

40. ročník matematické olympiády na středních školách

Leo Boček (editor); Jiří Binder (editor); Karel Horák (editor);
Václav Sedláček (editor); Pavel Töpfer (editor): 40. ročník
matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení
úloh ze soutěže konané ve školním roce 1990/1991. 32.
mezinárodní matematická olympiáda. 3. mezinárodní olympiáda
v informatice. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství,
1993.

Terms of use:

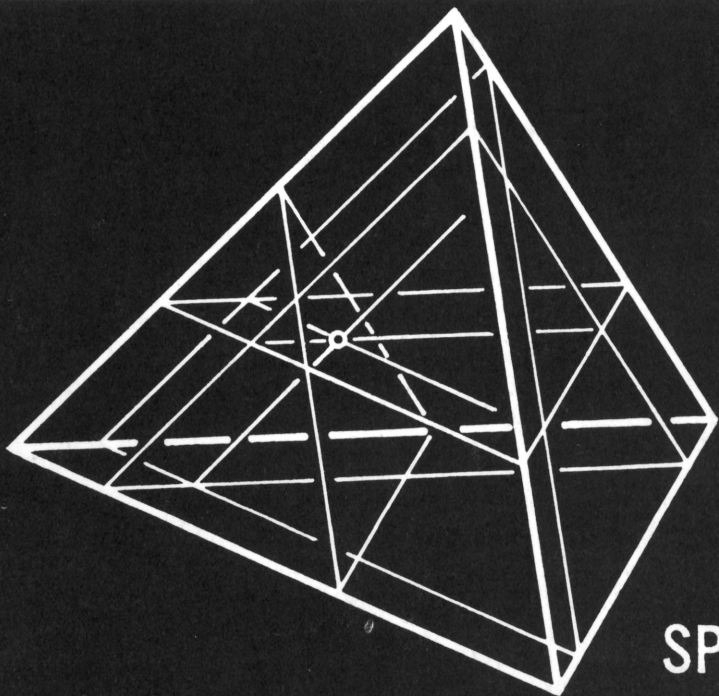
~~Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404928>~~
The Digital Mathematics Library (DML) provides access to digitized documents strictly for personal use.
Each copy of any part of this document must contain these
Terms of use.



This document has been digitized, optimized for
electronic delivery and stamped with digital
signature within the project *DML-CZ: The Czech
Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MO

**40. ročník matematické olympiády
na středních školách**



SPN

ČTYŘICÁTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1990/1991

32. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA
TŘETÍ MEZINÁRODNÍ OLYMPIÁDA V INFORMATICE

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ PRAHA

Za přispění spolupracovníků zpracovali
doc. RNDr. Leo Boček, CSc., RNDr. Jiří Binder, CSc.,
RNDr. Karel Horák, CSc., doc. RNDr. Václav Sedláček, CSc.
RNDr. Pavel Töpfer, CSc.

© Leo Boček za kolektiv, 1993

ISBN 80-04-26407-7

Obsah

O průběhu 40. ročníku matematické olympiády	5
Kategorie C	38
Texty úloh	38
Řešení úloh	42
Kategorie B	53
Texty úloh	53
Řešení úloh	56
Kategorie A	65
Texty úloh	65
Řešení úloh	69
Kategorie P	91
Texty úloh	91
Řešení úloh	100
Korespondenční seminář ÚV MO 1990/91	130
Texty úloh	131
Řešení úloh	138
32. Mezinárodní matematická olympiáda	205
Texty soutěžních úloh	206
Řešení úloh	208
Třetí mezinárodní olympiáda v informatice	217
Texty soutěžních úloh	219

O průběhu 40. ročníku matematické olympiády

Soutěž Matematická olympiáda pořádají pro žáky středních a základních škol Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR, Ministerstvo školství, mládeže a sportu SR ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků, Jednotou slovenských matematiků a fyziků a Matematickým ústavem ČSAV. Soutěž řídí ústřední výbor matematické olympiády (ÚV MO) prostřednictvím krajských a okresních výborů matematické olympiády (KV MO, OV MO).

Cílem soutěže je vyhledávání žáků talentovaných v matematice, probouzení jejich hlubšího zájmu o matematiku a rozvíjení jejich matematických schopností. V školním roce 1990/91 se uskutečnil její jubilejní, 40. ročník.

Ústřední výbor MO pracoval ve složení, v němž byl jmenován ministerstvy školství ČR a SR na pětileté období při zahájení 39. ročníku. Předsedou ÚV MO byl doc. dr. Leo Boček, CSc., z MFF UK v Praze, tajemníky byli dr. Karel Horák, CSc., z MÚ ČSAV v Praze a dr. Jiří Binder, CSc., z PF UK v Praze. V průběhu roku došlo k několika změnám. Především se na návrh předsednictva ÚV MO a Jednoty českých a slovenských matematiků a fyziků znovu stali členy PÚV MO prof. Jozef Moravčík a dr. Antonín Vrba, kterým byla v minulém období práce v MO znemožněna. Zástupcem MŠMS SR v PÚV MO se stal dlouholetý pracovník v oblasti výchovy matematických

talentů dr. Vladimír Burjan. Poslední změna nastala v Brně, kde v práci v ÚV MO vystřídal dr. Luboš Brima doc. dr. Václav Sedláček, CSc., z přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně.

V průběhu 40. ročníku MO se konala dvě zasedání ÚV MO, první ve dnech 4. prosince 1990 v Brně, druhé 22.–23. 4. 1991 v Nitře při celostátním kole MO. Bylo projednáváno hodnocení průběhu soutěže, zabezpečení celostátních soustředění úspěšných řešitelů MO včetně soustředění pro přípravu na MMO, korespondenční seminář ÚV MO a organizace dalších kol soutěže. Byla diskutována vhodnost výběru úloh MO.

Hlavním předmětem jednání během obou zasedání byl dopad změn probíhajících v našem státě na ekonomické zabezpečení a na organizaci MO. Bylo nutno reagovat zejména na situaci vzniklou zrušením krajů a v návaznosti s tím i na zrušení krajských pedagogických ústavů, které v minulých ročnících pomáhaly zajišťovat krajská kola soutěže i další pomocné akce. Bylo nutno najít nový způsob financování zejména akcí zabezpečovaných krajskými výbory MO.

V průběhu tohoto ročníku došlo ke změně územně-správního uspořádání ČSFR. Organizace matematické olympiády se týkalo především zrušení krajů, neboť druhá kola soutěže byla pořádána jako krajská a celá soutěž byla organizována prostřednictvím krajských výborů MO. Proto byly v závěru ročníku krajské výbory MO přeměněny na oblastní výbory v návaznosti na pobočky JČMF a JSMF. V dalším textu včetně výsledkových listin budeme uvažovat organizaci tak, jak byla při zahájení ročníku a jak také soutěž v podstatě proběhla.

V organizaci vlastní soutěže nedošlo k žádným změnám. Pro žáky základních škol byla soutěž rozdělena do pěti kategorií Z4, Z5, Z6, Z7 a Z8, které byly určeny postupně žákům 4. až 8. ročníku. Podrobnosti mohou najít zájemci v brožurce Koman a kol.: *40. ročník MO na základních školách*, která vyjde současně s touto brožurkou.

Pro žáky středních škol byla soutěž organizována ve čtyřech kategoriích A, B, C a P. Kategorie A byla určena žákům 3. a 4. ročníků středních škol, kategorie B byla pro žáky 2. ročníků a v kategorii C soutěžili žáci 1. ročníků. Pro žáky všech tříd středních škol byla určena ještě kategorie P, zaměřená na úlohy z programování a matematické informatiky.

V kategoriích A, B a C má I. kolo dvě části. V první části řeší soutěžící 6 úloh doma nebo v matematických kroužcích a mohou se přitom radit se svými učiteli, vedoucími kroužků apod. Druhá část má formu klauzurní práce, v níž řeší žáci tři úlohy v omezeném čase 4 hodin. Řešitelé, kteří úspěšně projdou prvním kolem, jsou pozváni do druhého (krajského) kola soutěže, kde řeší čtyři úlohy opět v limitu čtyř hodin.

V kategoriích A a P se koná ještě třetí, celostátní kolo. V něm je vlastní soutěž rozdělena do dvou dnů. V kategorii A řeší soutěžící každý den tři úlohy v časovém limitu čtyři hodiny, v kategorii P ve stejném limitu vždy dvě úlohy.

Celostátní kolo 40. ročníku se uskutečnilo Nitře ve dnech 21.–24. 4. 1991 (kat. A) a 24.–27. 4. 1991 (kat. P). Na zabezpečení soutěže včetně bohatého doprovodného programu pro soutěžící i členy ÚV MO se obětavě podíleli členové KV MO Západoslovenského kraje, pracovníci katedry matematiky pedagogické fakulty v Nitře i spolupořádajícího domu

dětí a mládeže IUVENTA z Bratislavy. Za všechny jmenujme alespoň předsedu KV MO prof. dr. Ondřeje Šedivého, CSc., a Vlastu Michálkovou z bratislavské IUVENTY.

Vybrané družstvo se zúčastnilo mezinárodní matematické olympiády i mezinárodní soutěže v programování. Těmto soutěžím je věnována samostatná kapitola v závěru brožury.

K matematické olympiádě vedle vlastní soutěže patří i řada doprovodných akcí pro talentované žáky. Z akcí pořádaných krajskými výbory MO k nim zejména patří semináře pro řešitele MO a krajské korespondenční semináře. Pro nejúspěšnější řešitele krajských kol MO a korespondenčních seminářů byla pořádána (většinou týdenní) soustředění. Pro učitele připravily krajské výbory MO instruktáže.

Ústřední výbor MO zajišťoval tři celostátní soustředění. Pro žáky nematurujících ročníků to bylo již tradiční soustředění 80 řešitelů úloh MO a FO. Proběhlo ve dnech 11.–22. 6. 1991 v Jevíčku. Další dvě soustředění byla věnována přípravě československého družstva na mezinárodní matematickou olympiádu. První se konalo 28. 3.–5. 4. 1991 v Modré u Bratislavy (12 účastníků), druhé 13.–27. 6. 1991 v Pardubicích (8 účastníků). ÚV MO též zajišťoval celostátní korespondenční seminář (semináři je věnována samostatná část této brožury).

Tabulka 1

Počty středních škol zapojených do 40. ročníku MO

Kraj	Gymnázia					Ostatní střední školy				
	zapojeno v kategoriích				aspoň v jedné kategoriích	zapojeno v kategoriích			aspoň v jedné kategoriích	
	A	B	C	P		A	B	C		P
Praha	10	12	13	7	15	1	1	0	0	2
Středočeský	22	21	21	5	23	2	2	3	0	5
Jihočeský	11	12	14	4	15	1	1	2	0	2
Západočeský	9	12	13	4	13	0	1	6	0	6
Severočeský	14	17	13	0	17	5	5	4	0	5
Východočeský	nedodáno									
Jihomoravský	23	27	28	5	31	1	4	4	0	5
Severomoravský	32	29	19	6	39	0	0	7	0	7
Bratislava	9	11	11	1	11	0	1	1	0	1
Západoslovenský	37	42	54	13	55	0	0	0	0	0
Středoslovenský	11	11	20	1	20	0	1	3	0	3
Východoslovenský	22	27	31	9	34	3	3	16	1	17
ČR	121	130	121	31	153	10	14	26	0	32
SR	79	91	116	24	120	3	5	20	1	21
ČSFR	200	221	237	55	273	13	19	46	1	53

Počty žáků středních škol soutěžících v I. kole 40. ročníku MO

Kraj	Kategorie												Celkem	
	A		B		C		P							
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	110	58	93	52	88	60	26	26	26	26	317	196		
Středočeský	163	28	152	40	151	47	14	14	14	14	480	129		
Jihočeský	95	48	72	30	94	48	11	6	11	6	272	132		
Západočeský	51	35	72	34	97	66	10	6	10	6	230	141		
Severočeský	203	14	104	28	92	55	0	0	0	0	399	97		
Východočeský	nedodáno													
Jihomoravský	238	98	215	105	222	132	21	16	21	16	696	351		
Severomoravský	264	84	214	84	212	76	21	18	21	18	711	262		
Bratislava	129	77	144	63	168	94	16	15	16	15	457	249		
Západoslovenský	180	147	230	197	301	272	35	27	35	27	746	643		
Středoslovenský	105	47	96	72	136	93	6	4	6	4	343	216		
Východoslovenský	201	78	221	105	333	165	38	38	38	38	793	386		
ČR	1 124	365	922	373	956	484	103	86	103	86	3 105	1 308		
SR	615	349	691	437	938	624	95	84	95	84	2 339	1 494		
ČSFR	1 739	714	1 613	810	1 894	1 108	198	170	198	170	5 444	2 802		

S ... počet všech soutěžících

U ... počet úspěšných řešitelů

Tabulka 3

Počty žáků středních škol soutěžících v II. kole 40. ročníku MO

Kraj	Kategorie								Celkem	
	A		B		C		P		S	U
	S	U	S	U	S	U	S	U		
Praha	56	24	49	27	58	45	26	12	189	108
Středočeský	28	3	34	6	41	11	14	6	117	26
Jihočeský	44	9	26	19	46	30	6	4	122	62
Západočeský	33	6	34	15	60	44	6	5	133	70
Severočeský	11	5	22	6	47	22	0	0	80	33
Východočeský	nedodáno									
Jihomoravský	84	26	87	28	118	61	15	7	304	122
Severomoravský	84	11	82	31	74	41	18	10	258	93
Bratislava	74	25	59	32	88	55	15	8	236	120
Západoslovenský	113	5	133	9	188	67	27	10	461	91
Středoslovenský	44	10	67	17	91	59	4	2	206	88
Východoslovenský	78	11	92	15	154	64	30	13	354	103
ČR	340	84	334	132	444	254	85	44	1 203	514
SR	309	51	351	73	521	245	76	33	1 257	402
ČSFR	649	135	685	205	965	499	161	77	2 460	916

S ... počet všech soutěžících

U ... počet úspěšných řešitelů

Počty účastníků III. kola 40. ročníku MO kategorie A a P

Kraj	Kategorie A			Kategorie P		
	Počet účastníků	Úspěšných řešitelů	Z toho vítězů	Počet účastníků	Úspěšných řešitelů	Z toho vítězů
Praha	15	8	3	11	7	2
Středočeský	1	0	0	2	1	0
Jihočeský	6	2	1	2	1	1
Západočeský	3	2	0	1	1	0
Severočeský	1	1	0	0	0	0
Východočeský	4	2	1	6	2	0
Jihomoravský	17	9	4	7	3	0
Severomoravský	2	2	0	1	1	1
Bratislava	20	8	5	8	5	4
Západoslovenský	1	1	0	5	0	0
Středoslovenský	4	1	1	0	0	0
Východoslovenský	4	4	1	6	4	2
ČR	49	26	9	30	16	4
SR	29	14	7	19	9	6
ČSFR	78	40	16	49	25	10

Výsledky celostátního kola 40. ročníku MO
kategorie A

Vítězové

1.-2.	<i>Štěpán Kasal</i> , 4M, Korunní, Praha	40 b.
	<i>Michal Kubeček</i> , 3M, Korunní, Praha	40 b.
3.	<i>Michal Konečný</i> , 4M, tř. kpt. Jaroše, Brno	38 b.
4.-8.	<i>Viliam Búr</i> , 2M, G A. Markuša, Bratislava	35 b.
	<i>Peter Langfelder</i> , 4MF, GJH, Bratislava	35 b.
	<i>Petr Tobiška</i> , 4M, Tylovo nám., Hr. Králové	35 b.
	<i>Michal Stehlík</i> , 3M, tř. kpt. Jaroše, Brno	35 b.
	<i>Ladislav Kis</i> , 3M, G A. Markuša, Bratislava	35 b.
9.	<i>Richard Kollár</i> , 3M, GAM, Bratislava	32 b.
10.	<i>Katarína Skalová</i> , 2M, GAM, Bratislava	30 b.
11.-16.	<i>Juraj Lorinc</i> , 4M, Tajovského, Ban. Bystrica	29 b.
	<i>Miroslav Chladný</i> , 3M, Pivovarská, Košice	29 b.
	<i>Pavel Růžička</i> , 3M, tř. kpt. Jaroše, Brno	29 b.
	<i>Zdeněk Pezlar</i> , 4M, tř. kpt. Jaroše, Brno	29 b.
	<i>Michal Schenk</i> , 3M, Jírovcova, Č. Budějovice	29 b.
	<i>Jan Kolář</i> , 4M, Korunní, Praha	29 b.

Další úspěšní řešitelé

17.-23.	<i>Filip Műntz</i> , 3M, tř. kpt. Jaroše, Brno	28 b.
	<i>Luboš Motl</i> , 3MF, Opavská, Plzeň	28 b.

	<i>Jakub Těšínský</i> , 4M, Korunní, Praha	28 b.
	<i>Jan Kasprzak</i> , 4M, tř. kpt. Jaroše, Brno	28 b.
	<i>Pavol Mederly</i> , 3M, GAM, Bratislava	28 b.
	<i>Luboš Pástor</i> , 3M, Pivovarská, Košice	28 b.
	<i>Herbert Vojčík</i> , 3M, Pivovarská, Košice	28 b.
24.–26.	<i>Michal Bulant</i> , 4M, tř. kpt. Jaroše, Brno	27 b.
	<i>Tomáš Zellerin</i> , 3MF, Jateční, Ústí n. L.	27 b.
	<i>Aleš Kuběna</i> , 4M, 17. listopadu, Bílovec	27 b.
27.–28.	<i>Karel Soukeník</i> , 4M, Mikuláš. nám., Plzeň	26 b.
	<i>Martin Panák</i> , 4M, tř. kpt. Jaroše, Brno	26 b.
29.–30.	<i>Pavel Juruš</i> , 2M, Jírovcova, Č. Budějovice	25 b.
	<i>Novák Vít</i> , 2M, Korunní, Praha	25 b.
31.–33.	<i>Pavel Čížek</i> , 4M, Tylovo nám., Hradec Kr.	24 b.
	<i>Martin Schnábl</i> , 4M, Korunní, Praha	24 b.
	<i>Šrefankovič Daniel</i> , 2M, GAM, Bratislava	24 b.
34.–36.	<i>Jan Hannig</i> , 4M, Korunní, Praha	22 b.
	<i>Michal Brodský</i> , 3M, tř. kpt. Jaroše, Brno	22 b.
37.–40.	<i>Slavomír Hrinko</i> , 4MF, Konštantínova, Prešov	22 b.
	<i>Vladimír Špitalský</i> , 4M, GAM, Bratislava	21 b.
	<i>Pavčina Čapková</i> , 3, Štěpánská, Praha	21 b.
	<i>Mario Boháč</i> , 4M, 17. listopadu, Bílovec	21 b.
	<i>Radovan Garabík</i> , 3MF, G E. Gudernu, Nitra	21 b.

U tříd se zaměřením studijního oboru 01 Matematika je za ročníkem označení M, u žáků z tříd se zaměřením studijního oboru 02 Matematika a fyzika je za ročníkem označení MF. Všichni soutěžící byli žáci gymnázia.

*Pořadí úspěšných řešitelů z tříd,
které nejsou se zaměřením studijního oboru 01 Matematika*

- | | | |
|-------|--|-------|
| 1. | <i>Peter Langfelder</i> , 4MF, G J. Hronca, Bratislava | 35 b. |
| 2.-3. | <i>Juraj Lorinc</i> , 4M, Tajovského, Ban. Bystrica | 29 b. |
| | <i>Miroslav Chladný</i> , 3M, Pivovarská, Košice | 29 b. |
| 4.-6. | <i>Luboš Motl</i> , 3MF, Opavská, Plzeň | 28 b. |
| | <i>Luboš Pástor</i> , 3M, Pivovarská, Košice | 28 b. |
| | <i>Herbert Vojčík</i> , 3M, Pivovarská, Košice | 28 b. |
| 7. | <i>Tomáš Zellerin</i> , 3MF, Jateční, Ústí n. L. | 27 b. |
| 8. | <i>Karel Soukeník</i> , 4M, Mikuláš. nám., Plzeň | 26 b. |

U tříd se zaměřením studijního oboru 02 Matematika a fyzika je za ročníkem označení MF. Všichni úspěšní řešitelé byli žáci gymnázia.

Výsledková listina celostátního kola 40. ročníku MO
kategorie P

Vítězové

1.-2.	<i>Matej Ondrušek</i> , 2, G J. Hronca, Bratislava	34 b.
	<i>Martin Vojtko</i> , 4, G J. Hronca, Bratislava	34 b.
3.	<i>Štěpán Kasal</i> , 4, Korunní, Praha	33 b.
4.	<i>Herbert Vojčík</i> , 3, Šmeralova, Košice	32 b.
5.-7.	<i>Miroslav Kočan</i> , 4, G J. Hronca, Bratislava	31 b.
	<i>Radim Moric</i> , 4, GMK Bílovec	31 b.
	<i>Jaroslav Šprongl</i> , 4, Korunní, Praha	31 b.
8.	<i>Tomáš Vinař</i> , 1, Šrobárova, Košice	30 b.
9.-10.	<i>Igor Malý</i> , 4, G J. Hronca, Bratislava	29 b.
	<i>Milan Šimánek</i> , 4, Pelhřimov	29 b.

Další úspěšní řešitelé

11.-13.	<i>Radovan Brečka</i> , 4, Snina	27 b.
	<i>Jan Hannig</i> , 4, Korunní, Praha	27 b.
	<i>Zdeněk Pezlar</i> , 4, tř. kpt. Jaroše, Brno	27 b.
14.	<i>Petr Novotný</i> , 3, Korunní, Praha	26 b.
15.-18.	<i>Jan Kotas</i> , 3, Plzeň	25 b.
	<i>Petr Tobiška</i> , 4, GJK Hradec Králové	25 b.
	<i>Jakub Těšínský</i> , 4, Korunní, Praha	25 b.
	<i>Ľubomír Zlacký</i> , 4, Michalovce	25 b.

19.	<i>Martin Stanek</i> , 4, G J. Hronca, Bratislava	24 b.
20.-23.	<i>Pavel Čížek</i> , 4, Hradec Králové	23 b.
	<i>Miroslav Kovář</i> , 3, Vídeňská, Brno	23 b.
	<i>Vít Novák</i> , 2, Korunní, Praha	23 b.
	<i>Michal Relich</i> , 4, tř. kpt. Jaroše, Brno	23 b.
24.-25.	<i>Jan Hruža</i> , 4, Korunní, Praha	22 b.
	<i>Karel Sršeň</i> , 3, Benešov	22 b.

U tříd se zaměřením studijního oboru 01 Matematika je za ročníkem označení M, u žáků z tříd se zaměřením studijního oboru 02 Matematika a fyzika je za ročníkem označení MF. Všichni úspěšní řešitelé byli žáci gymnázia.

Nejúspěšnější řešitelé II. kola MO
v kategoriích A, B, C a P

Z každého kraje a z každé kategorie je uvedeno nejvýše prvních deset řešitelů. Označení G znamená gymnázium, M, resp. MF zaměření studijního oboru 01 Matematika, resp. 02 Matematika a fyzika.

Praha

Kategorie A

- 1.–2. *Štěpán Kasal*, 4, G, Korunní
Jakub Těšínský, 4, G, Korunní
- 3.–4. *Michal Kubeček*, 3, G, Korunní
Petr Novotný, 3, G, Korunní
- 5. *Jan Hannig*, 4, G, Korunní
- 6. *Antonín Jančařík*, 4, G, Korunní
- 7. *Jan Kolář*, 4, G, Korunní
- 8. *Vít Novák*, 2, G, Korunní
- 9. *Martin Schnabl*, 4, G, Korunní
- 10.–11 *David Bezdek*, 4, G, U libeňského zámku
Petr Mourek, 4, G, Korunní

Kategorie B

1. *Jiří Vaníček*, 2, G, Korunní
2. *Vít Novák*, 2, G, Korunní
3. *Cyril Sochor*, 2, G, Korunní
- 4.–5. *Tomáš Dušek*, 2, G, Korunní
Tomáš Petrán, 2, G, Korunní
- 6.–7. *Jakub Adámek*, 2, G, Korunní
Petr Holman, 2, G, Korunní
- 8.–10. *Jiří Hanika*, 2, G, Korunní
Tomáš Kočka, 2, G, U libeňského zámku
Pavel Kos, 2, G, Voděradská

Kategorie C

- 1.–3. *Václav Čapek*, 1, G, Sladkovského
Jiří Kosek, 1, G, Korunní
Alena Nováková, 1, G, Korunní
- 4.–5. *Anna Matoušková*, 1, G, Korunní
Lukáš Procházka, 1, G, Litoměřická
- 6.–7. *Robert Chudý*, 1, G, Korunní
Jan Vaněk, 1, G, Korunní

Kategorie P

1. *Jan Hanning*, 4, G, Korunní
2. *Jaroslav Šprongl*, 4, G, Korunní
3. *Petr Novotný*, 3, G, Korunní
- 4.–8. *Jan Hruža*, 4, G, Korunní
Štěpán Kasal, 4, G, Korunní

- Michal Koucký*, 3, G, Korunní
Michal Kubeček, 3, G, Korunní
Jan Kybic, 3, G, Korunní
9. *Martin Mareš*, 8, ZŠ Na Šutce
10. *Jakub Těšínský*, 4, G, Korunní

Středočeský kraj

Kategorie A

- 1 *Tomáš Němec*, 3M, G, Beroun
2.-3. *Miroslav Bárta*, 4M, G, Benešov
Josef Soukal, 4M, G, Mladá Boleslav

Kategorie B

- 1.-2. *Jan Bláha*, 2M, G, Beroun
Martin Janeček, 2M, G, Mladá Boleslav
3.-4. *Karel Duda*, 2M, G, Kladno
Vít Šebek, 2M, G, Beroun
5. *Strnad Jakub*, 2, G, Mladá Boleslav
6. *Jan Korbelař*, 2, G, Český Brod

Kategorie C

1. *Petr Ivančák*, 1, G, Příbram
2. *David Sitenský*, 1M, G, Kladno
3.-4. *Martin Havelka*, 1, G, Benešov
Martina Trejbalová, 1M, G, Beroun
5. *Renata Šlehoferová*, 1M, G, Beroun

6. *Miroslava Karásková*, 1M, G, Kolín
- 7.–8. *Lenka Faltinová*, 1M, G, Kolín
Michal Hruška, 1, G, Dobříš
9. *Patrik Kučera*, 1M, G, Kladno
- 10.–11 *Martin Mašata*, 1M, G, Beroun
Hana Vlachová, 1, G, Vlašim

Kategorie P

1. *Martin Helmich*, 3M, G, Mladá Boleslav
2. *Karel Sršeň*, 3M, G, Benešov
3. *Tomáš Pračka*, 4, G, Říčany
4. *Tomáš Němec*, 3M, G, Beroun
5. *Lenka Kurzveilová*, 4M, G, Mladá Boleslav
6. *Pavel Bůžek*, 3, G, Vlašim

Jihočeský kraj

Kategorie A

1. *Jiří Fontán*, 4, G, Jírovcova, České Budějovice
2. *Monika Mertenová*, 3, G, Jírovcova, Č. Budějovice
- 3.–4. *Ondřej Cikhart*, 3, G, Tábor
Michael Schenk, 3, G, Jírovcova, České Budějovice
- 5.–6. *Pavel Juruš*, 2, G, Jírovcova, České Budějovice
Milan Šimánek, 4, G, Pelhřimov
7. *Petr Macháček*, 3, G, Pelhřimov
8. *Josef Lexa*, 4, G, Jírovcova, České Budějovice
9. *Libuše Štěpničková*, 3, G, Písek

Kategorie B

1. *Pavel Juruš*, 2, G, Jírovcova, České Budějovice
- 2.-3. *Luděk Hájiček*, 2, G, Jírovcova, České Budějovice
David Kimr, 2, G VJ České Budějovice
4. *Jakub Řídel*, 2, G VJ České Budějovice
5. *Vojtěch Franěk*, 2, G, Jírovcova, České Budějovice
- 6.-7. *Jana Hözllová*, 2, G, Jírovcova, České Budějovice
Aleš Jelínek, 2, G VJ České Budějovice
- 8.-12. *Miloš Beran*, 2, G, Pelhřimov
Pavel Fořt, 2, G, Jírovcova, České Budějovice
Daniel Kálal, 2, G, Písek
Petra Miksová, 2, G, Jírovcova, České Budějovice
Zdeněk Vlček, 2, G, Jírovcova, České Budějovice

Kategorie C

1. *Ondřej Mareš*, 1, G, Jírovcova, České Budějovice
2. *Ondřej Pangrác*, 1, G, Pelhřimov
- 3.-6. *Jaroslav Hamrle*, 1, G, Pelhřimov
Tomáš Mrkvička, 1, G, Strakonice
Jana Packová, 1, G, Jindřichův Hradec
Ondřej Stašek, 1, G, Jírovcova, České Budějovice
7. *Josef Škopek*, 1, G, Jírovcova, České Budějovice
- 8.-9. *Miroslav Norek*, 1, G, Pelhřimov
Roman Otec, 1, G, Jírovcova, České Budějovice

Kategorie P

1. *Milan Šimánek*, 4, G, Pelhřimov

2. *Roman Filipský*, 3, G, Písek
3. *Petr Macháček*, 3, G, Pelhřimov
4. *Richard Vlk*, 4, G, Pelhřimov

Západočeský kraj

Kategorie A

1. *Luboš Motl*, 3M, 3. G, Plzeň
- 2.–3. *Jaroslav Kaas*, 3M, 1. G, Plzeň
Karel Soukeník, 4M, 1. G, Plzeň
4. *Jan Kotas*, 3M, 1. G, Plzeň
5. *Jan Smolík*, 3M, 1. G, Plzeň
6. *Miroslav Orság*, 3P, G, Klatovy

Kategorie B

1. *Jiří Černý*, 2M, 1. G, Plzeň
- 2.–4. *Jitka Drábková*, 2M, 1. G, Plzeň
Tomáš Kubr, 2M, 2. G, Plzeň
Pavel Wünsch, 2, G, Rokycany
- 5.–6. *Romana Lavičková*, 2M, 1. G, Plzeň
7. *Jindřich Kňourek*, 2M, 1. G, Plzeň
- 8.–10. *Luďek Hynčík*, 2M, G, Domažlice
Jan Krapáč, 2, G, Ostrov
Miroslav Skala, 2, 2. G, Plzeň

Kategorie C

1. *Petr Vachovec*, 1M, 1. G, Plzeň
2. *Jan Pospíšil*, 1M, 1. G, Plzeň
3. *Petr Písek*, 1M, 1. G, Plzeň
- 4.-8. *Jiří Čížek*, 1M, 2. G, Plzeň
Jan Fiala, 1M, 1. G, Plzeň
Marek Vacka, 1M, G, Domažlice
Irena Zámečnicková, 1M, 1. G, Plzeň
Jiří Štika, 1M, G, Karlovy Vary
9. *Eva Wenigrová*, 1M, G, Karlovy Vary

Kategorie P

1. *Jan Kotas*, 3, 1. G, Plzeň
2. *Jaroslav Kaas*, 3, 1. G, Plzeň
3. *Martin Čihák*, 4, G, Karlovy Vary
- 4.-5. *Petr Froňek*, 3, 1. G, Plzeň
Aleš Zídek, 4, 3. G, Plzeň

Severočeský kraj

Kategorie A

1. *Tomáš Zellerin*, 3, G, Jateční, Ústí nad Labem
- 2.-3. *Jiří Fiala*, 4, G, Partyzánská, Liberec
Zdeněk Slavík, 4, G, Děčín
4. *Radek Škoda*, 4, G, Partyzánská, Liberec
5. *Filip Bartl*, 4, G, Partyzánská, Liberec

Kategorie B

1. *Pavel Pelc*, 2M, G, Teplice
2. *Martin Kačer*, 2M, G, Partyzánská, Liberec
- 3.–4. *Michal Gust*, 2 SPŠ Chomutov
Sylvia Sydvalová, 2M, G, Teplice
5. *Daniel Havalka*, 2M, G, Partyzánská, Liberec
6. *Jan Kudrna*, 2P, G, Litoměřice

Kategorie C

1. *Vladimír Beran*, 1M, G, Kadaň
- 2.–3. *Jaroslav Pisk*, 1M, G, Partyzánská, Liberec
Petr Schlösinger, 1M, G, Děčín
- 4.–5. *Jan Birčák*, 1M, G, Partyzánská, Liberec
Michal Kaut, 1M, G, Partyzánská, Liberec
6. *Miroslav Bulín*, 1M, G, Partyzánská, Liberec
- 7.–10. *Karel Diviš*, 1M, G, Partyzánská, Liberec
Jan Dostál, 1, G, Chomutov
Petr Kratochvíl, 1, G, Frýdlant
Jaroslav Sazama, 1, G, Rumburk

Východočeský kraj

Kategorie A

1. *Petr Tobiška*, 4M, G J. K. Tyla, Hradec Králové
2. *Pavel Čížek*, 4M, G J. K. Tyla, Hradec Králové
3. *Jiří Lakosil*, 4M, G J. K. Tyla, Hradec Králové
4. *Martin Dvořák*, 3, G, Pardubice

5. *Martin Středa*, 4, G, Vrchlabí

Kategorie B

1. *Rudolf Čejka*, 2, G J. K. Tyla, Hradec Králové
2. *Michal Šorel*, 2, G, Pardubice
3. *Jan Kříž*, 2, G, B. Němcové, Hradec Králové
- 4.–5. *Marek Černý*, 2, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Roman Konečný, 2, G, Pardubice
6. *Petr Plašil*, 2, G, Pardubice
- 7.–9. *Jan Mocek*, 2, G, Pardubice
Martin Rosenbach, 2, GJKT, Hradec Králové
Petr Gregor, 2, G, Chotěboř

Kategorie C

1. *Jiří Hartman*, 1, G J. K. Tyla, Hradec Králové
2. *Karel Houfek*, 1, G J. K. Tyla, Hradec Králové
- 3.–8. *Ladislav Ostrý*, 1, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Michal Johanis, 1, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Boris Letocha, 1, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Petr Chmelíček, 1, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Petr Čermák, 1, G, B. Němcové, Hradec Králové
Luboš Veselý, 1, G, Vrchlabí
- 9.–10. *Jaroslav Rejda*, 1, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Radek Bohata, 1, G, B. Němcové, Hradec Králové

Kategorie P

1. *Pavel Čížek*, G J. K. Tyla, Hradec Králové

2. *Petr Tobiška*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
3. *Antonín Blatný*, G, Pardubice
4. *Aleš Makarov*, G, Pardubice
- 5.-6 *Boris Lechota*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Michal Šorel, G, Pardubice

Jihomoravský kraj

Kategorie A

- 1.-3. *Michal Bulant*, 4M, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Zdeněk Pezlar, 4M, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Michal Stehlík, 3M, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
- 4.-5. *Michal Konečný*, 4M, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Filip Münz, 3M, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
- 6.-8. *Pavel Růžička*, 4M, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Pavel Vrbachý, 3M, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Milan Zamazal, 4M, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
- 9.-12. *Oldřich Auda*, 4M, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Jiří Kalvoda, 4M, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Jan Mutl, 3M, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Martin Panák, 4M, G, tř. kpt. Jaroše, Brno

Kategorie B

1. *Ondřej Klíma*, 2M, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
2. *Petr Konečný*, 2M, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
- 3.-5. *David Kruml*, 2M, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Markéta Kyloušková, 2M, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Markéta Trefilová, 2M, G, tř. kpt. Jaroše, Brno

6. *Alena Burešová*, 2M, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
7.–8. *Miroslav Fitz*, 2M, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Václav Komínek, 2M, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
9. *Rostislav Frélich*, 2M, G, Prostějov

Kategorie C

- 1.–2. *Michal Andrlík*, 1P, G, Boskovice
Iveta Tomenendálová, 1M, G, Jihlava
3.–6. *Dana Černá*, 1M, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Helena Hanáková, 1P, G, Prostějov
Petr Novák, 1M, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Pavel Stehlík, 1M, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
7.–8. *Jan Hradil*, 1M, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Blažej Neraďílek, 1M, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
9.–10. *Martina Benešová*, 1M, G, Jihlava
Michal Slanina, 1M, G, tř. kpt. Jaroše, Brno

Kategorie P

1. *Michal Relich*, 4, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
2. *Zdeněk Pezlar*, 4, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
3. *Jan Kasprzak*, 4, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
4. *Miroslav Kovář*, 3, G, Vídeňská, Brno
5.–7. *Petr Dobiáš*, 4, G, Žďár n.Sázavou
Milan Sedláček, 4, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Jana Syrovátková, 2, G, tř. kpt. Jaroše, Brno

Severomoravský kraj

Kategorie A

1. *Aleš Kuběna*, 4M, G, Bílovec
2. *Mario Boháč*, 4M, G, Bílovec
- 3.–5. *Radek Horenský*, 4M, G, J. z Poděbrad, Olomouc
Martin Kubacki, 4M, G, Bílovec
Pavel Rychlý, 4M, G, J. z Poděbrad, Olomouc
6. *Jiří Chamrád*, 3M, G, Bílovec
- 7.–8. *Ondřej Kameník*, 3M, G, Bílovec
Robert Wadura, 4M, G, Bílovec
- 9.–11. *Oldřich Doseděl*, 4M, G, Bílovec
David Žák, 3M, G, Bílovec
Michal Ševčík, 4M, G, J. z Poděbrad, Olomouc

Kategorie B

1. *Marcela Hlawiczková*, 2, G, Třinec
2. *Kateřina Janošková*, 2M, G, Bílovec
- 3.–4. *Radek Pastyřík*, 2M, G, Bílovec
Jiří Šimeček, 2M, G, Bílovec
5. *Hana Ratajová*, 2M, G, Bílovec
- 6.–9. *Petr Kačenka*, 2M, G, Bílovec
Vít Strádal, 2M, G, Bílovec
Petr Jiříček, 2M, G, Bílovec
Jiří Lindovský, 2M, G, Bílovec
- 10.–12. *Martin Beneš*, 2M, G, Bílovec
Petr Jandík, 2M, G, Bílovec
Zuzana Stachovičová, 2M, G, Bílovec

Kategorie C

- 1.-4. *Jiří Čech*, 1, G, Bílovec
Jaromír Fiurášek, 1, G, Frýdlant
Marek Peša, 1, G, Frýdlant
Zdeněk Staško, 1, G, Bílovec
5. *Jan Mrózek*, 1, G, Bílovec
6. *Tomáš Jurtík*, 1, G, Bílovec
- 7.-10. *Otmar Onderek*, 1, G, Bílovec
Zdeněk Románek, 1, G, Bruntál
Kamil Sýkora, 1, G, Jiřího z Poděbrad, Olomouc
Radim Wystyrk, 1, G, Bílovec

Kategorie P

1. *Radim Moric*, 4, G, Bílovec
2. *Jarmil Halamíček*, 4, G, Rožnov p. Rad.
- 3.-5. *Václav Diviš*, 4, G, Bílovec
Marek Kudrna, 4, G, Rožnov p. Rad.
David Polášek, 4, G, Bílovec
- 6.-7. *Petr Blahoš*, 3, G, Šumperk
Oldřich Doseděl, 4, G, Bílovec
- 8.-10. *Martin Bodlák*, 4, G, M. Majerové, Ostrava
Mario Boháč, 4, G, Bílovec
Tomáš Gelnar, 4, G, Bílovec

Bratislava

Kategorie A

- 1.-3. *Pavol Mederly*, 3, G A. Markuša
Martin Stanek, 4, G J. Hronca
Boris Štítnický, 3, G A. Markuša
4. *M. Mačaj*, 4, G A. Markuša
5.-6. *Ladislav Kis*, 3, G A. Markuša
Richard Kollár, 3, G A. Markuša
7. *Vladimír Špitálský*, 4, G A. Markuša
8.-10. *Peter Hecht*, 3, G A. Markuša
Matej Ondrušek, 2, G J. Hronca
Juraj Slanička, 2, G A. Markuša

Kategorie B

- 1.-2. *Viliam Búr*, 2, G A. Markuša
Pavol Marton, 2, G A. Markuša
3.-6. *Daniel Kostecký*, 2, G A. Markuša
Katarína Skalová, 2, G A. Markuša
Miloš Volauf, 2, G A. Markuša
Daniel Štefankovič, 2, G A. Markuša
7. *Kamil Budinský*, 2, G J. Hronca
8. *Martin Šuster*, 2, G A. Markuša
9.-10. *Milan Kabát*, G J. Hronca
Darina Kozlová, G A. Markuša

Kategorie C

- 1.-6. *Matúš Kirchmayer*, 1, G A. Markuša
Urban Kováč, 1, G A. Markuša
Mária Kuklišová, 1, G A. Markuša
Martin Niepel, 1, G A. Markuša
Daniel Pastor, 1, G A. Markuša
Marek Spál, 1, G A. Markuša
- 7.-11. *Zuzana Bezeková*, 1, G A. Markuša
Eva Chorvátová, 1, G A. Markuša
Marek Mačuha, 1, G A. Markuša
Zuzana Mederlyová, 1, G A. Markuša
Andrej Zlatoš, 1, G A. Markuša

Západoslovenský kraj

Kategorie A

1. *Radovan Garabík*, 3M, E. Gudernu, Nitra
- 2.-3. *Ignác Bugár*, 4, maď. G, Galanta
Miroslav Živna, 4, G, Skalica
4. *Rastilav Krajňák*, 3M, G E. Gudernu, Nitra
5. *Zoltán Szöcs*, 4, maď. G, Galanta

Kategorie B

1. *Andrej Huček*, 2M, G, Párovská, Nitra
- 2.-5. *Rastislav Graus*, 2M, G E. Gudernu, Nitra
Gábor Rácz, 2, maď. G, Dunajská Streda
Alena Urbanová, 2M, G E. Gudernu, Nitra

- Milan Valky*, 2M, G, Párovská, Nitra
6. *Roland Haulitus*, 2, G, Komárno
7.-9. *František Antal*, 2, G, Nové Mesto nad Váhom
Marián Haruštlák, 2, G, Nové Mesto nad Váhom
Gyula Polák, 2, maď. G, Komárno

Kategorie C

- 1.-3. *František Gábriš*, 1, G Hlohovec
Milan Hargaš, 1, G Šamorín
František Mizera, 1, maď. G, Komárno
4.-5. *Josef Drahovský*, 1, G, Piešťany
Juraj Vidéky, 1, G, Trenčín
6.-8. *Tünde Keszegh*, 1, maď. G, Komárno
Martin Lehotský, 1, G, Galanta
Martin Vaněk, 1, G, Trenčín
9. *Zsolt Brankó*, 1, maď. G, Dunajská Streda

Kategorie P

1. *Michal Slezák*, 4, G E. Gudernu, Nitra
2. *Peter Ďurfina*, 4, G E. Gudernu, Nitra
3. *Josef Nagy*, 2, G, Levice
4. *Igor Klepoch*, 4, SPŠE Nové Zámky
5. *Peter Majerník*, 3, maď. G, Galanta
6. *Lubomír Štuller*, 3, G, Levice
7. *Peter Minárik*, 3, G, Piešťany
8. *Zoltán Bugár*, 2, maď. G, Galanta
9. *Pavol Gregor*, 2, SPŠE Nové Zámky
10. *Martin Pabiš*, 2, G, Piešťany

Stredoslovenský kraj

Kategorie A

1. *Valerián Valášek*, 4M, G, Tajovského, B. Bystrica
- 2.-5. *Radovan Harman*, 4P, G, Liptovský Hrádok
Martin Lancz, 4M, G, Tajovského, Ban. Bystrica
Dušan Svitek, 3 F, G, Tajovského, Ban. Bystrica
Soňa Šimanová, 3M, G, Tajovského, Ban. Bystrica
- 6.-7. *Vladimír Glasnák*, 4M, G, Veľká Okružná, Žilina
Ľubo Macek, 3M, G, Liptovský Mikuláš
- 8.-9. *Juraj Lörincz*, 4M, G, Banská Bystrica
Roman Mackovčák, 3M, G, Veľká Okružná, Žilina
10. *Šimon Malý*, 4M, G, Žiar nad Hronom

Kategorie B

1. *Marek Žabka*, 2M, G, Tajovského, Ban. Bystrica
- 2.-3. *Dagmar Hrmová*, 2M, G, Tajovského, B. Bystrica
Ján Žabka, 2M, G, Veľká Okružná, Žilina
- 4.-6. *Petr Duda*, 2M, G, Tajovského, Ban. Bystrica
Monika Kozáková, 2M, G, Tajovského, B. Bystrica
Dušan Trstenský, 2, G, Veľká Okružná, Žilina
7. *Miroslav Dobrota*, 2M, G, Tajovského, B. Bystrica
- 8.-12. *Vojtech Bálint*, 2M, G, Veľká Okružná, Žilina
Monika Balogová, 2M, G, Tajovského, B. Bystrica
Peter Hazucha, 2M, G, Tajovského, Ban. Bystrica
Peter Hlavatý, 2, G, Liptovský Mikuláš

Kategorie C

1. *Peter Marsina*, 1M, G, Veľká Okružná, Žilina
- 2.-4. *Martin Gažák*, 1M, G, Veľká Okružná, Žilina
Miroslav Kulla, 1M, G, Martin
Stanislav Višňovský, 1M, G, Martin
- 5.-6. *Jitka Hušková*, 1M, G, Martin
Michal Skokan, 1M, G, Veľká Okružná, Žilina
- 7.-8. *Emília Dubcová*, 1M, G, Martin
Miroslav Liška, 1, G, Ružomberok
- 9.-12. *Marek Hamran*, 1M, G, Martin
Peter Humaj, 1M, G, Veľká Okružná, Žilina
Marek Káčer, 1, G, Martin
Roman Rükschloss, 1M, G, Tajov., B. Bystrica

Kategorie P

1. *Josef Antony*, 4M, G, Prievidza
2. *Peter Malčovský*, 4M, G, Prievidza

Východoslovenský kraj

Kategorie A

1. *Luboš Pástor*, 3, G, Pivovarská, Košice
2. *Slavomír Hrinko*, 4, G, Konštantínova, Prešov
3. *Herbert Vojčík*, 3, G, Pivovarská, Košice
4. *Miroslav Chladný*, 3, G, Pivovarská, Košice
- 5.-6. *Marek Gura*, 3, G, Popr. nábr., Poprad
Marek Kelbel, 4, G, Šrobárova, Košice

- 7.-11. *Cyril Hruščák*, 3, G, Poprad
Peter Kováčik, 2, G, Alejová, Košice
Ján Machuň, 3, G, Pivovarská, Košice
Peter Varga, 4, G, Šrobárova, Košice
Ľubomír Zlacký, 4, G, Michalovce

Kategorie B

1. *Peter Katusčák*, 2, G matem., Košice
2. *Peter Kováčik*, 2, G matem., Košice
3. *Milan Melicherčík*, 2, G, Kováčikova, Košice
4. *Braňo Jendroľ*, 2, G matem., Košice
5. *Dárius Germala*, 2, G matem., Košice
6. *Pavel Diko*, 2, G matem., Košice
7.-9. *Martina Hruščáková*, 2, G, Popr. nábr., Poprad
Igor Magda, 2, G matem., Košice
Peter Šulič, 2, G, Vranov

Kategorie C

- 1.-4. *Miloš Gáj*, 1, G, D. Tatarku, Poprad
Radoslav Vaľovský, 1, G, Michalovce
Peter Zámboreský, 1, G, Pivovarská, Košice
Ivana Šimočková, 1, G, Konštantínova, Prešov
5. *Martin Šepelák*, 1, G, Michalovce
6.-8. *Ivana Brudňáková*, 8, ZŠ, 17. novembra, Prešov
Richard Molokáč, 1, G, Pivovarská, Košice
Igor Pauer, 1, G, Pivovarská, Košice
9.-10. *Martin Čajbík*, 1, G, Humenné
Peter Fehér, 1, G, Pivovarská, Košice

Kategorie P

1. *Herbert Vojčík*, 3, G, Šmeralova, Košice
2. *Ľubomír Zlacký*, 4, G, Michalovce
3. *Radovan Brečka*, 4, G, Snina
4. *Tomáš Vinař*, 1, G, Šrobárova, Košice
5. *Marek Jakub*, 4, G, Michalovce
- 6.-9. *Marek Gura*, 3, G, Popradské nám., Poprad
Cyril Hruščák, 3, G, Popradské nám., Poprad
Norbert Kopčo, 4, G, Opatovská, Košice
Ondrej Pajtáš, 4, G, Michalovce

Kategorie C

Texty úloh

C – I – 1

Kolik je čtyřciferných čísel s touto vlastností: Jestliže v něm škrtneme kteroukoliv číslici, nedostaneme číslo dělitelné třemi.

