

40. ročník matematické olympiády na základních školách

Milan Koman (editor); Jiří Binder (editor); Vladimír Repáš (editor):
40. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva
o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1990/1991.
(Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1993.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404936>

Terms of use:

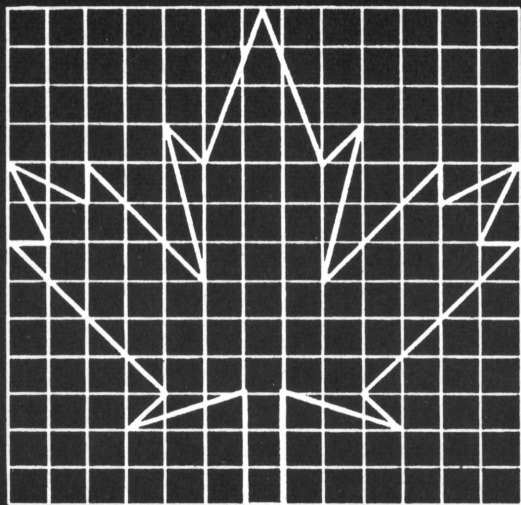
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences
provides access to digitized documents strictly for personal use.
Each copy of any part of this document must contain these
Terms of use.



This document has been digitized, optimized for
electronic delivery and stamped with digital
signature within the project *DML-CZ: The Czech
Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Mo

40. ročník matematické olympiády na základních školách



SPN

ČTYŘICÁTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA ZÁKLADNÍCH ŠKOLÁCH

Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1990/1991

ÚLOHY A JEJICH ŘEŠENÍ

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ PRAHA

Zpracovali

prof. RNDr. Milan Koman, CSc., RNDr. Jiří Binder, CSc.,
RNDr. Vladimír Repáš

Lektorovali

RNDr. Libuše Hozová, PhDr. Jitka Kučerová, RNDr. Václav Šůla

© Milan Koman, Jiří Binder, Vladimír Repáš, 1993

ISBN 80-04-26406-9

Obsah

Předmluva	5
40. ročník matematické olympiády na základních školách (historie, organizace a průběh soutěže)	9
Úspěšní řešitelé III. kola kategorie Z8	17
Kategorie Z8	23
Úlohy I. kola	23
Úlohy II. kola (řádný termín)	25
Úlohy II. kola (náhradní termín)	26
Úlohy III. kola	27
Řešení úloh I. kola	29
Řešení úloh II. kola (řádný termín)	41
Řešení úloh II. kola (náhradní termín)	46
Řešení úloh III. kola	52
Kategorie Z7	55
Úlohy I. kola	55
Úlohy II. kola	57
Řešení úloh I. kola	58
Řešení úloh II. kola	65
Kategória Z6	69
Úlohy I. kola	69
Úlohy II. kola	72
Riešenia úloh I. kola	73
Riešenia úloh II. kola	81
Kategória Z5	84
Úlohy I. kola	84
Úlohy II. kola	87
Riešenia úloh I. kola	88
Riešenia úloh II. kola	98

Kategória Z4	100
Úlohy I. kola	100
Úlohy II. kola	102
Riešenia úloh I. kola	103
Riešenia úloh II. kola	108
Příloha	110

Předmluva

Milí mladí přátelé,

knížka, kterou jste právě otevřeli, je věnována matematické olympiádě, která probíhala ve školním roce 1990/91 na základních školách. Byl to její jubilejní 40. ročník, mezi mladými matematiky velmi oblíbené soutěže.

Soutěž byla původně (1951/52) vyhlášena jen pro žáky středních škol, tj. pro žáky většinou starší 15 let. Ale již od 3. ročníku (1953/54) soutěže byla matematická olympiáda vyhlašována i pro žáky základních škol, nejdříve pro poslední ročníky, ale brzy se rozšířila i do nižších ročníků. Dnes se jí mohou zúčastnit všichni žáci základních škol od 4. ročníku.

Od 35. ročníku se vydávají každoročně dvě samostatné ročenky matematické olympiády. Jedna je věnována soutěži na základních školách (tu právě máte ve svých rukou), druhá soutěži na středních školách.

Hlavním posláním těchto poměrně útlých knížek je dát do rukou novým řešitelům matematické olympiády i jejich učitelům vhodnou studijní literaturu. Žákům má pomoci v řešení úloh v dalších ročnících soutěže, učitelům má poskytnout vhodné úlohy pro práci s talentovanými žáky a řešiteli matematické olympiády.

V ročenkách jsou uvedeny všechny soutěžní úlohy právě uplynulého ročníku včetně jejich řešení a některé další obdobné úlohy, které mohou sloužit jako pomocné úlohy k řešení soutěžních úloh. V příloze ročenky jsou kromě toho vybrané úlohy z korespondenčních seminářů matematiky, které se na různých místech republiky konaly pro žáky základních škol. Pro ty, kteří se ještě nesetkali s korespondenčním seminářem, můžeme stručně připomenout: Účastníci dostávají zadané úlohy, které po vyřešení zasílají pořadatelům. Ti úlohy opraví a vrátí řešitelům i se vzorovým řešením. Nejlepší řešitelé bývají často pozváni na kurzy, soustředění, letní matematické tábory či jiné podobné akce.

Ročenky MO mohou proto potěšit všechny zájemce o zajímavé a často i netradiční úlohy.

Jak máte při studiu ročenek postupovat?

Můžeme vám doporučit několik dobrých rad.

- Knížka by měla být pro vás především sbírkou úloh, na kterých si sami můžete vyzkoušet a zdokonalit svou dovednost řešit matematické úlohy, s jakými se ve škole většinou nesetkáte. Každá úloha by pro vás měla být výzvou: „Pojď a zkus mne řešit a to aniž by ses předem podíval na mé řešení, které je otištěno o několik stránek dále.“
- To znamená, že knížku nezačnete číst tak, jak je napsána stránka za stránkou. Doporučujeme vám, abyste si *úlohy vybírali*, především ty, které se vám budou líbit nebo vzbudí vaši zvědavost např. svou neobvyklostí, či tím, že jste podobnou úlohu už kdysi řešili. Možná i tím, že je podobná úloha zařazena do soutěže MO, které se právě zúčastňujete. Úlohy proto volte tak, aby odpovídaly i

vašemu věku tím, že se zaměříte na soutěžní kategorie odpovídající vašemu ročníku. Např. kategorie Z8 je určena žákům 8. ročníku, kategorie Z7 žákům 7. ročníku atd.

- Jak máte úlohy řešit? Nejdříve si *úlohy pozorně přečtěte*. Potom se je sami snažte řešit. Na řešení otištěná dále se nedívejte předčasně hned po prvním neúspěchu. Ošidili byste se sami o krásný pocit, který zažije každý, když se mu něco podaří. Čím déle se budete trápit s řešením úlohy, tím větší pocit radosti zažijete po úspěšném řešení.
- Ale i v tom případě, že se vám úlohu nepodaří vyřešit, nebude to žádné neštěstí. Nikdo učený z nebe nespadl. Pak se podívejte na otištěné řešení, nebo ještě lépe, nejdříve na návodné či pomocné úlohy, které najdete za vzorovým řešením. Ty vám totiž mohou dost napovědět, jak můžete úlohu řešit.
- Když úlohu vyřešíte, *zkontrolujte si nejen výsledek, ale i postup řešení*. Postup řešení je často důležitější než vlastní výsledek. Tak se také hodnotí všechna řešení v matematické olympiádě. Samotný výsledek nestačí. Může se ovšem stát, že ke svému překvapení i potěšení zjistíte, že jste úlohy řešili jinak, než je uvedeno vzorové řešení.
- Nezapomeňte na úlohy z *přílohy*. Ty jsou však uvedeny bez vzorových řešení. K jejich řešení přistupujte proto teprve tehdy, až budete mít dost zkušeností s řešením úloh ze 40. ročníku MO. Najdete mezi nimi i úlohy značně obtížné. Nebudete-li si vědět s jejich řešením rady, obraťte se na své učitele matematiky nebo na starší kamarády, zejména ze středních škol. Můžete si také vytvořit i ve své

škole zájmový kroužek a řešit úkoly společně pod vedením zkušených učitelů.

Závěrem vám přejeme při řešení úloh i při studiu knížky hodně radosti z úspěšných výsledků. Budeme se těšit, že se s mnohými z vás ještě setkáme mezi soutěžícími i vítězi matematické olympiády.

Pokud se vám bude s knížkou dobře pracovat, bude to zásluha nejen všech pracovníků, kteří úlohy MO připravují, ale i lektorek RNDr. Libuše Hozové a PhDr. Jitky Kučerové, které přispěly na mnoha místech ke zlepšení srozumitelnosti a názornosti výkladu.

V lednu 1993

Autoři

40. ročník matematické olympiády na základních školách

Historie, organizace a průběh soutěže

Jubilejní 40. ročník soutěže byl organizován podobně jako v předcházejících letech. Cílem soutěže je vyhledávání žáků talentovaných v matematice, probouzení jejich hlubšího zájmu o matematiku a rozvíjení jejich matematických schopností.

V tomto směru patřila vždy matematická olympiáda po celou dobu své existence ke světlým stránkám naší poválečné historie. Získala pro studium matematiky i pro studium náročných technických i přírodovědných oborů na vysokých školách mnoho nadaných mladých lidí. Řada úspěšných řešitelů počátečních ročníků zastává dnes významné postavení ve vědě či ve společnosti. Matematická olympiáda spolu s dalšími obdobnými soutěžemi vždy stavěla v první řadě na poctivé a nezištné práci učitelů matematiky a mnoha dalších dobrovolných pracovníků. Snad právě proto byla jen málo zasažena deformacemi uplynulého období. Pro mnohé z obětavých organizátorů MO byla jejich činnost v této soutěži jedinou možností, jak mohli uplatnit svou osobnost, protože z politických důvodů byli z veřejného života vyřazení. O to poctivěji se věnovali svěřencům v matematické

olympiádě. Přesto se ani matematická olympiáda zcela nevyhnula totalitnímu nátlaku. Některým obětavým pracovníkům byla například znemožněna účast v ústředním nebo krajském výboru MO. Proto došlo ve 40. ročníku MO i k rehabilitaci pracovníků, kteří byli v uplynulém období z práce v matematické olympiádě vyloučení. Na návrh představenstva ÚV MO a Jednoty českých a slovenských matematiků a fyziků se mohli např. znovu zapojit do práce PÚV MO prof. Jozef Moravčík a dr. Antonín Vrba. Novým členem PÚV MO se stal i dlouholetý pracovník v oblasti výchovy matematických talentů dr. Vladimír Burjan.

Kromě uvedených změn pracoval ÚV MO i jeho předsednictvo ve stejném složení jako v uplynulém ročníku. Předsedou ÚV MO byl doc. dr. Leo Boček, CSc., z MFF UK v Praze, tajemníky byli dr. Karel Horák, CSc., z MÚ ČSAV v Praze a dr. Jiří Binder, CSc., z PF UK v Praze. Řízením soutěže na základních školách byli pověřeni doc. dr. Milan Koman, CSc., z PF UK v Praze a dr. Vladimír Repáš z VŠS v Bratislavě.

Ve 40. ročníku zasáhla MO nepříznivě celkově zhoršená ekonomická situace v našem státě. Byly problémy s finančním zajištěním okresních a krajských kol soutěže, ale i problémy spojené se zrušením krajského zřízení a v návaznosti s tím i zrušení krajských pedagogických ústavů, které v minulých ročnících pomáhaly zajišťovat krajská kola soutěže i další pomocné akce. Zde si zaslouží ocenění všichni dobrovolní pracovníci MO. Především díky jim se podařilo soutěž na všech úrovních uskutečnit. Dík patří jak dosavadním krajským výborům MO, tak pobočkám JČMF a JSMF a bývalým pedagogickým ústavům.

Vyhlašovatelem soutěže byly, podobně jako v uplynulých letech, ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR, ministerstvo školství, mládeže a sportu SR, Jednota českých matematiků a fyziků (JČMF) a Jednota slovenských matematiků a fyziků (JSMF).

Pro žáky středních škol byla soutěž organizována ve čtyřech kategoriích A, B, C a P. První tři z nich byly zaměřeny na matematiku, poslední na programování. Podrobnosti mohou najít zájemci v brožurce Boček a kol.: 40. ročník MO na středních školách, která vyjde současně s touto brožurkou.

Pro žáky základních škol byla soutěž rozdělena do pěti kategorií Z4, Z5, Z6, Z7 a Z8, které byly určeny postupně žákům 4. až 8. ročníku. Ve výjimečných případech mohli soutěžit žáci ve vyšších kategoriích, než které odpovídaly jejich ročníku.

