

39. ročník matematické olympiády na základních školách

Milan Koman (editor); Vladimír Repáš (editor): 39. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1989/90. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1992.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404909>

Terms of use:

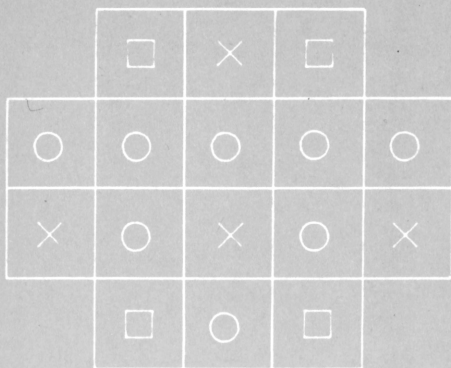
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MO

39. ročník matematické olympiády na základních školách



TŘICÁTÝ DEVÁTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA ZÁKLADNÍCH ŠKOLÁCH

Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1989/1990

ÚLOHY A JEJICH ŘEŠENÍ

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ PRAHA

Zpracovali

doc. RNDr. Milan Koman, CSc., RNDr. Vladimír Repáš

Lektorovali

RNDr. Libuše Hozová, RNDr. Jitka Kučerová, RNDr. Václav Šůla

© Milan Koman, Vladimír Repáš, 1992

ISBN 80-04-26037-3

Obsah

Předmluva	5
Zpráva o průběhu 39. ročníku (1989/90) matematické olympiády na základních školách	8
Úspěšní řešitelé III. kola kategorie Z8	19
Kategorie Z8	26
Úlohy I. kola	26
Úlohy II. kola	28
Úlohy III. kola	29
Řešení úloh I. kola	30
Řešení úloh II. kola	45
Řešení úloh III. kola	54
Kategorie Z7	59
Úlohy I. kola	59
Úlohy II. kola	61
Řešení úloh I. kola	62
Řešení úloh II. kola	71
Kategória Z6	75
Úlohy I. kola	75
Úlohy II. kola	78
Riešenia úloh I. kola	79
Riešenia úloh II. kola	85
Kategória Z5	88
Úlohy I. kola	88
Úlohy II. kola	91
Riešenia úloh I. kola	92
Riešenia úloh II. kola	100

Kategória Z4	103
Úlohy I. kola	103
Úlohy II. kola	106
Riešenia úloh I. kola	108
Riešenia úloh II. kola	113
Příloha	116
Korespondenční semináře	116
Další matematické soutěže	129

Předmluva

Milí mladí přátelé,

řešíte rádi nejen ve škole, ale i ve svém volném čase zajímavé nebo neobvyklé matematické úlohy? Zúčastňujete se matematické olympiády či korespondenčního matematického semináře? Jestliže ano, jistě uvítáte tuto brožurku, která je malou kronikou 39. ročníku matematické olympiády na základních školách. Najdete v ní nejen zprávu o průběhu soutěže, ale i všechny soutěžní úlohy a jejich řešení.

Tato brožurka se tak může pro vás stát vstupní branou do světa matematiky, ve kterém se můžete seznámit s mnoha matematickými zajímavostmi, které byste ve škole nepoznali. Může se vám stát dobrou pomůckou při řešení úloh matematické olympiády i jiných matematických soutěží.

Chceme vám proto poradit, jak máte této knížky využívat. Začněte řešit nejdříve úlohy, na které vaše dovednosti přibližně stačí. Budou to většinou úlohy, které odpovídají vašemu ročníku, ale nevadí, začnete-li úlohami z jiných ročníků. Nejdříve si pozorně přečtete zadání úloh a pak se je snažte sami řešit. Až potom se podívejte na řešení uvedená v brožurce o několik stránek dále (to proto, aby vás nesváděla k jejich předčasnému čtení). Budete-li se tím řídit, nepřipravíte se o krásný pocit, který zažije každý, když se mu

něco podaří. Čím déle se budete s řešením úlohy trápit, tím lepší pocit zažijete po úspěšném vyřešení. Uvedené řešení vám pak umožní zkontrolovat, zda jste úlohu vyřešili dobře, nebo zda jste na část řešení nezapomněli, což se vám ze začátku může snadno přihodit. Jestliže se vám podaří vyřešit úlohu jiným způsobem, než je v brožuře uvedeno, můžete být o to více spokojeni. Protože někdy uvádíme i více řešení jedné úlohy, radíme vám, abyste se seznámili i s těmito řešeními.

Jestliže se vám úlohu nepodaří vyřešit, nebude to žádné neštěstí. Proto jsou vám k dispozici vzorová řešení. Podívejte se však předem na konec řešení, zda nejsou za ním uvedeny některé pomocné úlohy, které by vám mohly řešení usnadnit, aniž byste vzorové řešení museli číst.

Ročenku nemusíte studovat najednou ani postupně. Zaměřte se nejdříve na úlohy, které se vám buď líbí, nebo které mají podobnou tematiku jako soutěžní úlohy, které máte právě řešit např. v matematické olympiádě. Přitom se vám může vyplatit podívat se i na úlohy určené jiným ročníkům, než které navštěvujete. Nezapomeňte ani na úlohy pro nižší ročníky.

K řešením některých úloh připojujeme i poznámky, ve kterých se můžete seznámit s novými poznatky.

Až prostudujete úlohy z 39. ročníku matematické olympiády, máte možnost pokusit se řešit úlohy uvedené v příloze brožurky. V ní uvádíme ukázky dalších úloh z různých matematických soutěží. U těchto úloh však už nejsou uvedena řešení. Nebudete-li si vědět s jejich řešeními rady, obraťte se na své učitele matematiky nebo na starší kamarády, zejména ze středních škol. Věříme, že vám rádi poradí.

Závěrem vám přejeme při řešení úloh i při studiu knížky hodně úspěchů a radosti z dosažených výsledků. Budeme se těšit, že se s mnohými z vás setkáme mezi soutěžícími i mezi vítězi matematické olympiády.

V lednu 1991

Autoři

Zpráva o průběhu 39. ročníku (1989/90) matematické olympiády na základních školách

Pro všechny žáky 4. až 8. ročníků základních škol, kteří mají rádi zajímavé a netradiční úlohy, s jakými se ve škole nesetkají, se každoročně vyhlašuje soutěž známá pod názvem matematická olympiáda (MO). Ve školním roce 1989/90 to byl již 39. ročník soutěže.

Matematickou olympiádu pořádají vždy *ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR* a *ministerstvo školství, mládeže a sportu SR*, *Jednota českých matematiků a fyziků (JČMF)*, *Jednota slovenských matematiků a fyziků (JSMF)* a *Matematický ústav ČSAV v Praze (MÚ ČSAV)*.

Celostátně soutěž řídil a vyhlašoval soutěžní úlohy ústřední výbor matematické olympiády (ÚV MO). V krajích (krajské zřízení bylo zrušeno až po skončení 39. ročníku koncem roku 1990) a okresech řídily soutěž krajské a okresní výbory matematické olympiády (KV MO a OV MO). Organizačně pomáhaly soutěž zajišťovat krajské pedagogické ústavy, pobočky JČMF a JSMF, Výzkumný ústav pedagogický v Praze a řada dobrovolných pracovníků, zejména učitelů základních škol.

Od 39. ročníku řídí soutěž nově jmenovaný ÚV MO. Jeho členy jmenovalo na dobu 5 let na návrh JČMF a JSMF ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR a ministerstvo školství, mládeže a sportu SR. Předsedou ÚV MO

je v tomto období doc. RNDr. *Leo Boček*, CSc., z matematicko-fyzikální fakulty UK v Praze. Ten zároveň řídí práci 16členného předsednictva ÚV MO. Řízením soutěže na základních školách byli pověřeni doc. RNDr. *Milan Koman*, CSc., z pedagogické fakulty UK v Praze a RNDr. *Vladimír Repáš* z EF SVŠT v Bratislavě.

Soutěžní kategorie

Žáci, kteří se zúčastnili soutěže, byli rozděleni do pěti kategorií podle ročníků, ve kterých se učili. Přehled těchto kategorií a soutěžních kol udává tabulka 1.

Tabulka 1

Ročník	8.	7.	6.	5.	4.
Kategorie	Z8	Z7	Z6	Z5	Z4
Počet soutěžních kol	3	2	2	2	2

V kategoriích Z5 a Z4 vyhlásila soutěž ve Slovenské republice Jednota slovenských matematiků a fyziků. V České republice nebyla soutěž v těchto kategoriích oficiálně vyhlášena, ale přesto se uskutečnila v pěti českých krajích díky nadšeným učitelům matematiky a pracovníkům KV MO a OV MO. V kategorii Z5 pořádali soutěž v ČR v Západočeském, Jihočeském, Severočeském, Východočeském a Jihomoravském kraji. Pro kategorii Z4 v kraji Západočeském, Východočeském, Jihomoravském a Severomoravském. Bylo to umožněno i tím, že také v českém letáku Matematická olympiáda na základních školách byly vedle soutěžních úloh kategorií Z8, Z7 a Z6 uveřejněny v příloze soutěžní úlohy

pro 5. a 4. ročník, které byly převzaty ze Slovenské republiky z kategorií Z5 a Z4.

Průběh soutěže

V I. kole řešili žáci formou domácích úloh ve všech kategoriích 6 soutěžních úloh. Řešení odevzdali ve stanovených termínech svým učitelům matematiky.

Ve II. kole řešili žáci úlohy formou klauzurní práce. V kategorii Z8 řešili 4 úlohy, v ostatních kategoriích 3 úlohy. Na řešení byl vymezen přesně stanovený čas. Pro kategorii Z8 to byly 4 hodiny, pro kategorie Z7, Z6 a Z5 2 hodiny a pro kategorii Z4 1 hodina. II. kolo se uskutečnilo pro kategorie Z5 až Z8 zpravidla v okresním městě a pro kategorii Z4 na pořádající škole v místě bydliště.

Ve III. kole, které se konalo celostátně jen v kategorii Z8 vždy v krajských městech nebo jiném větším městě, řešili žáci samostatně 4 úlohy. Čas na řešení byl stanoven opět na 4 hodiny jako ve II. kole.

Časový rozvrh soutěže udává tabulka 2 (doba značí termíny odevzdání 1. a 2. trojice soutěžních úloh).

Tabulka 2

Kategorie	I. kolo	II. kolo	III. kolo
Z8	10. 11. 1989/5. 1. 1990	14. 2. 1990	11. 4. 1990
Z7, Z6, Z5	15. 12. 1989/9. 3. 1990	18. 4. 1990	—
Z4	10. 11. 1989/5. 1. 1990	7. 2. 1990	—

Soutěžní úlohy 39. ročníku MO pro všechny kategorie Z i se vzorovými řešeními jsou uvedeny v této ročence.

V I. kole se hodnotily úlohy podle stupnice 1 — výborně, 2 — dobře, 3 — nevyhovuje. Soutěžící, kteří měli aspoň 4 řešení úloh ohodnocena výborně nebo dobře, se stali úspěšnými řešiteli I. kola.

Z úspěšných řešitelů I. kola byli vybráni nejlepší řešitelé a ti byli pozváni do II. kola. Výběr pro okresní kolo (kategorie Z5 až Z8) prováděly OV MO, pro II. školní kolo kategorie Z4 referenti MO na jednotlivých školách. Ve II. kole se řešení úloh bodovala podle předem stanoveného jednotného klíče. Žáci, kteří získali aspoň polovinu z celkového počtu dosažitelných bodů, se stali úspěšnými řešiteli II. kola. Nejlepší z nich byli vyhlášeni vítězi II. kola.

Výběr žáků do III. kola kategorie Z8 a způsob hodnocení byl stejný jako pro II. kolo. Vítězové III. kola soutěže, kteří se umístili na 1. až 10. místě v každém kraji, jsou uvedeni na str. 19 až 25.

Příprava soutěžních úloh

Úlohy vybrali členové PÚV MO a členové slovenské subkomise pro základní školy při slovenské komisi MO JSMF (předseda RNDr. *Vladimír Repáš*). Použili přitom úlohy přijaté do konkursu na úlohy MO od autorů: dr. *V. Burjana* z Bratislavy, dr. *Pavola Černeka*, CSc., z Bratislavy, dr. *V. Dřízala* z Prahy, *J. Galla* z Nových Zámků, doc. dr. *M. Komana*, CSc., z Prahy, dr. *G. Monoszové* z Banské Bystrice, dr. *A. Pribišové* z Bratislavy, dr. *V. Repáše* z Bratislavy, dr. *J. Trejbala* z Chlumce nad Cidlinou, dr. *M. Volf-*

vé z Hradce Králové, D. Vongrejové ze Žiliny a M. Žákoviče z Nového Mesta nad Váhom.

Akce na pomoc matematické olympiádě

Na pomoc učitelům, kteří organizovali školní kolo MO, byly jako v předešlých letech vypracovány komentáře k soutěžním úlohám a pokyny pro jejich hodnocení. Většina úloh I. kola byla v komentářích doplněna pomocnými úlohami, které měly žákům usnadnit řešení soutěžních úloh. Ve všech krajích pořádaly KV MO a OV MO, pobočky JČMF a JSMF instruktáže pro učitele matematiky a referenty MO.

Pro úspěšné řešitele MO, řešitele korespondenčních seminářů a další talentované žáky byly pořádány na mnoha místech zimní a letní matematické školy, soustředění a tábory mladých matematiků. Mnoho žáků od 4. až po 8. ročníky základních škol mělo příležitost zúčastnit se některého ze 16 dále uvedených korespondenčních seminářů, které měly zpravidla 4 až 6 soutěžních kol nebo sérií.

Název korespondenčního semináře	Pořadatel	Adresa vedoucího semináře
Pikomat	Gymnázium, Korunní 2, Praha 2	dr. J. Zhouf, G, Korunní 2, Praha 2
Pikomat	Gymnázium, Kralupy n/Vlt.	dr. K. Šimánek, G, Kralupy n/Vlt.
Pikomat	ODDM Kutná Hora	K. Blažek, Mitnov 12, 285 04 Uhlířské Janovice
Pikomat	Pedag. fakulta, České Budějovice	dr. P. Sokol, PF Jeronýmova 10, 371 15 České Budějovice
Pikomat	Pedagogická fakulta, Hradec Králové	dr. E. Krejčová, CSc., Gollova 553, 500 03 Hradec Králové

Pikomat	Gymnázium J. K. Tyla, Hradec Králové	dr. <i>Kynterová</i> , G J. K. Tyla, 502 23 Hradec Králové
Pikomat	JČMF Jihlava	<i>V. a M. Krejčí</i> , U pivovaru 6, 586 01 Jihlava
Pikomat	OPS Svitavy	dr. <i>H. Lišková</i> , Purkyňova 319, 570 01 Litomyšl
Pikomat	OPS Frýdek-Místek	dr. <i>Z. Bachelová</i> , Svornosti 21, 704 00 Ostrava-Zábřeh
Kokos	Gymnázium, Bílovec	<i>A. Kuběna a P. Kačenka</i> , DM při GMK, Gottwaldova 526, 743 11 Bílovec
Kominár	Gymnázium J. Hronca, Bratislava	dr. <i>P. Černek</i> , CSc., Novohrad- ská 1, 821 09 Bratislava
Pikomat	MFF UK, Bratislava	dr. <i>T. Hecht</i> , CSc., katedra geometrie MFF UK, Mlýnská Dolina 688, 842 15 Bratislava
BUBEF	Gymnázium A. Markuša a DPM, Bratislava	<i>M. Beblavý</i> , Botekova 8, 800 00 Bratislava
Kovboj	Pedagogická fakulta, Banská Bystrica	doc. dr. <i>B. Sivák</i> , CSc., KM PF, Tajovského, 975 49 Banská Bystrica
Spikomat	VŠDS Žilina	dr. <i>H. a K. Bachratí</i> , Jaseňová 15, 010 01 Žilina
Pikomat	KV MO Košice	KV MO, Jesenná 5, 041 54 Košice
Pikomat	Seminár Zamat, MFF UK, Bratislava	<i>Z. Kocsis</i> , kat.Z7 a Z8, MFF UK, Mlýnská Doli- na 688, 842 15 Bratislava

V příloze uvádíme ukázky úloh z některých korespondenčních seminářů i z několika dalších soutěží. Za poskytnutí úloh a laskavé svolení k otištění ukázek děkují autoři brožury těmto spolupracovníkům:

RNDr. *J. Zhoufovi* z Prahy, RNDr. *Z. Bachelové* z Frýdku-Místku, *V. a M. Krejčovým* z Jihlavy, RNDr. *L. Hozové* z Opavy, PaedDr. *M. Ausbergerové* z Plzně, RNDr. *K. Šimánkovi* z Kralup nad Vltavou a *Z. Kocsisovi* z Bratislavy.

Rukopis brožury přečetly s velkou pozorností RNDr. *L. Hozová* a RNDr. *J. Kučerová* a svými cennými připomínkami přispěly ke zlepšení textu i k jeho snazší srozumitelnosti. Autoři jim proto vyslovují touto cestou své poděkování.

Tato knížka by byla nemyslitelná bez obrázků, o které se zasloužil Ing. *Petr Bureš* z Prahy. Není bez zajímavosti, že je zpracoval na počítači IBM-PC za použití kreslicího programu AUTOCAD-B10.

M. Koman a V. Repáš
členové předsednictva ÚV MO

Tabulka 3

Počty základních škol, které se zúčastnily 39. ročníku MO
v kategoriích Z8, Z7, Z6, Z5*), Z4*)

Kraj	ZŠ celkem	Účast ZŠ											
		v I. kole				v II. kole				ve III. kole			
		Z8	Z7	Z6	Z5	Z4	Z8	Z7	Z6	Z5	Z4	Z8	Z7
Praha	215	186	126	107	-	-	173	111	90	-	-	32	
Středočeský	277	194	186	160	14	-	156	135	116	10	-	33	
Jihočeský	183	133	133	123	-	-	113	119	106	-	-	33	
Západočeský	238	149	139	128	92	81	124	109	104	60	32	27	
Severočeský	298	186	130	127	-	-	132	94	92	-	-	26	
Východočeský	312	217	197	166	-	-	179	159	112	-	-	28	
Jihomoravský	464	288	257	172	-	66	281	231	119	-	66	33	
Severomoravský	475	401	338	346	-	-	299	262	232	-	-	67	
Bratislava	86	78	76	76	79	81	72	74	71	68	62	57	
Západoslovenský	494	451	424	392	293	254	364	318	294	248	216	36	
Středoslovenský	433	275	296	300	310	343	244	278	286	298	316	24	
Východoslovenský	404	356	356	370	361	-	296	342	323	299	-	43	
ČR	2 462	1 754	1 506	1 329	106	147	1 457	1 220	971	70	98	279	
SR	1 417	1 160	1 152	1 138	1 043	678	976	1 012	974	913	594	160	
ČSFR	3 879	2 914	2 658	2 467	1 149	825	2 433	2 232	1 945	983	692	439	

*) V České republice nebyla soutěž v kategoriích Z5 a Z4 oficiálně vyhlášena, proto je statistika neúplná.

Tabulka 4

Počty soutěžících (S) a úspěšných (U) žáků v 39. ročníku MO v kategoriích Z5*) a Z4*)

Kraj	kategorie Z5				kategorie Z4			
	I. kolo		II. kolo		I. kolo		II. kolo	
	S	U	S	U	S	U	S	U
Západočeský	381	219	181	68	206	114	81	33
Severočeský	69	48	45	31	–	–	–	–
Jihomoravský	–	–	–	–	5 000	1 700	330	62
Bratislava	302	269	261	147	441	350	347	198
Západoslovenský	3 046	1 623	913	194	5 933	3 628	3 056	1 906
Středoslovenský	2 160	1 209	810	189	4 109	2 807	2 434	1 418
Východoslovenský	2 925	1 563	618	185	–	–	–	–
ČR	450	267	226	99	5 206	1 814	421	95
Úspěšnost v %	59,3 %		43,8 %		34,8 %		22,6 %	
SR	8 433	4 664	2 602	715	10 483	6 785	5 837	3 522
Úspěšnost v %	55,3 %		27,5 %		64,7 %		60,3 %	
ČSFR	8 883	4 931	2 828	814	15 689	8 599	6 258	3 617
Úspěšnost v %	55,5 %		28,8 %		54,8 %		57,8 %	

*) V České republice nebyla soutěž v kategoriích Z5 a Z4 oficiálně vyhlášena, proto je statistika neúplná.

Počty soutěžících (S) a úspěšných (U) žáků v 39. ročníku MO v kategoriích Z7 a Z6

Kraj	kategorie Z7				kategorie Z6			
	I. kolo		II. kolo		I. kolo		II. kolo	
	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	714	388	207	95	579	325	225	99
Středočeský	1 034	444	388	104	1 031	389	332	156
Jihočeský	943	393	325	85	1 075	409	321	92
Západočeský	849	417	320	89	795	367	286	112
Severočeský	863	413	348	94	919	442	315	123
Východočeský	1 178	564	386	92	951	450	291	99
Jihomoravský	1 910	969	672	166	1 327	590	345	117
Severomoravský	2 431	982	729	128	2 728	1 100	718	191
Bratislava	261	212	208	101	301	230	229	120
Západoslovenský	2 604	1 409	915	238	2 548	1 362	862	209
Středoslovenský	1 720	939	593	143	2 009	1 145	783	197
Východoslovenský	2 519	1 334	623	189	2 772	1 627	636	175
ČR	9 922	4 570	3 375	853	9 405	4 072	2 833	989
Úspěšnost v %	45,8 %		25,2 %		43,3 %		34,9 %	
SR	7 104	3 894	2 339	671	7 630	4 364	2 510	701
Úspěšnost v %	54,8 %		28,7 %		57,2 %		27,9 %	
ČSFR	17 026	8 464	5 714	1 524	17 035	8 436	5 343	1 690
Úspěšnost v %	49,5 %		26,6 %		49,5 %		31,6 %	

Tabulka 6

Počty soutěžících (S) a úspěšných (U) žáků v 39. ročníku MO v kategoriích Z8

Kraj	I. kolo		II. kolo		III. kolo	
	S	U	S	U	S	U
Praha	1 067	660	478	121	36	26
Středočeský	1 174	562	430	96	40	12
Jihočeský	854	344	297	65	48	22
Západočeský	984	441	339	82	74	46
Severočeský	1 370	580	445	111	50	22
Východočeský	1 173	687	452	90	42	28
Jihomoravský	2 370	1 233	823	154	54	41
Severomoravský	3 366	1 470	950	157	116	70
Bratislava	382	279	271	142	46	33
Západoslovenský	2 662	1 416	821	212	45	35
Středoslovenský	1 289	814	645	134	35	22
Východoslovenský	2 546	1 214	768	160	63	25
ČR	12 358	5 977	4 214	876	460	267
Úspěšnost v %	48,4 %		18,4 %		58,0 %	
SR	6 879	3 723	2 505	648	189	115
Úspěšnost v %	54,1 %		25,9 %		60,8 %	
ČSFR	19 237	9 700	6 719	1 524	649	382
Úspěšnost v %	50,4 %		21,2 %		58,6 %	

Úspěšní řešitelé III. kola kategorie Z8

V každém kraji uvádíme řešitele, kteří se umístili na prvních deseti místech. Pokud není jinak uvedeno, jsou všichni jmenovaní řešitelé žáky 8. ročníků základní školy. U žáků, kteří jsou ze tříd s rozšířeným vyučováním matematiky a přírodovědných předmětů, je připojeno označení (R). Názvy ulic odpovídají stavu z dubna 1990, kdy se soutěž konala.

