnost čísel}

$M$ : **array**[1 ..  $MAX$ ] **of** integer;

{pomocné pole dle rozboru}

$N$ : integer; {počet čísel v posloupnosti  $X$ }

$K$ : integer; {výsledná délka podposloupnosti}

$D, H$ : integer; {meze pro binární prohledávání}

$I, J$ : integer; {pomocné proměnné}

```
begin
read( $N$ );
for  $I := 1$  to  $N$  do read( $X[I]$ ); {přečtení posloupnosti}
 $I := 1$ ;
 $K := 1$ ;
 $M[1] := X[1]$ ;
while  $I < N$  do { $N$  kroků výpočtu:}
  begin
     $I := I + 1$ ;
    if  $X[I] > M[K]$  then {zpracování čísla  $X[I]$ }
      begin
         $K := K + 1$ ; {prodloužení max. podposloupnosti}
         $M[K] := X[I]$ 
      end
    else
      begin {nalezení indexu  $J$  v poli  $M$ }
        if  $X[I] \leq M[1]$  then
           $J := 1$ 
        else
          begin {chceme  $1 < J \leq K$ 
            &  $M[J - 1] < X[I] \leq M[J]$ }
             $D := 1$ ;
             $H := K$ ;
            while  $H - D > 1$  do
              {binární prohledávání v úseku  $D - H$ }
              begin {stále platí:  $M[D] < X[I] \leq M[H]$ }
                 $J := (H + D) \text{ div } 2$ ;
                if  $X[I] > M[J]$  then  $D := J$ 
              end
            end
          end
        end
      end
  end
```

```

else  $H := J$ 
    end;
 $J := H$  {výsledná hodnota indexu  $J$ }
end;
 $M[J] := X[I]$  {nová hodnota  $M[J]$  pro nalezené  $J$ }
end
end;
write('Nejdelší vybraná rostoucí podposloupnost');
writeln(' má délku ',  $K$ , '.');
writeln
end.

```

## P – II – 3

a) Výsledkem práce uvedeného programu je setřídění  $N$  čísel zadaných na vstupu podle velikosti od největšího k nejmenšímu a vytisknutí všech čísel v tomto sestupném pořadí. Jedná se o programovou realizaci třídícího algoritmu zvaného shake-sort, což je vylepšená varianta známého bublinkového třídění.

Proměnné  $L$  a  $R$  slouží k vyznačení úseku pole  $A$ , který je ještě třeba setřídít. V každém okamžiku platí, že musíme ještě třídít čísla uložená v úseku  $A[L - 1], \dots, A[R]$ , zatímco ostatní čísla v poli  $A$  jsou již na svých místech (tj. na místech, kam budou patřit i po setřídění celého pole  $A$ ). Tomu odpovídá počáteční nastavení hodnot proměnných  $L$  a  $R$ , neboť na začátku výpočtu je třeba setřídít celé pole  $A$ . Třídění končí, jestliže  $L > R$ , tzn. jsou-li již všechna čísla v poli  $A$  na svých místech.

Celé třídění probíhá po krocích. Každý krok je v uvedeném programu představován provedením jednoho **for**-cyklu a následným nastavením některé z hodnot  $L$ ,  $R$ . Pravidelně se střídají kroky výpočtu, v nichž je dosud neutříděný úsek pole  $A$  procházen pomocí proměnné  $J$  od nižších indexů k vyšším a naopak. Je-li při takovém průchodu nalezena dvojice sousedních čísel  $A[J - 1]$ ,  $A[J]$ , pro kterou platí  $A[J - 1] < A[J]$ , jsou tato dvě čísla mezi sebou prohozena (vymění si místa v poli  $A$ ). Do proměnné  $K$  je zároveň zaznamenáno místo poslední výměny dvou sousedních čísel během jednoho průchodu polem  $A$ . Je tudíž jisté, že po ukončení průchodu dosud nesetříděným úsekem pole  $A$  se dostane na svoje správné místo v poli  $A$  nejméně jedno další číslo. Při průchodu ve směru od nižších indexů k vyšším je to nejmenší z čísel nacházejících se v tomto úseku (dostane se na konec úseku), při opačném směru je to největší z čísel (dostane se na začátek). Je tedy možné změnit hodnotu příslušné proměnné  $L$  nebo  $R$  a tím zmenšit úsek pole  $A$ , který je ještě třeba setřídít. V některých případech je možné zmenšit sledovaný úsek pole  $A$  i o více čísel najednou. Na svých místech jsou totiž jistě všechna čísla od místa poslední provedené výměny dvou sousedních čísel až k odpovídajícímu konci úseku. Správné změny hodnoty proměnné  $L$  nebo  $R$  proto dosáhneme přiřazovacím příkazem za **for**-cyklem využívajícím hodnoty proměnné  $K$ .

Výpočet programu je pro libovolná vstupní data jistě konečný, neboť v každém kroku výpočtu se dostane na své správné místo v poli  $A$  nejméně jedno číslo a úsek, který je ještě třeba setřídít, se tedy zmenší. Počet kroků výpočtu je proto předem omezen hodnotou konstanty  $N$ .

b) Program třídí celkem  $N$  čísel. V každém kroku výpočtu se dostane na své správné místo v poli  $A$  minimálně jedno číslo, takže k setřídění celého pole je třeba provést maximálně  $N - 1$  kroků (bude-li na svých místech  $N - 1$  čísel, pak poslední  $N$ -té číslo již také). V každém kroku výpočtu se úsek pole  $A$ , který je ještě třeba setřídít, zmenšuje alespoň o jedno číslo. V prvním kroku má délku  $N$ , v nejhorším případě má výpočet plných  $N - 1$  kroků a potom v posledním kroku má tříděný úsek délku 2. Při průchodu úsekem délky  $D$  v jednom kroku výpočtu se provede  $D - 1$  porovnání dvou sousedních čísel. Celkově proto bude při výpočtu provedeno maximálně

$$(N - 1) + (N - 2) + \dots + 3 + 2 + 1 = \frac{N(N - 1)}{2}$$

porovnání. Pro konstantu  $N = 100$  zvolenou v našem programu představuje tento výraz celkem 4950 porovnání. Třídící algoritmus shake-sort má tedy kvadratickou časovou složitost.

## P – II – 4

Program bude číst ze vstupu postupně zadaná čísla a bude z nich vybírat ta, která jsou kladná a sudá. Otestovat, zda je číslo kladné, můžeme snadno pomocí jednoduché podmínky POS. Ke zjištění, jestli je číslo sudé, musíme naprogramovat test dělitelnosti dvěma. Vzhledem k tomu, že zásobníkový počítač pracuje v celočíselné aritmetice, stačí vstupní číslo vydělit dvěma, zpětně vynásobit dvěma a porovnat s jeho původní hodnotou (kterou jsme si předem uschovali na zásobníku).

S vybranými kladnými sudými čísly je třeba provádět dvě operace – určovat jejich počet a jejich součet. To je možné provádět v zásadě dvěma různými způsoby, podobně jako u úlohy P-I-4 Ab). První možností je ukládat vybraná čísla průběžně do zásobníku. Přitom musíme jednu z výsledných hodnot (např. počet čísel) počítat zároveň s jejich ukládáním do zásobníku a druhou hodnotu (součet čísel) potom spočteme během vyprazdňování zásobníku. Druhá metoda řešení úlohy spočívá v tom, že se čísla čtená ze vstupu do zásobníku vůbec neukládají. Během celého výpočtu se v zásobníku udržují pouze dvě hodnoty, a to součet a počet již zpracovaných kladných sudých čísel. Po přičtení všech čísel ze vstupu pak máme v zásobníku oba hledané údaje.

Ukážeme si nejprve podrobné řešení naší úlohy využívající první z uvedených postupů. V první etapě výpočtu tedy čteme čísla ze vstupu, provedením potřebných testů z nich vybíráme kladná sudá a tato čísla ukládáme do zásobníku. Na vrcholu zásobníku zároveň udržujeme hodnotu udávající počet čísel uložených do zásobníku. Po přičtení všech čísel ze vstupu tuto hodnotu vytiskneme a odstraníme ze zásobníku. Ve druhé etapě výpočtu potom čísla ze zásobníku postupně odebíráme a v pracovním registru počítáme jejich součet. Ten pak vytiskneme jako další výsledek našeho programu.

*CONST 0*

*PUSH*

(v zásobníku zatím není žádné  
ze vstupních čísel)

**while not EOF do**  
    **begin**

|                                         |                                 |
|-----------------------------------------|---------------------------------|
| <i>IN</i>                               | (přečtení dalšího čísla)        |
| <b>if</b> <i>POS</i> <b>then</b>        |                                 |
| <b>begin</b>                            | (číslo je kladné)               |
| <i>PUSH</i>                             |                                 |
| <i>PUSH</i>                             |                                 |
| <i>CONST</i> 2                          |                                 |
| <i>EXCH</i>                             |                                 |
| <i>DIV</i>                              | (test dělitelnosti dvěma)       |
| <i>MUL</i>                              |                                 |
| <i>POP</i>                              |                                 |
| <i>SUB</i>                              |                                 |
| <b>if</b> <i>ZERO</i> <b>then</b>       | (číslo je sudé)                 |
| <b>begin</b>                            |                                 |
| <i>TOP</i>                              | (záměna vrchních dvou čísel ..) |
| <i>POP</i>                              | (.. v zásobníku, na vrchol ..)  |
| <i>EXCH</i>                             | (.. se dostane počet čísel)     |
| <i>PUSH</i>                             |                                 |
| <i>CONST</i> 1                          |                                 |
| <i>ADD</i>                              | (zvětšení počtu čísel o 1)      |
| <i>EXCH</i>                             | (uložení nového počtu čísel)    |
| <b>end</b>                              |                                 |
| <b>else</b>                             |                                 |
| <i>POP</i>                              | (číslo není sudé — smažeme ho)  |
| <b>end</b>                              |                                 |
| <b>end</b>                              |                                 |
| <i>TOP</i>                              |                                 |
| <i>OUT</i>                              | (vypsání počtu čísel)           |
| <i>POP</i>                              |                                 |
| <i>CONST</i> 0                          |                                 |
| <b>while not</b> <i>EMPTY</i> <b>do</b> |                                 |

|              |                               |
|--------------|-------------------------------|
| <b>begin</b> |                               |
| <i>ADD</i>   | (součet hodnot čísel ze zás.) |
| <i>POP</i>   |                               |
| <b>end</b>   |                               |
| <i>OUT</i>   | (vypsání součtu čísel)        |

Při druhém z možných postupů si budeme na vrcholu zásobníku uchovávat součet již přčtených kladných sudých čísel a pod ním jejich počet. Po nalezení dalšího kladného sudého čísla tyto dva údaje zaktualizujeme. Na závěr výpočtu program vypíše obě čísla uložená v zásobníku.

|                         |                           |
|-------------------------|---------------------------|
| <i>CONST 0</i>          |                           |
| <i>PUSH</i>             | (zatím počet = 0)         |
| <i>PUSH</i>             | (zatím součet = 0)        |
| <b>while not EOF do</b> |                           |
| <b>begin</b>            |                           |
| <i>IN</i>               | (přečtení dalšího čísla)  |
| <b>if POS then</b>      |                           |
| <b>begin</b>            | (číslo je kladné)         |
| <i>PUSH</i>             |                           |
| <i>PUSH</i>             |                           |
| <i>CONST 2</i>          |                           |
| <i>EXCH</i>             |                           |
| <i>DIV</i>              | (test dělitelnosti dvěma) |
| <i>MUL</i>              |                           |
| <i>POP</i>              |                           |
| <i>SUB</i>              |                           |
| <b>if ZERO then</b>     | (číslo je sudé)           |
| <b>begin</b>            |                           |



|                |                                 |
|----------------|---------------------------------|
| <i>TOP</i>     |                                 |
| <i>POP</i>     | (přesun čísla do registru)      |
| <i>ADD</i>     | (přičtení čísla k součtu)       |
| <i>POP</i>     | (odstranění dosavadního součtu) |
| <i>EXCH</i>    | (počet čísel do registru)       |
| <i>PUSH</i>    | (počet čísel do zásobníku)      |
| <i>CONST 1</i> |                                 |
| <i>ADD</i>     | (zvýšení počtu čísel o 1)       |
| <i>POP</i>     | (odstranění dosavadního počtu)  |
| <i>EXCH</i>    |                                 |
| <i>PUSH</i>    | (obnovení situace v zásobníku)  |
| <i>end</i>     |                                 |
| <i>else</i>    |                                 |
| <i>POP</i>     | (číslo není sudé — smažeme ho)  |
| <i>end</i>     |                                 |
| <i>end</i>     |                                 |
| <i>TOP</i>     |                                 |
| <i>POP</i>     |                                 |
| <i>OUT</i>     | (vypsání součtu čísel)          |
| <i>TOP</i>     |                                 |
| <i>POP</i>     |                                 |
| <i>OUT</i>     | (vypsání počtu čísel)           |

## P – III – 1

Algoritmus řešící zadanou úlohu bude založen na následujícím postupu. Nejprve si rozdělíme celé pole  $S$  na  $K$  „příhrádek“, přičemž každá příhrádka je určena vždy pro čísla, jimž funkce  $F$  přiřazuje jednu z hodnot od 1 do  $K$ . Velikosti těchto příhrádek není těžké předem zjistit při jednom

průchodu polem  $S$ . Pro uložení velikostí přihrádek budeme používat pomocné pole  $C[1..K]$ . Ve druhé fázi výpočtu pak budeme přihrádky zaplňovat těmi prvky pole  $S$ , které do nich patří. Přitom je třeba zaznamenávat si, kam až je která přihrádka zaplněna. K tomuto účelu bude sloužit druhé pomocné pole  $A[1..K]$ . Obě pomocná pole  $C$  a  $A$  mají v souladu se zadáním úlohy velikost úměrnou hodnotě  $K$ . Zbývá vyřešit technickou otázku, jak celý proces zařazování čísel do přihrádek organizovat, aby třídění probíhalo „na místě“ bez nutnosti pracovat s dalším polem velikosti  $N$ . Tímto problémem se budeme podrobněji zabývat v dalším detailním popisu algoritmu.

V první fázi výpočtu provedeme dosazení počátečních hodnot do polí  $C$  a  $A$ . Toto dosazení se snadno uskuteční při jednom sekvenčním průchodu polem  $S$ . Po inicializaci polí  $C$  a  $A$  bude  $C[i]$  určovat počet všech čísel uložených v  $S$ , kterým funkce  $F$  přiřazuje hodnotu  $i$ . Údaj  $A[i]$  bude mít význam indexu, od kterého budou po uspořádání čísel v poli  $S$  uložena ta z nich, jimž funkce  $F$  přiřazuje hodnotu  $i$  (tzn. jsou to začátky jednotlivých „přihrádek“ v poli  $S$ ).

Druhou fází výpočtu je pak vlastní uspořádání čísel. Přerovnávání čísel uložených v poli  $S$  probíhá po krocích. V každém kroku je jedno z  $N$  čísel přemístěno na své správné místo (tj. na první volné místo v té „přihrádce“, do které toto číslo patří). Přitom se průběžně mění hodnoty uložené v polích  $C$  a  $A$ . V průběhu této druhé fáze výpočtu bude hodnota  $C[i]$  udávat (pro každý index  $i$  z rozmezí od 1 do  $K$ ) počet čísel uložených v poli  $S$  takových, že jim funkce  $F$  přiřazuje právě hodnotu  $i$  a že tato čísla dosud nebyla zařazena na své výsledné místo v poli  $S$ . Hodnota  $A[i]$  bu-

de indexem v poli  $S$ , kam se má umístit další přemísťované číslo, jemuž funkce  $F$  přiřazuje hodnotu  $i$ .

Začneme umísťováním čísla  $S[j]$  s indexem  $j = 1$ . Toto číslo patří do pole  $S$  na místo s indexem  $A[F(S[j])]$ . Umísťíme ho tam proto a zvýšíme hodnotu  $A[F(S[j])]$  o 1, aby se stala indexem volného místa v poli  $S$ , kam lze uložit další číslo, jemuž funkce  $F$  přiřazuje stejnou hodnotu  $F(S[j])$ . Zároveň snížíme hodnotu  $C[F(S[j])]$  o 1, neboť jedno číslo s hodnotou  $F(S[j])$  je již umístěno. Jestliže je  $A[F(S[j])]$  různé od  $j$ , nesmíme ztratit číslo, které bylo dosud uloženo v poli  $S$  na místě s indexem  $A[F(S[j])]$ . Toto číslo proto přesuneme výměnou na uvolněnou pozici v poli  $S$  s indexem  $j$ . Tím jsme zároveň, aniž bychom změnili hodnotu  $j$ , získali nové číslo  $S[j]$ , které budeme umísťovat v dalším kroku výpočtu. Pokud bylo náhodou číslo  $S[j]$  již na svém místě, tj. pokud bylo  $j = A[F(S[j])]$ , žádný přesun čísel v poli  $S$  v tomto kroku neprovádíme a pouze změňíme hodnoty uložené v polích  $A$  a  $C$  výše uvedeným způsobem. V tomto případě ale ještě musíme změnit hodnotu indexu  $j$  a určit tak nové číslo  $S[j]$ , které se bude umísťovat na své místo v dalším kroku výpočtu. Vyhledáme proto takové  $m$ , že  $C[m]$  je nenulové, tzn. ještě je třeba umístit nějaké číslo, jemuž funkce  $F$  přiřazuje hodnotu  $m$ . Polohu takového čísla v poli  $S$  neznáme, ale víme, že po uspořádání patří na místo s indexem  $A[m]$ . Tedy prvek s indexem  $j = A[m]$  není ještě umístěn a zvolíme ho proto pro další krok výpočtu. V každém kroku výpočtu se jedno z čísel dostane na své správné místo v poli  $S$ , takže po provedení  $N$  kroků bude na svých místech všech  $N$  čísel uložených v poli  $S$ .

Z uvedeného rozboru přímo plyne správnost popsaného

algoritmu. Konečnost výpočtu je dána provedením předem známého počtu  $N$  kroků výpočtu. Algoritmus má lineární časovou složitost z hlediska parametru  $N$ , jak požaduje zadání úlohy. Počáteční obsazení polí  $C$  a  $A$  vyžaduje provést jeden sekvenční průchod polem  $S$ , tedy řádově  $N$  operací. Vlastní výpočet má přesně  $N$  kroků, přičemž počet operací prováděných v každém kroku je omezen konstantou. Za konstantu zde považujeme i hodnotu  $K$ , která je podle předpokladu uvedeného v zadání úlohy podstatně menší než počet prvků  $N$  uložených v poli  $S$ .

```

program PREROVNANI (input, output);
const  $N = 100$ ; {velikost pole  $S$ }
         $K = 10$ ; {počet různých hodnot funkce  $F$ }

var  $S$ : array[1 ..  $N$ ] of integer; {zadané pole čísel}
     $A, C$ : array[1 ..  $K$ ] of integer;
                                {prac. pole podle rozboru}
     $I, J, D, M, H, P, T$ : integer; {pomocné proměnné}

function  $F$  ( $X$ : integer): integer; {zadaná funkce  $F$ }
begin
if  $X \geq 0$  then {... může vypadat třeba takto}
     $F := X \bmod K + 1$ 
else
     $F := 1$ 
end;

begin
    {Přčtení čísel do pole  $S$  a inicializace polí  $C$  a  $A$ :}
    for  $I := 1$  to  $N$  do read( $S[I]$ );
    for  $I := 1$  to  $K$  do  $C[I] := 0$ ;

```

```

for  $I := 1$  to  $N$  do  $C[F(S[I])] := C[F(S[I])] + 1;$ 
 $D := 1;$  {pro výpočet počátečních hodnot  $A$ }
for  $I := 1$  to  $K$  do
  begin
     $A[I] := D;$ 
     $D := D + C[I]$ 
  end;

```

{Přerovnání čísel v poli  $S$ :}

$J := 1;$  {index umísťovaného prvku v poli  $S$ }

$M := 1;$  {minimální index v poli  $C$ , že  $C[M] > 0$ }

```

for  $I := 1$  to  $N$  do

```

```

  begin

```

$H := F(S[J]);$  {hodnota funkce  $F$  umísťovaného čísla}

$P := A[H];$  {nová pozice v  $S$  pro umíst. číslo}

$A[H] := A[H] + 1;$

$C[H] := C[H] - 1;$

```

  if  $P <> J$  then

```

```

    begin {výměna čísel na pozicích  $J$  a  $P$  v poli  $S$ }

```

$T := S[J];$

$S[J] := S[P];$

$S[P] := T$

```

    end

```

```

  else

```

```

    begin {číslo  $S[j]$  je již na svém místě}

```

**while**  $(C[M] = 0)$  **and**  $(M < K)$  **do**  $M := M + 1;$

$J := A[M]$  {vybráno další číslo, které je třeba  
umístit v následujícím kroku}

```

    end

```

```

  end;

```

```

{Výpis seříděného pole  $S$ :}
writeln('Seříděné pole čísel:');
for  $I := 1$  to  $N$  do write( $S[I]$ , ' ');
writeln
end.

```

## P – III – 2

a) Z definice funkce  $V$  je patrné, že k vyjádření hodnoty  $V(m, n)$  není třeba znát žádnou hodnotu  $V(x, y)$  pro  $x > m$ . Budeme proto postupně zjišťovat počet potřebných hodnot  $V(x, y)$  pro  $x = m, x = m - 1, x = m - 2, \dots, x = 0$ . Uvažujme nejprve vzájemné závislosti různých hodnot funkce  $V$  v případě, že oba argumenty funkce jsou kladné (tzn. podle třetího řádku definice funkce  $V$ ).

Ke stanovení hodnoty  $V(m, n)$  je třeba znát  $V(m, n - 1)$ , k určení  $V(m, n - 1)$  potřebujeme  $V(m, n - 2), \dots$  atd., až ke stanovení  $V(m, 1)$  potřebujeme znát  $V(m, 0)$ . Tedy pro  $x = m$  je nutné spočítat celkem  $n + 1$  hodnot funkce  $V$ , a sice hodnoty  $V(m, y)$  pro všechna  $y$  od 0 do  $n$ . K výpočtu hodnoty  $V(m, n)$  dále podle definice funkce  $V$  musíme znát hodnotu  $V(m - 1, n + 1)$ . Určení této hodnoty ze stejných důvodů jako v případě  $x = m$  vyžaduje znát všechny hodnoty  $V(m - 1, y)$  pro  $y$  od 0 do  $n + 1$ , tedy celkem  $n + 2$  hodnot funkce  $V$ . Mezi těmito  $n + 2$  hodnotami jsou již obsaženy také všechny hodnoty, které potřebujeme znát pro výpočet  $V(m, n - 1), V(m, n - 2), \dots, V(m, 1)$ . Zbývá vyřešit případ hodnoty  $V(m, 0)$ , k jejímuž výpočtu potřebujeme znát  $V(m - 1, m - 1)$ . Pro stanovení poslední uvedené hodnoty musíme opět ze stejných důvodů znát všechny hodnoty

$V(m-1, y)$  pro  $y$  od 0 do  $m-1$ . Zavedeme-li označení  $d = \max(n+1, m-1)$ , lze tedy počet potřebných hodnot funkce  $V$  pro  $x = m-1$  vyjádřit jako  $d+1$ . Jsou to hodnoty  $V(m-1, y)$  pro  $y$  od 0 do  $d$ .

S postupně klesající hodnotou prvního argumentu funkce  $V$  nyní počet hodnot této funkce, které je třeba spočítat, stále roste po jedné. Pro výpočet čísla  $V(m-1, d)$  totiž potřebujeme znát  $V(m-2, d+1)$ , a tedy také všechny  $V(m-2, y)$  pro  $y$  od 0 do  $d+1$  atd. Problémy nyní nedělá ani výpočet hodnot  $V(x, 0)$  pro  $x < m$ . Hodnota  $V(m-1, 0)$  je stanovena definicí funkce  $V$  jako  $V(m-2, m-2)$  a jistě  $m-2 < d+1$ . Pro  $x = 0$  budeme tedy potřebovat znát hodnoty  $V(0, y)$  pro  $y$  od 0 do  $d+m-1$ , tzn. celkem  $d+m$  hodnot. Tyto hodnoty jsou již podle definice funkce  $V$  přímo dány a neodkazují se na žádné další hodnoty.

Počet všech potřebných hodnot funkce  $V$  pro výpočet  $V(m, n)$  jsme tedy stanovili takto:

|               |                               |
|---------------|-------------------------------|
| pro $x = m$   | ... $n+1$ hodnot funkce $V$   |
| pro $x = m-1$ | ... $d+1$ hodnot funkce $V$   |
| pro $x = m-2$ | ... $d+2$ hodnot funkce $V$   |
| .....         |                               |
| pro $x = 1$   | ... $d+m-1$ hodnot funkce $V$ |
| pro $x = 0$   | ... $d+m$ hodnot funkce $V$   |

Zbývá provést jednu malou ne příliš významnou korekci. V případě  $x = 0$  není třeba počítat hodnotu  $V(0, 1)$ , neboť k vyjádření  $V(1, 0)$  potřebujeme znát  $V(0, 0)$  a k vyjádření hodnot  $V(1, 1)$ ,  $V(1, 2)$ , ...,  $V(1, d+m-2)$  potřebujeme po řadě  $V(0, 2)$ ,  $V(0, 3)$ , ...,  $V(0, d+m-1)$ . Od výsledného počtu potřebných hodnot  $V$  tedy můžeme odečíst 1.

Celkový počet potřebných hodnot funkce  $V$  nyní získáme součtem:

$$\begin{aligned}(n+1) + (d+1) + (d+2) + \dots + \\ + (d+m-1) + (d+m) - 1 = \\ = n + md + \frac{1}{2}m(m+1),\end{aligned}$$

kde  $d = \max(n+1, m-1)$ .

Uvedený vzorec platí pro výpočet libovolné hodnoty  $V(m, n)$ , pokud  $m > 0$ . V případě  $m = 0$  stačí samozřejmě spočítat pouze jedinou (požadovanou) hodnotu funkce  $V$ .

b) Pro výpočet hodnoty  $V(m, n)$  musí algoritmus postupně spočítat všechny potřebné hodnoty funkce  $V$ , jejichž celkový počet jsme stanovili v řešení úlohy a). Je třeba zvolit takové pořadí výpočtu hodnot funkce  $V$ , abychom v každém kroku používali pouze již spočtené hodnoty. Z definice funkce  $V$  je zřejmé, že toto vhodné pořadí je následující: počítáme hodnoty  $V(x, y)$  pro  $x$  rostoucí od 0 do  $m$  a pro každé takové  $x$  postupně pro  $y$  rostoucí od 0 do  $d+m-x$  (až v případě  $x = m$  stačí pouze pro  $y$  od 0 do  $n$ ).

Je třeba ještě uvážit, které předchozí hodnoty funkce  $V$  musí algoritmus uchovávat a jakou datovou strukturu tedy bude vhodné použít. Podle definice funkce  $V$  potřebujeme znát při výpočtu  $V(x, y)$  pro  $x > 0$  pouze některou z hodnot  $V(x-1, z)$ , kde  $z \geq y$  (viz 2. a 3. řádek definice), a případně ještě údaj  $V(x, y-1)$ . Pro uložení starších hodnot funkce  $V$  nám proto bude stačit jednorozměrné pole  $P[0 \dots d+m]$ , ve kterém budeme spočtené hodnoty funkce  $V$  postupně přepisovat přes sebe. V každém okamžiku, tj. při výpočtu čísla



$V(x, y)$ , mají uložené hodnoty  $P[j]$  následující význam:

pro  $j < y \dots P[j]$  má hodnotu  $V(x, j)$   
pro  $j \geq y \dots P[j]$  má hodnotu  $V(x - 1, j)$ .

Algoritmus výpočtu  $V(m, n)$  nyní zapíšeme v programovacím jazyce Pascal. Pro zjednodušení zápisu algoritmu budeme i pro  $x = m$  počítat všechny hodnoty  $V(x, y)$  pro  $y$  od 0 až do  $d$ .

**program** FUNKCE  $V$  (input, output);

**const**  $MAX = 100$ ;            {maximální velikost pole  $P$ ,  
                                  tn. maximální přípustná hodnota  
                                  pro  $m + n + 1$  a pro  $2m - 1$ }

**var**  $P$ : **array**[0 ..  $MAX$ ] **of** integer;  
                                  {zákl. datová struktura}  
     $M, N$ : integer; {argumenty ze vstupu}  
     $D$ : integer; {hodnota dle rozboru}  
     $I, J$ : integer; {pomocné proměnné}

**begin**

  read( $M, N$ );

**if**  $M = 0$  **then**

    writeln( $N + 1$ )

**else**

**begin**

**if**  $N + 1 > M - 1$  **then**  $D := N + 1$

**else**  $D := M - 1$ ; {vypočtená hodnota  $d$ }

**for**  $J := 0$  **to**  $D + M$  **do**  $P[J] := J + 1$ ;

                          {výpočet čísel  $V(1, y)$ }

```

for  $I := 1$  to  $M$  do {zbývající hodnoty  $V$ }
  begin
     $P[0] := P[I - 1]$ ;
    for  $J := 1$  to  $D + M - I$  do
       $P[J] := P[J - 1] + P[J + 1]$ 
    end;
  writeln( $P[N]$ )
end
end.

```

c) Při uvedené změně v definici funkce  $V$  se počet hodnot funkce  $V$  potřebný k výpočtu hodnoty  $V(m, n)$  sníží. Přesné stanovení tohoto počtu ovšem bude o něco obtížnější. Rozlišíme tři základní případy:

1.  $m \leq n$

Pro výpočet hodnoty  $V(m, n)$  potřebujeme znát  $V(m - 1, n - 1)$  a  $V(m - 1, n + 1)$ , k jejich vyjádření musíme zase použít hodnoty  $V(m - 2, n - 2)$ ,  $V(m - 2, n)$ ,  $V(m - 2, n + 2)$ , ... atd. Vzhledem k předpokladu  $m \leq n$  se nikdy nedostaneme k hodnotě  $V(x, 0)$  pro  $x > 0$  a nikdy se proto neuplatní druhý řádek v definici funkce  $V$  v zadání úlohy. Bude tudíž třeba spočítat

|                 |                               |
|-----------------|-------------------------------|
| pro $x = m$     | ... 1 hodnotu funkce $V$      |
| pro $x = m - 1$ | ... 2 hodnoty funkce $V$      |
| pro $x = m - 2$ | ... 3 hodnoty funkce $V$      |
| .....           |                               |
| pro $x = 0$     | ... $m + 1$ hodnot funkce $V$ |

tedy celkem  $1 + 2 + \dots + (m + 1) = \frac{1}{2}(m + 1)(m + 2)$  hodnot funkce  $V$ .

2.  $m > n$  a čísla  $m, n$  mají různou paritu (tzn. jedno je sudé a druhé liché).

Při výpočtu hodnoty  $V(m, n)$  zjistíme, že potřebujeme znát  $V(m-n, 0)$ . Uvažujme nejprve potřebný počet hodnot funkce  $V$  bez určování počtu hodnot nutných k vyjádření  $V(x, 0)$  pro  $x > 0$  (podle 2. řádku definice). Až do hodnot  $s \ x = m - n$  je situace stejná jako v případě 1. Je třeba spočítat

pro  $x = m \quad \dots$  1 hodnotu funkce  $V$   
 pro  $x = m - 1 \dots$  2 hodnoty funkce  $V$   
 .....  
 pro  $x = m - n \dots$   $n + 1$  hodnot funkce  $V$ .