Počet soutěžních kol i počet úloh v těchto kolech v jednotlivých kategoriích je patrný z tabulky:

		I. kolo	II. kolo	III. kolo
Z8	8. ročník	6	4	4
Z7	7. ročník	6	3	—
Z6	6. ročník	6	3	—
Z5	5. ročník	6	3	—
Z4	4. ročník	6	3	—

V I. kole vypracovali žáci úkoly doma. Jejich řešení odevzdávali po trojicích ve dvou termínech:

Kategorie Z8 a Z4:	první trojici	do	9. 11. 1990
	druhou trojici	do	11. 1. 1991
Kategorie Z7, Z6 a Z5:	první trojici	do	14. 12. 1991
	druhou trojici	do	15. 3. 1991

II. kola probíhala formou klauzurní práce. Pro kategorie Z5 až Z8 zpravidla v okresním městě, pro kategorii Z4 v místě školy. Doba vyhrazená řešení kategorie Z8 byla čtyři hodiny, kategorie Z4 jedna hodina. Druhé kolo kategorie Z8 proběhlo ve dvou termínech 6. 2. 1991 a 13. 2. 1991. Druhý termín byl určen školám, které měly 6. 2. 1991 jarní prázdniny. Pro tyto školy byly také sestaveny nové úlohy. Druhá kola pro kategorie Z5 až Z7 se uskutečnila 17. 4. 1991. Konečně kategorie Z4 měla druhé kolo 6. 2. 1991.

III. kolo kategorie Z8 proběhlo zpravidla v bývalém krajském městě 10. 4. 1991.

Soutěž byla dobrovolná. Byla organizována především tam, kde má již víceletou tradici, anebo tam, kde jsou příznivé místní podmínky. To se projevilo především v kategoriích Z4 a Z5. V českých zemích, kde se tato soutěž v kategoriích Z4 a Z5 organizuje kratší dobu než na Slovensku, byla účast v soutěži v těchto kategoriích nižší.

Soutěžní úlohy I. kola byly publikovány v tzv. soutěžních letácích vyšlých nezávisle v České i Slovenské republice. Úlohy byly dále zveřejněny v časopisech Matematika a fyzika ve škole a Rozhledy matematicko-fyzikální. Na pomoc učitelům byly rozesílány na školy tzv. komentáře k úlohám. Komentáře naznačovaly jeden nebo i více možných způsobů řešení úloh a zdůrazňovaly hlavní myšlenky řešení. Na

pomoc učitelům při vedení žáků přinášely i další pomocné úlohy k samostatnému řešení.

Soutěžní úlohy II. a III. kola byly tajné a byly zasílány organizátorům v okresech a bývalých krajích těsně před soutěží v zapečetěných obálkách. Na pomoc opravovatelům byla současně dodávána řešení soutěžních úloh a návrhy bodového hodnocení řešení.

Vybrané úlohy se většinou setkaly se souhlasem učitelů. Někteří učitelé však kritizovali, že určité úlohy nenavazují na učivo příslušného ročníku. U některých úloh kritizovali jejich netradičnost či neškolský charakter. Některé úlohy, zejména v kategorii Z7 se proto zdály učitelům obtížné. Do určité míry to potvrzovaly i výsledky žáků v soutěži.

Ústřední výbor MO však nechce odrazovat žáky. Naopak cílem je získávat jejich zájem, rozšiřovat jejich znalosti a zdokonalovat dovednosti v řešení úloh. Pokud jde o „netradiční“ úlohy, jde vesměs o úlohy, kde stačí, aby se žáci nebáli samostatně myslet, aby se naučili při řešení úloh experimentovat, aby se naučili systematickému třídění při řešení kombinatorických úloh ap. Cílem je vést žáky k samostatnosti a dovednosti i ochotě zamyslet se nad danou úlohou. Proto úlohy vyžadující spíše „badatelský“ přístup než znalost rozšiřujících vědomostí a dovedností jsou zařazovány převážně do I. kol, kdy úlohy řeší žáci doma, mají na ně dost času a mohou konzultovat i se svými učiteli.

Organizátoři MO však pečlivě zvažují i názory učitelů. Jsou si vědomi, že bez učitelů je soutěž nemyslitelná. Jsou si vědomi i toho, že příliš obtížné úlohy nemohou motivovat žáky k účasti na soutěži v MO. Také proto vypisuje ÚV MO stálý konkurz na úlohy pro matematickou olympiádu.

Vyzýváme proto všechny učitele a další pracovníky, kteří mají zájem o úspěšné rozšiřování MO, aby zasílali své úlohy do konkurzu na soutěžní úlohy pro MO. Každá přijatá úloha se honoruje částkou 50,- Kč. Úlohy zasílejte na adresu ÚV MO, Žitná 25, Praha 1, PSČ 115 67.

Tabulka 1

Počty soutěžících (S) a úspěšných (U) žáků v 40. ročníku MO v kategoriích Z7 a Z6

Kraj	kategorie Z7			kategorie Z6		
	I. kolo S U	II. kolo S U		I. kolo S U	II. kolo S U	
Praha	550 387	298	117	612 365	270	72
Středočeský	960 486	342	106	779 383	283	56
Jihočeský	807 342	290	70	721 289	215	36
Západočeský	1 120 403	323	142	1 280 369	317	105
Severočeský	1 153 457	374	92	1 218 461	336	76
Východočeský	1 045 466	335	127	1 070 409	301	54
Jihomoravský	1 582 734	392	153	1 538 770	587	118
Severomoravský	2 477 1 318	760	210	2 287 1 114	607	120
Bratislava	320 230	190	75	258 178	162	40
Západoslovenský	1 527 955	763	264	1 184 777	685	101
Středoslovenský	1 740 867	693	161	1 457 759	640	97
Východoslovenský	2 463 1 162	570	189	2 237 1 133	578	106
ČR	9 794 4 593	3 114	1 017	9 506 4 160	2 916	637
SR	6 050 3 214	2 216	689	4 878 2 847	2 065	344
ČSFR	15 844 7 807	5 330	1 706	14 642 7 007	4 981	981

Tabulka 2

Počty soutěžících (S) a úspěšných (U) žáků v 40. ročníku MO v kategorii Z8

Kraj	I. kolo		II. kolo		III. kolo	
	S	U	S	U	S	U
Praha	933	501	326	111	41	33
Středočeský	784	383	275	94	36	18
Jihočeský	722	244	216	56	45	24
Západočeský	852	282	246	105	36	20
Severočeský	1 323	408	310	104	35	18
Východočeský	1 015	457	291	87	42	25
Jihomoravský	1 557	842	593	153	66	40
Severomoravský	2 157	786	495	141	138	96
Bratislava	320	175	165	85	48	38
Západoslovenský	2 483	945	719	255	54	29
Středoslovenský	1 108	639	522	153	36	17
Východoslovenský	1 933	854	547	186	58	14
ČR	9 321	3 903	2 701	853	502	292
SR	4 844	2 613	1 953	679	196	98
ČSFR	14 165	6 516	4 654	1 530	698	390

Úspěšní řešitelé III. kola kategorie Z8

V každém kraji uvádíme řešitele, kteří se umístili na prvních deseti místech. Pokud není jinak uvedeno, jsou všichni jmenovaní řešitelé žáky 8. ročníků základní školy. Názvy ulic odpovídají stavu z dubna 1991, kdy se soutěž konala.

Praha

1.-2. <i>Pavel Machek</i>	ZŠ, Českolipská, Praha 9
<i>Martin Mareš</i>	ZŠ, Na Šutce, Praha 8
3. <i>Zdeněk Štěpán</i>	ZŠ, Na planině, Praha 4
4.-6. <i>Michal Ostatnický</i>	ZŠ, Na planině, Praha 4
<i>Stanislav Rejthar</i>	ZŠ, Rakovského, Praha 4
<i>Robert Šámal</i>	ZŠ, Tr. Rudé armády, Praha 8
7.-10. <i>Ota Frank</i>	ZŠ, Na Šutce, Praha 8
<i>Petr Jansa</i>	ZŠ, Brigádníků, Praha 10
<i>Karel Petera</i>	ZŠ, Na planině, Praha 4
<i>Marek Řehoř</i>	ZŠ, Alžírská, Praha 6

Středočeský kraj

1. <i>Norbert Vaněk</i>	1. ZŠ, Říčany
2. <i>Jiří Hájek</i>	1. ZŠ, Čelákovice
3. <i>Petr Špička</i>	4. ZŠ, Kralupy n. Vlt.
4. <i>Martin Růžek</i>	ZŠ, Velvary
5. <i>Petra Bejtesová</i>	ZŠ, Kamenice
6. <i>Martina Jeřábková</i>	3. ZŠ, Martin

- | | |
|-----------------------------------|-------------------|
| 7.-10. <i>Jitka Kratochvílová</i> | 2. ZŠ, Kolín |
| <i>Dagmar Mikulová</i> | 4. ZŠ, Kutná Hora |
| <i>Martin Růžička</i> | 4. ZŠ, Kutná Hora |
| <i>Štěpán Verecký</i> | 3. ZŠ, Kolín |

Jihočeský kraj

- | | |
|---------------------------------|-----------------------------|
| 1. <i>Jan Rychtář</i> | ZŠ, Dukelská, Strakonice |
| 2.-3. <i>Michaela Prokešová</i> | ZŠ, Nerudova, Č. Budějovice |
| <i>Nad'a Vlková</i> | 1. ZŠ, Pelhřimov |
| 4.-5. <i>Barbora Zifčáková</i> | ZŠ, Fantova, Kaplice |
| <i>Lenka Koblížková</i> | 3. ZŠ, J. Hradec |
| 6. <i>Ondřej Filip</i> | ZŠ, Nerudova, Č. Budějovice |
| 7.-8. <i>Tomáš Novák</i> | ZŠ, Vltava, Č. Budějovice |
| <i>Václav Honetschläger</i> | ZŠ, Dubní, Č. Budějovice |
| 9. <i>Stanislav Šmejkal</i> | ZŠ, Mladá Vožice |
| 10. <i>Milan Křípal</i> | ZŠ, Hálkova, Humpolec |

Západočeský kraj

- | | |
|-------------------------------|----------------------------------|
| 1. <i>Petr Mařík</i> | 22. ZŠ, Na dlouhých, Plzeň |
| 2. <i>Jan Pašek</i> | ZŠ, Karlovy Vary – Tuhnice |
| 3. <i>Petra Folková</i> | 3. ZŠ, Cheb |
| 4.-5. <i>S. Kratochvílová</i> | ZŠ, Jižní předměstí,
Rokycany |
| <i>Eva Legátová</i> | ZŠ, Chanovice |
| 6.-7. <i>Martin Menza</i> | 29. ZŠ, Plzeň |
| <i>Kateřina Němcová</i> | 3. ZŠ, Cheb |
| 8. <i>Martin Vachoušek</i> | ZŠ, Přeštice |

Severočeský kraj

- | | |
|--------------------------|------------------------|
| 1.-2. <i>Jan Vrátný</i> | ZŠ, Buzulucká, Teplice |
| <i>Pavlaína Závodová</i> | ZŠ, Vojanova, Děčín |

3. *Pavel Strnad*
 4.-5. *Marián Petráš*
Iva Stračovská
 6.-7. *Petr Hájek*
Jarmila Večeřová
 8.-10. *Jan Heger*
Jan Rumánek

ZŠ, Lesní, Liberec
 ZŠ, A. Sovy, Č. Lípa
 7. r. ZŠ, Vojanova, Děčín
 ZŠ, U stadionu, Litoměřice
 ZŠ, Na bojišti, Liberec
 ZŠ, Buzulucká, Teplice
 ZŠ, ČSP, Ústí n. Labem

Východočeský kraj

1. *Zdeněk Žabokrcký*
 2. *Jitka Zapletalová*
 3.-6. *Vladislav Kalous*
Radek Erban
Alena Píšová
Martin Gregor
 7. *Petr Doubek*
 8.-10. *Martin Ptáček*
Jindřich Houska
Jan Kubíček

ZŠ, Komenského, Rychnov n. K.
 ZŠ, Němcové, Hostinné
 ZŠ, Komenského, Rychnov n. K.
 1. ZŠ, Nová Paka
 ZŠ, Polabiny III, Pardubice
 ZŠ, Smetanova, Chotěboř
 ZŠ, Resslova, Pardubice
 ZŠ, Masarykova, Polička
 ZŠ, Komenského, Náchod
 ZŠ, Schulcovy sady,
 Dvůr Králové n. L.