C – I – 2

Najděte nejmenší přirozené číslo k , pro které mají součiny $384k$ a $2592k$ stejný počet dělitelů.

C – I – 3

Tři fotbalová družstva hrají turnaj systémem, v němž každé družstvo hraje s každým k zápasů. Po skončení turnaje se zjistilo, že družstva získala *různý počet bodů*. Vítězem turnaje se nestalo družstvo, které získalo nejvíce výher, ani družstvo, které mělo nejméně proher. Určete nejmenší číslo k , pro které mohla uvedená situace nastat.

C – I – 4

Rozhodněte, zda existuje tětívový čtyřúhelník s těmito vlastnostmi:

- a) Úhlopříčky ho dělí na čtyři pythagorejské trojúhelníky.
- b) Čtyřúhelník není osově souměrný.

(Pythagorejský trojúhelník je pravoúhlý trojúhelník s celočíselnými délkami stran.)

C – I – 5

Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, $|AB| = 9$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|CD| = 5,5$ cm, $|DA| = 4,5$ cm, $|BD| = 9$ cm. Najděte množinu všech bodů, pro které paty kolmic z tohoto bodu na všechny čtyři strany čtyřúhelníku leží na obvodě čtyřúhelníku $ABCD$. Hledanou množinou je jistý n -úhelník. Zjistěte velikosti jeho vnitřních úhlů.

C – I – 6

Strany čtyřúhelníku mají délky 5, 5, 5, 3. Dokažte, že jeho obsah je větší než $2\sqrt{6}$, a je-li čtyřúhelník konvexní, je jeho obsah větší než 12.

C – S – 1

Čtyřúhelník má tři strany stejně dlouhé, délka čtvrté strany se rovná délce jedné i druhé úhlopříčky. Určete velikosti vnitřních úhlů čtyřúhelníku. Jaký je to čtyřúhelník?

C – S – 2

Nájdite všetky prirodzené čísla n , pre ktoré číslo $n^2 + 1$ delí číslo $n^3 - 8n^2 + 2n$.

C – S – 3

V oboru nezáporných reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y + z = a,$$

$$x + y - z = b,$$

$$x - y + z = c,$$

$$x - y - z = d,$$

jestliže množina $\{a, b, c, d\}$ je totožná s množinou $\{4, 8, 12, 16\}$.

C – II – 1

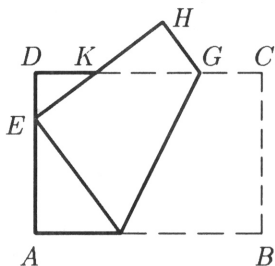
Dokážte, že pro každé prirodzené číslo n je číslo $n^6 - n^2$ dělitelné dvaceti.

C – II – 2

Obdélníkový list papíru $ABCD$ o rozměrech $|AB| = 30$ cm, $|BC| = 21$ cm je přeložen tak, že bod B přejde do bodu E na úsečce AD a $|AE| = 15$ cm (obr. 1). Vypočtěte velikosti $|KH|$ a $|GH|$.

C – II – 3

Daný je pravouhlý trojúhelník APM s pravým úhlem při vrchole P . Zostrojte rovnoramenný trojúhelník ABC so



Obr. 1

základňou AB tak, aby bod M bol stredom strany BC a P bol pätou výšky na túto stranu.

C – II – 4

Ve fotbalovém turnaji tří družstev A , B , C hrálo každé družstvo s každým družstvem dvakrát. Ve výsledné tabulce, která u každého mužstva udává počet výher, počet nerozhodných zápasů a počet proher, známe následující údaje:

A	0		
B	1		1
C		3	

Doplňte zbývajících pět čísel tabulky. Svůj postup zdůvodněte.

C - I - 1

Použijeme známé tvrzení, že zbytek při dělení čísla třemi je stejný jako při dělení třemi ciferného součtu toho čísla. Například v případě čtyřciferného čísla m o číslicích a, b, c, d je $m = 1000a + 100b + 10c + d = 3(333a + 33b + 3c) + (a + b + c + d)$, odkud vidíme, že rozdíl čísla m a jeho ciferného součtu $a + b + c + d$ je dělitelný třemi. Má-li číslo m požadovanou vlastnost, nesměj žádné tři jeho číslice dávat při dělení třemi stejný zbytek. Jinak by byl jejich součet dělitelný třemi, a tím by bylo dělitelné třemi i číslo, jež bychom dostali z čísla m vynecháním zbývajících, čtvrté číslice. Ze stejného důvodu nesměj žádné tři číslice čísla m dávat při dělení třemi navzájem různé zbytky. Zbývá tedy pouze možnost, že dvě číslice dávají stejný zbytek a zbývajících dvě rovněž, avšak různý od prvního. Dávají-li například dvě číslice zbytek 1 a zbývajících dvě zbytek 2, není součet žádných tří z nich dělitelný třemi. Ty dvě číslice se zbytkem 1 můžeme ze čtyř číslic vybrat celkem šesti způsoby, přitom každá z nich se může rovnat 1, 4 nebo 7. Zbývajících dvě číslice se mohou nezávisle rovnat 2, 5 nebo 8. Máme tedy celkem $6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 486$ možností. Podobně je tomu u zbytků 0 a 1 nebo 0 a 2. Avšak číslice se zbytkem 0 při dělení třemi se může rovnat 0, 3, 6 nebo 9 (4 možnosti), proto dostáváme nyní dvakrát $6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 864$, tedy 1 728 možností. Z nich však musíme vynechat ty případy, v nichž je na prvním místě 0, nebylo by to číslo čtyřciferné. Je-li na prvním místě 0, je ještě na jednom místě číslice dělitelná

třemi, tedy 0, 3, 6, 9, na dalších dvou místech pak číslice 1, 4 nebo 7 nebo 2, 5, 8. Musíme tedy vyloučit $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 216$ případů. Výsledek úlohy je $486 + 1\,728 - 216 = 1\,998$.

C – I – 2

Je $384 = 2^7 \cdot 3$, $2\,592 = 2^5 \cdot 3^4$. Položme například $k = 2^r \cdot 3^s \cdot 5^t$, pak je

$$384k = 2^{r+7} \cdot 3^{s+1} \cdot 5^t, \quad 2\,592k = 2^{r+5} \cdot 3^{s+4} \cdot 5^t.$$

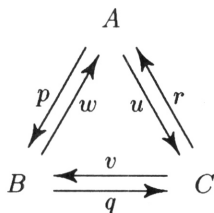
První z nich má $(r+8)(s+2)(t+1)$, druhé $(r+6)(s+5)(t+1)$ dělitelů. Má tedy platit

$$(r+8)(s+2) = (r+6)(s+5), \quad \text{tj. } 2s = 3r + 14.$$

Protože hledáme nejmenší k , položíme $r = 0$, $s = 7$ a $t = 0$. Podobně bychom dostali, že i u dalších prvočísel v rozkladu čísla k by byl exponent nulový. Řešením úlohy je tedy číslo $k = 3^7$.

C – I – 3

Vítězné mužstvo označme A a nechť více vítězných zápasů než A mělo mužstvo B. Kdyby toto mužstvo mělo méně proher než A, nemohlo by být A vítězem turnaje. Proto méně proher než A mělo třetí družstvo C. Označme p , q , r po řadě počet vítězných zápasů mužstva A nad B, mužstva B nad C a mužstva C nad A. Podobně označíme u , v , w počet vítězných zápasů mužstva A nad C, mužstva C nad B a mužstva B nad A, viz přiložené schéma (obr. 2).



Obr. 2

Mužstvo A vyhrálo $p + u$ zápasů a prohrálo $r + w$ zápasů, B vyhrálo $q + w$ utkání, C prohrálo $q + u$. Podle předpokladu je $p + u < q + w$, $r + w > q + u$. Přitom mužstvo A získalo $2(p + u) + 2k - (p + w + r + u) = 2k + (p + u) - (r + w)$ bodů, mužstvo B získalo $2k + (q + w) - (p + v)$ bodů a bodový zisk mužstva C byl $2k + (r + v) - (q + u)$, kde k značí počet kol turnaje. Jelikož A získalo nejvíce bodů, je

$$p + u - (r + w) > q + w - (p + v),$$

$$p + u - (r + w) > r + v - (q + u),$$

sečtením dostaneme

$$p + u > r + w.$$

Máme tedy

$$q + w > p + u > r + w > q + u.$$

Protože jde o celá čísla, je

$$q + w \geq p + u + 1,$$

$$p + u \geq r + w + 1,$$

$$r + w \geq q + u + 1,$$

odkud

$$q \geq r + 2 \text{ (sečtením prvních dvou nerovností),}$$

$$p \geq q + 2 \text{ (sečtením posledních dvou nerovností),}$$

$$w \geq u + 3 \text{ (sečtením všech tří nerovností).}$$

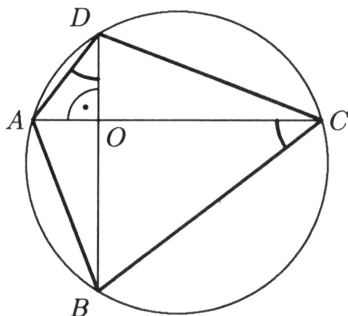
Z odvozených tří nerovností zase plyne jejich sečtením

$$p + w \geq r + u + 7.$$

Čísla r , u jsou nezáporná, proto mužstva A a B sehrála mezi sebou aspoň 7 utkání, je tedy $k \geq 7$. Ukážeme, že $k = 7$ vyhovuje. Je pak nutně $r = u = 0$, $p = 4$, $w = 3$, $q = 2$ a pro v máme podmínku $0 < v < 3$, takže $v = 1$ nebo $v = 2$. Všechna utkání mezi A a C skončila nerozhodně, mezi A a B neskončila žádné utkání remízou. Mužstvo A získalo 15 bodů, zbývajících dvě mužstva 13 a 14 bodů.

C – I – 4

Představme si, že čtyřúhelník $ABCD$ (obr. 3) má požado-



Obr. 3

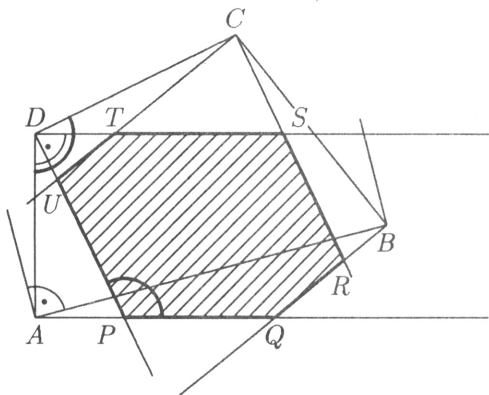
vané vlastnosti, označme O průsečík jeho úhlopříček. Protože to má být čtyřúhelník tětíkový, musí být $|\sphericalangle ADO| = |\sphericalangle BCO|$, takže trojúhelníky ADO a BCO jsou podobné (při vrcholu O mají pravý úhel) a pythagorejské. Jeden z pythagorejských trojúhelníků má strany 3, 4, 5, zkusme tedy zvolit přirozená čísla k, l tak, aby $|AO| = 3k, |DO| = 4k, |BO| = 3l, |CO| = 4l$. Pak stačí, aby k, l byly délky odvěsen pythagorejského trojúhelníku. Pokud by však bylo $k : l = 3 : 4$ nebo $k : l = 4 : 3$, byl by čtyřúhelník $ABCD$ osově souměrný, což nechceme. Vzpomeňme si na pythagorejský trojúhelník o odvěsnách 5 a 12 a položíme $k = 5, l = 12$, takže $|AO| = 15, |DO| = 20, |BO| = 36, |CO| = 48$. Tyto délky nanese od průsečíku O dvou kolmých přímek a dostaneme tak čtyřúhelník požadovaných vlastností.

C – I – 5

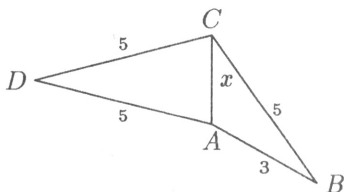
Body A, D vedeme kolmice k straně AD , hledaná množina M bodů je částí rovinného pásu ohraničeného těmito dvěma kolmicemi. Podobně postupujeme u dalších stran čtyřúhelníku. Množina M je průnikem čtyř rovinných pásů, v našem případě je M šestiúhelník $PQRSTU$ (obr. 4). Protože $PU \perp DC, QP \perp AD$, je $|\sphericalangle QPU| = |\sphericalangle ADC|$. Podobně bychom určili velikosti ostatních úhlů šestiúhelníku M pomocí velikostí úhlů čtyřúhelníku $ABCD$.

C – I – 6

Uvažujme nejdříve čtyřúhelník $ABCD$ s danými délkami stran, který není konvexní, (obr. 5) a označme $x = |AC|$.



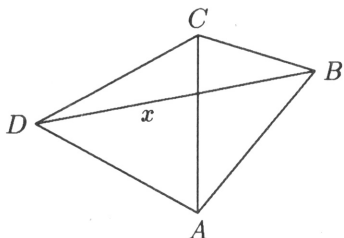
Obr. 4



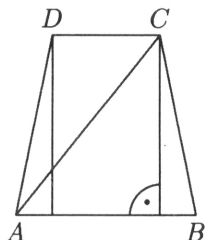
Obr. 5

Podle trojúhelníkové nerovnosti je $2 < x$. Přitom je rovnoramenný trojúhelník ACD ostroúhlý, jinak by bylo $x \geq 5\sqrt{2}$. Protože však bod A leží uvnitř trojúhelníku CBD , je $x < 5$. Ostroúhlý rovnoramenný trojúhelník o ramenech 5, 5 a základně $x > 2$ má větší obsah než stejný trojúhelník o základně 2. Poslední má obsah $2\sqrt{6}$, proto je obsah trojúhelníku ACD , a tím spíše obsah čtyřúhelníku $ABCD$ větší než $2\sqrt{6}$.

Dále se budeme zabývat čtyřúhelníky konvexními

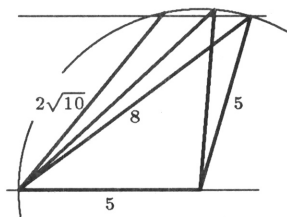


Obr. 6



Obr. 7

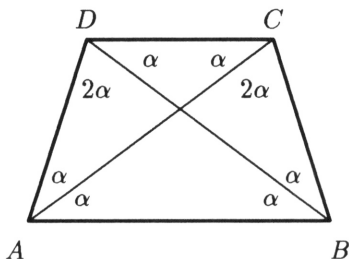
(obr. 6). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $|AC| \geq |BD|$, jinak bychom zaměnili označení bodů D , A a současně B , C . Pro $x = |AC|$ tedy platí $x < 8$ a zároveň $x \geq 2\sqrt{10}$, neboť $2\sqrt{10}$ je délka úhlopříček v rovnoramenném lichoběžníku o stranách 5, 5, 5, 3 (obr. 7). Obsah trojúhelníku ACD je pro všechna $x \in \langle 2\sqrt{10}, 8 \rangle$ větší než 12 (obr. 8).



Obr. 8

C – S – 1

Má-li čtyřúhelník $ABCD$ požadované vlastnosti, můžeme označení jeho vrcholů zvolit tak, že $|AD| = |DC| = |CB|$ a $|AB| = |AC| = |BD|$ (obr. 9).



Obr. 9

Trojúhelníky ABC , BAD jsou shodné rovnoramenné trojúhelníky souměrně sdružené podle osy úsečky AB . Čtyřúhelník je proto rovněž osově souměrný podle této osy, takže je to rovnoramenný lichoběžník. Označíme-li $\alpha = |\sphericalangle CAB|$, je také $\alpha = |\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle DCA|$. Trojúhelníky ACD , BDC jsou rovněž rovnoramenné, proto je $\alpha = |\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle DBC|$, $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB| = 2\alpha$. Z trojúhelníku ABC pak plyne rovnost $5\alpha = 180^\circ$, takže velikosti vnitřních úhlů čtyřúhelníku jsou $2\alpha = 72^\circ$, 72° , $3\alpha = 108^\circ$ a 108° .

C – S – 2

Jelikož

$$n^3 - 8n^2 + 2n = (n - 8)(n^2 + 1) + n + 8,$$

je toto číslo dělitelné číslem $n^2 + 1$ právě tehdy, když je jím dělitelné číslo $n + 8$. Pro $n = 1$ a $n = 3$ to splněno není, pro $n = 2$ to splněno je. Je-li $n \geq 4$, je $(n - \frac{1}{2})^2 \geq \frac{49}{4}$, takže

$n^2 - n \geq 12$, $n^2 + 1 \geq n + 11 > n + 8$. Větší číslo nemůže dělit menší, je tedy $n = 2$ jediným řešením úlohy.

C - S - 3

Má-li mít daná soustava řešení v oboru nezáporných čísel, musí být $a \geq b$, $a \geq c$, $b \geq d$, $c \geq d$, takže $a \geq b \geq c \geq d$ nebo $a \geq c \geq b \geq d$. Musí tedy být $a = 16$, $d = 4$ a dále $b = 12$, $c = 8$ nebo $b = 8$, $c = 12$. V prvním případě vyjde $x = 10$, $y = 4$, $z = 2$, v druhém případě $x = 10$, $y = 2$, $z = 4$.

C - II - 1

Je

$$n^6 - n^2 = n^2(n-1)(n+1)(n^2+1).$$

Je-li n sudé, je n^2 dělitelné čtyřmi, v opačném případě jsou čísla $n-1$, $n+1$ sudá a čtyřmi je dělitelný součin $(n-1)(n+1)$. Není-li žádné z čísel n , $n-1$, $n+1$ dělitelné pěti, je $n = 5k+2$ nebo $n = 5k+3$, kde k je celé. Pak je ale $n^2+1 = 25k^2+20k+5$ nebo $n^2+1 = 25k^2+30k+10$, takže n^2+1 je dělitelné pěti. Tím je dokázáno, že dané číslo $n^6 - n^2$ je vždy dělitelné čísly 4 a 5, a tudíž dvaceti.

Jiný důkaz dělitelnosti čísla $n^6 - n^2$ číslem pět podala Anna Vánčová, řádkyně I. ročníku gymnázia v Považské Bystrici. Ví, že součin pěti po sobě jdoucích přirozených čísel $n-2$, $n-1$, n , $n+1$, $n+2$ je jistě dělitelný pěti. Přitom je

$$(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) = n(n^4-5n^2+4) = n^5-5n^3+4n$$

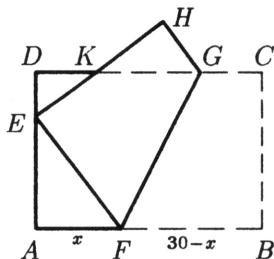
a

$$n^6 - n^2 = n(n^5 - 5n^3 + 4n) + 5(n^4 - n^2).$$

Jelikož jsou oba sčítance dělitelné pěti, je pěti dělitelný i jejich součet $n^6 - n^2$.

C - II - 2

Označme $x = |AF|$ (obr. 10), kde F je průsečík úsečky AB a osy úsečky BE . Je $|FE| = |FB| = 30 \text{ cm} - x$. Užitím Pythagorovy věty na trojúhelník AFE dostaneme $x = \frac{45}{4} \text{ cm}$. Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků KDE a EAF plyne $|EK| = 10 \text{ cm}$, takže $|KH| = 11 \text{ cm}$. Z podobnosti trojúhelníků KDE a KHG plyne $|HG| = \frac{33}{4} \text{ cm}$.

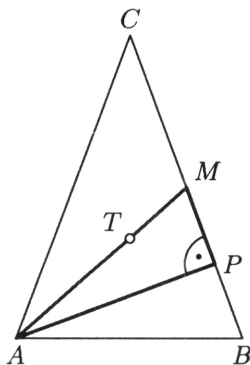


Obr. 10

C - II - 3

Sestrojíme nejdříve těžiště T trojúhelníku ABC (obr. 11), leží na úsečce AM , kterou dělí v poměru $2 : 1$ ($|AT| : |TM| = 2 : 1$). Protože má platit $|AC| = |BC|$, musí také platit $|AT| = |BT|$. Leží tedy bod B na kružnici k

o středu T a poloměru $|TA|$, jež protíná přímku PM ve dvou bodech, každý z nich můžeme vzít za bod B . Bod C dostaneme jako průsečík přímky PM s osou úsečky AB , nebo také jako bod souměrně sdružený k bodu B podle bodu M . Úloha má dvě řešení.



Obr. 11

C – II – 4

Protože B má jednu prohru a A žádnou výhru, muselo B prohrát s C, takže C má aspoň jednu výhru. Více však mít nemohlo, protože sehrálo jen 4 utkání, takže nemělo žádnou prohru. Jednu prohru mělo mužstvo A (prohrálo nutně s B). Mužstvo A pak mělo tři a B dva nerozhodné zápasy. Výsledná tabulka byla tedy takováto:

A	0	3	1
B	1	2	1
C	1	3	0

Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

V oboru reálných čísel řešte rovnici $3x^3 - [x] = 3$, kde $[x]$ značí celou část čísla x .

B – I – 2

Na straně AB trojúhelníku ABC jsou dány body K, L tak, že $|AK| = |KL| = |LB|$, podobně na straně CB body M, N tak, že $|CM| = |MN| = |NB|$. Průsečík úseček AN a KM označme P , průsečík přímk LP a AC je bod Q . Určete obsah čtyřúhelníku $CQPM$, jestliže se obsah trojúhelníku ABC rovná 18.

B – I – 3

V rovině je dáno 7 bodů, z nichž některé jsou spojeny úsečkou. Přitom jsou splněny podmínky:

- a) z každé trojice bodů jsou aspoň dva spojeny úsečkou,
- b) počet úseček je minimální.

Kolik úseček obsahuje útvar, který splňuje tyto podmínky? Nakreslete příklad takového útvaru.

B - I - 4

Sestrojte trojúhelník, jestliže je dán poloměr r kružnice mu vepsané, poměr poloměru R kružnice mu opsané a strany a se rovná 2 a poměr velikostí β, γ úhlů přilehlých k straně a se rovná 3.

B - I - 5

Pro reálná čísla a, b, c ($ac \neq 0$) má rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ reálný kořen r , rovnice $ax^2 - bx - c = 0$ má reálný kořen s . Dokažte, že rovnice $ax^2 - 2bx - 2c = 0$ má reálný kořen, který leží mezi r a s .

B - I - 6

Dokažte, že pro velikosti α, β, γ úhlů v trojúhelníku platí

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \frac{3}{8} \sqrt{3}.$$

B - S - 1

Dokažte, že rovnice

$$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$$

má pro každou trojici reálných čísel a, b, c reálné řešení.

B – S – 2

Najděte aspoň jednu dvojici celých čísel a, b tak, aby pro každé celé číslo x platilo

$$\left[\frac{x+a}{5} \right] + \left[\frac{x+b}{5} \right] = \left[\frac{2x}{5} \right].$$

($[x]$ značí celou část čísla x , tj. největší celé číslo, které není větší než číslo x .)

B – S – 3

Na uhlopriečke AC rovnobežníka $ABCD$ sú dané body K a L také, že $|AK| : |KL| : |LC| = 4 : 5 : 3$. Označme P priesečník priamok AB , DK a Q priesečník priamok CD a BL . Vypočítajte pomer $|PR| : |QR|$, kde R je priesečník uhlopriečky AC a priamky PQ .

B – II – 1

Dokažte, že funkce $f(x) = kx - [x]$ definovaná na množině $\mathbb{R}$ všech reálných čísel není pro $k > \frac{1}{2}$ prostá.

B – II – 2

Ukážte, že rovnica

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 = 0$$

nemá riešenie v množine reálnych čísel.

B – II – 3

V rovine je daných sedem bodov, z ktorých niektoré sú spojené úsečkou. Pritom v každej štvorici bodov sú aspoň dve dvojice spojené úsečkou a počet úsečiek je minimálny. Zistite, koľko úsečiek takýto útvar obsahuje, a nakreslite príklad.

B – II – 4

Je dán obdĺník $ABCD$ a na jeho stranách AB , CD jsou zvoleny body E , F tak, že trojúhelníky AEG , GHF a HCF mají stejný obsah (G a H označují průsečíky úhlopříčky AC s přímkami EF a BF). Určete poměr obsahu trojúhelníku AEG a obsahu daného obdélíku.

Řešení úloh

B – I – 1

Označme $[x] = n$, takže $n \leq x < n + 1$. Funkce $y = x^3$ je rostoucí, takže

$$n^3 \leq x^3 < (n + 1)^3.$$

Vynásobíme-li tuto nerovnost třemi a odečteme n , dostaneme

$$3n^3 - n \leq 3x^3 - [x] < 3n^3 + 9n^2 + 8n + 3.$$

Splňuje-li x danou rovnici, je nutně

$$3n^3 - n \leq 3 < 3n^3 + 9n^2 + 8n + 3,$$

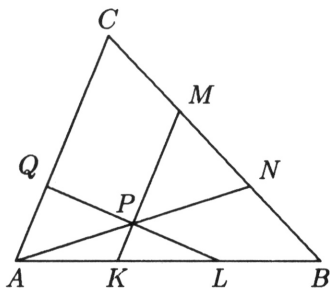
tedy

$$n(3n^3 - 1) \leq 3 \quad \text{a současně} \quad 0 < n(3n^2 + 9n + 8).$$

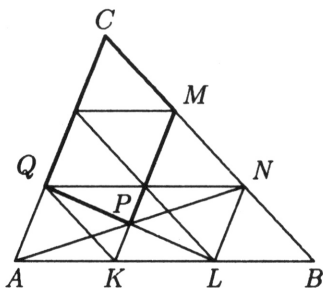
Druhá nerovnice není splněna pro žádné $n \leq 0$, protože $3n^2 + 9n + 8 > 0$ pro každé n . Z přirozených čísel splňuje první nerovnici pouze číslo $n = 1$, takže řešená rovnice může mít řešení pouze v intervalu $(1, 2)$. Pro takové řešení pak platí $3x^3 - 1 = 3$, tedy $x = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$. Tato hodnota je z uvedeného intervalu a je jediným řešením úlohy.

B - I - 2

Z podobnosti trojúhelníků ABC , KBM (obr. 12) plyne



Obr. 12



Obr. 13

$|KM| = \frac{2}{3}|AC|$, z podobnosti trojúhelníků ANC , PNM plyne $|MP| = \frac{1}{2}|AC|$, takže $|PK| = |KM| - |MP| = \frac{1}{6}|AC|$. Úsečka PK je střední příčkou v trojúhelníku ALQ , takže $|AQ| = 2|PK| = \frac{1}{3}|AC|$, neboli $|CQ| = \frac{2}{3}|AC|$. Čtyřúhelník $CQPM$ je lichoběžník se základnami

CQ a MP a výškou $\frac{1}{3}v$, kde v je výška trojúhelníku ABC na stranu AC . Hledaný obsah je tedy

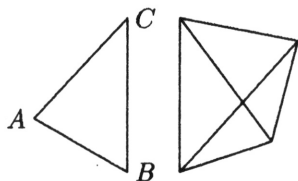
$$\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) |AC| \cdot \frac{1}{3}v = \frac{7}{36} |AC|v = 7,$$

neboť $\frac{1}{2}|AC|v = 18$.

Jiné řešení. Body M , N vedeme rovnoběžky s přímkou AB i s přímkou AC (obr. 13), body K a L vedeme rovnoběžky s přímkou BC . Tím se trojúhelník ABC rozdělí na 9 shodných trojúhelníků, každý z nich má obsah 2. Čtyřúhelník $CQPM$ je složen z 3,5 těchto trojúhelníků, jeho obsah je tedy 7.

B - I - 3

Jestliže z některého z daných bodů (označme ho A) nevychází žádná úsečka, musejí být každé dva ze zbývajících 6 bodů spojeny, jinak by tyto dva body tvořily spolu s bodem A trojici, která by nesplňovala podmínku a). Šest bodů určuje $\binom{6}{2} = 15$ úseček. Nechť z některého bodu A vychází pouze jedna úsečka, její druhý krajní bod označme B . Každé dva ze zbývajících pěti bodů musejí být opět spojeny úsečkou, je tedy v tomto případě třeba aspoň 11 úseček. Nechť z některého bodu A vycházejí pouze dvě úsečky (do bodů B, C). Každé dva ze zbývajících 4 bodů musejí být spojeny, to dává 6 úseček. Podmínka a) však bude splněna jen tehdy, bude-li každý z těchto 4 bodů spojen s B nebo s C (12 úseček) nebo budou-li spojeny body B, C (pak je třeba aspoň 9 úseček — obr. 14). Vycházejí-li z každého

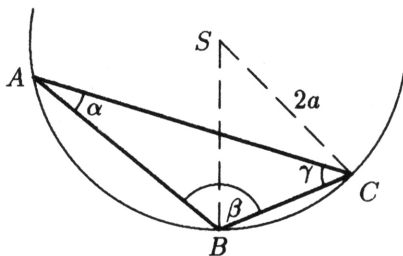


Obr. 14

bodu aspoň 3 úsečky, je jich celkem aspoň $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7$, tedy aspoň 11. Nejmenší možný počet úseček je tedy 9.

B – I – 4

Nejdříve sestrojíme trojúhelník ABC , který má všechny požadované vlastnosti kromě daného poloměru vepsané kružnice. Zvolíme libovolnou úsečku BC za stranu a a sestrojíme kružnici o poloměru $2a$, která prochází body B, C (obr. 15).



Obr. 15

Tím známe velikost úhlu $\alpha = |\sphericalangle BAC|$, správněji dvě možné velikosti — podle toho, zvolíme-li A na větším, nebo na menším oblouku. Rozdíl $180^\circ - \alpha$ rozdělíme graficky na 4 stejné díly, 1 díl je velikost úhlu γ , 3 díly tvoří velikost

úhlu β . Úsečka BC spolu s β a γ už určují bod A . Takto obdrženy trojúhelník musíme ovšem ještě stejnolehlostí zobrazit tak, aby se poloměr kružnice vepsané rovnal r . Za střed stejnolehlosti zvolíme například bod B . Označíme-li ϱ poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC , rovná se koeficient stejnolehlosti poměru $r : \varrho$.

B - I - 5

Je $ar^2 + br + c = 0$, $as^2 - bs - c = 0$. Kvadratická funkce $y = ax^2 - 2bx - 2c$ nabývá v bodě $x = r$ hodnoty $ar^2 - 2br - 2c = 3ar^2$, v bodě $x = s$ hodnoty $as^2 - 2bs - 2c = -as^2$. Jelikož $ars \neq 0$, mají čísla $3ar^2$, as^2 opačná znaménka, musí tedy mezi čísla r , s ležet číslo x , pro které je $ax^2 - 2bx - 2c = 0$.

Pěkně se úloha řeší též *graficky* pomocí grafu funkcí $y = ax^2$ (parabola), $y = bx + c$, $y = -bx - c$, $y = 2bx + 2c$ (vesměs přímky, které neprocházejí počátkem).

B - I - 6

Použijeme nejdříve nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem, dostaneme

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \frac{1}{27}(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)^3,$$

dále postupujeme podle 57. svazku ŠMM, str. 27, anebo použijeme tzv. Jensenovu nerovnost, podle které pro α , β , $\gamma \in \langle 0, 2\pi \rangle$ platí

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{3} \leq \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}.$$

Rovnost platí právě jen pro trojúhelník rovnostranný.

B – S – 1

Můžeme předpokládat, že $a \leq b \leq c$. Pro funkci

$$f(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$$

je pak $f(a) \geq 0$, $f(b) \leq 0$, takže v případě $a = b$ je $f(a) = 0$ a v případě $a < b$ existuje nutně $x \in \langle a, b \rangle$, pro které platí $f(x) = 0$.

Mohli bychom ovšem také spočítat diskriminant kvadratického trojčlenu $f(x)$ a ukázat, že není záporný. To by se nám snadno podařilo, neboť je

$$\begin{aligned} D &= 4(a+b+c)^2 - 12(ab+bc+ca) = \\ &= 2(a-b)^2 + 2(b-c)^2 + 2(c-a)^2. \end{aligned}$$

B – S – 2

Pro čísla a, b musí platit $\left[\frac{a}{5}\right] + \left[\frac{b}{5}\right] = 0$, což dostaneme z dané rovnosti pro $x = 0$. Zkusíme zvolit čísla $a \leq b$ z množiny $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Dosadíme-li postupně $x = 1, 2, 3, 4$, vyjde

$$\begin{aligned} \left[\frac{a+1}{5}\right] + \left[\frac{b+1}{5}\right] &= \left[\frac{a+2}{5}\right] + \left[\frac{b+2}{5}\right] = 0, \\ \left[\frac{a+3}{5}\right] + \left[\frac{b+3}{5}\right] &= \left[\frac{a+4}{5}\right] + \left[\frac{b+4}{5}\right] = 1, \end{aligned}$$

takže

$$\left[\frac{a+4}{5} \right] = 0, \quad \left[\frac{b+3}{5} \right] = 1, \quad \left[\frac{b+2}{5} \right] = 0,$$

odkud vychází $a = 0$, $b = 2$. Pro tato dvě čísla je daná rovnice splněna pro každé $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Je ovšem vidět, že daná rovnice je splněna pro x tvaru $x = 5k + x_0$ (k je celé), právě když je splněna pro x_0 .

B – S – 3

Z podobnosti trojúhelníků $APK \sim CDK$, $ABL \sim CQL$ a $APR \sim CQR$ plynou rovnosti

$$\frac{|AP|}{|CD|} = \frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|AK|}{|KC|} = \frac{1}{2}, \quad \frac{|CQ|}{|AB|} = \frac{|CL|}{|AL|} = \frac{1}{3},$$

takže

$$\frac{|PR|}{|QR|} = \frac{|AP|}{|CQ|} = \frac{3}{2}.$$

B – II – 1

Z grafu uvedené funkce zjistíme, že pro $k \geq 1$ je $f(1) = k - 1$ a rovněž $f(1 - \frac{1}{k}) = k(1 - \frac{1}{k}) = k - 1$. Pro $k \in (\frac{1}{2}, 1)$ je $f(0) = 0$ a zároveň $f(\frac{1}{k}) = 0$, neboť číslo $\frac{1}{k}$ leží v intervalu $(1, 2)$.

Jiné řešení. Uvedená funkce zobrazí interval $\langle 0, 1 \rangle$ na interval $\langle 0, k \rangle$ a interval $\langle 1, 2 \rangle$ zobrazí na interval $\langle k - 1, 2k - 1 \rangle$. Přitom pro $k \geq 1$ je zřejmě $0 \leq k - 1 < k$ a pro $k \in (\frac{1}{2}, 1)$ zase $0 \leq 2k - 1 < k$, takže

v obou případech je průnik intervalů $\langle 0, k \rangle$, $\langle k - 1, 2k - 1 \rangle$ neprázdný, což znamená že daná funkce není prostá.

B – II – 2

Mnohočlen jednoduše upravíme na tvar

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 &= \\ &= x^2(x^2 - 2x + 1) + 2(x^2 - 2x + 1) + 3 = \\ &= x^2(x - 1)^2 + 2(x - 1)^2 + 3, \end{aligned}$$

odkud je vidět, že pro každé reálné x je uvedený výraz kladný. Rovnice tedy nemá žádné reálné řešení.

B – II – 3

Kdyby mezi danými body existovala trojice, ve které by žádné dva body nebyly spojeny úsečkou, musel by každý ze zbývajících čtyř bodů být spojen aspoň se dvěma z těchto tří bodů. To je celkem 8 úseček. Tyto čtyři body jsou také spojeny aspoň dvěma úsečkami, takže celkově by takový útvar obsahoval aspoň 10 úseček.

Jsou-li naopak v každé trojici bodů aspoň dva spojeny úsečkou, víme z úlohy B-I-3, že útvar obsahuje aspoň 9 úseček (obr. 16). Takový útvar zřejmě vyhovuje požadavkům úlohy.



Obr. 16

B – II – 4

Z rovnosti obsahů trojúhelníků GHF a HCF plyne rovnost $|GH| = |HC|$. Protože trojúhelníky CFG a AEG jsou

podobné a jejich obsahy jsou v poměru $2 : 1$, je $|GC| = \sqrt{2}|AG|$, tj. $|AG| = \sqrt{2}|HC|$.

Z podobnosti trojúhelníků CFH , ABH plyne, že $|AB| : |CF| = 1 + \sqrt{2}$. Ve stejném poměru jsou i výšky v , w těchto trojúhelníků, takže

$$\frac{v}{|CB|} = \frac{v}{v+w} = \frac{1}{2+\sqrt{2}}.$$

Protože obsah trojúhelníku CFH je $\frac{1}{2}|CF|v$ a obsah obdélníku $ABCD$ je $|AB|(v+w)$, je hledaný poměr

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}-4}{4}.$$

Kategorie A

Texty úloh

A – I – 1

Pre každé prirodzené $n \geq 6$ platí $n! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^n$. Dokážte.

A – I – 2

Pravidelný štvorboký antihranol $ABCDEFGH$ má dve štvorcové steny $ABCD$, $EFGH$ a osem stien tvaru rovnostranného trojuholníka ABE , BCF , CDG , DAH , EFB , FGC , GHD , HEA . Všetky hrany majú dĺžku a . Vypočítajte objem daného antihranola.

A – I – 3

V rovine je dáno deväť bodů, z nichž niektoré jsou spojeny úsečkou. Přitom jsou splněny následující podmínky:

- a) v každé trojici daných bodů jsou aspoň dva spojeny úsečkou,
- b) počet úseček je minimální.

Kolik úseček obsahuje útvar, který tyto dvě podmínky splňuje? Načrtněte příklad takového útvaru.

A – I – 4

Každý mnohoúhelník M (ne nutně konvexní) lze rozřezat na trojúhelníky s vrcholy ve vrcholech M . Dokažte.

A – I – 5

Nájdite taký mnohočlen p s celočíselnými koeficientami, pro který platí

$$p(1) = 1, \quad p(2) = 3, \quad p(3) = 15$$

a který má nejmenší součet absolutních hodnot svých koeficientů. Změní se odpověď, ak budeme uvažovat mnohočleny p s libovolnými reálnými koeficientami?

A – I – 6

Je dána funkce f spojitá na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a s hodnotami $f(0) = f(1) = 1$, jež pro každá dvě čísla $x \leq y$ z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ splňuje rovnici

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(y).$$

Určete $f(\frac{1}{7})$.

A – S – 1

Nech a, b, c sú dĺžky strán trojuholníka. Dokážte nerovnosť

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

A – S – 2

Dokažte, že pro každé celé $k \geq 2$ existují celá nezáporná čísla $a > b$ taková, že hodnota mnohočlenu $x^a - x^b$ je dělitelná číslem k pro každé celé číslo x .