Počet potřebných hodnot funkce  $V$  se dále nebude zvyšovat o 1 s každým snížením prvního argumentu funkce  $V$ , ale pouze při každém druhém snížení. Budeme totiž počítat hodnoty

$V(m-n, y)$  pro  $y = 0, 2, 4, \dots, 2n$   
 $V(m-n-1, y)$  pro  $y = 1, 3, 5, \dots, 2n+1$   
 $V(m-n-2, y)$  pro  $y = 0, 2, 4, \dots, 2n+2$   
 .....  
 $V(0, y)$  pro  $y = 1, 3, 5, \dots, 2n + (m-n) = m+n$ ,

neboť  $m, n$  mají různou paritu. Celkem je tedy třeba určit

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + \dots + n + \\ & + 2[(n+1) + (n+2) + \dots + \tfrac{1}{2}(m+n+1)] = \\ & = \tfrac{1}{2}n(n+1) + \tfrac{1}{4}(m+3n+3)(m-n+1) \end{aligned}$$

hodnot funkce  $V$ .

Zbývá vyřešit výpočet hodnot  $V(x, 0)$  pro  $x > 0$ . Je třeba spočítat  $V(m - n, 0)$ ,  $V(m - n - 2, 0)$ ,  $\dots$ ,  $V(1, 0)$ . Podle definice je třeba k určení  $V(m - n, 0)$  spočítat  $V(m - n - 1, m - n - 1)$ . Zatímco všechny dosud vyjadřované hodnoty funkce  $V$  měly argumenty různé parity, v tomto případě mají oba argumenty stejnou paritu a také k vyjádření hodnoty  $V(m - n - 1, m - n - 1)$  budeme potřebovat samé další hodnoty se stejnou paritou obou argumentů funkce  $V$ . Jedná se tedy o rozdílné hodnoty, než jaké jsme dosud počítali. Jejich počet určíme snadno podle již vyřešeného 1. případu. Bude jich třeba  $\frac{1}{2}(m - n)(m - n + 1)$ . Mezi těmito hodnotami jsou již obsaženy také všechny hodnoty potřebné k vyjádření čísel  $V(m - n - 2, 0)$ ,  $\dots$ ,  $V(1, 0)$ . Celkově je tedy nutné při výpočtu hodnoty  $V(m, n)$  určit

$$\frac{1}{2}n(n + 1) + \frac{1}{4}(m + 3n + 3)(m - n + 1) + \frac{1}{2}(m - n)(m - n + 1)$$

různých hodnot funkce  $V$ .

3.  $m > n$  a čísla  $m$ ,  $n$  mají stejnou paritu (tzn. jsou obě sudá nebo obě lichá).

Tento případ je velmi podobný předchozímu. Opět bude třeba spočítat pro  $x = m, m - 1, \dots, m - n$  po řadě 1, 2,  $\dots$ ,  $n + 1$  hodnot funkce  $V$ . Konkrétně pro  $x = m - n$  jsou to opět hodnoty  $V(m - n, y)$  pro  $y = 0, 2, \dots, 2n$ . Výpočet bude tentokrát končit hodnotami  $V(0, y)$  pro  $y = 0, 2, \dots, m + n$ , neboť  $m$ ,  $n$  mají nyní stejnou paritu. Bude tedy třeba určit

$$1 + 2 + \dots + n + \\ + 2[(n + 1) + (n + 2) + \dots + \frac{1}{2}(m + n)] + \frac{1}{2}(m + n) + 1 =$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{4}(m+3n+2)(m-n) + \frac{1}{2}(m+n) + 1$$

hodnot funkce  $V$ .

Opět zbývá dořešit výpočet hodnot  $V(x, 0)$  pro  $x > 0$ . Budou se počítat čísla  $V(m-n, 0)$ ,  $V(m-n-2, 0)$ ,  $\dots$ ,  $V(2, 0)$ . Stejně jako ve 2. případě je třeba spočítat hodnotu  $V(m-n-1, m-n-1)$ . Mezi hodnotami k tomu potřebnými budou již hodnoty funkce  $V$  nezbytné k vyjádření všech ostatních čísel  $V(m-n, 0)$ ,  $\dots$ ,  $V(2, 0)$ . Počet těchto hodnot můžeme opět vyjádřit pomocí výsledku 1. řešeného případu výrazem  $\frac{1}{2}(m-n)(m-n+1)$ .

Situace je nyní ovšem trochu komplikovanější tím, že jak tyto přidávané, tak i dříve spočítané hodnoty funkce  $V$  mají argumenty stejné parity, takže některé z hodnot jsou započítány v obou počtech. Zjistíme, kolik takových případů nastalo, a od celkového součtu je jednou odečteme. Z geometrického vyjádření obou množin hodnot v rovině snadno odvodíme, že se jedná o hodnoty nezbytné k vyjádření čísla  $V(\frac{1}{2}(m+n), \frac{1}{2}(m+n))$ , což je celkem  $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(m+n)+1][\frac{1}{2}(m+n)+2]$  různých hodnot.

Pro vyjádření  $V(m, n)$  je tedy v tomto případě nutné spočítat

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{4}(m+3n+2)(m-n) + \frac{1}{2}(m+n) + 1 + \\ & + \frac{1}{2}(m-n)(m-n+1) - \frac{1}{4}(m+n+2)(m+n+4) \end{aligned}$$

různých hodnot funkce  $V$ .

### P – III – 3

Předpokládejme, že proměnná  $N$  udává počet vrcholů zadaného  $N$ -úhelníku a že v polích  $AX$ ,  $AY$  jsou uloženy

$x$ -ové a  $y$ -ové souřadnice vrcholů  $A(1), \dots, A(N)$ . Indexy vrcholů  $1, 2, \dots, N$  budeme uvažovat uspořádané v tomto pořadí, jak za sebou následují na obvodu  $N$ -úhelníku. Po vrcholu  $A(N)$  následuje opět vrchol  $A(1)$ , uspořádání je tedy cyklické. V našem algoritmu budeme chtít pracovat s indexem vrcholu, který následuje jako  $d$ -tý za vrcholem s indexem  $i$ . Jeho pořadové číslo je  $i + d$ , pokud ovšem hodnota tohoto součtu nepřekročí  $N$ . Jinak je třeba vzhledem k cyklickému uspořádání index výsledného vrcholu počítat pomocí operace modulo  $N$ . Tento přepočít nám bude provádět pomocná funkce  $R$ , která je definována předpisem  $R(k) = (k - 1) \bmod N + 1$ . Tedy v pořadí  $d$ -tým vrcholem následujícím za  $A(i)$  je vrchol  $A(R(i + d))$ .

Vrcholy  $N$ -úhelníku jsou zadány svými kartézskými souřadnicemi. Při hledání minimální triangulace budeme potřebovat znát velikosti různých diagonál  $N$ -úhelníku. Délku úsečky spojující vrcholy  $A(k)$  a  $A(l)$  označme  $DIST(k, l)$ . Pomocná funkce  $DIST$  spočte vzdálenost vrcholů  $A(k)$  a  $A(l)$  snadno pomocí Pythagorovy věty. Výsledek je roven druhé odmocnině ze součtu kvadrátů rozdílů  $x$ -ových a  $y$ -ových souřadnic bodů  $A(k)$  a  $A(l)$ .

Hlavní datovou strukturou našeho algoritmu bude dvourozměrná tabulka reálných čísel  $T[1..N, 1..N - 2]$ . Tabulku  $T$  budeme postupně zaplňovat tak, aby hodnotou  $T[i, d]$  byla minimální možná velikost triangulace mnohoúhelníku  $A(i)A(R(i + 1)) \dots A(R(i + d))$ , zvětšená ještě o délku úsečky  $A(i)A(R(i + d))$ . Budeme tedy uvažovat mnohoúhelníky tvořené  $d + 1$  sousedními vrcholy původního zadaného  $N$ -úhelníku. Pro každé pevně zvolené  $d$  z rozmezí od 2 do  $N - 2$  je takových mnohoúhelníků přesně  $N$  různých, neboť

je  $N$  možných voleb indexu  $i$ . Pro  $d = N - 1$  je již takový mnohoúhelník jediný a je jím celý původní  $N$ -úhelník.

Pro  $d = 1$  definujeme  $T[i, d] = 0$  pro všechna  $i$  od 1 do  $N$ . Výpočet dalších hodnot  $T[i, d]$  bude probíhat postupně po krocích pro  $d$  rostoucí od 2 do  $N - 2$  a pro každé takové  $d$  vždy pro všechna  $i$  od 1 do  $N$ . Každou jednotlivou hodnotu  $T[i, d]$  udávající minimální triangulaci mnohoúhelníku  $A(i)A(R(i+1)) \dots A(R(i+d))$  zvětšenou o délku úsečky  $A(i)A(R(i+d))$  spočteme následujícím způsobem: Každá triangulace uvedeného mnohoúhelníku obsahuje dvojici úseček  $A(i)A(R(i+j))$ ,  $A(R(i+j))A(R(i+d))$  pro nějaké číslo  $j$  z rozmezí 1 až  $d - 1$ . Triangulace totiž musí dělit plochu mnohoúhelníku na samé trojúhelníky, jeden z takto vzniklých trojúhelníků musí mít jako jednu svoji stranu úsečku  $A(i)A(R(i+d))$  a jeho třetím vrcholem pak musí být právě nějaký bod  $A(R(i+j))$ . Při výpočtu hodnoty  $T[i, d]$  proto budeme postupně zkoumat triangulace obsahující dvojici úseček  $A(i)A(R(i+j))$ ,  $A(R(i+j))A(R(i+d))$  pro všechna  $j$  od 1 do  $d - 1$  (což jsou všechny existující triangulace, jak jsme právě vysvětlili). Velikost každé takové triangulace snadno spočteme jako součet hodnot  $T[i, j]$  a  $T[R(i+j), d - j]$ , které již známe z předchozích kroků výpočtu, neboť tabulku  $T$  zaplňujeme postupně od nejmenších hodnot proměnné  $d$  k největším a platí jak  $j < d$ , tak i  $d - j < d$ . Za hodnotu  $T[i, d]$  nyní stačí vzít minimální hodnotu ze všech velikostí takových triangulací pro  $j$  od 1 do  $d - 1$  a přičíst k ní ještě délku úsečky  $A(i)A(R(i+d))$ .

Po zaplnění celé tabulky  $T$  lze nalézt výsledek úlohy mezi hodnotami  $T[i, N - 2]$ . Pro každou hodnotu indexu  $i$  od 1 do  $N$  udává  $T[i, N - 2]$  minimální velikost triangulace

mnohoúhelníku  $A(i) \dots A(R(i + N - 2))$  zvětšenou o délku úsečky  $A(i)A(R(i + N - 2))$ . Čísla  $T[i, N - 2]$  jsou tedy všechna velikostmi jistých triangulací zadaného  $N$ -úhelníku a nejmenší z nich je hledanou minimální možnou velikostí triangulace.

Z uvedeného rozboru vyplývá správnost navrženého algoritmu. Výpočet podle algoritmu je jistě konečný, neboť počet všech opakování v cyklech je předem omezen hodnotou proměnné  $N$ . Základem algoritmu je výpočet hodnot uložených v tabulce  $T$ . Počet těchto počítaných hodnot  $T[i, d]$  je úměrný  $N^2$  (= velikost tabulky  $T$ ). Přitom výpočet jednoho čísla  $T[i, d]$  představuje řádově  $N$  operací (pro jednotlivé možné volby indexu  $j$ ). Celý algoritmus má tedy časovou složitost  $N^3$ .

```

program TRIANGULACE (input, output);
const MAX = 100; {maximální počet vrcholů}
var AX, AY: array[1 .. MAX] of real;
           {souřadnice vrcholů}
    N: integer; {počet vrcholů}
    T: array[1 .. MAX, 1 .. MAX] of real;
           {tabulka dle rozboru}
    I, J, D: integer; {pomocné proměnné}
    M, Q: real; {pro výpočet minim}

function R (K: integer): integer;
    {přepočet indexů vrcholů modulo N}
begin
    R := (K - 1) mod N + 1
end; {R}

```



```

function DIST (K, L: integer): real;
    {vzdálenost bodů v rovině}
begin
    DIST := sqrt(sqr(AX[K] - AX[L]) +
                  + sqr(AY[K] - AY[L]))
end; {DIST}

begin
    {Načtení vstupních dat;}
    read(N);
    for I := 1 to N do
        begin
            read(AX[I], AY[I]);
            T[I, 1] := 0
        end;

    {Zaplnění tabulky T:}
    for D := 2 to N - 2 do
        for I := 1 to N do
            begin
                M := 0; {libovolná inicializace proměnné M}
                for J := 1 to D - 1 do
                    begin
                        Q := T[I, J] + T[R(I + J), D - J];
                        if (Q < M) or (J = 1) then M := Q
                            {výběr minimální triangulace}
                    end;
                        T[I, D] := M + DIST(I, R(I + D))
                    end;

    {Stanovení výsledné hodnoty jako minimum z T[I, N - 2]:}
    M := T[1, N - 2];

```

**for**  $I := 2$  **to**  $N$  **do**

**if**  $T[I, N - 2] < M$  **then**  $M := T[I, N - 2]$ ;

writeln('Minimální velikost triangulace');

writeln('zadaného mnohoúhelníku: ',  $M$ )

**end.**

## P – III – 4

Budeme řešit pouze úlohu b), neboť tato úloha je obecnější a její řešení v sobě zahrnuje i řešení úlohy a). Samostatné řešení úlohy a) s použitím aritmetických operací zakázaných v b) se příliš neliší, základní myšlenka řešení i efektivita výsledného programu zůstává zachována, pouze zápis algoritmu se mírně zjednoduší.

V programu je nutné porovnávat mezi sebou různé dvojice hodnot. Porovnání jsme dosud prováděli pomocí příkazu SUB. Stačí si ovšem uvědomit, že odečíst od čísla jistou konstantu znamená totéž jako přičíst k němu stejnou konstantu, ovšem s opačným znaménkem. Tímto způsobem nahradíme operace SUB příkazy ADD, jejichž použití není zakázáno.

Úlohu je možné řešit mnoha různými způsoby. Ukážeme si zde dvě řešení, z nichž každé jiným způsobem využívá zásobníku k uchování potřebných údajů. V prvním řešení se do zásobníku ukládají pouze čítače obsahující vhodné informace o počtech čísel na vstupu. Hodnoty těchto čítačů se v průběhu výpočtu mění pomocí aritmetických operací. Druhé řešení úlohy používá zásobník přímo k uložení čísel ze vstupu. Počty uložených čísel tak vlastně nahrazují hodnoty čítačů z předchozího řešení.

První varianta řešení úlohy spočívá v provedení následujících kroků výpočtu:

1. Ze vstupu se čtou čísla „10“. V zásobníku se přitom udržuje čítač, jehož hodnota se průběžně zvyšuje o 1, takže po přečtení všech „10“ ze vstupu čítač udává jejich počet.

2. Ze vstupu se čtou čísla „20“. V zásobníku se přitom udržují dva čítače, jejichž hodnota se průběžně mění. Na dně zásobníku se od dříve stanoveného počtu „10“ vždy odečte 1 a na vrcholu zásobníku se počítá počet všech „20“ přičítáním 1 k druhému čítači. Po přečtení všech čísel „20“ ze vstupu jsou v zásobníku uloženy dvě hodnoty: na dně zásobníku je rozdíl počet „10“ — počet „20“ a na vrcholu počet „20“.

3. Je-li hodnota udávající rozdíl počtu „10“ a „20“ nulová, vytiskne se „1“ jako výsledek práce algoritmu a ukončí se výpočet. Jinak se tato hodnota ponechá na dně zásobníku pro další použití, nad ní na vrcholu zásobníku zůstává uložen počet „20“ a pokračuje se ve výpočtu následujícím krokem.

4. Ze vstupu se čtou čísla „30“. Přitom se průběžně snižuje o 1 hodnota čítače uloženého na vrcholu zásobníku, takže po přečtení všech čísel ze vstupu bude tento čítač udávat rozdíl počet „20“ — počet „30“.

5. Je-li hodnota udávající rozdíl počtu „20“ a „30“ nulová, vytiskne se „1“ jako výsledek práce algoritmu a ukončí se výpočet. Jinak se tato hodnota ponechá na vrcholu zásobníku pro další použití, pod ní na dně zásobníku zůstává nadále uložen rozdíl počtu „10“ a „20“ a pokračuje se ve výpočtu následujícím krokem.

6. Sečtou se obě hodnoty uložené v zásobníku. Tyto hod-

noty představují dříve zjištěné rozdíly (počet „10“ — počet „20“) a (počet „20“ — počet „30“). Výsledkem tohoto součtu je hodnota rozdílu (počet „10“ — počet „30“).

7. Je-li výsledný rozdíl nulový, algoritmus vytiskne výsledek „1“, jinak vytiskne „0“. Tím je úloha vyřešena a algoritmus ukončí svoji práci.

|                             |                                 |
|-----------------------------|---------------------------------|
| <i>CONST</i> -1             | (počet „10“ je zatím nulový ..) |
| <i>PUSH</i>                 | (... z techn. důvodů dáme -1)   |
| <i>IN</i>                   |                                 |
| <i>PUSH</i>                 | (na vrcholu je přečtené číslo)  |
| <i>CONST</i> -10            |                                 |
| <i>ADD</i>                  |                                 |
| <b>while</b> <i>ZERO</i> do |                                 |
| <b>begin</b>                | (přečtené číslo je „10“)        |
| <i>POP</i>                  | (zrušení „10“ ze zásobníku)     |
| <i>CONST</i> 1              |                                 |
| <i>ADD</i>                  | (zvýšíme hodnotu čítače o 1)    |
| <i>EXCH</i>                 | (uložíme novou hodnotu čítače)  |
| <i>IN</i>                   |                                 |
| <i>PUSH</i>                 | (další číslo ze vstupu do zás.) |
| <i>CONST</i> -10            |                                 |
| <i>ADD</i>                  | (otestujeme, zda je to „10“)    |
| <b>end</b>                  |                                 |
| <i>CONST</i> 1              | (máme přečtenou první „20“)     |
| <i>EXCH</i>                 | (založení druhého čítače)       |

(za toto první číslo „20“ nemusíme snižovat hodnotu čítače na dně zásobníku díky počáteční inicializaci na -1 místo na 0 v prvním řádku programu; na

dně zásobníku je nyní počet „10“ zmenšený o 1 a na vrcholu hodnota 1 — zatím bylo přčteno jedno číslo „20“)

*IN*

*PUSH* (přečtené číslo na vrcholu)

*CONST -20*

*ADD* (otestujeme, zda je to „20“)

**while** *ZERO* do

**begin** (přečtené číslo je „20“)

*POP* (zrušení „20“ ze zásobníku)

*CONST 1*

*ADD* (nová hodnota horního čítače)

*POP*

*EXCH* (záměna uložení čítačů)

*PUSH*

*CONST -1*

*ADD* (nová hodnota druhého čítače)

*POP*

*EXCH* (obnova uložení čítačů)

*PUSH*

*IN*

*PUSH* (další číslo ze vstupu do zás.)

*CONST -20*

*ADD* (otestujeme, zda je to „20“)

**end**

(nyní je v zásobníku uložen rozdíl počtu „10“ a „20“, nad ním je počet „20“, na vrcholu zásobníku první číslo „30“ přečtené ze vstupu)

|                         |                                 |
|-------------------------|---------------------------------|
| <i>POP</i>              |                                 |
| <i>TOP</i>              | (horní čítač do registru)       |
| <i>POP</i>              |                                 |
| <i>EXCH</i>             | (záměna čítačů)                 |
| <b>if ZERO then</b>     |                                 |
| <i>CONST</i> 1          | (počet „10“ = počet „20“)       |
| <b>else</b>             |                                 |
| <b>begin</b>            |                                 |
| <i>EXCH</i>             | (obnova uložení čítačů)         |
| <i>PUSH</i>             |                                 |
| <i>CONST</i> -1         |                                 |
| <i>ADD</i>              | (již jsme přečetli první „30“)  |
| <i>EXCH</i>             | (nová hodnota horního čítače)   |
| <b>while not EOF do</b> |                                 |
| <b>begin</b>            |                                 |
| <i>IN</i>               | (přečtení čísla „30“ ze vstupu) |
| <i>CONST</i> -1         |                                 |
| <i>ADD</i>              | (snížení hodnoty čítače)        |
| <i>EXCH</i>             |                                 |
| <b>end</b>              |                                 |

(nyní jsou přečtena všechna čísla ze vstupu; v zásobníku jsou uloženy rozdíly počtu „10“ a „20“ a počtu „20“ a „30“)

|                     |                           |
|---------------------|---------------------------|
| <i>TOP</i>          | (horní čítač do registru) |
| <b>if ZERO then</b> |                           |
| <i>CONST</i> 1      | (počet „20“ = počet „30“) |
| <b>else</b>         |                           |
| <b>begin</b>        |                           |
| <i>POP</i>          |                           |

```

      ADD          (součet obou čítačů)
    if ZERO then
      CONST 1      (počet „10“ = počet „30“)
    else
      CONST 0      (záporný výsledek)
    end
  end
end
OUT              (tisk výsledku)

```

Druhá varianta řešení zadané úlohy se skládá z postupného provedení následujících kroků výpočtu:

1. Ze vstupu se přečtou všechna čísla „10“. Průběžně se ukládají do zásobníku a v čítači udržovaném na vrcholu zásobníku se zároveň spočítá jejich počet.

2. Ze vstupu se přečtou všechna čísla „20“. Ukládají se do zásobníku nad čísla „10“, která byla do zásobníku vložena v předcházejícím kroku. Odčítáním jedničky za každé uložené číslo „20“ od čítače udržovaného na vrcholu zásobníku se určí rozdíl počtu čísel „10“ a „20“.

3. Je-li tento rozdíl nulový, vytiskne se „1“ jako výsledek práce algoritmu a ukončí se výpočet. Jinak se čítač z vrcholu zásobníku zruší a pokračuje se ve výpočtu následujícím krokem.

4. Ze vstupu se přečtou všechna čísla „30“. Při jejich čtení se průběžně vypouštějí čísla „20“ ze zásobníku, dokud je to možné (za každé přečtené číslo „30“ se vypustí jedno číslo „20“ ze zásobníku). Tím se určí rozdíl počtu „30“ a „20“. Zároveň se v čítači udržovaném na vrcholu zásobníku spočítá počet všech přečtených čísel „30“.

5. Je-li na vstupu stejný počet čísel „30“ a „20“, je možné vypustit ze zásobníku za každé čtené číslo „30“ jedno číslo „20“ (tj. nestane se, že by se během čtení „30“ ze vstupu narazilo v zásobníku na číslo „10“ uložené pod všemi „20“) a po přečtení všech čísel ze vstupu už naopak v zásobníku žádné číslo „20“ nezbude. V takovém případě vytiskne algoritmus výsledek „1“ a skončí. Jinak se ze zásobníku vypustí všechna zbylá čísla „20“ (jsou-li tam nějaká) a pokračuje se ve výpočtu následujícím krokem.

6. Porovná se počet čísel „30“ zaznamenaný v čítači na vrcholu zásobníku s počtem čísel „10“ uložených v zásobníku pod tímto čítačem. Toho dosáhneme postupným vypouštěním čísel „10“ a současným snižováním hodnoty čítače.

7. Jsou-li tyto počty stejné, algoritmus vytiskne výsledek „1“, jinak vytiskne „0“. Tím je úloha vyřešena a algoritmus ukončí svoji práci.

Naprogramování uvedeného postupu řešení je opět pouze technickou záležitostí. Kroky 1 až 3 jsou snadné. V kroku 4 je výhodné zavést zvláštní pomocnou hodnotu ukládanou do zásobníku jako příznak v případě, že při vybírání čísel „20“ ze zásobníku zjistíme, že jich je méně, než kolik je „30“ na vstupu. Tento příznak nám umožní rozhodnout o dalším postupu v kroku 5. Můžeme použít například číslo „40“, kterým nahradíme číslo „10“ ležící v zásobníku nejbližší k vrcholu hned pod čísly „20“. Zbývající kroky výpočtu jsou již opět snadné.



Korespondenční seminář je jednou z forem péče o talentované žáky. Vznikl ve 24. ročníku MO proto, aby bylo možno věnovat individuální péči i těm žákům, kteří neměli možnost navštěvovat speciální školy a pracovat v tamních seminářích. Nyní, kdy existují i krajské korespondenční semináře a kdy speciální školy s třídami zaměřenými na matematiku najdeme v každém kraji, je cílem tohoto semináře zlepšit individuální přípravu všech studentů, kteří prokázali své schopnosti a matematický talent v předchozích ročnících matematické olympiády. Korespondenční seminář tak nadále zůstává důležitou součástí přípravy na mezinárodní matematickou olympiádu.

K účasti v korespondenčním semináři jsme pozvali všechny špičkové řešitele kategorie A spolu s těmi studenty, kteří nějak vynikli v krajských kolech kategorií B a C předchozího ročníku MO. V průběhu 39. ročníku MO jim bylo postupně zasláno 5 sérií poměrně náročných úloh, jejichž texty najdete v úlohové části této ročenky (tentokrát poprvé s řešeními). Došlá řešení pak byla opravena, ohodnocena a s rozmnoženým komentářem vrácena účastníkům semináře. Nejlepšími v celkovém hodnocení byli:

1. *Petr Hliněný*, 4. ročník G M. Koperníka, Bílovec
2. *Vladimír Skalský*, 4. ročník G, T. Ševčenka, Prešov
3. *Štěpán Kasal*, 3. ročník G, Korunní, Praha
4. *Ondřej Kalenda*, 4. ročník G, Korunní, Praha
5. *Martin Dindoš*, 4. ročník G J. Hronce, Bratislava
6. *Martin Čížek*, 4. ročník G, Rožnov p. Radhoštěm
7. *Ján Bajcsy*, 4. ročník G A. Markuša, Bratislava
8. *Vladimír Glasnák*, 3. ročník G, V. Okružná, Žilina
9. *Martin Schnabl*, 4. ročník G, Korunní, Praha
- 10.–11. *Jan Hannig*, 3. ročník G, Korunní, Praha
- 10.–11. *Ondřej Šuch*, 4. ročník G A. Markuša, Bratislava

Korespondenční seminář je řízen tajemníkem ÚV MO RNDr. *Karlem Horákem*, CSc., který se staral o výběr úloh a prováděl i redakci komentářů. Opravu pak zajišťovalo několik pracovníků MÚ ČSAV a několik studentů a aspirantů MFF UK Praha (všichni jsou bývalí olympionici).

## Úlohy korespondenčního semináře

**1.1** Zjistěte, jaká je nejdelší cesta, po které může šachový král obejít celou šachovnici  $8 \times 8$  tak, že každé pole projde právě jednou a vrátí se na výchozí pole, přičemž jeho cesta spojující středy jednotlivých polí tvoří uzavřenou neprotínající se lomenou čáru.

**1.2** Na listu čtverečkováného papíru  $n \times n$  jsou některé čtverečky obarveny jednou z  $n$  různých barev. Pravidelným obarvením budeme rozumět takové obarvení čtverečků, při němž v žádném řádku ani sloupci nejsou dva čtverečky stejné barvy. Lze vždy pravidelně „dobarvit“ všechny čtverečky, jestliže už je (pravidelně) obarveno

- a)  $n^2 - 1$  čtverečků,
- b)  $n^2 - 2$  čtverečků,
- c)  $n$  čtverečků?

**1.3** Dokažte, že rovnostranný (ne nutně pravidelný) konvexní pětiúhelník obsahuje rovnostranný trojúhelník se stranou téže délky jako strana daného pětiúhelníku.

**1.4** Je dán jednotkový čtverec, z něhož odřízneme rohy — čtyři trojúhelníky, jejichž dvě strany tvoří  $\frac{1}{3}$  příslušné strany čtverce. Se vzniklým osmiúhelníkem provedeme tutéž operaci: z každého jeho vrcholu odřízneme trojúhelník, jehož dvě strany tvoří vždy  $\frac{1}{3}$  příslušných stran osmiúhelníku, atd. Dostaneme tak posloupnost mnohoúhelníků (každý další je zřejmě částí předchozího). Určete obsah průniku všech takovýchto mnohoúhelníků.

**1.5** V kruhové aréně o poloměru 10 m pobíhá lev. Pohybem po lomené čáře uběhl celkem 30 km. Dokažte, že součet všech úhlů, o něž se při běhu otočil, je aspoň 2 998 rad.

**1.6** Dokažte, že součet

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} 1989 + \binom{n}{5} 1989^2 + \dots$$

je pro každé přirozené  $n$  dělitelný číslem  $2^{n-1}$ .

**1.7** V prostoru je dán trojhran, v němž jsou sestrojeny osy jednotlivých rovinných úhlů. Dokažte, že vzájemné úhly těchto os jsou buď vesměs ostré, nebo vesměs tupé, anebo všechny pravé.

**2.1** Stěny jednotkové krychle jsou označeny čísly  $1, 2, \dots, 6$  tak, že součet čísel na protějších stěnách je 7. Krychli budeme přemísťovat z levého spodního rohu šachovnice  $50 \times 50$  do protějšího rohu tak, že ji budeme otáčet kolem jedné z jejích hran, aby se pohybovala doprava nebo nahoru. Přitom každému poli šachovnice přiřadíme číslo té stěny, která na něm stála. Najděte nejmenší a největší možný součet uvedených 99 čísel.

**2.2** Přiřaďme krajním bodům dané úsečky čísla  $1$ , jejímu středu pak přiřadíme jejich součet, tj.  $2$ . V každém následujícím kroku napíšeme mezi každá dvě už napsaná sousední čísla jejich součet. Kolikrát bude mezi čísla, která dostaneme po 1 973. kroku, zapsáno číslo 1 973?

**2.3** V rovině jsou dány dva body  $A, B$ . Zvolme bod  $C$  ležící na ose úsečky  $AB$  a sestrojme posloupnost  $C_1 = C, C_2, \dots, C_n, C_{n+1}, \dots$ , kde  $C_{n+1}$  je střed kružnice opsané trojúhelníku  $ABC_n$ . Pro jakou polohu bodu  $C$  bude bod  $C_n$  středem úsečky  $AB$  (takže  $C_{n+1}$  a další body posloupnosti nebudou definovány)? A v jakém případě vyjde  $C_n = C$ ?

**2.4** Jsou dána reálná čísla  $a_1, a_2, \dots, a_n$  a  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , která splňují aspoň jednu z následujících dvou podmínek:

- a) jestliže  $a_i < a_j$ , pak  $b_i \leq b_j$ ,
- b) jestliže  $a_i < \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} < a_j$ , pak  $b_i \leq b_j$ .

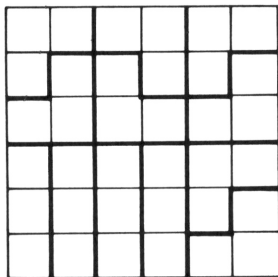
Dokažte, že pak platí

$$\begin{aligned} n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) &\geq \\ &\geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n). \end{aligned}$$

**2.5** Předpokládejme, že chceme sestrojit body  $M_1, M_2, \dots, M_n$  v rovině, jestliže jsou dány jejich vzájemné vzdálenosti  $r_{ij} = |M_i M_j|$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ). Lze tyto body sestrojit, jestliže víme, že libovolná pětice z uvažovaných  $n$  bodů sestrojit jde? Nestačí požadovat možnost sestrojení libovolné čtveřice? Jaké bude nejmenší  $k$  v prostoru takové, že možnost sestrojení libovolné  $k$ -tice z uvažovaných  $n$  bodů zaručí možnost sestrojení všech  $n$  bodů (na základě daných čísel  $r_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ )?