Praha

- | | |
|---------------------------|---------------------------------|
| 1.–3. <i>Robert Chudý</i> | ZŠ, Na planině, Praha 4, (R) |
| <i>Kateřina Pacovská</i> | ZŠ, Na Šutce, Praha 8, (R) |
| <i>Jan Temml</i> | ZŠ, U škol. zahrady, Praha 8 |
| 4. <i>Jan Vaněk</i> | ZŠ, Uhelný trh, Praha 1, (R) |
| 5.–10. <i>Milan Hokr</i> | ZŠ, Uhelný trh, Praha 1, (R) |
| <i>Jiří Kosek</i> | ZŠ, Na planině, Praha 4, (R) |
| <i>Pavel Kraemer</i> | ZŠ, Na dlouhém lánu,
Praha 6 |
| <i>Libor Šnobl</i> | ZŠ, Omská, Praha 10 |
| <i>Barbora Štěpánková</i> | ZŠ, Štěpánská, Praha 1 |
| <i>Karel Tušek</i> | ZŠ, Umělecká, Praha 7 |

Středočeský kraj

- | | |
|---------------------------|---------------------|
| 1. <i>Václav Dejčmar</i> | 1. ZŠ, Říčany, (R) |
| 2.–3. <i>Petr Ivančák</i> | 6. ZŠ, Příbram, (R) |

- Hana Vlachová*
 4. *Marcela Entlichová*
 5. *Karel Rys*
 6.–7. *Tomáš Kaluža*
 Václav Petříček
 8. *Robert Vlček*
 9.–10. *Marek Štěpán*
 Zdeněk Koktan

3. ZŠ, Vlašim, (R)
 2. ZŠ, Beroun, (R)
 ZŠ, Unhošť
 ZŠ, Jesenice, okr. Rakovník
 6. ZŠ, Mladá Boleslav, (R)
 ZŠ, Kralupy, sídliště, (R)
 3. ZŠ, Vlašim, (R)
 1. ZŠ, Příbram

Jihočeský kraj

1. *Roman Otec*
 2. *Jaroslav Hamrle*
 3.–5. *Jana Křišťanová*
 Jiří Novák
 Igor Glücksmann
 6.–8. *Ondřej Pangrác*
 Vojtěch Čížík
 Oldřich Lanc
 9. *Jaroslav Šácha*
 10.–13. *Kateřina Hubová*
 Petra Jizbová
 Ondřej Stašek
 Ondřej Mareš

7. ZŠ, Tábor
 1. ZŠ, Pelhřimov
 ZŠ, Dukelská, Strakonice
 1. ZŠ, Pelhřimov
 ZŠ, Gorkého, Písek
 1. ZŠ, Pelhřimov
 ZŠ, Horní Dvořiště
 ZŠ, Prachatice
 ZŠ, Kovářov, okr. Písek
 ZŠ, Dukla, Strakonice
 4. ZŠ, Jindřichův Hradec
 ZŠ, Nerudova, Č. Budějovice
 ZŠ, Nerudova, Č. Budějovice

Západočeský kraj

1. *Jitka Lhotská*
 2.–4. *Vladimír Čermák*
 Bohuslav Paule
 Zbyněk Veselý
 5.–7. *Michal Novák*
 Kateřina Šindelářová

32. ZŠ, Plzeň, (R)
 ZŠ, K. Vary, Tuhnice, (R)
 ZŠ, K. Vary, Tuhnice, (R)
 ZŠ, K. Vary, Tuhnice, (R)
 ZŠ, K. Vary, Tuhnice, (R)
 7. ročník 3. ZŠ, Cheb (R)

Petr Vachovec
8.-12. *Michal Mikluš*
Vítězslav Hapl
Robert Schaffer
Jana Vokáčová
Robert Pelikán

32. ZŠ, Plzeň, (R)
1. ZŠ, Aš, (R)
32. ZŠ, Plzeň, (R)
ZŠ, K. Vary, Tuhnice, (R)
ZŠ, Chlumčany
29. ZŠ, Plzeň, (R)

Severočeský kraj

1. *Michal Buroš*
2.-4. *Michal Čermák*
Jan Ludvík
Tomáš Pavelka

5.-8. *Petr Babec*
Kamila Ulmanová
Ludvík Šeba
Zdeněk Moravec

9.-11. *Petr Buriánek*
Petr Schösinger
Miroslav Bulín

ZŠ, Husova, Liberec
8. ZŠ, Jablonec nad Nisou
ZŠ, Ant. Sovy, Č. Líba, (R)
ZŠ, Karla IV.,
Ústí n. Lab., (R)
9. ZŠ, Jablonec nad Nisou
ZŠ, Ant. Sovy, Č. Líba, (R)
6. ZŠ, Litoměřice, (R)
ZŠ, Karla IV.,
Ústí n. Lab., (R)
ZŠ, Na bojišti, Liberec, (R)
ZŠ, Vojanova, Děčín, (R)
ZŠ, Buzulucká,
Teplice v Čechách, (R)

Východočeský kraj

1. *Jaroslav Hejda*

2.-5. *Milan Kolka*
Pavel Krtička
Vlasta Pěničková
Luboš Veselý
6.-7. *Karel Houfek*

ZŠ, Hakenova,
Pardubice, (R)
ZŠ, Buttulova, Chotěboř
ZŠ, Police nad Metují, (R)
ZŠ, Gottwaldova, Žamberk
ZŠ, Školní, Vrchlabí
ZŠ, Lázně Bělohrad

Petr Hummel

ZŠ, Mánesova,
Pardubice

8.–9. *Martin Betinec*

ZŠ, Prachovice

Ladislav Ostrý

ZŠ, Husova, Chrudim, (R)

10.–11. *Tomáš Krajtl*

ZŠ, Hakenova,
Pardubice, (R)

Petr Kubát

ZŠ, Hakenova,
Pardubice, (R)

Jihomoravský kraj

1.–3. *Dana Černá*

ZŠ, Kupkova, Břeclav

Martin Doušek

ZŠ, Gottwaldova, Tišnov

Petr Holub

ZŠ, Újezd u Brna

4.–5. *Jana Gregorovičová*

ZŠ, Masarykova, Třebíč

Petr Neškrábal

ZŠ, J. V. Choráze, Prostějov

6.–9. *Helena Málková*

ZŠ, T. G. Masaryka,
Moravské Budějovice

Stanislav Matoušek

ZŠ, Štefánikova, Zlín

Libor Pavlík

ZŠ, Švermova, Žďár n. S.

Petr Slepánek

ZŠ, J. V. Choráze, Prostějov

10.–11. *Markéta Matoušková*

ZŠ, Komenského n., Třebíč

Helena Hanáková

ZŠ, J. V. Choráze, Prostějov

Severomoravský kraj

1.–2. *Jiří Čech*

1. ZŠ, P. Bezruče,
Frýdek-Místek, (R)

Jan Mrózek

1. ZŠ, P. Bezruče,
Frýdek-Místek, (R)

3.–6. *Tomáš Jurtík*

1. ZŠ, P. Bezruče,
Frýdek-Místek, (R)

Richard Gadas

ZŠ, Čsl. arm., Val. Meziříčí

Jaromír Fiurášek
Jan Mach

7.-13. *Martin Luber*
Petr Dvořák
Michal Bartoň
Zdeněk Románek
Martin Indrák

Petr Masopust

David Jurišica

ZŠ, Velká Dlážka, okr. Přerov
ZŠ, Kosmonautů,
Ostrava-Zábřeh, (R)
ZŠ, U lesa, Karviná, Máj, (R)
ZŠ, Fr. Stupky, Olomouc, (R)
ZŠ, Tršice, okr. Olomouc
3. ZŠ, Cihelní, Bruntál
5. ZŠ, Janáčkovo n.,
Krnov, (R)
1. ZŠ, P. Bezruče,
Frýdek-Místek, (R)
1. ZŠ, P. Bezruče,
Frýdek-Místek, (R)

Bratislava

1. *Andrej Zlatoš*
2. *Pavol Bychler*
3.-8. *Igor Furdík*
Richard Hargaš
Michal Kovár
Mária Kuklišová
Martin Niepel
Marián Varga

9. *Michal Horvat*

10.-16. *Ivona Bezáková*
Bratislava Brejová
Eduard Keleman
Marek Mačuha
Alexander Perjessy
Jakub Soldán

ZŠ, Sokolíkova, Bratislava
ZŠ, Batkova, Bratislava
ZŠ, Batkova, Bratislava
8. r. GAM, Bratislava, (R)
7. r. GAM, Bratislava, (R)
ZŠ, Košická, Bratislava, (R)
ZŠ, Ho či minova, Brat., (R)
ZŠ, Ho či minova, Brat., (R)
ZŠ, Batkova, Bratislava
7. r. GAM, Bratislava, (R)
ZŠ, Kulíškova, Bratislava
ZŠ, Ho či minova, Brat., (R)
ZŠ, Ho či minova, Brat., (R)
ZŠ, Beňovského, Bratislava
ZŠ, Nevädzová, Bratislava

Západoslovenský kraj

- | | |
|----------------------------|--|
| 1. <i>František Gabriš</i> | ZŠ, Leninova, Hlohovec |
| 2. <i>Agneša Vrgaová</i> | ZŠ, Gorkého, Dun. Streda |
| 3. <i>Marta Szalayová</i> | ZŠ (maď.), Gorkého,
Dunajská Streda |
| 4. <i>Matej Gajdoš</i> | ZŠ, Balakovská, Piešťany |
| 5. <i>Margita Drozdová</i> | ZŠ, Komenského, Sered' |
| 6. <i>Pavol Ondrejovič</i> | ZŠ, Pionierska, Trenčín |
| 7. <i>Patrik Mihálik</i> | ZŠ, Slobody, Komárno |
| 8. <i>Marek Száraz</i> | ZŠ, nábr. Mládeže, Nitra |
| 9. <i>Robert Hodoši</i> | ZŠ, Topolčianky |
| 10. <i>Ladislav Vegh</i> | ZŠ (maď.), Mieru, Komárno |

Stredoslovenský kraj

- | | |
|----------------------------------|---------------------|
| 1. <i>Ľubica Kubačková</i> | ZŠ, Dolný Kubín |
| 2.-3. <i>Roman Capek</i> | ZŠ, Čadca |
| <i>Peter Humaj</i> | ZŠ, Žilina |
| 4.-7. <i>Marek Káčer</i> | ZŠ, Martin |
| <i>Jozef Uhler</i> | ZŠ, Zvolen |
| <i>Erika Varečková</i> | ZŠ, Dolný Kubín |
| <i>Ľuboš Vnuk</i> | ZŠ, Čadca |
| 8.-9. <i>Vladimíra Berčáková</i> | ZŠ, Martin |
| <i>Jitka Hušková</i> | ZŠ, Martin |
| 10.-11. <i>Martin Gažák</i> | ZŠ, Prievidza |
| <i>Jana Kadlecová</i> | ZŠ, Žiar nad Hronom |

Východoslovenský kraj

- | | |
|--------------------------------|------------------------|
| 1.-2. <i>Katarína Kubeňová</i> | ZŠ, Pionierska, Prešov |
| <i>Martin Šepelák</i> | 1. ZŠ, Michalovce, (R) |

3. <i>Miloš Gaj</i>	ZŠ, Dolný Smokovec
4.-6. <i>Ivana Brudňáková</i>	ZŠ, 17. novembra, Poprad
<i>Tomáš Futáš</i>	ZŠ, Febr. víť., Košice, (R)
<i>Štefan Roguli</i>	4. ZŠ, Michalovce
7.-10. <i>Slavomír Harakál</i>	ZŠ, Bernolákova,
<i>Maroš Myšek</i>	Vranov n. T., (R)
<i>Ivan Scréter</i>	ZŠ, Komenského,
<i>Peter Zámbovský</i>	Bardejov, (R)
	ZŠ, Febr. víť., Košice, (R)
	ZŠ, Febr. víť., Košice, (R)

Kategorie Z8

ÚLOHY I. KOLA

(Řešení úloh na str. 30)

Z8 – I – 1

Najděte nejmenší přirozená čísla, kterými musíte postupně násobit čísla

3, 33, 333, 3 333, 333 333 333 333,

abyste dostali součin zapsaný samými jedničkami.

Z8 – I – 2

Na zahradě jsou 4 stromy. Ze šesti vzdáleností určených dvojicemi těchto stromů jsou dvě rovny 10 m, ostatní čtyři jsou rovny v . Nakreslete plánky všech možných rozmístění a vypočtěte příslušné vzdálenosti v .

Z8 – I – 3

Pro která n ($n = 12, 19, 198, 1989$) je možné sestavit n -úhelník, jehož každé dvě sousední strany jsou navzájem kolmé? Odpověď pro každé n odůvodněte. (Hranici hledaného n -úhelníku má být uzavřená neprotínající se lomená čára v rovině.)

Z8 – I – 4

Řešte soustavu rovnic pro neznámé a, b, c, d, e, f, g :

$$2 + a + b = (1 + a)(b + 1)$$

$$3 + b + c = (1 + b)(c + 1)$$

$$4 + c + d = (1 + c)(d + 1)$$

$$5 + d + e = (1 + d)(e + 1)$$

$$9 + e + f = (1 + e)(f + 1)$$

$$10 + f + g = (1 + f)(g + 1)$$

$$13 + g + a = (1 + g)(a + 1)$$

Z8 – I – 5

Je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s pravým úhlem při vrcholu A , s úhlem $\beta = 45^\circ$ při vrcholu B a se shodnými stranami AD, DC . Do trojúhelníků ABC a ACD jsou vepsány kružnice. Vypočítejte obsahy kruhů určených těmito kružnicemi.

Z8 – I – 6

Najděte všechna kladná celá čísla a, b , pro něž platí

$$ab + a + b = 1989.$$

ÚLOHY II. KOLA

(Řešení úloh na str. 45)

Z8 – II – 1

Je dán obdélník s celočíselnými délkami stran. Zvětšíme-li jednu jeho stranu o 4 a druhou zmenšíme o 5, dostaneme obdélník s dvojnásobným obsahem. Určete strany daného obdélníku. Najděte všechny možnosti.

Z8 – II – 2

Do kružnice je vepsán čtyřúhelník, jehož dvě strany mají délku 5 cm, dvě strany délku 12 cm a jeho úhlopříčky mají různé délky. Vypočtete délky těchto úhlopříček.

Z8 – II – 3

Napište nejmenší celý kladný násobek čísel 2, 3, 4, 5, 6 a 7, jehož zápis v desítkové soustavě obsahuje pouze nuly a jedničky.

Z8 – II – 4

Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky 5 cm. Na hraně AB leží bod X vzdálený od bodu A 2 cm, na hraně GH leží bod Y vzdálený od bodu G 1 cm. Narýsujte trojúhelník XYE ve skutečné velikosti. Řešte konstrukcí nebo výpočtem.

ÚLOHY III. KOLA

(Řešení úloh na str. 54)

Z8 – III – 1

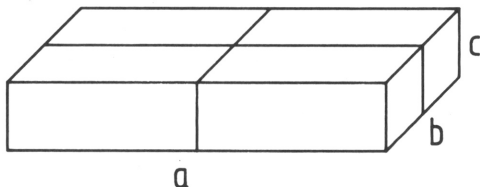
Najděte nejmenší přirozené číslo, které je v desítkové soustavě zapsáno jen pomocí číslic 4 a 7 a je dělitelné číslem 72.

Z8 – III – 2

Sestrojte aspoň jeden rovnoramenný trojúhelník, který má obsah nejméně 5 cm^2 a všechny výšky kratší než 3 cm. Řešení odůvodněte.

Z8 – III – 3

Bonboniéra s celočíselnými rozměry a, b, c (cm), kde $a > b > c$, je ovázána provázkem podle obr. 1. Objem krabice



Obr. 1

je $1\,764\text{ cm}^3$, délka provázku (bez uzlu na ovázání) je 94 cm .
Vypočítejte rozměry krabice. Najděte všechna řešení.

Z8 – III – 4

Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou $a = 6\text{ cm}$ a bod M na prodloužení BF za bod F ve vzdálenosti 6 cm od bodu F . Sestrojte řez krychle rovinou ACM a vypočítejte obsah tohoto řezu.

ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA

Řešení úlohy Z8–I–1 (str. 26)

I. způsob. Budeme hledat nejmenší násobky daných čísel, které jsou zapsány samými jedničkami. Protože čísla 3 , 33 , 333 , $3\,333$ atd. jsou dělitelná třemi, musí být i hledané násobky dělitelné třemi. Ze znaku dělitelnosti třemi tedy plyne, že to mohou být jen některá z čísel

111 , $111\,111$, $111\,111\,111$, $111\,111\,111\,111$ atd.

Snadno zjistíme, že

$$111 = 3 \cdot 37$$

$$111\ 111 = 33 \cdot 3\ 367$$

$$111\ 111\ 111 = 333 \cdot 333\ 667$$

$$111\ 111\ 111\ 111 = 3\ 333 \cdot 33\ 336\ 667$$

atd.

Pro číslo 333 333 333 333 můžeme odhadnout a pak ověřit výpočtem:

$$\underbrace{111\ 111 \dots 111}_{12 \text{ trojic } 111} = \underbrace{333 \dots 333}_{12 \text{ trojek}} \cdot \underbrace{333 \dots 333}_{12 \text{ trojek}} \underbrace{666 \dots 667}_{11 \text{ šestek}}$$

Snadno ověříme, že nalezená čísla jsou nejmenší možná. Například číslo 111 není násobek čísla 33, neboť $111 = 33 \cdot 3 + 12$. Proto je číslo 111 111 nejmenší násobek čísla 33 zapsaný jen pomocí jedniček.

II. způsob. Hledané číslo sestrojíme postupně po jednotlivých číslicích od konce. Postup naznačíme pro číslo 333. Aby byla jednička na místě jednotek, násobíme číslem 7.

$$333 \cdot 7 = 2\ 331$$

Aby byla jednička i na místě desítek, musí mít číslo, kterým násobíme, na místě desítek 6.

$$333 \cdot 67 = 22\ 311$$

Aby byla jednička i na místě stovek, musí mít číslo, kterým násobíme 333, na místě stovek 6.

$$333 \cdot 667 = 222\ 111$$

Dalším výpočtem postupně dostaneme:

$$333 \cdot 3\,667 = 1\,221\,111$$

$$333 \cdot 33\,667 = 11\,211\,111$$

$$333 \cdot 333\,667 = 111\,111\,111$$

Tímto postupem odvodíme pro čísla 3, 33, 333, 3 333 výsledky:

$$3 \cdot 37 = 111$$

$$33 \cdot 3\,367 = 111\,111$$

$$333 \cdot 333\,667 = 111\,111\,111$$

$$3\,333 \cdot 33\,336\,667 = 111\,111\,111\,111$$

Porovnáním výsledků dojdeme snadno k domněnce: Číslo zapsané n trojkami musíme násobit číslem, které dostaneme tak, že před 7 napíšeme $n - 1$ šestek a před ně ještě n trojek, tj. číslo

$$\underbrace{333 \dots 3}_{n\text{-krát}} \underbrace{66 \dots 6}_{(n-1)\text{-krát}} 7$$

Pro $n = 1, 2, 3, 4$ to platí, pro $n > 4$ to dokážeme.

1. *Důkaz* naznačíme sice na konkrétním případě, pro jednoduchost dokonce jen pro $n = 4$, ale jeho myšlenka má obecnou platnost.

3 333		n trojek
<u>· 6 667</u>		$(n - 1)$ šestek, 1 sedmička
23 331		1 dvojka, $(n - 1)$ trojek, 1 jednička
199 98		1 jednička, $(n - 1)$ devítek, 1 osmička
1 999 8		atd.
<u>19 998</u>		
22 221 111		n dvojek, n jedniček

3 333		n trojek
<u>· 3 333</u>		n trojek
9 999		n devítek
99 99		atd.
999 9		
<u>9 999</u>		
11 108 889		(n - 1) jedniček, 1 nula, (n - 1) osmička, 1 devítka

Odtud pak dostaneme

$$\begin{aligned}
 6667 \cdot 3333 &= 2222\,1111 \\
 \underline{3333\,0000 \cdot 3333} &= 1110\,8889\,0000 \\
 3333\,6667 \cdot 3333 &= 1111\,1111\,1111
 \end{aligned}$$

2. *Důkaz* bude podstatně jednodušší, ale vyžaduje jistou zkušenost na něj přijít. Věříme, že bude pro naše čtenáře poučný. Ilustraci provedeme opět pro $n = 4$.

Součin $3333\,6667 \cdot 3\,333$ se nezmění, když prvního činitele budeme násobit číslem 3 a druhého činitele naopak dělit číslem 3.

$$\begin{array}{ccc}
 3333\,6667 \cdot 3333 & & \\
 \downarrow \cdot 3 & \quad & \downarrow : 3 \\
 1\,0001\,0001 \cdot 1111 & = & 1111\,1111\,1111
 \end{array}$$

Podrobnosti si ověříte snadno sami.

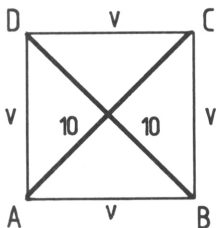
Na základě této úvahy jistě sami snadno najdete čísla, kterými musíte násobit číslo zapsané n trojkami, aby součin byl zapsán samými dvojkami (čtyřkami, pětkami, šestkami atd.)

Pomocná úloha

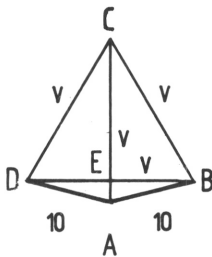
Čím musíte násobit číslo 1 989 (rok konání 39. ročníku MO), aby součin byl zapsán číslem, které končí a) třemi trojkami, b) sedmi sedmičkami. (Můžete řešit i pro jiné letopočty.)