Jihomoravský kraj

1. *Petr Kaňovský*
 2. *Michal Štěpánek*
 3. *Oldřich Večerek*
 4.-8. *Petr Kuba*

Jiří Kunovjánek
Pavel Matoušek
Libor Mašíček
Svatopluk Ordelt

ZŠ, Novoměstská, Brno
 ZŠ, Šlapanice
 ZŠ, Komenského n., Třebíč
 ZŠ, Švermova,
 Žďár nad Sázavou
 ZŠ, Blatnice
 ZŠ, Velká Bíteš
 ZŠ, Křídlovecká, Brno
 ZŠ, Palackého, Prostějov

- | | |
|---------------------------|-----------------------|
| 9.-11. <i>Pavel Janík</i> | ZŠ, Sirotkova, Brno |
| <i>Martin Nečesal</i> | ZŠ, Sirotkova, Brno |
| <i>Lenka Sedláková</i> | ZŠ, Křídlovická, Brno |

Severomoravský kraj – olomoucká oblast

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------------|
| 1.-2. <i>Lenka Bartoňková</i> | ZŠ, Jesenická 10, Bruntál |
| <i>Pavla Bartoňková</i> | ZŠ, Tršice, Olomouc |
| 3. <i>Karel Žárský</i> | ZŠ, Rokytnice, Vsetín |
| 4. <i>Simona Bambušková</i> | ZŠ, Školní 2, Bruntál |
| 5.-6. <i>Pavel Spáčil</i> | ZŠ, Šumavská 21, Šumperk |
| <i>Martina Janíčková</i> | ZŠ, Křižná,
Valašské Meziříčí |
| 7.-10. <i>Petr Tomášek</i> | ZŠ, Fr. Stupky, Olomouc |
| <i>Petr Dub</i> | ZŠ, Šumavská 21, Šumperk |
| <i>Marcela Holomíčková</i> | ZŠ, Z. Nejedlého, Šumperk |
| <i>Aleš Lipový</i> | ZŠ, Šafaříkova,
Valašské Meziříčí |

Severomoravský kraj – ostravská oblast

- | | |
|------------------------------|-------------------------------------|
| 1.-5. <i>Jaroslav Dorňák</i> | 1. ZŠ, R. arm., Frýdek-Místek |
| <i>Veronika Holečková</i> | ZŠ, Vel. Polom, o. Opava |
| <i>Luděk Meca</i> | 1. ZŠ, R. arm., Frýdek-Místek |
| <i>David Pavlica</i> | 1. ZŠ, R. arm., Frýdek-Místek |
| <i>Jana Sítková</i> | ZŠ, Kosmonautů, Ostrava |
| 6. <i>Pavel Skupín</i> | 1. ZŠ, R. arm., Frýdek-Místek |
| 7.-8. <i>Milada Bičovská</i> | ZŠ, Sjedn. Studénka,
o. N. Jičín |
| <i>Petr Zajac</i> | ZŠ, Masarykovo nám.,
Vratimov |
| 9. <i>Aleš Krátký</i> | ZŠ, Horn., Hlučín OKD,
o. Opava |

Bratislava

- | | |
|-----------------------------|------------------|
| 1.-3. <i>Michal Kovár</i> | ZŠ, GAM ČA |
| <i>Boris Krupa</i> | ZŠ, GAM ČA |
| <i>Katarína Sedliaková</i> | ZŠ, GAM ČA |
| 4.-6. <i>Ivona Bezáková</i> | ZŠ, GAM ČA |
| <i>Martin Irman</i> | ZŠ, GAM ČA |
| <i>Martin Makúch</i> | ZŠ, Ho Či Minova |
| 7.-8. <i>Samuel Kováč</i> | ZŠ, GAM ČA |
| <i>Pavla Mašková</i> | ZŠ, GAM ČA |
| 9. <i>Peter Maľaš</i> | ZŠ, Batkova |

Západoslovenský kraj

- | | |
|------------------------------|---------------------------------|
| 1. <i>Patrik Horník</i> | ZŠ, SNP, Galanta |
| 2. <i>Katarína Chudá</i> | ZŠ, Brezová, Piešťany |
| 3.-4. <i>Marián Macháček</i> | ZŠ, Pionierská, Trenčín |
| <i>Ladoslav Gál</i> | ZŠ, Gorkého,
Dunajská Streda |

Stredoslovenský kraj

- | | |
|-------------------------------|--|
| 1. <i>Veronika Joštiaková</i> | ZŠ, Moskovská, Žilina |
| 2. <i>Ján Kudlička</i> | ZŠ, Východná, Martin |
| 3. <i>Ján Šajgalík</i> | ZŠ, Radvaň, B. Bystrica |
| 4. <i>Tomáš Hajda</i> | ZŠ, Tomášikova, Martin |
| 5.-6. <i>Michal Kubáň</i> | ZŠ, Čsl. brigády,
Liptovský Mikuláš |
| <i>Marek Škorenň</i> | ZŠ, Nábrežná,
Kysucké Nové Mesto |
| 7.-9. <i>Martin Jaroš</i> | ZŠ, Tvrdošín - Medvedzie |
| <i>Katarína Kováčová</i> | ZŠ, Moskovská, Žilina |
| <i>Matúš Repka</i> | ZŠ, Radvaň, B. Bystrica |
| 10. <i>Ján Kriváň</i> | ZŠ, Pionierov, Prievidza |

Východoslovenský kraj

- | | |
|-----------------------------------|----------------------------------|
| 1. <i>Ivana Brudňáková</i> | ZŠ, 17. novembra, Poprad |
| 2. <i>Ján Brbela</i> | ZŠ, Požiar., Kežmarok |
| 3.-4. <i>Martin Domány</i> | 6. ZŠ, Michalovce |
| <i>Zuzana Hrinková</i> | ZŠ, M. Nešp., Poprad |
| 5.-6. <i>Slávka Jendrejová</i> | ZŠ, Nám. FV, Kežmarok |
| <i>Peter Kovacs</i> | ZŠ, Kr. Chlmec |
| 7. <i>Andrea Trtiová</i> | ZŠ, Steinerova, Kežmarok |
| 8. <i>Katarína Poperníková</i> | ZŠ, Svajlavská,
Stará Ľubovňa |
| 9.-10. <i>Denisa Dzesatníková</i> | ZŠ, Darg. hrdinov, Humenné |
| <i>Martin L'ach</i> | ZŠ, Šmeralova, Poprad |

Kategorie Z8

ÚLOHY I. KOLA

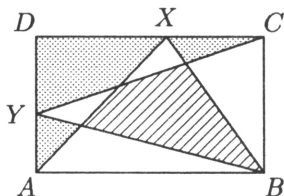
(Řešení úloh na str. 29)

Z8 – I – 1

Ve třídě je méně než 50 dětí. Chlapců je 72 % z počtu děvčat. Kolik dětí je ve třídě?

Z8 – I – 2

V obdélníku $ABCD$ jsme zvolili na straně CD bod X a na straně AD bod Y . Pak jsme sestrojili úsečky AX, BX, BY a CY (obr. 1). Zjistěte, co je větší: obsah vyšrafované části, nebo součet obsahů vytečkovaných částí.



Obr. 1

Z8 – I – 3

Sečteme-li největší společný dělitel a nejmenší společný násobek dvou neznámých čísel, dostaneme výsledek 121. Která jsou to čísla? Určete všechny možnosti.

Z8 – I – 4

Narýsujte různoběžky a, b , které svírají úhel velikosti 45° . Najděte množinu všech bodů X , jejichž součet vzdáleností od přímk a, b se rovná 3 cm. Množinu narýsujte a dokažte, že každý bod narýsované množiny má uvedenou vlastnost.

Z8 – I – 5

Máme 10 kartiček a na každou napíšeme dvě čísla, jedno na jednu stranu, druhé na druhou stranu. Jsou to čísla

47 a 98, 113 a 30, 107 a 35, 78 a 65, 84 a 68,
130 a 10, 91 a 50, 71 a 73, 21 a 123, 100 a 42.

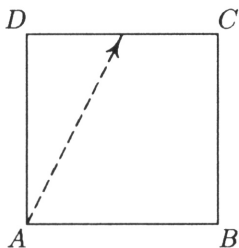
Položte je na prázdná místa (obr. 2) tak, abyste dostali co nejmenší výsledek. Výsledek zdůvodněte.

$$\square + \square + \square + \square + \square - \square - \square - \square - \square - \square$$

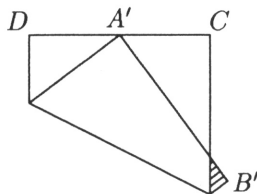
Obr. 2

Z8 – I – 6

Čtverec $ABCD$ o straně 8 cm byl přeložen tak, že vrchol A se přemístil do středu strany CD (obr. 3a, b). Zjistěte obsah vyšrafovaného trojúhelníku.



Obr. 3a



Obr. 3b

ÚLOHY II. KOLA

Řádný termín 13. 2. 1991

(Řešení úloh na str. 41)

Z8 – II – 1

Z papíru jsme vystřihli obdélník $ABCD$ se stranami $|AB| = 5$ cm, $|BC| = 3$ cm. Přeložíme ho tak, aby se vrchol A kryl s vrcholem C . Vypočítejte délku úsečky, která vznikne přehnutím papíru. Své řešení zdůvodněte.

Z8 – II – 2

Součin nejmenšího společného násobku dvou přirozených čísel a , b s jejich největším společným dělitelem je 693. Najděte všechna taková čísla a , b .

Z8 – II – 3

Je dán kosočtverec $ABCD$ s úhlem velikosti 60° při vrcholu C a se středem S . Bod X je střed strany AD , bod Y je střed úsečky SC . Vypočítejte obsah trojúhelníku XYB .

Z8 – II – 4

V táboře se 10 chlapců rozhodlo hrát nohejbal. Kolika způsoby je možno je rozdělit do dvou družstev po pěti hráčích, jestliže Matěj chce hrát s Kubou a Jožka nechce hrát s Ondřejem. (Všichni chlapci mají různá jména.)

ÚLOHY II. KOLA

Náhradní termín 20. 2. 1991

(Řešení úloh na str. 46)

Z8 – II – 1

Z papíru jsme vystřihli obdélník $ABCD$ se stranami $|AB| = 10$ cm, $|BC| = 6$ cm. Přeložme ho tak, aby se vrchol A kryl se středem S obdélníku $ABCD$. Vypočítejte délku úsečky, která vznikne přehnutím papíru. Své řešení zdůvodněte.

Z8 – II – 2

Určete počet dvojic trojčiferných přirozených čísel, pro něž podíl nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele je 342. (Dvojice čísel a, b a b, a přitom nerozlišujeme.)

Z8 – II – 3

Je dán kosočtverec $ABCD$ s úhlem velikosti 60° při vrcholu C a se středem S . Vypočtěte obsah trojúhelníku BT_1T_2 , kde T_1 a T_2 jsou těžiště trojúhelníků ASD a DSC .

Z8 – II – 4

V táboře se deset chlapců rozhodlo hrát nohejbal. Kolika způsoby je možno je rozdělit do dvou družstev po pěti hráčích, jestliže Matěj chce hrát s Kubou a Jožka nechce hrát s Ondřejem. (Všichni chlapci mají různá jména.)

ÚLOHY III. KOLA

(Řešení úloh na str. 52)

Z8 – III – 1

Honza dostal za úkol vynásobit dvě dvojčiferná čísla. Špatně si však opsal příklad – v jednom z čísel si přeho-

díl poradí cifer. Tím dostal výsledek o 3 816 větší než měl být. Jaký byl správný výsledek?

Z8 – III – 2

Ve vsi jsou koně, kozy a krávy. Koní je 13 %. Krav je osmkrát víc než koz. Určete nejmenší možný počet koní, krav a koz.

Z8 – III – 3

Najděte všechny trojice přirozených čísel a, b, c takové, že největší společný dělitel čísel a, b je 3, čísel b, c je 4 a čísel a, c je 5 a nejmenší společný násobek všech tří čísel je 1 800.

Z8 – III – 4

Je dán rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník ABC s rameny délky 10 cm. Určete a narýsujte množinu všech bodů trojúhelníku, které mají od jeho stran součet vzdáleností: a) 10 cm, b) 9 cm. Dokažte, že každý narýsovaný bod má uvedenou vlastnost.

ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA

Řešení úlohy Z8–I–1 (str. 23)

Počet dívek označíme d . Chlapců je 72 % z počtu dívek, tzn. $0,72 \cdot d$. Dívek i chlapců je dohromady $1,72 \cdot d$. Přitom je $1,72 \cdot d < 50$.

Číslo $1,72d$ musí být celé. Upravíme $1,72$ na zlomek:

$$1,72d = \frac{172}{100}d = \frac{43}{25}d$$

Odtud vidíme, že d musí být násobek 25. Dívek musí být méně než 50, proto je $d = 25$.

Odpověď. Ve třídě jsou 43 děti. Dívek je 25 a chlapců 18, což je skutečně 72 % z počtu dívek.

Poznámka. Další úlohy o procentech z MO lze najít v publikaci: Vyšín, J. – Macháček, V. – Mída, J.: Vybrané úlohy z MO — kategorie Z, SPN Praha, 1982 (2. vydání), úlohy 62 – 68, str. 99 až 112.

Řešení úlohy Z8–I–2 (str. 23)

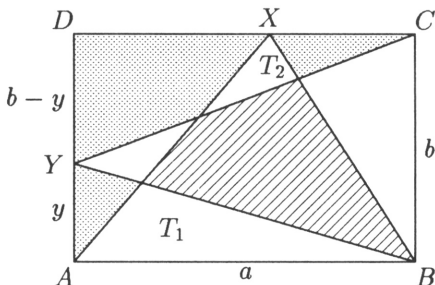
1. *způsob.* Součet obsahů téčkovaných částí (obr. 4) je:

$$\begin{aligned} S_{ABY} + S_{YCD} - (T_1 + T_2) &= \\ &= \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}a(b - y) - (T_1 + T_2) = \frac{1}{2}ab - (T_1 + T_2) \end{aligned}$$

Obsah šrafované části se rovná:

$$S_{ABX} - (T_1 + T_2) = \frac{1}{2}ab - (T_1 + T_2)$$

Dostáváme výsledek: Šrafované i tečkované části mají stejný obsah.