A – S – 3

Je dán čtyřstěn $ABCD$, jehož hrany DA , DB , DC jsou navzájem kolmé a mají délky a , b , c . Vypočtete velikost výšky v daného čtyřstěnu, jež přísluší stěně ABC . Dokažte, že při dané hodnotě v má čtyřstěn nejmenší objem, právě když $a = b = c$.

A – II – 1

Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla p a q platí nerovnost

$$(pq)! \geq (p!)^q (q!)^p.$$

A – II – 2

Daný je trojúhelník ABC , v ktorom pre priesečník výšok O platí $|OC| = |AB|$. Zistite, akú veľkosť môže mať uhol ACB .

A – II – 3

Nájdite najmenšie prirodzené číslo n , ku ktorému existuje polynóm p s celočíselnými koeficientami tvaru $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ taký, že $p(k)$ je deliteľné ôsmimi pre všetky celé k .

A – II – 4

Uvažujme funkci $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, která je ostře rostoucí a pro každá dvě přirozená čísla m, n splňuje rovnost

$$f(mn) = f(m)f(n).$$

Určete $f(30)$, víte-li, že $f(2) = 4$.

A – III – 1

Dokažte, že pro reálné čísla p, q, r, φ platí

$$\begin{aligned} p \cos^2 \varphi + q \sin \varphi \cos \varphi + r \sin^2 \varphi &\geq \\ &\geq \frac{1}{2} \left(p + r - \sqrt{(p-r)^2 + q^2} \right). \end{aligned}$$

A – III – 2

Vnitřní prostory muzea mají tvar mnohoúhelníku (ne nutně konvexního) s $3n$ vrcholy. Dokažte, že v něm můžeme rozestavit n hlídačů tak, aby viděli celý prostor muzea.

A – III – 3

Pro libovolnou permutaci p množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ označme $d(p)$ součet

$$|p(1) - 1| + |p(2) - 2| + \dots + |p(n) - n|$$

a $i(p)$ počet inverzí permutace p , tj. počet všech dvojic i, j takových, že $1 \leq i < j \leq n$ a $p(i) > p(j)$. Dokažte, že $d(p) \leq 2i(p)$.

A – III – 4

Dokažte, že všechny trojúhelníky ABC , jejichž úhel při vrcholu A je dvakrát větší než úhel při vrcholu B , mají stejný poměr vzdáleností bodu C od bodu A a od osy úsečky AB .

A – III – 5

Ak v skupine matematikov je každý s niekým spriatelnený (predpokladáme, že priateľstvo je symetrická relácia), pak medzi nimi existuje taký matematik, že priemerný počet priateľov všetkých jeho priateľov nie je menší než priemerný počet priateľov všetkých členov uvedenej skupiny. Dokážte.

A – III – 6

Množina $\mathbb{N}$ všetkých prirodzených čísel je zjednotením troch podmnožín A_1, A_2, A_3 . Dokážte, že aspoň jedna z nich má nasledujúcu vlastnosť: Existuje také kladné číslo m , že pre každé k môžeme v tejto množine nájsť čísla $a_1, a_2, \dots, a_k$, pre ktoré platí $0 < a_{j+1} - a_j \leq m$ ($1 \leq j \leq k-1$).

Řešení úloh

A – I – 1

Pro $n = 6$ tvrzení skutečně platí ($720 < 729$). Dále se pokusíme o důkaz indukci. Předpokládejme tedy, že tvrzení

platí pro nějaké $n \geq 6$ přirozené. Potom

$$(n+1)! = n!(n+1) \leq (n+1) \left(\frac{n}{2}\right)^n ;$$

přitom nerovnost

$$(n+1) \left(\frac{n}{2}\right)^n \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}$$

platí, právě když

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2.$$

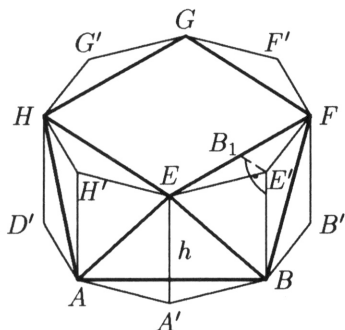
K důkazu poslední nerovnosti potřebujeme znát binomickou větu, ze které snadno dostaneme požadovaný odhad.

Poznámka. Nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem poskytne horší odhad $\sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$.

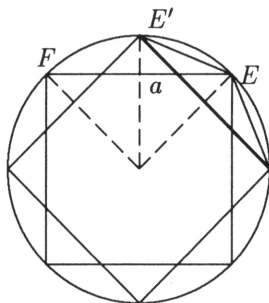
A – I – 2

Hledaný objem vypočítáme nejjednodušeji tak, že daný antihranol doplníme na pravidelný osmiboký hranol $AA'BB'CC'DD'EE'FF'GG'HH'$. Ten sestrojíme tak, že každým vrcholem antihranolu vedeme novou hranu kolmou k oběma základnám (obr. 17). Přitom tento osmiboký hranol vznikne z původního antihranolu přidáním osmi shodných čtyřtěšenů, jejichž objem stejně jako objem výsledného osmibokého hranolu není těžké určit.

Označíme-li P obsah trojúhelníku $EE'F$, S obsah pravidelného osmiúhelníku $EE'FF'GG'HH'$ a h výšku daného



Obr. 17



Obr. 18

antihranolu (a tedy i osmibokého hranolu), bude pro objem V daného antihranolu platit $V = Sh - \frac{8}{3}hP$, kde $S = a^2 + 4P$ (obr. 18) a $P = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} - 1}{2} a^2$. Výšku h vypočítáme podle Pythagorovy věty z trojúhelníku BB_1E' , vyjde

$$h = \frac{a}{2} \sqrt{3 - (\sqrt{2} - 1)^2} = \frac{a}{2} \sqrt[4]{8}.$$

Pro objem V pak dostaneme

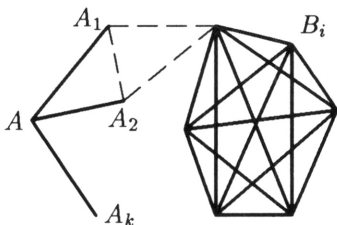
$$\begin{aligned} V &= \left(a^2 + \frac{4}{3}P\right)h = \frac{1}{2} \sqrt[4]{8} a^3 \left(1 + \frac{1}{3}(\sqrt{2} - 1)\right) \\ &= \frac{1}{3} \sqrt[4]{8} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) a^3. \end{aligned}$$

Jiná možnost, jak uvedený objem vypočítat, je použít vzorec $V = \frac{1}{6}h(P_1 + P_2 + 4M)$, kde P_1 , P_2 jsou obsahy obou podstav, M je obsah řezu antihranolu rovinou, která je rovnoběžná s oběma podstavami a má od nich stejnou

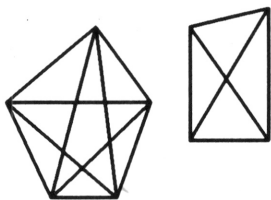
vzdálenost, a h je jeho výška. Důkaz najdete v řešení úlohy 41 ve sbírce Horák–Vrba: Úlohy MMO.

A – I – 3

Mějme nějakou konfiguraci n bodů splňující podmínku a) úlohy. Pokud existuje bod A , z něhož vychází právě $k \leq \frac{1}{2}n$ úseček, musí být každé dva z ostatních $n - k - 1$ bodů spojeny úsečkou. Uvažujme dále libovolnou dvojici bodů spojených s A úsečkou (např. A_1, A_2 — obr. 19). Uvažovaná dvojice bodů A_1, A_2 je buď spojena úsečkou, anebo ke každému z bodů $B_1, B_2, \dots, B_{n-k-1}$, jež s A spojeny nejsou, existuje aspoň jedna úsečka, která je spojuje s jedním z bodů uvažované dvojice. V takovém případě zvolené dvojici odpovídá aspoň $n - k - 1$ úseček, přičemž každou takovou úsečku pak počítáme nejvýše $(k - 1)$ krát (koncový bod A_i úsečky $A_i B_j$ se vyskytuje v $k - 1$ dvojicích $A_i A_l$, $1 \leq l \leq k$, $l \neq i$). Protože pro $k \leq \frac{1}{2}n$ je $\frac{n - k - 1}{k - 1} \geq 1$, dostaneme tak pro každou z $\binom{k}{2}$ dvojic aspoň 1 úsečku, celkem tedy dostaneme nejméně $\binom{n-k-1}{2} + \binom{k}{2} + k = \binom{n-k-1}{2} + \binom{k+1}{2} \geq \binom{m}{2} + \binom{n-m}{2}$ úseček, kde $m = \lfloor n/2 \rfloor$.



Obr. 19



Obr. 20

Pokud by ovšem z každého bodu vycházelo více než $\frac{1}{2}n$ úseček, dostali bychom celkem více než $\frac{1}{4}n^2$ úseček, což je více než v předchozím případě, jak zjistíme výpočtem. Pro $n = 9$ vyjde nejmenší počet úseček pro $k = 4$ (obr. 20). Odpovídající útvar obsahuje $\binom{5}{2} + \binom{4}{2} = 16$ úseček.

Jiné řešení. Označme A bod, z něž vychází minimální kladný počet, řekněme k úseček. Z každého bodu, který je s A spojen úsečkou, vychází aspoň k úseček. Uvedených $k+1$ bodů je tedy spojeno aspoň $\frac{1}{2}k(k+1)$ úsečkami. Zbývajících $n-k-1$ bodů musí být pospojováno navzájem. Kdyby tomu tak nebylo, daly by nespojené dva z těchto bodů s bodem A trojici, v níž není ani jedna úsečka. Tím by byla porušena podmínka a).

Počet p všech úseček množiny tedy můžeme odhadnout zdola hodnotou $p(k)$, která závisí na čísle k :

$$\begin{aligned} p \geq p(k) &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(n-k-1)(n-k-2)}{2} = \\ &= \frac{2k^2 - 2k(n-2) + (n-1)(n-2)}{2} = \\ &= k^2 - 2k \frac{n-2}{2} + \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 - \\ &\quad - \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 + \frac{2(n-1)(n-2)}{4} = \\ &= \left(k - \frac{n-2}{2}\right)^2 + \frac{n(n-2)}{4}. \end{aligned}$$

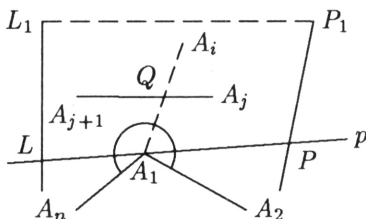
Odtud je vidět, že nejmenší počet 16 úseček dostaneme pro $k = 3$ nebo $k = 4$.

Úlohu lze samozřejmě řešit i rozbořem jednotlivých konkrétních možností (viz řešení úlohy B-I-3).

Tvrzení úlohy se může na první pohled zdát triviální. Pro konvexní n -úhelník je opravdu zřejmé — úhlopříčkou daný mnohoúhelník M rozdělíme na dva mnohoúhelníky s menším počtem vrcholů, takže můžeme použít matematickou indukci. Musíme však dokázat, že i v nekonvexním mnohoúhelníku M vždycky existuje taková úhlopříčka (tj. úsečka spojující dva jeho vrcholy), která leží celá v M .

Mějme tedy n -úhelník $M = A_1A_2 \dots A_n$, který má nekonvexní úhel např. při vrcholu A_1 . Vrcholem A_1 vedme přímku p takovou, že s ní žádná ze stran M není rovnoběžná, a přitom oba sousední vrcholy A_2 a A_n leží ve stejné polorovině určené přímkou p .

Označme L a P body, v nichž přímka p poprvé protne hranici M (LP leží celá v M), a L_1 , resp. P_1 ten vrchol strany obsahující bod L , resp. P , který leží v polorovině opačné k pA_2 (obr. 21). Uvažujme teď vrchol $A_i \neq A_1$, který leží ve čtyřúhelníku $LP P_1 L_1$ a má od přímky p nejmenší vzdálenost (takový bod jistě existuje, protože první vlastnost má např. bod L_1).



Obr. 21

Ukážeme, že zmíněný vrchol A_i je spojen s vrcholem A_1 úhlopříčkou, která leží celá v M . Kdyby úsečka A_1A_i neležela celá v M , musela by v nějakém vnitřním bodě Q protínat hranici uvažovaného mnohoúhelníku v nějaké jeho straně A_jA_{j+1} . Strana A_jA_{j+1} není rovnoběžná s p , neprotíná žádnou ze stran L_1L, LP, PP_1 , a proto některý její krajní bod leží uvnitř LPP_1L_1 blíže k p než bod A_i . To je ve sporu s volbou bodu A_i .

A – I – 5

Uvažujme kvadratický mnohočlen q , pro který platí $q(1) = 1, q(2) = 3, q(3) = 15$. Ten je uvedenými třemi hodnotami jednoznačně určen; pro jeho koeficienty dostaneme tři rovnice o třech neznámých a vyjde $q(x) = 5x^2 - 13x + 9$. Tento mnohočlen má součet absolutních hodnot koeficientů 27.

Každý mnohočlen třetího stupně, který splňuje uvedené podmínky, se dá psát ve tvaru

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^2 - 13x + 9 + k(x-1)(x-2)(x-3) = \\ &= kx^3 + (5-6k)x^2 + (11k-13)x + (9-6k), \end{aligned}$$

kde k je celé číslo. Vcelku snadno odhadneme, že příslušný součet $|k| + |5-6k| + |11k-13| + |9-6k|$ je nejmenší pro $k = 1$ a je roven 7.

Každý mnohočlen vyššího stupně, který splňuje podmínky úlohy, můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned} p(x) &= q(x) + (x-1)(x-2)(x-3)k(x) = \\ &= q(x) + (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)k(x) = \sum_{i=0}^{n+3} a_i x^i, \end{aligned}$$

kde $k(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$ je mnohočlen s celočíselnými koeficienty.

Porovnáním koeficientů vyjde

$$a_0 = -6b_0 + 9,$$

$$a_1 = -6b_1 + 11b_0 - 13,$$

$$a_2 = -6b_2 + 11b_1 - 6b_0 + 5,$$

$$a_3 = -6b_3 + 11b_2 - 6b_1 + b_0,$$

$$a_4 = -6b_4 + 11b_3 - 6b_2 + b_1,$$

.....

Nyní hledáme celá čísla $b_0, b_1, b_2, \dots$ taková, aby součet $|a_0| + |a_1| + |a_2| + \dots$ nebyl větší než 7. Protože $|a_2| + |a_3| + \dots \geq 1$, musí být $|a_0| = |9 - 6b_0| \leq 6$, což dává dvě možnosti: $b_0 = 1$ nebo $b_0 = 2$.

Pro $b_0 = 1$ vyjde $|a_0| = 3$, a proto $|a_1| \leq 3$, tj. $b_1 = 0$, $a_1 = -2$. Pak ale musí být $|a_2| \leq 2$, tj. $b_2 = 0$, $a_2 = -1$, a $|a_3| \leq 1$, tj. $b_3 = \dots = b_n = 0$. Dostáváme tak mnohočlen $x^3 - x^2 - 2x + 3$, který má součet absolutních hodnot koeficientů rovný 7.

Pro $b_0 = 2$ postupujeme analogicky a zjistíme, že žádný další mnohočlen s uvedenou vlastností neexistuje.

Poznámka. Pokud uvažujeme mnohočleny s libovolnými reálnými koeficienty, najdeme mnohočlen s menším součtem absolutních hodnot koeficientů. Např. mnohočlen $f(x) = \frac{1}{11}(13x^3 - 23x^2 + 21)$, který dostaneme pro $k = \frac{13}{11}$, má příslušný součet $\frac{57}{11} < 7$.

A - I - 6

Hodnoty funkce f jsou jednoznačně určeny v bodech tvaru $\frac{k}{2^n}$ ($0 \leq k \leq 2^n$). Protože

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{8},$$

je

$$f\left(\frac{1}{7}\right) = f\left(\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) = \frac{2}{3}f\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{4}\right).$$

Přitom z daného vzorce pro $x = 0$ indukcí snadno vypočteme, že pro libovolné $y \in \langle 0, 1 \rangle$ a $n \geq 0$ platí

$$f\left(\frac{y}{2^n}\right) = 1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^n}f(y) \quad \text{a speciálně} \quad f\left(\frac{1}{2^n}\right) = 1,$$

takže pro $f(\frac{1}{7})$ dostaneme vztah

$$f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2}f\left(\frac{1}{7}\right) \right) + \frac{1}{3},$$

odkud vychází $f(\frac{1}{7}) = 1$.

A - S - 1

Jednoduchou úpravou dostaneme ekvivalentní nerovnost (čísla a, b, c jsou dle předpokladu kladná)

$$\begin{aligned} & a(a+c)(a+b) + b(b+c)(a+b) + c(b+c)(a+c) = \\ & = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc + a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) < \\ & < 2(a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc), \end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned} & a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) - a^3 - b^3 - c^3 + abc = \\ & = a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) + abc > 0, \end{aligned}$$

která pro čísla splňující trojúhelníkovou nerovnost zřejmě platí.

A – S – 2

Uvažujme množinu $\mathbb{Z}_k$ zbytkových tříd mod k . Každý mnohočlen x^a představuje pro dané a přirozené zobrazení $\mathbb{Z}_k \rightarrow \mathbb{Z}_k$, ale takových zobrazení mezi dvěma konečnými množinami existuje jen konečně mnoho. Proto jistě existují dvě různá čísla $a > b$ taková, že

$$x^a \equiv x^b \pmod{k}$$

pro všechna celá čísla x . Je jasné, že mnohočlen $p(x) = x^a - x^b$ má požadovanou vlastnost.

Jiné řešení. Tvrzení můžeme také odvodit pomocí Eulerovy věty, která říká, že pro každé x nesoudělné s k platí $x^{\varphi(k)} - 1 \equiv 0 \pmod{k}$, kde $\varphi(k)$ označuje počet přirozených čísel nejvýše rovných k a nesoudělných s k . Pro x soudělné s k uvažujme rozklad $k = k_1 k_2$ čísla k takový, že k_1 je s x nesoudělné a k_2 obsahuje ve svém rozkladu na prvočinitele jen ta prvočísla, která dělí x . Protože funkce φ je multiplikativní, tedy $\varphi(k) = \varphi(k_1)\varphi(k_2)$, vidíme, že podle Eulerovy věty

$$x^{\varphi(k)} = \left(x^{\varphi(k_1)}\right)^{\varphi(k_2)} \equiv 1 \pmod{k_1},$$

takže stačí vzít $p(x) = x^{m(k)}(x^{\varphi(k)} - 1)$, kde $m(k)$ je nejvyšší exponent v prvočíselném rozkladu čísla k . Potom máme zaručeno, že $x^{m(k)}$ bude dělitelno číslem k_2 , takže součin $x^{m(k)}(x^{\varphi(k)} - 1)$ je pak dělitelný součinem $k = k_1 k_2$. Můžeme tedy vzít $a = m(k) + \varphi(k)$, $b = m(k)$.

A – S – 3

Pro objem V daného čtyřstěnu $ABCD$ platí

$$V = \frac{1}{6} abc = \frac{1}{3} Sv, \quad (1)$$

kde S je obsah stěny ABC a v příslušná výška. Obsah S snadno spočteme podle Heronova vzorce, protože délky stran trojúhelníku ABC umíme vyjádřit pomocí a , b , c použitím Pythagorovy věty. Je tedy

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} \sqrt{\left((\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2})^2 - (a^2 + c^2)\right)} \cdot \\ &\quad \cdot \sqrt{\left(a^2 + c^2 - (\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{b^2 + c^2})^2\right)} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(2b^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{b^2 + c^2})} \cdot \\ &\quad \cdot \sqrt{(2\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{b^2 + c^2} - 2b^2)} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}. \end{aligned}$$

Ze vztahu (1) pro výšku v plyne

$$v = \frac{1}{2} \cdot \frac{abc}{S} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}.$$

(Tento vzorec můžeme ovšem snadno získat přímo ze vzorce pro vzdálenost bodu D od roviny ABC , který známe z analytické geometrie prostoru.)

Nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)^3 \geq \frac{3^3}{a^2 b^2 c^2},$$

tj.

$$abc \geq \frac{3\sqrt{3}}{\left(\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}\right)^3},$$

dává odhad

$$V = \frac{1}{6} abc \geq \frac{\sqrt{3}}{2} v^3$$

s rovností právě jen pro $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$, tj. pro $a = b = c$.

Tím je důkaz hotov.

A – II – 1

Součin $(pq)!$ napíšeme jako

$$(pq)! = (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p)((p+1)(p+2) \cdot \dots \cdot (p+p)) \cdot \dots \cdot ((q-1)p+1)((q-1)p+2) \dots ((q-1)p+p),$$

přičemž součin v k -té závorce napravo ($0 \leq k \leq q-1$) můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned} (kp+1)(kp+2) \dots (kp+p) &= \\ &= \underbrace{(p + \dots + p+1)}_k \underbrace{(p + \dots + p+2)}_k \dots \underbrace{(p + \dots + p+p)}_k. \end{aligned}$$

Po „roznásobení“ všech závorek dostaneme $(k+1)^p$ sčítanců vesměs nejméně rovných $p!$. Je tedy

$$(kp+1)(kp+2)\dots(kp+p) \geq (k+1)^p p!,$$

a

$$(pq)! \geq 1^p p! \cdot 2^p p! \cdot \dots \cdot q^p p! = (p!)^q (q!)^p.$$

Jiné řešení. Dokážeme nerovnost matematickou indukcí. Pro $p = 1$ nerovnost triviálně platí pro libovolné přirozené číslo q . Předpokládejme, že uvažovaná nerovnost platí pro nějaké p přirozené a libovolné q . Potom je

$$\begin{aligned} ((p+1)q)! &= (pq+q)! \geq \\ &\geq (p!)^q (q!)^p (pq+1)(pq+2)\dots(pq+q) \geq \\ &\geq (p!)^q (q!)^p (p+1)(2p+2)\dots(qp+q) = \\ &= (p!)^q (p+1)^q (q!)^{p+1} = ((p+1)!)^q (q!)^{p+1}. \end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov.

Jiné řešení (podle Jiřího Fialy, G Liberec). Předpokládejme, že uvažovaná nerovnost platí pro nějaké p přirozené a libovolné q . Uvažujme tabulku $k \times q$. Je zřejmé, že počet k^q všech q -prvkových podmnožin, jež obsahují z každého z k sloupců tabulky právě jeden prvek, není menší než počet $\binom{kq}{q}$ všech q -prvkových podmnožin prvků tabulky. Pro $k = p+1$ tak dostáváme nerovnost $((p+1)q)! \geq (p+1)^q q! (pq)!$. Podle indukčního předpokladu odtud plyne

$$\begin{aligned} ((p+1)q)! &\geq (pq)!(p+1)^q q! \geq \\ &\geq (p!)^q (q!)^p (p+1)^q q! = ((p+1)!)^q (q!)^{p+1}. \end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov.

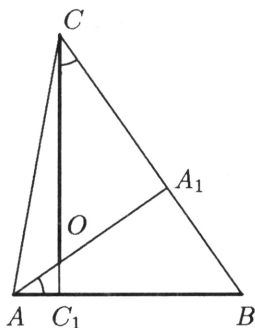
Jiné řešení (podle Oldřicha Audy, G, tř. kpt. Jaroše, Brno). Uvažujme tabulku $p \times q$ vyplněnou čísly $1, 2, \dots, pq$. Mezi všemi takovými uspořádáními je právě $(p!)^q$ těch, které se od základního pořadí liší jen pořadím v jednotlivých řádcích, a právě $(q!)^p$ těch, jež se od základního pořadí liší jen pořadím čísel v jednotlivých sloupcích uvažované tabulky.

Uvažujme nyní všechny permutace čísel $1, 2, \dots, pq$, jež vzniknou složením obou druhů permutací. (Je-li na k -tém místě jednoho pořadí číslo m ($1 \leq m \leq pq$) a na m -tém místě druhého pořadí číslo n , bude na k -tém místě nové tabulky, odpovídající složení obou permutací, číslo n .) Počet všech permutací, jež takto dostaneme, je $(p!)^q(q!)^p$ a je nejvýše roven počtu všech různých uspořádání pq čísel v tabulce, kterých je $(pq)!$.

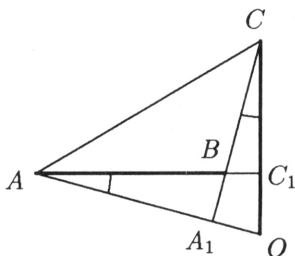
A – II – 2

Předpokládejme nejprve, že úhel ACB při vrcholu C je ostrý, a označme A_1, C_1 paty příslušných výšek. Protože (obr. 22) $|\sphericalangle A_1AB| = 90^\circ - |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle C_1CB|$, jsou pravoúhlé trojúhelníky ABA_1 a COA_1 shodné, takže $|A_1A| = |A_1C|$ a trojúhelník AA_1C je rovnoramenný. Proto má úhel ACB velikost 45° .

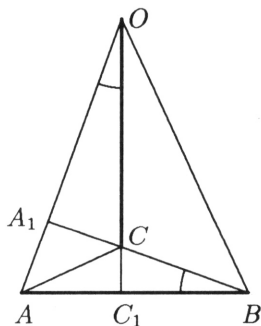
V tupoúhlém trojúhelníku ABC (s tupým úhlem při vrcholu B — případ tupého úhlu při vrcholu A dostaneme jednoduchou záměnou označení A a B) dostaneme obdobně (obr. 23) $|\sphericalangle A_1AB| = 90^\circ - |\sphericalangle AOC| = |\sphericalangle C_1CB|$, takže znovu vychází, že úhel ACB má velikost 45° .



Obr. 22



Obr. 23



Obr. 24

Pokud úhel ACB je tupý (obr. 24), vyjde zase, že trojúhelníky ABA_1 a COA_1 jsou shodné, takže trojúhelník ACA_1 je rovnoramenný. Odtud plyne, že úhel ACB má velikost 135° .

Konečně snadno ověříme, že pokud úhel ACB je pravý, nemohou být předpoklady úlohy splněny.

Z čísel $x - 1$, x , $x + 1$, $x + 2$ jsou dvě sudá a z nich aspoň jedno je dělitelné čtyřmi, takže součin $(x - 1)x(x + 1)(x + 2)$ je dělitelný osmi. Odtud plyne, že pro $n = 4$ je

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x \equiv 0 \pmod{8}.$$

Předpokládejme, že existuje mnohočlen třetího stupně, pro který platí

$$x^3 + ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{8}.$$

Pro $x \equiv 0$ pak vychází $c \equiv 0 \pmod{8}$ a dosazením $x \equiv \pm 1 \pmod{8}$ dostaneme dvě kongruence

$$\begin{aligned} 1 + a + b &\equiv 0 \pmod{8}, \\ -1 + a - b &\equiv 0 \pmod{8}. \end{aligned}$$

Jejich odečtením vyjde

$$2(1 + b) \equiv 0 \pmod{8},$$

což dává $b \equiv -1 \pmod{4}$, a jejich sečtením dostaneme $a \equiv 0 \pmod{4}$, zatímco pro $x \equiv 2 \pmod{8}$ vyjde podmínka $4a + 2b \equiv 0 \pmod{8}$, neboli $b \equiv 0 \pmod{4}$. To je ovšem ve sporu s předchozím výsledkem $b \equiv -1 \pmod{4}$. Úplně stejně dokážeme, že neexistuje ani kvadratický nebo lineární mnohočlen, který by úloze vyhovoval.

Poznámka. Jestliže $8 \mid p(x)$ pro každé celé x , je osmi dělitelná i n -tá difference mnohočlenu p , tj. součet

$$\begin{aligned} p(x + n) - \binom{n}{1}p(x + n - 1) + \binom{n}{2}p(x + n - 2) - \dots + \\ + (-1)^n p(x) = n!. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že $8 \mid n!$, tj. $n \geq 4$.

A – II – 4

Z multiplikativní vlastnosti uvažované funkce f plyne, že je $f(30) = f(2)f(3)f(5)$. Nejdříve určíme hodnotu $f(3)$.

Díky monotonii funkce f platí

$$f(8) = 4^3 = 64 < f(9) = (f(3))^2, \quad \text{tj.} \quad 8 < f(3),$$

a dále

$$f(243) = (f(3))^5 < f(256) = 4^8 = 65\,536 < 10^5,$$

což dává $f(3) < 10$, musí tedy být $f(3) = 9$.

Podobně pro hodnotu $f(5)$ platí

$$f(24) = 9 \cdot 4^3 = 24^2 < f(25) = (f(5))^2, \quad \text{tj.} \quad 24 < f(5),$$

a

$$f(125) = (f(5))^3 < f(128) = 4^7 = 16\,384 < 17\,576 = 26^3,$$

takže vychází $24 < f(5) < 26$ a $f(5) = 25$.

Je tedy $f(30) = 4 \cdot 9 \cdot 25 = 900$.

Jiné řešení (podle Jakuba Těšínského, G, Korunní, Praha). Zřejmě je $f(1) = 1$. Předpokládejme, že není $f(x) = x^2$, a označme x_0 nejmenší přirozené číslo, pro které existuje číslo q takové, že $f(x_0) = q < x_0^2$. Pak v intervalu $(\log_4 q, \log_4 x_0^2)$ existuje racionální číslo $\frac{m}{n}$, tj.

$$q^n < 4^m < x_0^{2n},$$

neboli

$$2^m < x_0^n.$$

Z vlastností funkce f plyne, že

$$f(x_0^n) = (f(x_0))^n = q^n < 4^m = f(2)^m = f(2^m),$$

což odporuje předpokladu, že funkce f je rostoucí. Podobně dojdeme ke sporu, předpokládáme-li, že existuje přirozené číslo x_0 , pro které $f(x_0) > x_0^2$. Je tedy $f(x) = x^2$ pro každé přirozené číslo x a $f(30) = 30^2 = 900$.

A – III – 1

Použitím známých vztahů mezi trigonometrickými funkcemi postupně dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$\begin{aligned}\sqrt{(p-r)^2 + q^2} &\geq \\ &\geq p + r - 2(p \cos^2 \varphi + q \sin \varphi \cos \varphi + r \sin^2 \varphi) = \\ &= p - r - 2(p - r) \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi = \\ &= (p - r)(1 - 2 \cos^2 \varphi) - q \sin 2\varphi = \\ &= -(p - r) \cos 2\varphi - q \sin 2\varphi,\end{aligned}$$

která je vlastně snadným důsledkem Cauchyovy nerovnosti

$$\begin{aligned}-(p - r) \cos 2\varphi - q \sin 2\varphi &\leq \\ &\leq \sqrt{(p - r)^2 + q^2} \sqrt{\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi},\end{aligned}$$

neboť $\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi = 1$.

A – III – 2

Předpokládejme, že příslušný mnohoúhelník je rozdělen na trojúhelníky s vrcholy ve vrcholech daného mnohoúhelníku (existence takovéto triangulace byla dokázána v úloze A–I–4), a očísľujme všechny vrcholy čísky 1, 2, 3 tak, aby každý z trojúhelníků triangulace obsahoval ve svých vrcholech každé z těchto čísel.

To lze udělat v každém n -úhelníku. Pro $n = 3$ to je zřejmé; pokud to jde udělat v k -úhelníku pro libovolné $k < n$, pak stačí uvažovaný n -úhelník rozdělit jednou ze stran zvolené triangulace na dva (triangulované) mnohoúhelníky, pro které podle indukčního předpokladu takové očíslování existuje. Nyní stačí v jednom z mnohoúhelníků očíslování změnit tak, aby se čísla v obou společných vrcholech shodovala. Dostaneme tak požadované očíslování všech vrcholů daného n -úhelníku.

Vezmeme-li takovéto očíslování v uvažovaném $3n$ -úhelníku, vyskytne se jedno z čísel 1, 2, 3 nejvýše n -krát. Rozestavením hlídačů v těchto vrcholech budou podmínky úlohy splněny.

A – III – 3

Nerovnost dokážeme matematickou indukcí podle počtu inverzí v permutaci.

Tvrzení zřejmě platí, jestliže $i(p) = 0$, potom je p identická permutace, takže i $d(p) = 0$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro každou permutaci s počtem inverzí $i(p) \leq k$, a uvažujme permutaci p_0 , která má $i(p_0) = k + 1$ inverzí. Protože p_0 není identická permutace, určitě existuje index

i takový, že $p_0(i) > p_0(i+1)$. Utvořme novou permutaci p' , která bude mít o jednu inverzi méně: stačí položit $p'(i) = p_0(i+1)$, $p'(i+1) = p_0(i)$ a $p'(j) = p_0(j)$ pro všechna ostatní j , $i \neq j \neq i+1$. Potom $i(p') = k$ a podle indukčního předpokladu $i d(p') \leq i(p') = 2k$.

Jednoduchým výpočtem dostáváme

$$\begin{aligned} d(p_0) - d(p') &= |p_0(i) - i| + |p_0(i+1) - i - 1| - \\ &\quad - |p'(i) - i| - |p'(i+1) - i - 1| = \\ &= |p_0(i) - i| + |p_0(i+1) - i - 1| - \\ &\quad - |p_0(i+1) - i| - |p_0(i) - i - 1| = \\ &= (|p_0(i) - i| - |p_0(i) - (i+1)|) + \\ &\quad + (|p_0(i+1) - (i+1)| - |p_0(i+1) - i|) \leq \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

(s rovností právě jen pro $p_0(i+1) \leq i < p_0(i)$), takže je

$$d(p_0) \leq d(p') + 2 \leq 2(k+1) = 2i(p_0).$$

A - III - 4

Pro vzdálenost d bodu C od osy úsečky AB platí

$$d = \frac{c}{2} - b \cos \alpha = \frac{c}{2} - b \cos 2\beta$$

(to platí i pro tupý úhel β). Zároveň z předpokladu $\alpha = 2\beta$ plyne podle sinové věty rovnost

$$\begin{aligned} c &= \frac{b \sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{b \sin 3\beta}{\sin \beta} = b(3 \cos^2 \beta - \sin^2 \beta) = \\ &= b(4 \cos^2 \beta - 1), \end{aligned}$$

takže

$$d = \frac{b}{2} (4 \cos^2 \beta - 1) - b(2 \cos^2 \beta - 1) = \frac{b}{2}.$$

To znamená, že obě uvedené vzdálenosti jsou v poměru $b : d = 2$.

A – III – 5

Označme M množinu všech členů uvažované skupiny matematiků a n jejich počet. Dále označme $F(m)$ množinu všech přátel matematika m a $f(m)$ jejich počet. Máme dokázat, že existuje matematik m_0 , pro kterého platí

$$\frac{1}{f(m_0)} \sum_{m \in F(m_0)} f(m) \geq \frac{1}{n} \sum_{m \in M} f(m).$$

Předpokládejme naopak, že pro žádného z členů skupiny taková nerovnost neplatí, tedy že pro každé m_0 z M je

$$n \sum_{m \in F(m_0)} f(m) < f(m_0) \sum_{m \in M} f(m).$$

Každý z matematiků $m \in M$ se pro dané m_0 vyskytuje celkem v $f(m)$ množinách $F(m_0)$, takže sečteme-li uvedené nerovnosti pro všechna $m_0 \in M$, dostaneme

$$n \sum_{m \in M} f(m)^2 < \left(\sum_{m \in M} f(m) \right)^2.$$

To ale odporuje známé Cauchyově nerovnosti. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Zřejmě můžeme předpokládat, že dané množiny jsou navzájem disjunktní. Jestliže A_1 nemá požadovanou vlastnost, můžeme pro libovolné přirozené číslo m najít $k_1 > 0$ takové, že každých k_1 čísel $a_1 < a_2 < \dots < a_{k_1}$ z množiny A_1 obsahuje mezeru m po sobě jdoucích čísel, která do ní nepatří ($a_{j+1} - a_j > m$). Odtud plyne, že doplněk množiny A_1 v $\mathbb{N}$, tj. sjednocení množin $A_2 \cup A_3$, obsahuje libovolně dlouhou posloupnost po sobě jdoucích čísel.

Předpokládejme, že ani množina A_2 nemá požadovanou vlastnost. Pak tedy existuje $k_2 > 0$ takové, že každých k_2 čísel $a_1 < a_2 < \dots < a_{k_2}$ z A_2 obsahuje mezeru m po sobě jdoucích čísel, které do ní nepatří. Podle předcházející úvahy v množině $A_2 \cup A_3$ existuje $k_2 m$ po sobě jdoucích čísel; pokud k_2 z nich patří do množiny A_2 , obsahuje taková k_2 -tice mezeru nejméně m po sobě jdoucích čísel, která leží v A_3 . Je-li naopak jen nejvýše $k_2 - 1$ z nich z množiny A_2 , rozdělí tato čísla vybraných $k_2 m$ čísel na nejvýše k_2 intervalů, z nichž aspoň jeden obsahuje nejméně m po sobě jdoucích čísel z A_3 . To ovšem znamená, že i v takovém případě množina A_3 obsahuje libovolně dlouhou posloupnost po sobě jdoucích čísel. Pak ale množina A_3 má požadovanou vlastnost dokonce pro $m = 1$.

Kategorie P

Texty úloh

P – I – 1

V rovině je dáno N bodů očíslovaných od 1 do N . Dvojice čísel $(X[i], Y[i])$ pro $1 \leq i \leq N$ reprezentuje kartézské souřadnice bodu i . Robot projde všemi body v pořadí jejich očíslování podle těchto pravidel:

1. Na začátku stojí robot v bodě 1 a dívá se k bodu 2.
2. Robot se pohybuje vždy přímo tím směrem, kterým se dívá.
3. V bodě i pro $1 \leq i \leq N$ se robot otočí ve směru pohybu hodinových ručiček o úhel α , $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$, tak, aby se díval k bodu $(i + 1) \bmod N$.
4. Robot skončí svůj pohyb v bodě 1 tak, že se opět dívá k bodu 2.

Během svého pohybu se robot celkem d -krát úplně otočí kolem své osy. Navrhněte co nejlepší algoritmus, který pro zadaná celočíselná pole $X[1..N]$, $Y[1..N]$ vypočítá hodnotu d . Je povoleno používat jen celočíselné proměnné. Zdůvodněte správnost algoritmu.

P - I - 2

Je dáno celočíselné pole $P[1..M]$, které obsahuje permutaci čísel $1, 2, \dots, M$, tj. pro každé i , $1 \leq i \leq M$, existuje právě jedno h , $1 \leq h \leq M$, takové, že $P[h] = i$. Dále je dáno celočíselné pole $X[1..N]$. Navrhněte co nejlepší algoritmus, který určí, kolikrát se permutace P vyskytuje v poli X , tj. kolik existuje různých rostoucích celočíselných posloupností $R[1..M]$ takových, že pro všechna i , $1 \leq i \leq M$,)platí

$$1 \leq R[i] \leq N, \quad P[i] = X[R[i]].$$

Zdůvodněte správnost navrženého algoritmu.

P - I - 3

Orientovaný graf je dvojice $G = (V, E)$, kde V je konečná množina, jejíž prvky se nazývají vrcholy nebo uzly grafu, a E je binární relace na množině V . Je-li $(x, y) \in E$, říkáme, že v orientovaném grafu vede hrana z vrcholu x do vrcholu y , y se nazývá následník uzlu x a x je předchůdce uzlu y . Cesta délky k v orientovaném grafu je posloupnost $v_0, v_1, \dots, v_k$ vrcholů, $k \geq 0$, taková, že pro všechna i , $0 \leq i < k$ je v_i předchůdce v_{i+1} . Říkáme, že vrchol y je dosažitelný z vrcholu x , jestliže existuje cesta z x do y . Poznamenejme, že každý vrchol je dosažitelný sám ze sebe cestou délky 0.

Graf G budeme reprezentovat dvěma celočíselnými poli $B[1..N+1]$ a $E[1..M]$, kde N je počet vrcholů a M počet hran v grafu G . Vrcholy jsou očíslovány od 1 do N . Uzel j má $B[j+1] - B[j]$ následníků; jsou zachyceni v prv-

cích $E[B[j]+1], \dots, E[B[j+1]]$ pole E . Položíme $B[1] = 0$, $B[N+1] = M$.

Cyklus v orientovaném grafu je cesta, jejíž délka je aspoň 1 a v níž je první uzel totožný s posledním uzlem. Graf, který neobsahuje žádný cyklus, se nazývá acyklický.

Navrhněte co nejlepší algoritmus, který pro zadaná celočíslná pole B , E reprezentující orientovaný graf G zjistí, zda graf G je acyklický. Při řešení nepoužívejte rekurzi. Zdůvodněte správnost navrženého algoritmu.

P – I – 4

- Navrhněte Turingův stroj, který počítá součet dvou přirozených čísel.
- Navrhněte Turingův stroj, který počítá funkci zdvojení vstupního slova nad abecedou $\{a, b\}$. Pro vstupní slovo P bude tedy výsledkem výpočtu slovo PP .

Turingovy stroje

Abecedou nazveme konečnou neprázdnou množinu Σ . Její prvky nazýváme symboly. Konečnou posloupnost symbolů abecedy Σ nazveme slovem nad abecedou Σ . Prázdnou posloupnost symbolů abecedy, značenou ε , nazveme prázdné slovo. Turingův stroj M nad abecedou Σ má řídicí jednotku, která se může dostávat do konečně mnoha různých stavů a pracuje nad páskou rozdělenou na jednotlivá pole. Na pásce existuje nejlevější pole, směrem doprava je však nekonečná. Každé pole obsahuje vždy jeden symbol páskové abecedy. Pásková abeceda Π je tvořena jednak symboly vstupní abecedy Σ , dále symboly pomocné abecedy V , $\Sigma \cap V = \emptyset$

a speciálním prázdným symbolem Δ , $\Delta \notin \Sigma \cup V$. Tedy $\Pi = \Sigma \cup V \cup \{\Delta\}$.

V každém okamžiku je řídicí jednotka Turingova stroje v právě jednom ze svých možných vnitřních stavů a stroj má přístup k právě jednomu poli pásky prostřednictvím čtecí a zapisovací hlavy. V této situaci stroj provede krok výpočtu následovně: hlava запиše nový symbol páskové abecedy na pole, nad kterým je umístěna hlava, a tím nahradí původně zapsaný symbol; po tomto zápisu přejde na levé nebo pravé sousední pole. Současně řídicí jednotka může změnit svůj stav. Všechny tyto změny závisí jednak na vnitřním stavu řídicí jednotky, jednak na obsahu čteného pole pásky.

Činnost Turingova stroje je zadána dvojrozměrnou *tabulkou*, která obsahuje pro každý vnitřní stav řídicí jednotky jeden řádek a pro každý symbol páskové abecedy jeden sloupec. Jeden zvolený stav řídicí jednotky je označen jako počáteční a žádný, jeden nebo více stavů jako koncové. Položka tabulky odpovídající stavu i a symbolu s páskové abecedy je buď prázdná, nebo je tvořena trojicí (α, β, γ) , kde α je stav, β je symbol páskové abecedy, $\gamma \in \{L, P\}$.

Každá trojice popisuje jeden možný krok *výpočtu* Turingova stroje M : je-li během výpočtu stroj M ve stavu i a hlava je umístěna nad pole pásky se symbolem s , pak stroj přejde do stavu α , hlava запиše na pásku symbol β do pole, nad nímž se nachází čtecí hlava, a posune hlavu na pásce o jedno pole doleva nebo doprava podle toho, zda $\gamma = L$, nebo P . Na počátku výpočtu je dané vstupní slovo w nad abecedou Σ umístěno zcela vlevo na začátku pásky a všechna zbývajících pole vpravo od slova w obsahují prázdný symbol Δ . Hlava je na počátku výpočtu umístěna

nad nejlevějším polem a řídicí jednotka je v počátečním stavu. Výpočet probíhá podle tabulky. Dosáhne-li stroj některého koncového stavu, výpočet končí. Pokud výpočet dojde do nekoncového stavu i , přičemž ve čteném poli pásky je symbol s a položka tabulky odpovídající stavu i a symbolu s je prázdná, pak výpočet rovněž končí. Řekneme, že funkce $f(w_1, w_2, \dots, w_n)$, $n \geq 1$, zobrazující množinu n -tic slov nad abecedou Σ do množiny slov nad Σ , je počítána Turingovým strojem M nad $\Sigma \cup \{*\}$, kde $* \notin \Sigma$, jestliže pro každé vstupní slovo $w_1 * w_2 * \dots * w_n$ zadané na pásce se stroj M chová následovně:

1. Je-li funkční hodnota $f(w_1, w_2, \dots, w_n)$ definována a rovna slovu w , pak výpočet stroje M končí a po skončení je na pásce od začátku zapsáno slovo w , následované pouze prázdnými symboly.
2. Není-li funkční hodnota $f(w_1, w_2, \dots, w_n)$ definována, pak výpočet stroje M neskončí.