**2.6** V rovině jsou dány dvě přímky  $m, n$  a bod  $O$ . Sestrojte trojúhelník, jehož výšky leží na daných přímkách  $m$  a  $n$  a pro který je bod  $O$  středem kružnice opsané.

**2.7** Zjistěte, pro která  $k$  se dá čtverec  $6 \times 6$  zaplnit 12 plátky, z nichž  $k$  má tvar úhelníku a  $12 - k$  pravoúhelníku (každý obsahuje tři čtverečky — obr. 28).



Obr. 28

**3.1** Jsou dána přirozená čísla  $1 < k < n$ . Určete nejmenší přirozené číslo  $m$  tak, aby platilo: Je-li na šachovnici  $n \times n$

rozmístěno libovolným způsobem  $m$  věží, můžeme jich vybrat  $k$  tak, že žádné dvě se nebudou navzájem ohrožovat.

**3.2** Pro dané  $x$  můžeme hodnotu  $x^8$  určit pomocí tří operací:  $x^2 = x \cdot x$ ,  $x^4 = x^2 \cdot x^2$ ,  $x^8 = x^4 \cdot x^4$ ; podobně lze  $x^{15}$  určit pomocí pěti operací (když k uvedeným operacím přidáme ještě  $x^{16} = x^8 \cdot x^8$ ,  $x^{15} = x^{16} : x$ ). Dokažte, že

- a)  $x^{1000}$  je možno určit pomocí 12 operací (násobení a dělení),
- b) pro každé přirozené  $n$  můžeme určit  $x^n$  pomocí nejvýše  $\frac{3}{2} \log_2 n + 1$  operací.

**3.3** Označme  $A_i H_i$  výšku a  $A_i M_i$  těžnici ostroúhlého trojúhelníku  $A_1 A_2 A_3$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Dokažte, že jeden ze součinů  $|H_1 M_1| \cdot |A_2 A_3|$ ,  $|H_2 M_2| \cdot |A_3 A_1|$ ,  $|H_3 M_3| \cdot |A_1 A_2|$  se rovná součtu zbylých dvou. Platí toto tvrzení i pro tupoúhlý či pravoúhlý trojúhelník?

**3.4** Do konvexního  $n$ -úhelníku  $A_1 A_2 \dots A_n$  je vepsán  $n$ -úhelník  $B_1 B_2 \dots B_n$ , který má obsah  $P$  (přitom vrchol  $B_i$  leží na straně  $A_i A_{i+1}$  pro  $i = 1, 2, \dots, n-1$  a vrchol  $B_n$  na straně  $A_n A_1$ ). Zároveň je mnohoúhelníku  $A_1 A_2 \dots A_n$  opsán  $n$ -úhelník  $C_1 C_2 \dots C_n$ , jehož obsah je  $Q$ , přičemž  $C_1 C_2 \parallel B_1 B_2$ ,  $C_2 C_3 \parallel B_2 B_3$ ,  $\dots$ ,  $C_n C_1 \parallel B_n B_1$  (vrchol  $A_i$  zase leží na straně  $C_{i-1} C_i$  pro  $i = 2, \dots, n$  a  $A_1$  na straně  $C_n C_1$ ). Určete obsah  $S$  mnohoúhelníku  $A_1 A_2 \dots A_n$ , popřípadě zjistěte, jaké hodnoty může  $S$  nabývat.

**3.5** Uvnitř hran  $EF$  a  $FG$  krychle  $ABCDEFGH$  jsou dány dva body  $K$  a  $M$  tak, že rovina  $KBM$  se dotýká koule, která je dané krychli vepsána. Dokažte, že velikost úhlu  $\varphi$  dvou

stěn čtyřstěnu  $HBKM$  se společnou hranou  $BH$  nezávisí na volbě bodů  $K$  a  $M$ . Najděte velikost tohoto úhlu  $\varphi$ .

**3.6** Na dvoře krále Artuše se sešlo  $n$  rytířů. Někteří z nich jsou v nepřátelském vztahu, ale každý z rytířů tu má aspoň  $\frac{1}{2}n$  přátel. Dokažte, že kouzelník Merlin, rádce krále Artuše, může rozesadit rytíře okolo kulatého stolu tak, aby každý z nich seděl vedle přátel.

Pokud má každý rytíř stejný sudý (samozřejmě nenulový) počet přátel, může Merlin rozesadit rytíře okolo několika (aspoň tří) kulatých stolů tak, aby nikdo neseděl vedle svého nepřítele (různě velkých stolů má dostatek). Dokažte.

**3.7** Najděte hodnotu odmocniny

$$\sqrt{0,\underbrace{111\,11\dots1\,111}_{{100}}1}$$

s přesností na dvě stě platných číslic.

**4.1** Najděte kořeny  $r_1, r_2, \dots, r_n$  rovnice

$$x^n + nx^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0,$$

víte-li, že platí  $r_1^{16} + r_2^{16} + \dots + r_n^{16} = n$  ( $n$  je dané přirozené číslo).

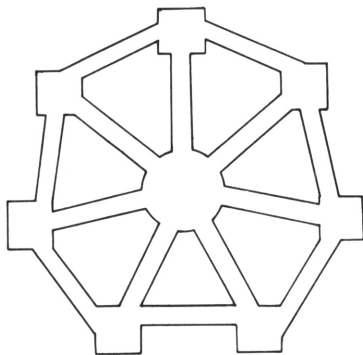
**4.2** Daný pravoúhelník  $R$  je rozdělen na konečný počet pravoúhelníků  $R_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , které se navzájem nepřekrývají, přičemž strany každého z nich jsou rovnoběžné se stranami  $R$  a každý z pravoúhelníků  $R_i$  má aspoň jednu stranu celočíselné délky. Dokažte, že i  $R$  má stranu celočíselné délky.

**4.3** V rovině jsou dány body  $O, A_1, \dots, A_4$  takové, že každý z trojúhelníků  $OA_iA_j$ ,  $1 \leq i < j \leq 4$ , má obsah aspoň 1. Dokažte, že pak pro některé dva body  $A_i, A_j$  má trojúhelník  $OA_iA_j$  obsah nejméně  $\sqrt{2}$ .

**4.4** Předpokládejme, že vrchol  $A$  ostroúhlého trojúhelníku  $ABC$  má od středu opsané kružnice a od průsečíku výšek stejnou vzdálenost. Určete všechny možné hodnoty úhlu při vrcholu  $A$ .

**4.5** Dané kružnici je opsán mnohoúhelník. Body dotyku tvoří vrcholy mnohoúhelníku vepsaného dané kružnici. Dokažte, že součin vzdáleností libovolného bodu  $M$  na kružnici od stran jednoho z mnohoúhelníků je roven součinu vzdáleností stejného bodu od stran druhého mnohoúhelníku. (Vzdáleností bodu od strany mnohoúhelníku tu rozumíme vzdálenost tohoto bodu od příslušné přímky.)

**4.6** Ve městě je jedno kruhové a  $n$  čtvercových náměstí, přičemž každé ze čtvercových náměstí je spojeno ulicí s kruho-



Obr. 29



vým a se dvěma čtvercovými (obr. 29). Na každé z  $2n$  ulic města je zaveden jednosměrný provoz tak, že na každé náměstí lze přijet a z každého náměstí lze odjet. Dokažte, že z každého náměstí lze dojet na libovolné jiné, aniž bychom narušili zavedená pravidla.

**4.7** Označme  $\alpha, \beta, \gamma$  úhly, které svírá tělesová úhlopříčka  $AG$  hranolu  $ABCDEFGH$  s hranami  $AB, AD$  a  $AE$ . Dokažte, že  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ .

**5.1** Jsou dána reálná čísla  $a, b$  a přirozené číslo  $n$ . Zjistěte, jakých hodnot může nabývat  $x_0$ , jestliže reálná čísla  $x_0, x_1, \dots, x_n$  splňují rovnosti

$$\sum_{i=0}^n x_i = a, \quad \sum_{i=0}^n x_i^2 = b.$$

**5.2** Jsou-li  $A_1, A_2, \dots, A_5$  body na povrchu jednotkové koule, jaká je největší hodnota výrazu

$$\min_{1 \leq i < j \leq 5} |A_i A_j|?$$

Určete všechny konfigurace bodů  $A_1, A_2, \dots, A_5$ , pro něž se uvedené maximum nabývá.

**5.3** Obchodník s koberci potřebuje určit rozměry nového koberce, ale nemůže najít metr. Při ukládání obdélníkového koberce však zjistil, že v každé ze dvou skladovacích místností může nový koberec položit na podlahu tak, že každý roh koberce se dotýká jiné stěny místnosti. Ty mají rozměry  $38 \times 55$  a  $50 \times 55$  m. Jak velký je nový koberec?

**5.4** Pro jaká přirozená čísla  $n \geq 2$  je nerovnost

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq p(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n)$$

splněna pro libovolná reálná čísla  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , jestliže a)  $p = 1$ , b)  $p = \frac{4}{3}$ , c)  $p = \frac{6}{5}$ ?

**5.5** Kružnice je body  $A_1, A_2, \dots, A_n$  rozdělena na  $n$  stejných částí, z nichž každá je obarvena nějakou barvou. Řekneme, že dva oblouky dané kružnice (jejich krajní body jsou některé z daných bodů) jsou shodně obarveny, jestliže při nějakém otočení dané kružnice se uvažované oblouky shodují včetně příslušných barev. Dokažte, že platí: Jestliže ke každému bodu  $A_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , existují dva shodně obarvené oblouky se společným krajním bodem  $A_i$ , pak lze celou kružnici rozdělit na několik shodně obarvených oblouků, tj. uvažované obarvení je „periodické“.

**5.6** Jsou dána čísla  $p > 1$ ,  $q > 1$ . Na stranách  $BC$ ,  $CD$  pravoúhelníku  $ABCD$  jsou dány body  $P$ ,  $Q$  tak, že  $|BC| = p|BP|$  a  $|CD| = q|QD|$ . Pro jaký poměr stran  $AB$  a  $BC$  bude úhel  $PAQ$  největší?

**5.7** V rohu šachovnice  $n \times n$  stojí šachová figurka, které obvykle říkáme jezdec. První hráč s ní táhne dvakrát po sobě obvyklým způsobem (2 pole v jednom směru rovnoběžném s okrajem šachovnice a 1 pole ve směru kolmém), zatímco druhý hráč táhne jedním prodlouženým tahem (o 3 pole v jednom směru a 1 pole ve směru kolmém). Oba hráči se střídají, přitom první se snaží postavit jezdce do protějšího rohu šachovnice, zatímco druhý mu v tom chce zabránit. Kdo z nich může vyhrát, jestliže je  $n \geq 4$ ?

## Řešení úloh korespondenčního semináře

**1.1** Král může táhnout buď rovnoběžně s některým okrajem šachovnice (rovně), anebo rovnoběžně s některou úhlopříčkou (šikmo). Nejprve dokážeme, že při své cestě musel udělat aspoň 28 rovných tahů.

Všimněme si okrajových polí šachovnice (obr. 30, je jich 28). Při své cestě musel král projít každým z nich. Očíslujme je čísla 1, 2, ..., 28 v tom pořadí, jak je král procházel. Tvrdíme, že pole 1 a 2, 2 a 3, 3 a 4, ..., 28 a 1 jsou sousední (tj. mají společnou hranu).

Skutečně, nebudou-li např. pole 1 a 2 sousední, pak část královny cesty mezi 1 a 2 rozdělí šachovnici na dvě části; každá z nich obsahuje jedno z okrajových polí, sousedících s 2 — nechť jsou to pole  $i$  a  $j$ ,  $3 \leq i < j \leq 28$ .

Při pokračování své cesty z 2 se král časem dostane do  $i$ , odtud pak do  $i + 1$ ,  $i + 2$ , ..., až by měl posléze dojít do  $j$ . Avšak úsek cesty mezi  $i$  a  $j$  zřejmě musí protnout úsek 1–2, což je spor se zadáním (cesta krále má být neprotínající se křivka). Pole 1 a 2 tedy musí být sousední; podobně 2 a 3, 3 a 4, ..., 28 a 1.

Uvažujme nyní obvyklé černobílé obarvení šachovnice. Pole 1 a 2 jsou sousední, mají tedy různou barvu. Odtud plyne, že během cesty 1–2 musel král udělat aspoň jeden rovný tah — při šikmých tazích se totiž barva políčka nemění. Podobně v částech 2–3, 3–4, ..., 28–1 musel král udělat aspoň jeden rovný tah, tj. udělal celkem aspoň 28 rovných tahů.

Označme  $r$  počet rovných,  $s$  počet šikmých tahů. Protože král prošel všechna pole, udělal 64 tahů, tedy  $r + s = 64$ .

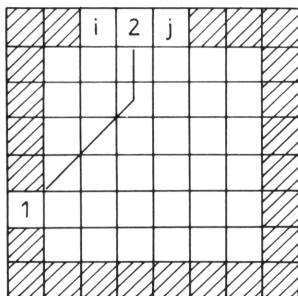
Délka jeho cesty pak bude

$$d = (r + s\sqrt{2})a = (r + (64 - r)\sqrt{2})a = (64\sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1)r)a,$$

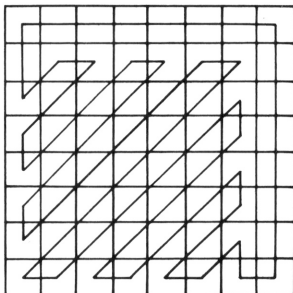
kde  $a$  je délka strany políčka šachovnice. Jelikož jsme ukázali, že  $r \geq 28$ , je nutně

$$d \leq (28 + 36\sqrt{2})a.$$

Na obr. 31 je příklad cesty, pro kterou  $r = 28$ , tj. pro kterou nastává v posledním vztahu rovnost.



Obr. 30

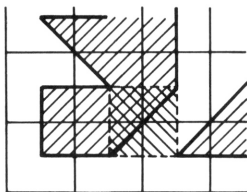


Obr. 31

Maximální délka tedy je  $(28 + 36\sqrt{2})a$ .

**Jiné řešení.** Uvažujme mřížové body, které jsou středy příslušných 64 polí dané šachovnice. Navíc budeme předpokládat, že pole této šachovnice mají jednotkovou stranu.

Pokud cesta spojuje dva sousední mřížové body „šikmo“, leží právě polovina příslušného čtverečku s úhlopříčkou délky  $\sqrt{2}$  uvnitř části omezené uvažovanou (uzavřenou) lomenou čarou (obr. 32), zatímco jeho druhá polovina leží vně.



Obr. 32

Přitom všechny takto sestrojené čtverečky leží uvnitř čtverce  $7 \times 7$ , který celou uzavřenou cestu obsahuje.

Obsah části uvnitř lomené čáry dovedeme spočítat podle známého Pickova vzorce: Obsahuje-li mnohoúhelník s vrcholy v mřížových bodech  $h$  mřížových bodů (včetně vrcholů) na hranici a  $u$  mřížových bodů uvnitř, je jeho obsah

$S = \frac{h}{2} + u - 1$ . Obsah příslušné části je tedy 31 a je

konstantní bez ohledu na délku odpovídající cesty. Pro počet  $s$  „šikmých“ tahů odtud plyne  $49 - 31 \geq \frac{s}{2}$ , tedy  $s \leq 36$ .

Obr. 32 ukazuje, že cesta s 36 šikmými tahy vskutku existuje.

**1.2** Pro stručnost nazývávejme „list čtverečkovaného papíru  $n \times n$ “ šachovnici. Snadno zjistíme, že v případech b) a c) šachovnici pravidelně dobarvit nelze; stačí vzít  $n = 2$  (takže  $n^2 - 2 = 2$ ) a šachovnici  $2 \times 2$  obarvit jako na obr. 33 (1, 2 jsou dvě různé barvy). Dále ukážeme, že v případě a) šachovnici dobarvit lze.

Předpokládejme, že v šachovnici  $n \times n$  je pravidelně obarveno  $n^2 - 1$  polí  $n$  barvami. Šachovnice má  $n$  sloupců, takže každá barva může být použita nejvýše  $n$ -krát (jinak by ně-

který sloupec obsahoval dvě pole stejné barvy). Protože je ale celkem obarveno  $n^2 - 1$  polí, musí se každá barva vyskytovat na šachovnici právě  $n$ -krát s výjimkou jediné, která se vyskytuje pouze  $(n - 1)$ -krát; označme tuto barvu  $B$ . Ukážeme, že touto barvou lze (pravidelně) dobarvit zbývající pole.

Označme  $S$  sloupec a  $R$  řádek, ve kterém se neobarvené pole nachází. Stačí zřejmě ukázat, že ani v  $S$ , ani v  $R$  se barva  $B$  nevyskytuje. Dokážeme to pro  $S$  (pro  $R$  je důkaz analogický).

V každém sloupci je pravidelně obarveno všech  $n$  polí  $n$  barvami, takže každá barva se tam vyskytuje právě jednou — i barva  $B$ . Takových sloupců je celkem  $n - 1$ , takže barva  $B$  se v nich vyskytuje  $(n - 1)$ -krát. Přesně tolikrát se ale  $B$  vyskytuje na celé šachovnici, takže ve sloupci  $S$  se už barva  $B$  nevyskytuje.

|   |   |
|---|---|
| 1 |   |
|   | 2 |

Obr. 33

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 |   | 2 | 3 | 4 | 5 |
|   | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 |
| 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 6 | 1 | 2 | 3 | 4 |

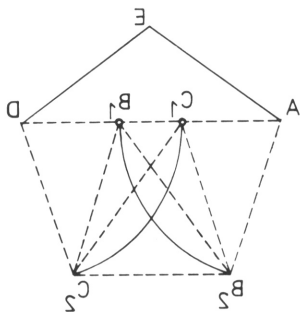
|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   | 2 |
|   |   |   |   | 2 |   |
|   |   |   | 2 |   |   |
|   |   | 2 |   |   |   |
|   | 2 |   |   |   |   |

Obr. 34

Kromě příkladu uvedeného v řešení lze uvést i příklad pro obecné  $n$  přirozené (obr. 34 pro  $n = 6$ ). Samozřejmě, že obecně nelze šachovnici  $n \times n$  dobarvit, ani když počet už obarvených polí leží mezi  $n$  a  $n^2 - 2$ . Na druhé straně

by bylo zajímavé najít nějaké jednoduché podmínky na dané obarvení, při nichž šachovnici (pravidelně) dobarvit lze! Také platí, že pokud je počet už obarvených polí menší než  $n$ , lze šachovnici vždy dobarvit (pokuste se to dokázat!).

**1.3** Předpokládejme, že existuje takový konvexní rovnoramenný pětiúhelník  $ABCDE$ , který požadovaný rovnostranný trojúhelník neobsahuje. Zároveň budeme předpokládat, že  $|AB| = 1$ . Jeho vrcholy označme např. tak,



Obr. 35

aby úhlopříčka  $AD$  byla největší (obr. 35), podle trojúhelníkové nerovnosti pak je

$$|AD| < |AE| + |ED| = 2.$$

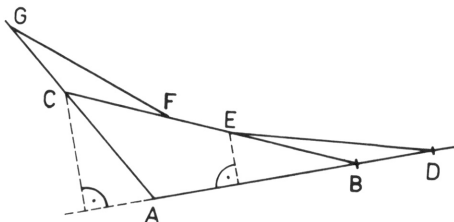
Protože v trojúhelnících  $ABD$ ,  $ACD$  je strana  $AD$  nejdelší, musí být úhly proti ní větší než  $60^\circ$ , je tedy také  $|\sphericalangle ABC| > 60^\circ$ ,  $|\sphericalangle BCD| > 60^\circ$ .

Protože předpokládáme, že pětiúhelník  $ABCDE$  neobsahuje žádný rovnostranný trojúhelník se stranou 1, plyne odtud, že rovnostranné trojúhelníky nad  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$

protínají úhlopříčku  $AD$ . Sestrojíme v polorovině, v níž leží i body  $B, C$ , rovnostranné trojúhelníky  $AB_1B_2, C_1C_2D$ , kde body  $B_1, C_1$  leží na  $AD$  a je  $|AB_1| = |C_1D| = 1$ .

Za uvedeného předpokladu tedy vychází, že bod  $B$  musí ležet uvnitř oblouku  $B_1B_2$  jednotkové kružnice se středem  $A$  a analogicky bod  $C$  uvnitř oblouku  $C_1C_2$ . Uvnitř lichoběžníku  $B_2C_2B_1C_1$  ale nenajdeme žádnou úsečku délky 1 (je  $|B_1B_2| = |C_1C_2| = 1$  a  $|B_2C_2| < 1$ ). Takový pětiúhelník tedy neexistuje. Uvedený postup lze snadno zobecnit na případ rovnostranného  $(2k + 1)$ -úhelníku.

**1.4** Předpokládejme, že v některém okamžiku jsme odřízli trojúhelník  $ABC$ . Uvažujme trojúhelníky  $BDE$  a  $CFG$ , které odřízneme (obr. 36). Pro jejich obsahy platí  $S(BDE) = \frac{1}{9}S(ABC)$ , protože  $|BD| = \frac{1}{3}|AB|$  a výška  $v_e$  v trojúhelníku  $BDE$  je rovna jedné třetině výšky  $v_c$  v trojúhelníku  $ABC$ , a podobně je i  $S(CFG) = \frac{1}{9}S(ABC)$ . V  $n$ -tém kroku tedy odřezáváme  $2^{n+1}$  trojúhelníků, jejichž obsahy dávají  $\frac{2}{9}$  součtu obsahů trojúhelníků odříznutých v  $(n - 1)$ -ním kroku.



Obr. 36



V prvním kroku odřezáváme 4 trojúhelníky o obsahu  $\frac{1}{18}$ .  
Hledaný obsah je tedy

$$S = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^n = 1 - \frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{2}{9}} = \frac{5}{7}.$$

**1.5** Předpokládejme, že lomená čára, která je dráhou lva, má krajní body  $X, Y$  a lomí se po řadě v bodech  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Označme  $\alpha_i$  orientovaný úhel otočení lva v bodě  $A_i$ . Dráhu lva nyní „narovnáme“ do přímky následujícím způsobem:

Pro  $i = 1, 2, \dots, n$  postupně vezmeme bod  $A_i$  a celou dráhu lva počínaje bodem  $A_i$  otočíme kolem středu  $A_i$  o úhel  $-\alpha_i$ . Při tomto otáčení se bude střed  $S$  arény pohybovat po části kružnice se středem  $A_i$ , která má délku  $d_i = |SA_i| \cdot |\alpha_i|$ . Pro jednoduchost budeme otočenou dráhu lva značit stejně jako před otočením. Po provedení dostaneme dráhu lva jako úsečku  $XY$ , která má délku 30 km, a leží na ní po řadě body  $X, A_1, A_2, \dots, A_n, Y$ . Nás však bude hlavně zajímat křivka, kterou při „narovnávání“ dráhy opsal bod  $S$ , a ta se skládá z oblouků kružnic. Její krajní body mají zřejmě od bodů  $X, Y$  vzdálenosti nejvýše 10 m. Pro délku křivky pak srovnáním s délkou úsečky  $XY$  snadno zjistíme, že

$$\begin{aligned} d &\geq 30\,000 - 2 \cdot 10 = 29\,980, \\ 29\,980 &\leq d = \sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n |SA_i| \cdot |\alpha_i| \leq \sum_{i=1}^n 10 |\alpha_i|, \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i &\geq 2\,998. \end{aligned}$$

Součet úhlů otočení lva tedy je alespoň 2 998 rad.

### 1.6 Označme

$$a_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} 1\,989 + \dots$$

a

$$b_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} 1\,989 + \dots$$

Podle vzorce

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

který platí pro libovolná  $k, n$  přirozená, když ovšem klade-  
me  $\binom{n}{k} = 0$  pro  $n < k$ ,<sup>1)</sup> dostaneme

$$\begin{aligned} a_n + b_n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \left( \binom{n}{2} + \binom{n}{3} \right) 1\,989 + \dots = \\ &= \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{3} 1\,989 + \dots = a_{n+1}. \end{aligned}$$

Podobně určíme součet

$$\begin{aligned} 1\,989a_n + b_n &= \binom{n}{0} + \left( \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \right) 1\,989 + \dots = \\ &= \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{2} 1\,989 + \dots = b_{n+1}. \end{aligned}$$

---

<sup>1)</sup> Vzhledem k tomu má daný součet jen konečný počet nenulových sčítanců, takže je nekonečný pouze formálně.

Našli jsme tak rekurentní vzorce  $a_{n+1} = a_n + b_n$  a  $b_{n+1} = 1989a_n + b_n$ . Jejich úpravou dostaneme

$$b_{n+1} = 1989a_n + b_n = 1988a_n + a_n + b_n = 1988a_n + a_{n+1},$$

takže

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + b_n = a_n + a_n + 1988a_{n-1} = \\ &= 2a_n + 1988a_{n-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Matematickou indukci dokážeme, že součet  $a_n$  je dělitelný  $2^{n-1}$ . Pro  $n = 1$  je  $a_1 = 1$ , což je dělitelné  $2^{1-1} = 1$  a pro  $n = 2$  je  $a_2 = 2$ , což je dělitelné  $2^{2-1} = 2$ . Předpokládejme, že  $2^{n-2}$  dělí  $a_{n-1}$  a  $2^{n-1}$  dělí  $a_n$  pro každé  $n \geq 2$ , tj. že existují přirozená čísla  $k, l$  tak, že  $a_{n-1} = 2^{n-2}k$  a  $a_n = 2^{n-1}l$ . Podle rekurentního vztahu (2) pak je

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + 1988a_{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1}l + 497 \cdot 2^2 \cdot 2^{n-2}k = \\ &= 2^n(l + 497k). \end{aligned}$$

Je tedy  $a_{n+1}$  dělitelné  $2^n$  pro každé přirozené  $n$ , čímž je důkaz matematickou indukci hotov.

**Jiné řešení.** Označme

$$S_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} 1989 + \binom{n}{5} 1989^2 + \dots$$

a  $a = 1 + \sqrt{1989}$ ,  $b = 1 - \sqrt{1989}$ . Rozvinutím podle binomické věty vyjde

$$a^n - b^n = 2\sqrt{1989} S_n. \quad (3)$$

Dále využijeme rovnost

$$a^{n+2} - b^{n+2} = (a + b)(a^{n+1} - b^{n+1}) - ab(a^n - b^n).$$

Protože  $a + b = 2$ ,  $ab = 1 - 1989 = -1988$ , plynou z (3) rovnosti

$$\begin{aligned} 2\sqrt{1989} S_{n+2} &= 2 \cdot 2\sqrt{1989} S_{n+1} + 1988 \cdot 2\sqrt{1989} S_n, \\ S_{n+2} &= 2S_{n+1} + 1988S_n = 2S_{n+1} + 4 \cdot 497S_n. \end{aligned}$$

Pro  $n = 1, 2$  dané tvrzení snadno ověříme, pro vyšší  $n$  je dokážeme matematickou indukcí stejně jako v předchozím řešení.

**1.7** (Podle P. Hliněného, 4. ročník GMK, Bílovec.) Ze vzorce pro skalární součin vektorů

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \alpha$$

vyplývá, že jejich úhel  $\alpha$  je ostrý (pravý, tupý) právě tehdy, když skalární součin je kladný (nulový, záporný). Zvolme na hranách trojhranu jednotkové vektory  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ;  $\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{c} + \mathbf{a}$  jsou pak zřejmě směrové vektory os jednotlivých rovinných úhlů trojhranu. Vzájemné skalární součiny jsou

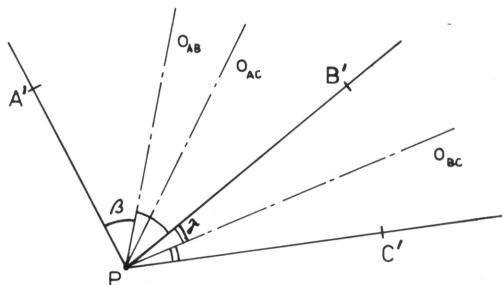
$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + 1,$$

$$(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + 1,$$

$$(\mathbf{c} + \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + 1,$$

jsou tedy všechny stejné, a proto jsou vzájemné úhly os buďto všechny ostré, nebo pravé, nebo tupé.

**Jiné řešení** (podle M. Zamazala, 3. ročník G, Brno, kpt. Jaroše). Je-li trojhran tvořen polopřímkami  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$ , označme příslušné osy úhlů  $o_{AB}$ ,  $o_{AC}$ ,  $o_{BC}$ . Uvažujme kolmý průmět celé situace do roviny  $o_{AB}o_{BC}$  (průměty označujeme čárkou). Obě polopřímky  $PA'$ ,  $PB'$  svírají s osou  $o_{AB}$  stejný úhel  $\beta$  (obr. 37). Podobně  $PB'$ ,  $PC'$  svírají s osou



Obr. 37

$o_{BC}$  úhel  $\gamma$ . Úhel os  $o_{AB}$ ,  $o_{BC}$  je  $\beta + \gamma$ . Je-li  $\beta + \gamma < \frac{\pi}{2}$ , je  $|\angle A'PC'| < \pi$  (jako na obr. 37) a průmět osy  $o_{AC}$  leží uvnitř úhlu  $A'PC'$ . Úhly všech os jsou zřejmě ostré. Je-li  $\beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ , je úhel  $A'PC'$  přímý. Je-li odchylka  $PB$  od průmětu rovna  $-\alpha$ , mají  $PA$ ,  $PC$  od průmětu obě stejnou odchylku  $\alpha$ . Proto osa  $o_{AC}$  je kolmicí na průmětnu. Tedy úhly všech os jsou pravé.

Ve zbývajícím případě jsou úhly všech os přirozeně tupé.

**2.1** (Podle M. Stehlíka, 2. ročník G, Brno, kpt. Jaroše.) Napišme si nejprve čísla na šachovnici do posloupnosti v tom pořadí, v jakém vznikala. Ukážeme, že mezi dvěma po sobě jdoucími výskyty čísla  $a$  se vždy vyskytne číslo  $7 - a$  ( $1 \leq a \leq 6$ ). Skutečně, uvažujme některé políčko, na

němž je například číslo 1, a táhneme z tohoto políčka např. doprava. Tím se dostanou čísla 1 a 6 na levou, resp. na pravou stěnu krychle. Nyní při libovolném počtu tahů nahoru tam čísla 1 a 6 zůstanou, tj. budou se otiskovat pouze čísla 2, 3, 4, 5 (v nějakém pořadí). Chceme-li ještě někdy otisknout znovu číslo 1, musíme táhnout aspoň jednou doprava — tím otiskneme číslo 6, tj. mezi dvěma výskyty čísla 1 se musí vyskytovat číslo 6. Podobně to dopadne, půjdeme-li z původního políčka s číslem 1 nahoru. Stejná úvaha platí i pro libovolná jiná čísla  $a$ ,  $7 - a$  ( $1 \leq a \leq 6$ ).