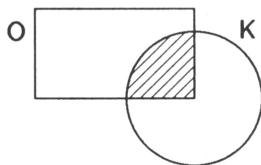


Obr. 4

2. *způsob*. Hlavní myšlenka řešení vychází ze známého vztahu mezi obsahy sjednocení a průniku dvou útvarů, viz obrázek 5. Například obsah sjednocení útvarů O a K je roven

$$S(O \cup K) = S(O) + S(K) - S(O \cap K),$$

tj. součtu obsahů útvarů O a K zmenšenému o obsah jejich průniku $O \cap K$.



Obr. 5

Provedeme vlastní řešení. Označme po řadě S a P obsahy sjednocení a průniku trojúhelníků ABX a BCY . Potom platí:

$$S = S_{ABX} + S_{BCY} - P = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab - P$$

Tedy obsah šrafované části je:

$$P = ab - S$$

Ale stejný obsah má i tečkovaná část.

Poznámka. Obdobná úloha se vyskytla i v 37. ročníku MO (1987/88). Viz Koman, M. – Repáš, V.: 37. ročník MO na ZŠ, SPN Praha, 1990, úloha Z8-I-2, str. 94 – 96.

Řešení úlohy Z8-I-3 (str. 24)

Hledaná čísla a , b zapíšeme ve tvaru

$$a = a_1 D, \quad b = b_1 D,$$

kde D je největší společný dělitel čísel a , b . Činitelé a_1 , b_1 jsou tedy nesoudělná čísla, mají společného dělitele pouze číslo 1. Potom nejmenší společný násobek a , b je $n = a_1 b_1 D$.¹⁾ Podle zadání je:

$$D + n = D + a_1 b_1 D = D(1 + a_1 b_1) = 121 = 11^2$$

¹⁾ To plyne ze známé rovnosti $a \cdot b = n \cdot D$. Tuto rovnost lze snadno dokázat rozložením čísel a , b na prvočinitele. Pro lepší názornost si to můžete ověřit na konkrétním příkladu, např. $a = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$, $b = 3 \cdot 5^3 \cdot 7$, $D = 3 \cdot 5^2$, $n = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7$.

Pro největší společný dělitel D jsou tedy tři možnosti:

$$D = 1, \quad D = 11, \quad D = 121$$

a) Je-li $D = 1$, potom $a_1 b_1 = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Protože čísla a_1, b_1 jsou nesoudělná, dostáváme pro a, b ($a = a_1, b = b_1$, neboť $D = 1$) tyto možnosti:

$$1, 120 \quad 8, 15 \quad 3, 40 \quad 5, 24$$

b) Je-li $D = 11$, potom $a_1 b_1 = 10 = 2 \cdot 5$. Pro čísla a_1, b_1 , která jsou nesoudělná, máme dvě možnosti 1, 10 a 2, 5. Odtud dostaneme další dvě řešení

$$11, 110 \quad 22, 55,$$

neboť $a = a_1 \cdot D = 11 \cdot a_1$ a $b = b_1 \cdot D = 11 \cdot b_1$.

c) Je-li $D = 121$, potom je $a_1 b_1 = 0$. Ale to není možné.

Odpověď. Existuje 6 dvojic čísel požadované vlastnosti. Jsou to:

$$1, 120 \quad 8, 15 \quad 3, 40 \quad 5, 24 \quad 11, 110 \quad 22, 55$$

Poznámka. Další úlohy k řešení. Najděte všechna čísla a, b , pro která platí:

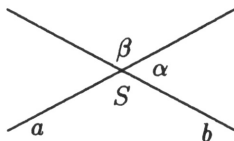
$$a) \quad D(a, b) = 24, \quad n(a, b) = 2\,520$$

$$b) \quad D(a, b) = 24, \quad n(a, b) = 1\,260$$

Mají obě úlohy řešení?

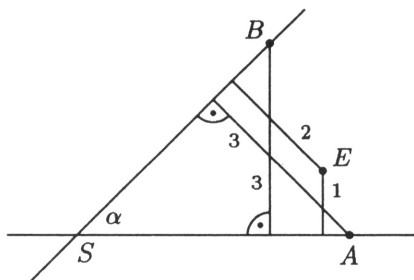
Řešení úlohy Z8–I–4 (str. 24)

Narýsujme různoběžky a, b (obr. 6). Vzhledem k souměrnosti podle středu S (průsečík a, b) stačí vyšetřit jen úhly α, β .



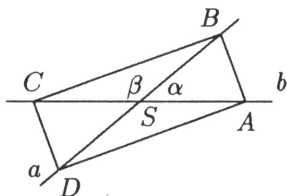
Obr. 6

Začneme s úhlem α . Nejprve najdeme hledané body na ramenech úhlu α . Jsou to body A, B , které mají vždy od jedné z přímek a, b vzdálenost $v = 3 \text{ cm}$ (a leží na druhé přímce). Oba body A, B mají od bodu S zřejmě stejnou vzdálenost (obr. 7).



Obr. 7

Dále najdeme další body. Rozdělíme v na dvě části $v = v_1 + v_2$ a sestrojíme body, které mají od jedné přímky vzdálenost v_1 a od druhé vzdálenost v_2 . Jako příklad je na obrázku 7 vyznačen bod E . Na základě několika dalších pokusů (provedte sami), dojdeme k domněnce, že hledaná množina – omezíme-li se na úhel α – má tvar úsečky AB (obr. 8).



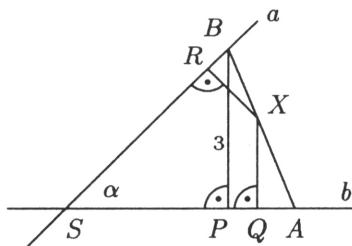
Obr. 8

Podobným způsobem dojdeme k domněnce, že v úhlu β má hledaná množina tvar úsečky BC (obr. 8).

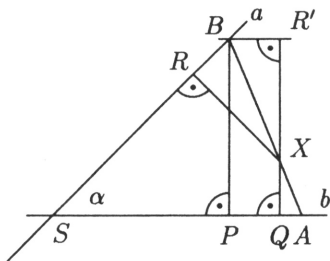
Celá množina se skládá ze čtyř stran obdélníku $ABCD$ (obr. 8).

Zbývá dokázat správnost této domněnky. Důkaz lze provést různými způsoby. Naznačíme dva. V obou případech se však omezíme jen na část důkazu pro kratší strany obdélníku $ABCD$. Zbývající část přenecháme našim čtenářům.

1. *způsob* (pomocí podobnosti, obr. 9). Ukážeme, že každý bod X úsečky AB má součet vzdáleností od přímk a, b roven $v = 3$ cm. Přitom víme, že B má od přímky b vzdálenost 3 cm a podobně bod A má vzdálenost 3 cm od přímky a .



Obr. 9



Obr. 10

Trojúhelníky AXQ , BXR a ABP jsou podobné podle věty (uu). Proto je:

$$|XQ| : |AX| = |XR| : |BX| = |BP| : |AB| = 3 : |AB|$$

Odtud vypočítáme:

$$|XQ| = \frac{3 \cdot |AX|}{|AB|} \qquad |XR| = \frac{3 \cdot |BX|}{|AB|}$$

Sečtením dostaneme:

$$|XQ| + |XR| = \frac{3}{|AB|}(|AX| + |BX|) = \frac{3}{|AB|} \cdot |AB| = 3$$

Když naopak bod X neleží na úsečce AB , ale je v úhlu α , nemůže mít tento bod součet vzdáleností od přímek a , b rovný 3 cm. Důkaz zde nebudeme provádět. Snadno ho uděláte sami. Stačí tímto bodem vést rovnoběžku s AB , jejíž průsečíky s rameny úhlu označíme A' a B' a postupujeme dále stejně jako pro body na úsečce AB .

2. *způsob* (užitím osově souměrnosti, obr. 10). Nechť bod X leží na úsečce AB . Použijeme osově souměrnosti s osou v přímce AB . Při tomto zobrazení přejde

$$RX \longrightarrow R'X.$$

Snadno zjistíme, že bod R' leží na přímce QX , a proto je:

$$|QX| + |XR| = |QX| + |XR'| = |QR'|$$

Protože je úhel RBX shodný s úhlem $R'BX$ i s úhlem QAB , snadno zjistíme (pomocí střídavých úhlů), že PQ je rovnoběžná s BR' . Proto je $PQR'B$ obdélník. Takže:

$$|QR'| = |BP| = 3 \text{ cm}$$

Opět dostáváme, že součet vzdáleností X od přímek a , b je roven 3 cm.

Druhá část důkazu je stejná jako při prvním způsobu řešení.

3. způsob. První část důkazu můžeme řešit i pomocí obsahů trojúhelníků tak, že obsah trojúhelníku SAB (obr. 9) vyjádříme jako součet obsahů trojúhelníků SAX a SBX :

$$\frac{1}{2} \cdot |SA| \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot |SA| \cdot |QX| = \frac{1}{2} \cdot |SB| \cdot |RX|$$

Odtud opět dostaneme:

$$3 = |QX| + |RX|$$

Poznámka. Od řešitelů se v soutěži druhá část důkazu nepožadovala. Naším čtenářům můžeme doporučit, aby řešili úlohu pro případ, že přímky svírají úhly a) 90° , b) 60° . Pro mnohé čtenáře může být zajímavý a zároveň překvapující výsledek, když v podmínce úlohy zaměníme součet vzdáleností za rozdíl vzdáleností.

Řešení úlohy Z8–I–5 (str. 24)

Také tuto úlohu můžeme řešit různými způsoby. Ukážeme dva.

1. způsob. Zvolíme 2 kartičky. Na první označme menší číslo a , větší číslo A . Podobně označíme čísla na druhé kartičce b , B . Porovnáme rozdíly, dáme-li před jednu kartičku $+$ a před druhou $-$. Nejmenší rozdíl může vzniknout jedině tak, že na první kartičce bude navrchu menší z obou čísel a a na druhé kartičce bude navrchu větší z obou čísel.

To znamená, že nejmenší číslo dostaneme jedním z těchto způsobů:

$$\boxed{a} - \boxed{B} \quad \text{nebo} \quad \boxed{b} - \boxed{A}$$

Porovnáme tyto rozdíly. Aby byl první rozdíl menší, musí být

$$\boxed{a} - \boxed{B} < \boxed{b} - \boxed{A},$$

to znamená

$$\boxed{a} + \boxed{A} < \boxed{b} + \boxed{B}.$$

Vidíme, že před kartičkou, která má součet čísel na obou stranách menší, dáme znaménko + a před druhou kartičku znaménko −.

Po této úvaze můžeme dostat řešení tímto postupem.

1. Sečteme obě čísla na všech kartičkách. Dostaneme postupně čísla

$$\begin{array}{cccccc} 145, & \underline{143}, & \underline{142}, & 143, & 152, \\ \underline{140}, & \underline{141}, & 144, & 144, & \underline{142}. \end{array}$$

2. Vezmeme pět kartiček, pro které jsme dostali nejmenší součty. Například kartičky, pro jejichž součty čísel na obou stranách dostaneme podtržená čísla. Ty položíme na prvních pět míst menším číslem navrch (bude před nimi znaménko +). Zbylé dáme na posledních pět míst (bude před nimi znaménko −).

Tím dostaneme řešení:

$$\boxed{10} + \boxed{50} + \boxed{35} + \boxed{42} + \boxed{30} - \boxed{78} - \boxed{73} - \boxed{123} - \boxed{98} - \boxed{84}$$

Výsledek, tj. nejmenší možné číslo, je $v = -289$.

2. způsob. Tento způsob je zajímavý tím, že budeme řešit obecnější úlohu. Budeme zkoumat všechny případy, kdy před žádnou kartičkou není znaménko – a pak případy, že jsou před kartičkami 1, 2, 3, ... znaménka –. Výhodou je, že začneme jednodušší úlohou, než je zadaná úloha. K naší úloze se pak dostaneme postupně.

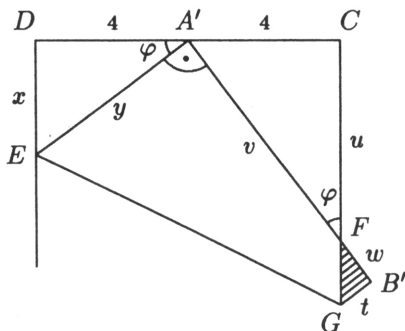
Vlastní řešení. Položíme na stůl všechny kartičky menším číslem navrch a před všechny dáme znaménko +. V prvním případě (všechna znaménka +) dostaneme zřejmě nejmenší možný výsledek. Co se nyní stane, když před jednu kartičku dáme znaménko – a porovnáme výsledky bez otočení a s otočením této kartičky? V obou případech se výsledek zmenší. V prvním případě se výsledek zmenší o dvojnásobek menšího z obou čísel na kartičce, ve druhém případě se zmenší o součet obou čísel, tedy zmenší se více. Chceme-li tedy najít nejmenší možný výsledek s jedinou kartou, před níž je znaménko minus, uděláme toto minus před kartičkou, na které je největší součet obou čísel a zároveň kartičku otočíme.