Řešení úlohy Z8–I–2 (str. 26)

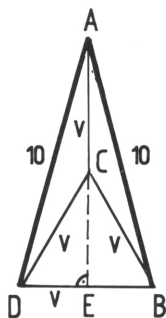
Na plánu znázorníme stromy jako 4 body. Snadno přijdeme na to, že mohou nastat tři možnosti znázorněné na obrázcích 2a, b, c.



Obr. 2a



Obr. 2b



Obr. 2c

V situaci na obrázku 2a obě úsečky délky 10 m nemají žádný společný krajní bod. Čtýřúhelník $ABCD$ je čtverec. To lze odůvodnit různými způsoby. Například tak, že trojúhelníky ACB a ACD jsou rovnoramenné se společnou základnou AC . Proto je přímka BD osou úsečky AC . Podobně přímka AC je osou úsečky BD . Podle Pythagorovy

věty je

$$v = 5 \cdot \sqrt{2} \doteq 7,1 \text{ (m)}.$$

V situaci na obr. 2b vypočítáme délku v například z pravoúhlého trojúhelníku AED . Odvěsna DE má délku $\frac{v}{2}$. Odvěsna AE má délku

$$|AE| = v - v \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{v}{2}(2 - \sqrt{3}),$$

neboť CE je výška rovnostranného trojúhelníku BCD . Proto je podle Pythagorovy věty

$$\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2(2 - \sqrt{3})^2 = 10^2.$$

Odtud po úpravě vypočítáme v .

$$v = \frac{10}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \doteq 19,3 \text{ (m)}.$$

Konečně v situaci na obrázku 2c vypočítáme délku v z pravoúhlého trojúhelníku AED :

$$|DE| = \frac{v}{2}$$

$$|AE| = v + v \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{v}{2}(2 + \sqrt{3})$$

Podle Pythagorovy věty opět dostaneme

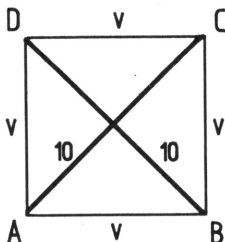
$$\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2(2 + \sqrt{3})^2 = 10^2,$$

a tedy

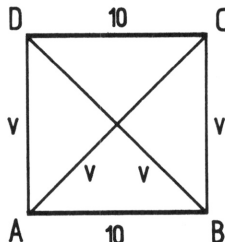
$$v = \frac{10}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} \doteq 5,2 \text{ (m)}.$$

Zbývá dokázat, že jiná možnost už nemůže nastat. Pro obě úsečky délky 10 m mohou nastat dvě možnosti: buď nemají společný žádný krajní bod, nebo mají společný 1 krajní bod.

Uvažujme první možnost. Nechť úsečky AC a BD mají délku 10 m (obr. 3a, b).



Obr. 3a



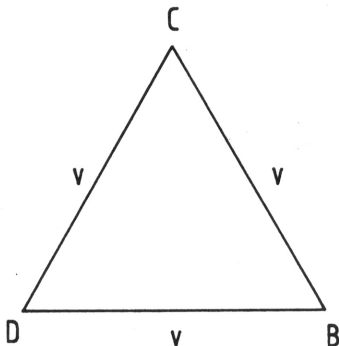
Obr. 3b

Potom trojúhelníky ACD a ACB jsou rovnoramenné (s rameny délky v).

Situace znázorněná na obr. 3a je stejná jako v případě znázorněném na obr. 2a. Situace z obr. 3b nastat nemůže, jak se o tom sami snadno přesvědčíte.

Uvažujme nyní druhou možnost. Nechť délku 10 m mají úsečky AB a AD . Potom tři ze zbývajících čtyř úseček délky v musí být stranou rovnostranného trojúhelníku s vrcholy B, C, D (obr. 4). Bod A musí mít od vrcholů B, D vzdále-

nost 10 m a od vrcholu C vzdálenost v . Mohou nastat právě dvě možnosti znázorněné na obr. 3a, b.



Obr. 4

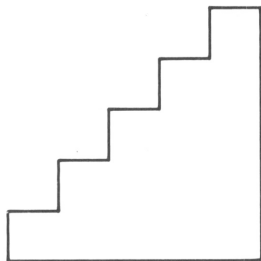
Pomocné úlohy

1. Vypočítejte poloměr kružnice opsané rovnoramennému trojúhelníku se základnou $a = 10$ cm a ramenem $b = 10\sqrt{3}$ cm.

2. K dispozici máte libovolný počet červených a modrých tyček stejné délky. Z osmi z nich můžete sestavit model pravidelného čtyřbokého jehlanu. Kolik takových různých modelů můžete vyrobit? Dva modely jsou různé, když je nemůžete postavit vedle sebe tak, aby všechny odpovídající hrany byly stejné barvy. (Úloha Z6-I-1 z 36. ročníku MO).

Řešení úlohy Z8–I–3 (str. 26)

Mnohoúhelník, jehož každé dvě sousední strany jsou navzájem kolmé, můžeme umístit tak, že se střídají po jeho obvodu vždy „vodorovné“ a „svislé“, příklad je na obrázku 5.



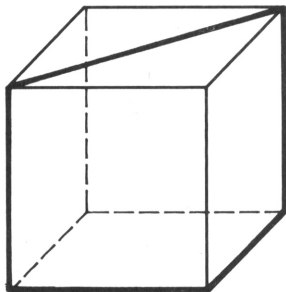
Obr. 5

Takový mnohoúhelník musí mít vždy sudý počet stran. Pro $n = 19$ a 1989 nemá tedy úloha řešení. Pro $n = 12$ je řešením např. „schodiště“ s pěti schody. Pro $n = 198$ můžeme nakreslit podobné „schodiště“ s devadesáti osmi schody. (Vztah mezi počtem stran a počtem schodů pro libovolné n najděte sami).

Pomocná úloha

Kolik obrazců můžete sestavit z 12 zápalek, jestliže smíte klást zápalky pouze tak, že dvě sousední zápalky jsou buď navzájem kolmé, nebo leží v jedné přímce? Kolik stran mají tyto obrazce? Určete mezi nimi obrazce s nejmenším a největším obsahem.

Poznámka k úloze Z8–I–3. Obdobnou úlohu můžeme řešit i v prostoru. Je zajímavé, že úloha má jiné řešení. Počínaje



Obr. 6

číslem $n = 5$ můžeme sestrojit pro každé n mnohoúhelník, který má každé dvě sousední strany navzájem kolmé. Pro $n = 5$ je to například pětiúhelník z obrázku 6. Je sestrojen na povrchu krychle. Není to však rovinný útvar. Není těžké sestrojit podobné n -úhelníky pro ostatní $n > 5$.

Řešení úlohy Z8–I–4 (str. 27)

Jednoduchou úpravou dostaneme soustavu jednoduššího tvaru.

$$\begin{aligned} 1 &= ab \\ 2 &= bc \\ 3 &= cd \\ 4 &= de \\ 8 &= ef \\ 9 &= fg \\ 12 &= ga \end{aligned} \tag{S}$$

Je vidět, že žádné z čísel a, b, c, d, e, f, g nemůže být nula. Dále můžeme postupovat různými způsoby. Ukážeme si dva.

I. způsob. Z první rovnice vypočítáme $b = \frac{1}{a}$. Po dosazení do druhé rovnice vypočítáme $c = 2a$. Po dosazení do třetí rovnice vyjde $d = \frac{3}{2a}$. Postupným dosazováním do dalších rovnic dostaneme

$$e = \frac{8}{3}a, \quad f = \frac{3}{a}, \quad g = 3a, \quad a^2 = 4.$$

Z poslední rovnice $a^2 = 4$ vychází $a = 2$ nebo $a = -2$. Odtud již snadno vypočítáme ostatní neznámé.

$$a = 2, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = 4, \quad d = \frac{3}{4}, \quad e = \frac{16}{3}, \quad f = \frac{3}{2}, \quad g = 6$$

a čísla k nim opačná.

Zkouška výsledek potvrdí. Dosadte do původní soustavy sami.

II. způsob. Vynásobíme všechny rovnice soustavy mezi sebou a dostaneme:

$$(abcdefg)^2 = 2^8 \cdot 3^4$$

(Každá neznámá se vyskytla vždy ve dvou rovnicích soustavy (S).) Odtud dostaneme:

$$abcdefg = \pm 2^4 \cdot 3^2.$$

Dělíme-li tuto rovnici 1., 3. a 5. rovnicí soustavy (S), dostaneme ihned $g = \pm 6$. Podobně vypočítáme ostatní neznámé. Proveďte sami.

Pomocná úloha

Řešte soustavy rovnic:

$$a + b = 4 \quad a + b + c = 2 \quad a + b + c + d = 4$$

$$b + c = 1 \quad b + c + d = 1 \quad b + c + d + e = -4$$

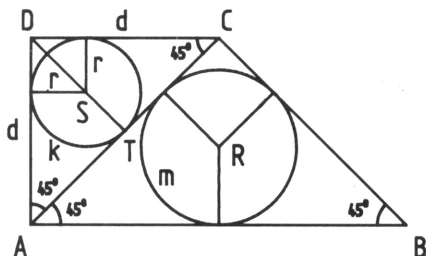
$$c + d = 0 \quad c + d + e = 5 \quad c + d + e + a = -3$$

$$d + e = 5 \quad d + e + a = 4 \quad d + e + a + b = -1$$

$$e + a = 4 \quad e + a + b = 3 \quad e + a + b + c = 0$$

Řešení úlohy Z8–I–5 (str. 27)

Daný lichoběžník je znázorněn na obrázku 7, kde je zvoleno označení $|AD| = |DC| = d$ a poloměry vepsaných kružnic r a R .



Obr. 7

Trojúhelník ABC je podle věty *uu* podobný trojúhelníku ACD . Poměr podobnosti

$$P: \quad \triangle ACD \rightarrow \triangle ABC$$

je zřejmě

$$|AC| : |AD| = d\sqrt{2} : d = \sqrt{2} : 1 = \sqrt{2}.$$

Proto pro poloměry R, r vepsaných kružnic platí $R : r = \sqrt{2} : 1$ neboli $R = r\sqrt{2}$ a pro obsahy ohraničené těmito kružnicemi dostaneme

$$\pi R^2 = \pi (r\sqrt{2})^2 = 2\pi r^2.$$

Je tedy obsah většího kruhu dvakrát větší než obsah menšího kruhu. Proto stačí vypočítat obsah menšího kruhu. Podle obrázku 7 je:

$$|DT| = |DS| + |ST| = r\sqrt{2} + r = r(\sqrt{2} + 1)$$

$$|DT| = d \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Porovnáním vypočítáme

$$r = \frac{d}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}.$$

Obsah menšího kruhu je

$$S_r = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{2(3 + 2\sqrt{2})} \doteq 0,27d^2.$$

Obsah většího kruhu je

$$S_R = 2 \cdot S_r = \frac{\pi d^2}{3 + 2\sqrt{2}} \doteq 0,54d^2.$$

Pomocné úlohy

1. Do rovnostranného trojúhelníku ABC je vepsán kruh K . Další kruh L se dotýká stran AB , AC a kruhu K (vně). Obsah kruhu L je 2 cm^2 . Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC . (Úloha Z8–I–1 z 37. ročníku MO).

2. Je dán dutý válec V s kruhovou podstavou o průměru d a výšce v ; $d = v = 10\text{ cm}$. Do tohoto válce je vepsána koule K s průměrem d . Najděte poloměr největší koule L , která se dotýká koule K vně a podstavy i pláště válce V . (Úloha Z8–II–3 ze 37. ročníku MO.)

Řešení úlohy Z8–I–6 (str. 27)

I. způsob. Úlohy tohoto typu často řešíme tak, že trojčlen na levé straně rovnice doplníme tak, aby se dal rozložit na součin. Proto přičteme k oběma stranám rovnice číslo 1. Na levé straně pak vznikne součin dvou dvojčlenů.

$$ab + a + b + 1 = 1990$$

$$(a + 1)(b + 1) = 1990$$

Číslo 1990 rozložíme na součin dvou činitelů větších než 1 (neboť a , b mají být celá kladná čísla).

$$1990 = 2 \cdot 995 = 5 \cdot 398 = 10 \cdot 199$$

Výsledky udává tabulka:

a	1	4	9	198	397	994
b	994	397	198	9	4	1

II. způsob. Z dané rovnice vypočítáme např. a :

$$\begin{aligned}a(b+1) &= 1989 - b \\a &= \frac{1989 - b}{b+1} \quad (b+1 \neq 1)\end{aligned}$$

Nyní provedeme úpravu připomínající převod nepravého zlomku na smíšené číslo:

$$a = \frac{1990 - (b+1)}{b+1} = \frac{1990}{b+1} - 1$$

Čitatele jsme upravili tak, abychom mohli daný výraz rozepsat na dva zlomky, z nichž jeden můžeme krátit $b+1$. V našem případě jsme v čitateli přičetli k menšenci i menšiteli číslo 1. Vidíme, že $b+1$ musí být dělitelem čísla 1990 a zároveň musí být větší než 1 (aby $b > 0$). Dostaneme možnosti:

$$b+1 = 2, 5, 10, 199, 398, 995, 1990$$

Další postup je už zřejmý. Výsledky jsou stejné jako při řešení úlohy prvním způsobem.

Pomocné úlohy

1. Určete všechna přirozená čísla a, b , pro která má výraz

$$\frac{1989}{1 \cdot ab + 9 \cdot a + 8 \cdot b + 9}$$

celočíslnou hodnotu.

2. Délky stran pravoúhlého trojúhelníku jsou vyjádřeny přirozenými čísly a jedna odvěsna má délku 15. Zjistěte

všechny pravoúhlé trojúhelníky s uvedenými vlastnostmi.
(Úloha Z8-I-2 z 35. ročníku MO).

ŘEŠENÍ ÚLOH II. KOLA

Řešení úlohy Z8-II-1 (str. 28)

Délky stran daného obdélníku označme a , b . Nový obdélník má délky stran $a + 4$, $b - 5$. Podle podmínky úlohy pro jeho obsah platí:

$$2ab = (a + 4)(b - 5)$$

Po úpravě dostaneme:

$$ab - 4b + 5a = -20 \quad (\text{R})$$

Dále můžeme postupovat různými způsoby; ukážeme dva.

I. způsob. Trojčlen na levé straně rovnice (R) doplníme a rozložíme na součin:

$$ab - 4b + 5a - 20 = -40$$

$$(a - 4) \cdot (b + 5) = -40$$

Řešení najdeme rozkladem čísla -40 na dva činitele. Vzhledem k tomu, že musí být $a > 0$, $b > 0$, vyplývají pro tyto

činitele podmínky:

$$\begin{array}{ll} a > 0 & b > 0 \\ a - 4 > -4 & b + 5 > 5 \end{array}$$

Jsou dvě možnosti:

$$(-2) \cdot 20 = (-1) \cdot 40 = -40$$

Zkouškou ověříme, že v 1. případě mají obdélníky obsahy 30 a 60, v 2. případě 105 a 210.

II. způsob. Z rovnice (R) vypočítáme např. a .

$$\begin{aligned} a(b + 5) &= 4b - 20 \\ a &= \frac{4b - 20}{b + 5} \end{aligned}$$

Zlomek upravíme tak, abychom mohli aspoň částečně krátit dvojčlenem $b + 5$.

$$a = \frac{4(b + 5) - 40}{b + 5} = 4 - \frac{40}{b + 5}$$

Odtud vidíme, že $b + 5$ musí dělit číslo 40 a zároveň musí být $b + 5 > 0$. (Proč?) Dostaneme možnosti

$$b + 5 = 8, 10, 20, 40$$

neboli

$$b = 3, 5, 15, 35.$$

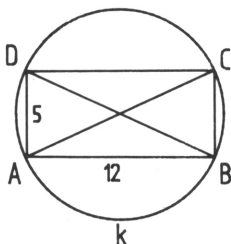
Odtud plyne

$$a = -1, 0, 2, 3.$$

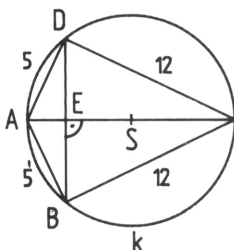
Protože a musí být kladné, dostáváme právě dvě řešení, která se shodují s výsledky získanými při prvním způsobu řešení.

Řešení úlohy Z8–II–2 (str. 28)

Shodné strany hledaných čtyřúhelníků mohou být buď sousední, nebo protější; obr. 8a, b.



Obr. 8a



Obr. 8b

V prvním případě dostaneme obdélník, ale ten má shodné úhlopříčky, což odporuje podmínkám úlohy. Zbývá druhý případ (obr. 8b). Trojúhelníky ABC a ADC jsou podle věty (sss) shodné, a tedy souměrně sdružené podle společné strany AC . V této souměrnosti jsou body A , C samodružné a obrazem bodu B je bod D . Kružnice k je proto v této souměrnosti samodružná, proto její střed leží na ose AC . Podle Thaletovy věty jsou trojúhelníky ACB a ACD pravoúhlé.

Podle Pythagorovy věty z obou pravoúhlých trojúhelníků ABC a ADC dostaneme

$$|AC|^2 = 5^2 + 12^2$$

neboli

$$|AC| = 13 \text{ cm.}$$

Délku druhé úhlopříčky BD vypočítáme jako dvojnásobek výšky v pravoúhlého trojúhelníku ACD k přeponě AC . Využijeme vzorce pro obsah trojúhelníku

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 \text{ cm}^2$$

a

$$S = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot v \text{ cm}^2.$$

Odtud porovnáním pravých stran vyjde

$$v = \frac{60}{13} \text{ cm} \doteq 4,6 \text{ cm.}$$

Úhlopříčka BD má tedy délku

$$|BD| = \frac{120}{13} \text{ cm} \doteq 9,2 \text{ cm.}$$

Poznámka. Výšku v lze vypočítat také pomocí podobnosti trojúhelníků ABE a ABC , ze které plyne

$$\frac{v}{2} : 5 = 12 : 13.$$

Řešení úlohy Z8-II-3 (str. 28)

Aby číslo bylo násobkem každého z čísel 2, 3, 4, 5, 6, 7, musí být násobkem jejich nejmenšího společného násobku, tj. násobkem čísla $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$. Odtud vidíme, že musí být

sudým násobkem čísla 10. Protože má být zapsáno jen pomocí číslic 0 a 1, musí mít na místě jednotek a desítek 0. Na místě stovek však musí mít 1, jinak by bylo dělitelné osmi a nebylo by nejmenším číslem s požadovanou vlastností. (Číslo desetkrát menší by bylo také dělitelné čísly 2, 3, 4, 5, 6, 7.) Hledané číslo má tedy tvar ...100.

Protože má být hledané číslo násobkem 3, musí být počet jedniček v jeho zápisu také násobkem 3. Budeme nejdříve zkoumat čísla zapsaná třemi jedničkami. Uvedeme je podle velikosti od nejmenšího.

$$\begin{aligned} 11\ 100 : 7 &= 1\ 585 \text{ (zb. 5)} \\ 110\ 100 : 7 &= 15\ 728 \text{ (zb. 4)} \\ 101\ 100 : 7 &= 14\ 442 \text{ (zb. 6)} \\ 1\ 001\ 100 : 7 &= 143\ 014 \text{ (zb. 2)} \\ 1\ 010\ 100 : 7 &= 144\ 300 \end{aligned}$$

Hledané číslo je tedy 1 010 100.

Poznámka. Při vyšetřování dělitelnosti čísel číslem 7 lze využít i méně známý znak dělitelnosti číslem 7. Seznámíme vás s ním.

Znak dělitelnosti číslem 7

Dané číslo rozdělíme od pravé strany na skupiny po dvou číslicích. Například:

$$2 \mid 03 \mid 11 \mid 24$$

Čísla zapsaná těmito skupinami násobíme odprava postupně čísly 1, 2, 4, 1, 2, 4 atd. Tyto součiny pak sečteme. Je-li součet násobkem 7, je i dané číslo násobkem 7. V opačném případě

není násobkem 7. V našem příkladu tedy počítáme:

$$\begin{array}{cccc}
 2 & | & 03 & | & 11 & | & 24 \\
 \downarrow \cdot 1 & & \downarrow \cdot 4 & & \downarrow \cdot 2 & & \downarrow \cdot 1 \\
 2 & + & 12 & + & 22 & + & 24 = 60
 \end{array}$$

Dostali jsme číslo, které není násobkem 7, a tedy ani dané číslo není násobkem 7. (Ověřte to sami dělením.)

Důkaz tohoto znaku dělitelnosti naznačíme na našem příkladu, ale použitá úvaha má obecnou platnost. Číslo 2031124 rozložíme podle sudých mocnin čísla 10.

$$2\ 03\ 11\ 24 = 2 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^4 + 11 \cdot 10^2 + 24 \quad (\text{R})$$

Nyní sudé mocniny čísla 10 rozložíme na nejbližší menší násobek 7 a zbytek.

$$10^6 = 7 \cdot 142\,857 + 1$$

$$10^4 = 7 \cdot 1\,428 + 4$$

$$10^2 = 7 \cdot 14 + 2$$

Rozklad (R) můžeme tedy přepsat do tvaru:

$$\begin{aligned}
 2\ 03\ 11\ 24 &= 2 \cdot (7 \cdot 142\,857 + 1) + 3 \cdot (7 \cdot 1\,428 + 4) + \\
 &+ 11 \cdot (7 \cdot 14 + 2) + 24
 \end{aligned}$$

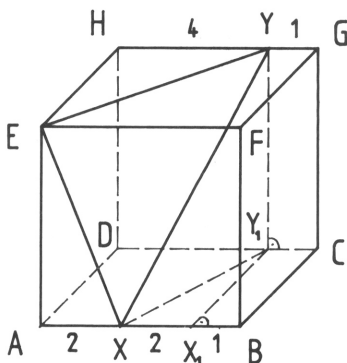
Rozklad upravíme na dva sčítance, z nichž jeden bude násobek 7.

$$\begin{aligned}
 2\ 03\ 11\ 24 &= [7 \cdot (2 \cdot 142\,857 + 3 \cdot 1\,428 + 11 \cdot 14)] + \\
 &+ (\boxed{2} \cdot 1 + \boxed{3} \cdot 4 + \boxed{11} \cdot 2 + \boxed{24})
 \end{aligned}$$

(Všimněte si, že skupiny v rámečkách jsou skupiny, na které jsme rozdělili dané číslo.) Protože první sčítanec je násobek 7, je dané číslo násobkem 7, právě když je i druhý sčítanec násobkem 7. Ale druhý sčítanec dostaneme tak, jak je popsáno ve znaku dělitelnosti. Zkuste si sami na několika příkladech ověřit znak dělitelnosti sedmi.