Turingův stroj M může počítat i funkce booleovské, a to takto:

1. Je-li funkční hodnota $f(w_1, w_2, \dots, w_n) = \text{true}$ (pravda), pak stroj M skončí v koncovém stavu. Říkáme také, že vstupní slovo je přijímáno strojem M .
2. Je-li funkční hodnota $f(w_1, w_2, \dots, w_n) = \text{false}$ (nepravda), pak stroj M skončí v nekoncovém stavu. Vstupní slovo není přijímáno.
3. Není-li funkční hodnota $f(w_1, w_2, \dots, w_n)$ definována, pak výpočet stroje M neskončí.

Turingovy stroje můžeme používat i k práci s přirozenými

číslly. Čísla reprezentujeme např. v unární soustavě v abecedě $\Sigma = \{1\}$ takto:

Číslo n reprezentujeme slovem $\bar{n}$, které je definováno takto:

$$\bar{0} = 1, \quad \overline{n+1} = \bar{n}1.$$

P – II – 1

Je dáno pole $A[1..N]$ celých kladných čísel. Je-li hodnota $j = A[i] \leq N$, $1 \leq i \leq N$, znamená odkaz (nepřímou adresu) na prvek $A[j]$ (pro který může platit opět tato podmínka), v opačném případě jde o již uloženou hodnotu. Dále je dáno pole $ZAC[1..M]$ obsahující hodnoty z $1, \dots, N$, kde M je mnohem menší než N .

Řekneme, že i -tý prvek pole A je dosažitelný, jestliže se v poli ZAC buď vyskytuje číslo i , anebo j -tý prvek pole A je dosažitelný a $A[j] = i$.

Navrhněte co nejlepší algoritmus, který vypíše indexy všech prvků pole A , které nejsou ze ZAC dosažitelné. Všechny dosažitelné prvky pole A musí zůstat po skončení výpočtu beze změny.

P – II – 2

V rovině je dáno N bodů očíslovaných od 1 do N . Dvojice čísel $(X[i], Y[i])$, $1 \leq i \leq N$, reprezentuje kartézské souřadnice bodu i . Žádné tři body neleží v jedné přímce. Napište co nejlepší program, který určí nějakou permutaci $(k_1, k_2, \dots, k_N)$ čísel $1, 2, \dots, N$ takovou, že N úseček

s krajními body

$$(X[k_i], Y[k_i]), (X[k_{i+1}], Y[k_{i+1}])$$

pro $1 \leq i \leq N - 1$ a

$$(X[k_N], Y[k_N]), (X[k_1], Y[k_1])$$

se navzájem neprotíná.

P – II – 3

Počet všech možností, jak rozdělit N navzájem různých prvků do právě M neprázdných skupin pro $N \geq M$, je dán hodnotami Stirlingových čísel $\left\{ \begin{smallmatrix} N \\ M \end{smallmatrix} \right\}$, pro která platí

$$\left\{ \begin{smallmatrix} N \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 0 \quad \text{pro } N \geq 0, \quad \left\{ \begin{smallmatrix} N \\ N \end{smallmatrix} \right\} = 1 \quad \text{pro } N > 0,$$

$$\left\{ \begin{smallmatrix} N \\ M \end{smallmatrix} \right\} = M \cdot \left\{ \begin{smallmatrix} N-1 \\ M \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} N-1 \\ M-1 \end{smallmatrix} \right\} \quad \text{pro } N > M > 0.$$

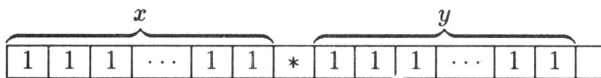
- Navrhňte co nejlepší algoritmus, který pro zadané hodnoty celých čísel N, M , kde $N \geq M \geq 0$, vypočte hodnotu Stirlingova čísla $\left\{ \begin{smallmatrix} N \\ M \end{smallmatrix} \right\}$.
- Určete minimální počet operací sčítání a násobení mezivýsledků nezbytných pro výpočet čísla $\left\{ \begin{smallmatrix} N \\ M \end{smallmatrix} \right\}$ pro dané hodnoty N, M (pro $N \geq M \geq 0$).

P – II – 4

- Navrhňte Turingův stroj nad abecedou $\{1, *\}$, který počítá následující funkci dvou přirozených čísel:

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & \text{je-li } x > y, \\ 0, & \text{je-li } x \leq y. \end{cases}$$

Čísla x, y jsou zapsána na pásce v unární soustavě a oddělena hvězdičkou, tj.



- b) Navrhněte Turingův stroj nad abecedou $\{a, b\}$, který zjistí, zda vstupní slovo na pásce je palindrom.

Poznámka: Palindrom je slovo, které se čte stejně zleva doprava i zprava doleva. Např. řetězce

KOBYLAMAMALYBOK,
NÁNABALILABANÁN

jsou palindromy.

P – III – 1

Je dáno pole $A[1 \dots N]$ celých kladných čísel. Je-li $j = A[i] \leq N$, $1 \leq i \leq N$, znamená tato hodnota odkaz (nepřímou adresu) na prvek $A[j]$ (pro ten může platit stejná podmínka), v opačném případě jde o již uloženou hodnotu. Dále je dáno pole $ZAC[1 \dots M]$ obsahující hodnoty z $\{1, \dots, N\}$, kde M je mnohem menší než N .

Navrhněte co nejlepší algoritmus, který každý prvek pole ZAC nahradí již přímo indexem prvku pole A s původně referencovanou hodnotou, pokud je možné takovou hodnotu najít. V opačném případě bude prvek pole ZAC obsahovat nulu.

P – III – 2

Legendreův polynom N -tého stupně P je definován vztahy

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \\ P_{N+1}(x) = \frac{2N+1}{N+1}P_N(x) - \frac{N}{N+1}P_{N-1}(x)$$

pro všechna reálná x a celá kladná čísla N .

- S použitím pouze celočíselných proměnných navrhnete co nejlepší algoritmus, který pro zadanou hodnotu N vypočte koeficienty Legendreova polynomu N -tého stupně. Koeficienty musí být vypočteny přesně.
- Jaký je minimální počet koeficientů polynomů (do stupně N) nezbytných pro výpočet koeficientů polynomu P ?

P – III – 3

Je dáno N letišť očíslovaných 1 až N a jejich vzdálenosti v matici $V[1..N, 1..N]$ (prvek $V[i, j]$ udává přímou vzdálenost mezi letišti i a j). Matice V je symetrická. Dále je dána hodnota D určující dolet letadla a přirozené číslo L , $1 \leq L \leq N$, označující vybrané letiště.

Navrhnete co nejlepší algoritmus, který sestaví letové trasy z letiště L do všech ostatních, pokud existují. Ze všech možných tras nás však zajímají pouze ty nejkratší, a pokud existuje více tras minimální délky, zajímají nás z nich jen trasy s nejmenším počtem mezipřistání.

P – III – 4

- Navrhnete Turingův stroj nad abecedou $\{a, b, c\}$, který rozpoznává množinu všech slov $M = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$.

- b) Navrhněte Turingův stroj, který dané slovo nad abecedou $\{a, b\}$ doplní zprava nejkratším způsobem na palindrom.

Příklad:

aba	→	aba
abaa	→	abaaba
aab	→	aabaa

Poznámka. Palindrom je slovo, které se čte stejně zleva doprava i zprava doleva. Např. řetězce NÁNABALILABANÁN, JELENOVIPIVONELEJ jsou palindromy.

Řešení úloh

P – I – 1

Aby mělo zadání úlohy smysl, učiníme dvě dodatečná omezení a jednu změnu:

- $N \geq 2$
- pro $1 \leq i \leq N$ platí
 $(X[i], Y[i]) = (X[i \bmod N + 1], Y[i \bmod N + 1])$
- z bodu i se bude robot dívat do bodu $i \bmod N + 1$

Při určování, kolikrát se robot otočí kolem své osy, není nutné počítat jeho úhel natočení, stačí počítat, kolikrát tento úhel překročí kladný směr (nebo dojde do kladného směru) osy x . Tento počet se zřejmě nezmění, začíná-li robotem v bodě 1 obrácený do kladného směru osy x , neboť při otáčení z tohoto směru do směru k bodu 2 nedojde k překročení kladné osy x .

Směr, ve kterém přišel robot do bodu, v němž se zrovna nachází, reprezentujeme jako vektor, tj. dvojicí celočíselných proměnných (s, t) , (pro bod 1 bude na začátku $(s, t) = (1, 0)$). Směr, do kterého se v tomto bodě má natočit, reprezentujeme podobně dvojicí (u, v) .

Podmínku vyjadřující, zda při otáčení ze směru (s, t) do směru (u, v) mine pohled robota kladný směr osy x , označíme $passx(s, t, u, v)$. Pokud (s, t) a (u, v) směřují do stejného kvadrantu, je $passx(s, t, u, v) \equiv uv < sv$. Pokud směřují do různých kvadrantů, závisí podmínka $passx$ na tom, o kterou kombinaci kvadrantů jde. Rozepsáním všech možností lze ověřit, že $passx$ lze obecně vyjádřit takto (za předpokladu $(s, t) \neq (0, 0) \neq (u, v)$):

$$\begin{aligned} passx(s, t, u, v) \equiv & t > 0 \wedge (v \leq 0 \vee ut < sv) \\ & \vee t \leq 0 \wedge v \leq 0 \wedge ut < sv \\ & \vee s < 0 \wedge u > 0 \wedge v = 0 \end{aligned}$$

Vlastní algoritmus je jednoduchý:

- Začínáme v bodě 1 s robotem natočeným v kladném směru osy x a vynulujeme si počítadlo d .
- Pro $1 \leq i \leq N + 1$ provádíme krok: otočíme robota stojícího v bodě $(i - 1) \bmod N + 1$ tak, aby se díval do bodu $i \bmod N + 1$, a pokud přitom došlo k přechodu přes směr (nebo natočení do směru) $(1, 0)$, připočteme tento přechod k počítadlu d . Tím považujeme robota za došlého do bodu $i \bmod N + 1$.
- Hodnotou proměnné d je hledaný počet úplných otočení robota okolo jeho osy.

Uvedený algoritmus je lineární vzhledem k N .

```

{Algoritmus v pascalu – předpokládáme, že jsou dány
  konstanty  $N, X, Y$ }
var  $s, t, u, v, d, i, j$ : integer;

function passx ( $s, t, u, v$ : integer): boolean;
{passx ( $s, t, u, v$ )  $\iff$  směr ( $s, t$ ) je různý od směru ( $1, 0$ )
  a při otáčení ze směru ( $s, t$ ) do směru ( $u, v$ ) v záporném
  smyslu přejdeme směr ( $1, 0$ ); předpoklad: ( $s, t$ )  $\neq$  ( $1, 0$ )  $\neq$ 
   $\neq$  ( $u, v$ )}
begin
  passx := ( $t > 0$ ) and (( $v \leq 0$ ) or ( $u * t < s * v$ ))
           or ( $t \leq 0$ ) and ( $v \leq 0$ ) and ( $u * t < s * v$ )
           or ( $s < 0$ ) and ( $u > 0$ ) and ( $v = 0$ )
end;

begin
   $s := 1; t := 0;$            {směr, kam hledí robot před túrou}
   $d := 0;$                    {nastavení počítadla}
   $i := 1; j := 2;$           {počáteční body}
  repeat
     $u := X[j] - X[i]; v := Y[j] - Y[i];$ 
                                     {( $u, v$ ) je směr k bodu  $j$ }
    if passx ( $s, t, u, v$ ) then  $d := d + 1;$ 
                                     {dokončená otočka  $\Rightarrow$  zvýšíme  $d$ }
    {invariant:  $d$  je počet úplných otoček robota kolem
      své osy od začátku po doražení do bodu  $i$ 
      a obrácení se k bodu  $j$ }
     $s := u; t := v;$            {nový směr se stane starým}
     $i := j; j := j \bmod N + 1$    {neboť robot popoleze}
  until  $j = 2;$    {až už se zas dívá do bodu 2, tak skončil}
  { $d$  je počet úplných otoček robota kolem své osy od
  začátku po návratu do bodu 1 a obrácení se k bodu 2}

```

writeln ('počet obrátek =', d)

end.

P - 1 - 2

Zavedeme pomocné pole $S[0, M]$ a definujeme podmínku $C(j)$: $C(j) \equiv \forall i, 1 \leq i \leq M: S[i]$ je počet výskytů i -tice $(P[1], \dots, P[i])$ v úseku $X[1], \dots, X[j-1]$. Jestliže je $S[1] = S[2] = \dots = S[M] = 0$, pak triviálně platí $C(1)$. Mějme $j, 1 \leq j < N$, a předpokládejme, že $S[0] = 1$ a ostatní prvky pole S mají takové hodnoty, že je splněna podmínka $C(j)$.

Potom, pokud $X[j] \notin \{1, \dots, M\}$, je splněno také $C(j)$, neboť v úseku $X[1], \dots, X[j]$ se vyskytuje právě tolik různých částí permutace P jako v úseku $X[1], \dots, X[j-1]$.

Nechť $X[j] \in \{1, \dots, M\}$. Tedy $X[j]$ se vyskytuje v permutaci P , řekněme na k -tém místě, tj. $X[j] = P[k]$. Nyní když $l \neq k$, pak počet výskytů l -tic $(P[1], \dots, P[l])$ v úseku $X[1], \dots, X[j]$ je tentýž jako v úseku $X[1], \dots, X[j-1]$, tj. je roven $S[l]$. Všechny výskyty k -tice $(P[1], \dots, P[k])$ v úseku $X[1], \dots, X[j]$ se skládají jednak z k -tic, které se celé vyskytují v kratším úseku $X[1], \dots, X[j-1]$ (těch je $S[k]$), jednak z k -tic $(P[1], \dots, P[k])$, které vzniknou připojením prvku $X[j]$ ke $(k-1)$ -ticím z úseku $X[1], \dots, X[j-1]$, a těch je $S[k-1]$. (To platí i pro $k=1$ díky tomu, že jsme položili $S[0]=1$.) Odtud dostáváme, že když v poli S nahradíme prvek $S[k]$ hodnotou $S[k] + S[k-1]$, pak bude splněna podmínka $C(j+1)$.

Odtud již dostáváme algoritmus. Používá dvě pomocná pole délky M a jeho časová složitost je lineární vzhledem k N .

```
{Algoritmus v pascalu – předpokládáme, že jsou dány
konstanty  $M, N, P, X$ }
var  $IP$ : array [ $1..M$ ] of  $1..M$ ;
    {pole pro inverzní permutaci}
 $S$ : array [ $0..M$ ] of integer;
    {pole pro počítání výskytů prefixů permutace  $P$ }
 $i, k$ :  $1..M$ ;
 $j$ :  $1..N$ ;

begin
    if  $N < M$  then writeln ('počet výskytů: 0')
    else begin
        for  $i := 1$  to  $M$  do  $IP[P[i]] := i$ ; { $IP$  je inverzní k  $P$ }
         $S[0] := 1$ ;
        for  $i := 1$  to  $M$  do  $S[i] := 0$ ;                {inicializace}
        for  $j := 1$  to  $N$  do
            {invariant: pro  $1 \leq i \leq M$ :  $S[i]$  je počet
            výskytů  $i$ -tice  $(P[1], \dots, P[i])$  v posloup-
            nosti  $X[1], \dots, X[j-1]$ }
            if  $(X[j] >= 1)$  and  $(X[j] <= M)$  then begin
                 $k := IP[X[j]]$ ;  $S[k] := S[k] + S[k-1]$ 
            end;
            {pro  $1 \leq i \leq M$ :  $S[i]$  je počet výskytů
             $i$ -tice  $(P[1], \dots, P[i])$  v poli  $X$ , tj. zejména  $S[M]$ 
            je rovno počtu výskytů  $P$  v  $X$ }
            writeln ('počet výskytů: ',  $S[M]$ )
        end
    end.
```

Nechť $G = (V, E)$ je orientovaný graf, $V' \subseteq V$, $SG(V')$ značí podgraf grafu G , který je indukovaný V , tj. graf, který má V' jako množinu uzlů, a hrana mezi dvěma uzly je, právě když je tato hrana v G . Uvažujme následující podmínku.

$$(SG(U) \text{ je acyklický}) \equiv (G \text{ je acyklický})$$

Tato podmínka platí pro $U = V$. Následující postup tedy inicializujeme pro $U = V$.

Chceme vypouštět uzly z U , aby zůstala zachována platnost podmínky. Jestliže $j \in U$ nemá předchůdce v $SG(U)$, pak nemůže patřit do cyklu v $SG(U)$, a tedy

$$(SG(U \setminus \{j\}) \text{ je acyklický}) \equiv (SG(U) \text{ je acyklický}).$$

Totéž platí samozřejmě i o uzlech bez následníků. K odstranění těchto uzlů potřebujeme program pro zjištění předchůdců každého uzlu.

Pro množinu uzlů W a uzel $j \in W$ označíme $P(j, W)$ množinu předchůdců j v $SG(W)$ a $S(j, W)$ množinu následníků j v $SG(W)$. Je-li v P nebo S vynechán argument W , je míněna celá množina V , tj. množina uzlů G . Podmnožina U , která sestává z uzlů j : $P(j, U) = \emptyset$, je množina kandidátů pro vypuštění z U . Označme tuto množinu U_1 a $U_0 = U \setminus U_1$. Pak lze naše podmínky přepsat na $P_0 \wedge P_1$, kde

$$P_0: (SG(U_0 \cup U_1) \text{ je acyklický}) \equiv (G \text{ je acyklický})$$

$$P_1: (\forall j: j \in U_0: P(j, U_0 \cup U_1) = \emptyset) \wedge (\forall j: j \in U_1: P(j, U_0 \cup U_1) = \emptyset).$$

Protože postup inicializujeme pro V a jediné uzly, které vypouštíme z $U_0 \cup U_1$, jsou ty bez předchůdců v $U_0 \cup U_1$, platí též P_2 :

$$P_2: (\forall j: j \in U_0 \cup U_1: S(j) \subseteq U_0).$$

Po vypuštění uzlu j z U_1 dostáváme $\forall k \in S(j, U_0 \cup U_1)$, že je také $j \in P(k, U_0 \cup U_1)$, a tedy $P(k, U_0 \cup U_1)$ se zmenší o jeden prvek. Každý prvek k , pro který se $P(k, U_0 \cup U_1)$ stane $\emptyset$, je přesunut z U_0 do U_1 (podle P_2 je $k \in U_0$). Dále z P_2 plyne, že pro $j \in U_1$ je $S(j, U_0 \cup U_1) = S(j)$. Opakování ukončíme pro $U_1 = \emptyset$. Z toho dostáváme

$$(SG(U_0) \text{ je acyklický}) \equiv (G \text{ je acyklický}).$$

Z $U_1 = \emptyset$ a P_1 dostáváme

$$(\forall j: j \in U_0: P(j, U_0) \neq \emptyset),$$

tj. každý uzel v $SG(U_0)$ má předchůdce. A tedy $SG(U_0)$ je acyklický, pouze je-li $U_0 = \emptyset$.

Tato diskuse nás vede k následující struktuře programu:

$$U_0 := \{j \mid P(j) \neq \emptyset\}; U_1 := \{j \mid P(j) = \emptyset\};$$

while $U_1 \neq \emptyset$ **do begin**

$$\text{„nechť } j \in U_1\text{“}; U_1 := U_1 \setminus \{j\}; \text{„}\forall k \in S(j)\text{“};$$

if $P(k, U_0 \cup U_1) = \emptyset$ **then begin**

$$U_0 := U_0 \setminus \{k\}; U_1 := U_1 \cup \{k\};$$

end

end

$$acykl := (U_0 = \emptyset);$$

Zavedeme celočíselné pole $t(j: 1 \leq j \leq N)$, aby platilo:

$$(\forall k: k \in U_0 \cup U_1: t(k) = |\{j \in U_0 \cup U_1: j \in P(k)\}|)$$

Pak platnost $P(k, U_0 \cup U_1) = \emptyset$ lze ověřit jako $t(k) = 0$. Množinu U_1 budeme reprezentovat pomocí dvou proměnných v_1 a nv_1 , kde v_1 ($j: 0 \leq j < nv_1$) je celočíselné pole a nv_1 je celočíselná; kde nv_1 je počet uzlů U_1 a uzly U_1 jsou v poli v_1 ($0 \leq j < nv_1$). Pro množinu U_0 je důležitý pouze počet jejích prvků. Budeme ji reprezentovat pomocí proměnné nv_0 .

Inicializaci t , v_1 , nv_1 , nv_0 lze zapsat takto:

```

procedure INIT;
var  $i, j$ : integer;
begin
  for  $j := 1$  to  $N$  do  $t[j] := 0$ ;
  for  $i := 1$  to  $M$  do  $t[e[i]] := t[e[i]] + 1$ ;
   $nv_0 := 0$ ;
   $nv_1 := 0$ ;
  for  $j := 1$  to  $N$  do
    if  $t[j] = 0$  then begin
       $v_1[nv_1] := j$ ;  $nv_1 := nv_1 + 1$ 
    end
    else  $nv_0 := nv_0 + 1$ 
  end;

```

Celá procedura pak vypadá takto:

```

  ⋮
type UZLY := array [ $1 \dots N + 1$ ] of integer;
      NASL := array [ $1 \dots N$ ] of integer;
  ⋮
function ACYKL( $b$ : UZLY;  $e$ : NASL):boolean;
var  $nv_0, nv_1, i, j, k$ : integer;

```

```

     $v_1$  : array[0 ..  $N - 1$ ] of integer;
     $t$ : array [1 ..  $N$ ] of integer;
begin
    INIT;
    while  $nv_1 <> 0$  do begin
         $j := v_1[nv_1 - 1]$ ;  $nv_1 := nv_1 - 1$ ;
        for  $i := b[j] + 1$  to  $b[j + 1]$  do begin
             $k := e[i]$ ;  $t[k] := t[k] - 1$ ;
            if  $t[k] = 0$  then begin
                 $v_1[nv_1] := k$ ;  $nv_0 := nv_0 - 1$ ;  $nv_1 := nv_1 + 1$ 
            end;
        end
    end;
    end;
     $ACYKL := (nv_0 = 0)$ 
end;
```

Správnost algoritmu plyne z postupu na začátku popisu.

Složitost algoritmu. Pokud byl uzel j z U_1 vypuštěn, tak již do U_1 znovu nebude přidán (do U_1 jsou přidávány následníci uzlů a j nemá předchůdce). Tedy každý uzel se testuje maximálně jednou. Celkový počet následníků všech uzlů je celkem M . Vnořené cykly se tedy provedou maximálně M -krát. Celková složitost je $O(M)$.

P – I – 4

- a) Čísla x, y budeme reprezentovat v unární soustavě oddělená $*$. Pak se řešení ztotožní s výpočtem zřetězení dvou slov nad abecedou $\{1\}$ a s ubráním jednoho symbolu z výsledného slova. Popis Turingova stroje je tedy ana-

logický jako ve vzorovém příkladu v zadání. Uvedeme proto pouze tabulku:

T	1	*	Δ
START 1	$(1, 1, P)$	$(1, *, P)$	$(2, \Delta, L)$
2	$(3, \Delta, L)$	$(5, \Delta, L)$	
3	$(4, \Delta, L)$	$(5, \Delta, L)$	
4	$(4, 1, L)$	$(5, 1, L)$	
STOP 5			

- b) Užijeme pomocnou abecedu $V = \{A, B, \alpha, \beta\}$. Pokud je vstupní slovo prázdné, stroj se zastaví. Jinak si zapamatuje první symbol a přepsáním na velké písmeno označí již zkopírovanou část. Dále stroj projde zbytek slova a na jeho konec přepíše zapamatovaný symbol, ale v řecké abecedě $\{\alpha, \beta\}$. Dále se stroj vrací vlevo, dokud nenarazí na velké písmeno, to přepíše na malé a pravého souseda si opět zapamatuje, přepíše na velké písmeno a pokračuje předchozím způsobem. Tímto postupem stroj pokračuje do té doby, než při návratu vlevo narazí na sousedící velké a řecké písmeno. V tom okamžiku bylo již zkopírováno celé vstupní slovo a stroj již pouze přepíše toto velké písmeno a všechna řecká písmena na malá latinská. Dále uveďme tabulku pro stroj T .

Správnost činnosti stroje plyne z postupu před tabulkou.

T	a	b	Δ	A	B	α	β
START 1	(2, A, P)	(3, B, P)					
2	(2, a, P)	(2, b, P)	(4, α , L)			(2, α , P)	(2, β , P)
3	(3, a, P)	(3, b, P)	(4, β , L)			(3, α , P)	(3, β , P)
4	(5, a, L)	(5, b, L)		(6, a, P)	(6, b, P)	(4, α , L)	(4, β , L)
5	(5, a, L)	(5, b, L)		(1, a, P)	(1, b, P)		
6			(7, Δ , P)			(6, a, P)	(6, b, P)
STOP 7							

P – II – 1

Algoritmus je jednoduchý. Nejdříve si označíme všechny dosažitelné prvky pole A . Potom projdeme polem A a vypíšeme indexy všech neoznačených, tj. nedosažitelných prvků.

Postup označování dosažitelných prvků je následující: Procházíme pole ZAC a pro každý jeho prvek $ZAC[i]$ označujeme všechny prvky pole A dosažitelné ze $ZAC[i]$. Když při tom narazíme na už označený prvek $A[j]$, (tj. už dříve jsme poznali, že $A[j]$ je dosažitelný), přestaneme další prvky, na něž $A[j]$ případně odkazuje (tj. $A[A[j]]$ atd.), označovat — ty už označené zaručeně jsou — a přejdeme k dalšímu začátku $ZAC[i + 1]$.

Dosažitelných prvků je nejvýše N , u nejvýše M z nich testujeme označení dvakrát, u ostatních jen jednou. Algoritmus je tedy lineární vzhledem k N .

Při programové realizaci označování prvků pole A nemusíme zavádět další pole, ale můžeme využít jednak toho, že A je programová proměnná, do níž lze zapisovat, jednak toho, že prvky A jsou celá kladná čísla. Označení prvku $A[j]$ pak realizujeme jeho nahrazením číslem $-|A[j]|$. (Aby byla dodržena poslední podmínka v zadání úlohy, je nutno na konci všechna označení zrušit, tj. nahradit dosažitelné prvky jejich absolutní hodnotou.)

```

{Algoritmus v pascalu}
{předpokládáme, že jsou dány konstanty  $M, N$  a naplněna
pole  $ZAC, A$ }
var  $ZAC$ : array[1.. $M$ ] of 1.. $N$ ;
     $A$ : array[1.. $N$ ] of integer;
     $i, j, K$ : integer;

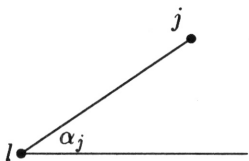
begin
  for  $i$  := 1 to  $M$  do
    {invariant: jsou označeny (tj. záporné) všechny prvky
     pole  $A$  dosažitelné ze  $ZAC[1], \dots, ZAC[i-1]$ }
    begin
       $K$  :=  $ZAC[i]$ ;
      while ( $1 \leq A[K]$ ) and ( $A[K] \leq N$ ) do begin
         $A[K]$  :=  $-A[K]$ ;    {označení dosažitelného prvku}
         $K$  :=  $-A[K]$       {posunutí na další}
      end;
      if  $A[K] \geq 0$  then  $A[K]$  :=  $-A[K]$ 
      {označení dosažitelného prvku, který už není
       ukazatelem}
    end;
  for  $j$  := 1 to  $N$  do
    if  $A[j] \geq 0$  then writeln( $j$ )
                                {výpis nedosažitelných prvků}
    else  $A[j]$  :=  $-A[j]$       {restaurace dosažitelných}
end.

```

P – II – 2

Při řešení úlohy použijeme následující úvahu. Nechť bod $(X[l], Y[l])$ je takový, že $X[l] = \min\{X[i], i =$

$= 1, \dots, n\}$, a označíme α_j ($j \neq l$) úhel určený body $(X[l], Y[l])$, $(X[l] + 1, Y[l])$, $(X[j], Y[j])$ (obr. 25). (Pokud $Y[j] < Y[l]$, pak úhel má znaménko $-$.)



Obr. 25

Nyní setřídíme úhly podle velikosti takto: $\alpha_{j_1} < \dots < \alpha_{j_n}$. Ostrou nerovnost můžeme předpokládat, protože žádné tři body neleží v jedné přímce. Hledaná permutace bodů je potom takováto:

$$\{l, j_1, \dots, j_n\}$$

Ukážeme, že pro tuto posloupnost se určené úsečky neprotínají. Nechť se protínají úsečky určené body $j_i, j_{i+1}, j_k, j_{k+1}$, pak např. $\alpha_{j_i} < \alpha_{j_{i+1}} < \alpha_{j_k} < \alpha_{j_{k+1}}$. Označme s průsečík těchto úseček. Protože žádné tři zadané body neleží na jedné přímce, je bod s vnitřní bod obou úseček. Označíme-li α_s úhel určený analogicky jako úhly α_j , pak platí:

$$\alpha_{j_i} < \alpha_s < \alpha_{j_{i+1}}$$

$$\alpha_{j_k} < \alpha_s < \alpha_{j_{k+1}}$$

To je ale spor. Tedy úsečky se neprotínají.

V programu použijeme následující vlastnost. Abychom nemuseli přímo počítat velikost úhlu, stačí počítat pouze podíl $(Y[l] - Y[i]) / (X[l] - X[i])$. Je zde však problém, že jeden bod může mít stejnou x -ovou souřadnici jako $X[l]$. To odstraníme tak, že bod $X[l]$ „zanedbatelně posuneme“ doleva (např. 0.0001 pro zadání s přesností 0.1).

Algoritmus má následující postup:

1. Načtení zadání.
2. Zjištění $X[l] = \min\{X[i], i = 1, \dots, n\}$.
3. Výpočet $(Y[i] - Y[l]) / (X[i] - X[l] + 0.0001)$.
4. Setřídění uzlů $i = 1, \dots, n; i \neq l$.

Pro paměťové zvýhodnění je hodnota vypočtená v bodě 3 ukládána znovu do pole X . Pro třídění je použito pomocné pole Z . Třídění je vykonáno metodou *Quicksort*. (Viz např. ročenka 36. ročníku MO na středních školách, příklad P-I-2.)

Složitost algoritmu

Body 1, 2, 3 mají složitost $O(n)$, bod 4 $O(n \log n)$. Celková složitost je tedy $O(n \log n)$ za použití jednoho pomocného pole velikosti n .

Zápis algoritmu (v jazyce Pascal)

```

program mnoh;
const u = -1000;
var X, Y: array[1..10] of real;
    Z: array[1..10] of integer;
    i, j, k, l, n: 0..11;
    m: real;
procedure SORT(l, r: integer);

```

```

var  $i, j, k, w$  : integer;
begin
   $i := l; j := r; k := (l + r) \text{ div } 2;$ 
  repeat
    while  $x[z[i]] < x[z[k]]$  do  $i := i + 1;$ 
    while  $x[z[k]] < x[z[j]]$  do  $j := j - 1;$ 
    if  $i \leq j$  then begin
       $w := z[i]; z[i] := z[j]; z[j] := w; i := i + 1; j := j - 1$ 
    end
  until  $i > j;$ 
  if  $l < j$  then  $SORT(l, j);$ 
  if  $i < r$  then  $SORT(i, r)$ 
end;

begin
   $writeln('Zadej počet bodů 1-10');$   $readln(n);$  {načtení}
   $writeln('Zadej body pomocí souřadnic');$ 
  for  $i := 1$  to  $n$  do  $readln(x[i], y[i]);$ 
   $m := x[1]; l := 1;$ 
  for  $i := 2$  to  $n$  do
    if  $x[i] < m$  then begin
       $m := x[i];$ 
      {nalezení bodu s nejmenší  $x$ -ovou souřadnicí.}
       $l := i$ 
    end;
  for  $i := 1$  to  $n$  do begin
     $x[i] := (y[i] - y[l]) / (x[i] - m + 0.0001);$ 
    {výpočet hodnot}
     $z[i] := i$ 
    {pro srovnání}
  end;
   $SORT(1, n);$ 
  {setřídění}

```

```

writeln ('Výsledná permutace je následující:');
write (l : 3);
for i := 1 to n do
    if z[i] <> l then write (z[i] : 3);
writeln
end.

```

P – II – 3

Nástin algoritmu: Jeden z možných postupů výpočtu $\{M^N\}$ je následující (předpokládáme $N \geq M > 0$, jinak je výpočet triviální).

Označíme $k = N - M$ a zavedeme pomocné pole $P[0 \dots k]$, do něhož na začátku uložíme hodnoty $\{1\}, \{2\}, \dots, \{k+1\}$, tj. samé jedničky.

V každém dalším (i -tém, pro $2 \leq i \leq M$) kroku změníme obsah pole P z hodnot $\{i-1\}, \{i\}, \dots, \{i+k-1\}$ na hodnoty $\{i\}, \{i+1\}, \dots, \{i+k\}$. Po M -tém kroku pak bude platit $P[k] = \{M\}$.

Provedení i -tého kroku: Na začátku i -tého kroku pole P obsahuje prvky

$$\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ i \end{smallmatrix} \right\}, \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ i-1 \end{smallmatrix} \right\}, \dots, \left\{ \begin{smallmatrix} i+k-1 \\ i-1 \end{smallmatrix} \right\},$$

neboť $P[0] = \{i-1\} = \{i\} = 1$. Proto přičtením součiny $i \cdot P[0]$ k prvku $P[1]$ dostaneme $P[1] = \{i+1\}$. Dalším přičtením $i \cdot P[1]$ k prvku $P[2]$ dostaneme $P[2] = \{i+2\}$, atd., až nakonec $P[k] = \{i+k\}$.

Algoritmus v pascalu:

```

{předpokládáme, že jsou dány konstanty  $N, M$ , a že  $N \geq M \geq 0$ }
{podmínka  $C(i, j)$  je definována níže a slouží jako invariant}
const  $k = N - M$ ;
var  $i, j$ : integer;
     $P$ : array[ $0 \dots k$ ] of integer;

```

```

begin
    if  $M = 0$  then writeln ('{',  $N$ , ' 0' = 0')
    else begin
        for  $j := 0$  to  $k$  do  $P[j] := 1$ ; {inicializace}
        for  $i := 2$  to  $M$  do { $C(i, 1)$ }
            for  $j := 1$  to  $k$  do  $P[j] := P[j] + i * P[j - 1]$ ; { $C(i, j)$ }
            { $C(M + 1, 1)$ }
            writeln ('{',  $N$ , ' ',  $M$ , '}' = ',  $P[k]$ )
        end
    end.

```

Důkaz: Pro $2 \leq i \leq M + 1$, $1 \leq j \leq k + 1$ definujeme podmínku

$$C(i, j) \equiv \forall r, \quad 0 \leq r < j: P[r] = \begin{Bmatrix} i + r \\ i \end{Bmatrix}$$

a současně

$$\forall s, \quad j \leq s \leq k: P[s] = \begin{Bmatrix} i + s - 1 \\ i - 1 \end{Bmatrix}.$$

Nyní lze snadno ověřit tato fakta:

- a) Po provedení prvního — inicializačního kroku (tj. na začátku druhého kroku) platí $C(2, 1)$.

- b) Platí-li $C(i, j)$ pro určité i, j , $2 \leq i \leq M$, $1 \leq j \leq k$, potom po provedení přiřazení $P[j] := P[j] + i * P[j - 1]$ bude platit $C(i, j + 1)$.
- c) Pro $2 \leq i \leq M$ je $C(i, k + 1) \equiv C(i + 1, 1)$.
- d) Užitím bodu (b) a indukce vzhledem k j máme, že platí-li $C(i, 1)$ na začátku i -tého kroku, $2 \leq i \leq M$, (před provedením vnitřního cyklu), pak po jeho skončení bude platit $C(i, k + 1)$, tedy, podle (c), bude platit $C(i + 1, 1)$.
- e) Užitím bodů (a), (d) a indukce vzhledem k i dostáváme, že na začátku každého i -tého kroku ($2 \leq i \leq M$) platí $C(i, 1)$ a na konci M -tého kroku platí $C(M + 1, 1)$.

Po provedení celého algoritmu tedy platí $C(M + 1, 1)$. Odtud podle definice podmínky C máme $P[k] = \left\{ \begin{smallmatrix} N \\ M \end{smallmatrix} \right\}$.

Počet aritmetických operací na mezivýsledcích: Jediné sčítání a jediné násobení mezivýsledků se provádí ve vnitřním cyklu algoritmu. Počet provedení vnitřního cyklu je k , počet provedení vnějšího cyklu je $M - 1$. Vidíme tedy, že celkový počet sčítání mezivýsledků je tentýž jako počet násobení a je roven $(M - 1) \cdot k = (M - 1) \cdot (N - M)$.

P - II - 4

- a) Čísla jsou reprezentována v unární soustavě, oddělená $*$. Nechť $|x|$, resp. $|y|$ značí počet jedniček v zápisu x , resp. y . Řešení plyne z následujících faktů. Nechť $|x| = k$, $|y| = l$, pak $|x \div y| = k - l + 1$, je-li $k \geq l$, resp. $|x \div y| = 1$, je-li $k < l$.

Postup řešení je následující. Nejprve se vstupní slovo na pásce přepíše tak, že bude začínat 0, která bude indikovat

pravý okraj pásky. Pak se postupně jedničky v prvním čísle nahradí *, dokud není

- a) * tolik, jako bylo cifer v 2. čísle, nebo
- b) se nenahradila 0.

Na závěr se přidá jedna 1 a * se smažou. Postup lze zapsat do této tabulky:

T	1	*	Δ	0
START 1	(2, 0, P)			
2	(2, 1, P)	(3, 1, P)		
3	(4, *, P)			
4	(4, 1, P)		(5, 1, P)	
5	(6, Δ , L)		(5, Δ , L)	
6	(6, 1, L)	(7, *, L)		
7	(8, *, P)	(7, *, L)		(10, 1, P)
8	(9, 1, P)	(8, *, P)	(11, Δ , L)	
9	(9, 1, P)		(5, Δ , L)	
10		(10, Δ , P)		
11	(11, 1, L)	(11, Δ , L)		(11, 1, P)

- b) Užijeme pomocnou abecedu $V = \{A, B\}$. Pokud je vstup prázdný, odpověď je ano. Jinak si stroj zapamatuje první písmeno vstupu, změni ho na velké z důvodu již ověřeného označení. Dále se přečte zbytek slova a porovná se zapamatované písmeno s posledním. Pokud nejsou stejná, slovo není palindrom a odpověď je ne. Jinak se poslední písmeno přepíše na velké a ověřuje se platnost palindromu pro zbytek slova. Tento postup lze napsat do následující tabulky:

T	a	b	Δ	A	B
START 1	(2, A, P)	(3, B, P)	(8, Δ , P)	(8, A, P)	(8, B, P)
2	(2, a, P)	(2, b, P)	(4, Δ , L)	(4, A, L)	(4, B, L)
3	(3, a, P)	(3, b, P)	(5, Δ , L)	(5, A, L)	(5, B, L)
4	(6, A, L)	(7, b, L)	(7, Δ , L)	(8, A, L)	(8, B, L)
5	(7, a, L)	(6, B, L)	(7, Δ , L)	(8, A, L)	(8, B, L)
6	(6, a, L)	(6, b, L)		(1, A, P)	(1, B, P)
7					
STOP 8					

P – III – 1

Zavedeme si následující pojem: Koncovým indexem prvku $A[j]$ (pro $1 \leq j \leq N$) nazveme číslo j , pokud $A[j] > N$; jestliže $1 \leq A[j] \leq N$ a prvek $A[A[j]]$ má koncový index, pak tento index bude také koncovým indexem prvku $A[j]$; v ostatních případech položíme koncový index prvku $A[j]$ roven nule.

Koncovým indexem prvku $ZAC[i]$ (pro $1 \leq i \leq M$, $1 \leq ZAC[i] \leq N$) rozumíme koncový index prvku $A[ZAC[i]]$.

Úkolem algoritmu tedy bude nahradit každý prvek pole ZAC jeho koncovým indexem. Snadno nahlédneme následující tvrzení: Jestliže v poli A libovolný prvek nahradíme jeho koncovým indexem, pak koncové indexy všech prvků polí ZAC a A zůstanou stejné jako před záměnou.

Hrubá idea algoritmu: Procházíme postupně prvky $ZAC[1], \dots, ZAC[M]$ a v každém kroku nahradíme ty prvky pole A , jež jsou dosažitelné ze $ZAC[i]$, jejich koncovým indexem. Ten je také koncovým indexem prvku $ZAC[i]$, takže ho zapíšeme i do $ZAC[i]$.

Při zjišťování koncových indexů postupujeme podobně jako v úloze P-II-1, případné zacyklení odkazů (tj. případ, kdy koncový index je nula) si hlídáme tak, že si průběžně

označujeme (obrácením znaménka) prvky pole A dosažitelné ze $ZAC[i]$.

{Algoritmus v pascalu}

{předpokládáme, že jsou dány konstanty M, N a naplněna pole ZAC, A }

var ZAC : **array**[1 .. M] **of** 0 .. N ;

A : **array**[1 .. N] **of** integer;

i, k, L, P : integer;

begin

for $i := 1$ **to** M **do**

{„inv“}

begin

$k := ZAC[i]$;

while $(1 \leq A[k])$ **and** $(A[k] \leq N)$ **do begin**

$A[k] := -A[k]$; {označení prvků pole A }

$k := -A[k]$ {dosažitelných ze $ZAC[i]$ }

end;

if $A[k] \leq 0$ **then** $P := 0$

else $P := k$; { P = koncový index prvku $ZAC[i]$ }

$k := ZAC[i]$; $ZAC[i] := P$;

{nahrazení $ZAC[i]$ koncovým indexem}

while $A[k] < 0$ **do** {nahrazení všech prvků}

begin

$L := k$; {pole A z původního $ZAC[i]$ }

$k := -A[k]$; {dosažitelných jejich}

$A[L] := P$ {koncovým indexem}

end

end

end.

V místě označeném „inv“ platí invariant:

- prvky $ZAC[1], \dots, ZAC[i - 1]$ jsou svými koncovými indexy,
- všechny prvky pole A , které byly dosažitelné z původních hodnot $ZAC[1], \dots, ZAC[i - 1]$, jsou svými koncovými indexy,
- ostatní prvky polí mají své původní hodnoty,
- koncové indexy všech prvků polí ZAC a A jsou stejné jako koncové prvky jejich původních hodnot,

V prvním vnitřním cyklu hledáme koncový index prvku $ZAC[i]$. Jsou-li odkazy v poli A cyklické, bude koncový index roven nule (příkaz **if** za cyklem). Koncový index se zapíše do $ZAC[i]$. Přiřazení tohoto indexu prvkům pole A (druhý vnitřní cyklus) není nutné z hlediska správnosti algoritmu, ale je důležité z hlediska jeho časové složitosti.