V dalších krocích otočíme postupně vždy tu kartičku, před kterou je znaménko + a přitom součet čísel na obou stranách je co největší. Po otočení kartičky změníme znaménko + na –.

Poznámka. Jistě si sami snadno vyřešíte obměnu úlohy Z8–II–5, kde podmínku nejmenšího výsledku nahradíme podmínkou největšího výsledku. Můžete řešit i úlohu s podmínkou, že výsledek má co nejmenší absolutní hodnotu.

Řešení úlohy Z8–I–6 (str. 24)

K výpočtu použijeme obrázek 11, kde jsou označeny všechny délky, které budeme potřebovat.



Obr. 11

Snadno zjistíte, že úhly $DA'E$ a CFA' jsou shodné. Proto všechny tři pravoúhlé trojúhelníky $DA'E$, CFA' a $B'FG$ jsou podobné. Podle Pythagorovy věty pro trojúhelník $DA'E$ platí:

$$y^2 = 16 + x^2$$

Protože $x + y = 8$, neboli $y = 8 - x$, snadno vypočteme $x = 3$ cm, $y = 5$ cm. Nyní z podobnosti trojúhelníků CFA' a $DA'E$ plyne:

$$u : 4 : v = 4 : x : y = 4 : 3 : 5$$

Odtud vypočítáme $u = \frac{16}{3}$ cm a $v = \frac{20}{3}$ cm. Protože $|A'B'| = 8$ cm, dostaneme:

$$t : w = 4 : u \quad \text{neboli} \quad t : \frac{4}{3} = 4 : \frac{16}{3}$$

Odtud máme:

$$t = 1 \text{ cm}$$

Proto obsah šrafovaného trojúhelníku je:

$$S = \frac{1}{2} t \cdot w = \frac{2}{3} \text{ cm}^2$$

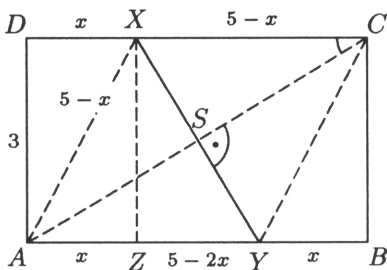
Pomocná úloha. Obdélník o stranách $a = 8 \text{ cm}$, $v = 10 \text{ cm}$ přeložíme podél jedné úhlopříčky. Vypočítejte obsah překrývajících se i nepřekrývajících se částí.

ŘEŠENÍ ÚLOH II. KOLA

Řádný termín 13. 2. 1991

Řešení úlohy Z8–II–1 (str. 25)

Přehyb je úsečka XY (obr. 12), která je kolmá k úhlopříčce AC a prochází jejím středem S .



Obr. 12

Při přehybu splyne úsečka AX s úsečkou CX a podobně úsečka AY s úsečkou CY . Bod S je zřejmě středem úsečky XY , proto je čtyřúhelník $AYCX$ kosočtverec.

$$|AY| = |YC| = |CX| = |XA| = 5 - x$$

Dále můžeme postupovat různými způsoby; uvedeme dva.

1. *způsob (užitím Pythagorovy věty).* Z pravoúhlého trojúhelníku ADX dostaneme

$$3^2 + x^2 = (5 - x)^2,$$

odkud vypočítáme $x = 1,6$ cm.

Délku úsečky XY vypočítáme z pravouhlého trojúhelníku ZXY , jehož odvěsny mají délky 3 a $5 - 2x = 1,8$.

$$|XY|^2 = 3^2 + (5 - 2x)^2$$

$$|XY|^2 = 3^2 + 1,8^2$$

Odtud zjistíme $|XY| = \sqrt{12,24} \doteq 3,5$ (cm).

2. způsob (užitím podobnosti trojúhelníků). Pravoúhlé trojúhelníky ACD a XCS mají společný úhel při vrcholu C . Jsou proto podobné podle věty (*uu*). Proto je:

$$|XS| : |SC| = |AD| : |DC| = 3 : 5$$

Délka úsečky SC je rovna polovině úhlopříčky AC , její délku zjistíme podle Pythagorovy věty: $|AC| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$. Proto máme:

$$|XS| : \frac{\sqrt{34}}{2} = 3 : 5$$

neboli:

$$|XS| = 0,3\sqrt{34}$$

Délka celé úsečky $|XY|$ je dvojnásobná:

$$|XY| = 0,6\sqrt{34} \doteq 3,5 \text{ (cm)}$$

Došli jsme ke stejnému výsledku.

Řešení úlohy Z8–II–2 (str. 25)

1. způsob (s použitím rovnosti $a \cdot b = n \cdot D$, kde n je nejmenší společný násobek a, b a D největší společný dělitel a, b). Protože

$$a \cdot b = n \cdot D = 693 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11,$$

mohou nastat pouze následující případy:

a	1	3	7	9	11	21	33	63	77	99	231	693
b	693	231	99	77	63	33	21	11	9	7	3	1

Je třeba ověřit, že pro tato čísla je součin $n \cdot D$ skutečně roven 693. Stačí samozřejmě ověřit jen polovinu této tabulky. (Ověřte sami.)

2. způsob (s použitím rozkladu na součiny $a = a_1 \cdot D$, $b = b_1 \cdot D$, kde D je největší společný dělitel a, b a činitele a_1 a b_1 jsou nesoudělná čísla). Protože $n = a_1 b_1 D$, můžeme součin $n \cdot D$ nyní zapsat:

$$n \cdot D = a_1 b_1 D \cdot D = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$$

Odtud můžeme sestavit tabulku:

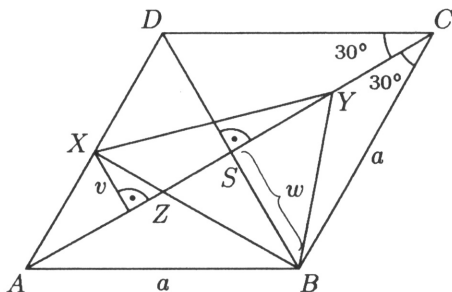
D	1	1	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3
a_1	9	77	7	99	11	63	1	693	1	77	7	11
b_1	77	9	99	7	63	11	693	1	77	1	11	7
a	9	77	7	99	11	63	1	693	3	231	21	33
b	77	9	99	7	63	11	693	1	231	3	33	21

Dostali jsme stejný výsledek jako při 1. způsobu. Je tedy celkem 6 dvojic hledaných čísel a, b (na pořadí nezáleží):

1, 693 3, 231 7, 99 9, 77 11, 63 21, 33

Řešení úlohy Z8–II–3 (str. 26)

Situaci znázorňuje obrázek 13. Obsah trojúhelníku XYB vypočítáme jako součet obsahů trojúhelníků ZXY a ZYB .



Obr. 13

Bod Z je těžištěm trojúhelníku ABD , proto je $|ZS| = \frac{1}{3}|AS|$. Oba trojúhelníky ABD a BDC jsou rovnostranné, neboť jejich shodné strany svírají úhel velikosti 60° . Úhlopříčka BD kosočtverce $ABCD$ má tedy délku a a její polovina $BS = w = \frac{1}{2}a$. Pomocí Pythagorovy věty z trojúhelníku ABS vypočítáme:

$$|AS| = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$$

Odtud vypočítáme:

$$|ZS| = \frac{1}{6}a\sqrt{3}, \quad |SY| = \frac{1}{4}a\sqrt{3}$$

Sečtením dostaneme:

$$|ZY| = \frac{5}{12}a\sqrt{3}$$

Výška v trojúhelníku ZYX je rovna střední příčce trojúhelníku ASD (rovnoběžné s DS), a proto je $v = \frac{1}{4}a$. Můžeme tedy vypočítat obsahy obou trojúhelníků ZYX a ZYB :

$$S_{ZYX} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12}a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{4}a = \frac{5}{96}a^2\sqrt{3}$$

$$S_{ZYB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12}a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{5}{48}a^2\sqrt{3}$$

Sečtením a po úpravě vyjde:

$$S_{XYB} = \frac{5}{32}a^2\sqrt{3}$$

Snadno se přesvědčíte, že to je $\frac{5}{16}$ z obsahu daného kosočtverce $ABCD$.

Řešení úlohy Z8–II–4 (str. 26)

Budeme vytvářet jedno družstvo, například to, ve kterém bude hrát Matěj s Kubou. K nim musíme přidat tři chlapce. Jedním z nich je Jožka, anebo Ondřej (ale ne oba současně). Jsou tedy možnosti:

$$M \ K \ J \ \cdot \cdot \qquad M \ K \ O \ \cdot \cdot$$

Poslední dva chlapce musíme vybrat ze zbývajících šesti chlapců. To můžeme udělat 15 způsoby. Což zjistíme buď výčtem všech možností, nebo jako počet dvojprvkových kombinací vybraných ze 6 prvků, tj. $\binom{6}{2} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 15$. Celkem je dvakrát 15 možností, tj. dohromady 30 možností.

ŘEŠENÍ ÚLOH II. KOLA

Náhradní termín 20. 2. 1991

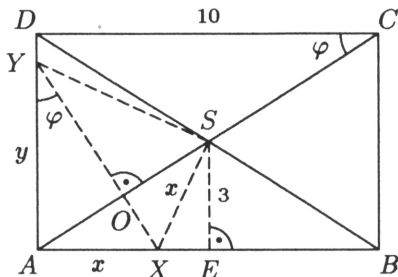
Řešení úlohy Z8–II–1 (str. 26)

Situaci znázorňuje obrázek 14. Přehybem je úsečka XY , která je kolmá k úsečce AS a prochází jejím středem. (Přímka XY je osa úsečky AS .) Proto je $|AX| = |XS| = x$.

Pravoúhlý trojúhelník EXS má délky odvěsen 3 a $5 - x$ a délku přepony x . Podle Pythagorovy věty je

$$3^2 + (5 - x)^2 = x^2,$$

odkud vypočítáme $x = 3,4$.



Obr. 14

Úhly AYX a DCA jsou shodné, neboť jsou oba ostré a jejich ramena jsou navzájem kolmá. Proto jsou trojúhelníky AYX a DCA podobné podle věty (uu). Takže můžeme napsat:

$$y : x = 10 : 6$$

Po dosazení za x vypočítáme $y = \frac{17}{3}$.

Tento dílčí výsledek potvrzuje správnost našeho obrázku, tj. že bod Y leží mezi body A , D . Nyní již pomocí Pythagorovy věty vypočítáme délku úsečky XY :

$$|XY| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3,4^2 + \left(\frac{17}{3}\right)^2} \doteq 6,6 \text{ (cm)}$$

Poznámka. Vyřešte sami úlohu, která je obměnou úlohy Z8-II-1. Obdélník $ABCD$ má pevnou délku strany AB rovnou 10 cm a proměnlivou délku strany BC . Zjistěte, kdy úsečka přehybu má krajní bod Y v bodě D a kdy na straně DC . Délku úsečky XY vypočítejte v závislosti na délce BC .

Řešení úlohy Z8-II-2 (str. 27)

Čísla a , b rozložíme na součiny tvaru

$$a = x \cdot D, \quad b = y \cdot D, \quad (\text{R})$$

kde D je největší společný dělitel čísel a , b a čísla x , y jsou nesoudělná. Potom můžeme nejmenší společný násobek n čísel a , b zapsat ve tvaru $a = xyD$.

Podle předpokladu je $n : D = 342$. Odtud dostaneme:

$$n : D = xyD : D = xy = 342$$

Rozložíme číslo 342 na součin prvočísel:

$$342 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 19$$

Pro nesoudělná čísla x , y máme tedy možnosti:

$$1, 342 \quad 2, 171 \quad 9, 38 \quad 18, 19$$

(Rozklady čísla 342 na součiny $3 \cdot 114$ a $6 \cdot 57$ nevyhovují, neboť činitelé nejsou nesoudělní.) Nyní budeme počítat a , b z rovností (R), kde se za D budeme snažit volit taková čísla, abychom dostali trojciferná čísla a , b . Z toho je vidět,

že první dvě možnosti pro x , y , tj. 1, 342 a 2, 171 nemohou vyhovovat. Nelze zvolit D tak, aby a , b byla současně trojčiferná čísla. Uvažujeme dvojici $x = 9$, $y = 38$. Aby byly součiny $xD = 9D$ a $yD = 38D$ současně trojčiferná čísla, musí být:

$$99 < 9D < 1\,000 \quad 99 < 38D < 1\,000$$

To znamená:

$$11 < D < 111,1 \quad 2,6 < D < 26,3$$

Těmto nerovnostem vyhovují současně čísla $D = 12, 13, \dots, 26$, tj. celkem 15 čísel. Z nich dostaneme čísla a , b .