Řešení úlohy Z8-II-4 (str. 28)

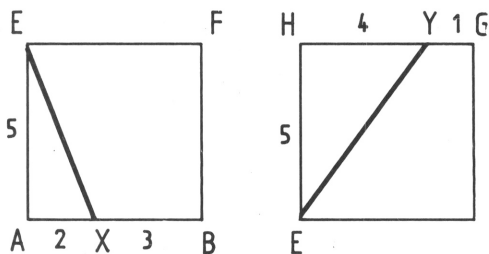
I. způsob — grafickou konstrukcí. Daná krychle i s trojúhelníkem EXY je znázorněna na obr. 9.



Obr. 9

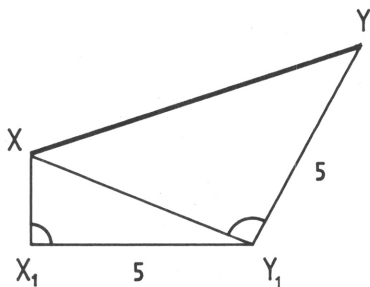
Strany EX a EY trojúhelníku EXY leží ve stěnách $ABFE$ a $EFGH$. Jejich skutečné délky zjistíme na obrázku 10 (str. 52).

Nyní zbývá strana XY . Na obrázku 9 vyznačíme dva pomocné pravoúhlé trojúhelníky $XY Y_1$ a $XY_1 X_1$. Bod Y_1 je



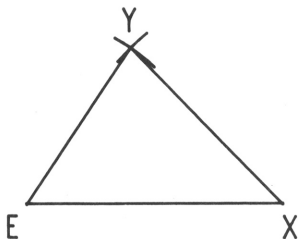
Obr. 10

patou kolmice z bodu Y na hranu DC a bod X_1 je patou kolmice z bodu Y_1 na hranu AB . Délku strany XY zjistíme tak, že postupně sestrojíme trojúhelníky XX_1Y_1 a XY_1Y (obr. 11). Využijeme toho, že přepona prvního trojúhelníku XX_1Y_1 je zároveň odvěsnou druhého trojúhelníku XY_1Y . Trojúhelník EXY nyní můžeme sestrojit ze tří stran.



Obr. 11

(Konstrukce (*sss*) — obr. 12)



Obr. 12

II. způsob — konstrukce na základě výpočtu. Vypočítáme délky stran EX a EY trojúhelníku EXY podle obrázku 9 nebo 10 z pravoúhlých trojúhelníků AEX a EHY . Dostaneme:

$$|EX| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}, \quad |EY| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$$

Délku třetí strany XY vypočítáme ve dvou krocích z pravoúhlých trojúhelníků XX_1Y_1 a XY_1Y (obr. 9 a 11).

$$|XY_1| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}, \quad |XY| = \sqrt{29 + 5^2} = \sqrt{54}$$

Z vypočítaných délek stran můžeme trojúhelník EXY sestavit. Pokud délky zaokrouhlíme, například

$$|EX| = \sqrt{29} \doteq 5,4, \quad |EY| = \sqrt{41} \doteq 6,4, \quad |XY| = \sqrt{54} \doteq 7,3$$

je konstrukce (z teoretického hlediska) jen přibližná.

ŘEŠENÍ ÚLOH III. KOLA

Řešení úlohy Z8–III–1 (str. 29)

Hledané číslo má být dělitelné číslem 72, a tedy i 9 a 8. Proto musí být jeho ciferný součet násobek devíti a poslední trojčíslí násobek osmi. Nejdříve budeme vyšetřovat čísla s cifernými součty 9, 18, 27, ..., která se dají zapsat pomocí 4 a 7. Budeme rozkládat tyto násobky devíti na sčítance jedné nebo více čtyřek a jedné nebo více sedmiček.

9 nelze rozložit na sčítance 4 a 7.

$18 = 7 + 7 + 4$, ale čísla 774, 747, 477 nejsou násobky osmi.

$27 = 7 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$ (jiná možnost není). Z trojčiferných čísel sestavených z číslic 7, 4, 4 je násobkem osmi jen 744. Číslo 444 744 je tedy násobek 72. Zbývá dokázat, že je nejmenší.

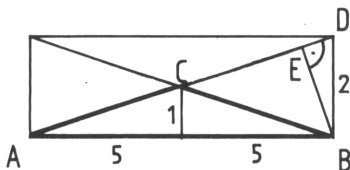
$36 = 7 + 7 + 7 + 7 + 4 + 4$ (jiná možnost rozkladu není). Z těchto číslic však dostaneme větší číslo než 444 744.

$45 = 7 + 7 + 7 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$ (jiná možnost rozkladu není). Z těchto číslic dostaneme ještě větší číslo.

Čísla s cifernými součty 54, 63, ... jsou všechna větší než nalezené číslo 444 744. Nejmenší hledané číslo je tedy 444 744.

Řešení úlohy Z8–III–2 (str. 29)

Snadno zjistíme, že stačí sestavit rovnoramenný trojúhelník, který má základnu dostatečně dlouhou. Čím delší je jeho základna, tím jsou kratší jeho výšky. Úloha má proto nekonečně mnoho řešení. Jedno je na obr. 13, kde pro jednoduchost vycházíme z obdélníku o stranách dlouhých 10 cm a 2 cm. Trojúhelník má obsah 5 cm^2 a výšku ke straně AB dlouhou 1 cm. Výška k ramenu AC je rovna délce úsečky EB , ale to je odvěsna pravoúhlého trojúhelníku BED , a proto je kratší než přepona BD , tzn. $|EB| < |BD| = 2 \text{ cm}$. Výšku BE je možno také vypočítat. Výpočet proveďte sami.



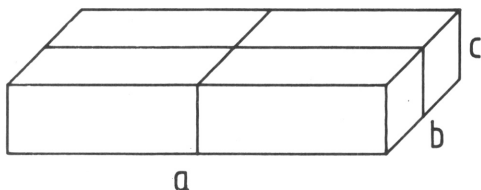
Obr. 13

Řešení úlohy Z8–III–3 (str. 29)

Z podmínek pro objem krabice a délku provázku dostaneme (obr. 14, str. 56):

$$abc = 1764$$

$$a + b + 2c = 47 \quad (\text{polovina délky provázku}) \quad (\text{R})$$



Obr. 14

Číslo 1 764 musíme rozložit na činitele a, b, c ($a > b > c$) tak, aby platila rovnost (R). Nejdříve rozložíme číslo 1 764 na součin prvočísel:

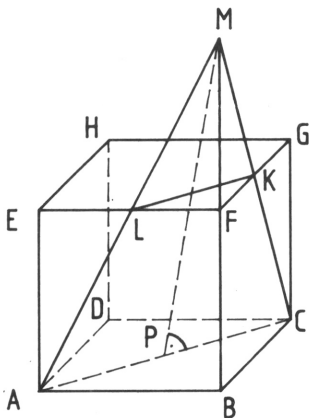
$$1\,764 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$$

Odtud vhodným sdružením činitelů dostaneme možnosti pro a, b, c . Z rovnosti (R) plyne, že $a, b < 47$. Proto pro a, b, c mohou nastat pouze možnosti uvedené v tabulce, ve které zároveň vyhodnotíme, zda je splněna podmínka (R).

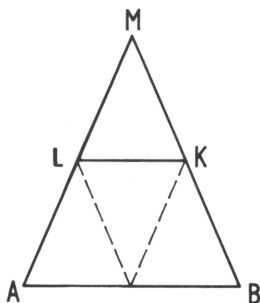
a	42	42	42	28	28	21	21	18
b	21	14	7	21	9	12	14	14
c	2	3	6	3	7	7	6	7
$a + b + 2c$	67	62	61	55	51	47	47	46
Platí (R)	ne	ne	ne	ne	ne	<u>ano</u>	<u>ano</u>	ne

Jsou dvě řešení: 21 cm, 12 cm, 7 cm,
21 cm, 14 cm, 6 cm.

Situace je znázorněna na obr. 15. Protože je F středem úsečky BM , jsou úsečky FL a FK střední příčky trojúhelníků ABM a BCM . Z toho plyne, že i LK je střední příčka trojúhelníku ACM . Proto je čtyřúhelník $ACKL$ lichoběžník. Jeho obsah můžeme počítat různými způsoby. Zde využijeme toho, že se rovná $\frac{3}{4}$ obsahu trojúhelníku ACM . Je to zřejmé z obr. 16, kde trojúhelník ACM je rozdělen středními příčkami na čtyři shodné trojúhelníky, z nichž tři tvoří lichoběžník $ACKL$.



Obr. 15



Obr. 16

Úsečka AC (obráz. 15) je úhlopříčka čtverce o straně $a = 6$ cm, proto je

$$|AC| = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$$

Z trojúhelníku ABM dostaneme pomocí Pythagorovy věty

$$|AM| = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5a^2} = \sqrt{5 \cdot 36} = 6\sqrt{5}.$$

Výška trojúhelníku ACM se rovná odvěsně pravoúhlého trojúhelníku APM . Podle Pythagorovy věty je tedy

$$|MP|^2 = |AM|^2 - \left(\frac{1}{2}|AC|\right)^2 = (6\sqrt{5})^2 - (3\sqrt{2})^2.$$

Po úpravě dostaneme

$$|MP|^2 = 9^2 \cdot 2, \quad |MP| = 9\sqrt{2}.$$

Obsah trojúhelníku ACM je

$$S_T = \frac{1}{2}|AC| \cdot |MP| = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 9\sqrt{2} = 54$$

a obsah lichoběžníku $ACKL$ je

$$S_L = \frac{3}{4}S_T = \frac{3}{4} \cdot 54 = \frac{1}{2} \cdot 81.$$

Obsah lichoběžníku je $\frac{1}{2} \cdot 81 \text{ cm}^2 = 40,5 \text{ cm}^2$.

Kategorie Z7

ÚLOHY I. KOLA

(Řešení úloh na str. 62)

Z7 – I – 1

Nahradte hvězdičky takovými čísly, aby se součty libovolných tří po sobě jdoucích čísel postupně zvětšovaly o 8.

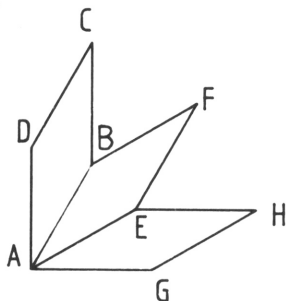
*, *, 835, *, *, *, 829, *, *, *, *, *, *, 843

Z7 – I – 2

Najděte všechna čísla menší než 344, která mají právě čtyři dělitele.

Z7 – I – 3

Určete velikost úhlu, který svírají přímky DC a GH (obr. 17, str. 60), jestliže úhel DAG je pravý a čtyřúhelníky $ABCD$, $AEFB$ a $AGHE$ jsou shodné kosočtverce (ale ne čtverce).



Obr. 17

Z7 – I – 4

V šesticiferném čísle 523*** jsou zatajeny poslední tři číslice. Zjistěte tyto číslice, jestliže víte, že dané číslo je dělitelné 7, 8 a 9. Najděte všechna řešení.

Z7 – I – 5

Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$) s vnitřním úhlem $\alpha = 60^\circ$. Úhlopříčka AC je osou úhlu α . Obsah lichoběžníku je roven 78 cm^2 . Vypočítejte obsah trojúhelníku ACD .

Z7 – I – 6

Čísla v řádcích tabulky udávají délky úseček a , b , c vy-

jádřené v milimetrech.

a	b	c
60	17	9
61	19	14
62	21	19
63	23	24
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Zjistěte, ve kterých řádcích tabulky udávají čísla délky stran některého trojúhelníku. Najděte všechny možnosti.

ÚLOHY II. KOLA

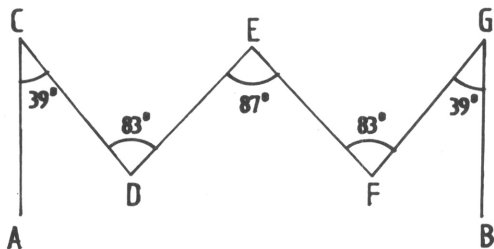
(Řešení úloh na str. 71)

Z7 – II – 1

Najděte oba násobky čísla 6, které mají právě 10 dělitelů.

Z7 – II – 2

Zjistěte, zda jsou přímky AC a BG rovnoběžné nebo různoběžné, obr. 18.



Obr. 18

Z7 – II – 3

Je dána následující posloupnost čísel

400, 130, 391, 130, 382, 130, 373, 130, ..., 130, 4, 130.

Kolikrát se v této posloupnosti vyskytují vedle sebe tři čísla, která jsou délkami stran rovnoramenného trojúhelníku?

ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA

Řešení úlohy Z7-I-1 (str. 59)

V dané posloupnosti nahradíme hvězdičky písmeny.

$a, b, 835, c, d, e, 829, f, g, h, i, j, k, 843.$ (P)

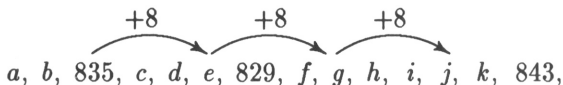
Označíme-li libovolná čtyři po sobě jdoucí čísla v posloupnosti (P) písmeny v, x, y, z , pak pro ně platí: součet $x+y+z$ je o 8 větší než součet $v+x+y$, tj.

$$v+x+y+8 = x+y+z.$$

Odečteme-li na obou stranách součet $x+y$, dostaneme

$$v+8 = z.$$

To znamená, že v každé čtveřici po sobě jdoucích čísel je poslední číslo o 8 větší než první číslo. Postupujeme-li v posloupnosti (P) od čísla 835 podle šipek doprava



můžeme vypočítat $e = 843$, $g = 851$, $j = 859$. Postupujeme-li podobně od čísla 829 postupně doleva i doprava, vypočítáme $c = 821$, $a = 813$, $h = 837$, $k = 845$. Podobně z čísla 843 při postupu doleva dostaneme $i = 835$, $f = 827$, $d = 819$, $b = 811$. Posloupnost (P) má tedy tvar

$$\begin{aligned} &813, 811, 835, 821, 819, 843, 829, \\ &827, 851, 837, 835, 859, 845, 843. \end{aligned}$$

Pomocná úloha

Odhadněte pravidla, podle kterých se v daných posloupnostech mění číslo. Nahraďte hvězdičky čísly a napište vzorec pro n -tý člen. (Řešení na str. 70.)

- a) 1, 4, 9, *, *, 36, ...
 b) 2, 5, 8, 11, *, *, ...
 c) 1, 1, 2, 3, 5, 8, *, *, 34, ...
 d) *, *, 10, 18, 33, 56, *, 155, *, ...

Řešení úlohy Z7-I-2 (str. 59)

Snadno zjistíme, že číslo (označme ho n) má právě čtyři dělitele, když má buď tvar

$$n = p^3, \quad \text{kde } p \text{ je prvočíslo,} \quad (\text{A})$$

nebo tvar

$$n = p \cdot q, \quad \text{kde } p, q \text{ jsou různá prvočísla.} \quad (\text{B})$$

Čísla tvaru (A) mají právě tyto dělitele: 1, p , p^2 , p^3 . Čísla tvaru (B) mají právě tyto dělitele 1, p , q , $p \cdot q$.

Všechna hledaná čísla se čtyřmi děliteli, která jsou menší než 344, najdeme postupně. Čísla tvaru (A) jsou

$$8 = 2^3, \quad 27 = 3^3, \quad 125 = 5^3, \quad 343 = 7^3.$$

Číslo 343 je tedy největší z hledaných čísel. Čísla ve tvaru (B) jsou

2·3	2·5	2·7	2·11	2·13	2·17		2·167	(38 čísel)
3·5	3·7	3·11	3·13	3·17		3·115	(28 čísel)	
5·7	5·11	5·13	5·17		5·	67	(16 čísel)	
7·11	7·13	7·17		7·	47	(11 čísel)		
11·13	11·17		11·	31	(6 čísel)			
13·17	13·19	13·	23	(3 čísla)				
17·	19	(1 číslo)						

Číslo tvaru (B) je dohromady 103. Všechny hledané čísel je 107.

Pomocná úloha

Najděte všechny dělitele čísel:

$$16 = 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2, \quad 100 = 2^2 \cdot 5^2 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5,$$

$$1\,400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

Přesvědčte se, že číslo 16 má 5 dělitelů, číslo 100 má $3 \cdot 3 = 9$ dělitelů a číslo 1 400 má $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ dělitelů. Zjistěte, jak tyto počty souvisejí s rozklady daných čísel na prvočísla. (Odpověď na poslední úkol najdete na str. 70).

Řešení úlohy Z7-I-3 (str. 59)

Vyznačíme přímky, na kterých leží strany AB , CD a AE , GH (obr. 19 na str. 66). Vznikly dvě dvojice souhlasných úhlů α , β a β , γ , které mají stejné velikosti:

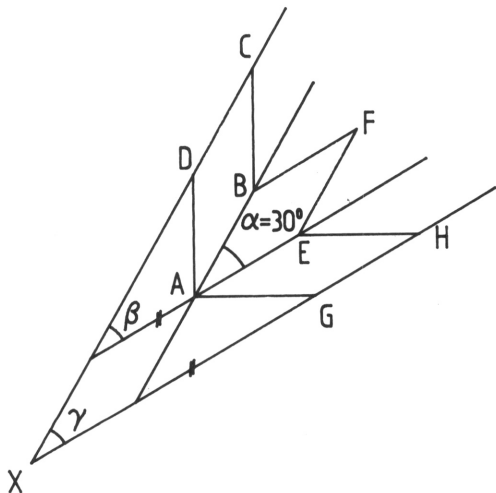
$$\alpha = \beta, \quad \beta = \gamma$$

Proto je $\gamma = \alpha$.

Protože $ABCD$, $AEFB$ a $AGHE$ jsou shodné kosočtverce a úhel DAG je pravý, musí mít všechny tři kosočtverce při vrcholu A úhel velikosti 30° , tzn. $\alpha = 30^\circ$, a tedy i $\gamma = 30^\circ$. Přímky DC a GH svírají tedy úhel velikosti 30° .

Pomocná úloha

Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Určete úhel, který svírají přímky AB a CD . Opakujte úlohu pro pravidelný osmiúhelník $ABCDEFGH$.



Obr. 19

Řešení úlohy Z7-I-4 (str. 60)

Hledané číslo

523 ***

má být dělitelné sedmi, osmi i devíti. Protože čísla 7, 8, 9 jsou nesoudělná, musí být hledané číslo násobkem jejich součinu $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$.

Dělením čísla 523 000 číslem 504 dostaneme

$$523\,000 : 504 = 1\,037 \quad (\text{zbytek } 352)$$

neboli $523\,000 = 504 \cdot 1\,037 + 352$. Chceme-li dostat k číslu 523 000 nejbližší větší násobek 504, musíme k němu přičíst rozdíl $504 - 352 = 152$. Tedy nejbližší větší násobek 504

k číslu 523 000 je 523 125. Další násobky 504 dostaneme postupným přičítáním 504.

$$\begin{array}{ccccccc} & + 504 & & + 504 & & + 504 & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\ 523\,152 & & 523\,656 & & 524\,160 & & \dots \end{array}$$

Dané úloze vyhovují jen první dvě čísla.

Pomocné úlohy

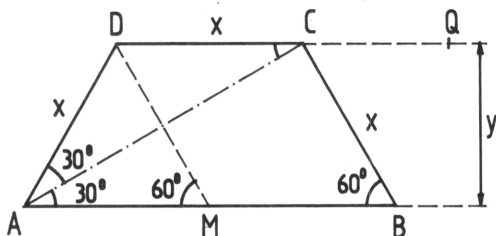
1. Najděte nejmenší číslo, které je násobkem čísel 5, 8, 11.
2. Najděte všechny násobky čísla 27, které jsou větší než 1 500 a menší než 1 700.

Řešení úlohy Z7-I-5 (str. 60)

Lichoběžník $ABCD$ znázorníme na obr. 20. Délky ramen označíme x . Na obrázku je znázorněna úsečka DM rovnoběžná s ramenem CB . Vznikl rovnostranný trojúhelník AMD (má 2 úhly velikosti 60°). Proto je $|AM| = x$.

Protože úhly BAC a DCA jsou střídavé, je velikost úhlu DAC rovna 30° . Trojúhelník ACD je rovnoramenný (má 2 úhly velikosti 30°). Odtud je vidět, že základna DC lichoběžníku $ABCD$ má délku rovnou x . Z rovnoběžníku $MBCD$ plyne i $|MB| = x$. Protože $|AM| = |MB| = x$, je M středem základny AB .

Doplníte-li na obrázku 20 úsečku MC (provedte sami), zjistíte, že lichoběžník $ABCD$ je úsečkami MC a MD rozdělen na tři shodné rovnostranné trojúhelníky. Jejich obsahy se tedy rovnají třetině obsahu daného lichoběžníku.



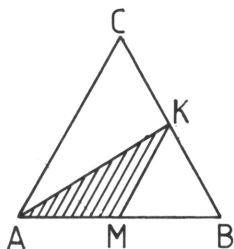
Obr. 20

Obsah trojúhelníku ACD se rovná polovině obsahu kosočtverce $AMCD$, tj. obsahu trojúhelníku AMD . Odtud vypočítáme, že obsah S trojúhelníku ACD je roven třetině obsahu lichoběžníku $ABCD$, tzn.

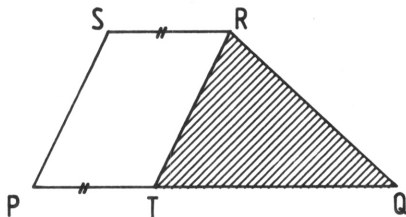
$$S = \frac{1}{3} 78 \text{ cm}^2 = 26 \text{ cm}^2.$$

Pomocná úloha

Zapište, jak velké části trojúhelníku ABC a lichoběžníku $PQRS$ jsou na obrázku 21a, b vyšrafovány, jestliže platí:



Obr. 21a



Obr. 21b

$$|AB| = |BC| = |AC|, \quad |AM| = |MB| = |BK|, \\ |PQ| = 3|PT|.$$

Řešení úlohy Z7-I-6 (str. 60)

V tabulce očísľujeme řádky číslý $n = 0, 1, 2, \dots$ a vyjádříme čísla a, b, c v závislosti na n .

$$a = 60 + n, \quad b = 17 + 2n, \quad c = 9 + 5n \quad (\text{T})$$

Aby čísla a, b, c udávala délky stran některého trojúhelníku, musí splňovat tři trojúhelníkové nerovnosti:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & a < b + c \\ & 60 + n < (17 + 2n) + (9 + 5n) \\ & 34 < 6n \\ & 5\frac{2}{3} < n \end{aligned}$$

Protože n je celé číslo, musí být $6 \leq n$.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & b < a + c \\ & 17 + 2n < (60 + n) + (9 + 5n) \\ & -52 < 4n \\ & -13 < n \end{aligned}$$

Tato nerovnost je splněna pro všechna nezáporná n ($n = 0, 1, 2, \dots$).

$$\text{c)} \quad c < a + b$$

$$9 + 5n < (60 + n) + (17 + 2n)$$

$$2n < 68$$

$$n < 34$$

Vidíme, že musí být

$$6 \leq n < 34.$$

Pro tato n udávají čísla (T) délky stran trojúhelníků. Těchto trojúhelníků je 28.