Označme  $p_a$  počet výskytů čísla  $a$ . Z právě dokázaného tvrzení plyne, že čísla  $p_a$  a  $p_{7-a}$  se liší nejvýše o jedničku. Součet všech 99 čísel otisknutých na šachovnici bude

$$\begin{aligned} s &= p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + 6p_6 = \\ &= \frac{7}{2}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) + \\ &\quad + \frac{1}{2}(5(p_6 - p_1) + 3(p_5 - p_2) + (p_4 - p_3)). \end{aligned}$$

Avšak  $p_1 + \dots + p_6 = 99$  a rozdíly  $p_6 - p_1$ ,  $p_5 - p_2$ ,  $p_4 - p_3$  mohou nabývat pouze hodnot 0, 1,  $-1$ , nutně tedy

$$s \leq \frac{7}{2} \cdot 99 + \frac{1}{2}(5 + 3 + 1) = 351$$

a

$$s \geq \frac{7}{2} \cdot 99 + \frac{1}{2}(-5 - 3 - 1) = 342.$$

Snadno nahlédneme, že těchto součtů lze skutečně dosáhnout. Stačí jít nejprve 49krát nahoru a pak 49krát doprava. Bude-li na začátku krychle stát na stěně s číslem 6, vpředu

mít 5 a vpravo 4, bude  $s = 351$ , bude-li krychle stát na 1, vpředu mít 2 a vpravo 3, bude  $s = 342$ . Hledané extrémy tedy jsou  $s_{\max} = 351$ ,  $s_{\min} = 342$ .

**2.2** Především si všimněme, že v  $n$ -tém kroku a později vznikají už pouze čísla větší než  $n$  (za první krok tu považujeme vznik čísla 2). Snadno to odvodíme matematickou indukcí. To znamená, že 1973 mohlo vzniknout stejně jen v prvních 1972 krocích. Stačí tedy spočítat všechny výskyty čísla 1973 (ve všech krocích) při číslování úsečky. To nám umožní následující tvrzení: Jsou-li  $a$ ,  $b$  dvě nesoudělná přirozená čísla, pak se při postupném číslování úsečky vyskytnou vedle sebe (v tomto pořadí) právě jednou.

Dokážeme ho matematickou indukcí podle součtu  $s = a + b$ . Pro  $s = 2$  je jedinou možností  $a = b = 1$ , takže tvrzení platí. Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechna  $2 \leq s \leq N - 1$ , a uvažujme nesoudělná čísla  $a > b$  se součtem  $N$ . Pak čísla  $a$ ,  $b$  budou (v tomto pořadí) v nějakém kroku sousední, právě když v předchozím kroku jsou sousední čísla  $a - b$ ,  $b$ . Avšak  $(a - b) + b = a \leq N - 1$ , takže podle indukčního předpokladu dojde k takové situaci během číslování úsečky právě jednou. Tím je dokázáno i celé tvrzení.

Nyní si stačí uvědomit, že číslo 1973 vznikne v nějakém kroku právě tehdy, pokud v předchozím kroku byla vedle sebe čísla  $k$  a  $1973 - k$ ,  $1 \leq k \leq 1972$ . Protože 1973 je prvočíslo, jsou  $k$  a  $1973 - k$  nesoudělná pro každé  $k$  od 1 do 1972. Podle právě dokázaného tvrzení se tedy vyskytnou obě čísla vedle sebe právě jednou. Tím dostáváme celkem 1972 výskytů čísla 1973, což je hledaný výsledek.

**Jiné řešení** (podle P. Mederlyho, 2. ročník GAM, Brati-

slava). Zadání trochu pozměníme: krajním bodům původní úsečky přiřadíme zlomky  $\frac{0}{1}$ ,  $\frac{1}{1}$  a středu úsečky, jejímž krajním bodům jsme přiřadili čísla  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{c}{d}$ , přiřadíme  $\frac{a+c}{b+d}$ . Zlomky nekrátíme, ani kdyby to bylo možné. Jmenovatele těchto zlomků tvoří původně konstruovanou posloupnost čísel. Hledáme tedy zlomky tvaru  $\frac{k}{1973}$ , kde  $1 \leq k \leq 1972$ .

Stejně jako v předchozím řešení snadno zjistíme, že každý z uvedených jmenovatelů vzniklých po  $n$ -tém kroku je větší než  $n$ , a navíc každý z číselníků vzniklých naopak v prvních  $n$  krocích je nejvýše roven  $n$ .

Dále si všimněme, že leží-li zlomek  $\frac{a}{b}$  nalevo od  $\frac{c}{d}$ , je  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ . To ověříme indukcí: V prvním kroku je  $\frac{0}{1} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1}$ , z nerovnosti  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  potom snadným výpočtem vyplývá, že  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ . A odtud hned plyne, že zlomků tvaru  $\frac{k}{1973}$  je v uvažované posloupnosti nejvýše 1972, přičemž každý se může vyskytnout nejvýše jednou.

Dále platí, že jsou-li v některém kroku  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  sousední zlomky, je  $bc - ad = 1$ . To ověříme rovněž indukcí. Konečně platí následující tvrzení: Jsou-li  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  sousední a  $\frac{p}{q} \in \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$ , pak  $q \geq b + d$ . To plyne z toho, že pro  $\frac{c}{d} > \frac{p}{q}$  je



$\frac{c}{d} - \frac{p}{q} = \frac{A}{dq}$ , přičemž  $A \geq 1$ , tedy  $\frac{c}{d} - \frac{p}{q} \geq \frac{1}{dq}$ . Podobně je i  $\frac{p}{q} - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{bq}$ . Dostaneme tak nerovnost

$$\frac{1}{bd} = \frac{bc - ad}{bd} = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \left( \frac{c}{d} - \frac{p}{q} \right) + \left( \frac{p}{q} - \frac{a}{b} \right) \geq \frac{1}{dq} + \frac{1}{bq},$$

neboli

$$q \geq b + d.$$

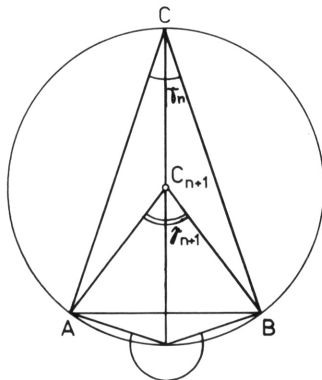
Tím je poslední tvrzení dokázáno.

Toto tvrzení zaručuje, že po 1973. kroku žádný z intervalů  $\left( \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right)$ , kde  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  jsou libovolné dva dosud sestrojené sousední zlomky, neobsahuje zlomek tvaru  $\frac{k}{1973}$ . Po 1973. kroku je totiž  $b + d > 1973$ , protože jeden ze zlomků  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  musel vzniknout v tomto kroku.

Protože 1973 je prvočíslo, nemůže žádné z čísel  $\frac{k}{1973}$  ( $1 \leq k \leq 1972$ ) splynout s některým dosud utvořeným zlomkem. Proto každý z těchto 1972 zlomků je členem sestrojené posloupnosti. Protože jsme už ukázali, že se víc než jednou vyskytnout nemůže, vyskytne se právě jednou, a číslo 1973 se jako jmenovatel objeví 1972krát.

**Poznámka.** Když si ještě všimneme toho, že takto tvořené zlomky jsou vesměs v základním tvaru, snadno zjistíme, jaká je odpověď na otázku, kolikrát se v uvedené posloupnosti objeví libovolné přirozené číslo  $n$ .

**2.3** (Podle O. Kalendy, 4. ročník GWP, Praha.) Všechny body  $C_n$  leží na ose úsečky  $AB$ . Přiřadíme bodu  $C_n$  úhel  $\gamma_n = |\angle AC_n B|$ , přičemž pro  $C_n$  nad  $AB$  bereme konvexní a pro  $C_n$  pod  $AB$  nekonvexní úhel (obr. 38).



Obr. 38

Definujme relaci  $\alpha \sim \beta$ , právě když  $\alpha = \beta + 2k\pi$  pro  $k$  celé. Pak platí  $\gamma_{n+1} \sim 2\gamma_n$ . To plyne následovně z věty o obvodovém úhlu: Je-li  $C_n$  i  $C_{n+1}$  nad  $AB$ , je  $\gamma_{n+1} = 2\gamma_n$ . Je-li  $C_n$  i  $C_{n+1}$  pod  $AB$ , je  $2\pi - \gamma_{n+1} = 2(2\pi - \gamma_n)$ , tedy  $\gamma_{n+1} = 2\gamma_n - 2\pi$ . Je-li  $C_n$  pod a  $C_{n+1}$  nad  $AB$ , je  $2\pi - \gamma_{n+1} = 2(2\pi - \gamma_n)$ , tedy  $\gamma_{n+1} = 2\gamma_n - 2\pi$ . Je-li  $C_n$  nad a  $C_{n+1}$  pod  $AB$ , je  $\gamma_{n+1} = 2\gamma_n$ .

To znamená, že je

$$\gamma_n \sim 2\gamma_{n-1} \sim 2^2\gamma_{n-2} \sim \dots \sim 2^{n-1}\gamma_1, \quad (1)$$

a protože relace  $\sim$  je tranzitivní (tj. je-li  $\alpha \sim \beta$  a  $\beta \sim \gamma$ , je i  $\alpha \sim \gamma$ ), plyne odtud vztah

$$\gamma_n \sim 2^{n-1}\gamma_1, \quad \text{neboli} \quad 2^{n-1}\gamma_1 = \gamma_n + 2k\pi$$

pro nějaké celé  $k$ .  $C_n$  je pak středem úsečky  $AB$ , právě když  $\gamma_n = \pi$ , tj. právě když je  $\gamma_1 \in (0, \pi)$  tvaru

$$\gamma_1 = \frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}} \quad \text{pro} \quad k = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1. \quad (2)$$

Je-li  $C_n = C_1$ , je  $\gamma_n \sim \gamma_1$ , zároveň ale podle (1) je  $\gamma_n \sim 2^{n-1}\gamma_1$ , takže  $\gamma_1 \sim 2^{n-1}\gamma_1$ . Odtud dostáváme, že  $2^{n-1}\gamma_1 = \gamma_1 + 2k\pi$ , neboli

$$\gamma_1 = \frac{2k\pi}{2^{n-1}} \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \dots, 2^{n-1} - 2.$$

To platí pro  $n > 2$ . Pro  $n = 1$  vyhovuje libovolný bod  $C$  osy úsečky  $AB$ , pro  $n = 2$  bod  $C$  neexistuje (kdyby  $C_2 = C_1 = C$ , byl by poloměr kružnice opsané  $|C_2C_1| = 0$ ).

Obráceně, je-li  $\gamma_1 = \frac{2k\pi}{2^{n-1}-1}$ , pak  $\gamma_n \sim 2^{n-1}\gamma_1 = \frac{2^n k\pi}{2^{n-1}-1} = 2k\pi + \frac{2k\pi}{2^{n-1}-1} \sim \gamma_1$ . Je tedy  $C_n = C$ , právě když  $n = 1$  a  $C$  je libovolný bod osy úsečky  $AB$ , nebo když  $n > 2$  a  $\gamma_1 = \frac{2k\pi}{2^{n-1}-1}$ , kde  $k = 1, 2, \dots, 2^{n-1} - 2$ . (Hodnotu  $k = 0$  neuvažujeme, protože  $\gamma_1 > 0$ .)

**2.4** Nejdříve si uvědomme, že podmínka b) má silnější předpoklad než a), ale stejné tvrzení, proto splňuje-li nějaká dvojice indexů  $(i, j)$  podmínku a), splňuje i b).

Označme  $A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ , požadovanou nerovnost pak můžeme ekvivalentně zapsat jako

$$b_1(a_1 - A) + b_2(a_2 - A) + \dots + b_n(a_n - A) \geq 0. \quad (1)$$

Označíme-li  $b = \max\{b_i; a_i < A\} = b_{i_0}$ , platí

$$b_i(a_i - A) \geq b(a_i - A) \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

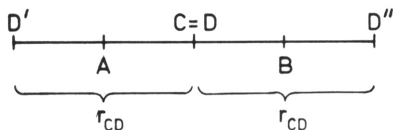
To je zřejmé pro  $a_i - A \leq 0$ , zatímco pro  $a_i - A > 0$  je  $a_{i_0} < A < a_i$ , takže podle podmínky b) dostaneme  $b = b_{i_0} \leq b_i$ . Sečtením nerovností (2) pro všechna  $i = 1, 2, \dots, n$  dostáváme

$$b_1(a_1 - A) + \dots + b_n(a_n - A) \geq b(a_1 + \dots + a_n - nA) = 0,$$

tím je nerovnost (1) dokázána.

**2.5** (Podle P. Hliněného, 4. ročník GMK, Bílovec.) Vyřešíme úlohu nejdříve na přímce, pak v rovině a nakonec v prostoru. Ukážeme, že nejmenší číslo  $k$  je rovno  $N + 3$ , kde  $N = 1, 2, 3$  je dimenze prostoru.

Nejprve ukážeme, že pro body ležící v přímce nestačí sestrojitelnost trojic. Mějme čtyři body  $A, B, C, D$ , kde  $r_{AB} = 1$ ,  $r_{BC} = \frac{1}{2}$ ,  $r_{AC} = \frac{1}{2}$ ,  $r_{AD} = \frac{1}{2}$ ,  $r_{BD} = \frac{1}{2}$ ,  $r_{CD} = 1$ . Jde o úsečku  $AB$  a o její jakoby dvojnásobný střed  $C, D$ . Vzdálenost  $r_{CD}$  je vzdálenost středu úsečky od jeho obrazu v sůměrnosti podle  $A$ , popřípadě  $B$  (obr. 39). Celá čtveřice není sestrojitelná, ale všechny trojice sestrojít lze. Nyní ukážeme, že sestrojitelnost čtveřic stačí.

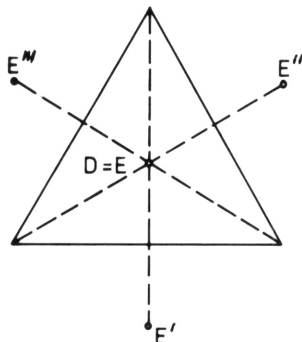


Obr. 39

Jsou-li dány dva různé body na přímce, existuje nejvýše jeden bod, který má od těchto bodů předem zadané vzdálenosti. Jsou-li vzdálenosti daných  $n$  bodů navzájem všechny nulové, jsou tyto body sestrojitelné. V opačném případě vybereme body  $A, B$ , pro které je  $r_{AB}$  nenulové a sestrojíme je kdekoli na přímce ve vzájemné vzdálenosti  $r_{AB}$ . Každý další bod  $X$  má předepsány takové vzdálenosti  $r_{AX}, r_{BX}$ , že je sestrojitelný. Přitom tento bod je určen jednoznačně. Sestrojme tedy jediným možným způsobem všechny další body. Ty už budou řešením úlohy. Kdyby totiž některé dva z dalších bodů  $X, Y$  neměly správnou vzdálenost, nebyla by čtveřice  $A, B, X, Y$  sestrojitelná.

Rozeberme teď úlohu v rovině — nejdříve na příkladu ukážeme, že sestrojitelnost čtveřic nestačí. Použijeme rovnostranný trojúhelník  $ABC$  (obr. 40) a jeho „dvojnásobný“ střed  $D, E$  (tím jsou dány vzdálenosti bodů  $D, E$  od vrcholů  $A, B, C$ ). Vzdálenost  $r_{DE}$  je pak dána jako vzdálenost středu trojúhelníku  $ABC$  od jeho obrazu v souměrnosti podle  $AB$  ( $BC, CA$ ). Každou čtveřici sestroit lze, celou pěticí ne. Nyní ukažme, že sestrojitelnost pětic stačí.

Podobně jako na přímce existuje v rovině nejvýše jeden bod, který má předem zadané vzdálenosti od tří daných bodů neležících v přímce (mají-li tři kružnice dva společné průsečíky, leží jejich středy na přímce). Jestliže každé tři



Obr. 40

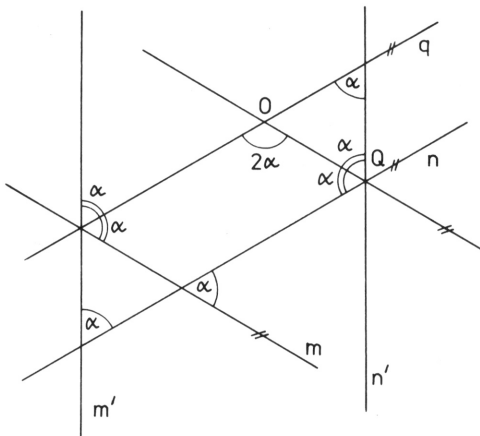
z daných  $n$  bodů leží po sestrojení v přímce, úloha se redukuje na přímku, kde podle předešlého stačí i sestrojitelnost čtveřic. V opačném případě vybereme tři body  $A, B, C$ , které po sestrojení neleží v přímce. Sestrojíme k bodům  $A, B, C$  jednoznačně každý z dalších uvažovaných bodů. Získané body jsou řešením. Kdyby totiž některé z dalších bodů  $X, Y$  neměly správnou vzdálenost  $r_{XY}$ , nebyla by pětice  $A, B, C, X, Y$  sestrojitelná.

A konečně případ prostoru. Důkaz je úplně analogický, proto jen stručně. Sestrojitelnost petic nestačí, protože stačí vzít pravidelný čtyřstěn  $ABCD$  s „dvojnásobným“ středem  $E, F$ , přičemž  $r_{EF}$  bude vzdálenost středu od jeho obrazu v souměrnosti podle rovin  $ABC$  ( $ABD, ACD, BCD$ ). Každou pětici sestrojít lze, ale celou šesticí ne. Sestrojitelnost šestic je už postačující, protože pokud každé čtyři body leží po sestrojení v jedné rovině, redukuje se úloha do menší dimenze, a jinak sestrojíme nějakou čtveřici  $A, B, C, D$ , která neleží v rovině, a ukážeme, že všechny další body jsou

touto čtveřicí jednoznačně určeny. Každé dva  $X, Y$  z nich budou mít správnou vzdálenost  $r_{XY}$ , jinak by odpovídající šestice  $A, B, C, D, X, Y$  nebyla sestrojitelná.

**2.6** (Podle P. Hliněného, 4. ročník GMK, Bílovec.) Předpokládejme, že trojúhelník  $ABC$  vyhovuje podmínkám úlohy a že  $A$  leží na přímce  $m$  a  $B$  na přímce  $n$  (přímky  $m, n$  musí být různoběžky). Označme  $p$  osu souměrnosti bodů  $B, C$ , ta prochází bodem  $O$  a je rovnoběžná s  $m$ . Protože  $B \in n$ , musí bod  $C$  ležet na obraze  $n'$  přímky  $n$  podle osy  $p$ . Podobně leží  $C$  na obraze  $m'$  přímky  $m$  podle osy  $q$ . Odtud plyne postup konstrukce: bod  $C$  najdeme jako průsečík přímek  $m', n'$  a zbytek trojúhelníku sestrojíme snadno, protože známe střed  $O$  i poloměr  $|OC|$  kružnice opsané.

Konstrukce přímek  $m', n'$  je jednoznačná. První zádrhel může nastat, když jsou přímky  $m', n'$  rovnoběžné (obr. 41).



Obr. 41

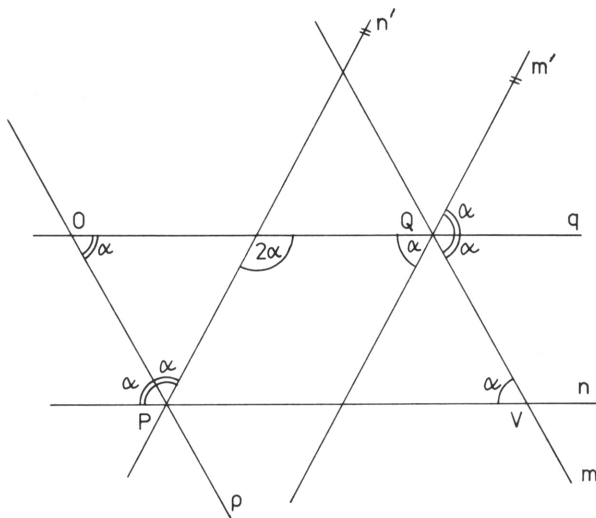
Pokud bod  $O$  leží v ostrém úhlu přímek  $m, n$ , dostáváme pro úhel těchto přímek vztah  $2\alpha + \alpha = \pi$ , tj.  $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ . Stejný výsledek dostaneme, pokud bod  $O$  leží v tupém úhlu těchto přímek. Proto konstrukci nelze jednoznačně provést jen tehdy, je-li úhel přímek  $m, n$  roven  $\frac{2}{3}\pi$ . Tento případ rozebereme zvlášť na závěr.

Další zádrhel může nastat, pokud se přímky  $m', n'$  protnou v bodě  $O$ . To nastane, právě když je bod  $O$  průsečíkem i přímek  $m, n$ . Pokud náhodou přímky  $m', n'$  nesplynou (to nastane, jak snadno zjistíme, opět pro úhel přímek  $m, n$  rovný  $\frac{2}{3}\pi$ ), bude bod  $O$  jejich jediným průsečíkem. V tom případě nedostaneme trojúhelník, protože nemůže být  $C = O$ .

Protože je obtížné zjišťovat, kdy kružnice se středem  $O$  a poloměrem  $|OC|$  protne přímky  $m, n$  v hledaných bodech  $A, B$  tak, abychom dostali trojúhelník, sestrojíme hledané vrcholy jinak: bod  $A$  leží na průsečíku přímky  $m$  s přímkou  $b$ , která prochází vrcholem  $C$  a je kolmá na přímkou  $n$ . Analogicky sestrojíme i bod  $B$ . Protože je jasné, že přímky  $m$  a  $b$  mohou být rovnoběžné, jen když jsou  $m$  a  $n$  kolmé, vyšetříme tento případ zvlášť. V tomto případě vyjde, že vrchol  $C$  je průsečíkem přímek  $m$  a  $n$ , takže úloha má nede-generované řešení, jen když bod  $O$  neleží na žádné z přímek  $m, n$ .

Nyní ještě vyšetříme případ, kdy přímky  $m, n$  svírají úhel  $\frac{2}{3}\pi$ . Snadno zjistíme (obr. 42), že pokud bod  $O$  leží v tupém úhlu přímek  $m, n$ , rovnoběžky  $m', n'$  nikdy nesplynou; úloha tedy nemůže mít řešení. Pro polohu bodu  $O$  v ostrém úhlu přímek  $m, n$  splynou přímky  $m', n'$ , právě když  $VQOP$  bude kosočtverec (obr. 42), neboli bod  $O$  bude ležet na ose úhlu přímek  $m, n$ . Jsou-li přímky  $m', n'$  totožné, lze kte-





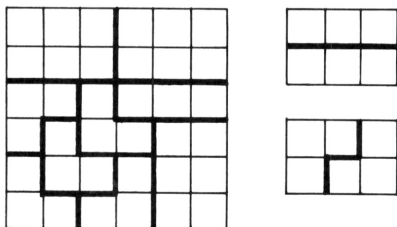
Obr. 42

rýkoli jejich bod zvolit jako bod  $C$  (pokud  $O$  je průsečík  $m, n$ , pak nemůže být  $C = O$ ) a podle popsané konstrukce k němu vždy sestrojit zbývající vrcholy  $A, B$ . Úloha pak má nekonečně mnoho řešení.

Úloha má tedy právě jedno řešení, pokud jsou přímky  $m, n$  různoběžné (nesplývají) a nesvírají úhel  $\frac{2}{3}\pi$ , bod  $O$  není jejich průsečíkem, a je-li přímka  $m$  kolmá na  $n$ , neleží bod  $O$  na žádné z přímek  $m, n$ . Úloha má nekonečně mnoho řešení, pokud přímky  $m, n$  svírají úhel  $\frac{2}{3}\pi$  a bod  $O$  leží na ose jejich ostrého úhlu. V ostatních případech úloha nemá žádné řešení.

**2.7** Správná odpověď zní, že to jde pro všechna  $k \neq 1$  a  $k \neq 3$ . Případy sudého  $k$  jsou jasné, trochu překvapivá je

existence zaplnění pro  $k = 5, 7, 9, 11$ . Příslušné zaplnění je znázorněno na obr. 43. (Obdélník  $2 \times 3$  je možno vyplnit buď dvěma pravoúhelníky, nebo dvěma úhelníky. V závislosti na vyplnění obdélníků  $A, B, C$  tak dostáváme požadovaný typ zaplnění celého čtverce.)



Obr. 43

Uvažujme  $k = 1$ . Předpokládejme, že existuje zaplnění s právě jedním úhelníkem; bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je umístěn takto  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$ . Vyplňme jednotlivé čtverečky ve čtverci čísly 0, 1, 2 podle obr. 44. Součet všech čísel ve čtverci je 36, je tedy dělitelný třemi. Rovněž součet čísel v každém pravoúhelníku  $1 \times 3$  je dělitelný třemi. Žádnému úhelníku typu  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$  však neodpovídá součet dělitelný třemi, a proto zaplnění nemůže obsahovat právě jen jeden úhelník.

Uvažujme teď případ  $k = 3$ . Při očíslování podle obr. 45 dávají úhelníky  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$  a  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$  součet 2 (mod 3) a úhelníky  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$  a  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$  součet 1 (mod 3). Proto každý ze tří úhelníků je typu  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$  nebo  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$ , nebo je každý typu  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$  či  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$ . To ovšem platí i po otočení o  $90^\circ$ , a tedy v původním čtverci je každý úhelník typu  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$  či  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$ , nebo je každý úhelník typu  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$  či  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$ . Odtud

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 |
| 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 |

Obr. 44

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

Obr. 45

plyne, že všechny tři úhelníky jsou stejného typu; bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že jsou typu .

Vraťme se k očíslování na obr. 45. Každý pravoúhelník obsahuje po jednom z čísel 0, 1, 2, a proto mezi úhelníky je právě jeden s čísly 0, 1, 1, právě jeden s čísly 1, 2, 2 a právě jeden s čísly 2, 0, 0. Uvažme polohu toho s čísly 2, 0, 0. Jeho rohový čtvereček leží v jednom ze čtverečků vyznačených na obr. 46, přitom vzhledem k symetrii podle

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 |   |   | × |   |   | × |
| 5 | ▨ |   |   | × |   |   |
| 4 |   | ▨ |   |   |   |   |
| 3 |   |   | ▨ |   |   |   |
| 2 | ▨ |   |   |   |   |   |
| 1 |   |   |   |   |   |   |
|   | a | b | c | d | e | f |

Obr. 46

|   |   |   |    |    |   |
|---|---|---|----|----|---|
|   |   | 2 |    |    |   |
| 1 |   |   |    | 4  | 3 |
|   |   | 6 | 5  |    |   |
| 8 | 7 |   |    | ▨  | ▨ |
|   |   |   | 10 |    | ▨ |
|   | 9 |   |    | 11 |   |

Obr. 47

diagonály  $a1 - f6$  stačí uvažovat jen polovinu čtverce nad touto úhlopříčkou. Z vyznačených polí však nelze použít pole  $c6$ ,  $f6$  (úhelník by čněl ven ze čtverce) a  $d5$  (čtvereček  $e6$  by pak nešlo pokrýt). Na obr. 47 je vyznačeno, proč nelze

použít ani čtvereček  $a_5$  (použití pravoúhelníků je pak totiž vynuceno, a to v pořadí uvedeném na obrázku). Podobně se ukáže, že i případy čtverečků  $a_2, b_4, c_3$  vedou ke sporu.

**Poznámka.** Uvědomte si, že pro důkaz případu  $k = 1$  jsme stejně dobře mohli použít i obr. 42.

Případ  $k = 3$  plyne (po provedení první úvahy) z následujícího tvrzení: Obdélník velikosti  $3n \times 3m$  nelze zaplnit pravoúhelníky  $1 \times 3$  a úhelníky  $\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}$ . Zkuste toto tvrzení dokázat nebo vyvrátit.

**3.1** (Podle P. Růžičky, 2. ročník G, Brno, kpt. Jaroše, a A. Kuběny, 3. ročník GMK, Bílovec.) Nejmenší hledaný počet věží je  $m(n, k) = n(k - 1) + 1$ . Předně, pokud je věží méně než  $m(n, k)$ , lze je umístit do  $k - 1$  řad šachovnice. Potom z nich ovšem nelze požadovaným způsobem vybrat  $k$  věží. Ukažme dále, že pro alespoň  $m(n, k)$  věží to již lze.

Očíslujme řádky a sloupce šachovnice čísla 1 až  $n$ . Jednotlivá pole šachovnice očíslujme tak, že polí v  $i$ -té řadě a  $j$ -tém sloupci přiřadíme číslo  $i - j \pmod{n}$  (tedy číslo mezi 0 a  $n - 1$ ). Nyní si stačí uvědomit následující jednoduché skutečnosti:

1. Každým číslem mezi 0 a  $n - 1$  je označeno právě  $n$  polí.
2. Věže na polích označených týmž číslem se neohrožují.
3. Pokud je věží alespoň  $m(n, k)$ , existuje podle Dirichletova principu  $k$  věží, které jsou na polích označených týmž číslem, a proto se neohrožují.

**Jiná možnost** je použít matematickou indukci. Nejsnazší je postupovat indukcí podle  $k$ .

Pro  $k = 1$  je tvrzení triviální.

Nechť  $k \leq n - 1$  a tvrzení platí pro  $k - 1$ . Pak podle

Dirichletova principu existuje řádek  $r$ , ve kterém je alespoň  $k$  věží (zároveň samozřejmě nejvýše  $n$ ). V ostatních řádcích je potom alespoň  $n(k-1) + 1 - n = n(k-2) + 1$  věží a lze z nich tedy podle indukčního předpokladu vybrat  $k-1$  věží, které se neohrožují. Těchto  $k-1$  věží leží v  $k-1$  sloupcích. Proto v řádku  $r$  existuje věž, která se ani s jednou z nich neohrožuje. Dohromady tedy máme  $k$  věží, které se navzájem neohrožují, a důkaz je hotov.

**3.2** Část a) je triviální, např.

$$\begin{aligned}x \cdot x &= x^2, & x^2 \cdot x^2 &= x^4, \\x^4 \cdot x^4 &= x^8, & \dots, & x^{512} \cdot x^{512} = x^{1024}, \\x^{1024} : x^{16} &= x^{1008}, & x^{1008} : x^8 &= x^{1000}.\end{aligned}$$

Pro část b) uvedeme dvě řešení.

**1. řešení** (podle O. Šucha, 4. ročník GAM, Bratislava).

Napišme číslo  $n$  v dvojkové soustavě; protože možné číslice jsou pouze 0 a 1, je to vlastně totéž co rozklad

$$n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_k}, \quad a_1 > a_2 > \dots > a_k \geq 0.$$

Uvažujme následující dva způsoby vytvoření čísla  $x^n$ .

1. Pomocí  $x \cdot x = x^2$ ,  $x^2 \cdot x^2 = x^4$  atd. vytvoříme všechny mocniny  $x^{2^i}$  pro  $0 \leq i \leq a_1$ ; to zabere  $a_1$  operací. Mezi těmito čísly jsou i čísla  $x^{2^j}$  pro  $j = 2^{a_1}, 2^{a_2}, \dots, 2^{a_k}$ ; vynásobíme-li je postupně mezi sebou, spotřebujeme na to dalších  $k-1$  operací. Tím dostaneme  $x^n$  pomocí  $a_1 + k - 1$  operací.

2. Nejdříve použijeme (stejným způsobem)  $a_1 + 1$  operací na vytvoření čísel  $x^{2^i}$  pro  $0 \leq i \leq a_1 + 1$ . Dále poslední z těchto čísel vydělíme  $x$ , čímž získáme

$$x^{2^{a_1+1}-1} = x^{2^{a_1}+2^{a_1-1}+\dots+4+2+1}.$$

Toto číslo dělíme všemi čísly  $x^{2^j}$  pro  $j \in \{0, 1, 2, \dots, a_1\} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ; těchto čísel je dohromady  $(a_1 + 1) - k$  a po vydělení dostaneme zřejmě číslo  $x^n$ . Na dělení je třeba  $(a_1 + 1) - k$  operací; celkem jsme  $x^n$  vytvořili pomocí  $(a_1 + 1) + 1 + (a_1 + 1 - k) = 2a_1 - k + 3$  operací.