108, 456	153, 646	198, 836
117, 494	162, 684	207, 874
126, 532	171, 722	216, 912
135, 570	180, 760	225, 950
144, 608	189, 798	234, 988

Nakonec uvažujeme dvojici $x = 18$, $y = 19$. Podobně jako výše dostaneme nerovnosti:

$$99 < 18 \cdot D < 1\,000 \quad 99 < 19 \cdot D < 1\,000$$

$$5,5 < D < 55,5 \quad 5,2 < D < 52,6$$

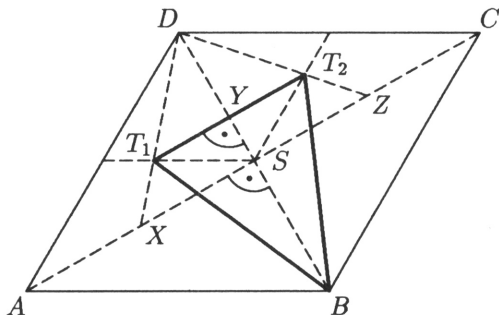
Těmto nerovnostem vyhovují čísla $D = 6, 7, \dots, 52$, tj. celkem 47 čísel. Z nich dostaneme 47 možností pro čísla a , b . Uvedeme jen nejmenší a největší dvojici:

$$108, 936 \quad 936, 988$$

Úloha má celkem $47 + 15 = 62$ řešení.

Řešení úlohy Z8-II-3 (str. 27)

1. *způsob.* Situaci znázorňuje obrázek 15. Úsečka T_1T_2 je rovnoběžná s úsečkou XZ jak plyne ze stejnolehlosti se středem stejnolehlosti D a s koeficientem $\frac{2}{3}$. Protože je $ABCD$ kosočtverec, jsou úhlopříčky AC a BD navzájem kolmé. Odtud plyne i kolmost T_1T_2 a BY . V trojúhelníku T_1T_2B je tedy BY výška příslušná k T_1T_2 . K výpočtu obsahu trojúhelníku tedy stačí vypočítat délky T_1T_2 a BY .



Obr. 15

Ze stejnolehlosti se středem D a koeficientem $\frac{2}{3}$ plyne, že délka T_1T_2 se rovná $\frac{2}{3}$ délky XZ . Protože X, Z jsou po řadě středy úseček AS, SC , je délka XZ rovna polovině délky úhlopříčky AC . Odtud plyne:

$$|T_1T_2| = \frac{1}{3}|AC| = \frac{2}{3}|AS|$$

Délku AS vypočítáme snadno jako výšku rovnostranného trojúhelníku ABD . Je-li délka strany AB rovna a , je:

$$|AS| = \frac{\sqrt{3}}{2}a \quad \text{a} \quad |T_1T_2| = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

Délka BY je rovna $\frac{2}{3}$ délky BD , tj. $\frac{2}{3}a$. Odtud vypočítáme obsah S trojúhelníku T_1T_2B :

$$S = \frac{1}{9}a^2\sqrt{3}.$$

2. způsob. Vypočítáme, jakou částí obsahu rovnoběžníku $ABCD$ je obsah trojúhelníku T_1T_2B . Tyto obsahy jsou ve stejném poměru jako obsahy trojúhelníků ABD a BYT_1 .

Strana BY je rovna $\frac{2}{3}$ délky strany BD . Výška T_1Y pravouhlého trojúhelníku BYT_1 je rovna $\frac{1}{3}$ výšky AS trojúhelníku ABD . Proto je obsah S trojúhelníku BT_1T_2 roven:

$$S = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} S_{ABD} = \frac{2}{9} S_{ABD}$$

Podobně je obsah trojúhelníku T_1T_2 roven $\frac{2}{9}$ obsahu rovnoběžníku $ABCD$.

Poznámka k úloze Z8-II-3. Z 2. způsobu řešení snadno vyplyne, že tvrzení uvedené v jeho závěru platí pro každý rovnoběžník, nikoli jen pro kosočtverec s úhlem při vrcholu A velikosti 60 stupňů. Doporučujeme vám, abyste si to sami podrobněji promysleli.

Řešení úlohy Z8-II-4 (str. 27)

Řešení neuvádíme, protože tato úloha je stejná s úlohou 4 na str. 24.

ŘEŠENÍ ÚLOH III. KOLA

Řešení úlohy Z8–III–1 (str. 27)

Honza měl počítat součin čísel A a B . Místo čísla $A = 10x + y$ vzal číslo $10y + x$.

Pro rozdíl výsledků platí:

$$3\,816 = (10y + x)B - (10x + y)B$$

Po úpravě:

$$8 \cdot 53 = (y - x)B$$

Protože číslo B je dvojciferné, dostáváme jedinou možnost $y - x = 8$, tj. $y = 9$, $x = 1$.

Správný výsledek měl být $19 \cdot 53 = 1\,007$. Honza však počítal $91 \cdot 53 = 4\,823$, což je opravdu o $3\,816$ více než $1\,007$.

Řešení úlohy Z8–III–2 (str. 28)

Poměr počtu koní k počtu koz a krav je $13 : 87$, přitom počet koz a krav dohromady musí být dělitelný devíti. Protože $13 : 87 = 13 : (3 \cdot 29) = (3 \cdot 13) : (9 \cdot 29)$, je nejmenší počet koní 39 , koz 29 a krav $8 \cdot 29 = 232$.

Řešení rovnicí: Počet koní označme x , krav y a počet koz z . Pak:

$$x = \frac{13}{100}(x + y + z) = \frac{13}{100}(x + 9z)$$

Odtud $3 \cdot 29 \cdot x = 13 \cdot 9 \cdot z$, takže nejmenší možný počet koní je $x = 13 \cdot 3$, koz $z = 29$, krav $y = 8 \cdot 29$.

Řešení úlohy Z8-III-3 (str. 28)

1. Podle předpokladu je:

$D(a, b) = 3$, tzn. a, b jsou násobky 3;

$D(b, c) = 4$, tzn. b, c jsou násobky 4;

$D(a, c) = 5$, tzn. a, c jsou násobky 5;

2. Proto je $a = 3 \cdot 5 \cdot x$, $b = 3 \cdot 2^2 \cdot y$, $c = 2^2 \cdot 5 \cdot z$, zároveň x není násobek 2 (jinak by $D(a, b)$ byl násobek 2). Podobně zjistíme, že y není násobek 5 a z není násobek 3.

3. $n(a, b, c) = 1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.

4. Proto je x nebo y násobek 3, x nebo z násobek 5, y nebo z násobek 2. Jsou možnosti:

$(a = 3 \cdot 5 \cdot x)$	x :	3·5	3·5	5	1	1	3	3	5
$(b = 3 \cdot 2^2 \cdot y)$	y :	2	1	2·3	2·3	3	1	2	3
$(c = 2^2 \cdot 5 \cdot z)$	z :	1	2	1	5	2·5	2·5	5	2

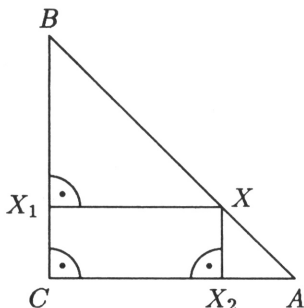
5. Pro čísla a, b, c jsou možnosti:

a	225	225	75	15	15	45	45	75
b	24	12	72	72	36	12	24	36
c	20	40	20	100	200	200	100	40

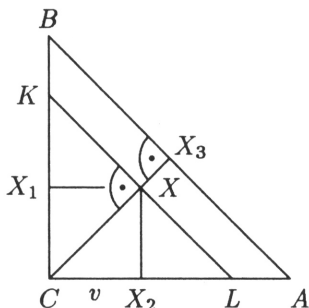
Úloha má tedy 8 řešení.

Řešení úlohy Z8-III-4 (str. 28)

a) Hledaná množina je přepona AB (obr. 16). Důkaz: $|XX_1| + |XX_2| + 0 = |BX_1| + |X_1C| = |BC|$ (plyne z rovnoramenných trojúhelníků).



Obr. 16



Obr. 17

b) Hledaná množina bude úsečka KL rovnoběžná s AB , neboť $|XX_1| + |XX_2| = |KC|$ a $|XX_3|$ se nemění. Určíme vzdálenost $|XX_3|$; stačí pro bod na výšce k přeponě AB (obr. 17):

$$\begin{aligned} |XX_1| + |XX_2| + |XX_3| &= 2v + |CX_3| - v\sqrt{2} = \\ &= 2v + 5\sqrt{2} - v\sqrt{2} = v(2 - \sqrt{2}) + 5\sqrt{2} = 9 \end{aligned}$$

Odtud vypočteme:

$$v = \frac{9 - 5\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \doteq 3,3$$

Pro body K, L tedy platí: $|KC| = |LC| = 2v \doteq 6,6$.

Kategorie Z7

ÚLOHY I. KOLA

(Řešení úloh na str. 58)

Z7 – I – 1

Délka hrany dané krychle je v centimetrech vyjádřena celým číslem. Její objem je v centimetrech krychlových šesticiferné číslo, které je násobkem 1 008. Vyjádřete délku hrany této krychle.

Z7 – I – 2

Je dána kružnice k se středem S a poloměrem r a bod C , který na ní neleží. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC s vrcholy A, B na kružnici k . Zjistěte, kdy má úloha 0, 1, 2, 3 a více řešení. Své tvrzení odůvodněte.

Z7 – I – 3

Nahradte hvězdičky číslicemi tak, aby platilo naznačené násobení:

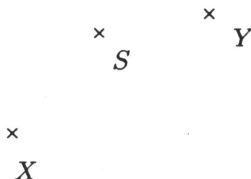
$$\begin{array}{r} * * \\ \cdot * * \\ \hline * * * \\ * * * \\ \hline 9 * * * \end{array}$$

Z7 – I – 4

Čtyři kamarádi mají kuličky. Každý z nich má o 34 kuliček více, než je pětina kuliček, které mají ostatní dohromady. Kolik kuliček má každý z nich?

Z7 – I – 5

Jsou dány body X , Y , S (obr. 17). Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby bod X ležel na přímce AB , bod Y na přímce BC a bod S byl střed čtverce.



Obr. 17

Z7 – I – 6

Anička pěstovala 6 různých pokojových květin. Věděla, že květiny je třeba občas hnojit. Jednotlivé květiny potřebovaly tyto dávky hnojiva: 1 dl, 2 dl, 3 dl, 4 dl, 5 dl a 6 dl. Anička si připravila 21 dl hnojiva do větší nádoby. Kromě ní měla dvě odměrky; jednu na 5 dl a druhou na 12 dl. Jak pomocí těchto odměrek může rozdělit jednotlivým květinám potřebné množství hnojiva? (Značky na nádoby se nedají dělat.)

ÚLOHY II. KOLA

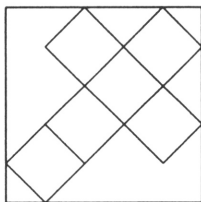
(Řešení úloh na str. 65)

Z7 – II – 1

Velká krychle byla složena z jednotkových krychlí tří barev. Z nich bylo $\frac{13}{72}$ červených a $\frac{25}{48}$ modrých. Zelených krychlí bylo méně než 1 000. Kolik bylo celkem krychlí, kolik bylo červených, kolik modrých a kolik zelených?

Z7 – II – 2

Ze čtverce byl vystřižen kříž tvořící síť krychle (viz obr. 18). Určete procento odpadu.



Obr. 18

Z7 – II – 3

Macecha dala Popelce přebrat pytel čočky smíchané s fazolemi. Hmotnost čočky a fazolí v něm byla v poměru 2 : 3. Maceše se zdálo čočky málo, tak jí přidala ještě 2 kg. Tím se změnil poměr čočky k fazolím na takový, jako předtím byl poměr fazolí k čočce. Kolik kilogramů čočky a kolik kilogramů fazolí měla Popelka přebrat?

ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA

Řešení úlohy Z7-I-1 (str. 55)

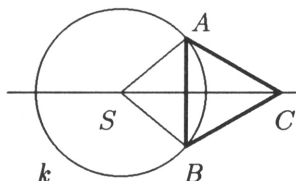
Rozklad čísla 1 008 na součin prvočísel je $2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$. Nejmenší číslo, které je třetí mocninou přirozeného čísla a současně násobkem 1 008 je $2^6 \cdot 3^3 \cdot 7^3 = 592\,704$. Toto číslo je navíc šesticiferné, takže objem dané krychle je $592\,704 \text{ cm}^3$ a délka její hrany je rovna 84 cm.

Nejbližší větší třetí mocnina přirozeného čísla k číslu 592 704 je $2^3 \cdot 592\,704 = 4\,741\,632$. Protože toto číslo již není šesticiferné, je nalezené řešení jediným řešením úlohy.

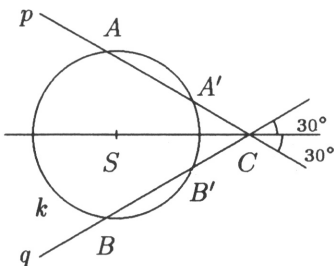
Řešení úlohy Z7-I-2 (str. 55)

Rozbor. Trojúhelníky SAC a SBC jsou shodné podle věty (sss) (obr. 19). Je tedy $|\sphericalangle SCA| = |\sphericalangle SCB| = 30^\circ$.