Je-li vyšetřován nějaký prvek $A[k]$, je počet jeho zpřístupnění roven řádově číslu M . V prvním vnitřním cyklu je opakovanému procházení prvku zabráněno tím, že si hlídáme cyklení odkazů, v druhém vnitřním cyklu se prvek $A[k]$ nahradí svým koncovým indexem a díky tomu na něm každé další provedení prvního **while**-cyklu ihned skončí. Odtud vyplývá časová složitost algoritmu $O(M + N)$, což (vzhledem k podmínce $M < N$) je rovno $O(N)$. Algoritmus je tedy lineární vzhledem k N .

P – III – 2

Koeficienty Legendreových polynomů jsou racionální čísla, která v paměti můžeme reprezentovat dvojicemi celých čísel (čitatel, jmenovatel). Pro účely generování koeficientů je

vhodné čitatele uchovávat v jednorozměrném poli $A[0 \dots N]$, v prvku $A[j]$ je čítec koeficientu u j -té mocniny.

Polynom P je pro sudé, resp. liché i sudou, resp. lichou funkcí, tj. jeho liché, resp. sudé koeficienty jsou nulové. Proto lze v poli A uchovávat naráz čitatele koeficientů polynomů P_i, P_{i-1} . Pro každý polynom je uchován společný jmenovatel jeho koeficientů tak, aby aspoň 1 koeficient tohoto polynomu byl v základním tvaru.

Algoritmus může tedy pracovat takto:

- Do pole A umístíme čitatele koeficientů polynomů P_0, P_1 a do proměnných ds, dl umístíme hodnoty jmenovatelů.
- Pro $i = 2, \dots, N$ opakujeme:
 - vypočteme koeficienty polynomu P_i a přepíšeme jimi koeficienty polynomu P_{i-2} ;
 - provedeme možné krácení hodnot vypočtených koeficientů polynomu P_i .
- Vypíšeme koeficienty polynomu P_N , tj. sudé nebo liché prvky pole A , a hodnotu ds nebo dl podle toho, zda N je sudé, nebo liché.

Pro zjednodušení algoritmu je pole A indexováno od -1 , přičemž $A[-1]$ je vždy nulové.

{Algoritmus v pascalu – předpokládáme, že je dána konstanta N }

```
var A: array[-1 .. N] of integer;  
    {čitatele koeficientů polynomu}  
    ds, dl: integer; {jmenovatele koeficientů polynomu}  
    i, j, NN1, N1, M, NSD: integer;
```

begin

```
    A[-1] := 0; A[0] := 1; A[1] := 1;
```

```

for  $j := 2$  to  $N$  do  $A[j] := 0$ ;  $ds := 1$ ;  $dl := 1$ ;  $NN_1 := 1$ ;
for  $i := 2$  to  $N$  do
    {výpočet čitateľů koeficientů polynomu stupně  $i$ }
begin
     $NN_1 := NN_1 + 2$ ;  $N_1 := i - 1$ ;  $j := i$ ;
    repeat
        if  $ds = dl$  then  $A[j] := NN_1 * A[j - 1] - N_1 * A[j]$ 
        else  $A[j] := NN_1 * A[j - 1] - N_1 * N_1 * A[j]$ ;
         $j := j - 2$ ;
    until  $j < 0$ ;
    if  $i \bmod 2 = 0$  then begin
         $ds := dl * i$ ;  $NSD := ds$ 
    end
    else
        begin
             $dl := ds * i$ ;  $NSD := dl$ 
        end;
    {zjištění  $NSD$  vypočtených hodnot}
     $j := i$ ;
    repeat
         $M := abs(A[j])$ ;
        while  $M <> NSD$  do begin
            while  $NSD < M$  do  $M := M - NSD$ ;
            while  $NSD > M$  do  $NSD := NSD - M$ 
        end;
         $j := j - 2$ ;
    until ( $J < 0$ ) or ( $NSD = 1$ );
    {krácení koeficientů}
    if  $NSD <> 1$  then begin
         $J := 1$ ;

```

```

repeat
     $A[j] := A[j] \text{ div } NSD; j := j - 2;$ 
until  $j < 0;$ 
if  $i \bmod 2 = 0$  then  $ds := ds \text{ div } NSD$ 
else  $dl := dl \text{ div } NSD;$ 
end
end;
{ výpis koeficientů }
if  $N \bmod 2 = 0$  then writeln('jmenovatel:', ds)
else writeln('jmenovatel:', dl);
j := N;
repeat
    writeln('mocnina', j, ':koeficient :',  $A[j]$ );  $j := j - 2;$ 
until  $j < 0;$ 
end.

```

P – III – 3

Řešení úlohy převedeme jednoduchou úvahou na řešení klasického grafového problému hledání nejkratších cest z daného uzlu grafu do všech ostatních. Pro řešení tohoto problému pak použijeme klasický Dijkstrův algoritmus. Naši úlohu převedeme tak, že z matice V vypustíme hrany delší než dolet letadla. Nyní můžeme již použít Dijkstrův algoritmus pro určení $d[v]$, nejkratší vzdálenosti z u do v pro graf G :

Pomocné proměnné

- M , množina vrcholů, pro které ještě není vzdálenost $d[v]$ definitivně určena
- V , vektor, kde pro každý uzel v je uveden předposlední uzel nejkratší cesty z u do v a neprochází M

– L , matice přímé vzdálenosti

Algoritmus

1. Inicializace. $M = V(G) \setminus \{u\}$; $d[u] = 0$; $V[u] = u$;
pro $v \neq u$: $d[v] = L[u, v]$ a je-li $d[v] < \infty$, $V[v] = u$.
2. Test ukončení. Je-li M prázdná, výpočet končí.
3. Určení $d[v]$ pro další uzel. Z uzlů množiny M vybereme uzel v s minimální hodnotou $d[v]$. Je-li $d[v] = \infty$, pak výpočet končí, jinak vyjmeme v z M .
4. Aktualizace d a V . Je-li v uzel vybraný v bodě 3, pak pro každý uzel $w \in M$: pokud $d[v] + L[v, w] < d[w]$, provedeme $V[w] = v$, $d[w] = d[v] + L[v, w]$.
5. Skok do bodu 2.

Vlastní program v jazyce Pascal:

```
program LET;  
label 5,10;  
var  $M$  : set of 1..20;  
       $L$  : array[1..20, 1..20] of integer;  
       $i, j, k, n, u$  : 0..20;  
       $v, w$  : integer;  
begin  
   $w := 0$ ;  
5: writeln ('Zadej dolet letadla');  
  readln ( $v$ );  
  writeln ('Zadej počet letišť [1-20]');  
  readln ( $n$ );  
  writeln ('Zadej matici vzdálenosti ');  
  writeln ('[pokud není hrana -1]');  
  for  $i := 1$  to  $n$  do begin  
    for  $j := 1$  to  $n$  do begin
```

```

    read (L[i, j]);
    if L[i, j] > v then L[i, j] := -1;
                                {Odstranění hran přesahujících dolet}
end;
readln
end;
writeln('Zadej letiště, ze kterého se určují trasy:');
readln(u); M := [1 .. n];
for i := 1 to n do
    if L[u, i] ≥ 0 then L[i, u] := u;                                { * 1 *}
M := M - [u];
while M <> [] do begin
    w := n * v + 1; j := 0;
    for i := 1 to n do
        if i in M then
            if (L[u, i] >= 0) and (L[u, i] <= w) then begin
                w := L[u, i]; j := i                                { * 3 *}
            end;
        if j = 0 then goto 10;                                        { * 4 *}
        M := M - [j];
        for i := 1 to n do
            if i in M then
                if (L[j, i] >= 0) and
                    ((w + L[j, i] < L[u, i]) or (L[u, i] < 0)) then begin
                    L[i, u] := j; L[u, i] := w + L[j, i]          { * 5 *}
                end;
        end;
end;
10: L[u, u] := 0;
writeln(' ':27, 'Trasy z letiště', u:3); writeln;
write(' ':10, 'letiště', ' ':10, 'vzdálenost');

```

write (' ':10,'nejkratší trasa'); *writeln*;

for $i := 1$ **to** n **do begin**

$v := L[u, i]$;

if $v \geq 0$ **then begin**

$k := i$; $j := 1$;

while $k \leq u$ **do begin**

$L[j, i] := L[k, u]$; $k := L[k, u]$; {* 6 *}

$j := j + 1$

end;

write (' ':11, $i : 2$);

write (' ':14, $v : 3$, ' ':14);

for $k := j - 1$ **downto** 1 **do** *write*($L[k, i] : 2$, ',');

write ($i : 2$); *writeln*

end

else

begin

write (' ':11, $i : 2$);

write (' ':12, 'nekonečno');

write (' ':11, 'neexistuje');

writeln

end

end;

writeln ('Opakovat výpočet [0/1]'); *readln* (j);

if $j = 1$ **then goto** 5;

end.

*** K O M E N T Á Ř E ***

* 1 * : Odstranění hran přesahujících dolet

- * 2 * : Ztotožnění u -tého sloupce matice L s vektorem V a u -tého řádku a d
- * 3 * : Nalezení minima $d[v]$ pro $v \in M$
- * 4 * : Neexistuje zlepšení
- * 5 * : Provedení zlepšení
- * 6 * : Rekonstrukce letové trasy

Časová složitost: Algoritmus zpracuje vstup n letišť v čase $O(n)$.

Správnost algoritmu: Dokážeme pouze pro Dijkstrův algoritmus. Indukcí ukážeme, že pro v vybraný v bodě 3 algoritmu je $d[v] = d_{uv}$, tj. délka nejkratší cesty. Nechť předpoklad platí pro uzly z $V(G) \setminus M$. Nechť v je uzel vybraný v bodě 3 algoritmu a nechť existuje cesta P z u do v tak, že $d_P < d[v]$. Nechť x je první uzel z P , který leží v M a y jeho předchůdce v P . Pak $d[x] \leq d[y] + L[y, x] = d_{uy} + L[y, x] \leq d_P < d[v]$, což je spor s minimalitou $d[v]$.

P – III – 4

- a) Užijeme pomocnou abecedu $V = \{A, B, C\}$. Pokud je slovo prázdné, pak stroj odpoví *ano*. Jinak přečte první symbol slova. Pokud není tento symbol a , pak slovo není přijímáno. Pokud je symbol a , stroj ho přepíše na A a hledá k němu b . Pokud jej nalezne, přepíše ho na B a hledá c , které přepíše na C . Tento postup se opakuje, dokud stroj neskončí úspěšně, či neúspěšně.

T	a	b	c	Δ	A	B	C
START 1	(2, A, P)			(5, Δ , P)	(1, A, P)	(1, B, P)	(1, C, P)
2	(2, a, P)	(3, B, P)				(2, B, P)	
3		(3, b, P)	(4, C, L)				(3, C, P)
4	(4, a, L)	(4, b, L)	(4, c, L)		(1, A, P)	(4, B, L)	(4, C, L)
STOP 5							

b) Užijeme pomocnou abecedu $V = \{A, B, \alpha, \beta\}$. Pokud je vstup prázdný, je slovo palindrom. Jinak stroj postupně testuje postfixy vstupního slova, dokud nenarazí na palindrom. Pro testování se používá stroj z příkladu v krajském kole (stavy 2, 3, 4, 5, 6, 7). Pokud postfix není palindrom vloží se jeho první znak mezi vstupní slovo a již připsanou část vpravo a ta se posune o jeden znak (stavy 8, 12, 13, 14, 15, 16, 17). Začátek testovaného postfixu a začátek již doplněné části je označen řeckými písmeny. Vždy po ukončení testování palindromu se velká písmena přepíší na malá. Po zjištění, že postfix je palindrom, se přepíší všechna písmena na malá.

T	a	b	Δ	A	B	α	β
START 1	(3, Δ , P)	(4, Δ , P)	(9, Δ , P)				
2	(3, A, P)	(4, B, P)		(9, A, P)	(9, B, P)	(9, Δ , P)	(9, Δ , P)
3	(3, a, P)	(3, b, P)	(5, Δ , L)	(5, A, L)	(5, B, L)	(5, Δ , L)	(5, Δ , L)
4	(4, a, P)	(4, b, P)	(6, Δ , L)	(6, A, L)	(6, B, L)	(6, Δ , L)	(6, Δ , L)
5	(7, A, L)	(8, b, L)		(9, A, P)	(9, B, P)	(9, Δ , P)	(9, Δ , P)
6	(8, a, L)	(7, B, L)		(9, A, P)	(9, B, P)	(9, Δ , P)	(9, Δ , P)
7	(7, a, L)	(7, b, L)		(2, A, P)	(2, B, P)	(2, Δ , P)	(2, Δ , P)
8	(8, a, L)	(8, b, L)		(8, A, L)	(8, B, L)	(12, Δ , P)	(15, Δ , P)
9	(9, a, P)	(9, b, P)	(10, Δ , L)	(9, a, L)	(9, b, P)	(10, a, L)	(10, b, L)
10	(10, a, L)	(10, b, L)		(10, a, L)	(10, b, L)	(11, a, P)	(11, b, P)
STOP 11							
12	(12, a, P)	(12, b, P)	(16, Δ , P)	(12, a, P)	(12, b, P)	(13, Δ , P)	(14, Δ , P)
13	(13, a, P)	(14, a, P)	(16, a, L)				
14	(13, b, P)	(14, b, P)	(16, b, L)				
15	(15, a, P)	(15, b, P)	(16, Δ , P)	(15, a, P)	(15, b, P)	(13, Δ , P)	(14, Δ , P)
16	(16, a, L)	(16, b, L)	(16, Δ , L)			(17, Δ , L)	(17, Δ , L)
17	(17, a, L)	(17, b, L)		(17, a, L)	(17, b, L)	(1, a, P)	(1, b, P)

Korespondenční seminář je jednou z forem péče o talentované žáky. Vznikl ve 24. ročníku MO proto, aby bylo možno věnovat individuální péči i těm žákům, kteří neměli možnost navštěvovat speciální školy a pracovat v tamních seminářích. Nyní, kdy existují i krajské korespondenční semináře a kdy speciální školy s třídami zaměřenými na matematiku najdeme v každém kraji, je cílem tohoto semináře zlepšit individuální přípravu všech studentů, kteří prokázali své schopnosti a matematický talent v předchozích ročnících matematické olympiády. Korespondenční seminář tak nadále zůstává důležitou součástí přípravy na mezinárodní matematickou olympiádu.

K účasti v korespondenčním semináři jsme pozvali všechny špičkové řešitele kategorie A spolu s těmi studenty, kteří nějak vynikli v krajských kolech kategorií B a C předchozího ročníku MO. V průběhu 40. ročníku MO jim bylo postupně zasláno 5 sérií poměrně náročných úloh, jejichž texty najdete v úlohové části této ročenky (tentokrát poprvé s řešeními). Došlá řešení pak byla opravena, ohodnocena a s rozmnoženým komentářem vrácena účastníkům semináře. Nejlepšími v celkovém hodnocení byli:

1. *Vladimír Glasnák*, 3. ročník G, V. Okružná, Žilina
2. *Michal Konečný*, 4. ročník G, kpt. Jaroše, Brno
3. *Pavel Růžička*, 4. ročník G, kpt. Jaroše, Brno
4. *Richard K. Kollár*, 4. ročník GAM, Bratislava
5. *Josef Menšík*, 4. ročník G, kpt. Jaroše, Brno
- 6.-7. *Slavomír Hrinko*, 4. roč. G, Konštantínova, Prešov
- 6.-7. *Štěpán Kasal*, 3. ročník G, Korunní, Praha
8. *Aleš Kuběna*, 4. ročník G M. Koperníka, Bílovec
9. *Zdeněk Pezlar*, 4. ročník G, Plzeň

Korespondenční seminář je řízen tajemníkem ÚV MO RNDr. *Karlem Horákem*, CSc., který se staral o výběr úloh a prováděl i redakci komentářů. Opravu pak zajišťovalo několik pracovníků MÚ ČSAV a několik studentů a aspirantů MFF UK Praha (všichni jsou bývalí olympionici).

Úlohy korespondenčního semináře

1.1 Je dán kvadratický trojčlen $f(x) = x^2 + 2bx + c$ s celočíselnými koeficienty b a c . Jestliže je $f(n) \geq 0$ pro všechna celá čísla n , pak je $f(x) \geq 0$ i pro všechna racionální čísla x . Dokažte.

1.2 Je dána posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, jež splňuje rekurentní vztah

$$a_{n+2} + a_{n-1} = 2(a_{n+1} + a_n), \quad n \geq 1.$$

Je-li $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, pak je každý člen uvedené posloupnosti čtvercem celého čísla. Dokažte.

1.3 Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro něž je nerovnost

$$\left| \sqrt{1-x^2} - ax - b \right| \leq \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$$

splněna pro všechna $x \in \langle 0, 1 \rangle$.

1.4 Je možno obarvit políčka tabulky $1\,990 \times 1\,990$ černou a bílou barvou tak, aby políčka souměrně sdružená podle středu tabulky měla opačnou barvu a v libovolném sloupci a v libovolném řádku bylo stejně černých i bílých polí?

1.5 Uvnitř strany AB konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ zvolme bod E a průsečík úhlopříček čtyřúhelníku $AECD$ označme F . Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ABC , CDF a BDE se protínají v jednom bodě.

1.6 Uvažujme kvadratický trojčlen $f(x) = ax^2 + bx + c$, který má kladné koeficienty splňující rovnost $a + b + c = 1$. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$, jež splňují rovnost $x_1 \cdot \dots \cdot x_n = 1$, platí nerovnost

$$f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots \cdot f(x_n) \geq 1.$$

1.7 Uvažujme „drátěnou“ krychli o hraně 100, jež je jednotlivými dráty rozdělena na 1 000 000 jednotkových krychlíček. Rozhodněte, zda lze celou drátěnou krychli rozložit na jednotlivé trojice navzájem kolmých jednotkových hran se společným vrcholem, přičemž žádné dvě trojice nemají společnou hranu.

2.1 Je dán rovinný úhel s vrcholem A , do něhož jsou vepsány dvě kružnice, jež se protínají v bodě B . Označme C a D jejich body dotyku s jedním ramenem daného úhlu. Dokažte, že přímka AB se dotýká kružnice opsané trojúhelníku BCD .

2.2 Pro která přirozená čísla n je číslo

$$3^{2n+1} - 2^{2n+1} - 6^n$$

složené?

2.3 Označme d nejmenší vzdálenost dvou mimoběžných hran daného čtyřstěnu a h jeho nejmenší výšku. Dokažte, že $2d > h$.

2.4 Všechny strany a úhlopříčky konvexního n -úhelníku se dají obarvit k barvami tak, že neexistuje uzavřená lomená čára spojující vrcholy uvažovaného mnohoúhelníku, jež by byla jednobarevná. Zjistěte, pro jaké největší n je taková situace možná.

2.5 V rovině je dán bod A_0 a n vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, jež mají nulový součet. Každé pořadí $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ čísel $1, 2, \dots, n$ určuje v dané rovině body $A_1, A_2, \dots, A_n = A_0$ tak, že bude $\mathbf{a}_{i_1} = \mathbf{A}_0\mathbf{A}_1, \mathbf{a}_{i_2} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{a}_{i_n} = \mathbf{A}_{n-1}\mathbf{A}_n$. Dokažte, že existuje takové pořadí, pro které budou všechny body $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ ležet uvnitř nebo na ramenech úhlu velikosti 60° s vrcholem v bodě A_0 .

2.6 Předpokládejme, že $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou kladná reálná čísla taková, že $x_1 < x_2$ a x_3, x_4, x_5 jsou vesměs větší než x_2 . Dokažte, že pro $\alpha > 0$ platí

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x_1 + x_3)^\alpha} + \frac{1}{(x_2 + x_4)^\alpha} + \frac{1}{(x_2 + x_5)^\alpha} < \\ & < \frac{1}{(x_1 + x_2)^\alpha} + \frac{1}{(x_2 + x_3)^\alpha} + \frac{1}{(x_4 + x_5)^\alpha}. \end{aligned}$$

2.7 V trojúhelníku o obsahu 1 je dáno pět bodů. Dokažte, že mezi nimi existují tři, které určují trojúhelník s obsahem nejvýše $\frac{1}{4}$.

3.1 Číslo 9 se dá napsat jako součet dvou po sobě jdoucích čísel, $9 = 4 + 5$; 9 se dá navíc napsat jako součet (několika) po sobě jdoucích čísel právě dvěma způsoby: $9 = 4 + 5 = 2 + 3 + 4$. Zjistěte, zda existuje číslo, které se dá napsat jako součet 1 990 po sobě jdoucích kladných čísel a zároveň se dá napsat jako součet (aspoň dvou) po sobě jdoucích čísel právě 1 990 způsoby.

3.2 Označme T, V, H po řadě těžiště, střed kružnice vepsané a průsečík výšek daného trojúhelníku ABC , jehož žádné dvě strany nejsou shodné. Dokažte, že úhel TVH je tupý.

3.3 Pro dané přirozené číslo k označme $f_1(k)$ součet druhých mocnin číslic v desítkovém rozvoji čísla k a pro $n \geq 1$ položme

$$f_{n+1}(k) = f_1(f_n(k)).$$

Najděte hodnotu $f_{1\,991}(2^{1\,990})$.

3.4 V trojúhelníku ABC označme V střed kružnice vepsané, B_1 a C_1 středy stran AC a AB a dále označme B_2 průsečík přímk C_1V , AC a C_2 průsečík přímk B_1V , AB . Jak velký je úhel CAB , jsou-li obsahy trojúhelníků AB_2C_2 a ABC shodné?

3.5 V rovině s kartézskou soustavou souřadnic je dán pravoúhelník s vrcholy v mřížových bodech $(0, 0)$, $(m, 0)$, $(0, n)$, (m, n) , kde m i n jsou lichá čísla. Pravoúhelník je rozložen na trojúhelníky tak, že

- a) každý trojúhelník rozkladu má aspoň jednu „dobrou“ stranu takovou, že výška trojúhelníku na tuto stranu má velikost 1; přitom za dobrou stranu považujeme stranu

ležící na přímce $x = j$ nebo $y = k$, kde j či k je celé číslo;

- b) každá „špatná“ strana (tj. strana trojúhelníku uvažovaného rozkladu, jež není „dobrá“) je společnou stranou dvou trojúhelníků rozkladu.

Dokažte, že v takovém rozkladu existují aspoň dva trojúhelníky, z nichž každý má dvě dobré strany.

3.6 Uvažujme bod P uvnitř pravidelného čtyřstěnu. Čtyři roviny procházející bodem P rovnoběžně se stěnami daného čtyřstěnu ho rozdělí na 14 částí. Označme $v(P)$ celkový objem těch částí, jež nejsou ani čtyřstěnem, ani rovnoběžnostěnem (tj. ty části, jež obsahují hranu, ale ne vrchol daného čtyřstěnu). Určete hodnoty, kterých může funkce v nabývat.

3.7 Dokažte, že každé přirozené číslo $k > 1$ má kladný celočíselný násobek menší než k^4 , který se dá napsat v desítkové soustavě pomocí nejvýše čtyř různých číslic.

4.1 V rovině je dán konvexní mnohoúhelník K a kartézská soustava souřadnic tak, že K kromě počátku neobsahuje žádný mřížový bod (tj. bod s celočíselnými souřadnicemi). Přitom pro obsah mnohoúhelníku K v jednotlivých kvadrantech Q_i , $1 \leq i \leq 4$, určených osami, platí

$$S(K \cap Q_i) = \frac{1}{4}S(K).$$

Dokažte, že potom $S(K) < 4$.

4.2 V rovině je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Označme A_1 střed kružnice opsané trojúhelníku BCD , B_1 střed kružnice opsané trojúhelníku ACD , C_1 střed kružnice opsané

trojúhelníku ABD a B_1 střed kružnice opsané trojúhelníku ABC . Dokažte, že pak platí:

- (a) Buď jsou všechny body A_1, B_1, C_1, D_1 totožné, anebo jsou vesměs různé a pak leží body A_1, C_1 v opačných polorovinách určených přímkou B_1D_1 a podobně i body B_1, D_1 leží v opačných polorovinách určených přímkou A_1C_1 . (Odtud plyne konvexita čtyřúhelníku $A_1B_1C_1D_1$.)
- (b) Označme analogicky A_2, B_2, C_2, D_2 středy kružnic opsaných trojúhelníkům $B_1C_1D_1, A_1C_1D_1, A_1B_1D_1$ a $A_1B_1C_1$. Potom jsou čtyřúhelníky $A_2B_2C_2D_2$ a $ABCD$ podobné.

4.3 Dokažte, že nerovnost

$$\frac{1-s^a}{1-s} \leq \frac{(1+s)^a}{1+s}$$

platí pro každé kladné $s \neq 1$ a libovolné racionální číslo a , $0 < a \leq 1$.

4.4 Kolmý kužel je rozdělen rovinou na dvě části. Tato rovina se dotýká kružnice na obvodu základny kužele a prochází středem jeho výšky. Určete poměr objemu menší části kužele určené danou rovinou a objemu celého kužele.

4.5 pqr jednotkových krychlíček je navlečeno na nit (dírkami podél tělesové úhlopříčky) tak, že dvě sousední se vždy dotýkají alespoň vrcholy. Zjistěte, pro jaká přirozená čísla p, q, r je možno z krychlíček sestavit kvádr o rozměrech p, q, r za předpokladu, že obě koncové krychličky se dotýkají, resp. za předpokladu, že nemají žádný společný bod.

4.6 Jestliže n je složené přirozené číslo a p jeho vlastní dělitel, určete dvojkový zápis nejmenšího přirozeného čísla N , pro něž je

$$\frac{(1 + 2^p + 2^{n-p})N - 1}{2^n}$$

celé číslo.

4.7 Předpokládejme, že p je kubický mnohočlen s racionálními koeficienty, a označme $q_1, q_2, q_3, \dots$ posloupnost racionálních čísel, v níž $q_n = p(q_{n+1})$ pro každé přirozené $n \geq 1$. Dokažte, že existuje $k \geq 1$ takové, že $q_{n+k} = q_n$ pro každé $n \geq 1$.

5.1 Na kružnici jsou dány čtyři body A, B, C, D takové, že tětivy AB, CD jsou různoběžné. Jestliže K a H jsou body téže roviny, pro něž jsou úhly KAB, KCD, HBA a HDC všechny pravé, pak přímka KH prochází středem dané kružnice a zároveň i průsečíkem přímek AD, BC (pokud existuje). Dokažte.

5.2 V rovině jsou dány dvě kružnice, jež se vně dotýkají a mají poloměry r a R . Uvažujme všechny možné lichoběžníky $ABCD$, jež jsou oběma kružnicím opsány (tj. každá z daných kružnic se dotýká obou ramen a jedné ze základů uvažovaného lichoběžníku). Najděte nejmenší možnou délku ramene takového lichoběžníku.

5.3 Určete nejmenší číslo tvaru $|36^k - 5^l|$ a nejmenší číslo tvaru $|53^k - 37^l|$, kde k a l jsou přirozená čísla.

5.4 V rovině je dáno n jednotkových vektorů, jejichž součtem je nulový vektor. Dokažte, že vektory je možno uspořádat tak, aby pro každé $k, 1 \leq k \leq n$, byla velikost součtu

prvních k vektorů nejvýše rovna 3. Pokuste se uvedený odhad zlepšit, případně najít analogický odhad za předpokladu, že každý z daných vektorů má velikost nejvýše rovnu 1 (a dohromady dávají nulový součet).

5.5 V rovině je dán čtverec $ABCD$ a na jeho stranách AB , BC jsou dány body P , Q , přičemž $|BP| = |BQ|$. Označme H patu kolmice spuštěné z bodu B na úsečku PC . Dokažte, že úhel DHQ je pravý.

5.6 Je-li délka každé ze stran konvexního šestiúhelníku větší než 1, musí být některá z jeho úhlopříček větší než 2? A jsou-li úhlopříčky AD , BE a CF konvexního šestiúhelníku $ABCDEF$ větší než 2, je délka aspoň jedné jeho strany větší než 1?

5.7 Na kružnici je zapsáno n ($n \geq 3$) čísel rovných $+1$ nebo -1 . Jaký je nejmenší počet dotazů, pomocí nichž lze zjistit součin všech n čísel, jestliže jednotlivá čísla jsou zakryta a pomocí jedné otázky je možno zjistit, jaký je

- součin čísel na libovolných třech místech;
- součin čísel na třech po sobě jdoucích místech?

Řešení úloh korespondenčního semináře

1.1 Stačí dokázat, že (globální) minimum funkce f je v bodě $-b$. To vyplývá z rozkladu

$$f(x) = x^2 + 2bx + c = (x + b)^2 + c - b^2,$$

kde $c - b^2$ je konstanta a $(x + b)^2 \geq 0$ s rovností právě pro $x = -b$.

Protože $-b$ je celé číslo, musí být $f(-b) \geq 0$. Je-li (globální) minimum nezáporné, jsou i všechny ostatní funkční hodnoty nezáporné na celém definičním oboru, tedy pro všechna reálná čísla včetně racionálních.

1.2 Asi nejjednodušší je ukázat, že $a_n = f_n^2$, kde (f_n) je známá Fibonacciova posloupnost, která je definována vztahy

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n,$$

a všechny její členy jsou tudíž celá čísla. Důkaz provedeme indukcí. Pro $n = 0, 1, 2$ vztah $a_n = f_n^2$ platí. Předpokládejme, že platí pro každé $n \leq k$ ($k \geq 2$). Potom

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2(a_k + a_{k-1}) - a_{k-2} = \\ &= 2f_k^2 + 2f_{k-1}^2 - f_{k-2}^2 = \\ &= f_k^2 + f_{k-1}^2 + 2f_k f_{k-1} + f_k^2 + f_{k-1}^2 - \\ &\quad - 2f_k f_{k-1} - f_{k-2}^2 = \\ &= (f_k + f_{k-1})^2 + (f_k - f_{k-1})^2 - f_{k-2}^2 = \\ &= f_{k+1}^2 + f_{k-2}^2 - f_{k-2}^2 = \\ &= f_{k+1}^2. \end{aligned}$$

Dokazovaný vztah platí tedy i pro $n = k + 1$.

1.3 Budeme využívat známé nerovnosti

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad a \leq |a|, \quad -a \leq |a|. \quad (1)$$

Označme $f(x) = \sqrt{1 - x^2} - ax - b$ a předpokládejme, že pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$ platí

$$|\sqrt{1 - x^2} - ax - b| \leq \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1). \quad (2)$$

Pro krajní hodnoty $x = 0$ a $x = 1$ pak dostáváme

$$|1 - b| \leq \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1), \quad (3)$$

$$|a + b| \leq \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1). \quad (4)$$

Jejich sečtením vyjde

$$|a + 1| \leq |1 - b| + |a + b| \leq \sqrt{2} - 1 < 1,$$

odkud $a < 0$.

Hledejme extrémy funkce f . Derivováním máme

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} - a = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - a.$$

Položíme-li $f'(x) = 0$, dostaneme

$$|x| = \frac{|a|}{\sqrt{1+a^2}},$$

což nás zajímá pro $x > 0$ a $a < 0$. Z (2) po dosazení x tak máme

$$|\sqrt{1+a^2} - b| \leq \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1). \quad (5)$$

Sečtením (5) a (3) potom vyjde

$$|\sqrt{1+a^2} - 1| \leq |\sqrt{1+a^2} - b| + |b - 1| \leq \sqrt{2} - 1,$$

odkud plyne $\sqrt{1+a^2} \leq \sqrt{2}$, tedy $|a| \leq 1$.

Podobně sečtením (4) a (5) dostaneme

$$|\sqrt{1+a^2} + a| \leq \sqrt{2} - 1.$$

Protože $\sqrt{1+a^2} > |a|$, je vnitřek absolutní hodnoty kladný, tedy

$$\sqrt{1+a^2} \leq \sqrt{2} - 1 - a,$$

po umocnění

$$1 + a^2 \leq 2 + 1 + a^2 - 2\sqrt{2} - 2a\sqrt{2} + 2a,$$

tedy $a \leq -1$. To spolu s předcházející podmínkou $|a| \leq 1$ dává $a = -1$.

Dosazením do (5) dostaneme $|\sqrt{2} - b| \leq \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$, což znamená, že

$$\sqrt{2} - b \leq \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}, \quad \text{teda} \quad \frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1) \leq b.$$

Podobně ze (4) plyne $b - 1 \leq \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$, tedy

$$b \leq \frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1).$$

Celkem tak máme $b = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1)$.

Na závěr se ještě přesvědčíme, že pro $a = -1$, $b = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1)$ a pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$ platí (2) (to není vůbec samozřejmé).

Protože

$$0 \leq \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1),$$

$$1 - x^2 \leq x^2 - 2\sqrt{2}x + 2,$$

je

$$\sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{2} - x,$$

$$\sqrt{1-x^2} + x - 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) \leq \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1),$$

tedy

$$\sqrt{1-x^2} - ax - b \leq \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$$

pro $a = -1$, $b = \frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$. Pro $x \in (0, 1)$ dále platí

$$1-x \leq \sqrt{1-x^2},$$

$$-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1) \leq \sqrt{1-x^2} + x - 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1),$$

tedy

$$-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1) \leq \sqrt{1-x^2} - ax - b$$

pro $a = -1$, $b = \frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$. Tím je platnost (2) ověřena.

1.4 1. řešení. Rozdělme tabulku na čtyři čtverce 995×995 , které označíme A , B , C , D (obr. 26). Pro $X \in \{A, B, C, D\}$ označme b_X (resp. c_X) počet bílých (resp. černých) čtverečků ve čtverci X . Vzhledem k požadované středové antisymetrii je $b_A = c_D$.

A	B
C	D

Obr. 26

Má-li každý řádek či sloupec obsahovat stejně bílých i černých čtverečků, musí být

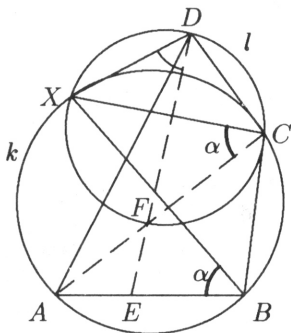
$$b_A + b_B = 995^2 \quad \text{a} \quad b_B + b_D = 995^2.$$

Je tedy $b_A = 995^2 - b_B = b_D$ a $b_A = c_D$. Odtud plyne, že $995^2 = c_D + b_D = 2b_A$, což je spor, neboť číslo 995^2 je liché. Obarvení požadovaných vlastností tedy neexistuje.

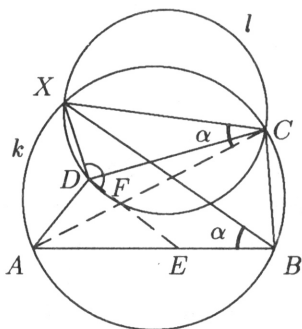
2. řešení. Zachovejme rozdělení na čtverce A , B , C , D . Protože $b_A + c_A = 995^2$ je liché, je $b_A \neq c_A$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $b_A > c_A$, takže $b_D < c_D$. Z rovnosti $b_A + b_B = c_A + c_B$ plyne nerovnost $b_B < c_B$. Pak ale $b_B + b_D < c_B + c_D$, což je spor.

3. řešení. Políčko a_{ij} v tabulce nazveme *vodorovné*, má-li stejnou barvu jako pole $a_{i,1991-j}$, a nazveme je *svislé*, pokud má stejnou barvu jako pole $a_{1991-i,j}$. Z vlastností tabulky plyne, že každé políčko je buď vodorovné, nebo svislé (ale nikdy obojí najednou — dokažte!). Každý řádek obsahuje sudý počet vodorovných bílých, každý sloupec obsahuje sudý počet svislých bílých políček. Celkem tedy je v tabulce $2p \cdot 1990$ vodorovných bílých a $2q \cdot 1990$ svislých bílých polí. Celkový počet bílých políček $\frac{1}{2}1990^2$ by tak byl dělitelný čtyřmi, což není možné.

1.5 (podle P. Vrbackého). Označme k kružnici opsanou trojúhelníku ABC , l kružnici opsanou trojúhelníku DFC a m kružnici opsanou trojúhelníku EBD . Prozatím předpokládejme, že existuje průsečík $X \neq C$ kružnic k a l , který leží v polorovině CDF (obr. 27).



Obr. 27

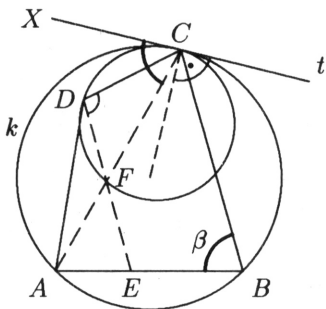


Obr. 28

Označme $\alpha = |\sphericalangle ABX|$. Pak $|\sphericalangle ACX| = |\sphericalangle FCX| = \alpha$ (čtýrúhelník $ABCX$ je tětíkový) a $|\sphericalangle FDX| = |\sphericalangle FCX| =$

$= \alpha$ ($FCDX$ je tětivový). To však znamená, že čtyřúhelník $EBDX$ je tětivový, tj. X leží též na kružnici m . (Tento důkaz platí nezávisle na pořadí bodů F a X na kružnici l — je jasné proč?!)

Předpokládejme teď, že průsečík X leží v polorovině opačné k CDF (obr. 28). Označíme-li $\alpha = |\sphericalangle ABX|$, je opět $|\sphericalangle ACX| = |\sphericalangle FCX| = \alpha$, a proto $|\sphericalangle FDX| = \pi - |\sphericalangle FCX| = \pi - \alpha$ ($FCDX$ je tětiový). Odtud dostaneme, že $EBDX$ je tětiový, tedy bod X leží i na kružnici m .

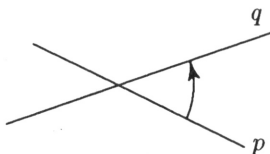


Obr. 29

Pokud $X = D$, je tvrzení triviální. Vynechali jsme případ, kdy k a l mají jediný společný bod C (obr. 29). Nechť $\beta = |\sphericalangle ABC|$. Je-li t společná tečna kružnic k a l , zvolme na ní bod P v polorovině ACD . Potom $|\sphericalangle ACP| = \beta$ (tzv. úsekový úhel odpovídající obvodovému úhlu β na kružnici k). Z toho pro kružnici l plyne, že $|\sphericalangle FDC| = \pi - \alpha$, a proto čtyřúhelník $EBCD$ je tětíkový, tj. bod C leží na m .

Poznámky. Diskusi lze podstatně zjednodušit, budeme-li používat *orientovaný úhel* dvou přímk: orientovaným

úhlem (p, q) dvou různoběžek p, q (v tomto pořadí!) rozumíme ten úhel, o který se musí přímka p otočit v kladném směru kolem společného průsečíku, aby splynula s přímkou q (obr. 30). Snadno potom zjistíme, že platí následující poněkud kompaktnější verze věty o obvodových úhlech: *Bod $X \notin \{A, B, C\}$ leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC , právě když $(AX, XC) = (AB, BC)$.*



Obr. 30

V dané situaci můžeme předpokládat, že druhý průsečík $X \neq C$ kružnic k a l je různý od bodů B, D (jinak $k = l$ a tvrzení je triviální). Protože body A, B, C, X leží na kružnici k , je $(AB, BX) = (AC, CX) = (FC, CX)$, a podobně pro body C, F, X, D na kružnici l dostaneme $(FC, CX) = (FD, DX) = (ED, DX)$. Je tedy $(EB, BX) = (AB, BX) = (ED, DX)$, což znamená, že body B, D, E, X leží na kružnici.

1.6 Označme $G_n(u_1, \dots, u_n)$ geometrický průměr čísel $u_1, \dots, u_n$. Pak platí

$$G_n(u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) \geq G_n(u_1, \dots, u_n) + G_n(v_1, \dots, v_n)$$

(k důkazu tohoto tvrzení stačí sečíst nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro n -tice

$(\frac{u_1}{u_1+v_1}, \dots, \frac{u_n}{u_n+v_n})$ a $(\frac{v_1}{u_1+v_1}, \dots, \frac{v_n}{u_n+v_n})$), takže můžeme psát

$$\begin{aligned} G_n(f(x_1), \dots, f(x_n)) &= \\ &= G_n(ax_1^2 + bx_1 + c, \dots, ax_n^2 + bx_n + c) \geq \\ &\geq G_n(ax_1^2, \dots, ax_n^2) + G_n(bx_1, \dots, bx_n) + \\ &\quad + G_n(c, \dots, c) = \\ &= a(G_n(x_1, \dots, x_n))^2 + bG_n(x_1, \dots, x_n) + c = \\ &= a + b + c = 1, \end{aligned}$$

neboť $G_n(x_1, \dots, x_n) = 1$. Umocněním dostaneme požadované tvrzení.

Jiný postup. Levou stranu nerovnosti, tj. součin

$$(ax_1^2 + bx_1 + c) \dots (ax_n^2 + bx_n + c),$$

roznásobíme a sloučíme členy, v nichž vystupují a , b , c se stejnou mocninou. Pravou stranu požadované nerovnosti lze napsat ve tvaru $1 = (a + b + c)^n$, což také roznásobíme. Pomocí nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem ukážeme, že koeficient u členu $a^i b^j c^{n-i-j}$ na levé straně nerovnosti je nejméně roven odpovídajícímu koeficientu na straně pravé. Nedostatkem tohoto postupu je náročnost zápisu řešení. (Z toho důvodu uvádíme jen hlavní myšlenku důkazu.)

Tvrzení lze také dokázat matematickou indukcí.

Pro $n = 1$ je tvrzení triviální. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n = k$, a dokažme je pro $n = k + 1$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{k+1}$.

Protože součin čísel $x_1, \dots, x_{k+1}$ je roven jedné, je zřejmé $x_1 \leq 1$, $x_{k+1} \geq 1$. Ukažme nyní, že $f(x_1)f(x_{k+1}) \geq f(x_1x_{k+1})$. Jednoduchou úpravou máme

$$\begin{aligned} f(x_1)f(x_{k+1}) - f(x_1x_{k+1}) &= \\ &= (ax_1^2 + bx_1 + c)(ax_{k+1}^2 + bx_{k+1} + c) - \\ &\quad - (a + b + c)(ax_1^2x_{k+1}^2 + bx_1x_{k+1} + c) = \\ &= abx_1x_{k+1}(1 - x_1)(x_{k+1} - 1) + ac(1 - x_1^2)(x_{k+1}^2 - 1) + \\ &\quad + bc(1 - x_1)(x_{k+1} - 1) \geq 0, \end{aligned}$$

takže

$$f(x_1) \dots f(x_k)f(x_{k+1}) \geq f(x_1x_{k+1})f(x_2) \dots f(x_k) \geq 1$$

dle indukčního předpokladu.