Nyní ukážeme, že při aspoň jednom způsobu je počet operací nejvýše  $\frac{3}{2} \log_2 n + 1$ . Kdyby tomu tak nebylo, muselo by zároveň platit

$$\begin{aligned} a_1 + k - 1 &> \frac{3}{2} \log_2 n + 1 \\ 2a_1 - k + 3 &> \frac{3}{2} \log_2 n + 1. \end{aligned}$$

Sečtením a úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} a_1 &> \log_2 n, \\ 2^{a_1} &> n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_k}, \end{aligned}$$

což je spor, a důkaz je hotov.

**2. řešení** (podle Š. Kasala, 3. ročník GWP, Praha.) Pro  $1 \leq n \leq 11$  se přesvědčíme přímo, že tvrzení platí. Pro  $n \geq 12$  ukážeme, že dokonce stačí  $\frac{3}{2} \log_2(n-1)$  operací. Důkaz provedeme indukcí. Pro  $n = 12, 13, \dots, 45$  toto tvrzení platí podle následující tabulky:

|                                         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-----------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $n$                                     | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
| počet operací                           | 4  | 5  | 5  | 5  | 4  | 5  | 5  | 6  | 5  | 6  | 6  | 6  | 5  | 6  | 6  | 7  | 6  |
| $\lceil \frac{3}{2} \log_2(n-1) \rceil$ | 5  | 5  | 5  | 5  | 5  | 6  | 6  | 6  | 6  | 6  | 6  | 6  | 6  | 6  | 6  | 7  | 7  |

|                                         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-----------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $n$                                     | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 |
| počet operací                           | 7  | 6  | 6  | 5  | 6  | 6  | 7  | 6  | 7  | 7  | 7  | 6  | 7  | 7  | 8  | 7  | 8  |
| $\lceil \frac{3}{2} \log_2(n-1) \rceil$ | 7  | 7  | 7  | 7  | 7  | 7  | 7  | 7  | 7  | 7  | 7  | 7  | 7  | 8  | 8  | 8  | 8  |

Mějme nyní  $n \geq 46$  a předpokládejme, že pro  $12 \leq m \leq n-1$  tvrzení platí. Rozlišíme dvě možnosti:

a)  $n$  je sudé,  $n = 2k$ . Pak  $x^n$  vyjádříme jedinou operací z  $x^k$  ( $x^n = x^k \cdot x^k$ ); na  $x^k$  podle indukčního předpokladu stačí  $\frac{3}{2} \log_2(k-1)$  operací. Celkem nám tedy pro  $x^n$  stačí

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \log_2(k-1) + 1 &< \frac{3}{2}(\log_2(k-1) + 1) = \\ &= \frac{3}{2} \log_2(2k-2) < \frac{3}{2} \log_2(n-1) \end{aligned}$$

operací.

b)  $n$  je liché; pak lze  $n$  psát ve tvaru  $n = 4k \pm 1$ . Přitom  $x^n$  lze vyjádřit z  $x^k$  třemi operacemi

$$\begin{aligned} x^{2k} &= x^k \cdot x^k, & x^{4k} &= x^{2k} \cdot x^{2k}, \\ x^n &= x^{4k} \cdot x & \text{nebo} & \quad x^n = x^{4k} : x. \end{aligned}$$

Celkem tedy umíme vytvořit  $x^n$  pomocí

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \log_2(k-1) + 3 &= \frac{3}{2}(\log_2(k-1) + 2) = \\ &= \frac{3}{2} \log_2(4k-4) < \frac{3}{2} \log_2(n-1) \end{aligned}$$

operací.

Tím je důkaz hotov.

**Poznámka.** Poznamenejme, že oběma způsoby lze řešit i nepatrně těžší verzi úlohy, kdy jsou povoleny pouze operace

$$\begin{aligned} x^k &\mapsto x^k \cdot x^k = x^{2k}, & x^k &\mapsto x^k \cdot x = x^{k+1} \\ \text{a} \quad x^k &\mapsto x^k : x = x^{k-1}. \end{aligned}$$

(Potřebný počet operací je opět nejvýše  $\frac{3}{2} \log_2 n + 1$ .) Dodejme ještě, že žádný z uvedených odhadů není optimální. Např. pro  $x^{170}$  stačí pouze 9 operací!

**3.3** Označme  $a = |A_2A_3|$ ,  $b = |A_1A_3|$ ,  $c = |A_1A_2|$ . Z Pythagorovy věty pro trojúhelníky  $A_1H_3A_3$ ,  $A_2H_3A_3$  dostaneme

$$|A_3H_3|^2 = |A_1A_3|^2 - |A_1H_3|^2 = |A_2A_3|^2 - |H_3A_2|^2.$$

Odečtením odtud plyne

$$\begin{aligned} b^2 - a^2 &= |A_1A_3|^2 - |A_2A_3|^2 = |A_1H_3|^2 - |H_3A_2|^2 = \\ &= (|A_1H_3| + |H_3A_2|)(|A_1H_3| - |H_3A_2|). \end{aligned} \quad (1)$$

Využijeme-li rovnosti  $|A_1M_3| = |M_3A_2|$ , snadno určíme jednotlivé činitele

$$\begin{aligned} |A_1H_3| + |H_3A_2| &= |A_1A_2|, \\ ||A_1H_3| - |H_3A_2|| &= 2|M_3M_3| \end{aligned} \quad (2)$$

a dosazením do (1) pak dostaneme

$$|A_1A_2| \cdot |H_3M_3| = \frac{|b^2 - a^2|}{2}.$$

Analogicky dokážeme i rovnosti

$$|A_1A_3| \cdot |H_2M_2| = \frac{|a^2 - c^2|}{2}, \quad |A_2A_3| \cdot |H_1M_1| = \frac{|c^2 - b^2|}{2}.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme dále předpokládat, že  $a \leq b \leq c$ . Pak hned dostaneme požadovanou rovnost

$$|A_1A_3| \cdot |H_2M_2| = |A_1A_2| \cdot |H_3M_3| + |A_2A_3| \cdot |H_1M_1|.$$



Podívejme se teď, jak se změnila situace pro pravoúhlý či tupoúhlý trojúhelník. Platnost (1) se samozřejmě zachová. Jediná potíž nastane, když bod  $H_3$  neleží na úsečce  $A_1A_2$ . Potom se (2) změnila na

$$\begin{aligned} |A_1H_3| + |A_3H_2| &= 2|H_3M_3|, \\ ||A_1H_3| - |H_3A_2|| &= |A_1A_2|. \end{aligned}$$

To však znamená, že se jen prohodily hodnoty činitelů v součinu (1), takže tvrzení zůstává v platnosti i pro pravoúhlý a tupoúhlý trojúhelník.

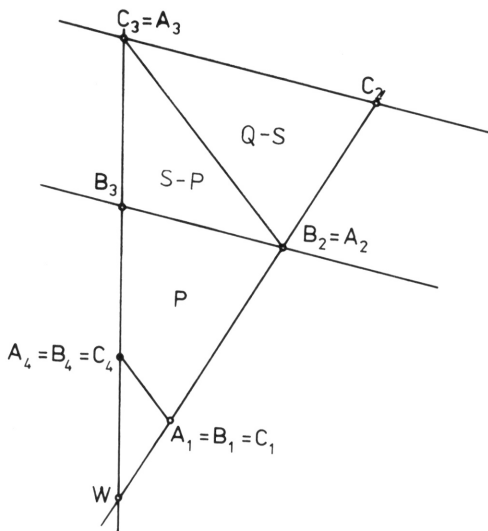
**Poznámka.** Uvedené řešení je zcela elementární, zato trochu umělé. Pomocí kosinové věty lze snadno vypočítat  $|H_iM_i|$  přímo, v podstatě jde ale o totéž. Využitím vzorečků pro délky těžnic trojúhelníku bylo možno získat tvrzení rovnou pro libovolný trojúhelník (avšak řešení je technicky náročnější). Podobně pro libovolný trojúhelník funguje řešení pomocí základních operací s vektory (sčítání a skalární součin).

**3.4** Správná odpověď zní: buď  $S = P = Q$ , anebo  $S$  leží v intervalu  $\sqrt{PQ} \leq S < Q$ .

Nejprve dokážeme, že libovolné takové hodnoty  $S, P, Q$  se skutečně mohou nabývat. Příklad  $S = P = Q$  je jasný (všechny tři mnohoúhelníky splynou, tj.  $A_i = B_i = C_i$ ); mějme tedy dána kladná čísla  $P, Q, S$  tak, že

$$\sqrt{PQ} \leq S < Q.$$

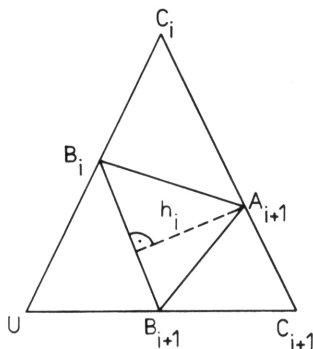
Zvolme v rovině dvě rovnoběžky o vzdálenosti 2 a nějakou jejich příčku  $B_3C_3$  (obr. 48), dále body  $B_2, C_2$  tak, aby



Obr. 48

bylo  $|B_2B_3| = S - P$ ,  $|C_2C_3| = Q - S$ . Obsahy trojúhelníků  $B_2B_3C_3$  a  $B_2C_2C_3$  jsou tedy  $S - P$ , resp.  $Q - S$ .

Pokud bude  $|B_2B_3| \geq |C_2C_3|$ , neboli  $S \geq \frac{P+Q}{2}$ , pak se polopřímky  $C_3B_3$  a  $C_2B_2$  neprotnou; můžeme na nich zvolit body  $A_4 = B_4 = C_4$  a  $A_1 = B_1 = C_1$  tak, aby čtyřúhelník  $B_1B_2B_3B_4$  měl obsah  $P$ . Zbývá vzít  $A_2 = B_2$ ,  $A_3 = C_3$  a jsme hotovi (obr. 49). Pokud  $|B_2B_3| < |C_2C_3|$ , neboli  $S < \frac{P+Q}{2}$ , pak se polopřímky  $C_3B_3$  a  $C_2B_2$  protnou v bodě  $W$ ; právě popsanou konstrukci můžeme tedy zopakovat, jen když bude  $P \leq S(B_2B_3W)$  (symbolem  $S(\cdot)$  budeme i nadále značit obsah příslušného útvaru). Využitím podobnosti



Obr. 49

trojúhelníků  $WB_2B_3 \sim W_2C_2C_3$  lze spočítat, že je

$$S(B_2B_3W) = \frac{(S - P)^2}{P + Q - 2S}.$$

Naši konstrukci lze tedy použít, bude-li

$$P \leq \frac{(S - P)^2}{P + Q - 2S},$$

což je pro  $S < \frac{P+Q}{2}$  ekvivalentní nerovnosti  $PQ \leq S^2$ , která platí. Můžeme tedy opět zvolit body  $A_1 = B_1 = C_1$  a  $A_4 = B_4 = C_4$  (popř. pouze  $A_1 = B_1 = C_1 = W$ , pokud  $S = \sqrt{PQ}$ ) a jsme hotovi.

Zbývá těžká část úlohy — dokázat, že vždy platí  $S \geq \sqrt{PQ}$ . Dokážeme vlastně silnější tvrzení:

*Jsou-li  $B_1B_2 \dots B_n \subset C_1C_2 \dots C_n$  dva konvexní  $n$ -úhelníky takové, že  $B_iB_{i+1} \parallel C_iC_{i+1}$  (takovým dvěma mnohoúhelníky budeme dále říkat „rovnoběžné“) a body  $A_i$*

leží na stranách  $C_{i-1}C_i$ ,  $A_1$  na straně  $C_nC_1$ , pak pro obsahy  $P$ ,  $Q$   $n$ -úhelníků  $B_1B_2 \dots B_n$  a  $C_1C_2 \dots C_n$  a obsah  $S$   $2n$ -úhelníku  $A_1B_1A_2B_2 \dots A_nB_n$  platí  $S \geq \sqrt{PQ}$ .

Nejprve vyřešíme případ, kdy mnohoúhelníky  $B_1B_2 \dots B_n$  a  $C_1C_2 \dots C_n$  jsou stejnolehle (tak je tomu např. vždy pro  $n = 3$ ). Označme  $U$  střed a  $k = \frac{|C_1C_2|}{|B_1B_2|}$  koeficient uvedené stejnolehlosti. Je-li  $h_i$  vzdálenost přímk  $B_iB_{i+1}$  a  $C_iC_{i+1}$ , bude platit (obr. 49)

$$\begin{aligned} \frac{S(B_iB_{i+1}A_{i+1})}{S(B_iC_iA_{i+1}) + S(B_{i+1}A_{i+1}C_{i+1})} &= \\ &= \frac{|B_iB_{i+1}|h_i}{|C_iA_{i+1}|h_i + |C_{i+1}A_{i+1}|h_i} = \\ &= \frac{|B_iB_{i+1}|}{|C_iC_{i+1}|} = \frac{1}{k}, \end{aligned}$$

takže

$$k \cdot S(B_iB_{i+1}A_{i+1}) = S(B_iB_{i+1}C_{i+1}C_i) - S(B_iB_{i+1}A_{i+1}).$$

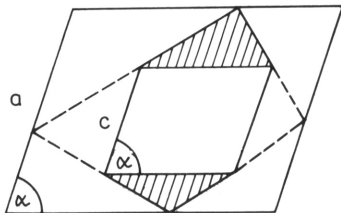
Sečtením pro všechna  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , vyjde

$$k(S - P) = Q - S.$$

Zároveň ale je  $Q = k^2P$ , takže (vyloučíme-li triviální případ  $S = P$ )

$$\left( \frac{Q - S}{S - P} \right)^2 = \frac{Q}{P},$$

a po úpravě vyjde  $S^2 = PQ$ , což jsme chtěli dokázat.



Obr. 50

Nyní vyřešíme případ, kdy  $n = 4$  a  $C_1C_2C_3C_4$  je rovnoběžník. V situaci na obr. 50 máme  $Q = ab \sin \alpha$ ,  $P = cd \sin \alpha$ . Obsahy dvou vyznačených trojúhelníků dají dohromady  $\frac{1}{2}d(a - c) \sin \alpha$ ; podobně druhá (analogická) dvojice dá  $\frac{1}{2}c(b - d) \sin \alpha$ . Odtud plyne

$$S = P + \frac{1}{2}d(a - c) \sin \alpha + \frac{1}{2}c(b - d) \sin \alpha = \frac{ad + bc}{2} \sin \alpha$$

a podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem vyjde

$$S \geq \sqrt{ad \cdot bc} \sin \alpha = \sqrt{PQ}.$$

Přejdeme teď konečně k obecnému případu; důkaz provedeme indukcí. Pro  $n = 3$  nerovnost  $S \geq \sqrt{PQ}$  platí (dokonce s rovností). Předpokládejme platnost tohoto tvrzení pro  $n - 1 \geq 3$ ; dokážeme je pro  $n$ .

Uvažujme tedy příslušné  $n$ -úhelníky popsané v zadání. Je-li  $n = 4$  a  $C_1C_2C_3C_4$  je rovnoběžník, je nerovnost dokázána v předchozím odstavci. V opačném případě existují v mnohoúhelníku  $C_1C_2 \dots C_n$  tři po sobě jdoucí strany (zvolme označení takové, aby to byly např. strany  $C_1C_2$ ,  $C_2C_3$  a  $C_3C_4$ ) tak, že polopřímky  $C_1C_2$  a  $C_4C_3$



Podobně pro  $S(B_3A_4Y)$ ; sečtením pak vyjde

$$S(B_2A_2Y) + S(B_3A_4Y) = \frac{1}{k+1}S(B_2YB_3C_3XC_2).$$

Obsah na pravé straně je roven

$$\begin{aligned} S(B_2YB_3C_3XC_2) &= \\ &= S(C_2C_3X) + S(B_2B_3C_3C_2) - S(B_2B_3Y) = \\ &= k^2R + \frac{1}{2}(a + ka)h - R = (k+1) \left( (k-1)R + \frac{ah}{2} \right). \end{aligned}$$

Konečně  $S(B_2B_3A_3) = \frac{1}{2}ah$ . Dosadíme-li vše do vztahu pro  $S_0$ , vyjde

$$S_0 = S - \frac{1}{2}ah + (k-1)R + \frac{1}{2}ah + R = S + kR.$$

Podle indukčního předpokladu platí  $S_0 \geq \sqrt{P_0Q_0}$ , a my chceme dokázat nerovnost  $S \geq \sqrt{PQ}$ , neboli

$$(S_0 - kR)^2 \geq (P_0 - R)(Q_0 - k^2R). \quad (1)$$

Její úpravou dostaneme nerovnost

$$S_0^2 - 2kRS_0 - P_0Q_0 + k^2RP_0 + RQ_0 \geq 0,$$

která je kvadratická v  $k$  a pro její diskriminant  $D$  platí

$$\begin{aligned} D &= 4R^2S_0^2 - 4RP_0(RQ_0 + S_0^2 - P_0Q_0) = \\ &= 4R(S_0^2 - P_0Q_0)(R - P_0) < 0. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že nerovnost (1) opravdu platí, a podle principu matematické indukce je důkaz uvedeného tvrzení hotov.

**Jiné řešení** (stručně). Označme  $|B_i B_{i+1}| = b_i$ ,  $|C_i C_{i+1}| = c_i$  (bereme  $C_{n+1} = C_1$ ,  $B_{n+1} = B_1$ ) a vzdálenost přímek  $B_i B_{i+1}$  a  $C_i C_{i+1}$  budiž  $h_i$ . Pak platí

$$S - P = \sum_{i=1}^n S(B_i B_{i+1} A_{i+1}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} b_i h_i,$$

a podobně

$$Q - S = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} c_i h_i.$$

Označme dále

$$R = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} b_i h_i, \quad T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (b_i + c_i) h_i,$$

$$K = T - 2R = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (c_i - b_i) h_i.$$

Je tedy  $S = P + R$  a  $Q = P + T$ . Chceme dokázat, že  $S^2 \geq PQ$ , neboli  $(P + R)^2 \geq P(P + T)$ , což je ekvivalentní vztahu

$$R^2 \geq PK.$$

Představme si nyní následující situaci: V rovině je dáno  $n$  bodů, které se pohybují rovnoměrným přímočarým pohybem tak, že v čase  $t = 0$  se nacházejí v bodech  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , zatímco v čase  $t = 1$  v bodech  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Snadno se lze přesvědčit (provedte!), že v libovolném čase



$t \in (0, 1)$  tvoří uvažované body  $n$ -úhelník, který je „rovnoběžný“ s  $B_1 B_2 \dots B_n$  a má obsah

$$\begin{aligned} P(t) &= P + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (b_i + (1-t)b_i + t c_i) t h_i = \\ &= P + 2Rt + Kt^2. \end{aligned} \quad (2)$$

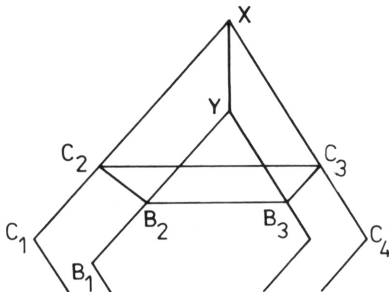
Diskriminant této kvadratické funkce je roven  $4(R^2 - PK)$ . Nerovnost  $S^2 \geq PQ$  je tedy ekvivalentní tomu, že tento diskriminant je nezáporný, tj. že existuje takové reálné číslo  $t_0$ , že  $P(t_0) = 0$ . (Upozorňujeme, že pro  $t \notin (0, 1)$  už nelze obecně  $P(t)$  interpretovat jako obsah nějakého mnohoúhelníku — může docházet k různému „křížení“ ap.) Existenci takového  $t_0$  dokážeme indukcí.

Nejprve (stejně jako v předchozím řešení) vyřešíme „zvláštní případy“, když  $n = 3$  nebo když  $n = 4$  a  $C_1 C_2 C_3 C_4$  je rovnoběžník. Pro rovnoběžník provedeme důkaz úplně stejně jako v předešlém řešení (tj. přímo, bez použití funkce  $P(t)$ ). Pro  $n = 3$  je vidět, že všechny trojúhelníky  $M_t$ ,  $t \in (0, 1)$ , jsou stejnohlé; odtud plyne rovnost

$$P(t) = c(t - T)^2$$

pro jisté  $c > 0$  a reálné číslo  $T$ ; nyní stačí vzít  $t_0 = T$ , a bude  $P(t_0) = 0$ .

Předpokládejme nyní, že jsme už tvrzení dokázali pro  $(n-1)$ -úhelníky,  $n \geq 4$ ; dokážeme je pro  $n$ -úhelníky. Uvažujme tedy dva „rovnoběžné“  $n$ -úhelníky  $B_1 B_2 \dots B_n \subset C_1 C_2 \dots C_n$  a předpokládejme, že  $C_1 C_2 \dots C_n$  není rovnoběžník. Stejně jako v předchozím řešení najdeme tři po sobě jdoucí strany (např.  $C_1 C_2, C_2 C_3$  a  $C_3 C_4$ ) tak,



Obr. 52

že polopřímky  $C_1C_2$  a  $C_4C_3$  se protínají (obr. 52). Pro mnohoúhelníky  $C_1C_2 \dots C_n$  a  $B_1B_2 \dots B_n$  označme  $P_n(t)$  příslušnou kvadratickou funkci. Protože mnohoúhelníky  $C_1XC_4C_5 \dots C_n$  a  $B_1YB_4B_5 \dots B_n$  jsou rovněž „rovnoběžné“, můžeme i pro ně sestavit odpovídající kvadratickou funkci  $P_{n-1}(t)$ . Takovou funkci  $P_\Delta(t)$  můžeme konečně sestavit i pro „rovnoběžné“ trojúhelníky  $C_2C_3X$  a  $B_2B_3Y$ . Z případu  $n = 3$  víme, že

$$P_\Delta(t) = c(t - T)^2$$

pro nějaká  $c > 0$  a  $T$ . Podle definice jsou však pro  $t \in (0, 1)$  funkce  $P_n, P_{n-1}$  a  $P_\Delta$  rovny obsahům příslušných mnohoúhelníků  $M_t$  vzniklých „smršťováním“ z  $M_1 = C_1C_2 \dots C_n$  na  $M_0 = B_1B_2 \dots B_n$ , resp. z  $C_1XC_4 \dots C_n$  na  $B_1YB_4 \dots B_n$ , resp. z  $C_2C_3X$  na  $B_2B_3Y$ ; platí tedy  $P_n = P_{n-1} - P_\Delta$ , čili

$$P_n(t) = P_{n-1}(t) - c(t - T)^2$$

pro všechna  $t \in (0, 1)$ . Poněvadž na obou stranách stojí kvadratické funkce, musí tato rovnost platit dokonce pro

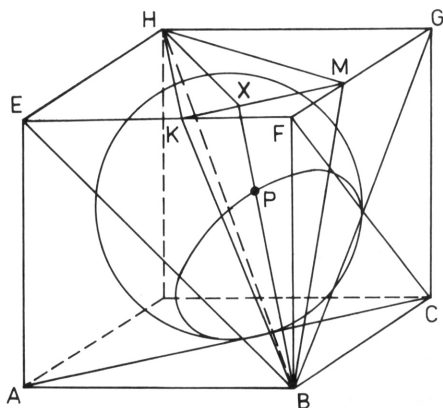
všechna reálná čísla  $t$ . Avšak podle indukčního předpokladu existuje  $t_0$  takové, že  $P_{n-1}(t_0) = 0$ . Potom ale je

$$P_n(t_0) = P_{n-1}(t_0) - c(t_0 - T)^2 \leq P_{n-1}(t_0) = 0,$$

což zaručuje existenci kořene funkce  $P_n$ , protože koeficient  $K$  kvadratického členu ve vztahu (2) je vždy kladný (mnohoúhelník  $C_1C_2 \dots C_n$  má větší obvod než  $B_1B_2 \dots B_n$ ). Tím je důkaz hotov.

Na závěr poznamenejme, že z obou řešení lze po chvíli přemýšlení zjistit, kdy nastane rovnost  $S^2 = PQ$ : je to právě tehdy, jsou-li mnohoúhelníky  $C_1C_2 \dots C_n$  a  $B_1B_2 \dots B_n$  podobné.

**3.5** Předpokládejme, že se rovina  $BKM$  dotýká vepsané koule v bodě  $P$ , a označme  $X$  průsečík přímk  $BD$  a  $KM$



Obr. 53

(obr. 53). Předpokládejme, že  $K$  leží uvnitř  $EF$  a  $M$  uvnitř  $FG$ . Ukážeme, že roviny  $HEB$  a  $HXB$  jsou souměrné podle roviny  $HKB$ .

Přímka  $BK$  je průsečnicí dvou tečných rovin ke kouli —  $EKB$  a  $XKB$ . Přitom roviny  $HEB$ ,  $HXB$  procházejí dotykovými body, středem koule a bodem  $B$ . Analogicky jsou roviny  $HXB$  a  $HGB$  souměrné podle  $HMB$ . Úhel rovin  $HMB$ ,  $HKB$  je proto roven polovině úhlu rovin  $HEB$ ,  $HGB$ . Tento úhel je  $\frac{2}{3}\pi$ , protože uvedené roviny splynou při otočení o  $\frac{2}{3}\pi$  kolem osy  $BH$ . Proto je úhel  $\varphi$  vždy týž a je roven  $\frac{1}{3}\pi$ .

**3.6** Jedná se o dvě těžké úlohy z teorie grafů. Přeformulování do řeči grafů je nasnadě — vrcholy grafu budou rytíři, hrany spojují rytíře, kteří se přátelí (zde předpokládáme, že relace přátelství je symetrická, dále že relace přátelství a nepřátelství jsou komplementární, tedy pokud dva rytíři jsou přátelé, pak nejsou nepřátelé). Kružnice v daném grafu je posloupnost navzájem různých vrcholů  $v_1, v_2, \dots, v_k$  ( $k \geq 3$ ) taková, že dvojice  $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{k-1}v_k, v_kv_1$  jsou hrany grafu. Kružnice, která prochází všemi vrcholy grafu (každým právě jednou), se nazývá hamiltonovská. Systém navzájem disjunktních kružnic, který pokrývá všechny vrcholy grafu (každý právě jednou kružnicí) se nazývá 2-faktor. (Jinými slovy, 2-faktor je podgraf, jehož všechny vrcholy mají stupeň 2 a který obsahuje všechny vrcholy původního grafu). Úloha 3.6 tak sestává ze dvou částí:

**Úloha 3.6.1** Dokažte, že graf o  $n$  vrcholech, jehož každý vrchol má stupeň aspoň  $n/2$ , obsahuje hamiltonovskou kružnici.

**Úloha 3.6.2** Dokažte, že  $2k$ -regulární graf ( $k \geq 1$  přirozené) obsahuje 2-faktor. (Stupeň vrcholu je počet hran, které z něj vycházejí; graf se nazývá  $d$ -regulární, jestliže všechny jeho vrcholy mají stupeň  $d$ .)

**Řešení úlohy 3.6.1** (sporem). Předpokládejme, že existuje graf o  $n$  vrcholech, který má všechny vrcholy stupně aspoň  $n/2$  a neobsahuje hamiltonovskou kružnici. Přidávejme mu po jedné hraně. Protože úplný graf hamiltonovskou kružnici obsahuje, existuje graf  $G$  a hrana  $ab$  taková, že  $G$  má všechny hrany stupně aspoň  $n/2$  a neobsahuje hamiltonovskou kružnici, zatímco graf  $G$  s přidanou hranou  $ab$  již hamiltonovskou kružnici obsahuje. Každá taková kružnice pak nutně obsahuje hranu  $ab$  (jinak by to byla kružnice i v grafu  $G$ ), nechť tedy  $a = v_1, v_2, \dots, v_n = b$  je pořadí vrcholů na hamiltonovské kružnici. Položme  $A = \{i; av_i \text{ je hrana } G\}$ ,  $B = \{i; v_{i-1}b \text{ je hrana } G\}$ . Potom 1 nepatří do  $A \cup B$ , takže  $|A \cup B| \leq n - 1$ . Přitom  $|A| \geq \frac{n}{2}$ ,  $|B| \geq \frac{n}{2}$  podle předpokladu o stupních, a proto  $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \geq 1$ . Existuje tedy  $i_0$  takové, že  $av_{i_0}$  i  $v_{i_0-1}b$  jsou hrany  $G$ . Potom ale  $a = v_1, v_2, \dots, v_{i_0-1}, b = v_n, v_{n-1}, \dots, v_{i_0}$  je hamiltonovská kružnice v grafu  $G$ . To je spor. (Povšimněte si, že toto je vlastně důkaz indukcí podle počtu hran. Rozmyslete si, který je první krok indukce a zformulujte přesné znění indukčního kroku.)

**Jiné řešení** (stručně podle M. Badidy, 4. ročník G Košice, Šmeralova). Nejprve dokážeme, že když  $n$  rytířů sedí na lavici tak, že spolu sousedí jen přátelé a krajní mají mezi sedícími aspoň  $n/2$  přátel, pak je lze posadit kolem kulatého stolu.

Označme uvedené rytíře  $r_1, r_2, \dots, r_n$  v pořadí, v jakém sedí na lavici. Pokud  $r_1$  a  $r_n$  nejsou přáteli, stačí uvážit ty z rytířů, kteří se přátelí s  $r_1$ , a ty, jež sousedí zprava s přáteli rytíře  $r_n$ . Těch či oněch je aspoň  $n/2$ , ale dohromady jich je nejvýše  $n - 1$ . Snadno nahlédnete, že rytíře lze pak ke stolu posadit v pořadí  $r_{j-1} \dots r_1 r_j \dots r_n$ , kde  $r_j$  je rytíř společný oběma zmíněným množinám.

Dále pak postupujeme induktivně: Z  $n$  rytířů vybereme dva přátele, jež posadíme na lavici a postupně k nim přisazujeme na jeden či druhý kraj lavice další, dokud to jde (aby vedle sebe seděli jen přátelé). Jakmile již nelze dále pokračovat, znamená to, že každý krajní rytíř má už všech svých aspoň  $n/2$  přátel usazených na lavici, takže na lavici sedí  $k \geq \frac{n}{2} + 1$  rytířů. Podle předchozího tvrzení lze tyto rytíře rozesadit u kulatého stolu. Pokud ještě nějaký rytíř u stolu nesedí, najdeme mu mezi sedícími jistě přítele (nesedí jich méně než  $n/2$ ), počínaje tímto přítelem je posadíme zase na lavici a rytíře k nim přisadíme, atd.

**Řešení úlohy 3.6.2.** Důkaz úlohy 3.6.2 ve vší obecnosti se opírá o následující netriviální větu:

*Věta o manželství. Nechť  $D$  (resp.  $H$ ) je množina dívek (resp. hochů). Pro dívku  $d \in D$  označme  $H(d) \subset H$  množinu hochů, které je ochotna pojmout za muže. Chceme všechny dívky najednou provdat (za různé hochy, bigamie dosud není povolena) tak, aby žádná dívka nemusela pojmout za muže někoho, koho nechce. Toto je možno provést, právě když je splněna podmínka*

$$D^* \subset D \Rightarrow |D^*| \leq \left| \bigcup_{d \in D^*} H(d) \right|. \quad (1)$$

*Jinými slovy, právě když každých  $k$  dívek ( $k \leq n$ ) má dohromady alespoň  $k$  nápadníků!*

Mějme  $2k$ -regulární graf. Opět stačí uvažovat souvislý graf, a ten lze nakreslit jedním tahem. Vezměme jeden takový tah a pamatujme si, v jakém pořadí jsme vrcholy grafu procházeli (do každého vrcholu jsme  $k$ -krát vešli a  $k$ -krát z něj odešli). Vrcholy tohoto grafu označme  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Sestrojme množiny  $D = \{d_1, \dots, d_n\}$  a  $H = \{h_1, \dots, h_n\}$  a položme  $H(d_i) = \{h_j; \text{hranu } v_i v_j \text{ jsme procházeli ve směru } v_i \rightarrow v_j\}$ . Potom  $|H(d)| = k$  pro každé  $d \in D$  a též každý hoch  $h \in H$  náleží do  $k$  množin  $H(d)$ .