Konstrukce. Nejprve sestrojíme přímkou SC , pak bodem C vedeme přímky p a q svírající s přímkou SC úhel 30° .



Obr. 19

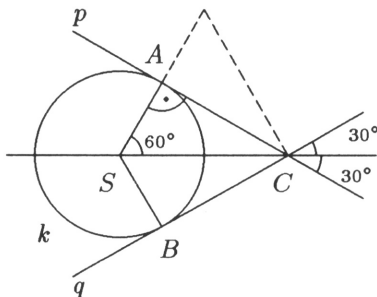


Obr. 20

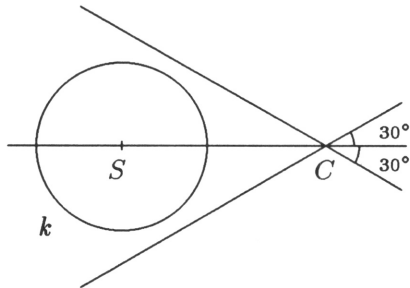
Body A a B jsou ty dvojice průsečíků přímek p a q s kružnicí k , které jsou souměrně sdružené podle přímky SC (obr. 20).

Snadno se můžeme přesvědčit, že všechny takto sestrojené trojúhelníky jsou řešením úlohy. Body A, B leží na kružnici k a trojúhelník ABC je rovnostranný, neboť je rovnoramenný (body A a B jsou souměrně sdružené podle přímky SC) a současně jeho ramena AC a BC svírají úhel 60° . Podle počtu společných bodů přímek p a q s kružnicí k dostáváme různé počty řešení:

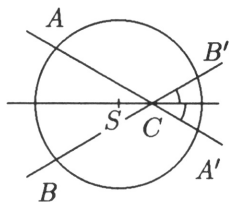
Úloha má jedno řešení, jsou-li přímky p a q tečnami kružnice k . V takovém případě (obr. 21) $|\angle ASC| = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, takže trojúhelník SAC je polovinou rovnostranného trojúhelníku s výškou AC . Na obrázku je toto doplnění naznačeno a je z něho patrné, že pro tento případ platí $|SC| = 2|SA| = 2r$.



Obr. 21



Obr. 22



Obr. 23

Je-li $|SC| > 2r$, úloha nemá řešení (obr. 22) a v případě $0 < |SC| < 2r$, $|SC| \neq r$ má dvě řešení (obr. 20, 23).

Jestliže $S = C$, má úloha nekonečně mnoho řešení.

Případ, kdy bod C leží na kružnici k , je v zadání úlohy vyloučen (úloha by v takovém případě měla jedno řešení).

Shrňme: Úloha nemá řešení, je-li $|SC| > 2r$.

Úloha má: jedno řešení, je-li $|SC| = 2r$; dvě řešení, je-li $0 < |SC| < 2r$, $|SC| \neq r$; nekonečně mnoho řešení, je-li $|SC| = 0$.

Úloha nikdy nemůže mít 3 řešení.

Poznámka. Úlohu můžeme řešit také pomocí otáčení kružnice k kolem bodu C o úhel $\pm 60^\circ$. Společný bod kružnice k a otočené kružnice různý od bodu C (pokud existuje) je jedním z vrcholů rovnostranného trojúhelníku.

Řešení úlohy Z7-I-3 (str. 55)

Označme neznámá dvojčíferná čísla a a b . Musí platit $a \cdot b \geq 9000$. Menší z obou čísel (případně obě, pokud se sobě rovnají), nemůže být menší nebo rovno 90, neboť $90 \cdot 99 < 9000$. Obě čísla jsou tedy větší než 90. Uvažujme všechny možnosti pro $a = 91, 92, \dots, 99$.

Je-li $a = 91$, dostáváme pro b z nerovnice $a \cdot b \geq 9\,000$ podmínku $b \geq 9\,000 : 91 = 98,90\dots$. Pro b tak máme jedinou možnost $b = 99$.

Je-li $a = 92$, je $b \geq 9\,000 : 92 = 97,82\dots$, tj. $b = 98$ nebo $b = 99$.

Podobně obdržíme další řešení. Celkem dostáváme tyto součiny:

$91 \cdot 99 = 9\,009$	$94 \cdot 98 = 9\,212$	$96 \cdot 98 = 9\,408$
	$94 \cdot 99 = 9\,306$	$96 \cdot 99 = 9\,504$
$92 \cdot 98 = 9\,016$		
$92 \cdot 99 = 9\,108$	$95 \cdot 95 = 9\,025$	$97 \cdot 97 = 9\,409$
	$95 \cdot 96 = 9\,120$	$97 \cdot 98 = 9\,506$
$93 \cdot 97 = 9\,021$	$95 \cdot 97 = 9\,215$	$97 \cdot 99 = 9\,603$
$93 \cdot 98 = 9\,114$	$95 \cdot 98 = 9\,300$	
$93 \cdot 99 = 9\,207$	$95 \cdot 99 = 9\,405$	$98 \cdot 98 = 9\,604$
		$98 \cdot 99 = 9\,702$
$94 \cdot 96 = 9\,024$	$96 \cdot 96 = 9\,216$	
$94 \cdot 97 = 9\,118$	$96 \cdot 97 = 9\,312$	$99 \cdot 99 = 9\,801$

Zbývající možnosti pak dostaneme záměnou činitelů. Nakonec nahradíme hvězdičky číslicemi. Přitom vyloučíme násobení

$$\begin{array}{r} 99 \\ \cdot 91 \\ \hline \end{array}$$

neboť v následujícím řádku by bylo pouze dvojciferné číslo.

Řešení úlohy Z7-I-4 (str. 56)

Je zřejmé, že všichni museli mít stejný počet kuliček. Označme x počet kuliček každého z chlapců. Ostatní ka-

kamarádi mají pak $3x$ kuliček, takže podle zadání platí:

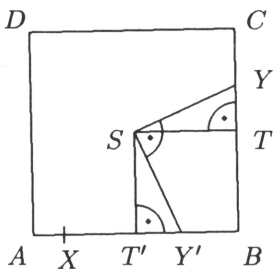
$$x = 34 + \frac{3x}{5}$$

Řešením této rovnice je $x = 85$.

Každý z chlapců měl 85 kuliček.

Řešení úlohy Z7–I–5 (str. 56)

Rozbor. Bodem S vedme přímku kolmou na SY a její průsečík se stranou AB označme Y' (obr. 24).



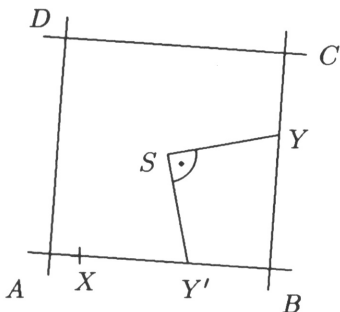
Obr. 24

Ukážeme, že $|SY| = |SY'|$. K tomu si vezmeme na pomoc paty kolmic T a T' spuštěných z bodu S postupně na strany BC a AB . Trojúhelníky STY a $ST'Y'$ jsou shodné podle věty *usu*, neboť $|ST| = |ST'|$, $|\sphericalangle YST| = 90^\circ - |\sphericalangle Y'ST| = |\sphericalangle Y'ST'|$ a $|\sphericalangle STY| = |\sphericalangle ST'Y'| = 90^\circ$. Je tedy $|SY| = |SY'|$.

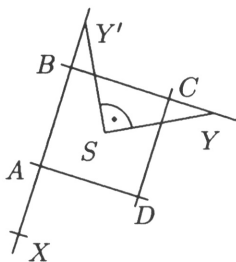
Konstrukce. Nejprve sestrojíme bod Y' : Bodem S vedeme kolmici k přímce SY a na této kolmici najdeme bod Y' tak, aby $|SY| = |SY'|$ (existují dva takové body). Z toho co jsme řekli, plyne, že bod Y' musí ležet na přímce AB . Tím již známe vedle bodu X druhý bod ležící na přímce AB . To nám stačí k sestrojení přímky AB . (Musíme se ovšem přesvědčit, že body X a Y' jsou různé a určují tedy přímku. Uvažte, že k tomu, aby bylo $X = Y'$, by musel být úhel XSY pravý a navíc $|XS| = |SY|$. To však není při daném zadání splněno.)

Protože je dán střed čtverce, je po sestrojení jedné z jeho stran snadné konstrukci dokončit. (Proč nemůže ležet střed S čtverce při daném zadání bodů X , Y a S na sestrojené přímce XY' ?)

Dvěma možnostem pro sestrojení bodu Y' odpovídají dvě řešení (obr. 25, 26).



Obr. 25



Obr. 26

Poznámky. 1. Řešení úlohy v podstatě obchází pojem otočení, neboť jej žáci sedmých tříd většinou ještě neznají. Uži-

tím otočení o 90° kolem středu S se zdůvodnění zjednoduší: Bod Y' je obrazem bodu Y v tomto otočení, a protože po otočení se čtverec zobrazí na sebe, musí Y' ležet na straně AB .

2. Protože poloha bodů byla zadána, odpadá diskuse počtu řešení. V případě, že by byl $\angle XSY$ pravý, úloha by měla buď nekonečně mnoho řešení (pro $|SX| = |SY|$), nebo by neměla řešení (pro $|SX| \neq |SY|$).

Řešení úlohy Z7-I-6 (str. 56)

Anička mohla získat potřebné dávky hnojiva postupně např. takto:

- 3 dl: Odměrku na 12 dl naplní pomocí odměrky na 5 dl deseti decilitry hnojiva. Pak naplní odměrku na 5 dl a doplní z ní odměrku na 12 dl. V menší odměrce jí zůstanou potřebné tři decilitry hnojiva.
- 1 dl: Zbývajících 18 dl naplní Anička obě odměrky. V nádobě jí zbude 1 dl na zalití nejskromnější kyticky.
- 2 dl a 4 dl: 2 dl hnojiva může Anička získat pomocí svých odměrek tak, že naplní odměrku na 12 dl a z ní pomocí menší odměrky odleje 10 dl. To může opakovat třikrát a zalít květiny, které potřebují 2 dl a 4 dl hnojiva.
- 5 dl a 6 dl: Anižce zůstává 11 dl hnojiva. Menší odměrkou zaleje květinu, která potřebuje 5 dl a pro poslední zbude potřebných 6 dl hnojiva.

Popsané řešení není jediné. Úlohu lze řešit i jiným způsobem.

Návodná úloha. Jak můžeme pomocí daných odměrek zalít jednotlivé kyticky bez ohledu na ostatní (tj. i s vyléváním mimo).

ŘEŠENÍ ÚLOH II. KOLA

Řešení úlohy Z7-II-1 (str. 57)

Objem velké krychle je třetí mocninou přirozeného čísla (délky její strany), navíc musí být násobkem 48, protože $\frac{25}{48}$ z tohoto objemu je rovno počtu modrých krychlíček.

Nejmenší třetí mocnina přirozeného čísla, která je současně násobkem 48 ($= 2^4 \cdot 3$) je $2^6 \cdot 3^3 = 1\,728$, takže počet všech krychlíček musí být násobkem čísla 1 728.

Počet všech krychlíček musí být dále dělitelný 72, neboť $\frac{13}{72}$ z nich je červených. Protože 1 728 je již násobkem 72, neplyne odtud žádná další podmínka.

Při celkovém počtu krychlíček rovném 1 728 by bylo modrých krychlíček $\frac{25}{48} \cdot 1\,728 = 900$, červených $\frac{13}{72} \cdot 1\,728 = 312$ a zelených $1\,728 - 900 - 312 = 516$. Počet zelených krychlíček vyšel menší než 1 000, takže jsme dostali řešení úlohy.

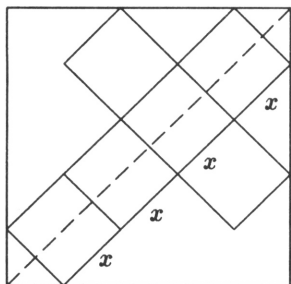
Protože pro další násobky čísla 1 728 bychom pro počet zelených krychlíček dostali další násobky 516, tj. již čísla větší než 1 000, je nalezené řešení jediným řešením úlohy.

Odpověď: Celkem bylo 1 728 krychliček. Z toho modrých bylo 900, červených 312 a zelených 516.