Na závěr uveďme ještě náznak řešení (J. Kolář, J. Menšík), které využívá těch vlastností funkce f , které jsou pro platnost nerovnosti podstatné (nerovnost platí pro mnohem obecnější funkce). Z Cauchyovy nerovnosti pro kladná čísla x_1, x_2 dostaneme

$$\begin{aligned} & \left((\sqrt{a}x_1)^2 + (\sqrt{b}\sqrt{x_1})^2 + (\sqrt{c})^2 \right) \cdot \\ & \cdot \left((\sqrt{a}x_2)^2 + (\sqrt{b}\sqrt{x_2})^2 + (\sqrt{c})^2 \right) \geq \\ & \geq (ax_1x_2 + b\sqrt{x_1x_2} + c)^2, \end{aligned}$$

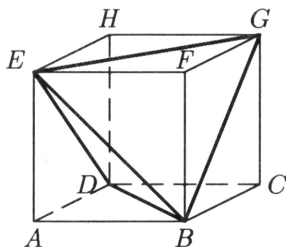
neboli

$$f(x_1)f(x_2) \geq (f(\sqrt{x_1x_2}))^2.$$

Odtud snadno dostaneme (přidáme-li k číslům x_i několik jedniček, můžeme předpokládat, že n je tvaru $n = 2^k$ pro $k \geq 2$)

$$\begin{aligned} f(x_1) \dots f(x_n) &\geq \\ &\geq (f(\sqrt{x_1 x_2}))^2 \dots (f(\sqrt{x_{n-1} x_n}))^2 \geq \\ &\geq (f(\sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4}))^4 \dots \\ &\dots (f(\sqrt[4]{x_{n-3} x_{n-2} x_{n-1} x_n}))^4 \geq \dots \geq \\ &\geq (f(\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}))^n = (f(1))^n = 1. \end{aligned}$$

1.7 (podle Š. Kasala). Krychli označíme $ABCDEFGH$ (obr. 31). Odřízneme z ní čtyři rohy, a to tak, že roviny řezu



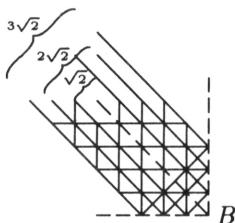
Obr. 31

jsou BDE , BDG , EGB , EGD . Každý odříznutý čtyřstěn lze vyplnit požadovanými trojicemi — důkaz je zřejmý z náčrtků na obr. 32. Uprostřed zbývá čtyřstěn $BDEG$; dokažme, že jej lze vyplnit „hvězdičkami“ $\star$ sestavenými ze dvou trojic (se společným vrcholem). Všimněme si, že jeho vodorovné řezy (tj. ty rovnoběžné s podstavou $ABCD$)

vypadají postupně tak jako na obr. 33. V každé této „vrstvě“ lze hrany jednotkových krychliček zjevně rozdělit do „křížků“ $\perp$. Doplníme-li „křížky“ na „hvězdičky“, lze nahlédnout (představíme-li si dvě vrstvy nad sebou), že tím vyčerpáme přesně všechny hrany ležící ve čtyřstěnu $BDEG$. Tím je důkaz hotov — krychli jsme rozložili požadovaným způsobem.



Obr. 32



Obr. 33

2. řešení (dle M. Konečného). Danou krychli umístíme do kartézské souřadné soustavy tak, aby počátek byl v některém vrcholu krychle a souřadnicové osy obsahovaly některé tři hrany krychle. Body (a, b, c) , kde $a, b, c \in \{0, 1, \dots, 100\}$, označíme $K_{a,b,c}$ a nazveme je *uzly*. Množiny uzlů tvaru

$$D_{x,y} = \{K_{x,y,z} : z \in \{0, 1, \dots, 100\}\} \quad (1)$$

nazveme *řadami ve směru z* ; podobně definujeme řady ve směru x a y . Konečně označme $G = \{K_{a,b,c} : a + b + c \text{ je dělitelné } 101\}$.

Všimněme si, že v každé řadě leží právě jeden uzel z množiny G . Skutečně, např. v řadě (1) probíhá součet $x + y + z$ množinu $\{x + y, x + y + 1, \dots, x + y + 100\}$, což je 101 po sobě

jdoucích přirozených čísel; je tedy mezi nimi právě jedno, které je dělitelné 101.

Uvažujme nyní uzel $K \notin G$. V řadě ve směru z , která bod K obsahuje, leží podle posledního odstavce právě jeden uzel patřící do G — označme ho K' ; zřejmě $K' \neq K$. Přiřaďme nyní bodu K jednotkovou hranu ve směru osy z , která z něj vychází, a to ve směru ke K' . Podobně přiřadíme hrany ve směrech os y a x . Tím jsme každému uzlu $K \notin G$ přiřadili trojici navzájem kolmých jednotkových hran se společným vrcholem K . Dokážeme, že tyto trojice tvoří kýžený rozklad dané drátěné krychle. Předně je jasné, že každá hrana je použita nejvýše jednou: kdyby jednotková hrana AB byla přiřazena uzlu A i uzlu B , musel by někde v jejím vnitřku ležet bod z G , což není možné. Navíc není žádná hrana AB vynechána: právě v jednom směru AB nebo BA najdeme uzel $L \in G$; je-li nyní např. A dále od L než B (případně může být $L = B$), pak byla hrana přiřazena bodu A . Sestrojený rozklad krychle na trojice jednotkových hran tedy splňuje podmínky ze zadání.

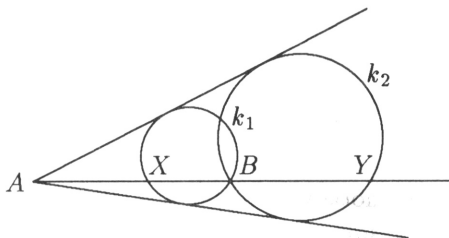
Na závěr poznamenejme, že oba způsoby lze použít i na krychli $n \times n \times n$; druhý z nich funguje dokonce i pro vícerozměrné krychle.

2.1 (podle J. Koláře). Využijeme toho, že kružnice k_1 a k_2 (obr. 34) jsou stejnohlé podle středu A . Můžeme tedy napsat

$$\frac{|AX|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AY|},$$

takže

$$|AB|^2 = |AX||AY|. \quad (1)$$



Obr. 34

Pro mocnosti bodu A ke kružnicím k_1 a k_2 platí

$$\begin{aligned} |AX||AB| &= |AC|^2, \\ |AB||AY| &= |AD|^2, \end{aligned}$$

vynásobením dostaneme

$$|AX||AY||AB|^2 = |AC|^2|AD|^2,$$

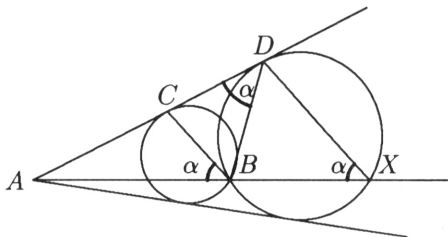
dosazením z (1) po odmocnění vyjde

$$|AB|^2 = |AC||AD|. \quad (2)$$

Body A , C , D jsou kolineární a A leží vně kružnice l . Protože mocnost bodu A ke kružnici l je (podle (2)) rovna $|AB|^2$, musí být AB tečna kružnice l . (Kdyby nebyla, existoval by druhý průsečík X přímky AB a kružnice l , tedy $|AX| \neq |AB|$, a pomocí mocnosti dostaneme $|AC||AD| = |AB||AX| \neq |AB|^2 = |AC||AD|$, což je spor.)

Kružnice l je opsaná trojúhelníku BCD a přímka AB je tedy její tečnou. Protože $|AB| = |AB'|$, platí vztah (2), a tedy i dokazované tvrzení platí i pro body B' , C , D a díky symetrii i pro zbylé kombinace C' , D' , B a C' , D' , B' .

Jiný způsob řešení využívá obvodových a úsekových úhlů (M. Konečný, obr. 35). Označme $\alpha = |\sphericalangle CBA|$ a X obraz bodu B ve stejnolehlosti se středem A , která převádí menší z obou kružnic na větší. Stejnolehlost zachovává velikost úhlů, tedy $|\sphericalangle DXA| = \alpha$.



Obr. 35

Úsekový úhel CDB oblouku DB větší kružnice má také velikost α . Je tedy $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle CDB|$, to ale znamená, že CBA je úsekový úhel k oblouku CB kružnice opsané trojúhelníku BCD a přímka AB je tečna této kružnice (postup pro druhý průsečík B' vepsaných kružnic je stejný).

2.2 Nejprve dané číslo rozložíme na součin

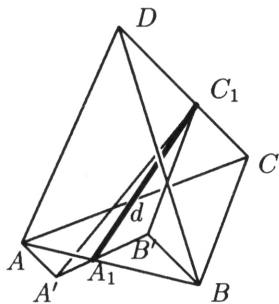
$$3^{2n+1} - 2^{2n+1} - 6^n = (3^n - 2^n)(3^{n+1} + 2^{n+1}).$$

Pro $n = 1$ je výraz roven 13, což je prvočíslo. (Tento krok mnozí z vás zapomněli udělat a soustředili se pouze na případ $n > 1$ — znamenalo to ztrátu půl bodu.)

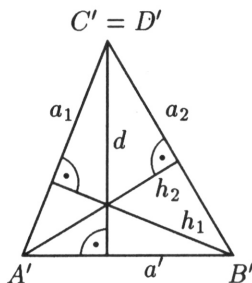
Pro $n > 1$ jsou výrazy v obou závorkách větší než 1 (v druhé závorce je to zřejmé a výraz v první závorce lze

pro $n \geq 2$ napsat jako $3^n - 2^n = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i 2^{n-1-i} > 1$), jejich součin je tedy složené číslo.

2.3 (M. Kordoš). Označme AB a CD ty mimoběžné hrany, které mají nejmenší vzdálenost d (obr. 36) a promítněme čtyřstěn do roviny kolmé na CD (obr. 37).



Obr. 36



Obr. 37

Výšky v trojúhelníku $A'B'C'$ jsou obrazy příčky mimoběžek a dvou tělesových výšek a *zachovávají* jejich *skutečné velikosti* d , h_1 a h_2 . Označme $|A'B'| = a'$, $|A'C'| = a_1$, $|B'C'| = a_2$ délky jeho stran a předpokládejme, že

$$2d \leq h_1, \quad 2d \leq h_2. \quad (1)$$

Obsah P trojúhelníku můžeme vyjádřit třemi způsoby jako

$$P = \frac{1}{2}a_1h_1 = \frac{1}{2}a_2h_2 = \frac{1}{2}a'd.$$

Po dosazení z nerovností (1) dostaneme

$$2a_1 \leq a', \quad 2a_2 \leq a',$$

takže

$$a_1 + a_2 \leq a'.$$

To je ale spor s trojúhelníkovou nerovností.

Proto alespoň jedna z výšek h_1, h_2 je menší než $2d$, tedy i nejmenší výška h je menší než $2d$.

Jiné řešení (Z. Pezlar). Nechť nejkratší vzdálenost mimoběžných hran je příčka mimoběžek AB a CD . Její průsečíky s přímkami AB a CD označme po řadě A_1, C_1 (obr. 37). Předpokládejme, že

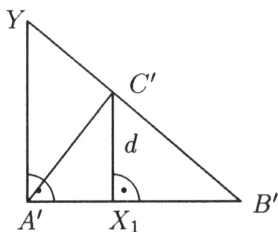
$$|CC_1| \geq |DC_1| \quad (2)$$

(sem lze začlenit i případy, kdy bod C_1 leží mimo úsečku CD za bodem D). Uvažujme rovinu ϱ rovnoběžnou se stěnou ABC a procházející středem tělesové výšky z vrcholu D na stěnu ABC (označme ji h_D). Vzdálenost rovin ABC a ϱ je tedy $\frac{1}{2}h_D$. Bod C_1 leží (podle (2)) v poloprostoru určeném ϱ a bodem D . Proto je nutně

$$d = |A_1C_1| > \frac{1}{2}h_D,$$

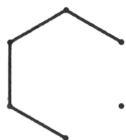
čímž je důkaz hotov.

Poznámka. Nerovnost $2d < h$ dostaneme v 1. řešení přímo z následující úvahy: Je-li d vzdálenost hran AB, CD , výška $C'X_1$ trojúhelníku $A'B'C'$ na stranu $A'B'$ má velikost d (další dvě výšky jsou tělesovými výškami daného čtyřstěnu), a je-li např. $|A'X_1| < |B'X_1|$, je také (obr. 38) $|A'Y| < < 2d$ a v pravoúhlém trojúhelníku $A'B'Y$ je zřejmě výška z vrcholu A' menší než odvěsna $A'Y$.



Obr. 38

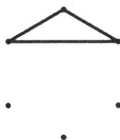
2.4 Největší nejasnosti se týkaly pojmu uzavřená lomená čára. V případě šestiúhelníku je na obr. 39 lomená čára, na obr. 40 uzavřená lomená čára, zatímco útvar na obr. 41 není lomená čára. Ani útvar na obr. 42 není lomená čára, ale jedna jeho podmnožina je uzavřená lomená čára. Z obrázků je také patrné, že uzavřená lomená čára nemusí spojoval všechny vrcholy n -úhelníku.



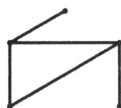
Obr. 39



Obr. 40



Obr. 41



Obr. 42

Protože většina řešitelů ovládá terminologii teorie gra-

fů, přeformulujeme úlohu do přirozenější podoby. Nejprve stručně uvedeme příslušné pojmy: strany a úhlopříčky konvexního n -úhelníku se nazývají hrany úplného grafu o n vrcholech; uzavřená lomená čára složená z hran grafu se nazývá kružnice; souvislý graf bez kružnic se nazývá strom; graf, jehož každá komponenta souvislosti je strom, se nazývá les.

Úloha tedy zní: Pro každé k určete maximální n tak, že hrany úplného grafu o n vrcholech lze obarvit k barvami tak, že každý graf určený hranami stejné barvy je les.

Řešení. Nejprve dokážeme jednoduché lemma.

LEMMA. Každý les o m vrcholech má nejvýše $m - 1$ hran. (Toto je notoricky známé tvrzení a víceméně stačí odkaz na literaturu. Většina pŕlbodových ztrát je důsledkem chyb v důkazu tohoto lemmatu.)

DŮKAZ. Indukcí podle m . Pro $m = 1$ tvrzení zřejmě platí.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké $m \geq 1$, a uvažujme les o $m + 1$ vrcholech. Každý les obsahuje vrchol stupně menšího než 2 — v opačném případě uvažme cestu $v_0 v_1 v_2 \dots$ definovanou rekurzivně tak, že v_{k+1} je vrchol spojený hranou s v_k a různý od v_{k-1} . Protože počet vrcholů je konečný, existují indexy $i < j$ tak, že $v_j = v_i$ a $v_i, v_{i+1}, \dots, v_j = v_i$ je kružnice.

Nechť v_{m+1} je tedy vrchol stupně menšího než 2. Graf vzniklý odstraněním tohoto vrcholu je les o m vrcholech a podle indukčního předpokladu má nejvýše $m - 1$ hran, uvažovaný graf o $m + 1$ vrcholech má nejvýše $m - 1 + 1 = m = (m + 1) - 1$ hran.

Předpokládejme, že požadované obarvení existuje. Podle

uvedeného lemmatu je každou barvou obarveno nejvýše $n - 1$ hran, celkem tedy graf obsahuje nejvýše $k(n - 1)$ obarvených hran. Protože úplný graf má $\binom{n}{2}$ hran (a každá je obarvena), je

$$\binom{n}{2} \leq k(n - 1),$$

odkud plyne nerovnost

$$n \leq 2k.$$

Dokážeme matematickou indukcí, že pro $n = 2k$ požadované obarvení existuje. Pro $k = 1$ obarvíme snadno jedinou hranu barvou b_1 . Předpokládejme tedy, že pro nějaké $k \geq 1$ a graf s $n = 2k$ vrcholy obarvení existuje, a uvažujme graf s $n = 2k + 2$ vrcholy. Vezměme jeho podgraf s vrcholy $v_1, \dots, v_{2k}$ obarvený k barvami tak, že každá barva indukuje les. Uvažme dva nové vrcholy v_{2k+1}, v_{2k+2} a hrany incidentní s těmito vrcholy obarvěme takto:

hranu	$v_i v_{2k+1}$	barvou	$b_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, k\},$
hranu	$v_{k+i} v_{2k+2}$	barvou	$b_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, k\},$

hrany $v_{k+i} v_{2k+1}, v_i v_{2k+2}, i \in \{1, 2, \dots, k\}$, a hranu $v_{2k+1} v_{2k+2}$ barvou b_{k+1} .

Je snadné se přesvědčit, že v barvách $b_1, \dots, b_k$ nevznikly kružnice a podobně barva b_{k+1} indukuje strom.

Někteří řešitelé na tento důležitý krok zapomněli. Většinou uváděli konstrukce, ze kterých nebylo zcela patrné, že barvy jsou použity disjunktně.

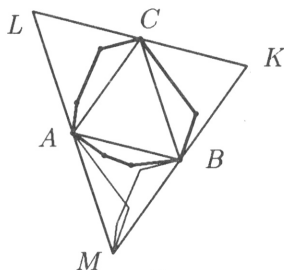
Jiné řešení. Dokážeme jen, že pro $n = 2k$ požadované obarvení existuje.

Označme $A_1, A_2, \dots, A_{2k}$ vrcholy pravidelného $2k$ -úhelníku a obarvěme jednou barvou lomenou čáru $A_1 A_{2k} A_2 A_{2k-1} \dots A_k A_{k+1}$. Další barvou obarvíme lomenou čáru, kterou dostaneme otočením kolem středu daného $2n$ -úhelníku o úhel $\frac{\pi}{k}$, atd.

Není těžké se přesvědčit, že takto bude každá strana či úhlopříčka obarvena právě jednou z k barev a že nevznikne žádná jednobarevná uzavřená lomená čára.

2.5 Leží-li všechny body na jedné přímce (vektory jsou rovnoběžné), zvolíme za A_0 krajní bod a není co dokazovat. V jiném případě uspořádáme vektory podle velikosti orientovaného úhlu, který svírají s vektorem $\mathbf{a}_1$, čímž dostaneme konvexní m -úhelník pro $m \leq n$, protože dva po sobě jdoucí vektory musí svírat úhel menší než 180° , jinak by součet všech vektorů nemohl být nulový.

V tomto konvexním m -úhelníku vyberme tři vrcholy A, B, C tak, aby obsah tohoto trojúhelníku byl mezi všemi takovými trojúhelníky maximální. Je-li KLM trojúhelník takový, že AB, AC, BC jsou jeho střední příčky, pak všechny vrcholy m -úhelníku leží uvnitř trojúhelníku KLM (obr. 43), jinak by ABC nebyl maximální, a navíc žádný z vrcholů neleží uvnitř ABC . Odtud plyne, že pokud vezmeme postupně vektory ležící mezi AB , potom mezi CA a nakonec mezi BC , dosáhneme tímto přeuspořádáním toho, že všechny body leží v trojúhelníku ABM podobném trojúhelníku ABC . Aspoň jeden jeho úhel je nejvýše 60° , a volbou označení A_0 pro tento vrchol úspěšně končíme.



Obr. 43

2.6 Nejprve dokažme pomocné tvrzení. Označme $f_d(x) = x^{-\alpha} - (x + d)^{-\alpha}$, kde $x, \alpha, d > 0$. Potom funkce f_d je klesající. Skutečně, je

$$f_d(x) = \frac{1}{x^\alpha} \cdot \overbrace{\left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{d}{x}\right)^\alpha}\right)}^{g(x)};$$

přitom jak $\frac{1}{x^\alpha}$, tak i $g(x)$ jsou klesající a navíc kladné. Avšak součin kladných klesajících funkcí je opět klesající funkce, takže i f_d je klesající.

Nyní vlastní řešení úlohy. Označme

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= \\ &= (x_4 + x_5)^{-\alpha} + (x_2 + x_3)^{-\alpha} + (x_1 + x_2)^{-\alpha} - \\ &\quad - (x_1 + x_3)^{-\alpha} - (x_2 + x_4)^{-\alpha} - (x_2 + x_5)^{-\alpha}; \end{aligned}$$

máme tedy dokázat, že platí $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) > 0$. Po-

ložme na chvíli $d = x_3 - x_2 > 0$. Potom

$$\begin{aligned}
 & F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) - F(x_2, x_2, x_3, x_4, x_5) = \\
 & = ((x_1 + x_2)^{-\alpha} - (x_1 + x_3)^{-\alpha}) - \\
 & \quad - ((x_2 + x_2)^{-\alpha} - (x_2 + x_3)^{-\alpha}) = \\
 & = ((x_1 + x_2)^{-\alpha} - (x_1 + x_2 + d)^{-\alpha}) - \\
 & \quad - ((x_2 + x_2)^{-\alpha} - (x_2 + x_2 + d)^{-\alpha}) = \\
 & = f_d(x_1 + x_2) - f_d(x_2 + x_2),
 \end{aligned}$$

což je ale podle pomocného tvrzení kladné číslo (jelikož $x_1 < x_2$); je tedy

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) > F(x_2, x_2, x_3, x_4, x_5).$$

Avšak

$$\begin{aligned}
 & F(x_2, x_2, x_3, x_4, x_5) = \\
 & = (x_4 + x_5)^{-\alpha} + (x_2 + x_2)^{-\alpha} - \\
 & \quad - (x_2 + x_4)^{-\alpha} - (x_2 + x_5)^{-\alpha} = \\
 & = ((x_2 + x_2)^{-\alpha} - (x_2 + x_5)^{-\alpha}) - \\
 & \quad - ((x_4 + x_2)^{-\alpha} - (x_4 + x_5)^{-\alpha}) = \\
 & = f_h(x_2 + x_2) - f_h(x_4 + x_2),
 \end{aligned}$$

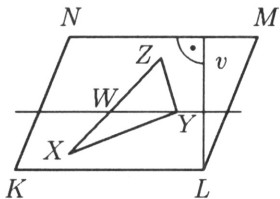
kde $h = x_5 - x_2 > 0$, takže podle pomocného tvrzení je $F(x_2, x_2, x_3, x_4, x_5) > 0$. Tím je důkaz hotov.

2.7 (M. Konečný). Na úvod poznamenejme, že tři body na úsečce považujeme za trojúhelník s nulovým obsahem — jinak by tvrzení úlohy neplatilo. Dokažme nejprve lemma.

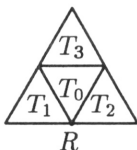
LEMMA. Leží-li v rovnoběžníku $KLMN$ trojúhelník XYZ , platí pro jejich obsahy nerovnost $S(XYZ) \leq \leq \frac{1}{2}S(KLMN)$.

DŮKAZ. Označme x, y, z vzdálenosti bodů X, Y, Z od přímky KL ; bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $x \leq y \leq z$ (obr. 44). Bodem Y vedme rovnoběžku s KL a označme W její průsečík s přímkou XZ . Potom

$$\begin{aligned} S(XYZ) &= S(XYW) + S(ZYW) = \\ &= \frac{1}{2} |WY|(y-x) + \frac{1}{2} |WY|(z-y) = \\ &= \frac{1}{2} |WY|(z-x) \leq \frac{1}{2} |KL|v = \frac{1}{2} S(KLMN). \end{aligned}$$



Obr. 44

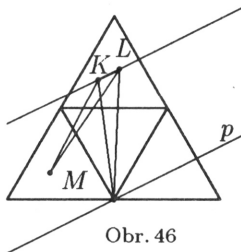


Obr. 45

Nyní k samotné úloze. Daný trojúhelník rozdělme středními příčkami na čtyři trojúhelníky — nazvěme je T_0, T_1, T_2, T_3 podle obr. 45. Pokud v T_0 leží některé tři z daných pěti bodů, určují trojúhelník s obsahem nejvýše $S(T_0) = \frac{1}{4}$ a jsme hotovi. Leží-li v T_0 právě dva z daných bodů, leží např. v T_1 jeden ze zbývajících tří; díky tomu v rovnoběžníku $T_0 \cup T_1$ leží tři z daných bodů a dle lematu trojúhelník jimi určený má obsah nejvýše $\frac{1}{2} S(T_0 \cup T_1) = \frac{1}{4}$. Pokud v T_0 je právě jeden daný bod, musí podle

Dirichletova principu v některém T_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, ležet aspoň dva ze čtyř zbývajících — nechť je to v T_1 ; pak opět v rovnoběžníku $T_0 \cup T_1$ leží tři z daných bodů a trojúhelník jimi určený má opět obsah nejvýše $\frac{1}{4}$.

Zbývá případ, kdy v T_0 není žádný z daných bodů. Leží-li pak v některém z trojúhelníků T_1, T_2, T_3 aspoň tři dané body, určují opět trojúhelník o obsahu nejvýše $S(T_i) = \frac{1}{4}$ a jsme hotovi.



Obr. 46

Stačí tedy už jen vyšetřit případ, kdy v T_0 není žádný bod a ve zbylých třech trojúhelnících T_i jsou po řadě 2, 2 a 1 z daných bodů. Nechť např. v T_3 jsou dva — nazvěme je K, L (obr. 46). Vedme bodem R rovnoběžku p s přímkou KL ; ta zřejmě může rozetínat nejvýše jeden z trojúhelníků T_1, T_2 — nechť např. nerozetíná T_1 . V T_1 leží aspoň jeden z daných bodů — označme ho M . Potom ale M leží v pásu mezi rovnoběžkami p a KL , a jeho vzdálenost od KL je tedy nejvýše rovna vzdálenosti bodu R od přímky KL . Proto

$$S(KLM) \leq S(KLR).$$

Ale podle lemmatu $S(KLR) \leq \frac{1}{2}S(T_3 \cup T_0) = \frac{1}{4}$. Tím je důkaz hotov.

3.1 Součet n za sebou jdoucích čísel začínajících p je

$$\begin{aligned} p + (p+1) + \dots + (p+n-1) &= np + \frac{n(n-1)}{2} = \\ &= \frac{n(n+2p-1)}{2}, \end{aligned} \quad (1)$$

takže součet 1 990 za sebou jdoucích čísel je

$$995(1\,989 + 2p). \quad (2)$$

Hledané číslo C je proto tohoto tvaru.

Podle (1) pro každou dvojici A, B , $A < B$, dělitelů čísla $2C = AB$ (vyjma dvojice 1, $2C$) existuje rozklad na příslušný počet sčítanců, kterých je A anebo $\frac{1}{2}A$ podle parity A (a obráceně). Proto $2C$ musí mít $2(1\,990+1)$ dělitelů (z (2) víme, že C je liché).

Je-li $D = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_n^{i_n}$ rozklad čísla D na prvočinitele, je počet jeho dělitelů $(i_1+1)(i_2+2)\dots(i_n+1)$. Protože $2 \cdot 1\,991 = 2 \cdot 11 \cdot 181$, má číslo $2C$ tři prvočinitele a ty musí mít exponenty 1, 10, 180.

Z (2) vidíme, že C je liché a má dělitele 5 a 199, protože $995 = 5 \cdot 199$. Proto exponent u 2 v čísle $2C$ je 1 a pro C zůstávají možnosti $C_1 = 5^{10} \cdot 199^{180}$ a $C_2 = 5^{180} \cdot 199^{10}$.

3.2 Nejprve dokážeme lemma.

LEMMA. Jestliže v trojúhelníku ABC platí $\alpha > \beta$, pak bod H_C leží na polopřímce V_CA a bod T_C na polopřímce V_CB .

DŮKAZ. Jestliže $\alpha < 90^\circ$, pak

$$|\sphericalangle H_C C A| = 90^\circ - \alpha < 90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\gamma}{2} = |\sphericalangle V_C C A|.$$

Tedy H_C leží na polopřímce $V_C A$ (pro $\alpha \geq 90^\circ$ je to zřejmé). Označme A' bod souměrný s vrcholem A podle přímky CV_C . Bod A' leží uvnitř úsečky BC . Trojúhelníky $AV_C C$ a $A'V_C C$ mají stejný obsah, který je menší než obsah trojúhelníku $V_C B C$. Je tedy $|AV_C| < |V_C B|$ a odtud plyne, že T_C leží na polopřímce $V_C B$.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že platí $\alpha > \beta > \gamma$. Nechť trojúhelník ABC je ostroúhlý, tedy $\alpha < 90^\circ$ (obr. 47). Z lemmatu plyne, že bod H (stejně jako H_C) leží v polorovině $CV_C A$ a bod H (stejně jako H_A) leží v polorovině $AV_A B$. Bod H tedy leží uvnitř trojúhelníku AVV_C . Podobně z lemmatu plyne, že bod T leží v trojúhelníku $VV_A C$. Úhel TVH je tedy větší než úhel CVA . A protože

$$|\sphericalangle CVA| = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\beta}{2},$$

je úhel TVH tupý.

Nyní předpokládejme, že trojúhelník ABC je tupoúhlý nebo pravoúhlý, tedy $\alpha \geq 90^\circ$. Označme S průsečík úsečky CT_C s úsečkou AH_A . Z lemmatu vyplývá, že bod V leží v trojúhelníku TSA (obr. 48). Platí tedy

$$|\sphericalangle TVH| > |\sphericalangle TSH| = |\sphericalangle CSA| > |\sphericalangle CH_A A| = 90^\circ.$$

Opět jsme dokázali, že úhel TVH je tupý.

být „druhá mocnina součtu číslic“. Tím se středně obtížná úloha změnila v problém, jehož korektní matematické řešení nikdo nenalezl.

Většina řešitelů si pomohla programem na počítači, což jaksí do matematického semináře nepatří (bílou vránou byl A. Kuběna, který vše spočítal ručně). Těm, kteří použitím výpočetní techniky opovrhují, prozrazujeme, že $f_{1\ 991}(2^{1\ 990}) = 16$.

3.4 (Z. Pezlar). Jestliže tři body roviny X, Y, Z neleží v přímce, pak každý bod T roviny lze psát ve tvaru

$$T = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z, \quad \sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1,$$

a podobně každý bod T přímky XY lze vyjádřit jako

$$T = \alpha_1 X + \alpha_2 Y, \quad \sum_{i=1}^2 \alpha_i = 1.$$

Nyní k vlastnímu řešení. Označme průsečík přímky CV se stranou AB jako X . Je známo (a lze to dokázat pomocí podobnosti trojúhelníků anebo jednoduchým použitím sinové věty), že

$$\frac{|AX|}{|BX|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{b}{a}$$

(viz např. H. J. Bartsch, Matematické vzorce, SNTL, Praha, 1983, s. 311).

Protože

$$V = \beta C + (1 - \beta)X \quad \text{a} \quad (a + b)X = aA + bB,$$

je

$$V = \alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C, \quad \text{tj.} \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a}{b}.$$

Podobně dostaneme, že

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \frac{b}{c},$$

tedy

$$(a + b + c)V = aA + bB + cC.$$

Zvolme pro zjednodušení počátek soustavy souřadné v bodě A , tedy

$$(a + b + c)V = bB + cC.$$

Zřejmě $B_1 = \frac{1}{2}C$, $C_1 = \frac{1}{2}B$, a pro jistá k a l je $B_2 = kC$, $C_2 = lB$, tj. $|AB_2| = kb$, $|AC_2| = lc$. Protože $B_2 \in C_1V$, je

$$B_2 = \kappa V + (1 - \kappa)C_1$$

a podobně

$$C_2 = \lambda V + (1 - \lambda)B_1.$$

Po dosazení vyjde

$$\begin{aligned} kC &= \frac{\kappa}{a + b + c}(bB + cC) + \frac{1 - \kappa}{2}B, \\ lB &= \frac{\lambda}{a + b + c}(bB + cC) + \frac{1 - \lambda}{2}C, \end{aligned}$$

odkud porovnáním koeficientů dostaneme

$$\kappa = \frac{a + b + c}{a - b + c}, \quad \lambda = \frac{a + b + c}{a + b - c}$$

a

$$k = \frac{c}{a - b + c}, \quad l = \frac{b}{a + b - c}.$$

Pro zmíněné obsahy platí

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \sin \alpha, \quad S_{AB_2C_2} = \frac{1}{2} bkl \sin \alpha.$$

Oba obsahy se zřejmě rovnají, právě když $kl = 1$, neboli

$$\begin{aligned} \frac{c}{a - b + c} &= \frac{a + b - c}{b}, \\ bc &= a^2 - (b - c)^2, \\ b^2 + c^2 - bc &= a^2. \end{aligned}$$

Ale podle kosinové věty

$$b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = a^2,$$

takže $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ a $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Z postupu je zřejmé, že $S_{ABC} = S_{AB_2C_2}$ právě tehdy, jestliže $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

3.5 Nejprve ukážeme, že počet trojúhelníků se dvěma dobrými stranami je vždy sudý. Sestrojme graf, jehož uzly odpovídají trojúhelníkům rozkladu, přičemž dva uzly spojíme hranou, právě když příslušné trojúhelníky sdílejí špatnou stranu. Podle předpokladu b) je stupeň uzlu roven počtu špatných stran příslušného trojúhelníku, takže všechny uzly mají stupeň 1 nebo 2. Výsledný graf je disjunktní sjednocení kružnic a cest, přičemž každá cesta má dva uzly stupně 1, odpovídající dvěma trojúhelníkům se dvěma dobrými stranami (podle A. Kuběny).

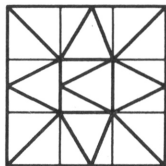
Nyní ukážeme, že výše uvedený graf obsahuje alespoň jednu cestu (elegantní důkaz je vypůjčen od J. Menšíka).

Předpokládejme *naopak*, že každý trojúhelník obsahuje právě jednu dobrou stranu. V takovém případě můžeme sestrojit lomenou čáru L , která spojuje středy „špatných“ stran, a skládá se tedy ze středních příček trojúhelníků rovnoběžných s jejich dobrými stranami. Pro čáru L platí následující tvrzení (dokažte si je sami):

- (1) Každá úsečka čáry L náleží přímce $x = j + \frac{1}{2}$ nebo $y = k + \frac{1}{2}$ pro nějaké celé j , $0 \leq j \leq m - 1$, či celé k , $0 \leq k \leq n - 1$.
- (2) Čára L se skládá z neprotínajících se cyklů, které odpovídají cyklům v grafu z první části řešení.
- (3) Uvnitř každého čtverce 1×1 má L délku 1 a nabývá jednoho z těchto šesti tvarů $\square \square \square \square \square \square$.
- (4) Celková délka čáry je mn , tedy lichá.
- (5) Délka každého cyklu čáry L je sudá. [K důkazu použijte např. šachovnicové obarvení čtverců, každý uzavřený cyklus prochází stejným počtem bílých a černých čtverců.]

Tvrzení úlohy plyne z (4) a (5).

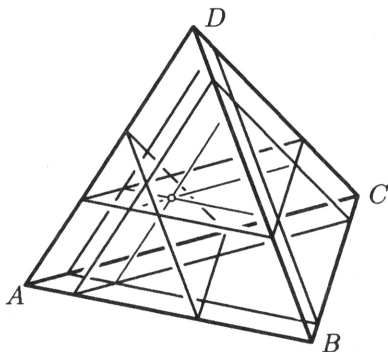
Na závěr si ukažme protipříklad při výkladu pojmu „dobrá strana“ = strana ležící na přímce $x = j$, resp. $y = k$ a navíc taková, že příslušná výška je 1 — v takovém případě je ovšem pojem špatné strany závislý na konkrétním trojúhelníku. (Každá špatná strana náleží dvěma trojúhelníkům, ale v druhém trojúhelníku nemusí být nutně špatná.)



3.6 Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že hrana daného čtyřstěnu $ABCD$ má délku 1; jeho tělesová výška je pak $h = \sqrt{\frac{2}{3}}$ a objem $V = \frac{1}{12}\sqrt{2}$. Označme ah , bh , ch , dh vzdálenosti bodu P od stěn čtyřstěnu $ABCD$ (ah je vzdálenost od stěny naproti vrcholu A atd.). Jak známo, platí $a + b + c + d = 1$, což plyne z toho, že objem čtyřstěnu $ABCD$ je součtem objemů čtyřstěnů $PBCD$, $PACD$, $PABD$, $PABC$, neboli

$$\frac{1}{6} hS = \frac{1}{6} ahS + \frac{1}{6} bhS + \frac{1}{6} chS + \frac{1}{6} dhS,$$

kde S je plocha (kterékoli) stěny daného čtyřstěnu.



Obr. 49

Čtrnáct částí, na něž je rozložen $ABCD$ (obr. 49), lze rozdělit do tří skupin. Za *prvé* jsou mezi nimi čtyři pravidelné čtyřstěny se společným vrcholem P a podstavami ležícími po řadě ve stěnách BCD , ACD , ABD , ABC . Jejich tělesové

výšky jsou po řadě ah, bh, ch, dh ; délky jejich hran jsou tedy po řadě a, b, c, d a součet jejich objemů je roven

$$V(a^3 + b^3 + c^3 + d^3).$$

Za druhé jsou mezi nimi čtyři rovnoběžnostěny — každý z nich má jeden vrchol v některém z bodů A, B, C, D , zatímco protějším vrcholem je P . Všimněme si např. rovnoběžnostěnu s vrcholem v A . Jeho stěny jsou rovnoběžníky, které mají u vrcholu A a P úhel 60° , druhé dva úhly 120° . Svě tři hrany, vycházející z vrcholu P , má tento rovnoběžnostěn společné se třemi ze čtyř pravidelných čtyřstěnů z předešlé skupiny (nakreslete si obrázek!); délky těchto hran jsou tedy b, c, d . Odtud snadno nahlédneme, že objem tohoto rovnoběžnostěnu je

$$\frac{\sqrt{3}}{2} bc \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} d = \frac{\sqrt{2}}{2} bcd = 6V \cdot bcd.$$

Podobnou úvahu lze provést i pro ostatní tři rovnoběžnostěny. Do *třetí skupiny* patří zbývajících 8 částí, které nás zajímají. Součet jejich objemů musí být tedy roven

$$v(P) = V - V(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - 6V(bcd + acd + abd + abc).$$

Tento vzorec upravíme (dvojím) použitím vztahu $a + b + c + d = 1$,

$$\begin{aligned} v(P) &= V((a + b + c + d)^3 - (a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - \\ &\quad - 6(bcd + acd + abd + abc)) = \\ &= V(3(a^2(b + c + d) + b^2(a + c + d) + \\ &\quad + c^2(a + b + d) + d^2(a + b + c)) = \\ &= 3V(a^2(1 - a) + b^2(1 - b) + \\ &\quad + c^2(1 - c) + d^2(1 - d)). \end{aligned} \tag{1}$$

Protože $a^2(1-a) = -a(a^2 - a + \frac{1}{4}) + \frac{1}{4}a = -a(a - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}a$ a podobné vztahy platí i pro b, c, d , lze poslední výraz dále upravit na

$$v(P) = 3V \left(-a \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 - b \left(b - \frac{1}{2} \right)^2 - c \left(c - \frac{1}{2} \right)^2 - d \left(d - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \right). \quad (2)$$

Odtud je ihned vidět, že $v(P) \leq \frac{3}{4}V$. Protože P leží *uvnitř* čtyřstěnu $ABCD$, jsou a, b, c, d kladná čísla, takže rovnost by mohla nastat pouze pro $a = b = c = d = \frac{1}{2}$; to však není možné ($a + b + c + d = 1$). Nerovnost tedy platí dokonce ostře. Zároveň zřejmě $v(P) > 0$, takže celkem

$$0 < v(P) < \frac{3}{4}V$$

pro všechny vnitřní body P čtyřstěnu $ABCD$.

Ukážeme, že všechny hodnoty v tomto intervalu se nabývají. Blíží-li se bod P vrcholu A , je $a \rightarrow 1, b, c, d \rightarrow 0$ a podle (2) tedy $v(P) \rightarrow 0$. Blíží-li se P ke středu T hrany CD , je $a, b \rightarrow 0, c, d \rightarrow \frac{1}{2}$, a tak podle (2) $v(P) \rightarrow \frac{3}{4}V$. Probíhá-li bod P všechny vnitřní body úsečky AT , proběhne $v(P)$ celý interval $(0, \frac{3}{4}V)$. Hledaným oborem hodnot funkce $v(P)$ je tedy interval $(0, \frac{3}{4}V)$.

Jiné řešení (V. Glasnák). Funkce $f(x) = x(1-x)$ je konkávní na $\mathbf{R}$; podle Jensenovy nerovnosti proto platí

$$\sum_{i=1}^4 m_i f(x_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^4 m_i x_i\right),$$

pokud m_i , $i = 1, 2, 3, 4$, jsou nezáporná čísla se součtem 1. Pro $m_1 = x_1 = a$, $m_2 = x_2 = b$, atd. dostáváme

$$\begin{aligned} a^2(1-a) + b^2(1-b) + c^2(1-c) + d^2(1-d) &\leq \\ &\leq f(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \leq \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

protože $f(x) = x(1-x) = \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$ pro libovolné $x \in \mathbf{R}$. Dosazením do (1) dostáváme

$$v(P) \leq \frac{3}{4}$$

a další postup je již stejný.

3.7 Označme n celé nezáporné číslo, pro které platí

$$10^n \leq k^4 < 10^{n+1},$$

a označme M množinu všech celých nezáporných čísel, jejichž zápis v desítkové soustavě má nejvýše n cifer a obsahuje pouze číslice 0 a 1. Počet prvků množiny M je 2^n .

Je-li $2^n \leq k$, platí $2^{4n} \leq k^4 < 10^{n+1}$, tedy $16^n < 10^{n+1}$, odkud postupně plyne $1, 6^n < 10$, $n \leq 4$, $k^4 < 10^5$, $k < 18$, a násobek $1 \cdot k$ lze zapsat dokonce pomocí nejvýše dvou cifer.

Je-li $2^n > k$, existují podle Dirichletova principu čísla x , $y \in M$, $x > y$, která dávají stejný zbytek při dělení číslem k . Číslo $x - y$ je tedy kladné, dělitelné k a menší než $10^k \leq k^4$. Avšak z obvyklého algoritmu pro odčítání plyne, že dekadický zápis tohoto čísla může obsahovat pouze cifry 0, 1, 8, 9: rozdíly při odčítání dvou cifer budou buď $1-0$, $1-1$, $0-0$, $10-1$ (bez „přenosu“), anebo $1-1$, $10-1$, $11-2$,

10–2 (při přenosu jednotky z předešlého sloupce). Uvedený rozdíl $x - y$ tedy splňuje všechny podmínky ze zadání, čímž je důkaz hotov.

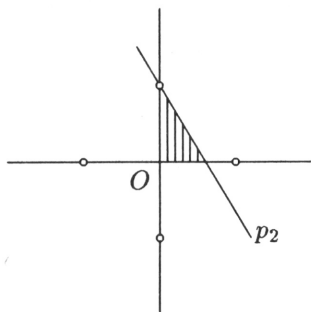
4.1 (podle M. Volaufa). Použijeme důležité LEMMA: *Je-li K konvexní množina a P bod, který do ní nepatří, pak existuje přímka procházející bodem P taková, že K leží v jedné polorovině určené přímkou p .*

Je-li K konvexní mnohoúhelník, je důkaz této vlastnosti zřejmý: Zvolíme libovolný bod Q uvnitř K a sestrojíme průsečík T úsečky PQ s hranicí K (ten musí být jediný). Za hledanou přímku můžeme pak volit prodloužení té strany K , které náleží bod T (je-li T vrcholem K , můžeme si libovolně vybrat ze dvou možných stran).

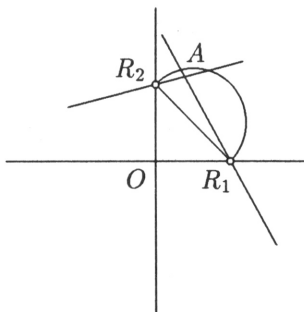
Užitím uvedeného lemmatu pro body $R_1 = [1, 0]$, $R_2 = [0, 1]$, $R_3 = [-1, 0]$, $R_4 = [0, -1]$ dostaneme po řadě čtyři přímky p_1, p_2, p_3, p_4 , které ohraničují konvexní útvar obsahující K ve svém vnitřku.

Předpokládejme, že některá z přímek p_i protíná jednu z os *uvnitř* intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ (obr. 50). Pak jedna z částí $K \cap Q_j$ je obsažena v trojúhelníku o obsahu nejvýše $\frac{1}{2}$, tedy $S(K) \leq 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 < 4$.