Právě popsany systém splňuje podmínku (1) a podle věty o manželství lze všechny dívky provdat (tj. všechny dívky a chlapce lze vzájemně jednoznačně spárovat).

Pro každé  $i$  tedy existuje  $j(i)$  (pro různá  $i$  jsou  $j(i)$  též různá) tak, že  $h_{j(i)} \in H(d_i)$ . Protože  $|H| = |D|$ , plyne od tud, že i pro každé  $j$  existuje právě jedno  $i(j)$  tak, že  $h_j \in H(d_{i(j)})$ . Položíme-li  $E = \{v_i v_{j(i)}; i = 1, 2, \dots, n\}$ , patří každý vrchol  $v_i$  dvěma hranám z  $E$  (jednou hraně  $v_i v_{j(i)}$ , podruhé hraně  $v_k v_i$  pro  $i = j(k)$ ). Tedy náš  $2k$ -regulární graf obsahuje 2-faktor  $E$ .

**3.7** (Podle P. Hliněného, 4. ročník GMK, Bílovec.) Dané číslo pod odmocninou můžeme zapsat jako

$$0, \underbrace{11111 \dots 11111}_{100} = \frac{1}{9} (1 - 10^{-100}).$$

Na výpočet uvedené odmocniny proto použijeme binomic-

kou řadu

$$\begin{aligned}\sqrt{0,\underbrace{111\,11\dots1111}_{{100}}} &= \frac{1}{3} (1 - 10^{-100})^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-10^{-100})^n.\end{aligned}\quad (1)$$

Protože pro  $n \geq 2$  je

$$\left| \binom{\frac{1}{2}}{n} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) \cdot \dots \cdot (\frac{1}{2} - n + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \right| \leq \frac{1}{8},$$

nemají členy binomické řady (1) počínaje třetím na prvních 200 desetinných míst vliv (příslušná řada má jako majorantu geometrickou řadu s menším součtem). Proto s přesností na 200 platných míst platí

$$\begin{aligned}\sqrt{0,\underbrace{111\,11\dots1111}_{{100}}} &\doteq \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \cdot 10^{-100} = \\ &= \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 10^{-100} \right) + \left( \frac{1}{6} \cdot 10^{-100} \right).\end{aligned}$$

Číslo v první závorce má na prvních 100 desetinných místech samé trojky a pak samé nuly, zatímco číslo v druhé závorce má na 101. desetinném místě jedničku a pak dál samé šestky. Na 200 platných číslic tedy je

$$\sqrt{0,\underbrace{111\,11\dots1111}_{{100}}} = 0,\underbrace{333\dots3331}_{100}\underbrace{666\dots666}_{99}\dots$$

**4.1** Hledáme reálné kořeny rovnice s reálnými koeficienty. Využijeme buď speciálního případu Cauchyovy nerovnosti

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad (1)$$



ve které nastává rovnost, právě když  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ , anebo nerovnosti mezi mocninným a aritmetickým průměrem

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|^{16}\right)^{\frac{1}{16}} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad (2)$$

ve které nastává rovnost, právě když  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ . Podle Viětových vztahů platí

$$\sum_{i=1}^n r_i = -n, \quad (3)$$

odtud pak podle (1) plyne

$$\begin{aligned} n^{16} &= \left(\sum_{i=1}^n r_i\right)^{16} \leq \left(n \sum_{i=1}^n r_i^2\right)^8 \leq n^8 \left(n \sum_{i=1}^n r_i^4\right)^4 \leq \\ &\leq n^{12} \left(n \sum_{i=1}^n r_i^8\right)^2 \leq n^{15} \sum_{i=1}^n r_i^{16} = n^{16}. \end{aligned}$$

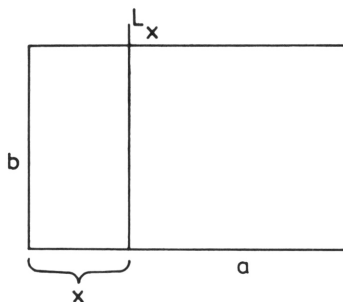
Ve všech nerovnostech nastává rovnost, je tedy  $r_1 = r_2 = \dots = r_n$  a podle (3)  $r_1 = r_2 = \dots = r_n = -1$ .

Ve druhém případě podle (2) dostaneme

$$1 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |r_i|^{16}\right)^{\frac{1}{16}} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |r_i| \geq \frac{1}{n} \left|\sum_{i=1}^n r_i\right| = \frac{|-n|}{n} = 1.$$

Opět tedy v obou nerovnostech platí rovnost. Z té první máme, že  $|r_1| = |r_2| = \dots = |r_n|$ , a z druhé vidíme, že všechna  $r_i$  mají stejné znaménko, takže  $r_1 = r_2 = \dots = r_n = -1$ . Daná rovnice má tvar

$$(x+1)^n = 0.$$



Obr. 54

**4.2** Daný pravoúhelník si představíme tak jako na obr. 54; je jasné, co myslíme slovy vlevo, dole, vodorovný, svislý, atd. (například strana  $a$  je vodorovná, strana  $b$  svislá). Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že každý pravoúhelník  $R_i$  má aspoň jednu stranu délky 1 (jinak rozsekáme každý  $R_i$  rozměrů  $k \times x$  ( $k$  přirozené) na  $k$  pravoúhelníků  $1 \times x$ ). Pravoúhelníky, jejichž svislá strana má délku 1, nazveme *svislými*, ostatní (musí mít nutně vodorovnou stranu délky 1) *vodorovnými*.

Pro  $x \in \langle 0, a \rangle$  označme  $f(x)$  součet „výšek“ všech vodorovných pravoúhelníků  $R_i$ , jejichž levé strany leží na svislé přímce  $L_x$  ležící ve vzdálenosti  $x$  napravo od  $b$  (obr. 54). Uvažujme nějaké  $x$  z intervalu  $\langle 1, a \rangle$ . Označíme-li  $z_1(x)$  součet výšek všech svislých pravoúhelníků, jejichž levá strana leží na  $L_x$ , bude

$$f(x) + z_1(x)$$

rovno součtu výšek *všech* pravoúhelníků, jejichž levá strana leží na  $L_x$ . Podobnou úvahou zjistíme, že součet výšek všech

pravoúhelníků, jejichž pravá strana leží na  $L_x$ , je

$$f(x-1) + z_2(x),$$

kde  $z_2(x)$  je součet výšek všech svislých pravoúhelníků, jejichž pravá strana leží na  $L_x$ . Tyto dva poslední výrazy si však musí být rovny, takže

$$f(x) = f(x-1) + z_2(x) - z_1(x).$$

Protože svislé pravoúhelníky mají výšku 1, jsou  $z_1(x)$ ,  $z_2(x)$  celá čísla, tedy i  $f(x) - f(x-1)$  je celé číslo. Provedme tuto úvahu pro  $x = 1, 2, \dots, N$ , kde  $N$  je největší přirozené číslo menší než  $a$ , vidíme, že  $f(N) - f(0)$  je celé číslo.

Z předchozích úvah nyní vyplývá, že

$$f(0) + z_1(0) = b.$$

Předpokládejme, že délka strany  $b$  není celé číslo. Jak už bylo řečeno,  $z_1(x)$  je vždy celé, tedy ani  $f(0)$  není celé, a proto ani  $f(N)$  není celé číslo. Speciálně  $f(N) \neq 0$ , takže přímky  $L_N$  se dotýká zleva aspoň jeden vodorovný pravoúhelník. Protože je vodorovný a leží celý v  $R$ , musí být délka strany  $a$  aspoň  $N + 1$ . Ale  $N$  bylo definováno jako největší celé číslo menší než  $a$ , je tedy nutně  $a = N + 1$ , tj.  $a$  je celé.

Dokázali jsme, že pokud  $b$  není celé, musí být celočíselné  $a$ ; tím je důkaz hotov.

**Jiné řešení.** Označme  $A, B, C, D$  vrcholy daného pravoúhelníku  $R$  a zavedme kartézskou soustavu souřadnic s počátkem v bodě  $A$  a s osami  $x = AB$ ,  $y = AD$ . Množinu těch bodů, jež jsou vrcholy některého z pravoúhelníků  $R_i$  a mají

obě souřadnice celočíselné, označme  $S$ . Každému z vrcholů  $E$  v uvažovaném rozkladu pravoúhelníku  $R$  přiřadíme funkci  $n_E$ , označující počet pravoúhelníků  $R_i$ , jichž je  $E$  vrcholem. Je tedy  $n_A = n_B = n_C = n_D = 1$ , jinak  $n_E = 0$ , nebo  $n_E = 2$ , nebo  $n_E = 4$ . Přitom

$$\sum_{E \in S} n_E = \sum_{i=1}^n f(R_i),$$

kde  $f(R_i)$  označuje počet vrcholů, jež patří do  $S$  (mají obě souřadnice celočíselné). Vzhledem k tomu, že aspoň jedna dvojice stran pravoúhelníku  $R_i$  je celočíselná, je  $f(R_i) \in \{0, 2, 4\}$ , takže

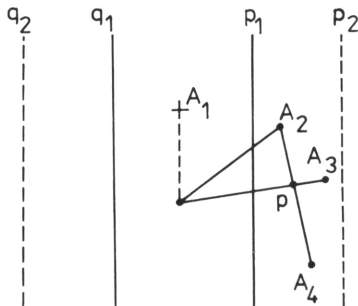
$$\sum_{E \in S} n_E = \sum_{i=1}^n f(R_i) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Protože ale  $A \in S$  a  $n_A = 1$ , patří ještě aspoň jeden z vrcholů  $B, C, D$  rovněž do  $S$ . Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

**4.3** (Podle Š. Kasala, 3. ročník GWP, Praha.) Předpokládejme, že obsahy  $S(OA_i A_j)$  všech trojúhelníků  $OA_i A_j$ ,  $1 \leq i < j \leq 4$ , leží v intervalu  $\langle 1, \sqrt{2} \rangle$ , a z tohoto předpokladu vyvodíme spor.

Zřejmě žádné tři z daných pěti bodů nejsou kolineární. Sestrojme rovnoběžky  $p_1, p_2, q_1, q_2$  s přímkou  $OA_1$ , jež leží ve vzdálenostech  $\frac{2}{|OA_1|}$  a  $\frac{2\sqrt{2}}{|OA_1|}$  od  $OA_1$  (obr. 55).

Uvažujme nyní body  $A_k$ ,  $k = 2, 3, 4$ . Protože obsah trojúhelníku  $OA_1 A_k$  je aspoň 1 a méně než  $\sqrt{2}$ , musí  $A_k$  ležet v pásu vymezeném přímkami  $p_1, p_2$  ( $p_1$  do pásu patří,



Obr. 55

$p_2$  nikoliv) nebo v obdobném pásu mezi přímkami  $q_1$  a  $q_2$ . Obsah žádného z trojúhelníků  $OA_iA_j$ ,  $1 \leq i < j \leq 4$ , se však nezmění, nahradíme-li některé body  $A_k$  body  $A'_k$  s nimi souměrně sdruženými podle  $O$ . Bez újmy na obecnosti můžeme tedy předpokládat, že všechny body  $A_k$  ( $k = 2, 3, 4$ ) leží v pásu mezi  $p_1$  a  $p_2$ . Dále můžeme předpokládat, že polopřímka  $OA_3$  náleží úhlu  $A_2OA_4$  (stačí body vhodně přejmenovat).

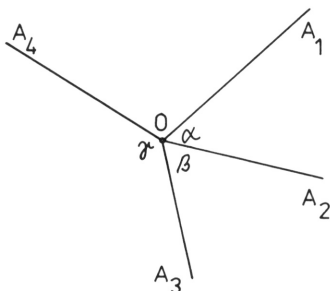
Označme  $P$  průsečík této polopřímky s úsečkou  $A_2A_4$ . Protože  $A_2, A_4$  leží v pásu mezi  $p_1, p_2$ , leží v něm i  $P$ ; proto

$$|OA_3| < \sqrt{2}|OP|.$$

Nyní platí

$$\begin{aligned} S(A_2OA_4) &= S(A_2OP) + S(A_4OP) = \\ &= \frac{|OP|}{|OA_3|} (S(A_2OA_3) + S(A_4OA_3)) > \\ &> \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1 + 1) = \sqrt{2}, \end{aligned}$$

což je spor s předpokladem, že  $S(OA_i A_j) \in \langle 1, \sqrt{2} \rangle$  pro všechna  $1 \leq i < j \leq 4$ .



Obr. 56

**Jiné řešení.** Předpokládejme, že body  $A_1, \dots, A_n$  jsou označeny ve směru hodinových ručiček a vzájemné úhly polopřímek  $OA_i, OA_{i+1}$  jsou po řadě  $\alpha, \beta, \gamma$  (obr. 56). Pro obsahy uvažovaných trojúhelníků pak platí ( $S_{ij} = S(OA_i A_j)$ )

$$S_{12} = \frac{1}{2} |OA_1| |OA_2| |\sin \alpha|$$

$$S_{13} = \frac{1}{2} |OA_1| |OA_3| |\sin(\alpha + \beta)|$$

$$S_{14} = \frac{1}{2} |OA_1| |OA_4| |\sin(\alpha + \beta + \gamma)|$$

$$S_{23} = \frac{1}{2} |OA_2| |OA_3| |\sin \beta|$$

$$S_{24} = \frac{1}{2} |OA_2| |OA_4| |\sin(\beta + \gamma)|$$

$$S_{34} = \frac{1}{2} |OA_3| |OA_4| |\sin \gamma|.$$

Jednoduchým výpočtem však vyjde

$$\begin{aligned}
 & \sin(\alpha + \beta + \gamma) \sin \beta + \sin \alpha \sin \gamma = \\
 & = \sin(\alpha + \beta) \cos \gamma \sin \beta + \\
 & \quad + \sin \beta \sin \gamma \cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin \gamma = \\
 & = \sin(\alpha + \beta) \cos \gamma \sin \beta + \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha \cos \beta - \\
 & \quad - \sin^2 \beta \sin \gamma \sin \alpha + \sin \alpha \sin \gamma = \\
 & = \sin(\alpha + \beta) \cos \gamma \sin \beta + \\
 & \quad + \sin \gamma \cos \beta (\sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta) = \\
 & = \sin(\alpha + \beta) \sin(\beta + \gamma),
 \end{aligned}$$

takže pro vhodnou kombinaci znamének  $\pm$  dostaneme

$$S_{14}S_{23} \pm S_{12}S_{34} \pm S_{13}S_{24} = 0.$$

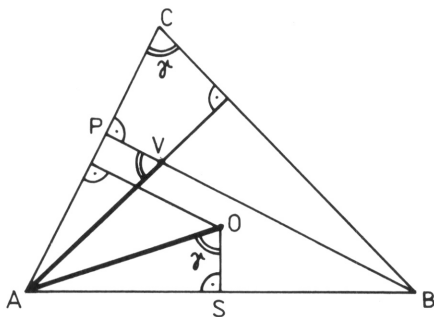
Pro vhodnou kombinaci  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$  tedy bude

$$\left( \max_{1 \leq i < j \leq 4} S_{ij} \right)^2 \geq S_{ij}S_{kl} = S_{ik}S_{jl} + S_{il}S_{jk} \geq 2,$$

neboli

$$\max S_{ij} \geq \sqrt{2}.$$

**4.4** (S. Hrinko, A. Kuběna, J. Menšík.) Označme  $V$  průsečík výšek,  $O$  střed kružnice opsané,  $P$  patu výšky spuštěné z bodu  $B$  na stranu  $AC$ ,  $S$  střed strany  $AB$  (obr. 57). Trojúhelník  $APV$  je pravoúhlý a velikost úhlu  $AVP$  je  $\gamma$ . Podle věty o obvodovém a středovém úhlu má úhel  $AOB$



Obr. 57

velikost  $2\gamma$ . Trojúhelník  $AOB$  je rovnoramenný, takže velikost úhlu  $AOS$  je  $\gamma$ . Trojúhelník  $ASO$  je také pravoúhlý a podle předpokladu  $|AV| = |AO|$ , takže trojúhelníky  $APV$  a  $ASO$  jsou shodné. Je tedy

$$|AP| = |AS| = \frac{1}{2}|AB|.$$

Odtud plyne, že  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  (např.  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ ).

Obrácením sledu předcházejících úvah dostaneme, že  $|AV| = |AO|$ , právě když  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ .

**Poznámka.** Velmi krátké řešení obdržíme použitím vzorce pro obvod kružnice opsané. Je

$$|AO| = \frac{|AB|}{2 \sin \gamma}, \quad |AV| = \frac{|AP|}{\sin \gamma} = \frac{|AB| \cos \alpha}{\sin \gamma}.$$

Odtud okamžitě plyne řešení.

**4.5** Dokážeme následující tvrzení, z něhož tvrzení úlohy snadno plyne. Označme  $a_1$ ,  $a_2$  tečny kružnice  $k$  v bodech



$A_1, A_2$  a uvažujme bod  $X$  kružnice  $k$ . Jsou-li  $P_1, P_2, P$  (po řadě) paty kolmic spuštěných z bodu  $X$  na přímky  $a_1, a_2$  a  $A_1A_2$ , je  $|PX|^2 = |P_1X||P_2X|$ .

Podle věty o obvodovém a úsekovém úhlu je úhel  $A_1XA_2$  roven úhlu  $\alpha$  při vrcholu  $A_2$  (kdo toto tvrzení nezná, může je snadno nahlédnout ze známé věty o středovém a obvodovém úhlu). Dále je snadno vidět, že i úhel  $PXP_2$  je roven  $\alpha$ . Proto se úhly  $PXP_2$  a  $A_1XA_2$  rovnají a rovnají se i úhly  $A_1XP$  a  $A_2XP_2$ , takže trojúhelníky  $A_1PX$  a  $A_2P_2X$  jsou podobné. Odtud

$$\frac{|P_2X|}{|A_2X|} = \frac{|PX|}{|A_1X|}$$

a symetricky také

$$\frac{|P_1X|}{|A_1X|} = \frac{|PX|}{|A_2X|}.$$

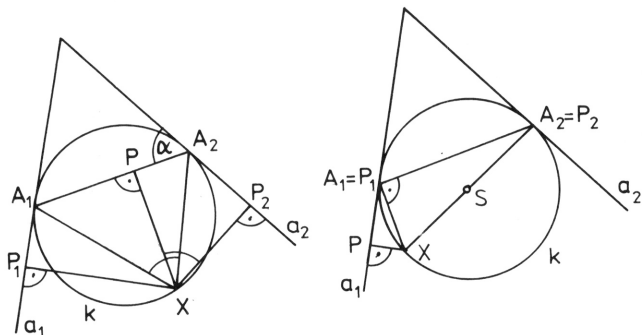
Uvedené rovnosti platí i v případě, kdy  $A_2X$  či  $A_1X$  je průměrem kružnice  $k$  (obr. 58). Vynásobením obou vztahů dostaneme požadovanou rovnost

$$|P_1X||P_2X| = |PX|^2,$$

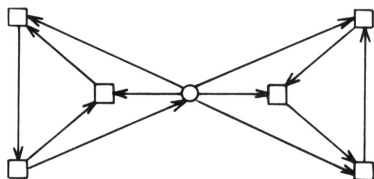
která platí, i když  $|A_1X| = 0$  nebo  $|A_2X| = 0$ , protože pak také  $|P_1X||P_2X| = 0 = |PX|^2$ .

Uvedené tvrzení lze také snadno dokázat analyticky.

**4.6** Ještě než uvedeme řešení této úlohy, je třeba poznamenat, že obrázek je součástí podmínek úlohy. Jinak existuje protipříklad (obr. 59), pro který tvrzení úlohy neplatí.



Obr. 58



Obr. 59

Kruhové náměstí označme  $O$ , ulici z  $A$  do  $B$  označme  $A \rightarrow B$ . Dokážeme, že

- z libovolného náměstí  $A \neq O$  se dostaneme na  $O$ ,
- z  $O$  se dostaneme na libovolné čtvercové náměstí.

Z a) a b) pak snadno plyne tvrzení úlohy.

Nejprve dokážeme, že z náměstí  $A \neq O$  se dostaneme na  $O$ . Jestliže  $A \rightarrow O$ , není co dokazovat, jinak z  $A$  vede cesta na nějaké čtvercové náměstí. Pokračujme z  $A$  po čtvercových náměstích, dokud je to možné, anebo dokud se nevrátíme zpátky do  $A$ .

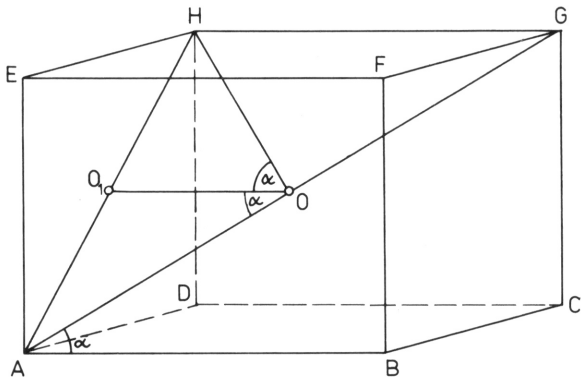
Jestliže přijdeme na nějaké náměstí  $B$ , odkud nemůžeme pokračovat po obvodě, je podle zadání  $B \rightarrow O$ , čímž jsme se dostali z  $A$  na  $O$ . Pokud jsme se nikde nezastavili, pak se vrátíme na  $A$ , protože náměstí je konečný počet. Předpokládáme-li, že plán města odpovídá obrázku, museli jsme projít všechna čtvercová náměstí a podle zadání pak existuje náměstí  $B$  takové, že  $B \rightarrow O$ . Z  $A$  tedy půjdeme do  $B$  a odtud do  $O$ .

Tvrzení b) dostaneme, jestliže změníme orientaci ulic; podmínky zadání se zachovají a podle a) se (v novém městě) dostaneme z  $A$  na  $O$ , to znamená, že v daném městě se lze dostat z  $O$  na  $A$ .

**Poznámka.** Úloha se dá zobecnit takto: Předpokládejme, že se v městě dá označit směr jednotlivých ulic tak, aby se dalo z každého náměstí odjet a na každé náměstí přijet. Pak se dá z každého náměstí dojet na libovolné jiné, právě když každá „kruhová“ trasa po jednotlivých náměstích (bez ohledu na zvolené směry) prochází jedním pevným náměstím.

Pokuste se to dokázat.

**4.7** (Podle V. Skalského, 4. ročník G, Prešov, T. Ševčenka.) Označme  $O$  střed tělesové úhlopříčky  $AG$  a  $O_1$  střed stěnové úhlopříčky  $AH$  (obr. 60). Pak  $OO_1$  je střední příčka trojúhelníku  $GHA$ , a proto  $OO_1$ ,  $GH$ ,  $AB$  jsou navzájem



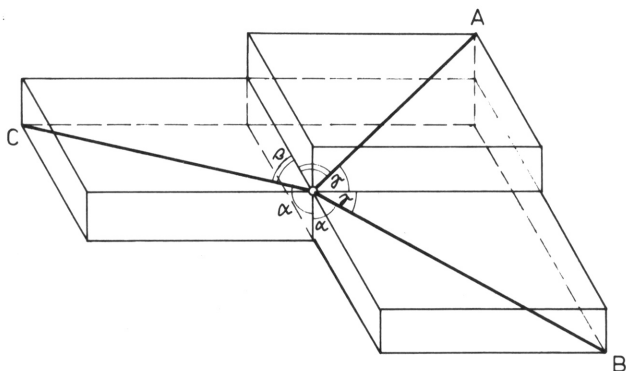
Obr. 60

rovnoběžné. Podle věty o střídavých úhlech je  $|\sphericalangle AOO_1| = |\sphericalangle OAB| = \alpha$ . Protože  $OO_1$  je kolmá na  $AH$  (neboť je kolmá na boční stěnu  $ADHE$ ), je trojúhelník  $AOH$  rovnoramenný, takže  $|\sphericalangle AOH| = |\sphericalangle AOO_1| + |\sphericalangle HOO_1| = 2\alpha$ . Analogicky dostaneme, že  $|\sphericalangle HOC| = 2\beta$ ,  $|\sphericalangle COA| = 2\gamma$  (velmi názorně je to vidět i na obr. 61). Trojhran  $OAH$  má tedy rovinné úhly  $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ . Ale součet úhlů v každém trojhranu, který neleží v rovině, je menší než  $2\pi$ . V našem případě jistě  $O$  neleží v rovině  $AHC$ , jinak bychom lehko dokázali, že v ní leží všechny vrcholy kváдру. Proto  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ .

Tvrzení o součtu úhlů v trojhranu dokážeme pomocí kosinové věty: Označme  $O'$  kolmý průmět bodu  $O$ , který neleží v rovině  $AHC$ , do této roviny. Zřejmě platí

$$|\sphericalangle AO'H| + |\sphericalangle HO'C| + |\sphericalangle CO'A| = 2\pi$$

a je  $|O'A| = |O'H| = |O'C| < |OA| = |OH| = |OC|$ . Z kosi-



Obr. 61

nové věty plyne

$$\begin{aligned}
 \cos |\sphericalangle AO'H| &= \frac{|AH|^2 - |O'A|^2 - |O'H|^2}{2|O'A||O'H|} = \\
 &= \frac{|AH|^2 - 2|O'A|^2}{2|O'A|^2} < \\
 &< \frac{|AH|^2 - |OA|^2 - |OH|^2}{2|OA||OH|} = \\
 &= \cos |\sphericalangle AOH|.
 \end{aligned}$$

Protože velikosti úhlů  $AO'H$ ,  $AOH$  leží v intervalu  $(0, \pi)$ , plyne odtud  $|\sphericalangle AOH| < |\sphericalangle AO'H|$ . Podobně dokážeme, že  $|\sphericalangle COH| < |\sphericalangle CO'H|$ ,  $|\sphericalangle COA| < |\sphericalangle CO'A|$ . Po sečtení vyjde  $|\sphericalangle AOH| + |\sphericalangle COH| + |\sphericalangle COA| < 2\pi$ .

**5.1** Pro  $n = 1$  dostáváme

$$b = x_0^2 + x_1^2 = x_0^2 + (a - x_0)^2 = 2x_0^2 - 2ax_0 + a^2,$$

takže  $x_0$  je kořenem kvadratické rovnice

$$2x^2 - 2ax + (a^2 - b) = 0,$$

jejíž diskriminant  $4(2b - a^2)$  je zřejmě nezáporný, a platí tedy

$$x_0 \in \left\{ \frac{a \pm \sqrt{2b - a^2}}{2} \right\},$$

přičemž obě hodnoty se mohou nabývat.

Dále předpokládejme, že  $n > 1$ . Použijeme-li Cauchyovu nerovnost

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2$$

na čísla  $a_i = 1$ ,  $b_i = y_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), jež splňují rovnosti  $\sum_{i=1}^n y_i = A$ ,  $\sum_{i=1}^n y_i^2 = B$ , dostaneme nerovnost  $A^2 \leq nB$ ;

přitom pro  $c = \sqrt{\frac{nB - A^2}{2n}}$  a čísla

$$y_1 = \frac{A}{n} - c, \quad y_2 = \frac{A}{n} + c, \quad y_3 = y_4 = \dots = y_n = \frac{A}{n}$$

(na tomto místě používáme předpoklad  $n > 1$ ) obráceně platí

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i &= A, \\ \sum_{i=1}^n y_i^2 &= \left( \frac{A}{n} - c \right)^2 + \left( \frac{A}{n} + c \right)^2 + (n-2) \frac{A^2}{n^2} = \\ &= \frac{A^2}{n} + 2c^2 = B. \end{aligned}$$

Protože čísla  $x_0, \dots, x_n$  splňují rovnosti

$$\sum_{i=0}^n x_i = a, \quad \sum_{i=0}^n x_i^2 = b,$$

musí analogicky podle Cauchyovy nerovnosti platit  $a^2 \leq (n+1)b$ . Za tohoto předpokladu hledáme tedy všechna  $x_0$ , pro něž existují  $x_1, \dots, x_n$  tak, aby

$$\sum_{i=1}^n x_i = a - x_0, \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = b - x_0^2.$$

Podle předchozí úvahy taková čísla  $x_1, \dots, x_n$  existují, právě když

$$(a - x_0)^2 \leq n(b - x_0^2),$$

neboli

$$(n+1)x_0^2 - 2ax_0 + (a^2 - nb) \leq 0.$$

Protože  $a^2 \leq (n+1)b$ , je diskriminant kvadratického trojčlenu na levé straně nezáporný,

$$D = 4a^2 - 4(n+1)(a^2 - nb) = 4n((n+1)b - a^2) \geq 0.$$

Uvažovaná nerovnice je tedy ekvivalentní podmínce

$$x_0 \in \left\langle \frac{2a - \sqrt{D}}{2(n+1)}, \frac{2a + \sqrt{D}}{2(n+1)} \right\rangle,$$

neboli

$$x_0 \in \left\langle \frac{a - \sqrt{n(n+1)b - na^2}}{n+1}, \frac{a + \sqrt{n(n+1)b - na^2}}{n+1} \right\rangle,$$

což je odpověď na naši úlohu.

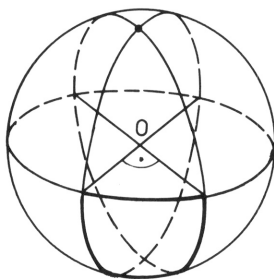
**5.2** Místo s eukleidovskými vzdálenostmi budeme raději počítat s velikostmi úhlů  $A_iOA_j$ , kde  $O$  je střed dané kulové plochy. Pro jednodušší vyjadřování budeme používat zeměpisnou terminologii.

Vezmeme-li např. pět vrcholů pravidelného osmistěnu, vidíme, že existují body  $A_1, A_2, \dots, A_5$  takové, že

$$\min_{i \neq j} |\sphericalangle A_iOA_j| \geq \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

Uvažujme množinu bodů  $\{A_1, \dots, A_5\}$ , jež splňují (1). Ukážeme, že aspoň dva z nich tvoří průměr dané kulové plochy.

Představme si např. bod  $A_5$  jako „severní pól“ a předpokládejme, že žádné dva z bodů  $A_1, \dots, A_5$  netvoří průměr. Body  $A_1, \dots, A_4$  musí tedy ležet na „jižní polokouli“ s výjimkou jižního pólu. Uvažujme libovolný kvadrant této polokoule ohraničený čtvrtinou rovníku (obr. 62). Pokud



Obr. 62

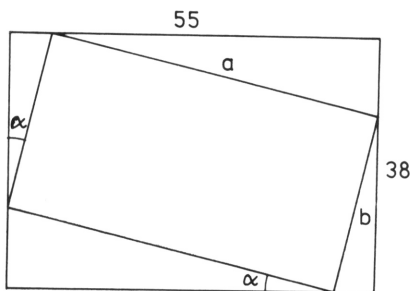


obsahuje dva z bodů  $A_1, \dots, A_4$ , musí každý ležet na jiném poledníku, protože jejich „délky“ se liší aspoň o  $\frac{\pi}{2}$ . Odtud plyne, že body  $A_1, \dots, A_4$  leží na polednících, jež rozdělují sféru na čtyři shodné části (kvadranty). Pokud by ovšem některý z nich neležel na rovníku, musí tam ležet oba jeho sousedé, jež jsou středově souměrní podle středu  $O$  dané kulové plochy.