Řešení pomocné úlohy ze str. 63

n -tý člen posloupnosti a_n vypočítáme:

- a) $a_n = n^2$
- b) $a_n = 3n - 1$
- c) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (tj. součet dvou předcházejících členů)
- d) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 5$ (tj. součet dvou předcházejících členů zvětšený o 5)

Řešení pomocné úlohy ze str. 65

Nechť p , q , r jsou navzájem různá prvočísla. Potom čísla

- $n = p^a$ mají $(a + 1)$ dělitelů
- $n = p^a q^b$ mají $(a + 1)(b + 1)$ dělitelů
- $n = p^a q^b r^c$ mají $(a + 1)(b + 1)(c + 1)$ dělitelů
- atd.

Proto například číslo $16 = 2^4$ má 5 dělitelů, číslo $100 = 2^2 5^2$ má $3 \cdot 3 = 9$ dělitelů a číslo $1400 = 2^3 5^2 7$ má $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ dělitelů.

ŘEŠENÍ ÚLOH II. KOLA

Řešení úlohy Z7-II-1 (str. 61)

Hledané číslo x musí být dělitelné čísly 2 a 3. V prvočíselném rozkladu čísla x je tedy jedna nebo více dvojek a jedna nebo více trojek. Nechť je v tomto rozkladu m dvojek a n trojek. Číslo x je tedy násobek 2^m ($m \geq 1$) a také násobek 3^n ($n \geq 1$).

Číslo 2^m má $m + 1$ dělitelů; jsou to:

$$1, 2, 2^2, \dots, 2^m. \quad (\text{M})$$

Číslo 3^n má $n + 1$ dělitelů:

$$1, 3, 3^2, \dots, 3^n. \quad (\text{N})$$

Součin čísel 2^m , 3^n má $(m + 1)(n + 1)$ dělitelů, jsou to součiny čísel z posloupností (M) a (N). Číslo $x = 2^m \cdot 3^n$ má právě 10 dělitelů, je-li $(m + 1)(n + 1) = 10$. Proto je buď $m = 1$ a $n = 4$, nebo $m = 4$ a $n = 1$. Tedy

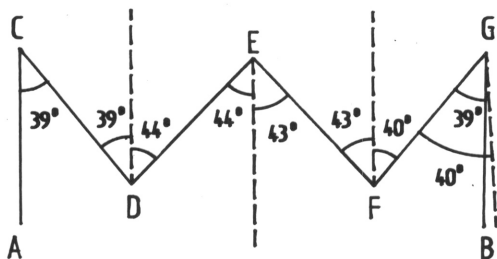
$$x = 2^4 \cdot 3 = 48 \quad \text{nebo} \quad x = 2 \cdot 3^4 = 162.$$

Ukážeme, že jiné číslo už úloze nevyhovuje. Je-li číslo x například součinem tří mocnin různých prvočísel $2^m \cdot 3^n \cdot p^r$, pak má $(m + 1)(n + 1)(r + 1)$ dělitelů (viz řešení pomocné úlohy k úloze Z7-I-2 na str. 65). Toto číslo je součin tří čísel větších než 1. Ale hledaná čísla mají mít 10 dělitelů a 10

lze rozložit jen na 2 činitele větší než 1. Podobně nevyhovuje ani žádné číslo, které je součinem čtyř a více různých prvočísel.

Řešení úlohy Z7-II-2 (str. 61)

Body D, E, F, G vedeme rovnoběžky s přímkou AC , na obrázku 22 jsou znázorněny čárkovanými čarami. Nyní využijeme toho, že vzniklé střídavé úhly musí mít stejné velikosti. Zapišeme je postupně do obrázku (zleva doprava).



Obr. 22

Střídavé úhly při vrcholech F, G mají velikost 40° . Protože velikost úhlu FGB je jen 39° , nemohou být přímky AC a BG rovnoběžné.

Řešení úlohy Z7-II-3 (str. 62)

V dané posloupnosti

400, 130, 391, 130, 382, 130, 373, 130, ..., 130, 4, 130 (P)

stojí na lichých místech čísla

$$400, 391, 382, 373, \dots, 4.$$

Sousední čísla mají rozdíl 9. Napíšeme-li je v opačném pořadí, dostaneme čísla

$$4, 13, 22, 31, \dots, 373, 382, 391, 400,$$

tj. čísla tvaru $4 + 9n$, kde $n = 0, 1, 2, \dots, 44$ (přesvědčte se). Zjistíme, zda mezi nimi není číslo 130, neboť v takovém případě by mezi rovnoramennými trojúhelníky byl i rovnostranný trojúhelník o stranách délky 130.

$$4 + 9n = 130$$

$$n = 14$$

Pro $n = 14$ dostáváme skutečně číslo $4 + 9n = \underline{130}$. V jeho okolí má posloupnost (P) (napsaná v opačném pořadí) tvar

$$\dots, 112, 130, 121, 130, \underline{130}, 130, 139, 130, 148, \dots$$

Ramena rovnoramenných trojúhelníků mají délku 130. Proto délka základny musí být menší než $2 \cdot 130 = 260$. Délky základen tedy mohou být jen čísla tvaru $4 + 9n$, pro něž platí

$$4 + 9n < 260$$

$$n < 28 \frac{4}{9},$$

tedy čísla, která dostaneme, když do výrazu $4+9n$ dosadíme za $n = 0, 1, 2, \dots, 28$. Těchto čísel je 29. Tedy 29 rovnoramenných trojúhelníků, mezi nimiž je i jeden rovnostranný trojúhelník. Jsou to trojúhelníky:

$$130, 4, 130, \quad 130, 13, 130, \quad 130, 22, 130, \dots$$

$$\dots, 130, 256, 130$$

Ramena jsou čísla 130, která stojí v posloupnosti (P) ob jedno číslo tvaru $4 + 9n$. Zbývají ještě dva rovnoramenné trojúhelníky, jejichž délky ramen jsou v posloupnosti (P) hned vedle sebe. Jsou to trojúhelníky s délkami stran

$$121, 130, 130 \quad \text{a} \quad 130, 130, 139.$$

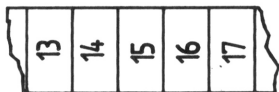
Celkem je tedy 31 rovnoramenných trojúhelníků, z nichž jeden je rovnostranný.

ÚLOHY I. KOLA

(Riešenia úloh na str. 79)

Z6 – I – 1

Na krajčírskom metri sú zapísané za sebou idúce čísla od 1 do 150. Nájdite takú najmenšiu časť krajčírskeho metra, aby súčin čísel zapísaných na tejto časti sa končil práve tromi nulami. Nájdite aspoň dve riešenia. (Súčin čísel na časti krajčírskeho metra, ktorá je znázornená na obr. 23, sa končí práve jednou nulou.)



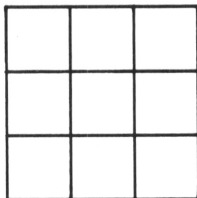
Obr. 23

Z6 – I – 2

Do tabuľky na obrázku 24a (str. 76) sme vpísali čísla 1, 2, 3, 4 tak, že súčet čísel zo susedných políčok je prvočíslo, teda: $1 + 2 = \underline{3}$, $1 + 4 = \underline{5}$, $2 + \underline{3} = 5$, $4 + 3 = \underline{7}$.

1	2
4	3

Obr. 24a



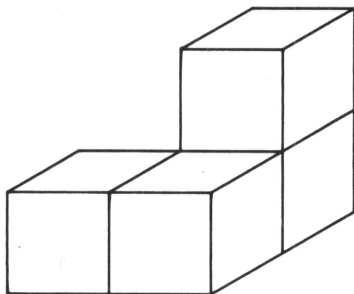
Obr. 24b

Peter tvrdí, že sa mu podarilo vpísať čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 do tabuľky na obrázku 24b (každé práve raz) tak, že súčet čísel z každých dvoch susedných políčok je prvočíslo. Nina tvrdí, že sa to nedá.

Kto z nich má pravdu? Svoj názor odôvodnite.

Z6 – I – 3

Zostrojte z jedinného kusa papiera sieť telesa z obrázku 25, ktoré je zložené zo štyroch zhodných kociek.



Obr. 25

Z6 – I – 4

Janko hovorí: „Naše telefónne číslo je pozoruhodné: 113 113.“ Miško mu odpovedal: „Aj naše telefónne číslo dostaneme tak, že napíšeme dve rovnaké trojciferné čísla za sebou...“ Janko ho prerušil: „Ani mi nemusíš hovoriť, aké máte číslo, a aj tak viem, že naše telefónne čísla majú spoločného deliteľa, ktorý je väčší ako 1 000.“

Nájdite tohto deliteľa a vysvetlite, prečo má Janko pravdu.

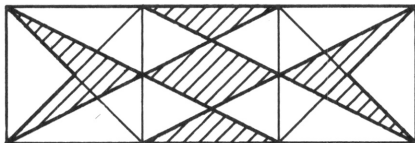
Z6 – I – 5

Za písmená P dosadzte párne číslice (nemusia byť všade rovnaké), za písmená N nepárne číslice (nemusia byť všade rovnaké) tak, aby vznikol pravdivý zápis násobenia. Nájdite aspoň jedno riešenie.

$$\begin{array}{r}
 P \ N \\
 \cdot \cdot \ N \ P \\
 \hline
 N \ N \ P \\
 P \ N \ N \\
 \hline
 P \ P \ P \ P
 \end{array}$$

Z6 – I – 6

Chodba je pokrytá tmavými a svetlými dlaždicami (obr. 26, str. 78). Je trikrát tak dlhá ako široká. Ktorými dlaždicami pokryli väčšiu plochu? Koľkokrát väčšiu?



Obr. 26

ÚLOHY II. KOLA

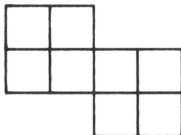
(Riešenia úloh na str. 85)

Z6 – II – 1

Z krajčírskeho metra nám zostal kus dĺžky pol metra. Boli na ňom čísla od 1 do 50. Kde treba tento kus rozstrihnúť na dve časti, aby súčin čísel na jednotlivých častiach končil rovnakým počtom núl? Nájdite všetky riešenia.

Z6 – II – 2

Ak odstrihneme na obrázku 27 vhodné dva štvorce, dostaneme sieť kocky. Nakreslite všetky možnosti.



Obr. 27

Štvorcová záhrada má strany dlhé 31 m. Máme 19 plotových dielov dĺžky 4 m a 16 dielov dĺžky 3 m. Zistite, koľko ktorých dielov treba použiť na oplotenie jednotlivých strán záhrady. Dve oplotenia, ktoré sa líšia len prehodením strán štvorca, alebo prehodením dielov na niektorej strane, považujeme za rovnaké. Nájdite dve rôzne oplotenia záhrady.

RIEŠENIA ÚLOH I. KOLA

Riešenie úlohy Z6-I-1 (str. 75)

Predpokladajme, že sme našli požadovanú časť krajčírskoho metra. Rozložme súčin čísel z tejto časti na prvočinitele. Nuly na konci súčinu čísel z tejto časti metra sú produktom súčinov dvojíc prvočiniteľov 2 a 5. Tri nuly na konci súčinu znamenajú, že v rozklade na prvočinitele musia byť aspoň tri 2 a aspoň tri 5. Teda súčin musí byť násobkom 8 a 125.

Skúsme, či požadovaná časť môže mať dĺžku 2 cm. Z dvoch susedných čísel môže byť najviac jedno deliteľné 5. Jedno z hľadaných čísel by teda muselo byť násobkom 125. Do 150 (možnosti krajčírskoho metra) je to len jediné číslo 125. K nemu susedné sú 124 a 126. Ani jedno z nich

nie je násobkom 8, takže úsek metra splňujúci podmienku úlohy musí byť väčší ako 2 cm.

Nech je dĺžky 3 cm. Z troch čísel idúcich za sebou môže byť najviac jedno násobkom 5, teda musí to byť číslo 125. Číslo 125 nie je násobkom 2, teda súčin druhých dvoch čísel z tejto trojice musí byť násobkom 8. Z možných čísel 123, 124, 126, 127 vyhovuje len dvojica 124, 126. Pre časť metra dĺžky 3 cm už zrejme ďalšie riešenie nie je. Pre dlhšie úseky by sme našli ďalšie „riešenia“, tie však nevyhovujú podmienke, že sú na najmenšej možnej časti krajčírskeho metra.

Riešenie úlohy Z6-I-2 (str. 75)

Uvážme najskôr, ktoré čísla môžu byť susedné (teda také, aby ich súčet bol prvočíslom). Potom

- s číslom 1 môžu susediť čísla 2, 4, 6 a iné nie,
- s číslom 2 môžu susediť čísla 1, 3, 5, 9 a iné nie,
- s číslom 3 môžu susediť čísla 2, 4, 8 a iné nie,
- s číslom 4 môžu susediť čísla 1, 3, 7, 9 a iné nie,
- s číslom 5 môžu susediť čísla 2, 6, 8 a iné nie,
- s číslom 6 môžu susediť čísla 1, 5, 7 a iné nie,
- s číslom 7 môžu susediť čísla 4, 6 a iné nie,
- s číslom 8 môžu susediť čísla 3, 5, 9 a iné nie,
- s číslom 9 môžu susediť čísla 2, 4, 8 a iné nie.

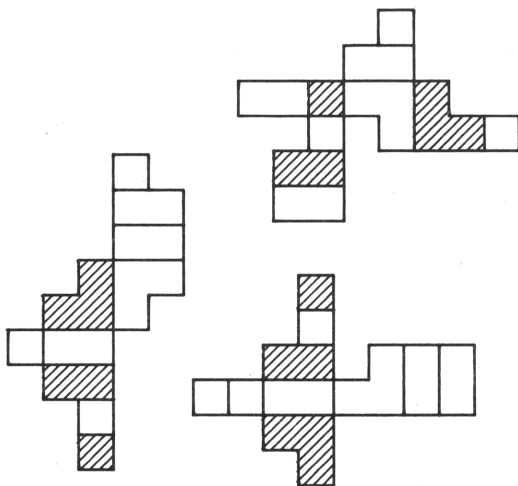
V strede tabuľky musí byť buď číslo 4, alebo číslo 2, pretože len tieto čísla môžu mať štyroch vhodných susedov. Číslo 7, nakoľko môže mať len dvoch susedov, musí byť v rohu tabuľky. Ale potom budú vedľa čísla 7 čísla 4 a 6. Takže číslo 4 nemôže byť v strede. Ale ani číslo 2 nemôže byť v strede,

nakolko by muselo susediť s číslom 4 (dokonca aj s číslom 6). Z toho už priamo plynie, že v strede nemôže byť pri danej podmienke nijaké z daných čísel a teda Petrovi sa nemohlo podariť vpísať do tabuľky čísla požadovaných vlastností.

Pravdu má Nina.

Riešenie úlohy Z6-I-3 (str. 76)

Úloha má veľa riešení. Niektoré sú na obr. 28.



Obr. 28

Riešenie úlohy Z6-I-4 (str. 77)

Každé číslo, ktoré je takto zapísané pomocou dvoch trojciferných čísel, možno zapísať ako trojciferné číslo krát tisíc plus toto trojciferné číslo. Napríklad:

$$376\,376 = 376 \cdot 1\,000 + 376,$$

ale to je rovné $376 \cdot 1\,001$.

Vo všeobecnosti, každé takéto číslo možno napísať ako

$$A \cdot 1\,000 + A = A \cdot 1\,001.$$

Teda každé číslo, ktoré možno v desiatkovej sústave zapísať dvomi rovnakými trojcifernými číslami za sebou, je deliteľné číslom 1 001.

Riešenie úlohy Z6-I-5 (str. 77)

Označme párne číslice $A, B, C, \dots$ nepárne $a, b, c, \dots$ ako na schématu:

$$\begin{array}{r} A \ a \\ \cdot \ b \ B \\ \hline c \ d \ C \\ D \ e \ f \\ \hline E \ F \ G \ H \end{array}$$

Rozdeľme si zapísaný súčin na dve časti I a II.

$$\begin{array}{rcl} \begin{array}{r} A \ a \\ \cdot \ b \ B \\ \hline c \ d \ C \\ D \ e \ f \\ \hline E \ F \ G \ H \end{array} & \text{(I)} & \begin{array}{r} A \ a \\ \cdot \ B \\ \hline c \ d \ C \end{array} & \text{(II)} & \begin{array}{r} A \ a \\ \cdot \ b \\ \hline D \ e \ f \end{array} \end{array}$$

V súčine I je $A \cdot B$ párne číslo a pritom c, d sú nepárne čísla. Preto súčin $a \cdot B$ musí mať nepárny počet desiatok, z čoho je vidieť, že $a > 1$. Vyskúšame možnosti pre B ; výsledok je v tabuľke:

a	3	5	7	9
B	4, 6	2, 6	2, 8	2, 4, 6, 8

Podobne zo súčinu II dostaneme:

a	3	5	7	9
b	5	3, 7	5	—

Teraz môžeme vyskúšať možnosti:

$$\begin{array}{l} \text{Pre } a = 3 \quad \begin{array}{r} A \quad 3 \\ 5 \quad 4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} A \quad 3 \\ 5 \quad 6 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Pre } a = 5 \quad \begin{array}{r} A \quad 5 \\ 3 \quad 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} A \quad 5 \\ 7 \quad 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} A \quad 5 \\ 3 \quad 8 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} A \quad 5 \\ 7 \quad 8 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Pre } a = 7 \quad \begin{array}{r} A \quad 7 \\ 5 \quad 2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} A \quad 7 \\ 5 \quad 8 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Pritom za A postupne dosadzujeme čísla 2, 4, 6, 8. Vyhovujú práve dve riešenia: $83 \cdot 54 = 4\,482$ a $65 \cdot 72 = 4\,680$.

Riešenie úlohy Z6-I-6 (str. 77)

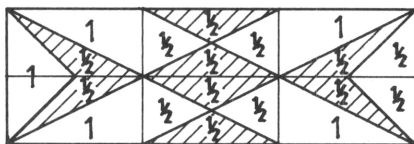
I. spôsob. Chodba sa skladá z troch štvorcov, každý s obsahom S . V každom krajnom štvorci majú pravouhlé svetlé trojuholníky spolu obsah $S/2$ a svetlý rovnoramenný

trojuholník obsah $S/4$. Svetlé trojuholníky v prostrednom štvorci majú spolu obsah $S/2$. Svetlá plocha spolu má obsah

$$\frac{3}{4}S + \frac{1}{2}S + \frac{3}{4}S = 2S.$$

Tmavej časti zostáva plocha obsahu S . Teda biela plocha má dvakrát väčší obsah.

II. spôsob. Rozdeľme si plochu na 2×6 štvorčekov (obr. 29).



Obr. 29

Čísla v obrázku určujú obsahy jednotlivých častí v štvorčekoch. Z toho ľahko zistíme, že tmavé dlaždice zaberajú plochu veľkosti $8 \cdot 0,5 = 4$ štvorčeky a biele dlaždice plochu veľkosti $6 \cdot 1 + 4 \cdot 0,5 = 8$ štvorčekov.

Svetlými dlaždičkami pokryli dvakrát väčšiu plochu ako tmavými.

Riešenie úlohy Z6-II-1 (str. 78)

Ak rozložíme súčin $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 50$ na prvočinitele, zistíme, že sa v ňom nachádza 12 pätiok, teda tento súčin sa bude končiť 12 nulami (pozri riešenie úlohy Z6-I-1). Takže súčin jednej časti sa musí končiť 6 nulami, z toho plynie, že v rozklade tejto časti musí byť 6 pätiok (dvojok tam určite bude dosť; prečo?). Ak začneme počítať päťky od 1, tak 6 pätiok napočítame po čísle 25. Teda najbližšie číslo, za ktorým môžeme končiť, je číslo 25. Avšak nakoľko aj ďalšie čísla 26, 27, 28, 29 neobsahujú v rozklade päťku, môžeme končiť aj za nimi. Úloha má teda 5 riešení.

Kus metra možno rozstrihnúť medzi 25. a 26., medzi 26. a 27., medzi 27. a 28., medzi 28. a 29. a medzi 29. a 30. centimetrom.

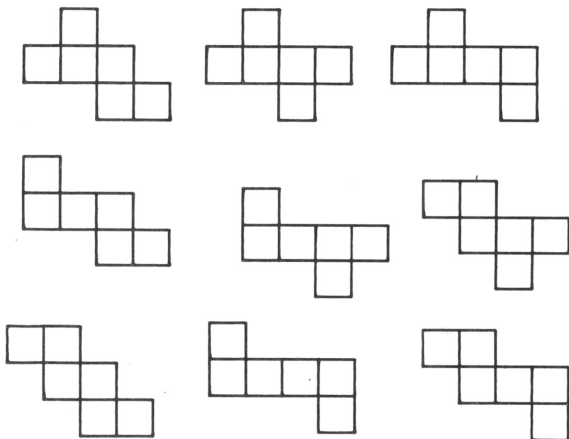
Riešenie úlohy Z6-II-2 (str. 78)

Označme si štvorčky ako na obrázku 30.

1	2		
3	4	5	6
		7	8

Obr. 30

Sieť dostaneme odobratím dvoch štvorčekov tak, že jeden bude z trojice štvorčekov označených na obrázku číslami 1, 2, 3 a druhý bude z trojice štvorčekov označených číslami 6, 7, 8. Všetkých 9 možností je na obrázku 31.