Není-li tomu tak, omezují přímky p_1, p_2, p_3, p_4 konvexní čtyřúhelník, který má v každém kvadrantu jeden vrchol. Součet vnitřních úhlů je 360° , existuje tedy alespoň jeden úhel o velikosti nejméně 90° . Pokud příslušný vrchol A leží např. v Q_1 (obr. 51), pak leží uvnitř Thaletovy kružnice nad průměrem R_1R_2 , anebo na ní. Obsah trojúhelníku R_1AR_2 je největší, je-li $A = [1, 1]$. Celý čtyřúhelník OR_1AR_2 pak má obsah 1. Je tedy $S(K \cap Q_1) \leq 1$, přitom je ovšem jasné,



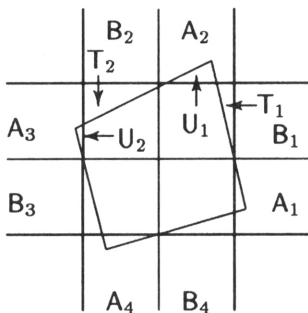
Obr. 50



Obr. 51

že nemůže být $S(Q_i) = 1$ pro všechna $i = 1, 2, 3, 4$. Proto $S(K) < 4$.

Jiný postup: Pro čtyřúhelník $ABCD$ omezený přímkami p_i dokážeme (obr. 52):



Obr. 52

Bod A leží buď v oblasti B_1 , nebo A_2 . Je-li např. v A_2 , pak $B \in A_3, C \in A_4, D \in A_1$. Obsah čtyřúhelníku $ABCD$ vznikne z obsahu čtverce $R_1R_2R_3R_4$ odečtením obsahů trojúhel-

níků T_1, T_2, T_3, T_4 a přičtením obsahů U_1, U_2, U_3, U_4 . Ukáže se, že pro jejich obsahy platí $S(U_i) < S(T_{i+1})$ ($T_5 = T_1$), a proto obsah $ABCD$ je menší než obsah $R_1 R_2 R_3 R_4$, tj. je menší než 4.

4.2 (a) Předpokládejme, že některé dva z bodů A_1, B_1, C_1, D_1 splynou — nechť např. $A_1 = B_1$. Pak ovšem bod A leží na kružnici opsané trojúhelníku BCD , tj. body A, B, C, D leží na jedné kružnici, a proto $A_1 = B_1 = C_1 = D_1$. Podobně lze postupovat i v případě, že splynou některé jiné dva z bodů A_1, B_1, C_1, D_1 . Tím je dokázána první část tvrzení. Nadále budeme předpokládat, že body A_1, B_1, C_1, D_1 jsou navzájem různé.

Dokažme nyní, že body A_1, C_1 leží v opačných polorovinách určených přímkou $B_1 D_1$. Rozlišíme dva případy:

1. $|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle BCD| < \pi$. Protože čtyřúhelník $ABCD$ je konvexní, takže body A a C leží v opačných polorovinách určených přímkou BD , plyne odtud, že bod C leží *vně* kružnice opsané trojúhelníku ABD , takže $|C_1 C| > |C_1 A|$. Podobně A leží *vně* kružnice opsané trojúhelníku BCD , takže $|A_1 C| < |A_1 A|$. Body A_1 a C_1 musí proto ležet v opačných polorovinách určených osou o_{AC} přímky AC .
2. $|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle BCD| > \pi$. Nyní bod C leží *uvnitř* kružnice opsané trojúhelníku ABD a A leží *uvnitř* kružnice opsané trojúhelníku BCD . Odtud plyne $|C_1 C| < |C_1 A|$ a $|A_1 C| > |A_1 A|$, takže body A_1, C_1 opět leží v opačných polorovinách určených osou o_{AC} .

(Pro $|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle BCD| = \pi$ je čtyřúhelník $ABCD$

tětivový a $A_1 = B_1 = C_1 = D_1$; tento případ jsme však vyloučili.)

Ze zadání plyne, že B_1 a D_1 leží na o_{AC} . Je tedy $o_{AC} = B_1D_1$ a důkaz je hotov. Podobně lze ukázat, že body B_1 a D_1 leží v opačných polorovinách určených přímkou A_1C_1 .

(b) Pokud body A_1, B_1, C_1, D_1 splynou, je tvrzení triviální; můžeme proto předpokládat, že jsou navzájem různé, a tvoří tedy — podle části (a) — konvexní čtyřúhelník. Z konstrukce plyne, že A_1B_1 je osa strany CD , proto $A_1B_1 \perp CD$. Ze stejného důvodu je $C_2D_2 \perp A_1B_1$, tedy $CD \parallel C_2D_2$. Podobně $AB \parallel A_2B_2$, $BC \parallel B_2C_2$, $DA \parallel D_2A_2$. Protože B_1D_1 je osa úhlopříčky AC a A_2C_2 je osa úhlopříčky B_1D_1 , je rovněž $AC \parallel A_2C_2$; stejně tak $BD \parallel B_2D_2$. Odtud již plyne, že čtyřúhelníky $ABCD$ a $A_2B_2C_2D_2$ jsou podobné. (Skutečně, označíme-li např. S, S_2 průsečíky úhlopříček čtyřúhelníků $ABCD$, resp. $A_2B_2C_2D_2$, pak z těchto rovnoběžností plyne

$$\triangle ABS \sim \triangle A_2B_2S_2, \triangle BCS \sim \triangle B_2C_2S_2,$$

$$\triangle CDS \sim \triangle C_2D_2S_2, \triangle DAS \sim \triangle D_2A_2S_2,$$

a tedy i $ABCD \sim A_2B_2C_2D_2$.)

4.3 Pro $a = 1$ platí rovnost. Pro $0 < a < 1$ využijeme Bernoulliho nerovnost

$$(1+x)^b \leq 1+bx, \quad (1)$$

která platí pro $x \geq -1, 0 < b < 1$.

Rozebereme dva případy. Nechť nejdříve $0 < s < 1$. Položme v (1) $x = s-1$ (platí tedy $x > -1$) a nechť $b = 1-a$

(takže $0 < b < 1$). Dostaneme tak nerovnost

$$s^b \leq 1 + b(s - 1)$$

a odtud máme

$$(1 + b)s^b \leq (1 + b)(1 + b(s - 1)) = 1 + bs + b^2(s - 1) < 1 + bs,$$

protože $s < 1$. Vynásobíme-li tuto nerovnost s^a , dostaneme (je $s^a s^b = s$)

$$s^a + bs^{1+a} > (1 + b)s, \quad (2)$$

znovu využijeme Bernoulliho nerovnost (1) pro $x = s$

$$(1 + s)^b \leq 1 + bs,$$

odkud podle (2) plyne

$$\begin{aligned} (1 + s)^{-b} - \frac{1 - s^a}{1 - s} &\geq \frac{1}{1 + bs} - \frac{1 - s^a}{1 - s} = \\ &= \frac{s^a + bs^{1+a} - (1 + b)s}{(1 + bs) \cdot (1 - s)} > 0. \end{aligned}$$

Z poslední nerovnosti po dosazení $1 - a$ za b dostáváme

$$(1 + s)^{-b} > \frac{1 - s^a}{1 - s}, \quad \text{čili} \quad \frac{(1 + s)^a}{1 + s} > \frac{1 - s^a}{1 - s},$$

což jsme chtěli dokázat.

Uvažujme teď $s > 1$. Zavedeme substituci $s = \frac{1}{t}$ (je $0 < t < 1$) a můžeme využít už dokázanou nerovnost z první části. Je tedy

$$\begin{aligned} \frac{1 - s^a}{1 - s} &= \frac{1 - t^{-a}}{1 - \frac{1}{t}} = t^{1-a} \cdot \frac{1 - t^a}{1 - t} < \\ &< t^{1-a} \cdot \frac{(1 + t)^a}{1 + t} = \frac{(1 + \frac{1}{t})^a}{1 + \frac{1}{t}} = \frac{(1 + s)^a}{1 + s}. \end{aligned}$$

Tím je důkaz úplný.

Uvedené řešení nevyužívá vůbec předpokladu, že a je racionální číslo (nerovnost samozřejmě platí pro libovolné reálné a , $0 < a \leq 1$).

Jiné řešení. Předpokládejme, že a je racionální číslo, tedy $a = \frac{k}{n}$, kde $0 < k \leq n$ jsou celá čísla, a položme $s = t^n$ pro $t > 0$. Máme dokázat nerovnost

$$\frac{1 - t^k}{1 - t^n} = \frac{1 + t + \dots + t^{k-1}}{1 + t + \dots + t^{n-1}} \leq (1 + t^n)^{\frac{k}{n} - 1},$$

což je ekvivalentní nerovnosti

$$(1 + t + \dots + t^{k-1})^n (1 + t^n)^{n-k} \leq (1 + t + \dots + t^{n-1})^n. \quad (3)$$

Tato nerovnost zřejmě platí pro $k = n$. Stačí tedy dokázat, že levá strana nerovnosti (3) je rostoucí funkcí k , neboli že pro $0 < k < n$ platí

$$1 + t^n \leq \left(\frac{1 + t + \dots + t^k}{1 + t + \dots + t^{k-1}} \right)^n \equiv A^n. \quad (4)$$

Protože $A > 1$, je ale

$$\begin{aligned} A^n - t^n &= (A - t)(A^{n-1} + A^{n-2}t + \dots + t^{n-1}) \geq \\ &\geq (A - t)(1 + t + \dots + t^{n-1}) = \\ &= \frac{1}{1 + t + \dots + t^{k-1}} \cdot (1 + t + \dots + t^{n-1}) > 1, \end{aligned}$$

což dává nerovnost (4).

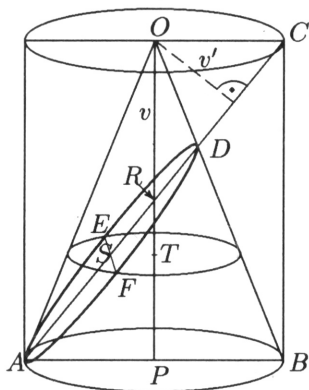
4.4 Průnik dané roviny ϱ s kuželem tvoří podle věty Quételetovy-Dandelinovy¹⁾ elipsu. Označme a , b délky jejích poloos, S její střed, $v = |PO|$ výšku daného kužele a $r = |PA|$ poloměr jeho podstavy (obr. 53). Objem kužele pak je

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v,$$

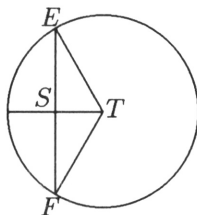
zatímco objem části, která obsahuje jeho vrchol O , bude

$$V' = \frac{1}{3}\pi abv',$$

kde v' je vzdálenost vrcholu O od roviny ϱ , tj. vzdálenost O od přímky AC .



Obr. 53



Obr. 54

¹⁾ Kolektiv: *Aplikovaná matematika*. Praha, SNTL 1977, str. 963.

Z podobnosti trojúhelníků $ABD \sim COD$ plyne

$$|AD| = 2|CD|,$$

takže

$$a = |AS| = \frac{1}{2} |AD| = \frac{1}{3} |AC|.$$

Označme π rovinu rovnoběžnou s podstavou kužele, jež obsahuje vedlejší osu elipsy EF . Protože $|AS| = \frac{1}{3}|AC|$, leží tato rovina ve třetině výšky kužele, a její průnik s pláštěm kužele je tedy tvořen kružnicí o poloměru $\frac{2}{3}r$ (obr. 54). Z podobnosti $\triangle RST \sim \triangle RAP$ plyne, že $|ST| = \frac{1}{3}r$. Odtud

$$b = \sqrt{\left(\frac{2}{3}r\right)^2 - \left(\frac{1}{3}r\right)^2} = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Zbývá vypočítat v' ; ze vzorce pro obsah trojúhelníku OAC však plyne

$$|OC| \cdot v = 2S(OAC) = |AC| \cdot v',$$

takže

$$v' = \frac{rv}{|AC|}.$$

Celkem tedy dostáváme

$$V' = \frac{1}{3}\pi abv' = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{1}{3}|AC| \cdot \frac{r}{\sqrt{3}} \cdot \frac{rv}{|AC|} = \frac{\pi r^2 v}{9\sqrt{3}},$$

a proto

$$\frac{V'}{V} = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Protože $\frac{1}{3\sqrt{3}} < \frac{1}{2}$, je V' objem menší části kužele, a hledaný poměr je tedy roven $\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

4.5 Připomeňme, že posloupnost uzlů $v_0, v_1, \dots, v_n$ se nazývá *eulerovský tah*, pokud $v_i v_{i+1}$ je hrana pro každé $i = 0, 1, \dots, n-1$ a pokud každá hrana grafu se v tahu vyskytne právě jednou (uzly se mohou na tahu opakovat). Tah je *uzavřený*, pokud $v_0 = v_n$. Známá Eulerova věta praví, že v souvislém grafu existuje uzavřený eulerovský tah, právě když všechny uzly mají sudý stupeň, a existuje neuzavřený tah, právě když právě dva uzly mají lichý stupeň. (Důkaz lze provést indukcí podle počtu hran nebo nalézt v každé základní učebnici teorie grafů.)

Uvědomme si, že pro správné vyřešení úlohy je třeba dokázat implikace

- (1) $(p = 2 \vee q = 2 \vee r = 2) \Leftrightarrow D$,
- (2) (alespoň 2 čísla sudá) $\Leftrightarrow D$,
- (3) (alespoň 2 čísla lichá a $p \neq 2, q \neq 2, r \neq 2 \wedge pqr \neq 1$) $\Leftrightarrow N$

a také

- (4) $(p = 2 \vee q = 2 \vee r = 2) \Leftrightarrow \neg N$,
- (5) (alespoň 2 čísla sudá) $\Leftrightarrow \neg N$,
- (6) (alespoň 2 čísla lichá a $p \neq 2, q \neq 2, r \neq 2$) $\Leftrightarrow \neg D$,

kde jsme pro stručnost jako D označili výrok „kvádr lze složit tak, že koncové krychličky se dotýkají“, a jako N výrok „kvádr lze složit tak, že koncové krychličky se nedotýkají“, a $\neg$ značí negaci.

Umístěme kvádr $p \times q \times r$ v souřadné soustavě tak, aby

vrcholy jednotkových krychlíček byly mřížové body a vrcholy kvádru měly souřadnice $(0, 0, 0), (p, 0, 0), \dots, (p, q, r)$.

Uvažme nyní čtyři grafy:

G_1 s uzly $\{(x, y, z): 0 \leq x \leq p, 0 \leq y \leq q, 0 \leq z \leq r, (x \equiv y \equiv z \equiv 0 \pmod{2}) \vee (x \equiv y \equiv z \equiv 1 \pmod{2})\}$,

G_2 s uzly $\{(x, y, z): 0 \leq x \leq p, 0 \leq y \leq q, 0 \leq z \leq r, (x \equiv 1 \pmod{2} \wedge y \equiv z \equiv 0 \pmod{2}) \vee (x \equiv 0 \pmod{2} \wedge y \equiv z \equiv 1 \pmod{2})\}$,

G_3 s uzly $\{(x, y, z): 0 \leq x \leq p, 0 \leq y \leq q, 0 \leq z \leq r, (x \equiv z \equiv 0 \pmod{2} \wedge y \equiv 1 \pmod{2}) \vee (x \equiv z \equiv 1 \pmod{2} \wedge y \equiv 0 \pmod{2})\}$,

G_4 s uzly $\{(x, y, z): 0 \leq x \leq p, 0 \leq y \leq q, 0 \leq z \leq r, (x \equiv y \equiv 0 \pmod{2} \wedge z \equiv 1 \pmod{2}) \vee (x \equiv y \equiv 1 \pmod{2} \wedge z \equiv 0 \pmod{2})\}$.

Pro každý graf G_i platí, že (x, y, z) a (x', y', z') jsou spojeny hranou, právě když zároveň $|x - x'| = 1, |y - y'| = 1$ a $|z - z'| = 1$.

FAKT 1. *Hrany grafů $G_i, i = 1, 2, 3, 4$, odpovídají tělesovým úhlopříčkám jednotkových krychlíček, a proto lze-li alespoň jeden z grafů G_i nakreslit jedním (uzavřeným) tahem, lze kvádr složit (tak, že se koncové krychličky dotýkají).*

FAKT 2. *Lze-li kvádr složit, pak nit provlečená krychličkami vytvoří eulerovský tah pro jeden z grafů G_i . Tento fakt je třeba dokázat, a to jednak, že všechny části nitě patří těmto G_i (indukcí dle nitě), jednak, že celý graf G_i je nakreslen (každá hrana G_i patří krychličce, a každá krychlička má jedinou tělesovou úhlopříčku, jež tvoří hranu G_i).*

FAKT 3. *Pro $i = 1, 2, 3, 4$ má každý uzel grafu G_i sudý stupeň, s výjimkou (případně) vrcholů kvádru. (Vnitřní*

vrcholy kvádru mají stupeň 8, vnitřní vrcholy stěn stupeň 4 a vrcholy ležící na hranách stupeň 2.)

FAKT 4. Graf G_i lze nakreslit jedním (resp. jedním uzavřeným) tahem, právě když nejvýše dva vrcholy kvádru jsou (resp. žádný jeho vrchol není) vrcholem G_i . (Uvědomte si, že každý G_i je souvislý a použijte Eulerovu větu.)

DŮKAZ IMPLIKACE (2). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $p \equiv q \equiv 0 \pmod{2}$. Potom žádný vrchol kvádru není vrcholem grafu G_2 , dle faktu 4 lze G_2 nakreslit uzavřeným tahem a dle faktu 1 platí D .

DŮKAZ IMPLIKACE (3). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $p \equiv q \equiv 1 \pmod{2}$. Potom graf G_1 má právě dva uzly kvádru, a to $[0, 0, 0]$, $[p, q, r]$, pokud r je liché, a $[0, 0, 0]$, $[0, 0, r]$, pokud r je sudé. Kvádr tedy složit lze, navíc první krychlička obsahuje vrchol $[0, 0, 0]$ a poslední buď vrchol $[p, q, r]$, nebo $[0, 0, r]$, takže se nedotýkají, neboť $pqr \neq 1$ a $p \neq 2$, $q \neq 2$, $r \neq 2$.

DŮKAZ IMPLIKACE (1). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $p = 2$; vzhledem k (2) stačí implikaci dokázat pro $q \equiv r \equiv 1 \pmod{2}$. Pak ale G_1 obsahuje pouze dva vrcholy kvádru, a to $[0, 0, 0]$, $[2, 0, 0]$, podle faktu 4 a faktu 1 kvádr složit lze, a navíc koncové krychličky se dotýkají stěnou s vrcholy $[1, 0, 0]$, $[1, 1, 0]$, $[1, 1, 1]$, $[1, 0, 1]$.

DŮKAZ IMPLIKACE (5). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $p \equiv q \equiv 0 \pmod{2}$. Pak G_2 a G_3 neobsahují žádný vrchol kvádru, takže je nelze nakreslit uzavřeným eulerovským tahem, a proto v každém složení kvádru podle G_2 či G_3 se koncové krychličky dotýkají.

Graf G_1 obsahuje naopak aspoň 4 vrcholy kvádru ($[0, 0, 0]$, $[p, 0, 0]$, $[0, q, 0]$, $[p, q, 0]$), takže není eulerovský.

Podobně G_4 není eulerovský pro r liché, zatímco pro r sudé má všechny stupně sudé, tudíž nejde nakreslit neuzavřeným tahem.

DŮKAZ IMPLIKACE (4). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $p = 2$, a vzhledem k (5) nechť $p \equiv r \equiv 1 \pmod{2}$. Pak každý z grafů G_i obsahuje dva vrcholy kvádrů, vždy vrcholy o vzdálenosti 2, které ve složeném kvádrů odpovídají dotýkajícím se koncovým krychličkám.

DŮKAZ IMPLIKACE (6). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $p \equiv q \equiv 1 \pmod{2}$. Potom každý z grafů G_i obsahuje právě dva vrcholy kvádrů (pro r liché jsou to protější vrcholy, pro r sudé vrcholy spojené hranou délky r) a ve složení kvádrů podle G_i se koncové krychličky nedotýkají.

Všimněte si zajímavé vlastnosti řešení. Pro každou trojici parametrů (p, q, r) platí buď D , nebo N , ale nikdy D i N současně. Na tom je založeno následující řešení:

Jiné řešení. Použijeme konstrukci grafů G_i , $i = 1, 2, 3, 4$, fakta 1–4 a navíc následující fakt.

FAKT 5. *Každý kvádr lze složit.*

DŮKAZ. Kvádr má 8 vrcholů, každý z nich náleží právě jednomu z grafů $G_1, \dots, G_4$. Proto aspoň jeden z těchto grafů obsahuje nejvýše dva vrcholy kvádrů, a tedy jej lze nakreslit jedním tahem. Podle tohoto tahu pak lze kvádr složit (netvrdíme nic o dotýkání koncových krychliček).

DŮKAZ IMPLIKACE (6). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $p \equiv 0 \pmod{2}$, a tedy i $p > 2$. Předpokládejme, že kvádr je složen tak, že koncové krychličky se dotýkají. Uvažme rovinu $\varrho = \{(x, y, z) : x = t\}$, $0 < t <$

$< p, t \notin \mathbb{Z}$, která neprotíná žádnou koncovou krychličku. Obě krychličky pak leží ve stejném poloprostoru určeném rovinou ϱ , takže nit má s ϱ sudý počet průsečíků. Vrstva, kterou prochází rovina ϱ , má však $qr \equiv 1 \pmod{2}$ krychliček a uvnitř každé z nich právě jeden průsečík nitě s ϱ . To je spor.

DŮKAZ IMPLIKACE (5). Jestliže lze kvádr složit tak, že koncové krychličky se nedotýkají, pak existuje vrstva, která tyto krychličky odděluje. Je-li ϱ rovina rovnoběžná s touto vrstvou, jež prochází jejím středem, má nit s ϱ lichý počet průsečíků, proto má tato vrstva lichý počet krychliček, takže alespoň dva rozměry kváдру jsou liché.

DŮKAZ IMPLIKACE (4). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $p = 2$, a vzhledem k (5) můžeme předpokládat, že $q \equiv r \equiv 1 \pmod{2}$. Předpokládejme, že kvádr lze složit tak, že koncové krychličky se nedotýkají. Opět existuje vrstva, která tyto krychličky odděluje (viz předchozí odstavec). Protože $p = 2$, je tato rovina rovnoběžná s hranou délky p , a tudíž obsahuje pq (resp. pr) $\equiv 0 \pmod{2}$ krychliček; to je spor.

DŮKAZ IMPLIKACÍ (1)–(3) nyní plyne přímo z (4)–(6) a faktu 5.

4.6 (A. Kuběna). Především existuje právě jedno takové $N \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ s požadovanou vlastností (kdyby existovala dvě $N_1 \neq N_2$, byl by součin $(1 + 2^p + 2^{n-p})(N_1 - N_2)$ dělitelný číslem 2^n , což nejde). Hledejme tedy zbytkovou třídu čísla N .

Zřejmě platí

$$(1 + 2^p + 2^{n-p})N \equiv (1 + 2^p)(1 + 2^{n-p})N \pmod{2^n}.$$

Víme ale, že $n = mp \geq 2p$, takže $2n - 2p \geq n$; je tedy

$$(1 + 2^{n-p})(1 - 2^{n-p}) = 1 - 2^{2n-2p} \equiv 1 \pmod{2^n}. \quad (1)$$

Zároveň ovšem platí

$$\begin{aligned} (2^p + 1)(1 - 2^p + 2^{2p} - \dots + (-1)^{m-1}2^{n-p}) &= 1 \pm 2^n \equiv \\ &\equiv 1 \pmod{2^n}. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že

$$N \equiv (1 - 2^{n-p})(1 - 2^p + 2^{2p} - \dots + (-1)^{m-1}2^{n-p}) \pmod{2^n}.$$

Jednoduchým výpočtem snadno zjistíme, že číslo

$$N = 1 - 2^p + 2^{2p} - \dots + (-1)^{m-1}2^{n-p} - 2^{n-p} + 2^n$$

splňuje požadavek $0 < N < 2^n$. Abychom dostali vyjádření čísla N v dvojkové soustavě, rozlišíme dva případy:

Je-li $m = \frac{n}{p}$ sudé, je

$$\begin{aligned} N &= 2^n - 2^{n-p} - 2^{n-p} + 2^{n-2p} - \\ &\quad - 2^{n-3p} + \dots + 2^{2p} - 2^p + 1) = \\ &= 2^{n-p}(2^p - 2) + 2^{n-3p}(2^p - 1) + \\ &\quad + \dots + 2^p(2^p - 1) + 1, \end{aligned}$$

takže N má v dvojkovém zápisu n číslic rozdělených do p -tic takto:

$$\underbrace{11 \dots 10}_p \quad \underbrace{00 \dots 0}_p \quad \underbrace{11 \dots 1}_p \quad \dots \quad \underbrace{11 \dots 1}_p \quad \underbrace{00 \dots 01}_p.$$

Je-li $m = \frac{n}{p}$ liché, vyjde

$$\begin{aligned} N &= 2^n - 2^{n-p} + 2^{n-p} - 2^{n-2p} + 2^{n-3p} - \\ &\quad - 2^{n-4p} + \dots + 2^{2p} - 2^p + 1 = \\ &= 2^{n-p}(2^p - 1) + 2^{n-2p}(2^p - 1) + \\ &\quad + 2^{n-4p}(2^p - 1) + \dots + 2^p(2^p - 1) + 1. \end{aligned}$$

Dvojkový zápis N je tedy opět složen z n číslic po p -ticích

$$\begin{array}{ccccccc} \underbrace{11 \dots 1}_p & \underbrace{11 \dots 1}_p & \underbrace{00 \dots 0}_p & \underbrace{11 \dots 1}_p & \dots & & \\ & \underbrace{00 \dots 0}_p & \underbrace{11 \dots 1}_p & \underbrace{00 \dots 01}_p & & & \end{array}$$

4.7 Protože p je kubický mnohočlen, platí $|p(x)/x| \rightarrow \infty$ pro $|x| \rightarrow \infty$, existuje tedy přirozené $M > |q_1|$ takové, že $|p(x)| \geq |x|$ pro všechna x taková, že $|x| \geq M$. To ale znamená, že pro žádné n nemůže být $q_n \geq M$, protože pak by bylo $|q_{n-1}| = |p(q_n)| \geq |q_n| \geq M$, a jak snadno ověříme matematickou indukcí, i $|q_1| \geq |q_2| \geq \dots \geq |q_n| \geq M$.

Předpokládejme nejprve, že $(q_k)_{k \geq 1}$ je posloupnost celých čísel. Podle předchozího výsledku to ale znamená, že taková posloupnost nabývá jen konečného počtu $N \leq 2M + 1$ hodnot. Pro každé $m \geq 1$ tedy najdeme k_m , $1 \leq k_m \leq N$, takové, že $q_m = q_{m+k_m}$. Protože i odpovídajících hodnot k_m je jen konečný počet, je jasné, že pro vhodné k platí rovnost $q_m = q_{m+k}$ pro nekonečný počet $m \geq 1$. Pro libovolné $n < m$ pak ovšem máme

$$\begin{aligned} q_n &= p(q_{n+1}) = \dots = p_{m-n}(q_m) = \\ &= p_{m-n}(q_{m+k}) = \dots = p(q_{n+k+1}) = q_{n+k}, \end{aligned}$$

kde $p_1(x) = p(x)$ a $p_{j+1}(x) = p(p_j(x))$ pro $j \geq 1$. Odtud hned plyne, že $q_{n+k} = q_n$ pro každé $n \geq 1$.

Za předpokladu, že q_k jsou celá čísla, je tvrzení úlohy dokázáno. Předpokládejme teď, že $q_k = \frac{r_k}{s_k}$ jsou racionální čísla (r_k a s_k jsou nesoudělná celá čísla) a že kubický mnohočlen p má tvar

$$p(x) = \frac{1}{e} (ax^3 + bx^2 + cx + d), \quad (1)$$

kde a, b, c, d a $e > 0$ jsou celá čísla. Uvažujme prvočíslo q , které dělí jmenovatel s_k některého členu posloupnosti (q_k) . Ukážeme, že mocniny daného prvočísla q , v nichž dělí jednotlivé jmenovatele, jsou shora ohraničeny, tj. že pro každé takové q existuje μ takové, pro něž $q^{\mu+1}$ nedělí žádný ze jmenovatelů s_k .

Předpokládejme naopak, že tomu tak není. Je-li tedy $a = Aq^\alpha$, $b = Bq^\beta$, $c = Cq^\gamma$, $d = Dq^\delta$, $e = Eq^\epsilon$ a $s_i = m_i q^{\mu_i}$, kde A, B, C, D, E a m_i jsou celá čísla s q nesoudělná, a k libovolné takové, že $\mu_k > \mu_1$. Potom můžeme psát

$$\begin{aligned} q_{k-1} &= p(q_k) = p\left(\frac{r_k}{s_k}\right) = \\ &= \frac{1}{e} \left(Aq^\alpha \frac{r_k^3}{q^{3\mu_k} m_k^3} + Bq^\beta \frac{r_k^2}{q^{2\mu_k} m_k^2} + \right. \\ &\quad \left. + Cq^\gamma \frac{r_k}{q^{\mu_k} m_k} + Dq^\delta \right) = \\ &= \frac{1}{Em_k^3 q^{3\mu_k - \alpha + \epsilon}} \left(Ar_k^3 + Bm_k r_k^2 q^{\mu_k + \beta - \alpha} + \right. \\ &\quad \left. + Cm_k^2 r_k q^{2\mu_k + \gamma - \alpha} + Dm_k^3 q^{3\mu_k + \delta - \alpha} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Nyní stačí vybrat k tak, aby čísel r_{k-1} byl s q nesoudělný a aby bylo $\mu_{k-1} > \mu_k$; tomu snadno vyhovíme (za předpokladu, že μ_k nejsou shora ohraničeny) volbou μ_k , pro něž

$$\mu_k > \mu_1, \quad 2\mu_k > \alpha, \quad \mu_k > \alpha - \beta, \quad 2\mu_k > \alpha - \gamma, \quad 3\mu_k > \alpha - \delta.$$

Je jasné, že takto postupně dostaneme $\mu_k < \mu_{k-1} < \dots < \mu_1$, což odporuje volbě μ_k .

Je-li tedy teď q_i ten prvek posloupnosti (q_k) , jehož jmenovatel obsahuje dané prvočíslo q v nejvyšší mocnině $\mu > 0$, je buď $i = 1$, anebo vyjde ze vztahu (2), že $3\mu - \alpha + \varepsilon \leq \mu$, tj. $\alpha \geq 2\mu + \varepsilon > 0$. Vidíme, že každé takové prvočíslo q dělí buď q_1 , anebo koeficient a mnohočlenu p . Prvočísel q , jež dělí jmenovatele jednotlivých členů posloupnosti (q_k) , je tudíž jen konečný počet a jejich mocniny jsou ohraničeny jedním číslem. Odtud plyne, že existuje společný jmenovatel Q všech q_k , a pro každé $k \geq 1$ můžeme psát $q_k = \frac{Q_k}{Q}$.

Pro libovolné $k \geq 1$ je tedy

$$\begin{aligned} \frac{Q_{k-1}}{Q} &= q_{k-1} = p(q_k) = p\left(\frac{Q_k}{Q}\right) = \\ &= \frac{1}{e} \left(a \frac{Q_k^3}{Q^3} + b \frac{Q_k^2}{Q^2} + c \frac{Q_k}{Q} + d \right) = \\ &= \frac{1}{Q} P(Q_k) \end{aligned}$$

pro kubický mnohočlen

$$P(x) = \frac{1}{Q^2 e} (ax^3 + (bQ)x^2 + (cQ^2)x + dQ^3).$$

Tento kubický mnohočlen splňuje rovněž předpoklady úlohy s posloupností (Q_k) celých čísel, která je podle předchozího výsledku periodická. Je tedy i posloupnost (q_k) periodická a důkaz je hotov.

Uvedeme ještě stručně řešení, které celý uvedený postup skrývá v šikovném použití věty o racionálních kořenech mnohočlenu (zde doporučujeme ke studiu výbornou knížku I. Korce *Úlohy o velkých číslech*, ŠMM č. 61).

Jiné řešení (stručně). Z předchozího řešení už víme, že členy posloupnosti (q_k) leží v ohraničeném intervalu. Předpokládejme, že mnohočlen p má tvar (1) a $q_1 = \frac{r}{s}$, kde r, s jsou nesoudělná celá čísla. Ukážeme, že pro $N = sa$ je Nq_k celé číslo pro každé $k \geq 1$.

To je jasné pro $k = 1$. Předpokládejme, že Nq_k je pro nějaké $k \geq 1$ celé, a protože $q_k = p(q_{k+1})$, je Nq_{k+1} kořenem mnohočlenu

$$\begin{aligned} \frac{e}{a} N^3 \left(p \left(\frac{x}{N} \right) - q_k \right) &= x^3 + (sb)x^2 + (s^2ac)x + \\ &+ ((s^3a^2d) - (s^2ae)(Nq_k)) \end{aligned}$$

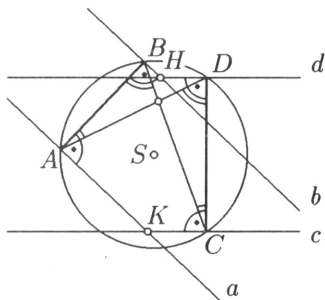
s celočíselnými koeficienty. Podle zmíněné věty má tento mnohočlen jedině celočíselné racionální kořeny (to plyne z toho, že jmenovatel každého racionálního kořenu musí dělit koeficient u nejvyšší mocniny neznámé), takže Nq_{k+1} je celé číslo. Podle principu matematické indukce je Nq_k celé pro každé $k \geq 1$.

Protože mezi čísly v absolutní hodnotě menšími než M je pouze $2M|N| - 1$ celočíselných násobků $\frac{1}{N}$, je zřejmé,

že posloupnost (q_k) má pouze konečný počet hodnot. Dále postupujeme jako v předchozím řešení.

5.1 Označme a, b kolmice k přímce AB vztyčené v bodech A, B a c, d kolmice k přímce CD vztyčené v bodech C, D (obr. 55). Zřejmě $K = a \cap c$, $H = b \cap d$.

Nechť S je střed dané kružnice. Protože úsečka AB je tětivou této kružnice, mají přímky a a b od S stejnou vzdálenost; jinými slovy, označíme-li κ středovou symetrii podle bodu S , platí $\kappa(a) = b$. Podobně $\kappa(c) = d$. Odtud plyne $\kappa(a \cap c) = b \cap d$, neboli $\kappa(K) = H$, takže body K, S a H leží na jedné přímce. Tím je dokázáno první tvrzení.



Obr. 55

Označme P průsečík přímek AD a BC (pokud existuje). Bod P může ležet uvnitř, vně i na dané kružnici. Leží-li na ní, je $P = B = D = H$ a tvrzení triviálně platí. Ve zbývajících dvou případech vždy $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle CPD|$ a navíc, podle věty o obvodových úhlech, $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle CDP|$ a $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle DCP|$. Odtud plyne, že trojúhelníky ABP

a CDP jsou podobné. Musí tedy platit

$$\frac{\text{vzdálenost } P \text{ od } a}{\text{vzdálenost } P \text{ od } b} = \frac{\text{vzdálenost } P \text{ od } c}{\text{vzdálenost } P \text{ od } d}.$$

Existuje tudíž stejnolehlost κ' se středem v P taková, že

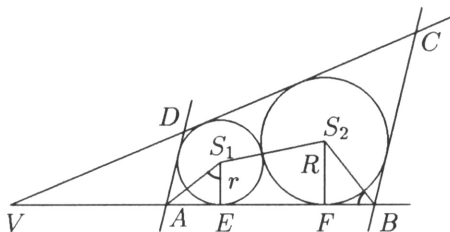
$$\kappa'(a) = b \quad \text{a} \quad \kappa'(c) = d.$$

Pak ale opět

$$\kappa'(K) = \kappa'(a \cap c) = b \cap d = H,$$

takže body K , H a P leží na jedné přímce.

5.2 Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $R \geq r$. Nechť $ABCD$ je nějaký lichoběžník splňující podmínky úlohy. Vrcholy označme tak, aby BC byla základna a $|BC| \geq |AD|$. Přímky, na nichž leží ramena AB a CD , jsou zřejmě společné tečny k daným kružnicím, jež neprocházejí body dotyku (obr. 56). Podle Pythagorovy věty platí



Obr. 56

$$|EF|^2 = |S_1 S_2|^2 - (R - r)^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2 = 4Rr,$$

takže $|EF| = 2\sqrt{Rr}$. Protože

$$\begin{aligned} |\sphericalangle FBS_2| &= \frac{1}{2} |\sphericalangle FBC| = \frac{1}{2} (\pi - |\sphericalangle EAD|) = \\ &= \frac{\pi}{2} - |\sphericalangle EAS_1| = |\sphericalangle ES_1A|, \end{aligned}$$

plyne z podobnosti příslušných pravoúhlých trojúhelníků rovnost

$$\frac{|FB|}{R} = \frac{r}{|AE|}.$$

Zavedeme-li označení $|AE| = a$, bude délka ramene AB rovna

$$\begin{aligned} |AB| &= |AE| + |EF| + |FB| = \\ &= a + 2\sqrt{Rr} + \frac{Rr}{a} = \\ &= \left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{a}} \right)^2 + 4\sqrt{Rr} \geq 4\sqrt{Rr}, \end{aligned} \quad (1)$$

přičemž rovnost může nastat jen pro $a = \sqrt{Rr}$.

Jestliže $R = r$, lze najít lichoběžník s libovolným kladným a . Speciálně tedy existuje lichoběžník s $a = \sqrt{Rr}$, a jeho rameno AB má tedy nejmenší možnou délku $4\sqrt{Rr}$.

Jestliže $R > r$, může a probíhat pouze interval $0 < a < |VE|$, kde V je průsečík přímk AB a CD . Z podobnosti $\triangle VES_1 \sim \triangle VFS_2$ plyne

$$\frac{|VE|}{r} = \frac{|VE| + |EF|}{R},$$

odkud

$$|VE| = \frac{r}{R-r} |EF| = \frac{2r\sqrt{Rr}}{R-r}.$$

Z předchozí rovnosti vidíme, že $a = \sqrt{Rr} < |VE|$, právě když $R < 3r$; pro $R < 3r$ tedy opět existuje lichoběžník s $a = \sqrt{Rr}$ a jeho rameno má díky (1) minimální možnou délku $4\sqrt{Rr}$. Zbývá vyšetřit případ, kdy $R \geq 3r$, a tedy $\sqrt{Rr} \geq |VE|$. Všimněme si, že funkce $a \mapsto \sqrt{a} - \sqrt{Rr/a}$ je pro kladná a rostoucí (když se a zvětší, $\sqrt{a}$ se zvětší a $\sqrt{Rr/a}$ se zmenší); kromě toho je záporná pro $a < \sqrt{Rr}$ a kladná pro $a > \sqrt{Rr}$. Protože v uvedeném případě je $0 < a < |VE| \leq \sqrt{Rr}$, plyne odtud nerovnost

$$\sqrt{a} - \sqrt{\frac{Rr}{a}} < \sqrt{|VE|} - \sqrt{\frac{Rr}{|VE|}} \leq 0,$$

takže

$$\begin{aligned} |AB| &= \left(\sqrt{a} - \sqrt{\frac{Rr}{a}} \right)^2 + 4\sqrt{Rr} > \\ &> \left(\sqrt{|VE|} - \sqrt{\frac{Rr}{|VE|}} \right)^2 + 4\sqrt{Rr} = \\ &= \frac{(R+r)^2}{2r(R-r)} \sqrt{Rr}. \end{aligned}$$

Rovnost zde nemůže nikdy nastat; když se však a bude blížit k $|VE|$ (to znamená, že A se blíží k V), bude se levá strana nerovnosti v limitě blížit pravé straně.

Zjistili jsme tedy, že když $R < 3r$, je nejmenší možná délka ramene rovna $4\sqrt{Rr}$. Když $R \geq 3r$, nejmenší možná délka ramene neexistuje (nenabývá se); existuje pouze infimum všech možných délek, a to je rovno $\frac{(R+r)^2}{2r(R-r)} \sqrt{Rr}$.

5.3 (podle Z. Pezlara). Uvažujme výraz $v = 36^k - 5^l$. Je

$$v \equiv -(6 - 1)^l \equiv (-1)^{l+1} \pmod{6}$$

$$v \equiv (35 + 1)^k \equiv 1 \pmod{5},$$

tedy

$$v \equiv 1 \quad \text{nebo} \quad v \equiv 11 \pmod{30}. \quad (1)$$

Protože $36 - 25 = 11$, stačí uvažovat už jen $|v| < 11$, což podle (1) dává $v = 1$. To by ale muselo být $36^k - 5^l = 1$, neboli $5^l = (6^k - 1)(6^k + 1)$, takže $6^k - 1 = 5^i$ a $6^k + 1 = 5^j$, odkud plyne $2 = 5^j - 5^i$, což zjevně nemůže nastat (stačí probrat jednotlivé možnosti mod 5). Minimální hodnota $|v|$ je tedy $11 = |36 - 5^2|$.

Nyní uvažujme $v = 53^k - 37^l$. Pak

$$v \equiv (52 + 1)^k - (36 + 1)^l \equiv 0 \pmod{4}$$

$$v \equiv (54 - 1)^k - (36 + 1)^k \equiv (-1)^k - 1 \pmod{9},$$

tedy

$$v \equiv 0 \quad \text{nebo} \quad v \equiv 16 \pmod{36}. \quad (2)$$

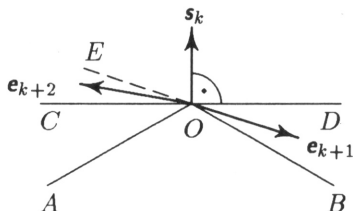
Protože $53 - 37 = 16$, stačí dál uvažovat jen $|v| < 16$, což podle (2) dává $v = 0$. Pak ale $53^k = 37^l$, což ale zjevně neplatí, neboť $(53, 37) = 1$. Minimální hodnota $|v|$ je tudíž $16 = |53 - 37|$.

5.4 Především si uvědomme, že vektory, jejichž součtem je nulový vektor, nemohou při umístění do jednoho bodu všechny ležet jen v jedné z polorovin určených přímkou procházející společným počátkem (pokud ovšem neleží všechny

v jedné přímce). Tento jednoduchý postřeh budeme často používat.

Umístíme všechny vektory do počátku kartézské soustavy souřadnic a předpokládejme, že pro $k \geq 1$ vektor $\mathbf{s}_k = \sum_{i=1}^k \mathbf{e}_i$ splňuje nerovnost $|\mathbf{s}_k| \leq 1$. Pokud mezi zbývajících jednotkovými vektory některý svírá s vektorem $\mathbf{s}_k$ úhel alespoň 120° (leží tedy v úhlu AOB , obr. 57), zřejmě pro takový vektor $\mathbf{e}_{k+1}$ platí

$$|\mathbf{s}_{k+1}| = |\mathbf{s}_k + \mathbf{e}_{k+1}| \leq 1.$$



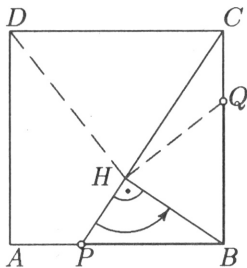
Obr. 57

Pokud v úhlu AOB žádný vektor neleží, musí některý z vektorů ležet v polorovině CDB , kde CD je přímka kolmá na $\mathbf{s}_k$ procházející počátkem; tedy v jednom z úhlů BOD nebo AOC leží některý z daných vektorů. Označme jako $\mathbf{e}_{k+1}$ ten vektor, který svírá s $\mathbf{s}_k$ největší úhel (bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že leží např. v úhlu BOD). Označíme-li E ten bod, pro který $\mathbf{OE} = -\mathbf{e}_{k+1}$,

musí i v úhlu EOA ležet jeden z daných vektorů. Ten označíme e_{k+2} . Protože oba takto vybrané vektory e_{k+1} a e_{k+2} svírají úhel aspoň 120° , je jasné, že je $|e_{k+1} + e_{k+2}| \leq 1$ a zároveň $|s_k + e_{k+1} + e_{k+2}| \leq 1$, protože součet obou vektorů $e_{k+1} + e_{k+2}$ leží v úhlu AOB ; současně ale platí $|s_k + e_{k+1}| < \sqrt{2}$ (rovnost nemůže nastat, protože to by pak musely všechny vektory ležet v polorovině opačné k CDA obsahující vektor s_k).