Odtud plyne, že je vždy  $\min_{i \neq j} |A_i O A_j| \leq \frac{\pi}{2}$ , přičemž rovnost nastane, právě když dva z bodů  $A_1, \dots, A_5$  jsou středově souměrné (tvoří „póly“) a ostatní leží na odpovídajícím „rovníku“ ve vrcholech trojúhelníku s vnitřními úhly aspoň  $\frac{\pi}{4}$ .

Pro nejmenší vzdálenost bodů  $A_i, A_j$  tak dostaneme hranici  $\sqrt{2}$ .

**5.3** (Podle A. Kuběny, 3. ročník GMK, Bílovec.) Označme  $a, b$  délky stran koberce a předpokládejme, že koberec má tvar pravoúhelníku. Jestliže v místnosti  $55 \times 38$  svírá



Obr. 63

strana délky  $a$  se stěnou délky 55 úhel  $\alpha \leq \pi/2$ , pak pro úhly, které svírají strany koberece s průniky stěn a podlahy místnosti, platí to, co je vyznačeno na obr. 63 (plyne to z toho, že jde pouze o pravoúhlé trojúhelníky a obdélník). Platí tedy

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = 38$$

$$b \sin \alpha + a \cos \alpha = 55.$$

Po umocnění, sečtení a vzájemném vynásobení těchto dvou rovnic dostáváme

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + 2ab \sin 2\alpha &= 38^2 + 55^2 \\ (a^2 + b^2) \sin 2\alpha + 2ab &= 38 \cdot 55 \cdot 2. \end{aligned}$$

Položíme-li  $x = a^2 + b^2$ ,  $y = 2ab$ , bude  $x, y > 0$  a

$$\frac{38^2 + 55^2 - x}{y} = \frac{2 \cdot 38 \cdot 55 - y}{x},$$

tedy

$$(38^2 + 55^2)x - x^2 = 2 \cdot 38 \cdot 55y - y^2,$$

a podobně v druhé místnosti zjistíme, že

$$(50^2 + 55^2)x - x^2 = 2 \cdot 50 \cdot 55y - y^2.$$

Jediné kladné řešení soustavy posledních dvou rovnic je  $(x, y) = (3\,125, 2\,500)$ . Jim odpovídající kladná  $a, b$  jsou jediné  $(a, b) = (50, 25)$ .

Zkoušku, že koberec rozměrů  $25 \times 50$  lze skutečně do skladovacích místností uložit uvedeným způsobem, přenecháváme těm, kteří obchodníkovi nedůvěřují.

#### 5.4 (Podle P. Novotného, 2. ročník GWP, Praha.)

a) Jestliže  $p = 1$ , pak nerovnost platí pro všechna  $n \geq 2$ , neboť

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - (x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n) &= \\&= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \dots + \\&+ \frac{1}{2}(x_{n-1} - x_n)^2 + \frac{1}{2}x_n^2 \geq 0.\end{aligned}$$

b) Nechť  $p = \frac{4}{3}$ . Upravme rozdíl levé a pravé strany nerovnosti (zatím formálně) následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - \frac{4}{3}(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n) &= \\&= a_1 \left( x_1 - \frac{2}{3a_1}x_2 \right)^2 + a_2 \left( x_2 - \frac{2}{3a_2}x_3 \right)^2 + \dots + \\&+ a_{n-1} \left( x_{n-1} - \frac{2}{3a_{n-1}}x_n \right)^2 + a_n x_n^2.\end{aligned}$$

Předně  $a_1 = 1$ . Porovnáním koeficientů u  $x_{k+1}^2$  dostaneme pro  $1 \leq k \leq n-1$  rekurentní vztah

$$\begin{aligned}\frac{4}{9a_k} + a_{k+1} &= 1, \\a_{k+1} &= \frac{9a_k - 4}{9a_k}.\end{aligned}$$

(Všimněte si, že čísla  $a_1, a_2, \dots$  nezávisí na  $n$ !) Můžeme tedy snadno vypočítat  $a_2 = \frac{5}{9}$ ,  $a_3 = \frac{1}{5}$ ,  $a_4 = -\frac{11}{9}$ . To znamená, že pro  $n = 2, 3$  jsme uvažovaný rozdíl upravili na

součet čtverců a nerovnost tedy pro tato  $n$  platí. Dosazením  $x_1 = 1$ ,  $x_{k+1} = \frac{3}{2}a_k x_k$  ( $k = 2, 3, 4$ ),  $x_5 = \dots = x_n = 0$  naopak dostáváme, že pro  $n \geq 4$  nerovnost neplatí.

c) Nechť  $p = \frac{6}{5}$ . Postupujeme obdobně jako v případě b). Porovnáním koeficientů v rovnosti

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - \frac{6}{5}(x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n) &= \\ &= a_1 \left( x_1 - \frac{3}{5a_1} x_2 \right)^2 + a_2 \left( x_2 - \frac{3}{5a_2} x_3 \right)^2 + \dots + \\ &+ a_{n-1} \left( x_{n-1} - \frac{3}{5a_{n-1}} x_n \right)^2 + a_n x_n^2 \end{aligned}$$

dostaneme pro  $1 \leq k \leq n-1$  rekurentní vztah

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_{k+1} &= \frac{25a_k - 9}{25a_k} \end{aligned}$$

a konkrétní hodnoty  $a_2 = \frac{16}{25}$ ,  $a_3 = \frac{7}{16}$ ,  $a_4 = \frac{31}{175}$ ,  $a_5 = -\frac{32}{31}$ .

Stejnou úvahou jako v b) pak nahlédneme, že nerovnost platí právě pro  $n = 2, 3, 4$ .

Všimněte si, že tento způsob řešení v podstatě nezávisel na hodnotě  $p$ . Pro konkrétní hodnoty ( $p = \frac{4}{3}, \frac{6}{5}$ ) bylo samozřejmě možné napsat rovnou, jak se nerovnost upraví — a to co nejrychleji a nejjednodušeji — na součet čtverců a jak najdeme protipříklad, pro který nerovnost neplatí.

**Poznámka.** Je dobré si všimnout, že pokud uvedená nerovnost pro dané  $p$  a pro nějaké  $n$  platí pro všechna reálná čísla  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , pak platí i pro všechna  $k < n$ . Stačí

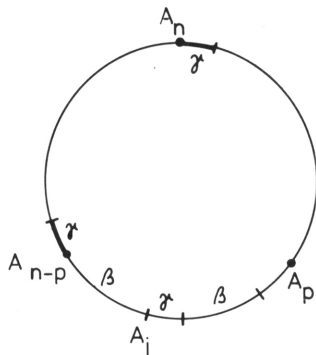
položit  $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$ . To znamená, že pro každé  $p$  existuje přirozené číslo  $N(p) \geq 2$  takové, že nerovnost (1) platí pro každé  $n < N(p)$  a neplatí pro  $n \geq N(p)$  (tj. existují reálná čísla  $x_1, x_2, \dots, x_n$  taková, že  $\dots$ ). Z výsledku a) víme, že můžeme klást  $N(1) = \infty$ , a dále jsme zjistili, že  $N(\frac{4}{3}) = 4$ ,  $N(\frac{6}{5}) = 5$ .

Dá se dokázat, že nerovnost (1) platí právě pro  $p \leq \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n+1}}$ , tj.  $N(p) = \left\lceil \frac{\pi}{\arccos \frac{1}{p}} \right\rceil$ . Pro  $p = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n+1}}$  pak nastane rovnost pro čísla  $x_k = \sin \frac{k\pi}{n+1}$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

**5.5** (Použita myšlenka A. Kuběny, 3. ročník GMK, Bílovec.) Podmínku „ke každému bodu  $A_i$  existují dva shodně obarvené oblouky  $\dots$ “ budeme nazývat podmínkou (1). V zadání mělo být přesněji řečeno, že to musí být *různé* oblouky (jinak by uvedená podmínka byla triviálně splněna pro „oblouky“ délky celé kružnice a pro libovolné obarvení).

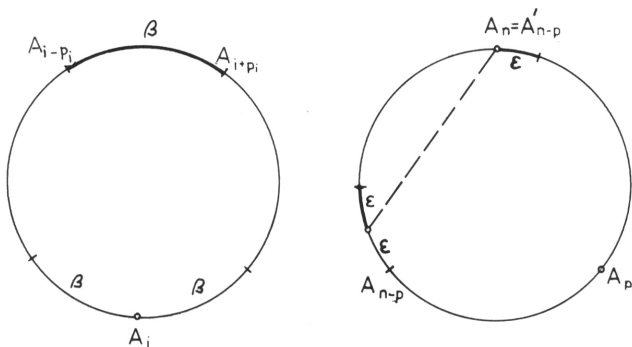
Pro libovolné  $i$  označme  $p_i$  nejmenší číslo, pro které jsou oblouky  $A_{i-p_i}A_i, A_iA_{i+p_i}$  shodné. Nejprve si všimněme, že nemůže být  $p_i > n/2$ . Je-li totiž  $\beta$  průnik oblouků  $A_{i-p_i}A_i, A_iA_{i+p_i}$  (obr. 64), plyne z jejich shodnosti, že  $A_i$  je společným krajním bodem dvou oblouků shodných s  $\beta$ , což odporuje minimalitě  $p_i$ .

Budiž nyní  $p = \max_{1 \leq i \leq n} p_i$ . Zvolme očíslování tak, aby bylo  $p = p_n$ , tedy  $A_{n-p_n}A_n = A_nA_{n+p_n} = \alpha$  (obarvené oblouky budeme označovat malými řeckými písmeny). Jestliže z kružnice „vynecháme“ oblouk  $A_{n-p_n}A_n$ , nová „kružnice“ (s body  $A'_1, \dots, A'_{n-p}$ ) bude opět splňovat podmínku (1) a pro příslušné číslo  $p'$  bude  $p' \leq p$ .



Obr. 64

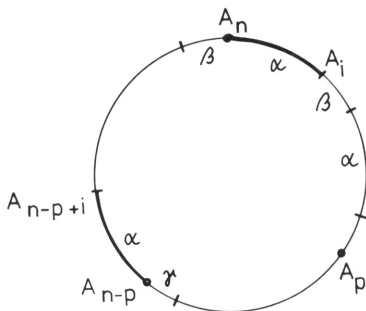
To je jasné pro bod  $A_n = A_{n-p}$  a pro body  $A_j = A'_j$ ,  $p \leq j \leq n-p$  (obr. 65, kde  $\varepsilon$  je oblouk příslušný  $A_{n-p}$  a  $\beta\gamma$  je oblouk příslušný  $A_j$ ). Příklad  $n-p = p$  je rovněž jasný — zde není co dokazovat.



Obr. 65

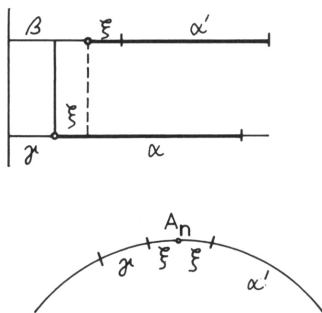
Uvažujme teď bod  $A_i$  pro  $1 \leq i \leq p$ . Vzhledem k to-

mu, že si body  $A_i$ ,  $A_{n-p+i}$  navzájem odpovídají, můžeme dokonce předpokládat, že je  $i \leq p/2$ . Vezměme nejprve ten případ, kdy nejmenší oblouky příslušné bodu  $A_i$  (na původní kružnici) neobsahují bod  $A_p$  a první z nich je bodem  $A_n$  rozdělen na oblouky  $\beta$  a  $\alpha$  (obr. 66). Jestliže analogicky bo-



Obr. 66

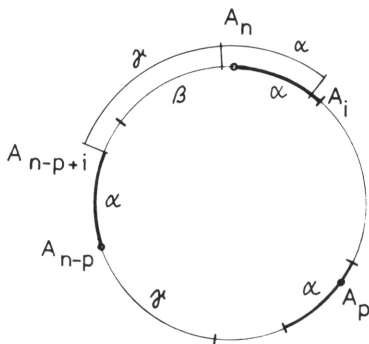
du  $A_{n-p+i}$  odpovídají shodné oblouky  $\gamma\alpha$ , musí být jeden z oblouků  $\gamma\alpha$ ,  $\beta\alpha$  obsažen v druhém: Bude-li např.  $\beta = \gamma\xi$ ,



Obr. 67

pak je také  $\alpha = \xi\alpha'$  (obr. 67), takže bodu  $A_n$  odpovídá kratší oblouk  $\xi$ ! To ale znamená, že je  $\beta = \gamma$ .

Podobně si poradíme i s případem, kde jeden z oblouků odpovídajících bodu  $A_i$  obsahuje bod  $A_p$  (obr. 68). Je-li



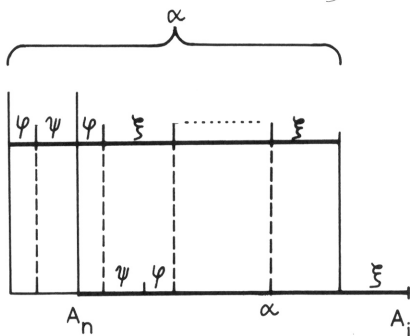
Obr. 68

jeden z oblouků opět rozdělen bodem  $A_n$  na oblouky  $\beta$  a  $\alpha$ , vyjde postupně, že  $\alpha = \alpha'\xi = \alpha''\xi^2 = \dots = \varphi\xi^k = \varphi\psi\varphi\xi^{k-1}$ , takže zase bodu  $A_n$  odpovídají kratší oblouky  $\varphi\psi$  (obr. 69). To je opět spor s naším předpokladem.

Tvrzení úlohy už teď snadno dokážeme matematickou indukcí (a navíc dokážeme i to, že perioda je rovna číslu  $p$ ).

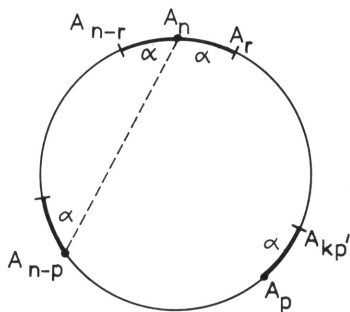
Pro  $n = 2$  musí být podle podmínky (1) obarveny dva oblouky stejnou barvou, obarvení je tedy periodické s periodou 1. Předpokládejme, že tvrzení platí pro každé  $k < n$ . Danou kružnici zredukujeme popsáním způsobem na kružnici s body  $A_1, \dots, A_{n-p}$ . Pro číslo  $p'$ , jež odpovídá této nové kružnici, platí  $p' \leq p \leq n - p$ , neboť  $p \leq n/2$ . Pokud





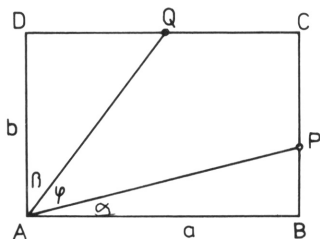
Obr. 69

$p' = n - p$ , je  $p = n/2$  a obarvení je periodické s periodou  $n/2$ . Pokud  $p' < n - p$ , je obarvení redukované kružnice periodické s periodou  $p'$  podle indukčního předpokladu. Kdyby teď bylo  $p = kp' + r$  pro  $0 < r < p'$ , bude mezi  $A_{kp'}$  a  $A_p$  ležet „zbytkový“ oblouk  $\alpha$  délky  $r$  (obr. 70). Díky periodě  $p'$  najdeme oblouk  $\alpha$  i mezi  $A_n$  a  $A_r$  a dí-



Obr. 70

ky shodnosti oblouků  $A_{n-p}A_n$ ,  $A_nA_p$  leží  $\alpha$  též mezi  $A_{n-r}$  a  $A_n$ . To je ale ve sporu s definicí čísla  $p_n = p$ . Proto je  $p = kp'$ , takže snadno nahlédneme, že i původní kružnice musela mít periodu  $p'$ , takže je dokonce  $p' = p$ . Tím je tvrzení úlohy dokázáno.



Obr. 71

**5.6** Nechť  $|AB| = a$ ,  $|AD| = b$ , takže  $|BP| = \frac{b}{p}$ ,  $|DQ| = \frac{a}{q}$ , a dále položíme  $\frac{a}{b} = k$  (obr. 71). Pro obsahy příslušných trojúhelníků platí

$$2P(ABP) = \frac{ab}{p}, \quad 2P(ADQ) = \frac{ab}{q},$$

$$2P(PCQ) = ab\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

Proto

$$\begin{aligned} 2P(APQ) &= ab\left(2 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)\right) = \\ &= ab\left(1 - \frac{1}{pq}\right). \end{aligned}$$

Protože  $|AP|^2 = a^2 + \frac{b^2}{p^2}$ ,  $|AQ|^2 = b^2 + \frac{a^2}{q^2}$ , dostaneme pro  $\varphi = |\angle PAQ|$  rovnost

$$\begin{aligned} 4P^2(APQ) &= \left(a^2 + \frac{b^2}{p^2}\right) \left(b^2 + \frac{a^2}{q^2}\right) \sin^2 \varphi = \\ &= a^2 b^2 \left(1 - \frac{1}{pq}\right)^2, \end{aligned}$$

tj.

$$\left(1 + \frac{1}{k^2 p^2}\right) \left(1 + \frac{k^2}{q^2}\right) \sin^2 \varphi = \left(1 - \frac{1}{pq}\right)^2.$$

Má-li být  $\varphi$  maximální, musí být hodnota funkce

$$f(k) = \left(1 + \frac{1}{k^2 p^2}\right) \left(1 + \frac{k^2}{q^2}\right)$$

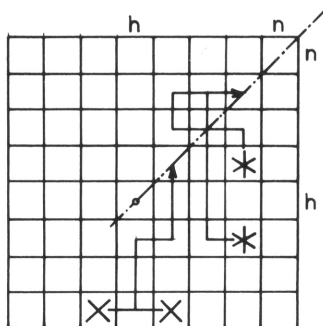
minimální. Ale podle Cauchyovy nerovnosti je

$$f(k) \geq 1 \cdot 1 + \frac{1}{kp} \cdot \frac{k}{q} = 1 + \frac{1}{pq},$$

přičemž rovnost nastává, právě když

$$\frac{1}{1} = \frac{\frac{k^2}{q^2}}{\frac{1}{k^2 p^2}}, \quad \text{neboli} \quad k^4 = \frac{q^2}{p^2} \quad \text{a} \quad k = \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{q}{p}}.$$

**5.7** První hráč má vyhrávající strategii: Předpokládejme, že jeho cílem je přemístit se z pole  $(1, 1)$  na  $(n, n)$ . Z tahů



Obr. 72

druhého hráče, jež jsou souměrné podle úhlopříčky, budeme rozebírat vždy jen jednu možnost.

První tah prvního hráče bude  $(1, 1) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (4, 4)$ .

Předpokládejme teď, že po tahu prvního hráče jsme na poli  $(h, h)$ ,  $h \geq 4$  (podmínka  $h \geq 4$  zaručuje, že existuje platný tah druhého, například  $(h - 1, h - 3)$ ).

Jestliže  $h = n$ , první vyhrál, jinak ( $h < n$ ) má druhý tyto možnosti (obr. 72):

tah druhého hráče

odpověď prvního hráče

- a)  $(h, h) \rightarrow (h - 1, h - 3) \rightarrow [(h, h - 1) \rightarrow (h + 1, h + 1)]$ ,
- b)  $(h, h) \rightarrow (h + 1, h - 3) \rightarrow [(h, h - 1) \rightarrow (h + 1, h + 1)]$ ,
- c)  $(h, h) \rightarrow (h + 3, h - 1) \rightarrow [(h + 2, h + 1) \rightarrow (h + 3, h + 3)]$ ,  
je-li  $h \leq n - 3$
- d)  $(h, h) \rightarrow (h + 3, h + 1) \rightarrow [(h + 1, h + 2) \rightarrow (h + 3, h + 3)]$ ,  
je-li  $h \leq n - 3$

Pokaždé tedy postoupí první hráč po úhlopříčce alespoň o jedno políčko blíže ke svému cíli. Přitom možnosti, že by se pro  $h = n - 1$  nemohl po tahu soupeře dostat do rohu  $(n, n)$ ,

se nemusí obávat, protože pole označená \* (v tabulce tahy c) a d)) už nejsou v takovém případě pro soupeře dostupná.

Začíná-li druhý hráč, má jenom možnost d) a po tahu prvního se dostaneme na pole (4, 4), tedy i v tomto případě má první hráč vyhrávající strategii. Protože délka úhlopříčky je konečná, dosáhne první hráč po konečném počtu kroků cílového pole  $(n, n)$ .

## Ako sme počítali v Pekingu

(Správa z 31. medzinárodnej matematickej olympiády)

Stalo sa už tradíciou, že každoročne začiatkom letných prázdnin sa stretávajú najlepší z najlepších stredoškolákov z desiatok krajín, aby si na medzinárodnej matematickej olympiáde zmerali svoje sily v riešení náročných úloh. V roku 1990 sa ujala usporiadania tohto veľkého podujatia Čínska ľudová republika a za miesto konania súťaže zvolila svoje hlavné mesto Peking. Účasť na súťaži bola rekordná: zúčastnili sa jej žiaci z 54 krajín (tab. 6, str. 266), zväčša zastúpených úplnými šesťčlennými družstvami. Českú a Slovenskú Federatívnu Republiku reprezentovalo na 31. MMO v Pekingu týchto šesť žiakov:

|                       |                            |
|-----------------------|----------------------------|
| <i>Martin Dindoš</i>  | 4 G J. Hronca, Bratislava  |
| <i>Petr Hliněný</i>   | 4 G M. Koperníka, Bílovec  |
| <i>Štěpán Kasal</i>   | 3 G W. Piecka, Praha       |
| <i>Michal Konečný</i> | 3 G Brno, tř. kpt. Jaroše  |
| <i>Pavol Ševera</i>   | 4 G A. Markuša, Bratislava |
| <i>Ondrej Šuch</i>    | 4 G A. Markuša, Bratislava |

Vedúcim delegácie bol RNDr. *Karel Horák*, CSc. (MÚ ČSAV), jeho zástupcom RNDr. *Vladimír Burjan* (MŠMŠ SR), obaja členovia predsedníctva ÚV MO.

Vedúci delegácie odletel do Pekingu 7. júla, aby sa ako člen medzinárodnej jury zúčastnil výberu súťažných úloh. Jury po dvojdnovom náročnom rokovaní vybrala z desiatok návrhov šesť súťažných úloh. Možno považovať za úspech, že medzi vybrané úlohy sa dostala aj jedna československá (úloha č. 2), ktorej autorom je RNDr. *Pavol Černek*, CSc., z katedry matematiky Elektrotechnickej fakulty SVŠT v Bratislave.

Naobed 9. júla 1990, po vyše 7 hodinovom lete z Moskvy, dorazili do Pekingu aj šiesti súťažiaci sprevádzaní V. Burjanom. Organizátori súťaže im poskytli nasledujúce dva dni na aklimatizáciu a prípravu na súťaž. Vzhľadom na vysoké teploty vzduchu a jeho mimoriadnu vlhkosť, na akú nie sme v našich podmienkach zvyknutí, bola táto aklimatizácia ozaj potrebná. Navyše — vzhľadom na osemhodinový časový posun medzi Pekingom a ČSFR — bolo v Pekingu doobedie v tom čase, kedy je u nás doma noc. Keďže súťaž prebiehala vždy doobeda, boli naši žiaci nútení podávať vrcholný intelektuálny výkon v (biologickom) čase, kedy je zvyčajne ich organizmus v najhlbšom útlme. Táto skutočnosť, ako aj spomenuté horúčavy s vlhkosťou vzduchu určite mali vplyv na ich výkony.

Počas dvoch prípravných dní si žiaci prezreli niektoré časti Pekingu a navštívili ZOO, kde videli okrem iného pandy — zvieratá, ktoré sú národným symbolom Číňanov. Poobede pred súťažou sa konal v modernej športovej hale ceremoniál slávnostného otvorenia 31. medzinárodnej matematickej olympiády. Po úvodných prejavoch zástupcov ministerstva školstva a mesta Pekingu ho spestrilo veľmi atraktívne a exoticky pôsobiace vystúpenie rôznych artistických

a akrobatických skupín. Na tomto stretnutí sa prvýkrát od priletu do Pekingu videli vedúci delegácií s ostatnými ich členmi. Aj to len na vzdialenosť niekoľko desiatok metrov. Pravidlá súťaže totiž vyžadujú, aby vedúci delegácií (ktorí sa podieľajú na výbere súťažných úloh) ostali oddelení od súťažiacich až do skončenia druhého súťažného dňa.

Vo štvrtok a piatok (12. a 13. júla) prebiehala samotná súťaž. Žiaci riešili každý deň tri súťažné úlohy, pričom na vypracovanie riešení mali vždy 4,5 hodiny čistého času. V triedach, kde sa súťažilo, nebola dostatočná klimatizácia, a tak tí žiaci, ktorí nesedeli bezprostredne pri niektorom z ventilátorov, sa dosť potili nielen nad úlohami. Zdá sa, že čo sa podmienok týka, bola táto olympiáda jedna z najnáročnejších. To však v žiadnom prípade nemá byť kritika organizátorov, ktorí skutočne dôkladne všetko pripravili a vyvinuli maximálne úsilie, aby súťaž prebehla hladko a aby sa hostia v ich krajine cítili príjemne. Keď si uvedomíme, že ide o skupinu zhruba 500 ľudí, ktorých treba ubytovať, stravovať, zabezpečiť pre nich program na 10 dní, dopravovať ich z miesta na miesto, atď., uvedomíme si, že MMO v dnešnej podobe je podujatím veľmi nákladným a navyše organizačne nesmierne náročným. (Usporiadanie 30. MMO v Spolkovej republike Nemecko si údajne vyžiadalo 1,3 milióna mariek). Navyše stále trvá trend zvyšovať počet účastníckych krajín. Preto neprekvapuje, že budúci organizátori medzinárodných olympiád uvažujú aj o možnom znížení počtu súťažiacich z jednotlivých krajín na štyroch. (Pre tých, ktorí sa na začiatky MMO nepamätajú, dodajme, že pôvodne boli družstvá jednotlivých krajín osemčlenné.)

Po dvoch súťažných dňoch nastáva medzi súťažiacimi veľ-



ká psychická úľava — zvyšok pobytu strávia exkurziami po krajine, návštevou zaujímavých miest a pamätihodností. Pre vedúcich delegácií a ich zástupcov naopak začína niekoľko dní náročnej práce. Všetky riešenia svojich zverencov musia opraviť a podľa vopred stanovených kritérií obodovať. Abý bola zabezpečená objektívnosť, musia byť všetky riešenia a ich opravy následne skoorinované. Touto náročnou a únavnou prácou sú spravidla poverení matematici poriadajúcej krajiny. Tí postupne prejdú každé jedno žiacke riešenie s vedúcimi príslušnej krajiny (ktorí ho opravovali), nechajú si ho slovo po slove preložiť do niektorého zo svetových jazykov a posúdia, či bodové ohodnotenie navrhnuté vedením delegácie je opodstatnené. Vzhľadom na to, že by nebolo rozumné, aby koordinátori kontrolovali aj opravu riešení žiakov z ich vlastnej krajiny, bolo prijaté pravidlo, podľa ktorého riešenia žiakov z poriadajúcej krajiny koordinujú vedúci delegácií krajín, z ktorých pochádzajú jednotlivé súťažné úlohy. Keďže tentokrát bola jedna zo súťažných úloh z Československa, pripadla nám úloha koordinovať jej riešenia z pera šiestich čínskych študentov. Zhodou okolností išlo o úlohu, ktorej riešenie bolo založené len na istých logických a kombinatorických úvahách, takže v riešeniach sa takmer nevyskytovali čísla a vzorce. Tie by boli mohli byť istými záchytnými bodmi pre nás, pretože čínština (našťastie) používa arabské číslice a v matematických textoch dokonca aj latinské písmená pre premenné, takže mnohé matematické texty vyzerajú „obdobne“ ako u nás. Žiaľ, riešenia nami zadanej úlohy neobsahovali takmer žiadne čísla a vzorce, a tak väčšina textu vyzerala asi takto:

# 第 31 届 国际 数学 奥林 匹克 中 国 北 京

Usporiadatelia pripravili účastníkom súťaže veľmi atraktívny a bohatý program na nesúťažné dni. Počas desiatich dní strávených v Pekingu sme mali možnosť zhliadnuť takmer všetky významné pamätihodnosti tohto starého mesta a jeho blízkeho okolia. Navštívili sme rozsiahly areál legendárneho Zakázaného mesta, kde po storočia žili čínski cisári a kam prostý občan nesmel nikdy vkročiť, ani nahliadnuť. Rovnako exoticky a okúzľujúco na nás zapôsobil letný palác čínskej cisárovnjej, ktorý vystavila na okraji Pekingu pri nádhernom jazere. Dodajme, že z peňazí, za ktoré sa malo vybudovať čínske vojnové námorníctvo. Starý Peking bol mestom chrámov: nahliadli sme do chrámu spiaceho Buddhu, do chrámu Bi-Yun, do Nebeského chrámu, kde sa konali obety na zabezpečenie dobrej úrody. Strnuli sme na najväčšom námestí sveta Tien'an men, ktoré sa smutne preslávilo v roku 1989 ako centrum študentských nepokojov a ich násilného potlačenia. Prešli sme niekoľko kilometrov po najväčšej stavbe sveta slávnom čínskom múre pri Ba-Da-Lingu a vošli do podzemia, kde sú v obrovských, umelo vytesaných priestoroch umiestené hrobky príslušníkov starej dynastie Mingov. Veľkým zážitkom bola návšteva čínskej národnej opery, ktorá s európsky ponímanou operou má len pramálo spoločného.

Podvečer predposledného dňa nášho pobytu v Pekingu (18. júla) bol vyplnený slávnostným ukončením olympiády a ceremoniálom odovzdávania cien a medailí. Tu sa naši žia-

ci dozvedeli, že napriek náročným podmienkam súťaže obstáli veľmi dobre: všetci šiesti získali medaile, a to M. Dinďoš bronzovú (chýbal mu 1 bod do striebornej) a ostatní strieborné (pričom P. Hliněnému chýbal 1 bod do zlatej). Spolu získali naši žiaci 153 bodov (z 252 možných), čo aj pri silnej konkurencii stačilo na obsadenie celkového 8. miesta (pozri tabuľku 6). Pritom treba poznamenať, že MMO je podľa svojho štatútu súťažou jednotlivcov, poradie krajín sa určuje iba neoficiálne. Štyria účastníci súťaže (dvaja z Číny, jeden z Francúzska a jedna žiačka zo ZSSR) získali plný počet 42 bodov. Všeobecné uznanie vyvolalo presvedčivé víťazstvo čínskeho družstva, ktorého náskok na v poradí druhý Sovietsky Zväz bol úctyhodný.

V ďalšom uvádzame súťažné úlohy 31. MMO v Číne, ich stručné riešenia a tabuľky, obsahujúce niektoré podrobnosti o výsledkoch súťaže. Možno nie je bez zaujímavosti, že výbor, poverený prípravou budúcich MMO už rozhodol o miestach konania súťaže v nasledujúcich 11 rokoch (s výnimkou roku 1998), a to takto:

1991 Švédsko (Sigtuna)

1992 ZSSR

1993 Turecko

1994 Mongolsko (náhradne Hong Kong)

1995 Kanada

1996 Brazília

1997 Veľká Británia

1998 ???