Obr. 31

Riešenie úlohy Z6-II-3 (str. 79)

Potrebuje oplotiť $31 \text{ m} \cdot 4 = 124 \text{ m}$. Spolu máme $19 \cdot 4 \text{ m} + 16 \cdot 3 \text{ m} = 124 \text{ m}$ dielov. Teda musíme použiť všetky diely. Číslo 31 (dĺžka strany záhrady) možno rozložiť

pomocou násobkov 4 a 3 (dĺžky dielov) takto:

$$31 = 1 \cdot 4 + 9 \cdot 3 \quad (\text{A})$$

$$= 4 \cdot 4 + 5 \cdot 3 \quad (\text{B})$$

$$= 7 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \quad (\text{C})$$

Máme 19 štvormetrových dielov. Z nich na jednu stranu (podľa predchádzajúcich uvažovaných možností (A), (B), (C)) možno dať 1, 4, alebo 7 kusov. Číslo 19 možno rozložiť pomocou násobkov 1, 4, 7 takto:

$$19 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7$$

$$(\text{A}) \quad (\text{B}) \quad (\text{C})$$

alebo

$$19 = 3 \cdot 4 + 1 \cdot 7$$

$$(\text{B}) \quad (\text{C})$$

(násobky musia byť spolu 4; sú 4 strany štvorca).

Takže strany štvorcovej záhrady môžeme dostať takto:

2krát (C), t.j. 14 štvormetrových a 2 trojmetrové diely

1krát (B), t.j. 4 štvormetrové a 5 trojmetrovných dielov

1krát (A), t.j. 1 štvormetrový a 9 trojmetrovných dielov

čo je spolu 19 štvormetrovných a 16 trojmetrovných dielov

alebo takto:

3krát (B), t.j. 12 štvormetrovných a 15 trojmetrovných dielov

1krát (C), t.j. 7 štvormetrovných a 1 trojmetrovný diel

čo je spolu 19 štvormetrovných a 16 trojmetrovných dielov

Úloha má práve dve riešenia.

ÚLOHY I. KOLA

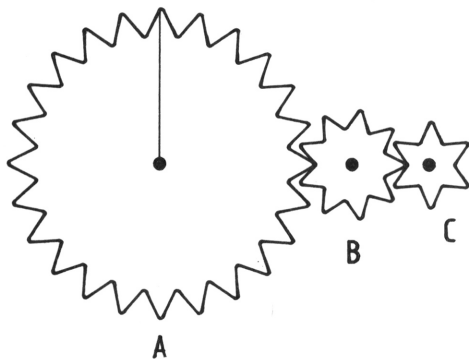
(Riešenia úloh na str. 92)

Z5 – I – 1

Peter a Paľo si boli kúpiť v cukrárni čokoládu. Domov sa však vrátili naprázdno. Peter povedal: „Chýbala mi 1 Kčs.“ Paľo povedal: „Aj ja som mal málo peňazí. Mne chýbalo 9 Kčs. A keď sme dali peniaze dohromady, aj tak sme nemali dosť ani len na jedinú čokoládu.“ „Ste obyčajný nenásytníci a klamári,“ nazlostila sa ich sestra Dana, „spolu ste museli mať dosť peňazí.“ Mala Dana pravdu? Ak áno, odôvodnite, ak nie, koľko mohla stáť čokoláda?

Z5 – I – 2

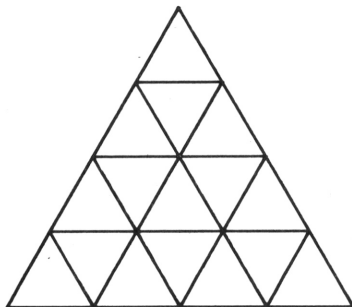
Peter nosil staré náramkové hodinky. Rozobral ich a z troch ozubených koliesok A, B, C zostavil súkolie (obr. 32). Počet zubov na jednotlivých kolieskach je 24, 9, 6. Na najväčšom koliesku je ryskou vyznačená minútová ručička. Koľkokrát musíme otočiť koliesko C, aby sa minútová ručička otočila o 1 hodinu a 45 minút?



Obr. 32

Z5 – I – 3

Koľko trojuholníkov je na obrázku 33?



Obr. 33

Z5 – I – 4

Zostroj body A , B vzdialené od seba 8 cm. Ďalej už nesmieš merať! Môžeš pracovať len s kružidlom a pravítkom bez mierky. Zostroj trojuholník so stranami dĺžky 13 cm, 14 cm, 15 cm. Presne opíš postup konštrukcie.

Z5 – I – 5

Keď k neznámemu štvorcifernému číslu pripočítam jeho desatinu a stotinu, dostanem číslo 4 773. Ktoré je to číslo?

Z5 – I – 6

V zápise

$$200 - 199 + 198 - 197 + \dots + 6 - 5 + 4 - 3 + 2 - 1) =$$

sú vedľa seba napísané všetky prirodzené čísla od 200 až po 1. Medzi nimi sa striedajú znamienka $+$, $-$. Na konci je jedna pravá zátvorka. Kde treba umiestniť chýbajúcu ľavú zátvorku, aby ste dostali výsledok a) 73, b) 72?

ÚLOHY II. KOLA

(Riešenia úloh na str. 100)

Z5 – II – 1

Máme nasledujúcu pravidelnosť 150 čísel 508, 505, 502, 499, 496, ... 4, 1. Z nej vytvoríme výraz

$$508 - 505 + 502 - 499 + 496 - \dots$$

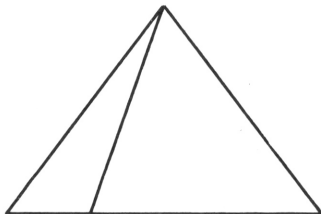
Koľko členov musí mať tento výraz, aby jeho výsledok bol
a) 141, b) 142?

Z5 – II – 2

Ak od neznámeho trojciferného čísla odčítam jeho polovicu a jeho štvrtinu, dostanem číslo 148,5. Ktoré je to trojciferné číslo?

Z5 – II – 3

Trojuholník som rozdelil jednou úsečkou tak, že na obrázku 34 boli 3 trojuholníky.



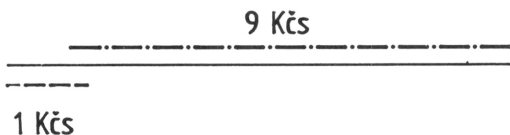
Obr. 34

Možno trojuholník rozdeliť dvomi úsečkami tak, aby na obrázku boli 3 (4, 5, 6, 8) trojuholníky? Ku každej možnosti nakreslite obrázok.

RIEŠENIA ÚLOH I. KOLA

Riešenie úlohy Z5-I-1 (str. 88)

Predpokladajme, že chlapci neklamali a naozaj nemali dosť peňazí. Znázorníme si situáciu obrázkom 35. (Úsečka znázorňuje cenu čokolády; --- čo chýbalo Petrovi; - · - · čo chýbalo Paľovi.)



Obr. 35

Zrejme Paľo musel mať menej ako 1 Kčs, čiže najviac 95 hal. a najmenej 5 hal. Čokoláda teda mohla stáť 9,05 Kčs (potom Peter by mal 8,05 Kčs a Paľo 0,05 Kčs), 9,10 Kčs, atď. až 9,95 Kčs. Dana nemala pravdu. Ani spolu nemuseli mať chlapci dosť peňazí.

Riešenie úlohy Z5-I-2 (str. 88)

Ak sa má minútová ručička otočiť o 1 hodinu a 45 minút, tak sa koliesko A musí otočiť raz celkom a druhý raz do troch štvrtín. To je spolu o $24 + \frac{3}{4} \cdot 24 = 42$ zubov. Koliesko C sa musí otočiť o ten istý počet zubov; má 6 zubov a teda sa otočí $42 : 6 = 7$ krát.

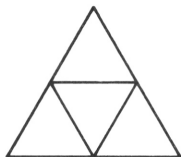
Koliesko C musíme otočiť 7krát.

Riešenie úlohy Z5-I-3 (str. 89)

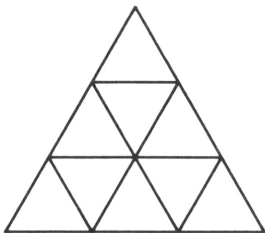
Na obrázku 33 (str. 89) je 16 malých (základných) trojuholníkov (obr. 36a), 7 trojuholníkov tvorených štyrmi základnými trojuholníkmi (obr. 36b), 3 trojuholníky tvorené deviatimi základnými trojuholníkmi (obr. 36c) a 1 veľký „celý“ trojuholník. To je spolu 31 trojuholníkov.



Obr. 36a



Obr. 36b

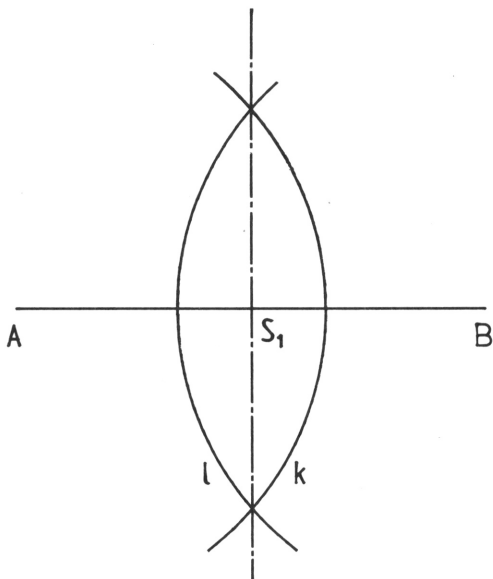


Obr. 36c

Na obrázku 33 je 31 trojuholníkov.

Riešenie úlohy Z5-I-4 (str. 90)

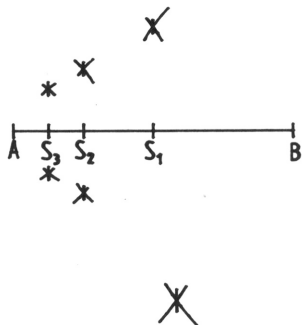
K zostrojeniu trojuholníka stačí poznať úsečky (ich dĺžky) jeho strán. Tieto dostaneme postupným pridávaním vhodných dĺžok, ktoré dostaneme postupným delením úsečky AB na polovice.



Obr. 37

Stred úsečky AB zostrojíme pomocou kružidla a pravítka: z bodov A , B zostrojíme kružnice k , l s rovnakým polomerom väčším ako polovica úsečky AB . Prieniky kružníc

k, l určujú priamku, ktorá je osou úsečky AB . Táto os pretnie úsečku AB v jej strede S_1 (obr. 37). Potom podobne zostrojíme os a stred S_2 úsečky AS_1 a os a stred S_3 úsečky AS_2 (obr. 38). Zrejme platí $|AB| = 8 \text{ cm}$, $|AS_1| = 4 \text{ cm}$, $|AS_2| = 2 \text{ cm}$ a $|AS_3| = 1 \text{ cm}$.



Obr. 38

Teraz na polpriamku AB nanesieme pomocou kružidla úsečky AB_1, AB_2, AB_3 tak, že

$$|AB_1| = |AB| + |BS_3| = 8 \text{ cm} + 7 \text{ cm} = 15 \text{ cm},$$

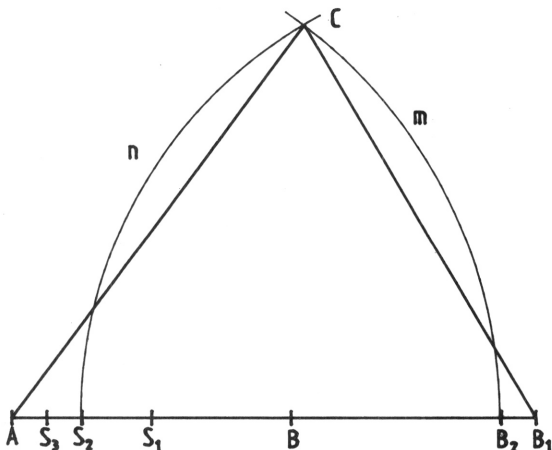
$$|AB_2| = |AB| + |BS_2| = 8 \text{ cm} + 6 \text{ cm} = 14 \text{ cm}.$$

Zrejme platí

$$|B_1S_2| = |BB_1| + |BS_2| = 7 \text{ cm} + 6 \text{ cm} = 13 \text{ cm}.$$

Úsečky AB_1, AB_2, B_1S_2 určujú dĺžky strán hľadaného trojuholníka. Takže tento trojuholník vieme zostrojiť. Zostrojíme

kružnicu $m(A, r = |AB_2|)$,
 kružnicu $n(B_1, r = |B_1S_2|)$,
 bod C ako prienik kružníc m, n ($C \in m \cap n$),
 trojuholník AB_1C .



Obr. 39

Trojuholník ABC je požadovaný trojuholník.

Riešenie úlohy Z5-I-5 (str. 90)

I. spôsob. Označme hľadané číslo A . Potom daný súčet je:
 $A + 0,1A + 0,01A = 1,11A = 4773$, z toho

$$A = 4773 : 1,11$$

$$A = 4300.$$

Neznáme číslo je 4 300.

II. spôsob. Hľadané číslo musí končiť dvomi nulami. Inak by nemohol vzniknúť celočíselný súčet. Teda ak hľadané číslo zapíšeme v tvare $xy00$, tak súčet z úlohy môžeme zapísať:

$$\begin{array}{r} x \ y \ 0 \ 0 \\ x \ y \ 0 \\ x \ y \\ \hline 4 \ 7 \ 7 \ 3 \end{array}$$

Z toho priamo dostaneme $y = 3$; $x = 4$.

III. spôsob. Označme hľadané číslo $xyzt$. Potom

$$\begin{array}{r} x \ y \ z \ t \\ x \ y \ z, \ t \\ x \ y, \ z \ t \\ \hline 4 \ 7 \ 7 \ 3, \ 0 \ 0 \end{array}$$

Z toho priamo dostaneme $t = 0$; $z = 0$; $y = 3$; $x = 4$.

Riešenie úlohy Z5-I-6 (str. 90)

Ak ľavú zátvorku umiestnime tesne za znamienko +, čiže pred niektoré párne číslo, výsledok neovplyvníme. Vždy bude 100. Ľavú zátvorku teda treba umiestniť medzi znamienko — a niektoré *nepárne* číslo. V ďalšom budeme tento poznatok využívať.

I. spôsob — skusmo. Zvoľme si konkrétne nepárne číslo. Napr. 15. Potom môžeme súčet písať:

$$\begin{aligned} & 200 - 199 + 198 - 197 + \dots + 16 - \\ & \quad - (15 + 14 - 13 + \dots - 1) = \\ & = (200 - 199) + (198 - 197) + \dots + (18 - 17) + \\ & \quad + (16 - 15) - (14 - 13 + \dots - 1) \end{aligned}$$

Daných 200 čísel, alebo tiež 100 dvojíc susedných čísel sme rozdelili do troch zátvoriek. V tretej je 14 čísel, čiže 7 dvojíc, v druhej je 1 dvojica a teda v prvej musí byť 92 dvojíc. Rozdiel čísel v každej z týchto dvojíc je 1. Teda celkový výsledok nášho pokusu je $92 + 1 - 7 = 86$.

Potrebuje dostať menší výsledok. Posuňme teda ľavú zátvorku viac doľava. (Tým sa zväčší tretia zátvorka a budeme odčítvať väčšie číslo.) Umiestnime ju napr. pred číslo 21. Dostaneme

$$\begin{aligned} & 200 - 199 + \dots + 22 - (21 + 20 - \dots - 1) = \\ & = (200 - 199 + \dots + 24 - 23) + \\ & \quad + (22 - 21) - (20 - 19 + \dots + 2 - 1) = \\ & = 89 + 1 - 10 = 80. \end{aligned}$$

V tretej zátvorke je teraz o tri dvojice čísel viac, v prvej potom o tri dvojice čísel menej, výsledok je teda o 6 menší. Ak by sme presunuli zátvorku ešte viac doľava pred číslo 23, pribudla by v tretej zátvorke jedna dvojica a v prvej zátvorke by jedna dvojica ubudla. Výsledok by sa zmenšil o 2. Vidíme teda, že výsledok bude vždy párny.

Odpoveď na otázku a): Nech umiestnime ľavú zátvorku kdekoľvek, nemôžeme dostať výsledok 73.

Odpoveď na otázku b): Zátvorku treba umiestniť pred číslo 29. (Videli sme totiž, že posunutie zátvorky o dve čísla doľava znamená zmenšenie výsledku o 2.

II. spôsob — náročnejší. (Pre starších a skúsenejších riešiteľov.) Ako už vieme, zátvorku treba umiestniť pred niektoré nepárne číslo. Pri výpočte využijeme, že zápis obsahuje 100 „susedných“ dvojíc. Označme požadovaný výsledok V a číslo za ľavou zátvorkou a (a je nepárne!). Potom:

$$\begin{aligned} & 200 - 199 + \dots + \underline{a + 1} - (\underline{a} + \underline{a - 1} - \dots - 1) = \\ & = [200 - 199 + \dots + \underline{a + 3} - (\underline{a + 2})] + (\underline{a + 1} - \underline{a}) - \\ & \quad - (\underline{a - 1} - (\underline{a - 2}) + \dots + 2 - 1) = \\ & = \left(99 - \frac{a - 1}{2}\right) + 1 - \frac{a - 1}{2} = 101 - a. \end{aligned}$$

Teda platí $101 - a = V$, z toho $a = 101 - V$ (a je nepárne).

Pre $V = 73$ dostávame $a = 28$, to však nie je nepárne číslo; požiadavka sa nedá splniť. Pre $V = 72$ dostávame $a = 29$.

RIEŠENIA ÚLOH II. KOLA

Riešenie úlohy Z5-II-1 (str. 91)

Uvažujme čiastočné výsledky určené prvým, prvými dvomi, prvými tromi, prvými štyrmi, atď. číslami vo výraze:

$$508 - 505 + 502 - 499 + 496 - 493 + 490 - \dots$$

Sú to:

$$508 \quad 3 \quad 505 \quad 6 \quad 502 \quad 9 \quad 499 \quad \dots$$

Vidíme, že v tejto postupnosti sú:

Na nepárnych miestach čísla, ktoré dostaneme postupným odčítavaním trojky od čísla 508. Sú to čísla, ktoré dávajú pri delení tromi zvyšok 1.

Na párnych miestach sú násobky troch.

a) Číslo 141 je 47-násobok troch, teda výraz musí obsahovať 47 dvojíc, čo je 94 čísel.

b) Číslo 142 nie je násobok troch. Preto musíme vziať v danom výraze nepárny počet čísel (počnúc odľava).

Dostaneme čísla 508, 505, 502, 499, ... t.j. čísla, ktoré vzniknú postupným odčítaním čísla 3 od 508.

Koľkokrát musíme teda odčítať trojku od 508, aby sme dostali 142? Rozdiel $508 - 142$ je 366, teda od 508 musíme odčítať 122krát trojku ($366 : 3 = 122$), aby sme dostali 142. Takže musíme použiť 122 dvojíc, naznačených vo výraze

$$508 - \underline{505} + \underline{502} - \underline{499} + \underline{496} - \underline{493} + \underline{490} - \dots,$$

čo je 244 čísel. Spolu s číslom 508 je to 245 čísel. Teda daný výraz by mal obsahovať 245 čísel. Ale v danej postupnosti je len 170 čísel, takže takýmto spôsobom číslo 142 nemôžeme dostať.

a) Výraz musí obsahovať 94 čísel.

b) Taký výsledok pri daných výrazoch nikdy nedostaneme.

Riešenie úlohy Z5–II–2 (str. 91)

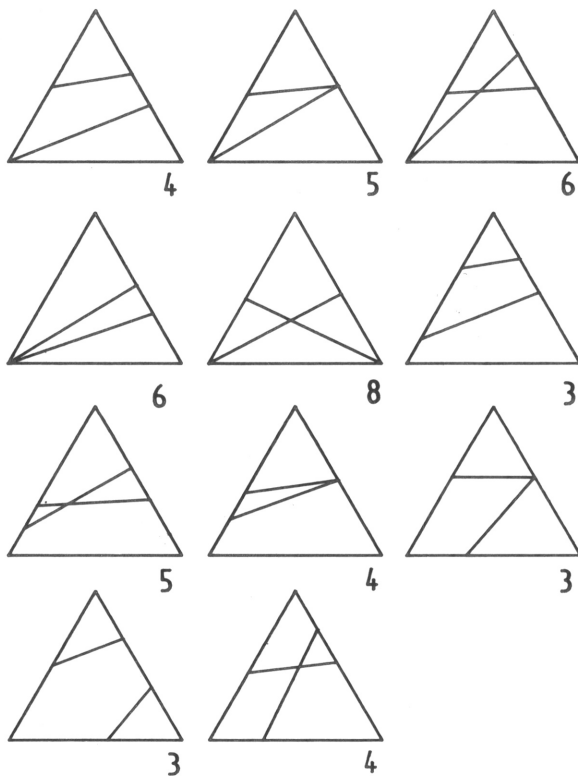
Ak od neznámeho čísla odčítame polovicu a štvrtinu, ostane nám štvrtina tohto čísla. Teda neznáme číslo je štvornásobkom čísla 148,5.

Hľadané trojciferné číslo je číslo 594.

Riešenie úlohy Z5–II–3 (str. 91)

Úsečka, ktorá delí trojuholník, buď ide, alebo nejde z vrcholu tohto trojuholníka. Sú teda tieto možnosti delenia (obr. 40, str. 102). (Čísla v obrázku určujú, na koľko častí je trojuholník rozdelený.)

Z obrázku 40 vidíme, že trojuholník možno dvomi úsečkami rozdeliť na 3, 4, 5, 6, 8 častí. Na iný počet častí trojuholník daným spôsobom rozdeliť nemôžeme.



Obr. 40

Kategória Z4

ÚLOHY I. KOLA

(Riešenia úloh na str. 108)

Z4 – I – 1

Na stole leží rozvinutý krajčírsky meter. Keď naň položíme žabku-skočku, skočí o päť políčok dopredu. Napríklad z políčka 26 na 31 a odtiaľ na 36 atď.

Na prvých päť políčok naraz položíme žabky-skočky. Všetkých päť žabiek začne skákať naraz. Ale pozor, žabka, ktorá doskočí na políčko, ktoré sa dá deliť tromi bezo zvyšku, jedenkrát oddychuje a neskáče.

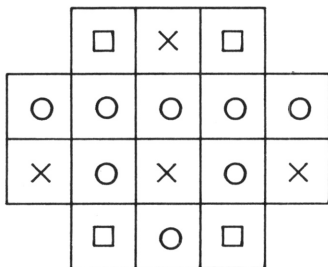
Ktorá zo žabiek prvá preskočí za políčko 60?

Z4 – I – 2

Otec má štyroch synov a pozemok (obr. 41, str. 104). Na pozemku sú vysadené ovocné stromy — 8 jabloní, 4 hrušky a 4 marhule podľa uvedeného náčrtku.

Tento pozemok chce rozdeliť po vyznačených čiarach na štyri rovnako veľké záhrady rovnakého tvaru tak, aby v každej boli dve jablone, jedna hruška a jedna marhuľa.

Načrtni tri rôzne spôsoby, ako to možno urobiť.