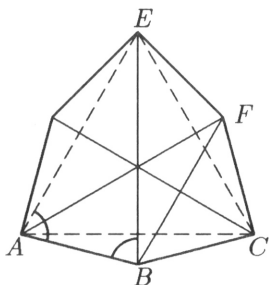
Je jasné, že uvedeným postupem lze dané vektory uspořádat tak, že velikost jejich součtu nikdy nedosáhne $\sqrt{2}$.

5.5 (podle Š. Kasala). Uvažujme zobrazení $\mathcal{H}$ složené z otočení se středem v H o orientovaný úhel PHB (který je pravý) a stejnolehlosti se středem v H a koeficientem $\frac{|BC|}{|PB|}$ (obr. 58). Potom jistě platí, že $\mathcal{H}$ zobrazí trojúhelník PHB na trojúhelník BHC ($\mathcal{H}(B) = C$), a navíc pro $\mathcal{H}(p) = p'$ je $p \perp p'$. Bod Q se tedy zobrazí na nějaký bod přímky CD . Protože $\frac{|CD|}{|BQ|} = \frac{|CB|}{|PB|}$ a zároveň souhlasí i orientace obou úseček, je $\mathcal{H}(Q) = D$, tedy $\mathcal{H}(HQ) = HD$. Odpovídající si úsečky v zobrazení $\mathcal{H}$ jsou navzájem kolmé, je tedy $HQ \perp HD$, takže úhel DHQ je pravý.

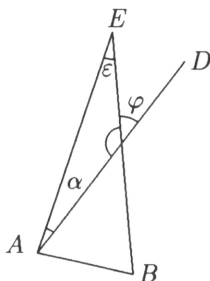


Obr. 58

5.6 Na první otázku je záporná odpověď, což ukážeme na tomto příkladu: Vytvořme šestiúhelník $ABCDEF$ z rovnostranného trojúhelníku ACE o straně 2 přidáním shodných rovnoramenných trojúhelníků ABC , CDE a EFA (se základnami AC , CE , EA). Výšku těchto trojúhelníků zvolme tak, aby platilo $|AD| = |CF| = |EB| = 2$ (obr. 59). Všechny strany takového šestiúhelníku mají velikost $|AB| = a > 1$, všechny úhlopříčky kromě BD , DF , FB mají velikost 2.



Obr. 59



Obr. 60

Snadno ukážeme, že $|BD| = |DF| = |FB| < 2$. V trojúhelníku ABD je $|\sphericalangle DAB| < \alpha < |\sphericalangle ABD|$, a proto $|BD| < |AD| = 2$.

Dokonce můžeme šestiúhelník zmenšit v podobnosti tak, aby délka strany zůstala větší než jedna (např. v poměru $\frac{a - \frac{a-1}{2}}{a}$), ale všechny úhlopříčky měly délku menší než dvě.

Na druhou otázku je odpověď kladná. Uveďme řešení dle M. Konečného.

Předpokládejme naopak, že $|AD| > 2$, $|BE| > 2$, $|CF| > 2$, ale všechny strany mají délku nejvýše 1. Jsou-li $\varphi, \varepsilon, \alpha$ úhly podle obr. 60, pak $d(B, AE) \leq |AB| \leq 1$, takže $\sin \varepsilon = \frac{d(B, AE)}{|EB|} < \frac{1}{2}$; podobně dostaneme i nerovnost $\sin \alpha < \frac{1}{2}$, tedy $\varepsilon < 30^\circ$, $\alpha < 30^\circ$, a proto $\varphi = \alpha + \varepsilon < 60^\circ$.

Obdobně dokážeme, že i druhé dvě dvojice úhlopříček AD, CF a BE, CF svírají úhel menší než 60° . To je ale spor, neboť součet těchto tří úhlů je 180° .

5.7 Označme čísla na kružnici po řadě $a_1, a_2, \dots, a_n$. Dotaz je tříprvková množina $T \subset \{1, 2, \dots, n\}$, odpověď na dotaz T je součin $s_T = \prod_{i \in T} a_i$. Chceme-li dokázat, že k určení součinu $s = \prod_{i=1}^n a_i$ stačí a je potřeba p dotazů, musíme dokázat dvě věci:

(I) Existuje systém tříprvkových množin $\mathcal{T} \subset \{T: T \subset \{1, 2, \dots, n\}, |T| = 3\}$ takový, že $|\mathcal{T}| \leq p$, a zároveň pro každé dvě n -tice $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \{-1, 1\}^n$, kde $\prod_{i \in T} a_i = \prod_{i \in T} b_i$ pro všechna $T \in \mathcal{T}$, platí

$$\prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1}^n b_i.$$

(II) Pro každý systém dotazů $\mathcal{T} \subset \{T: T \subset \{1, 2, \dots, n\}, |T| = 3\}$ takový, že $|\mathcal{T}| < p$, existují dvě n -tice $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \{-1, 1\}^n$, pro něž

$$\prod_{i \in T} a_i = \prod_{i \in T} b_i$$

pro každé $T \in \mathcal{T}$, ale

$$\prod_{i=1}^n a_i \neq \prod_{i=1}^n b_i.$$

Nejjednodušší způsob, jak zařídit část (I), je najít takový systém $\mathcal{T}$, že

$$\prod_{T \in \mathcal{T}} \prod_{i \in T} a_i = \prod_{i=1}^n a_i. \quad (1)$$

Položíme-li $t_i = |\{T : a_i \in T \in \mathcal{T}\}|$, pak

$$\prod_{T \in \mathcal{T}} \prod_{i \in T} a_i = \prod_{i=1}^n a_i^{t_i},$$

což je rovno $\prod_{i=1}^n a_i$, pokud $t_i \equiv 1 \pmod{2}$ pro každé i , tj. pokud každé číslo a_i leží v lichém počtu dotazů. Je možná překvapující, že tento jednoduchý postup vede vždy k minimálnímu počtu dotazů.

Řešení. Úplná odpověď je vyjádřena tabulkou

	$n \equiv 0 \pmod{3}$	$n \equiv 1 \pmod{3}$ $\wedge n > 4$	$n = 4$	$n \equiv 2 \pmod{3}$
(a)	$\frac{n}{3}$	$\frac{n+2}{3}$	4	$\frac{n+4}{3}$
(b)	$\frac{n}{3}$	n	4	n

$n \equiv 0 \pmod{3}$. Aby bylo lze jednoznačně určit součin všech čísel, musí se každé číslo vyskytnout alespoň v jednom dotazu (jinak stačí změnit znaménko u čísla, jež se v žádném

dotazu nevyskytuje). Proto je vždy potřeba alespoň $p \geq \frac{n}{3}$ dotazů. Je-li n dělitelné třemi, splňuje systém dotazů $\mathcal{T} = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \dots, \{n-2, n-1, n\}\}$ podmínku (I), a tedy $p = \frac{n}{3}$ jak v případě (a), tak i v případě (b).

(b), $n \not\equiv 0 \pmod{3}$. Jsou-li povoleny pouze dotazy na čísla jdoucí po sobě, je maximální možný systém dotazů

$$\mathcal{T}_{\max} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \dots, \{n, 1, 2\}\}.$$

Je-li $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{\max}$, $|\mathcal{T}| < |\mathcal{T}_{\max}|$, je bez újmy na obecnosti $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}' = \mathcal{T}_{\max} \setminus \{\{1, 2, 3\}\}$. Ukážeme, že pro $\mathcal{T}'$ (a tudíž i pro $\mathcal{T}$) platí tvrzení z (II): za jednu n -tici zvolíme např. $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$, v druhé položíme

$$b_i = \begin{cases} +1 & \text{pro } i = 4, 7, \dots, n, \\ -1 & \text{jinak,} \end{cases}$$

pokud $n \equiv 1 \pmod{3}$, a

$$b_i = \begin{cases} +1 & \text{pro } i = 3, 6, \dots, n-2 \text{ a } i = 1, \\ -1 & \text{jinak,} \end{cases}$$

je-li $n \equiv 2 \pmod{3}$.

V obou těchto případech je

$$\prod_{i \in \mathcal{T}} a_i = \prod_{i \in \mathcal{T}} b_i = 1$$

pro každé $\mathcal{T} \in \mathcal{T}'$, ale

$$\prod_{i=1}^n a_i = 1 \neq -1 = \prod_{i=1}^n b_i.$$

Proto je nutně potřeba $p \geq n = |\mathcal{T}_{\max}|$ dotazů.

Ovšem n dotazů stačí, protože pro $\mathcal{T}_{\max}$ je

$$\prod_{T \in \mathcal{T}_{\max}} \prod_{i \in T} a_i = \prod_{i=1}^n a_i^3 = \prod_{i=1}^n a_i.$$

(a), $n \equiv 1 \pmod{3}$. Pro $n = 4$ je každý dotaz typu (b), a podle již dokázaného je $p = 4$.

Pro $n > 4$ potřebujeme $p \geq \frac{n}{3}$, tedy $p \geq \frac{n+2}{3}$ dotazů, přičemž tento počet dotazů stačí. Systém $\mathcal{T} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 6, 7\}, \{8, 9, 10\}, \dots, \{n-2, n-1, n\}\}$ má mohutnost $\frac{n+2}{3}$ a splňuje

$$\prod_{T \in \mathcal{T}} \prod_{i \in T} a_i = a_1^3 \prod_{i=2}^n a_i = \prod_{i=1}^n a_i.$$

(a), $n \equiv 2 \pmod{3}$. Opět potřebujeme alespoň $\lceil \frac{n}{3} \rceil = \frac{n+1}{3}$ dotazů, abychom se na každé číslo dotázali alespoň jednou. Tentokrát však tento počet nestačí. Mějme totiž systém $\mathcal{T}$ mohutnosti $\frac{n+1}{3}$. Aby pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ existovalo $T \in \mathcal{T}$ obsahující i , bez újmy na obecnosti musí být (jinak pozice přechísľujeme) $\mathcal{T} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{6, 7, 8\}, \dots, \{n-2, n-1, n\}\}$. Pak ale n -tice

$$\begin{aligned} a_i &= +1 && \text{pro } i = 1, 2, \dots, n, \\ b_i &= \begin{cases} -1 & \text{pro } i = 1, 2, 4, \\ +1 & \text{jinak} \end{cases} \end{aligned}$$

splňují

$$\prod_{i \in T} a_i = \prod_{i \in T} b_i = 1$$

pro každé $T \in \mathcal{T}$, ale

$$\prod_{i=1}^n a_i = 1 \neq -1 = \prod_{i=1}^n b_i.$$

Tudíž je třeba $p \geq \frac{n+4}{3}$ dotazů. Tento počet dotazů stačí, viz např. $\mathcal{T} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{6, 7, 8\}, \dots, \{n-2, n-1, n\}\}$, kterýžto systém splňuje (1).

32. Mezinárodní matematická olympiáda

se konala ve dnech 12. – 23. července v univerzitním městě Uppsala a v malém městečku Sigtuna ve Švédsku. Zúčastnilo se jí 318 studentů z 56 zemí. Československo se v neoficiálním pořadí družstev umístilo na 11. místě, na prvních pěti místech se umístila družstva SSSR, Číny, Rumunska, Německa a USA. I když jsme v předcházejících letech skončili lépe (v Číně na 8. místě, v roce 1989 v SRN na 6. místě), není možné hodnotit 11. místo před Francií, Polskem, Velkou Británií a dalšími zeměmi negativně. Skutečnost, že jsme se od roku 1985 vždy zařadili mezi prvních 12 zemí svědčí o dobré práci v československé matematické olympiádě i o pěkné úrovni našeho školství.

Mezinárodní matematická olympiáda je především soutěží jednotlivců. Výsledky našich žáků na 32. MMO ukazuje tabulka na další straně.

Vedoucím československé delegace byl doc. dr. *Leo Boček*, CSc. z MFF UK v Praze, zástupce vedoucího byl doc. dr. *Tomáš Hecht*, CSc. z MFF UK v Bratislavě.

Umístění	Body za úlohu						Celkem	Cena
	1	2	3	4	5	6		
21.–23. Michal Stehlík, 3. roč. gymnázia, Brno, tř. kpt. Jaroše	7	7	3	7	7	7	38	II.
34.–38. Michal Konečný, 4. roč. gymnázia, Brno, tř. kpt. Jaroše	7	7	5	7	4	7	37	II.
47.–53. Michal Kubeček, 3. roč. gymnázium, Praha, Korunní	7	4	3	7	7	7	35	II.
58.–60. Richard Kollár, 3. roč. gymnázia, A. Markuša, Bratislava	7	7	3	7	7	2	33	II.
96.–104. Štěpán Kasal, 4. roč. gymnázia, Praha, Korunní	0	2	3	7	7	7	26	III.
162.–169. Viliam Búr, 2. roč. gymnázia, A. Markuša, Bratislava	0	3	4	0	7	3	17	
Celkem							28 30 21 35 39 33	186

Texty soutěžních úloh

(v závorce je vždy uvedena země, která úlohu navrhl)

1. Je dán trojúhelník ABC , označme I střed kružnice mu vepsané. Osy vnitřních úhlů trojúhelníku ABC ve vrcholech A , B , C protínají protější stranu po řadě v bodech A' , B' , C' . Dokažte, že

$$\frac{1}{4} < \frac{|AI| \cdot |BI| \cdot |CI|}{|AA'| \cdot |BB'| \cdot |CC'|} \leq \frac{8}{27}. \quad (\text{SSSR})$$

2. Necht' n je přirozené číslo větší než 6 a $a_1, a_2, \dots, a_k$ všechna ta přirozená čísla, která jsou menší než n a každé

je s číslem n nesoudělné. Je-li

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_k - a_{k-1} > 0,$$

je n prvočíslo nebo mocnina čísla 2 s přirozeným exponentem. Dokažte.

(Rumunsko)

3. Necht' $S = \{1, 2, 3, \dots, 280\}$. Určete nejmenší přirozené číslo n s touto vlastností: Každá n -prvková podmnožina množiny S obsahuje 5 čísel, které jsou po dvou nesoudělná.

(Čína)

4. G je souvislý graf s k hranami. Dokažte, že je možné hrany očíslovat použitím všech čísel $1, 2, 3, \dots, k$ tak, že pro každý vrchol grafu G platí: Sbíhají-li se v tomto vrcholu dvě nebo více hran, je největší společný dělitel všech jejich čísel roven 1.

[Každý graf G se skládá z množiny bodů, tzv. *vrcholů*, a z množiny *hran*, spojujících určité dvojice různých vrcholů. Přitom je každá dvojice různých vrcholů spojena nejvýše jednou hranou. Graf G se nazývá *souvislý*, jestliže ke každé dvojici (x, y) různých vrcholů existuje posloupnost vrcholů $x = v_0, v_1, v_2, \dots, v_m = y$ tak, že každá dvojice (v_i, v_{i+1}) , $(0 \leq i < m)$ je spojena hranou.]

(USA)

5. Necht' P je libovolný vnitřní bod trojúhelníku ABC . Dokažte, že aspoň jeden z úhlů PAB, PBC, PCA je menší nebo roven 30° .

(Francie)

6. Nekonečná posloupnost $x_0, x_1, x_2, \dots$ reálných čísel se nazývá ohraničená, existuje-li konstanta C tak, že $|x_i| \leq C$ pro všechna $i \geq 0$.

Nechť a je libovolné reálné číslo větší než 1. Sestrojte ohraničenou nekonečnou posloupnost reálných čísel $x_0, x_1, x_2, \dots$ tak, aby pro každou dvojici různých, celých a nezáporných čísel i, j platilo

$$|x_i - x_j| |i - j|^a \geq 1.$$

(Nizozemí)

Řešení úloh

1. Označme S obsah trojúhelníku ABC , r poloměr mu vepsané kružnice, a, b, c délky jeho stran a u, v, w příslušné výšky. Pak je

$$\frac{|CI|}{|CC'|} = \frac{w - r}{w} = 1 - \frac{r}{w} = 1 - \frac{rc}{2S}$$

a analogicky pro

$$\frac{|BI|}{|BB'|}, \quad \frac{|AI|}{|AA'|}.$$

Užitím nerovnosti mezi geometrickým a aritmetickým průměrem těchto hodnot dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{|AI| \cdot |BI| \cdot |CI|}{|AA'| \cdot |BB'| \cdot |CC'|} &= \left(1 - \frac{rc}{2S}\right) \left(1 - \frac{rb}{2S}\right) \left(1 - \frac{ra}{2S}\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{27} \left(3 - \frac{r(a+b+c)}{2S}\right)^3 = \\ &= \frac{1}{27} \left(3 - \frac{2S}{2S}\right)^3 = \frac{8}{27}, \end{aligned}$$

čímž je dokázána pravá nerovnost. K důkazu levé nerovnosti použijeme ještě tuto úpravu:

$$1 - \frac{rc}{2S} = \frac{r(a+b+c) - rc}{2S} = \frac{r(a+b)}{r(a+b+c)} = \frac{a+b}{a+b+c},$$

podobně

$$1 - \frac{rb}{2S} = \frac{a+c}{a+b+c}, \quad 1 - \frac{ra}{2S} = \frac{b+c}{a+b+c}.$$

Máme tedy dokázat, že $4(a+c)(b+c)(a+b) > (a+b+c)^3$.
To je však přímým důsledkem nerovností

$$\begin{aligned}(a+b-c)c^2 &> 0, & (b+c-a)a^2 &> 0, \\ (c+a-b)b^2 &> 0, & 2abc &> 0,\end{aligned}$$

jejich sečtením dostaneme dokazovanou levou nerovnost.

2. Je zřejmé $a_1 = 1, a_k = n-1$. Rozlišme nyní tři případy:

- a) $a_2 = 2$, potom $a_j = j$ pro $j = 1, 2, \dots, n-1$. Pak není číslo n dělitelné žádným menším přirozeným číslem, je tedy n prvočíslo.
- b) $a_2 = 3$, potom $a_j = 2j-1, j = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}n$. To znamená, že n není dělitelné žádným lichým přirozeným číslem, je tedy n mocninou čísla 2.
- c) $a_2 > 3$, pak jsou čísla 2, 3 s číslem n soudělná, je tedy $n = 6m, m$ přirozené a větší než 1. Označme $a_2 - a_1 = d > 2$. Je pak $n-1 = a_k = 1 + (k-1)d$, to znamená, že číslo $a_2 - 1$ dělí číslo $n-2$. Číslo a_2 není dělitelné třemi, je tedy $a_2 = 3l+1$ nebo $3l+2$. V prvním případě dělí

číslo $3l$ číslo $n - 2$, takže je $n - 2$ dělitelné třemi. Avšak číslo n je rovněž dělitelné třemi, což je spor. V druhém případě je $a_1 = 1$, $a_2 = 3l + 2$, takže $a_3 = 6l + 3$, což je opět spor, protože čísla $a_3 = 3(2l + 1)$ a $n = 6m$ mají být nesoudělná.

Pro přirozené číslo n zbývají tedy pouze možnosti uvedené pod body a), b), což jsme měli dokázat.

K důkazu sporu v případě c) jsme potřebovali, aby posloupnost $a_1, a_2, \dots, a_k$ byla aspoň tříčlenná. Není tomu tak pro $n = 6$, což je však podle předpokladu vyloučené. Předpokládejme, že $n > 6$ a že $a_2 = n - 1$. To znamená, že je n dělitelné každým prvočíslem menším než $n - 1$, nechť jsou to prvočísla $2, 3, 5, \dots, p$ ($2 < 3 < 5 < \dots < p$). Kdyby $n - 1$ nebylo prvočíslem, existoval by jeho prvočíselný dělitel r , ten by byl menší než $n - 1$ a dělil by tedy i číslo n , což je spor. Musí být tedy $n - 1$ prvočíslo následující po prvočíslu p . Je tedy $n = 2^{r_2} \cdot 3^{r_3} \cdot \dots \cdot p^{r_p}$, kde $r_i \geq 1$, takže $q = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p - 1 \leq 2^{r_2} \cdot 3^{r_3} \cdot \dots \cdot p^{r_p} - 1 = n - 1$. Číslo q není dělitelné žádným z prvočísel menších než $n - 1$, je ale menší než n , musí být tedy dělitelné prvočíslem $n - 1$, a proto se přímo rovná číslu $n - 1$, tj. $r_i = 1$ pro $i = 2, 3, \dots, p$, $n = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p$. Číslo $q + 4 = n + 3 = 3(2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p + 1)$ není dělitelné žádným z prvočísel $2, 5, \dots, p, n - 1$, musí být proto mocninou tří, takže $n = 3^l - 3 = 3(3^{l-1} - 1)$, $n - 1 = 3^l - 4$. Je-li l sudé, je $n - 1 = 3^{2s} - 4 = (3^s - 2)(3^s + 2)$. Víme, že $n - 1$ je prvočíslo, proto $s = 1$, $n = 6$, což je ve sporu s předpokladem $n > 6$. Je-li l liché, je $n = 3(3^{2s} - 1) = 3(3^s - 1)(3^s + 1)$. Pak je ale n dělitelné čtyřmi, což je ve sporu s tím, že $n = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p$. Je tedy vždy $k \geq 3$.

3. Označme A_2 množinu všech sudých čísel množiny S , podobně A_3 , A_5 a A_7 množinu všech násobků tří, pěti a sedmi z množiny S . Zřejmě se počet $|A_2|$ všech prvků množiny A_2 rovná 140, $|A_3| = 93$, $|A_5| = 56$, $|A_7| = 40$. Dále je $|A_2 \cap A_3| = 46$, protože $A_2 \cap A_3$ je množina všech těch čísel z S , která jsou dělitelná šesti. Podobně $|A_2 \cap A_5 \cap A_7| = 4$, $|A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| = 1$. Podle principu inkluze a exkluze platí pro počet $|A|$ množiny $A = A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7$ vztah

$$|A| = |A_2| + |A_3| + |A_5| + |A_7| - |A_2 \cap A_3| - \dots + \\ + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| + \dots - |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7|,$$

takže $|A| = 216$. Zvolíme-li v A libovolně pět čísel, musejí dvě z nich patřit do jedné z množin A_2 , A_3 , A_5 , A_7 , a jsou tedy nutně soudělná. Tím jsme dokázali, že hledané n je větší než 216. Ukážeme, že $n = 217$. Za tím účelem rozdělíme množinu S na dvě disjunktní množiny B , C tak, že do množiny B budou patřit všechna čísla složená, a do množiny C číslo 1 a všechna prvočísla. To znamená, že do B patří všechna čísla z A kromě čísel 2, 3, 5 a 7, dále patří do B tyto násobky jedenácti: 11^2 , $11 \cdot 13$, $11 \cdot 17$, $11 \cdot 19$, $11 \cdot 23$, a tyto násobky třinácti: 13^2 , $13 \cdot 17$, $13 \cdot 19$. Vidíme, že množina B obsahuje $216 - 4 + 8 = 220$ čísel, do množiny C patří 60 čísel (číslo 1 a 59 prvočísel, jak bychom mohli vyčíst z tabulky prvočísel). Vezmeme nyní libovolnou množinu $T \subset S$, která má 217 prvků. Ukážeme, že množina T obsahuje 5 čísel, jež jsou po dvou nesoudělná. Obsahuje-li množina T pět čísel z C , tvoří těchto pět čísel takovou pěticí. V opačném případě obsahuje T nejvýše 4 prvky z C a tedy aspoň 213 prvků

z B . Jinak řečeno — množina B obsahuje nejvýše sedm prvků, které nepatří do T . Můžeme také říci, že z každých osmi složených čísel menších než 281 patří aspoň jedno do množiny T . Dál stačí dokonce uvažovat jen 40 čísel z B , která jsou součinem dvou prvočísel, a sdružit je do osmi pětic tak, aby v každé pětici byla čísla po dvou nesoudělná, například takto:

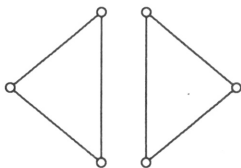
$$\begin{aligned} &\{2 \cdot 47, 3 \cdot 43, 5 \cdot 41, 7 \cdot 37, 11 \cdot 23\}, \\ &\{2 \cdot 43, 3 \cdot 41, 5 \cdot 37, 7 \cdot 31, 11 \cdot 19\}, \\ &\{2 \cdot 41, 3 \cdot 37, 5 \cdot 31, 7 \cdot 29, 11 \cdot 17\}, \\ &\{2 \cdot 37, 3 \cdot 31, 5 \cdot 29, 7 \cdot 23, 11 \cdot 13\}, \\ &\{2 \cdot 31, 3 \cdot 29, 5 \cdot 23, 7 \cdot 19, 13 \cdot 17\}, \\ &\{2 \cdot 29, 3 \cdot 23, 5 \cdot 19, 7 \cdot 17, 13 \cdot 19\}, \\ &\{2 \cdot 23, 3 \cdot 19, 5 \cdot 17, 7 \cdot 13, 11^2\}, \\ &\{2 \cdot 19, 3 \cdot 17, 5 \cdot 43, 7 \cdot 11, 13^2\}. \end{aligned}$$

Kdyby žádná z těchto pětic nebyla obsažena v T , existovalo by v každé pětici číslo nepatřící do T . Dostali bychom tak osm složených čísel z S , která by nepatřila do T . To je však spor s výše odvozenou vlastností množiny T . Výsledek je tedy $n = 217$.

Tato úloha měla na 32. MMO zvláštní osud. Jistě jste si povšimli, že vybrání 40 součinů a jejich rozdělení do osmi pětic je možné provést mnoha způsoby. Všichni soutěžící z družstva KLCDR to však měli provedeno stejným způsobem, a to tak, jak bylo uvedeno ve vzorovém řešení předloženém čínskou delegací. Po dlouhém jednání mezinárodní poroty bylo družstvo KLCDR diskvalifikováno. Naši žáci vyřešili první část úlohy, tedy dokázali, že $n > 216$. Nikdo z nich však

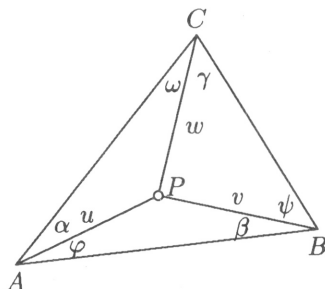
nedokázal druhou, podstatnější část, že $n = 217$. O to víc je třeba ocenit všechny ty soutěžící z dalších zemí, kteří dosáhli za tuto těžkou úlohu plný počet, tj. 7 bodů.

4. Vyjdeme z některého vrcholu grafu po některé cestě grafu, přešlé hrany číslujeme čísly 1, 2, ..., a to tak dlouho, až dojdeme do vrcholu, z něhož už nevede žádná neočíslovaná hrana. Pro všechny prošlé vrcholy je podmínka úlohy splněna, neboť z prvního vrcholu vychází hrana číslo 1, z dalších vrcholů vycházejí hrany očíslované dvěma za sebou jdoucími přirozenými čísly, a totéž platí i pro poslední vrchol. (Jde o vrchol, z něhož vychází jen jedna hrana, nebo je to vrchol, kterým jsme již prošli.) Nejsou-li všechny hrany očíslované, existuje cesta v grafu, která tuto hranu obsahuje, přičemž žádná hrana této cesty není ještě očíslovaná a cesta vychází z některého vrcholu, který jsme již prošli. Jednotlivé hrany grafu opět očíslujeme po řadě dalšími, zatím nepoužitými čísly. Všechny vrcholy prošlé při této cestě opět splňují podmínky úlohy. Takto pokračujeme, až vyčerpáme všechny hrany a všechna přirozená čísla l , pro která je $l \leq k$. Poznamenejme, že v případě nesouvislého grafu není možné hrany očíslovat požadovaným způsobem, stačí vzít graf z obr. 61.



Obr. 61

5. Označme φ, ψ, ω úhly PAB, PBC, PCA (obr. 62) a předpokládejme, že každý z nich je větší než 30° . Dále



Obr. 62

označme α, β, γ velikosti úhlů CAP, ABP, BCP a u, v, w délky úseček PA, PB, PC . Podle sinové věty je

$$\frac{u}{v} = \frac{\sin \beta}{\sin \varphi}, \quad \frac{w}{u} = \frac{\sin \gamma}{\sin \psi}, \quad \frac{w}{v} = \frac{\sin \alpha}{\sin \omega},$$

takže

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \sin \varphi \sin \psi \sin \omega.$$

Kdyby byl některý z úhlů $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi, \omega$ větší, nebo roven 150° , byl by jeden z úhlů trojúhelníku ABC větší než 150° , aspoň jeden ze zbývajících by musel být menší než 30° , takže by nemohly být úhly φ, ψ, ω větší než 30° . Jelikož je tedy $\varphi, \psi, \omega \in (30^\circ, 150^\circ)$, je $\sin \varphi \sin \psi \sin \omega > \frac{1}{8}$. Proto je

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} < \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma &\leq \left(\frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{3} \right)^3 \leq \\ &\leq \left(\sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \right)^3, \end{aligned}$$

takže

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} > 30^\circ.$$

Je tedy $\varphi + \psi + \omega > 90^\circ$, $\alpha + \beta + \gamma > 90^\circ$, ale $\alpha + \beta + \gamma + \varphi + \psi + \omega = 180^\circ$, což je spor.

6. Uvedeme nejdříve řešení, které podal náš soutěžící *Štěpán Kasal*. Vychází z nerovnosti

$$\frac{1}{1^a} + \frac{1}{2^a} + \dots + \frac{1}{n^a} < \frac{a}{a-1},$$

kteřá platí pro každé $a > 1$ a každé přirozené číslo n . K důkazu se použije nevlastního integrálu z funkce $y = x^{-a}$ přes interval $\langle 1, +\infty \rangle$. Uvažujme interval $J = \langle 0, \frac{2a}{a-1} \rangle$ a definujme $x_0 = 0$. Další členy posloupnosti $x_0, x_1, \dots$ definujeme v J rekurentně. Předpokládejme, že jsme již definovali členy $x_0, x_1, \dots, x_n$ tak, aby vyhovovaly podmínce úlohy. Pro další člen x_{n+1} má platit

$$|x_{n+1} - x_k| \geq \frac{1}{(n+1-k)^a} \quad \text{pro } k = 0, 1, \dots, n,$$

tedy

$$x_{n+1} \notin \left(x_k - \frac{1}{(n+1-k)^a}, x_k + \frac{1}{(n+1-k)^a} \right) = J_{n,k}.$$

Uvažujme tedy množinu

$$M_n = J - \bigcup_{k=0}^n J_{n,k}.$$

Je to množina neprázdná, protože součet délek intervalů $J_{n,0}, J_{n,1}, \dots, J_{n,n}$ je

$$\frac{2}{(n+1)^a} + \frac{2}{n^a} + \dots + \frac{2}{1^a},$$

a tedy menší než délka intervalu J , takže je M_n neprázdná. Kromě toho jsou intervaly $J_{n,k}$ otevřené, takže M_n je uzavřená. Položíme-li $x_{n+1} = \min M_n$, splňuje posloupnost $x_0, x_1, x_2, \dots$ podmínky úlohy.

Ve vzorovém řešení nizozemské delegace, která úlohu navrhla, je hledaná posloupnost dána explicitně takto: Každé přirozené číslo i vyjádříme v dvojkové soustavě,

$$i = b_0 + b_1 \cdot 2 + b_2 \cdot 2^2 + \dots + b_k 2^k,$$

pak položíme

$$x_i = \frac{2^a - 1}{2^a - 2} \left(b_0 + \frac{b_1}{2^a} + \frac{b_2}{2^{2a}} + \dots + \frac{b_k}{2^{ka}} \right).$$

Je pak

$$0 \leq x_i < \frac{2^a - 1}{2^a - 2} \left(1 + \frac{1}{2^a} + \dots \right) = \frac{2^a}{2^a - 2},$$

takže x_i tvoří posloupnost omezenou. Podobně, i když trochu složitěji se dokáže, že pro $i \neq j$ je

$$|x_i - x_j| \geq \frac{1}{|i - j|^a}.$$

Třetí mezinárodní olympiáda v informatice

Ve dnech 19.–25. 5. 1991 se v Řecku konala 3. mezinárodní olympiáda v informatice. Po počátečních nejasnostech, které v minulých letech provázely vznik a formování této nejmladší mezinárodní olympiády středoškoláků, získala již soutěž jasný organizační řád. Dostala se tak do rovnocenného postavení s mezinárodní matematickou olympiádou, mezinárodní fyzikální olympiádou a dalšími podobnými mezinárodními soutěžemi studentů středních škol. Tato pozice mezinárodní olympiády v informatice byla potvrzena i skutečností, že nad ní převzala záštitu organizace UNESCO. Pracovník UNESCA odpovědný za výchovu a vzdělávání v matematice a informatice byl také osobně přítomen po celou dobu soutěže v Řecku.

Třetí mezinárodní olympiády v informatice se zúčastnili soutěžící z 23 zemí, mezi nimi také z Československa. V tomto ročníku byla soutěžní družstva mimořádně pouze tříčlená, od příštího ročníku se počítá již opět s družstvy čtyřčlennými. Každé soutěžní družstvo bylo doprovázeno svým vedoucím a jeho zástupcem. Olympiády se dále zúčastnili pozorovatelé z dalších dvou zemí (Finsko, Írán), které by se od budoucího ročníku chtěly do soutěže zapojit aktivně se soutěžními družstvy, a již zmíněný delegát mezinárodní organizace UNESCO.

Ze strany organizátorů byla soutěž připravena a zajištěna vynikajícím způsobem. Místem konání byl přímořský hotel Helios ležící nedaleko od města Anavissos asi 50 km jižně od Athén. Na prvotřídní úrovni bylo ubytování a stravování, bohatý doprovodný program pro volný čas i zajištění dostatečného množství kvalitní výpočetní techniky pro soutěž i pro volnou práci všech účastníků. Řecko je zemí s bohatou kulturní tradicí a organizátoři olympiády věnovali velkou péči tomu, aby se s kulturním bohatstvím země mohli všichni účastníci seznámit. Hned na úvod pro nás připravili návštěvu Athén, jejíž hlavní součástí byla prohlídka Akropolis spojená s odborným výkladem místních průvodců. Řecká lidová kultura byla prezentována na řadě večerních vystoupení pěveckých, hudebních a tanečních souborů. Řecko je také zemí s krásnou přírodou, zajímavou architekturou, s mořem a mnoha ostrovy. Všechny tyto krásy hostitelské země jsme mohli poznat na procházkách do okolí hotelu, při výletu na jih poloostrova Attika do přímořského střediska Sounio a zejména na celodenním výletu lodí po ostrovech ležících v Egejském moři.

Mezinárodní olympiáda v informatice je orientována trochu jinak než naše kategorie P matematické olympiády. Je zaměřena na řešení daných problémů přímo na počítači, kdy hlavním cílem soutěže je vytvoření úplných fungujících programů. Soutěž probíhá ve dvou soutěžních dnech, v každém z nich řeší soutěžící jednu úlohu. Ke své práci má každý k dispozici osobní počítač typu IBM PC/XT, běžné systémové programové vybavení (seznam překladačů programovacích jazyků je předem znám) a každý den čtyři hodiny času na práci. Výběr soutěžních úloh provádí na

místě mezinárodní jury na základě návrhů, které předem zaslaly jednotlivé účastnické země. Členové jury také programy ihned ohodnotí a na závěr soutěže vyhlásí výsledky.

Výše uvedenému zaměření celé soutěže odpovídá i charakter soutěžních úloh. Pro 3. mezinárodní olympiádu v informatice vybrala jury následující dvě úlohy. Z prostorových důvodů je zde uvádíme v poněkud zkráceném znění bez ilustrujících příkladů, obrázků, poznámek a informací o způsobu hodnocení.

Texty soutěžních úloh

Úloha 1.

Očíslujte políčka v matici 5×5 čísla od 1 do 25 následujícím způsobem. Je-li číslo i ($1 \leq i < 25$) přiřazeno políčku o souřadnicích (x, y) , pak číslo $i+1$ bude přiřazeno právě jednomu políčku se souřadnicemi (z, w) , kde z, w jsou určeny podle některého z těchto pravidel:

$$(z, w) = (x \pm 3, y) \quad (1)$$

$$(z, w) = (x, y \pm 3) \quad (2)$$

$$(z, w) = (x \pm 2, y \pm 2) \quad (3)$$

- a) Napište program, který najde jedno z možných očíslování matice 5×5 pro zadanou počáteční pozici (počáteční pozici je přiřazeno číslo 1).
- b) Napište program, který určí a vypíše počet možných očíslování matice pro každou jednu počáteční pozici. Uvažujte počáteční pozice, které leží v pravé horní polovině matice včetně hlavní diagonály.

Příklad: Je-li zadána počáteční pozice $(2, 2)$, potom dalším políčkem, kterému lze přiřadit číslo 2, bude jedno z políček o souřadnicích $(2, 5)$, $(5, 2)$, $(4, 4)$.

Úloha 2.

S -term je posloupnost znaků S a závorek definovaná rekursivně takto:

1. S je S -term,
2. jsou-li M, N dva S -termy, potom také (MN) je S -term.

Příklad S -termu:

$$(((SS)(SS))S)(SS))$$

Jelikož pravé závorky nenesou žádnou informaci, mohou se vynechat, tzn. namísto (MN) je možné psát MN . Předcházející příklad lze tedy zapsat ve tvaru:

$$(((SS(SSS(SS$$

1. Napište proceduru *GENTERM*, která generuje S -termy. Vaše procedura bude vytvářet N souborů (kde N je délka, tj. počet znaků S), které obsahují všechny S -termy délek $1, \dots, N$. První soubor obsahuje S -termy délky 1, druhý délky 2, atd. Jednotlivé S -termy jsou odděleny znakem ‘;’, za posledním S -termem je uveden znak ‘.’. Napište program, který přečte číslo N ($N \leq 10$) a s použitím procedury *GENTERM* zobrazí na obrazovce všechny vygenerované S -termy.

Definujme kalkulus nad S -termy. Jediné algebraické pravidlo (tzv. S -pravidlo) zní: libovolný podterm tvaru

$((((SA)B)C))$, kde A, B, C jsou S -termy, může být nahrazen podtermem $((AC)(BC))$, tj.

$$\dots ((((SA)B)C)) \dots \rightarrow \dots ((AC)(BC)) \dots$$

Aplikaci S -pravidla na S -term nazveme redukcí S -termu. Existují různé způsoby (strategie) výběru podtermu, na který aplikujeme S -pravidlo. Postupné opakování aplikace S -pravidla na S -term probíhající tak dlouho, až žádná další redukce není možná, nazveme normalizací S -termu.

2. Zvolte takovou datovou strukturu pro reprezentaci S -termů, která bude vhodná na provádění redukcí. Napište procedury *READTERM* a *PRINTTERM*, které transformují S -termy z tvaru generovaného procedurou *GENSTERM* do vaší reprezentace a naopak. Váš program musí dávat možnost testovat tyto procedury samostatně (zobrazovat jejich vstupy a výstupy).
3. Napište proceduru *REDUKCE*, která provádí jednu redukci pomocí S -pravidla na specifikovaný podterm daného S -termu. Váš program musí dávat možnost předvést výsledek této procedury.
4. Napište proceduru *NORMALIZE*. Tato procedura v zadaném S -termu opakovaně vyhledává podterm použitelný k redukci S -pravidlem tak dlouho, až další redukce není možná nebo až počet provedených redukcí překročí dané maximum, např. 30. Váš program musí mít možnost předvést efekt této procedury.
5. Nakonec spojte všechno do programu, který
 - a) vyžádá od uživatele číslo N
 - b) použije S -termy délky N vygenerované procedurou *GENSTERM*

- c) převede S -termy do vaší reprezentace
- d) normalizuje je (pokud to je možné)
- e) vypíše výsledné (normalizované) S -termy
- f) vypíše počet redukcí použitých pro každý S -term nebo hlášení "NOT NORMALIZED" v případě, že se normalizaci nepodaří provést do 30 kroků
- g) vypíše počet nenormalizovaných S -termů a počet všech S -termů dané délky N .

Soutěž byla provázena také zasedáním vedoucích všech delegací zúčastněných zemí. Na těchto zasedáních byla potvrzena a pro příští ročníky mezinárodní olympiády v informatice mírně upravena soutěžní pravidla. Bylo rozhodnuto o vytvoření stálého mezinárodního koordinačního centra, které bude řídit pravidelné každoroční pořádání soutěže. Zároveň bylo rozhodnuto o zajištění dalších ročníků olympiády. Příští, v pořadí čtvrtá mezinárodní olympiáda v informatice se bude konat v červenci 1992 v Bonnu, pátou mezinárodní olympiádu v informatice uspořádá v roce 1993 Argentina.

Československé družstvo se zúčastnilo všech mezinárodních olympiád v informatice, které se dosud konaly. Výběr účastníků 3. mezinárodní olympiády v informatice jsme provedli na základě výsledků celostátního kola 39. ročníku matematické olympiády – kategorie P, neboť jména soutěžících bylo nutné oznámit ještě před termínem konání celostátního kola aktuálního 40. ročníku MO kategorie P. Pozdější výsledky 40. ročníku MO kategorie P a zejména naše úspěšné vystoupení v Řecku potvrdily, že byl výběr proveden správně. Československo bylo reprezentováno soutěžním družstvem ve složení:

Štěpán Kasal, 4. r., gymnázium, Korunní, Praha

Igor Malý, 4. r., gymnázium J. Hronca, Bratislava

Matej Ondrušek, 2. r., gymnázium J. Hronca, Bratislava

Vedením československého družstva byli pověřeni RNDr. *Peter Tomcsányi* z MFF UK v Bratislavě a RNDr. *Pavel Töpfer*, CSc. z MFF UK v Praze.

Naši soutěžící se na soutěž velmi svědomitě připravili a v Řecku odvedli výborný výkon. *Igor Malý* získal I. cenu a navíc se stal absolutním vítězem soutěže. V hodnocení získal celkem 196 bodů z 200 možných a zvítězil s poměrně velkým sedmibodovým náskokem před druhým Číňanem *Cheng Yangem* (189 bodů) a třetím Maďarem *Zoltánem Tyranyim* (187 bodů). Další dva naši soutěžící *Štěpán Kasal* a *Matej Ondrušek* získali shodně 136 bodů, což představovalo pro oba II. cenu a velmi pěkné 13.–16. místo v celkovém pořadí. V neoficiální soutěži družstev obsadilo Československo vynikající 2. místo (468 bodů) za vítěznou reprezentací Číny (499 bodů) a před třetím v pořadí družstvem Jugoslávie (451 bodů).

Pavel Töpfer

Doc. RNDr. Leo Boček, CSc. - RNDr. Jiří Binder, CSc. -
RNDr. Karel Horák, CSc. - doc. RNDr. Václav Sedláček, CSc. -
RNDr. Pavel Töpfer, CSc.

**Čtyřicátý ročník
matematické olympiády
na středních školách**

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství Praha roku 1993
jako svou publikaci č. D-9B-0-0-12-0-40-0

Edice Zájmové náklady

Publikace neprošla redakční úpravou v nakladatelství

Sazbu programem T_EX připravil RNDr. Karel Horák, CSc.

Vytiskl MISTRAL, tiskárna skript a brožur, Praha 1, Bílkova 17
1. vydání

ISBN 80-04-26407-7

matematická olympiáda



SPN

ISBN 80-04-26407-7