1999 Rumunsko (jubilejná 40. MMO)

2000 Južná Kórea

2001 USA

Veríme, že sa naši žiaci všetkých týchto medzinárodných matematických olympiád zúčastnia a uspejú na nich aspoň tak dobre, ako v roku 1990 na 31. MMO v Pekingu.

*Vladimír Burjan*

*Karel Horák*

Tabuľka 5

**Výsledky nášho družstva v jednotlivých úlohách**

| Meno           | Body získané za úlohu č. |      |      |      |      |      | Spolu | Cena |
|----------------|--------------------------|------|------|------|------|------|-------|------|
|                | 1                        | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    |       |      |
| Martin Dindoš  | 0                        | 7    | 2    | 2    | 3    | 2    | 16    | III. |
| Petr Hliněný   | 7                        | 7    | 2    | 7    | 7    | 3    | 33    | II.  |
| Štěpán Kasal   | 7                        | 7    | 1    | 1    | 7    | 7    | 30    | II.  |
| Michal Konečný | 0                        | 7    | 0    | 7    | 7    | 3    | 24    | II.  |
| Pavol Ševera   | 0                        | 7    | 2    | 7    | 7    | 1    | 24    | II.  |
| Ondrej Šuch    | 3                        | 3    | 3    | 7    | 7    | 3    | 26    | II.  |
| Spolu bodov    | 17                       | 38   | 10   | 31   | 38   | 19   | 153   |      |
| % z možných b. | 40 %                     | 90 % | 24 % | 74 % | 90 % | 45 % | 52 %  |      |

Tabuľka 6

**Neoficiálne poradie krajín a počty získaných medailí**

| Miesto | Krajina        | Spolu bodov | Počet medailí |   |   | Počet súťažiacich |
|--------|----------------|-------------|---------------|---|---|-------------------|
|        |                |             | Z             | S | B |                   |
| 1.     | Čína           | 230         | 5             | 1 | 0 | 6                 |
| 2.     | ZSSR           | 193         | 3             | 2 | 1 | 6                 |
| 3.     | USA            | 174         | 2             | 3 | 0 | 6                 |
| 4.     | Rumunsko       | 171         | 2             | 2 | 2 | 6                 |
| 5.     | Francúzsko     | 168         | 3             | 1 | 0 | 6                 |
| 6.     | Maďarsko       | 162         | 1             | 3 | 2 | 6                 |
| 7.     | NDR            | 158         | 0             | 4 | 2 | 6                 |
| 8.     | Československo | 153         | 0             | 5 | 1 | 6                 |
| 9.     | Bulharsko      | 152         | 1             | 4 | 1 | 6                 |
| 10.    | Veľká Británia | 141         | 2             | 0 | 2 | 6                 |
| 11.    | Kanada         | 139         | 0             | 3 | 1 | 6                 |
| 12.    | SRN            | 138         | 0             | 2 | 4 | 6                 |
| 13.    | Taliansko      | 131         | 1             | 1 | 4 | 6                 |

## pokračování tabulky 6

| Miesto | Krajina     | Spolu bodov | Počet medailí |   |   | Počet<br>súťažiacich |
|--------|-------------|-------------|---------------|---|---|----------------------|
|        |             |             | Z             | S | B |                      |
| 14.    | Irán        | 122         | 0             | 4 | 0 | 6                    |
| 15.    | Austrália   | 121         | 0             | 2 | 4 | 6                    |
| 15.    | Rakúsko     | 121         | 0             | 1 | 4 | 6                    |
| 17.    | India       | 116         | 1             | 1 | 2 | 6                    |
| 18.    | Nórsko      | 112         | 0             | 3 | 1 | 6                    |
| 19.    | KĽDR        | 109         | 0             | 1 | 3 | 6                    |
| 20.    | Japonsko    | 107         | 0             | 2 | 1 | 6                    |
| 21.    | Poľsko      | 106         | 0             | 2 | 1 | 6                    |
| 22.    | Hong Kong   | 105         | 0             | 0 | 4 | 6                    |
| 23.    | Vietnam     | 104         | 0             | 1 | 3 | 6                    |
| 24.    | Brazília    | 102         | 1             | 0 | 2 | 6                    |
| 25.    | Juhoslávia  | 98          | 0             | 1 | 2 | 6                    |
| 26.    | Izrael      | 95          | 0             | 1 | 3 | 6                    |
| 27.    | Singapur    | 93          | 0             | 0 | 2 | 6                    |
| 28.    | Švédsko     | 91          | 0             | 1 | 2 | 6                    |
| 29.    | Holandsko   | 90          | 0             | 1 | 2 | 6                    |
| 30.    | Kolumbia    | 88          | 0             | 1 | 2 | 6                    |
| 31.    | Nový Zéland | 83          | 0             | 0 | 2 | 6                    |
| 32.    | Južná Kórea | 79          | 0             | 1 | 1 | 6                    |
| 33.    | Thajsko     | 75          | 0             | 0 | 2 | 6                    |
| 33.    | Turecko     | 75          | 0             | 0 | 1 | 6                    |
| 35.    | Španielsko  | 72          | 0             | 0 | 0 | 6                    |
| 36.    | Maroko      | 71          | 0             | 1 | 0 | 5                    |
| 37.    | Mexiko      | 69          | 0             | 0 | 1 | 6                    |
| 38.    | Argentína   | 67          | 0             | 0 | 1 | 6                    |
| 38.    | Kuba        | 67          | 0             | 0 | 1 | 6                    |
| 40.    | Bahrajn     | 65          | 0             | 0 | 0 | 6                    |
| 40.    | Írsko       | 65          | 0             | 0 | 1 | 6                    |
| 42.    | Grécko      | 62          | 0             | 0 | 1 | 6                    |
| 43.    | Fínsko      | 59          | 0             | 0 | 1 | 6                    |
| 44.    | Luxembursko | 58          | 1             | 0 | 1 | 2                    |
| 45.    | Tunisko     | 55          | 0             | 0 | 1 | 4                    |
| 46.    | Mongolsko   | 54          | 0             | 0 | 0 | 6                    |
| 47.    | Kuvajt      | 53          | 0             | 0 | 1 | 4                    |
| 48.    | Cyprus      | 46          | 0             | 0 | 1 | 4                    |
| 48.    | Filipíny    | 46          | 0             | 0 | 1 | 6                    |
| 50.    | Portugalsko | 44          | 0             | 0 | 0 | 6                    |

| Miesto | Krajina   | Spolu bodov      | Počet medailí     |    |    | Počet súťažiacich |
|--------|-----------|------------------|-------------------|----|----|-------------------|
|        |           |                  | Z                 | S  | B  |                   |
| 51.    | Indonézia | 40               | 0                 | 0  | 0  | 6                 |
| 52.    | Macao     | 32               | 0                 | 0  | 0  | 6                 |
| 53.    | Island    | 30               | 0                 | 0  | 1  | 3                 |
| 54.    | Alžírsko  | 29               | 0                 | 0  | 0  | 4                 |
| Spolu  |           | 5 286<br>40,86 % | 23<br>155 medailí | 56 | 76 | 308 žiakov        |

### Texty soutěžních úloh

1. Je dána kružnice, jejíž dvě tětivy  $AB$  a  $CD$  se protínají ve vnitřním bodě  $E$ . Je-li  $M$  vnitřní bod úsečky  $EB$ , označme  $F$  a  $G$  průsečíky přímek  $BC$  a  $AC$  s tečnou sestrojenou v bodě  $E$  ke kružnici procházející body  $D$ ,  $E$ ,  $M$ .

Je-li  $\frac{|AM|}{|AB|} = t$ , vyjádřete poměr  $\frac{|EG|}{|EF|}$  pomocí  $t$ .

(Indie)

2. Pro  $n \geq 3$  uvažujme množinu  $E$  obsahující  $2n-1$  různých bodů na kružnici. Předpokládejme, že právě  $k$  těchto bodů je obarveno černě. Takové obarvení označíme jako dobré, jestliže existuje aspoň jedna dvojice černých bodů, pro kterou vnitřek jednoho z příslušných oblouků obsahuje právě  $n$  bodů množiny  $E$ . Najděte nejmenší  $k$ , pro které je každé takové obarvení dobré.

(ČSFR)

3. Najděte všechna celá čísla  $n > 1$ , pro něž je  $\frac{2^n + 1}{n^2}$  celé číslo.

(Rumunsko)

4. Označme  $\mathbb{Q}^+$  množinu všech kladných racionálních čísel. Sestrojte funkci  $f: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$  takovou, že pro všechna  $x$  a  $y$

z  $\mathbb{Q}^+$  platí

$$f(x f(y)) = \frac{f(x)}{y}.$$

(Turecko)

5. Je-li dáno celé číslo  $n_0 > 1$ , dva hráči A a B střídavě vybírají celá čísla  $n_1, n_2, n_3, \dots$  podle následujících pravidel: Jakmile je známo číslo  $n_{2k}$ , hráč A zvolí celé číslo  $n_{2k+1}$  takové, že

$$n_{2k} \leq n_{2k+1} \leq n_{2k}^2.$$

Je-li známo  $n_{2k+1}$ , zvolí hráč B celé číslo  $n_{2k+2}$  takové, že podíl

$$\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$$

je kladnou mocninou nějakého prvočísla. Hráč A vyhraje, jakmile zvolí číslo 1 990, zatímco hráč B vyhrává, když zvolí číslo 1. Pro jaká  $n_0$

- a) hráč A má vyhrávající strategii,
- b) hráč B má vyhrávající strategii,
- c) ani jeden z hráčů nemá vyhrávající strategii?

(SRN)

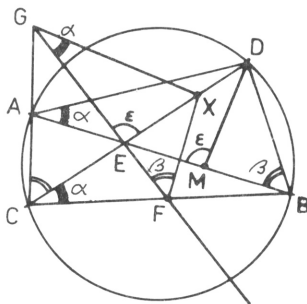
6. Dokažte, že existuje konvexní 1 990úhelník s následujícími dvěma vlastnostmi:

- a) všechny jeho úhly jsou shodné;
- b) jeho strany mají v nějakém pořadí délky  $1^2, 2^2, \dots, 1\,989^2, 1\,990^2$ .

(Nizozemí)

## Řešení úloh

1 (podle P. Hliněného, 4. ročník GMK, Bílovec). Označme  $\alpha = |\angle DAB|$ ,  $\beta = |\angle ABD|$  a  $\varepsilon = |\angle AMD|$  (obr. 73), pak je podle věty o obvodových a úsekových úhlech také  $\varepsilon = |\angle GED|$  (neboť  $GE$  je tečnou kružnice procházející body  $D, E, M$ ),  $\alpha = |\angle BCD|$  a  $\beta = |\angle ACD|$ .



Obr. 73

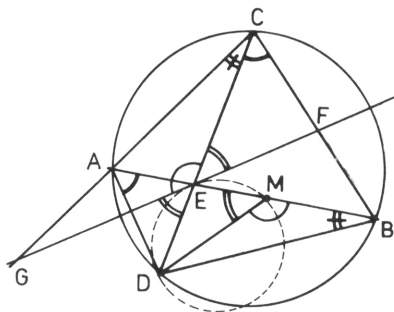
Zvolme nyní bod  $X$  na polopřímce  $ED$  tak, aby úhel  $EGX$  měl velikost  $\alpha$ . Podle věty o obvodových úhlech leží body  $C, F, G, X$  na kružnici a platí  $|\angle GFX| = |\angle GCX| = \beta$ . Trojúhelníky  $GEX$  a  $AMD$  a trojúhelníky  $EFX$  a  $MBD$  jsou tedy podobné, takže

$$\frac{|GE|}{|EX|} = \frac{|AM|}{|MD|}, \quad \frac{|EF|}{|EX|} = \frac{|MB|}{|MD|}.$$

Odtud snadno plyne, že je

$$\frac{|GE|}{|EF|} = \frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|AM|}{|AB| - |AM|} = \frac{1}{\frac{|AB|}{|AM|} - 1} = \frac{t}{1 - t}.$$





Obr. 74

**Jiné řešení.** Protože podle věty o obvodových a úsekových úhlech platí (obr. 74)  $|\sphericalangle CEF| = |\sphericalangle DEG| = |\sphericalangle EMD|$  a zároveň také  $|\sphericalangle ECF| = |\sphericalangle MAD|$ , jsou trojúhelníky  $ECF$  a  $MAD$  podobné. Zároveň ale je i  $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ABD|$  a  $|\sphericalangle GEC| = \pi - |\sphericalangle CEF| = \pi - |\sphericalangle EMD| = |\sphericalangle BMD|$ , takže i trojúhelníky  $GEC$  a  $DMB$  jsou podobné. Porovnáním odpovídajících stran dostaneme

$$\frac{|GE|}{|MD|} = \frac{|CE|}{|MB|}, \quad \frac{|AM|}{|CE|} = \frac{|MD|}{|EF|},$$

takže

$$\frac{|GE|}{|EF|} = \frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|AM|}{|AB| - |AM|} = \frac{1}{\frac{|AB|}{|AM|} - 1} = \frac{t}{1 - t}.$$

**2** (podle Š. Kasala, 3. ročník GWP, Praha). Označme uvažované body postupně  $A_0, A_1, \dots, A_{2n-2}$  a uvažujme posloupnost  $A_0, A_{n-2}, A_{2n-4}, \dots, A_{3n-6} = A_{n-5}, \dots$ , v níž každé dva následující body obsahují mezi sebou  $n - 3$  body

na jednom oblouku a  $n$  bodů na druhém oblouku (přitom zřejmě je  $A_k = A_l$  pro  $k = l \pmod{2n-1}$ ). Tato posloupnost se po konečném počtu kroků zacyklí, protože daných bodů je jen konečný počet. Dané body se tak rozpadnou do  $z = D(n-2, 2n-1)$  cyklů po  $\frac{2n-1}{z}$  bodech. Protože  $(2n-1) - 2(n-2) = 3$ , je  $z = 1$  nebo  $z = 3$ .

Daná množina  $E$  bude zřejmě dobře obarvená, právě když v uvedené posloupnosti budou některé dva sousední body černé. Položme  $2m-1 = \frac{2n-1}{z}$ . Pokud je v každém z cyklů méně než  $m$  černých bodů, snadno sestrojíme příklad obarvení, jež nebude dobré (body v každém cyklu budeme střídavě obarvovat). Bude-li naopak aspoň v jednom z cyklů  $m$  černých bodů, bude už množina dobře obarvená, protože ať jsou body obarveny jakkoli, budou dva z černých bodů sousední.

Pro  $z = 1$  (tj.  $n \not\equiv 2 \pmod{3}$ ) vyjde jediný cyklus a z předchozí úvahy je zřejmé, že hledané nejmenší  $k$  je rovno  $n$ . Pro  $z = 3$  (tj.  $n \equiv 2 \pmod{3}$ ) dostaneme tři cykly po  $2m-1 = \frac{1}{3}(2n-1)$  bodech, takže pro  $n-2 = 3(m-1)$  snadno sestrojíme příklad „špatného“ obarvení, zatímco pro  $k = n-1$  aspoň jeden z cyklů obsahuje aspoň  $m$  černých bodů, tj. každé takové obarvení je dobré. Hledané nejmenší  $k$  je v tomto případě  $k = n-1$ .

**3.** Protože číslo  $2^n + 1$  je liché, je i  $n$  liché. Označme  $p$  nejmenší prvočinitel čísla  $n$ , je tedy  $p \geq 3$  a zároveň  $2^n \equiv -1 \pmod{p}$ . Uvažujme teď nejmenší přirozené číslo  $i$ , pro které platí  $2^i \equiv -1 \pmod{p}$ . Protože podle malé věty Fermatovy je  $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ , začnou se nejpozději od

$(p - 1)$ -ní mocniny zbytky čísel  $2^0, 2^1, \dots, 2^{p-1}$  cyklicky opakovat, takže je určitě  $i < p - 1 < n$ .

Pišme  $n = ki + r$ , kde pro zbytek  $r$  platí  $0 \leq r \leq i - 1$ . Protože  $-1 = 2^n = 2^{ki} \cdot 2^r = (-1)^k 2^r \pmod{p}$ , musí být  $k$  liché a zároveň  $2^r = 1 \pmod{p}$ , jinak bychom dostali  $2^r = -1 \pmod{p}$ , což odporuje volbě  $i$ . Kdyby však bylo  $r > 0$ , mohli bychom psát  $i = r + d$ , kde  $1 \leq d = i - r < i$ , takže  $-1 = 2^i = 2^r \cdot 2^d = 2^d$ , což opět odporuje volbě čísla  $i$ . Vychází tedy nutně  $r = 0$ , takže  $n = ki$ , a protože  $i < p$  dělí číslo  $n$ , musí být  $i = 1$  (jako  $p$  jsme označili nejmenší prvočinitel čísla  $n$ ). To ale znamená, že je  $2 = -1 \pmod{p}$ , neboli  $p = 3$ .

Předpokládejme teď, že  $n$  je tvaru  $n = 3^k m$ , kde  $k \geq 1$  a čísla  $3$  a  $m$  jsou nesoudělná. Podle předpokladu  $n^2 = 3^{2k} m^2$  dělí

$$\begin{aligned} 2^n + 1 &= (3 - 1)^n + 1 = - \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^i 3^i = \\ &= 3^{k+1} m - \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} (-1)^i 3^i. \end{aligned} \tag{1}$$

Přitom koeficienty  $\binom{n}{i} 3^i = \frac{n(n-1) \dots (n-i+1)}{i!} 3^i$  jsou pro  $i \geq 2$  dělitelné aspoň  $3^{k+2}$ . To plyne z toho, jak velká je mocnina čísla  $3$  v rozkladu čísla  $i!$  na prvočinitele. Pro exponent  $\alpha$  v rozkladu  $i! = 3^\alpha d$  platí (viz též např. úlohu 34-A-I-2 v příslušné ročence MO)

$$\alpha = \left[ \frac{i}{3} \right] + \left[ \frac{i}{3^2} \right] + \dots < i \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) = \frac{i}{2}$$

(ostrá nerovnost proto, že na levé straně nerovnosti je ve skutečnosti jen konečný počet nenulových sčítanců, zatímco na pravé straně je nekonečná geometrická řada!), takže celková mocnina 3 v součtu  $\sum_{i=2}^n \binom{n}{i} (-1)^i 3^i$  je aspoň  $k - \frac{1}{2}i + 1 + i = k + \frac{1}{2}i + 1 \geq k + 2$ .

Z vyjádření (1) tudíž plyne, že  $2^n + 1$  je dělitelné nejvýše  $3^{k+1}$ , tedy nutně  $2k \leq k + 1$ , tj.  $k = 1$ , a vidíme, že  $n$  je tvaru  $n = 3m$ , kde 3 a  $m$  jsou nesoudělná.

Označme  $q$  nejmenší prvočinitel čísla  $m$ , pak je  $q \geq 5$  a zároveň  $2^n \equiv -1 \pmod{q}$ . Označme  $j$  nejmenší přirozené číslo takové, že  $2^j \equiv -1 \pmod{q}$ . Úplně stejně jako v první části tohoto řešení nám vyjde, že  $j < q - 1$  a že  $j$  dělí  $n = 3m$ . Protože  $q$  je nejmenší prvočinitel čísla  $m$ , musí  $j$  být dělitelem čísla 3, tj.  $j \in \{1, 3\}$ . Z kongruence  $2^j \equiv -1 \pmod{q}$  ale plyne, že je buď  $q \mid 3$  nebo  $q \mid 9$ , neboli  $q = 3$ , což odporuje tomu, že  $q \geq 5$ . Celkem jsme tedy dokázali, že  $n = 3$  je pro  $n \geq 3$  jediná možnost, kdy  $n^2$  dělí  $2^n + 1$ .

4. Z uvedené rovnice plyne, že hledaná funkce musí být prostá: je-li  $f(y_1) = f(y_2)$ , pak pro každé  $x \in \mathbb{Q}^+$  vychází  $y_1 = y_2$ . Dosazením  $y = 1$  dostaneme  $f(xf(1)) = f(x)$ , takže vzhledem k prostotě funkce  $f$  musí být  $f(1) = 1$ . A konečně pro  $x = 1$  vychází vztah

$$f(f(y)) = \frac{1}{y}, \quad (1)$$

neboli

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(f(f(y))) = \frac{1}{f(y)},$$

což po dosazení  $x = u$ ,  $y = f\left(\frac{1}{v}\right)$  do původní funkcionální rovnice dává rovnost

$$f(uv) = f(u)f(v) \quad (2)$$

pro všechna  $u, v \in \mathbb{Q}^+$ .

Obráceně je zřejmé, že každá funkce  $f$ , jež splňuje rovnosti (1), (2), vyhovuje dané funkcionální rovnici.

Podle (2) pro libovolné přirozené číslo  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$  musí platit

$$f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}) = f(p_1)^{\alpha_1} f(p_2)^{\alpha_2} \dots f(p_k)^{\alpha_k}$$

a zároveň pro každé racionální číslo tvaru  $p/q$  je

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f(p)f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{f(p)}{f(q)}.$$

Stačí tedy funkci  $f$  definovat na prvočíslech tak, aby platilo (1), tj. aby funkce  $f^2 = f \circ f$  zaměňovala čítelel za jmenovatele a obráceně, tedy aby pro  $p \neq q$  platilo

$$f(p) = q, \quad \text{právě když} \quad f(q) = f(f(p)) = \frac{1}{p}.$$

Stačí proto rozdělit všechna prvočísla do dvou disjunktních podmnožin A, B a sestavit vzájemně jednoznačné přiřazení těchto dvou množin.

Jedna z možných konstrukcí je takováto: Označme  $(p_n)_{n=1}^{\infty}$  posloupnost všech prvočísel a položme

$$f(p_j) = \begin{cases} p_{j+1} & \text{pro } j \text{ liché,} \\ \frac{1}{p_{j-1}} & \text{pro } j \text{ sudé.} \end{cases}$$

Díky multiplikativitě (2) snadno rozšíříme definici funkce  $f$  na celou množinu  $\mathbb{Q}^+$ .

5 (podle P. Hliněného, 4. ročník GMK, Bílovec). Jestliže pro nějaké  $k \geq 0$  platí

$$45 \leq n_{2k} \leq 1\,990,$$

pak vyhrává hráč A, protože může rovnou zvolit  $n_{2k+1} = 1\,990$  (je  $1\,990 < 45^2 = 2\,025 \leq n_{2k}^2$ ).

Předpokládejme, že pro nějaké  $k \geq 0$  je  $n_{2k} > 1\,990$ . Pak pro vhodné  $i \geq 1$  můžeme psát

$$47^{i-1} \cdot 53 < n_{2k} \leq 47^i \cdot 53$$

a A vyhraje tak, že zvolí  $n_{2k+1} = 47^i \cdot 53$ , protože hráči B pak nezbyvá nic jiného než zvolit  $n_{2k+2} = 47^i$  nebo  $n_{2k+2} = 47^j \cdot 53$  pro  $j < i$ . V každém případě bude  $47 \leq n_{2k+2} \leq 53 \cdot 47^{i-1} < n_{2k}$ , takže v případě, že A pokračuje obdobně i v dalších krocích, po konečném počtu kroků bude muset B zvolit číslo  $n_{2l} < \dots < n_{2k+2} < n_{2k}$ , pro něž  $47 \leq n_{2l} \leq 1\,990$ . Proto i v tomto případě má A vyhrávající strategii.

Je-li  $11 \leq n_{2k} < 45$  pro nějaké  $k \geq 0$ , pak A zvolí  $n_{2k+1} = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$  (což může: je  $n_{2k+1} < 121 \leq n_{2k}^2$ ). Hráč B musí volit z čísel  $3 \cdot 5$ ,  $3 \cdot 7$ ,  $5 \cdot 6$ , takže  $15 \leq n_{2k+2} \leq 35$ , A pak zvolí  $n_{2k+3} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 < 225 \leq n_{2k+2}^2$ . Nyní B musí volit  $n_{2k+4}$  z čísel  $2 \cdot 3 \cdot 5$ ,  $2 \cdot 3 \cdot 7$ ,  $2 \cdot 5 \cdot 7$ ,  $3 \cdot 5 \cdot 7$ , pro něž vesměs platí  $30 \leq n_{2k+4} \leq 70$ , takže A pak může zvolit  $n_{2k+5} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840 < 900 \leq n_{2k+4}^2$ . Po tomto tahu má B nejmenší možnou volbu  $n_{2k+6} = 3 \cdot 5 \cdot 7 > 105$ , takže podle předchozích úvah má vyhrávající strategii A.

Je-li  $8 \leq n_0 < 11$ , má hráč A rovněž vyhrávající strategii — stačí, když zvolí  $n_1 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60 < 8^2 \leq n_0^2$ , protože B pak má na vybranou z čísel  $4 \cdot 3$ ,  $4 \cdot 5$ ,  $3 \cdot 5$ , pro něž

je vesměs  $n_2 \geq 12$ . A pro takové  $n_2$  už známe vyhrávající strategii hráče A.

Jestliže pro nějaké  $k \geq 0$  je  $n_{2k} \leq 5$ , pak A musí zvolit číslo mezi 5 a 25. Nesmí volit mocninu prvočísla — to by vyhrál B. Má tedy následující možnosti (1. řádek tabulky)

|     |            |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-----|------------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| (A) | $n_{2k+1}$ | 6 | 10 | 12 | 14 | 15 | 18 | 20 | 21 | 22 | 24 |
| (B) | $n_{2k+2}$ | 2 | 2  | 3  | 2  | 3  | 2  | 4  | 3  | 2  | 3  |

Na každou z nich odpoví hráč B volbou čísla  $n_{2k+2} \leq 4$ , takže teď už A může volit čísla jen z levé poloviny tabulky, jež jsou nejvýše rovna 16; pro ně ale pak bude  $n_{2k+4} \leq 3$ , takže A může podle tabulky zvolit jen  $n_{2k+5} = 6$ , na což odpoví B  $n_{2k+6} = 2$  a zřejmě vyhraje. V tomto případě má tedy vyhrávající strategii hráč B.

Pro  $n_0 = 6, 7$  nemá žádný z obou hráčů vyhrávající strategii. Hráč A, aby vyhrál, nesmí volit ani mocninu prvočísla, ani číslo, jež ve svém rozkladu na prvočinitele obsahuje jen dvě prvočísla, z nichž jedno je nejvýše 5. To jsme viděli v předchozím případě! Hráč A tedy musí volit jedno z čísel  $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$  nebo  $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ , jež obsahují aspoň tři prvočinitele, B pak musí volit  $n_2 = 6$ , jinak podle předchozích úvah umožní výhru hráči A (musí volit nejvýše 7). Hráč A pak musí pokračovat opět jedním z čísel 30, 42 a hra při správné hře obou hráčů skončí nerozhodně.

Ukázali jsme, že pro  $n_0 \leq 5$  má vyhrávající strategii hráč B, pro  $n_0 = 6, 7$  nemá žádný z hráčů vyhrávající strategii a pro  $n_0 \geq 8$  existuje vyhrávající strategie pro hráče A.

6 (podle Š. Kasala, 3. ročník GWP, Praha). Budeme hledat 1990 vektorů v (komplexní) rovině, jež mají směry

všech různých  $1990.$  odmocnin z jednotky, mají v nějakém pořadí velikosti  $1^2, 2^2, \dots, 1990^2$  a dávají nulový součet.

Vektory délek  $(2k)^2$  a  $(2k-1)^2$  ( $1 \leq k \leq 995$ ) budeme přitom umisťovat tak, aby měly opačný směr a vektor velikosti  $(2k)^2$  měl směr některé  $995.$  odmocniny z jednotky. Součtem takto umístěné dvojice vektorů pak bude vektor délky  $(2k)^2 - (2k-1)^2 = 4k-1$  a směru příslušné  $995.$  odmocniny z jednotky. Jinými slovy, potřebujeme rozmístit  $995$  vektorů  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{994}$ , jejichž délky tvoří aritmetickou posloupnost  $(4k-1)_{k=1}^{995}$ , mají směry všech různých  $995.$  odmocnin z jednotky a jejich součtem je nulový vektor. Bez újmy na obecnosti můžeme ovšem předpokládat, že jejich délky tvoří aritmetickou posloupnost  $0, 1, \dots, 994$ .

Označme  $p_0 = 1, p_1, \dots, p_4$  komplexní jednotky odpovídající vrcholům pravidelného pětiúhelníku ( $5.$  odmocniny z jednotky) a  $d_0 = 1, d_1, \dots, d_{198}$  komplexní jednotky odpovídající vrcholům pravidelného  $199$  úhelníku. Je tedy

$$\sum_{i=0}^{198} d_i = \sum_{j=0}^4 p_j = 0.$$

Odtud plyne, že pro každé  $i, 0 \leq i \leq 198$ , je také

$$\sum_{j=0}^4 (5i+j)d_i p_j = 5id_i \sum_{j=0}^4 p_j + d_i \sum_{j=0}^4 j p_j = d_i \sum_{j=0}^4 j p_j,$$

takže

$$\sum_{i=0}^{198} \sum_{j=0}^4 (5i+j)d_i p_j = \sum_{i=0}^{198} d_i \sum_{j=0}^4 j p_j = \sum_{j=0}^4 j p_j \sum_{i=0}^{198} d_i = 0. \quad (1)$$



Stačí tedy vzít vektory  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{994}$ , jimž budou při umístění do počátku odpovídat koncové body

$$v_{5i+j} = (5i + j)p_i d_j.$$

Podle (1) pak bude  $\sum_{k=0}^{994} \mathbf{v}_k = \mathbf{o}$ . Z nich pak snadno sestojíme 1 990 vektorů  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{1989}$ , jež budou tvořit strany hledaného 1 990úhelníku.

Jednoduchým výpočtem zjistíme, že stačí volit

$$\begin{aligned} u_{10i+2j+1} &= -(10i + 2j + 1)^2 p_i d_j, \\ u_{10i+2j+2} &= (10i + 2j + 2)^2 p_i d_j, \\ (0 \leq i \leq 198, 0 \leq j \leq 4). \end{aligned}$$

Odpovídající vektory  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{1990}$  pak umístíme tak, aby počátek  $\mathbf{u}_{i+1}$  splýval s koncovým bodem vektoru  $\mathbf{u}_i$ .

**Poznámka.** Jiná možnost, jak z kvadratické posloupnosti  $n^2$  sestrojit aritmetickou posloupnost, je vzít dvojice  $(996 + k)^2$  a  $(995 - k)^2$ . Výsledný vektor pak bude mít velikost  $(996 + k)^2 - (995 - k)^2 = 1991 + 2 \cdot 1991k$  ( $0 \leq k \leq 994$ ).

Doc. RNDr. Leo Boček, CSc. – RNDr. Jiří Binder, CSc. –  
RNDr. Vladimír Burjan – RNDr. Karel Horák, CSc. – RNDr. Pavel Töpfer, CSc.

# **TŘICÁTÝ DEVÁTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH**

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství Praha roku 1992

jako svou publikaci č. D-9B-0-0-12-0-01-0

Edice Zájmové náklady

Odpovědná redaktorka Anežka Bittnerová

Výtvarná redaktorka Zdeňka Drahokoupilová

Technická redaktorka Eliška Váchová

Vytiskla Grafia Zlín

1. vydání

**ISBN 80-04-25995-2**



MO

SPN

ISBN 80-04-25995-2