Obr. 41

Z4 – I – 3

Na tenisovom dvorci sa stretli Adam, Boris a Cyril s Dášou a Evou. Dohodli sa, že budú hrať zmiešanú štvorhru, teda jeden muž a jedna žena proti jednému mužovi a jednej žene. Zostávajúci piaty bude rozhodovať. Aby si však každý zahral, bude sa po každom sete rozhodca meniť. Hrať budú dovtedy, kým sa nevystriedajú všetky možné dvojice súperov.

Ak by mali na dvorec nastúpiť také dvojice súperov, ktoré už proti sebe hrali, zápas sa končí. Koľko setov odohrajú?

Z4 – I – 4

Na miesta koliesok zapíšte znaky početných operácií +, −, ·, : a doplňte zátvorky tak, aby ste dostali správny vý-

sledok:

$$5 \bigcirc 5 \bigcirc 5 = 0$$

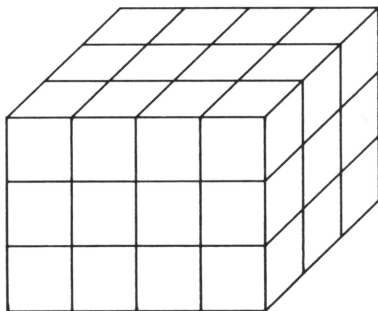
$$5 \bigcirc 5 \bigcirc 5 = 2$$

$$5 \bigcirc 5 \bigcirc 5 = 4$$

$$5 \bigcirc 5 \bigcirc 5 = 6$$

Z4 – I – 5

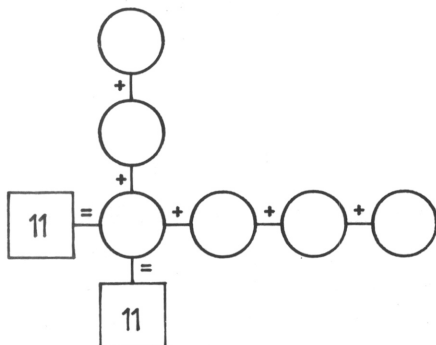
Kváder na obrázku 42 je zložený z 36 kociek s rozmermi $3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$. Chceme ho rozložiť na kocky s rozmermi $3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$, prípadne s rozmermi $6 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$. Dá sa to urobiť niekoľkými spôsobmi. Koľko kociek $3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$ a $6 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$ pri jednotlivých rozkladoch dostanete?



Obr. 42

Z4 – I – 6

Do každého krúžku (obr. 43) vpíš jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 (každé len raz) tak, aby platili naznačené rovnosti.



Obr. 43

ÚLOHY II. KOLA

(Riešenia úloh na str. 113)

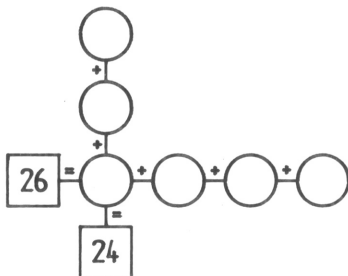
Z4 – II – 1

Na stole leží rozvinutý krajčírsky meter. Keď naň posadíme žabku-skočku, skočí o tri políčka dozadu. Napríklad z políčka 38 na políčko 35. Na políčka 38, 37 položíme dve

žabky-skočky. Obe začnú skákať naraz. Ale pozor, žabka, ktorá doskočí na políčko, ktoré sa dá deliť ôsmymi bezo zvyšku, skáče ešte raz, mimo poradia. Ktorá zo žabiek skôr zoskočí z metra? (Meter začína políckom číslo 1.)

Z4 – II – 2

Do každého krúžku na obr. 44 vpíšte jedno z čísel 2, 4, 6, 8, 10, 12 (každé len raz) tak, aby platili naznačené rovnosti:



Obr. 44

Z4 – II – 3

Robotníci vyrobili za 4 mesiace 2 000 výrobkov, čím vyrobili toľko, ako mali naplánované vyrobiť za 5 mesiacov. Ďalej pokračovali v rovnakom tempe. O koľko výrobkov prekročili plán za jeden rok?

RIEŠENIA ÚLOH I. KOLA

Riešenie úlohy Z4-I-1 (str. 103)

Prvá žabka skáče z políčka 1 postupne na políčka

6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, 51, 56, | 61.

Podčiarknuté čísla sú deliteľné tromi; označujú políčka, kde žabka stojí. Teda žabka skáče 12krát a 4krát stojí, teda za políčko s číslom 60 preskočí v 16. intervale.

Druhá žabka skáče z políčka 2 postupne na políčka

7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52, 57, | 62.

Rovnako ako prvá žabka, doskočí za 60. políčko v 16. intervale.

Tretia žabka skáče z políčka 3 postupne na políčka

8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53, 58, | 63.

Teda žabka skáče 12krát a 3 razy stojí (prvýkrát na čísle 3 nestojí, pretože všetkých päť žabiek začne skákať naraz). Tretia žabka doskočí za políčko číslo 60 v 15. intervale.

Štvrtá žabka skáče z políčka 4 postupne na políčka

9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, 44, 49, 54, 59, | 64.

Rovnako ako prvá žabka, doskočí za 60. políčko v 16. intervale.

Piata žabka skáče z políčka 5 postupne na políčka

10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, | 65.

Rovnako ako prvá žabka doskočí za 60. políčko v 16. intervale.

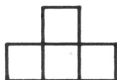
Takže ako prvá preskočí políčko číslo 60 žabka, ktorá stojí na čísle 3.

Riešenie úlohy Z4-I-2 (str. 103)

Záhada sa skladá z 16 štvorcových políčok. Má sa rozdeliť na štyri časti rovnakej veľkosti i tvaru, teda každá musí obsahovať štyri políčka. Sú štyri možnosti (obr. 45):



Obr. 45a



Obr. 45b

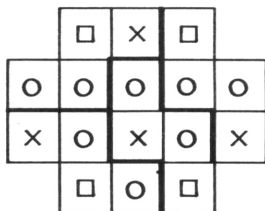


Obr. 45c

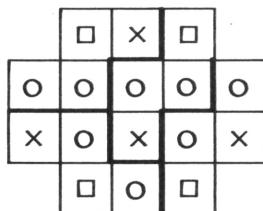


Obr. 45d

Z nich zrejme nevyhovujú časti z obrázku 45a ani 45b, ani 45c. (Stačí, ak sa pokúsite umiestniť viac rovnakých

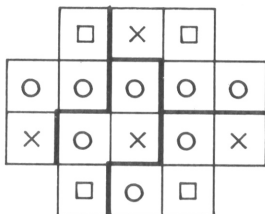


Obr. 46a

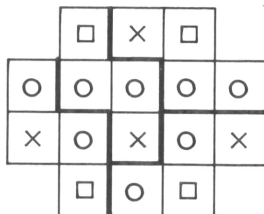


Obr. 46b

možností tak, aby sa tam mohla umiestniť ďalšia taká istá). Teda vyhovujú len časti záhrady tvaru 45d. Ich možnosti rozmiestnenia do plánu záhrady sú práve štyri (obr. 46).



Obr. 46c



Obr. 46d

Riešenie úlohy Z4-I-3 (str. 104)

Rozdeľme mužov a ženy do dvojíc. Sú tieto možnosti: (Osoby značíme začiatočným písmenom ich mena.)

$A - D$, $A - E$, $B - D$, $B - E$, $C - D$, $C - E$.

Dvojica $A - D$ samozrejme nemôže hrať s $A - E$, ani s dvojicou $B - D$. Dvojica $A - D$ môže hrať len s $B - E$; rozhoduje C , alebo s $C - E$; rozhoduje B . Ďalšia dvojica je dvojica $A - E$. Dvojica $A - E$ môže hrať len s $B - D$; rozhoduje C , alebo s $C - D$; rozhoduje B . Ďalšia dvojica je dvojica $B - D$. Tá však už s dvojicou $A - E$ hrala, takže dvojica $B - D$ môže hrať len s $C - E$; rozhoduje A . Podobne dvojica $B - E$ môže hrať len s $C - D$; rozhoduje A .

Iné možnosti nie sú. Aby sa rozhodcovia po každom sete menili, dané poradie trochu upravíme. (Je viac možností.) Napríklad môže priebeh zápasu vyzeráť takto:

Dvojica	A – D	proti dvojici	B – E,	rozhoduje	C
	A – E		C – D		B
	B – D		C – E		A
	A – E		B – D		C
	A – E		C – D		B
	B – E		C – D		A

Takýmto spôsobom môžu odohrať najviac 6 setov.

Riešenie úlohy Z4–I–4 (str. 104)

Je viac možností. Jedna z nich je napríklad:

$$(5 - 5) : 5 = 0$$

$$(5 + 5) : 5 = 2$$

$$5 - (5 : 5) = 4$$

$$5 + (5 : 5) = 6$$

Skúste to urobiť tak, aby vám vyšli iné výsledky. Napr.: 1, 3, 5, 7, ...? Nie všetky sa dajú! Pohrajte sa s tým.

Riešenie úlohy Z4–I–5 (str. 105)

Kváder môžeme rozložiť na 36 kociek rozmeru $3\text{ cm} \times 3\text{ cm} \times 3\text{ cm}$. Ak z kvádra vyberieme jednu kocku $6\text{ cm} \times 6\text{ cm} \times 6\text{ cm}$, zostane nám 28 kociek $3\text{ cm} \times 3\text{ cm} \times 3\text{ cm}$. Ak z kvádra vezmeme dve kocky $6\text{ cm} \times 6\text{ cm} \times 6\text{ cm}$, zostane

nám 20 kociek $3\text{ cm} \times 3\text{ cm} \times 3\text{ cm}$. Tri kocky $6\text{ cm} \times 6\text{ cm} \times 6\text{ cm}$ už z kvádra nemôžeme vybrať. Teda z kvádra môžeme kocku $6\text{ cm} \times 6\text{ cm} \times 6\text{ cm}$ nezobrať, alebo zobrať raz, alebo vziať dvakrát. Pri prvom spôsobe dostaneme 36 menších kociek, pri druhom 28 menších a 1 väčšiu a pri treťom spôsobe 20 menších a 2 väčšie. Druhý a tretí spôsob možno previesť viacerými možnosťami. Vedeli by ste určiť koľkými?

Riešenie úlohy Z4-I-6 (str. 106)

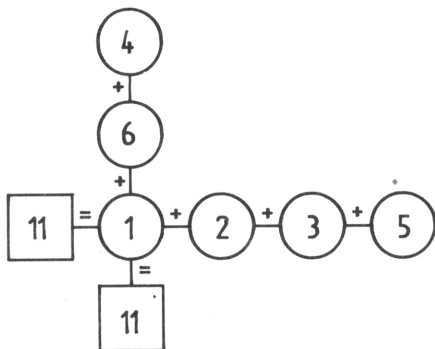
Súčet všetkých čísel, ktoré máme použiť, je

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21.$$

Súčet výsledkov je $11 + 11 = 22$. Teda v prieniku musí byť (rozmyslite prečo) číslo 1. Zvyšné dva sčítance v zvislom stĺpci musia dať spolu súčet 10. Zo zvyšných to môžu byť len čísla 4 a 6. Do vodorovného riadku potom zapíšeme ostatné čísla 2, 3 a 5.

Až na poradie sčítancov v stĺpci (4, 6) a v riadku (2, 3, 5) je jediné riešenie (obr. 47, str. 113).

Úlohu môžeme riešiť samozrejme aj skusmo. Hádame čísla v krúžkoch, až kým nám to nevyjde.



Obr. 47

RIEŠENIA ÚLOH II. KOLA

Riešenie úlohy Z4-II-1 (str. 106)

Zapíšme si čísla, na ktoré žabky doskakujú. Pri doskočení na číslo, ktoré je deliteľné ôsmymi, žabka skáče ešte raz.

1. žabka: 38 35 32 29 26 23 20 17 14 11 8 5 2 von

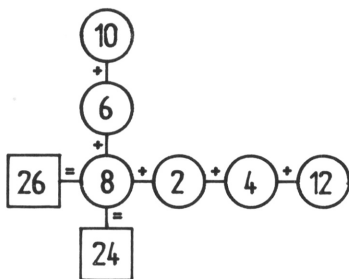
2. žabka: 37 34 31 28 25 22 19 16 13 10 7 4 1 von

Prvá z metra zoskočí žabka, ktorá stála na čísle 38.

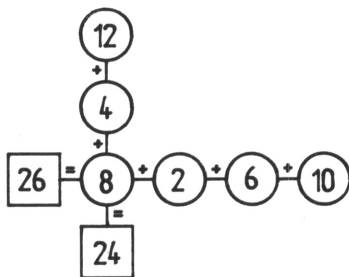
Riešenie úlohy Z4-II-2 (str. 107)

Súčet všetkých čísel je $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 42$. Súčet súčtov z obrázku je 50. Teda spoločné číslo obidvoch súčtov

musí byť 8. Potom sú, až na poradie ostatných sčítancov v jednotlivých súčtoch, dve riešenia (obr. 48a, b).



Obr. 48a



Obr. 48b

Riešenie úlohy Z4-II-3 (str. 107)

Ak robotníci vyrobili za 4 mesiace 2 000 výrobkov, tak za rok pri rovnakom tempe vyrobili $3 \cdot 2\,000 = 6\,000$ výrobkov.

Podľa plánu by mali 2 000 výrobkov vyrobiť za 5 mesiacov, teda za mesiac by to bolo $2\,000 : 5 = 400$ výrobkov,

čo by bolo za rok $400 \cdot 12 = 4\,800$ výrobkov. Teda robotníci vyrobili o $6\,000 - 4\,800 = 1\,200$ výrobkov viac, ako mali vyrobiť podľa plánu.

Ve zprávě o průběhu 39. ročníku MO jsme uvedli, že mnoho našich žáků základních škol mělo možnost zúčastnit se nejen matematické olympiády, ale i řady korespondenčních seminářů (KS) a dalších soutěží. Uvedeme ukázky úloh z některých z nich. Věříme, že vás zaujmou a pokusíte se aspoň některé z nich vyřešit. Nejlepší však bude, když se v budoucnosti podobných akcí sami zúčastníte.

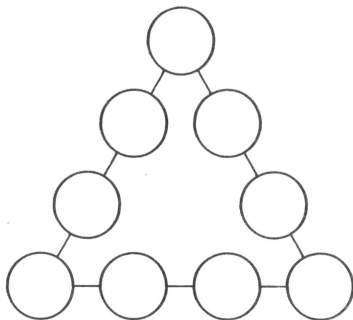
KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘE

Korespondenční seminář pro žáky 4. ročníků — Frýdek-Místek, vedoucí RNDr. Z. Bachelová. Uvádíme úlohy 3. kola korespondenčního semináře, který byl v roce 1989/90 již IV. ročníkem soutěže.

1. Na 3 stromy přiletělo 36 kavek. Když z prvního přeletělo na druhý 6 kavek a z druhého na třetí 4 kavky, byl na všech stromech stejný počet kavek. Kolik kavek sedělo původně na každém stromě?

2. Před i za číslo 1989 napište jednu číslici tak, aby vzniklé šesticiferné číslo bylo dělitelné 88.

3. Do kroužků na obr. 49 vepište číslice 1, 2, 3, ..., 9 tak, aby součet čísel na každé straně byl a) 17, b) 20.



Obr. 49

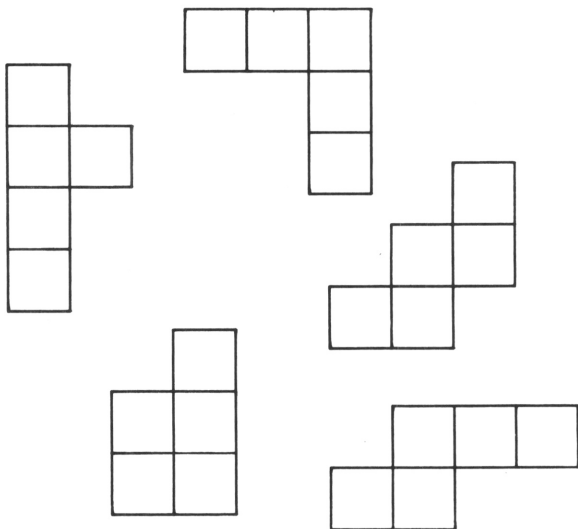
4. Každé písmeno nahraď číslicí, aby vznikl správný zápis sčítání. Stejná písmena nahraď stejnými číslicemi, různá písmena různými číslicemi.

$$\begin{array}{r}
 S P O R T \\
 P O R T \\
 \hline
 O R T \\
 \hline
 R R R R R
 \end{array}$$

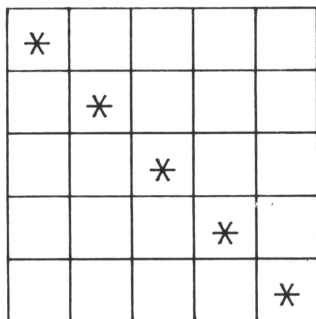
Korespondenční seminář pro žáky 5. ročníků — Frýdek-Místek, vedoucí RNDr. Z. Bachelová. Seznámíme vás s úlohami 1. kola IV. ročníku soutěže (1989/90).

1. Máte 100 shodných krychlí s hranami délky 1 cm. Kolik různých kvádrů z nich můžete sestavit, jestliže použijete vždy všechny krychle?

2. Čtverec na obrázku 51 pokryjte mnohoúhelníky z obrázku 50 tak, aby každý mnohoúhelník pokryl jednu hvězdičku.

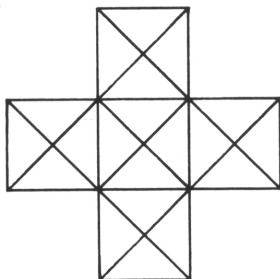


Obr. 50

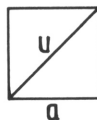


Obr. 51

3. Určete počet všech trojúhelníků nakreslených na obrázku 52a. Nakreslete všechny typy těchto trojúhelníků a k náčrtku napište délky stran; užíjte označení z obrázku 52b.



Obr. 52a



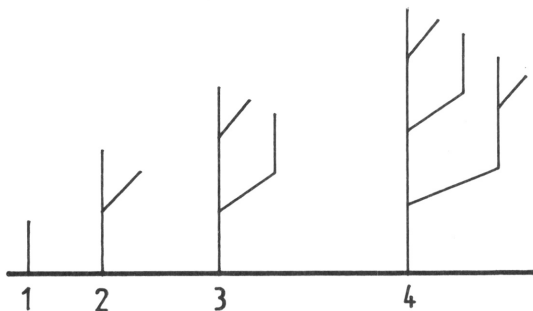
Obr. 52b

4. Honzík si koupil dvě lízátka a jeden perník. Zaplatil za ně dohromady 4,50 Kčs. Kdyby si koupil jedno lízátko a dva

perníky, byl by zaplatil 6 Kčs. Kolik korun stalo lízátko a kolik korun stál perník?

Korespondenční seminář pro žáky 6. až 8. ročníků — Dvořákovo gymnázium Kralupy nad Vltavou, vede RNDr. K. Šimánek. Uvedeme jako ukázkou úlohy z 2. série věnované tzv. Fibonacciovým číslům (podle italského matematika Leonarda Pisano zvaného Fibonacci (1170–1230), který se jimi zabýval). Další série byly věnovány geometrii, fyzikálním aplikacím ap.

1. Zasadili jsme stromek. Po roce už byl skoro dvojnásobný. Také mu vyrostla dlouhá boční větev. Následující rok mu vyrostla další boční větev a první větev už nerostla šikmo, ale směrem vzhůru jako kmen (obr. 53). Vždy po roce začala každá boční větev růst směrem vzhůru. Z větví, které v minulém roce rostly směrem vzhůru, vyrostla vždy v příštím roce i nová boční větev.



Obr. 53

a) Nakresli strom v 5. roce.

b) Dopln místo pomlček, kolik větví bude mít strom v dalších letech. Strom si načrtni na velkém papíře a do řešení napiš pouze čísla.

1, 2, 3, 5, —, —, —, —, —

Těmto číslům říkáme Fibonacciova čísla.

c) Zamysli se nad tím, podle jakého pravidla se vytvářejí další a další Fibonacciova čísla.

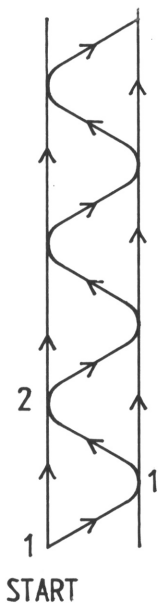
d) Pokus se pokračovat ve Fibonacciově posloupnosti také opačným směrem, tedy doleva. Dopln místo pomlček správná čísla.

—, —, 1, 2, 3, 5

2. Turisté stoupají do kopce. Na kopec vedou serpenty (cesta se samými zatáčkami, na obrázku 54 (str. 122) znázorněna „klikatou“ čarou). Z míst, v nichž serpentina mění směr, můžeme ve výstupu pokračovat i přímoú strmou cestou (zkratkou). Komu prudké stoupání nevadí, může si občas cestu zkrátit.

a) Ke každému bodu, ve kterém se cesta větví, napiš, kolika způsoby se tam turisté mohou dostat. Samozřejmě se nebudou přitom vracet, ale půjdou stále vzhůru ve směru udaném některou šipkou. Na první dvě rozcestí jsme již správnou odpověď napsali. Ke startu jsme napsali číslo 1, protože nikde před startem nebylo rozcestí — dalo se tam dostat jen jednou cestou.

b) Rozhodni, zda tato čísla rostou podle Fibonacciovy posloupnosti.



Obr. 54

3. Kolik párů potomků může mít v jednom roce jediný pár králíků, když budou splněny následující tři podmínky:

a) každému dospělému páru se v každém měsíci narodí jeden pár králíků,

b) z narozených králíků budou dospělí králíci za dva měsíce (tzn. pár narozený v lednu má první dvojici potomků v březnu),

c) žádný pár neuhyne.

Korespondenční seminář pro žáky 6. až 8. ročníků —
pořádal KV MO Košice. Seminář měl 5 sérií po 6 úlohách.

Všechny vycházely z příběhů, které vyprávěl medvídek Miška. Hrdinové jeho matematických příběhů byli jeho přátelé mravenci, kteří měli matematická jména. Uvedeme úlohy poslední série.

1. „No teda“ — vzdychl si Hrkátko při pohledu na domácí úlohu:

$$20 : 5 \cdot 2 + 6^2 =$$

„Zapomněl jsem si napsat závorky“. Kde má Hrkátko napsat závorky, jestliže výsledek má být a) 38, b) 196, c) 152, d) 111? Kolik různých výsledků může dostat různým uzávorkováním tohoto výrazu?

2. Mocninko chtěl pomocí čtyř dvojek zapsat co největší číslo. Které z těchto čísel to bylo:

$$222^2, 22^{22}, 2^{222}, 22^{2^2}, 2^{22^2}, 2^{2^{2^2}}?$$

Umíte tato čísla uspořádat podle velikosti?¹⁾

¹⁾ Autoři korespondenčního semináře měli zřejmě na mysli, že se umocňuje postupně, tzn. například:

$$2^{2^{2^2}} = (2^2)^{2^2} = 4^{2^2} = 2^{4^4}.$$

Obtížnější úloha by vznikla, kdybychom měli počítat tak, aby vznikl co největší výsledek, tzn. kdybychom měli možnost vybrat si pořadí umocňování uzávorkováním. Například

$$2^{(2^{2^2})} = 2^{4\,194\,304}.$$

3. Číselko, Následko, Násobko a Rozumko trávili odpoledne na nedaleké louce procházkou. Každý z nich se pohyboval po přímce rovnoměrnou rychlostí, přičemž žádné dvě z těchto přímek nebyly rovnoběžné a žádné tři neměly společný bod. Rozumko se setkal s Číselkem, Následkem i Násobkem a při setkání dostal od každého jednu úlohu. Víme, že Číselko se setkal s Následkem a Násobkem. Dokažte, že i Následko se setkal s Násobkem.

4. Číselko řekl Rozumkovi: „Číslo A je 1990ciferné a je dělitelné devíti. Číslo B je ciferným součtem čísla A , číslo C je ciferným součtem čísla B a číslo D je ciferným součtem čísla C .“ Po chvíli přemýšlení pověděl Rozumko číslo D . Jak ho poznal?

5. Následko měl proužek papíru, na kterém byla napsána řada znamének $+$ a $-$. Ukázal ho Rozumkovi a řekl: „Můžeš vygumovat libovolná dvě znaménka a místo dvou stejných znamének napsat jedno znaménko $+$ a místo dvou různých znamének napsat jedno znaménko $-$. To opakuj, až nakonec dostaneš jediné znaménko.“ Rozumko se dobře podíval na řadu znamének a hned řekl, jaké znaménko zůstane nakonec, aniž by znaménka gumoval. Jak to zjistil?

6. Násobko dal Rozumkovi čtverečkový papír (délka stran čtverečků byl 1 mravenčí centimetr) a vybídl ho: „Nakresli rovnoběžník s vrcholy ve vrcholech této čtvercové sítě tak, aby jeho obsah byl 25,5 mravenčích centimetrů čtverečných.“ „To nejde,“ namítl Rozumko. Měl pravdu? Proč?

Korespondenční seminář pro žáky 6. až 8. ročníků — KV MO Praha a gymnázium, Praha 2, Korunní, vede RNDr. J. Zhouf a Š. Kasal. Přinášíme ukázky 4. série úloh.

1. Je mezi čísla 1, 2, 3, ..., 9 999 999 více těch, která obsahují číslici 1, nebo těch ostatních?

2. Je dán obdélník $ABCD$, kde $|AB| = 3$ cm, $|BC| = 1$ cm. Na úsečce CD jsou dány body E a F tak, že $|CD| = 3|CE| = 3|EF| = 3|FD|$. Určete součet velikostí úhlů BAC , BAE a BAF .

3. Zjistěte, zda existuje trojúhelník, který má obsah větší než 1 m^2 a přitom všechny výšky menší než 1 cm.

4. Indián Jones stanul na cestě za pokladem před 111 lampami, z nichž každá byla zapnuta nebo vypnuta. Jestliže si vybere 13 lamp a mávne kouzelným proutkem, pak je přepne (tzn. ty, které byly zhasnuté, rozsvítí a naopak ty, které byly rozsvícené, zase zhasne). To může opakovat kolikrát chce. Dále však může jít až tehdy, když budou všechny lampy zhasnuty.

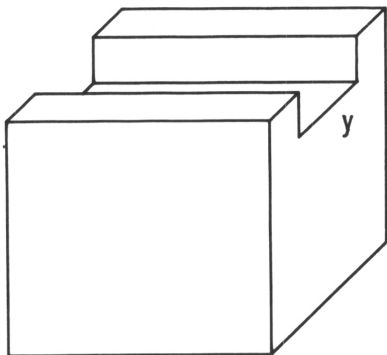
a) Podaří se — bez ohledu na počet lamp, které byly ze začátku rozsvíceny — pomocí kouzelného proutku všechny lampy zhasnout?

b) Na jaký nejmenší počet mávnutí může Jones pozhasínat všechny lampy, jestliže na začátku byly všechny rozsvíceny?

Korespondenční seminář pro žáky 7. a 8. ročníků — pobočka JČMF Jihlava, vedou V. a M. Krejčí. Autoři KS zadávali úlohy, které si navzájem předkládalo několik kamarádů.

Při řešení se seznamovali řešitelé i se jmény a úlohami některých starověkých a středověkých matematiků, mezi nimiž byli například Diofantos a Fermat. Uvedeme úlohy 2. kola.

1. V dílnách opracovávali plastickou hmotu a vyráběli pro nejmenší žáky krychličky s hranou délky 60 mm. V příští hodině měl Kamil udělat v jedné z nich výřez ve tvaru kvádrů podle obr. 55. Ale chyba lávky! Zapomněl rozměry



Obr. 55

tohoto výřezu. Ještě, že si pamatoval, že to jsou v milimetrech celá čísla. Dále věděl, že povrch tělesa, které vznikne po výřezu, bude o jednu šestinu větší, než povrch celé krychle. Délka y (obr. 55) nesmí být menší než 10 mm, ale musí být menší než 30 mm. Může Kamil úkol splnit, nebo se musí jít přiznat, že byl nepozorný a na rozměry se přesně přeptat?

2. Radek dostal jiný úkol: Kolik kvádrů s povrchem 52 cm^2 a s jedním rozměrem $a = 2\text{ cm}$ je možno sestavit z nejvíce 40 krychlí s hranou délky 1 cm? Poradíte?

3. Na zopakování úloh z 1. kola zadal Radek Kamilovi úlohu: „Vyjádři čísla 34 a 25 jako čísla rovná součtu dvou čtverců ve tvaru součtu dvou jiných čtverců.“²⁾

4. Vzpomínka na prázdniny. Kamil s Radkem se domluvili s dalšími čtyřmi kamarády, že si budou dopisovat o dvou tématech. Každý bude psát všem zbývajícím a každá dvojice (jako Kamil a Radek) má smluveno jedno téma. Kluci bezpečně zjistili, že je možno najít aspoň jednu trojici kamarádů, kteří si dopisují o stejném tématu. Zkuste to také dokázat.

Korespondenčný seminár pre žiakov 7. a 8. ročníka (PIKOMAT) seminár Zamat — MFF UK Bratislava, vedie *Z. Kocsis*. Uvádzame ukážku zimnej časti.

Kozmická loď Saturnin sa už po desaťročia plavila neko-nečnými moriami vesmírneho oceánu hľadajúc miesto, kde vesmírny pirát škuľavý Sven ukryl dôkaz Goldbachovej hypotézy, v ktorej sa tvrdí, že ľubovoľné párne číslo väčšie než dva sa dá napísať ako súčet dvoch prvočísel. Posádku lode Saturnin tvorilo sto ostrieľaných vesmírnych pirátov. Aby dlho hľadané miesto neprehliadli, boli vždy traja chlapi v službe podľa predom stanoveného harmonogramu služieb. Tento harmonogram sa snažili urobiť tak, aby v ňom bol rozpis pre všetkých sto členov posádky, ale aby žiadny dvaja nemuseli spolu slúžiť dvakrát. Samozrejme všetci musia slúžiť rovnako veľa krát.

²⁾ Jinými slovy: Najděte aspoň dvě dvojice celých nebo racionálních čísel x, y , které jsou řešením rovnice $x^2 + y^2 = 34$ a rovnice $x^2 + y^2 = 25$. Podobné úlohy řešil ve starověku řecký matematik Diofantos.

1. Pomôžte im zostaviť taký harmonogram.

Tento rok má službu trojica Joe, Bob a Georg. Joe a Bob sú vo veľine a snažia si rozdeliť kopu rombúl (vzácná plodina dorábaná na planéte Quicksort), ktoré dostali ako vylepšenie ku strave. Nie je to jednoduché lebo ich nie je párny počet. Tu Boba napadla takáto možnosť delenia:

Predpokladajme tri spôsoby delenia, z ktorých má každý tri etapy (1. a 2. etapa je zhodná pre všetky tri spôsoby):

1. etapa: Bob rozdelí kopu na dve časti, pričom v každej z nich budú aspoň dve rombuly.
2. etapa: Joe rozdelí každú časť znovu na dve časti tak, aby v každej časti zostala aspoň jedna rombula.
3. etapa: Pri 1. spôsobe Joe berie najväčšiu a najmenšiu časť.
Pri 2. spôsobe Joe berie dve stredné časti.
Pri 3. spôsobe Joe berie buď najväčšiu a najmenšiu časť, alebo dve stredné časti, ale za právo výberu musí dať Bobovi jednu rombulu.

2. Rozhodnite, ktorý spôsob je pre Joa najvýhodnejší a ktorý najmenej výhodný, ak na kope je aspoň 15 rombúl.

Georg sa medzitým pohrával s počítačom, dával si vypisovať rôzne čísla; chcel zistiť, koľko miesta zaberie 1989ciferné, tak si dal nejaké vypísať. Zabralo to necelých 25 riadkov. Keď ho už mal vygenerované, tak sa o ňom snažil dozvedieť čo najviac. Okrem iného sa o ňom dozvedel z informácií počítača, že je deliteľné deviatimi. Potom si z neho dal urobiť ciferný súčet, dostal číslo a , dal spraviť ciferný súčet a , dostal b a potom ešte raz ciferný súčet z b a dostal c .

3. Čomu sa rovná c ?

Georg po chvíľke úvah dospel k názoru, že výsledok vôbec nezávisí od toho, aké číslo mu počítač vygeneroval. Len to je podstatné, aby bolo deliteľné deviatimi.

Tomuto objavu sa veľmi potešil, chcel ho oznámiť kolegovi. Prudko vstal, pričom sa mu „podarilo“ zhodiť veľkú krištálovú kocku. Tá sa rozpadla na niekoľko štvorstenov. Aké bolo jeho prekvapenie, keď zistil, že kocka sa rozpadla na najmenší možný počet štvorstenov.

4. Na koľko častí sa rozpadla kocka?

Ako takto na lodi plynul život, ozval sa zrazu výstražný hlas riadiaceho počítača oznamujúci, že dorazili na miesto, kde je ukrytý kľúč k tajomstvu. Toto miesto stráži maják, ktorý vysiela svetelný lúč s dosvitom 56 AU. Maják sa točí okolo svojej osi a rýchlosť konca lúča je 14 AU za hodinu. Rýchlosť nášho vesmírneho korábu je 2 AU za hodinu. Ak lúč zasiahne koráb, zničí ho.

5. Poradte posádke, či sa k pokladu môže vôbec dostať, a ak áno, tak ako. Úlohu riešte len v rovine.

DALŠÍ MATEMATICKÉ SOUTĚŽE

Týmová súťaž „Dejte hlavy dohromady“ — pořádá pobočka JČMF Praha, vede doc. RNDr. M. Koman, CSc.

Soutěž je určena žákům 6. ročníků tříd s rozšířeným vyučováním matematiky a přírodovědných předmětů z Prahy a Středočeského kraje. Soutěží čtyřčlenná družstva. Předností soutěže je, že žáci mohou řešit úlohy společně, vzájemně si radit, pomáhat a kontrolovat výsledky i celá řešení.

1. Koláče

Novákovi mají čtyři kluky jako buky. Na ráno jim maminka připravila mísu koláčů. První vstával Karel a snědl jeden koláč a ještě třetinu zbylých koláčů. Druhý se probudil Jirka a rovněž snědl jeden koláč a ještě třetinu zbylých. Třetí vstával Honza a počínal si stejně jako Karel a Jirka. Zbylé koláče dojedl Pavel, který vstával poslední. Jaký nejmenší počet koláčů musel být původně na míse?

2. Rozhovor

Petr: Naši sousedé mají tři děti. Součin jejich věků je 36. Umíš určit věk dětí našich sousedů?

Karel: Údaje mi nestačí.

Petr: Součet jejich věků je shodný s číslem vašeho domu.

Karel: Ještě mi to nestačí, pořád je více možností.

Petr: Jejich nejstarší syn nosí brýle.

Karel: Nyní je mi už jasné, kolik let je dětem vašich sousedů. Je jim let.

Dovedete i vy určit věk všech tří dětí?

3. Plot

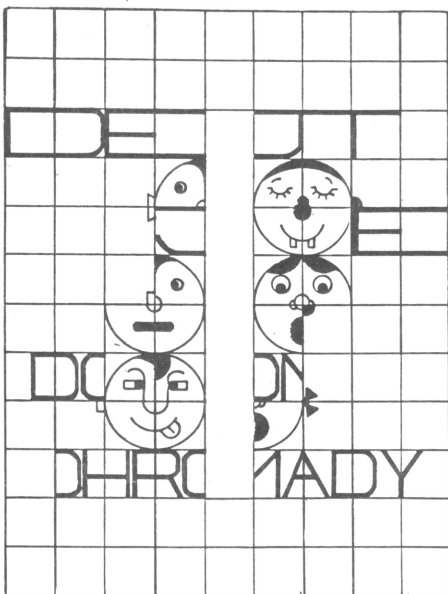
Vlnitým plechem je třeba ohradit prostranství tvaru čtverce se stranou délky 19 metrů. Dělníci mají 13 dílů délky 4 m a 8 dílů délky 3 m. Poradte, jak mají prostranství ohradit,

aniž by museli některé díly řezat nebo ohýbat. Nakreslete obrázek a vyznačte umístění dílů.

4. Přesýpací hodiny

Jirka má čtyřminutové a sedmiminutové přesýpací hodiny. Když si v kuchařské knize přečetl, že vajíčko natvrdo se vaří devět minut, zajímalo ho, zda tento čas může odměřit pomocí svých přesýpacích hodin. Po chvíli přemýšlení zjistil, že ano. Jak?

5. Plakát

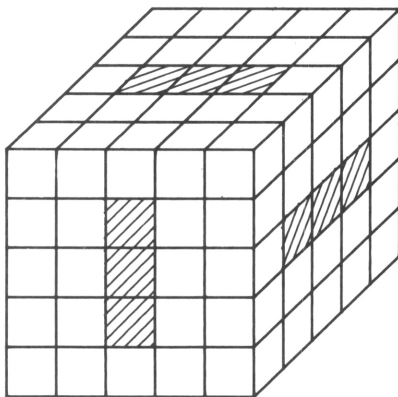


Obr. 56

Obrázek 56 rozstříhněte na dvě stejné části tak, aby jejich sestavením vznikl čtvercový plakát propagující naši soutěž.

6. Krychle

V krychli slepené ze 125 jednotkových krychlí byly provrtány 3 kolmé tunely ve tvaru hranolů, jejichž podstavy jsou vyznačeny na obrázku 57. Vypočítejte objem provrtané krychle.³⁾

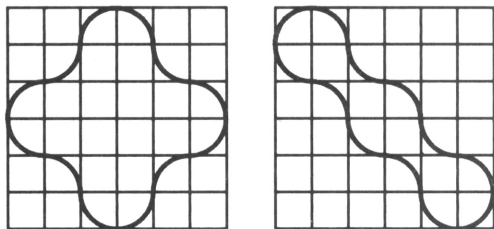


Obr. 57

7. Železnice

Díly modelu dětské železnice mají tvar čtvrtkružnic. Z nich lze sestavovat různé okružní dráhy. Na obrázku 58 jsou ukázky dvou sestavených okruhů ze 12 dílů. Nakreslete co

³⁾ Naším čtenářům doporučujeme řešit i složitější úlohu — vypočítat povrch provrtané krychle.

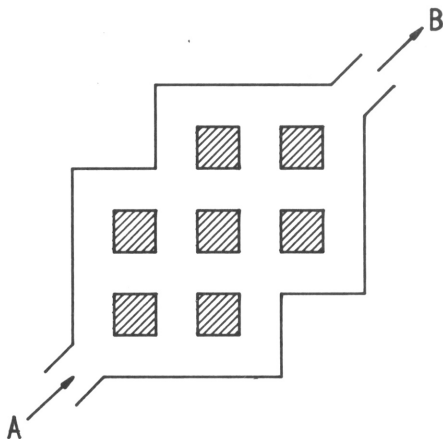


Obr. 58

největší počet okružních drah ze 16 dílů. Dráhy, které se liší jen jako levá a pravá rukavice, považujte za shodné.

8. Bludiště

V místě A vběhla do bludiště (obr. 59) vyděšená myš rodí-



Obr. 59

na. Všechny myši šťastně proběhly bludištěm do místa *B*. Z rozhovoru udýchaných myší se dozvídáme:

a) Každá myš běžela po chodbičkách jen směrem doprava a nahoru,

b) žádné dvě myši neběžely stejnou cestou,

c) kdyby bylo ještě o jednu myš více, pak by některé dvě musely běžet po stejné cestě.

Kolik členů měla myší rodina?

Týmová soutěž „Dejte hlavy dohromady“ — pořádá OPS Opava, vede RNDr. *L. Hozová*. Pravidla soutěže jsou stejná jako pravidla stejnojmenné soutěže pořádané v Praze.

1. Rozložte v rovině 10 mincí do pěti přímých řad, přičemž v každé řadě musí být čtyři mince. Kolik najdete řešení?

2. Nahraďte písmena číslicemi od 0 do 9 tak, aby platilo všech 5 rovnic:

$$AB \cdot AA = CDDC$$

$$- \qquad \qquad \qquad =$$

$$EF \cdot AA = GDDG$$

$$= \qquad \qquad \qquad +$$

$$FG \cdot AA = FDDF$$

3. Čtyři bratři zdělili zahradu, na které byly vysázeny na čtvercových záhonech 4 jabloně a 4 třešně (obr. 60). Jak se mají o zahradu podělit, aby každý dostal část zahrady stejného tvaru a stejné velikosti jako ostatní a přitom, aby měl na svém dílu jednu jabloň a jednu třešň?

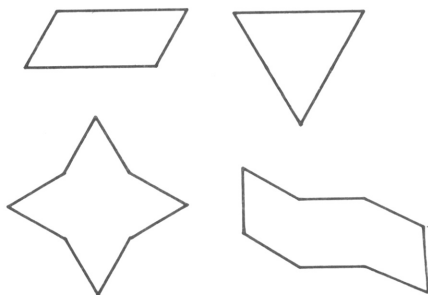
4. V jednom království byla věznice, v ní 100 cel a v každé cele byl jeden vězeň. Zámek každé cely bylo možno za-

					T
T					
	T	J	J		
		J	J		
	T				

Obr. 60

mknout pouze na 1 západ. Jednou měl král dobrou náladu a řekl si, že všechny vězně pustí na svobodu. Šel a otočil klíčem. Vězni však neutekli, protože na to nepřišli. Druhý den si král řekl, že by byl moc mírný, kdyby pustil všechny vězně. Šel a u každé druhé cely otočil klíčem. Třetí den otočil klíčem u každé třetí cely atd. až stý den u sté cely. Potom vyhlásil, že kdo není zamčen, je volný a může odejít. Určete, které cely byly odemčeny.

5. Z každé sítě z obr. 61 složte těleso.



Obr. 61

Doplňte čáry, podle kterých se musí síť přeložit.

Krajské kolo MO kategorie Z6 — pořádal pro žáky Západočeského kraje KV MO, vedla PaedDr. M. Ausbergerová.

1. Kalendář byl během roku zlevněn o 40 % a ke konci roku ještě o dvě třetiny nové ceny. Nakonec byla jeho cena snížena o další tři koruny a kalendář byl prodáván v bazaru za dvě koruny. Jaká byla jeho původní cena?

2. Je dán čtyřúhelník $ABCD$. Body E, F, G, H jsou po řadě středy stran $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$. Dokažte, že

$$|EG|(b + d) : 2, \quad |FH| < (a + c) : 2.$$

3. Kolik různých obdélníků lze sestavit z 225 čtvercových dlaždic tak, aby byly vždy všechny použity? Vypočítejte obvody a obsahy těchto obdélníků.

4. Lyžař si vypočítal, že poběží-li rychlostí 10 km za hodinu, dorazí k cíli hodinu po poledni, poběží-li rychlostí 15 km za hodinu, bude v cíli hodinu před polednem. Jakou rychlostí musí běžet, aby dorazil na místo právě v poledne?

5. V dílně vyrobili za tři dny 58 výrobků. První a druhý den vyrobili dohromady 43 výrobky, druhý a třetí den vyrobili 35 výrobků. Vypočítejte, kolik výrobků vyrobili třetí den?

Krajské kolo MO kategorie Z7 — pořádal pro žáky Západočeského kraje KV MO, vedla PaedDr. M. Ausbergerová.

1. a) Je dán čtyřúhelník $ABCD$. Dokažte, že pro délky jeho stran a úhlopříček platí:

$$a + b + c + d > u + v > (a + b + c + d) : 2.$$

b) Zahrada má tvar čtyřúhelníku se stranami délky nejvýše 100 m. Uprostřed každé strany je v plotě branka. Dokažte, že z libovolného místa na zahradě je k nejbližší brance nejvýše 50 m.

2. Jitka se o vánocích nebránila sladkostem a její hmotnost vzrostla o 5 %. Potom byla týden na horách a její hmotnost poklesla o 5 %. Má Jitka opět původní hmotnost?

3. Deset metrů vysoký stožár se zlomil tak, že jeho vrcholak se dotýká země 3 metry od paty stožáru. V jaké výšce se stožár zlomil?

4. Objem skříně je $2,5 \text{ m}^3$. Zjistěte, zda je možné do skříně uschovat tyč délky 3,4 metru. Přitom víte, že šířka skříně je čtyřikrát větší než její hloubka a její výška se rovná součtu zbývajících dvou rozměrů.

Doc. RNDr. Milan Koman, CSc. - RNDr. Vladimír Repáš

TŘICÁTÝ DEVÁTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA ZÁKLADNÍCH ŠKOLÁCH

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství Praha
roku 1992 jako svou publikaci č. D-9B-0-0-13-0-01-0

Edice Zájmové náklady

Odpovědná redaktorka Anežka Bittnerová

Výtvarná redaktorka Zdeňka Drahokoupilová

Technická redaktorka Eliška Váchová

Vytiskla Grafia Kyjov

1. vydání

ISBN 80-04-26037-3

**matematická
olympiáda**



SPN

ISBN 80-04-26037-3