Řešení úlohy Z7-II-2 (str. 57)

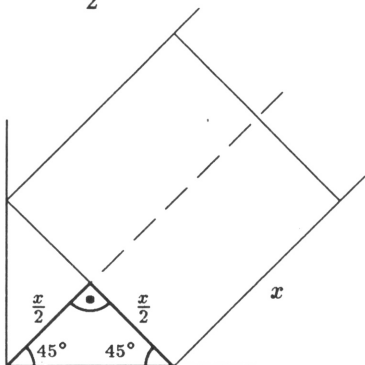
1. řešení. Vyjádříme-li délku úhlopříčky čtverce jednak pomocí délky a strany čtverce a jednak pomocí délky x hrany krychle (viz obr. 27 a obr. 28, kde je zobrazen dolní roh čtverce), dostaneme:

$$a\sqrt{2} = \frac{x}{2} + 4x + \frac{x}{2} = 5x$$



a

Obr. 27



Obr. 28

Odtud nejdříve vypočteme délku hrany krychle

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{5}$$

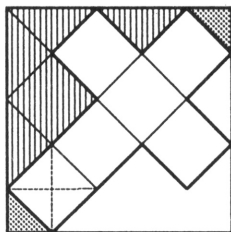
a její povrch S :

$$S = 6x^2 = \frac{12}{25}a^2$$

Nakonec vypočítáme hledané procento odpadu:

$$\frac{a^2 - \frac{12}{25}a^2}{a^2} \cdot 100 (\%) = 52 (\%)$$

2. řešení. Zvolme obsah čtverečku v síti za jednotkový. Výpočet obsahu odpadu sledujme na obrázku 29.



Obr. 29

Obsah vyšrafované části je $4 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 3$. Z naznačeného rozdělení levého dolního čtverečku sítě vidíme, že obsah každé z vytečkovaných částí je $\frac{1}{4}$. Konečně zbývající (nevyšrafovaná) část odpadu je shodná s vyšrafovanou částí, takže celková plocha odpadu je $3 + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 = 6,5$. Obsah čtverce obdržíme přičtením obsahu sítě. Ten je roven šesti. Odpad tedy tvoří

$$\frac{6,5}{6,5 + 6} = \frac{6,5}{12,5} = \frac{13}{25}$$

celku, což je 52 %.

Odpověď. Odpad po vystřížení kříže byl 52 %.

Řešení úlohy Z7-II-3 (str. 57)

1. řešení. Před přidáním čočky byla hmotnost čočky rovna $\frac{2}{3}$ hmotnosti fazolí a po přidání dvou kilogramů $\frac{3}{2}$ hmotnosti fazolí. Přidané 2 kg čočky tedy tvoří $\frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$ hmotnosti fazolí. Fazolí tedy bylo $2 \text{ kg} \cdot \frac{6}{5} = \frac{12}{5} \text{ kg} = 2,4 \text{ kg}$ a čočky (před přidáním) $\frac{2}{3} \cdot \frac{12}{5} \text{ kg} = 1,6 \text{ kg}$.

2. řešení (rovnici). Označíme-li c hmotnost čočky a f hmotnost fazolí, platí:

$$\frac{c}{f} = \frac{2}{3} \quad \text{a} \quad \frac{c+2}{f} = \frac{3}{2}.$$

Řešením těchto rovnic je $f = 2,4 \text{ (kg)}$, $c = 1,6 \text{ (kg)}$.
Ověřte sami.

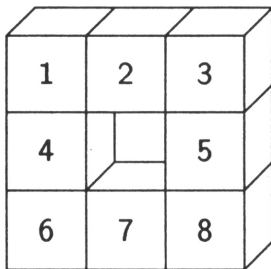
Odpověď: Popelka měla původně přebrat 2,4 kg fazolí a 1,6 kg čočky.

ÚLOHY I. KOLA

(Riešenia úloh na str. 73)

Z6 – I – 1

Na obrázku 30 je znázornené teleso zložené z ôsmich kociek s hranou 1 cm. Koľko štvorcov so stranou 1 cm tvorí povrch tohto telesa? Aký je najmenší počet farieb, ktorými možno vyfarbiť tieto štvorce tak, aby žiadne dva, ktoré majú spoločnú stranu, neboli vyfarbené tou istou farbou? Spôsob vyfarbenia opíšte alebo nakreslite.



Obr. 30

Z6 – I – 2

Hviezdičky nahradzte číslicami tak, aby platilo naznačené násobenie.

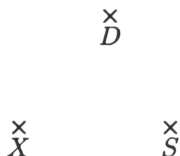
$$\begin{array}{r} \text{**} \\ \cdot \text{ **} \\ \hline *5* \\ *8* \\ \hline 2052 \end{array}$$

V českom letáku:

$$\begin{array}{r} \text{**} \\ \cdot \text{ **} \\ \hline *6* \\ *8* \\ \hline 2052 \end{array}$$

Z6 – I – 3

Dané sú tri body X , D , S (obr. 31). Zostrojte obdĺžnik $ABCD$ tak, aby bod S bol jeho stred a bod X ležal na priamke AB .



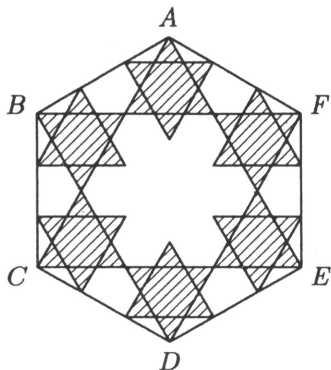
Obr. 31

Z6 – I – 4

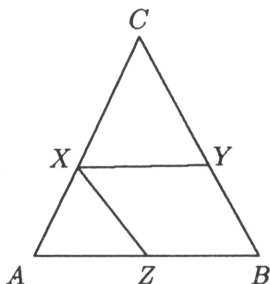
Štyria kamaráti majú spolu 206 guľôčok. Každý z nich (okrem najmladšieho) má o 5 guľôčok viac, ako je polovica z guľôčok, ktoré majú spolu od neho mladší kamaráti. Koľko guľôčok má každý z nich?

Z6 - I - 5

Z lesklej hliníkovej fólie tvaru pravidelného šesťuholníka $ABCDEF$ bola vystrihnutá vianočná ozdoba, ktorú tvorí 6 pravidelných hviezd (obr. 32). Narysujte ozdobu, ktorá vznikne zo šesťuholníka so stranou $a = 6$ cm. Rysujte čo najpresnejšie. Vyjadrite zlomkom veľkosť odpadu.



Obr. 32



Obr. 33

Z6 - I - 6

V trojuholníku ABC (obr. 33) platí:

$$|\angle ZBY| = 61^\circ, \quad |\angle XCY| = 55^\circ,$$

$$|\angle ZXY| = 53^\circ \quad \text{a} \quad |AZ| = |ZX|.$$

Zistite, či je dvojica priamok AB , XY alebo dvojica priamok BC , XZ rovnobežná.

ÚLOHY II. KOLA

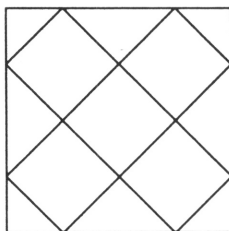
(Riešenia úloh na str. 81)

Z6 – II – 1

V danom trojuholníku bol najväčší uhol o 4° menší ako súčet ostatných dvoch. Najmenší uhol bol štyrikrát menší ako súčet ostatných dvoch. Určte uhly daného trojuholníka.

Z6 – II – 2

Zo štvorca bol vystrihnutý kríž, ktorý je zložený z 5 zhodných štvorcov. Odpad tvorili rovnoramenné trojuholníky, ktorých obsah spolu bol 48 cm^2 . Určte obsah pôvodného štvorca (obr. 34).



Obr. 34

Z6 – II – 3

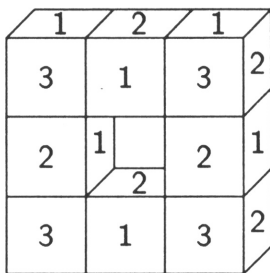
Martinka počítala úlohu. Keď prišla do školy, zistila, že sa jej v taške rozbila fixka a urobila machuľu. Tak sa stalo, že z výsledku vedela prečítať len $57*7*$, číslice na mieste

* boli nečitateľné. Martinka si však pamätala, že výsledok bol deliteľný 12. Aké sú všetky možnosti výsledkov?

RIEŠENIA ÚLOH I. KOLA

Riešenie úlohy Z6-I-1 (str. 69)

Povrch telesa tvorí 32 štvorcov — 8 vpredu, 8 vzadu, 12 „dookola“ a 4 „v diere“. Jedno z možných vyfarbení je na obr. 35.



Obr. 35

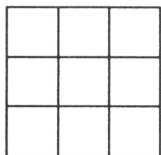
Rovnaké čísla v obrázku znamenajú rovnaké farby. Protíľahlé steny jednotlivých kociek sú vyfarbené rovnakou farbou. Teleso teda možno vyfarbiť tromi farbami. Že sa to nedá dvoma farbami je možné vidieť na „rohových kockách“ — museli by byť dve rovnaké farby vedľa seba.

Poznámky. Teleso možno vyfarbiť aj inými spôsobmi.

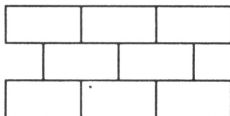
Úloha sa dá riešiť aj rozvinutím povrchu telesa do roviny — do siete telesa.

Pomocné úlohy

1. Kolkými farbami a ako možno podobným spôsobom vyfarbiť útvary na obrázku 36a, b.



Obr. 36a



Obr. 36b

2. Kolkými farbami a ako možno podobným spôsobom vyfarbiť kocku?

Riešenie úlohy Z6-I-2 (str. 70)

1. *riešenie.* Najskôr určíme medzivýsledky. To môžeme určiť jednoznačne:

$$\begin{array}{r} \quad \quad ** \\ \cdot \quad ** \\ \hline \quad 252 \\ 180 \\ \hline 2052 \end{array}$$

V českej verzii:

$$\begin{array}{r} \quad \quad ** \\ \cdot \quad ** \\ \hline \quad 162 \\ 189 \\ \hline 2052 \end{array}$$

Neznámy prvý činiteľ súčinu musí deliť obidva medzivýsledky; teda bude to ich spoločný deliteľ. Pritom podiely, ktoré dostaneme vydelením medzivýsledkov spoločným deliteľom, musia byť jednociferné. Sú to cifry druhého činiteľa. Jediná možnosť potom je

$$252 = 36 \cdot 7$$

$$180 = 36 \cdot 5$$

V českej verzii:

$$162 = 27 \cdot 6$$

$$189 = 27 \cdot 7$$

Z toho už vychádza jednoznačné riešenie

$$\begin{array}{r} 36 \\ \cdot 57 \\ \hline 252 \\ 180 \\ \hline 2052 \end{array}$$

V českej verzii:

$$\begin{array}{r} 27 \\ \cdot 76 \\ \hline 162 \\ 189 \\ \hline 2052 \end{array}$$

2. riešenie. Najskôr nájdeme neznáme činitele. Súčin 2052 rozložíme na dva dvojciferné činitele. Sú to práve tri možnosti: $27 \cdot 76$, $36 \cdot 57$, $38 \cdot 54$. Preskúšame roznásobením, či vyhovujú medzivýsledky. Nesmieme zabudnúť na zmenu poradia činiteľov — teda šesť preskúšaní:

27	76	36	57	38	54
$\cdot 76$	$\cdot 27$	$\cdot 57$	$\cdot 36$	$\cdot 54$	$\cdot 38$
162	532	252	342	152	432
189	152	180	171	190	162
2052	2052	2052	2052	2052	2052

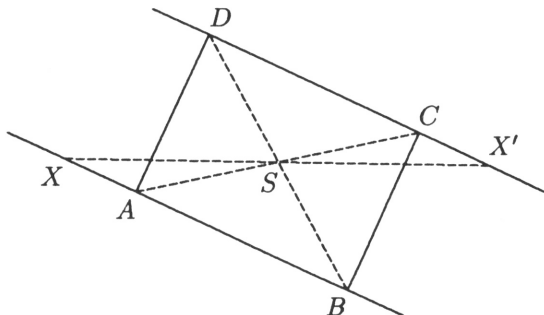
Len hrubo podčiarknutý súčin vyhovuje podmienkam úlohy — v medzisúčtoch musia byť v strede cifry 5 a 8 (resp. 6 a 8 v českej verzii). Teda úloha má práve jedno riešenie: v slovenskej verzii odpovedajúce súčinu $36 \cdot 57$ v českej verzii odpovedajúce súčinu $27 \cdot 76$.

Pomocné úlohy

Úlohy na algebrogramy napr. z učebnice Cvičenia z matematiky pre 6. ročník ZŠ, alebo zo zbierky Repáš, Pribišová, Vantuch: Úlohy z matematických olympiád pre ZŠ (SPN Bratislava, 1989, SPN Praha, 1991).

Riešenie úlohy Z6-I-3 (str. 70)

Uvažujeme, akoby sme úlohu už mali hotovú. Nakreslíme si ľubovoľný obdĺžnik $ABCD$, vyznačíme bod S a zvolíme bod X ľubovoľne na priamke AB (obr. 37).



Obr. 37

Je zrejmé, že obdĺžnik $ABCD$ je súmerný podľa stredu S . Teda priamka CD je obrazom priamky AB a teda bod X sa v stredovej súmernosti podľa stredu S musí zobrazíť do bodu X' ležiaceho na priamke CD . Na tom je založené riešenie úlohy.

Zostrojíme bod X' súmerne združený s bodom X podľa stredu S ; bodom D a bodom X je určená priamka, na ktorej leží strana CD . Obdĺžnik $ABCD$ už potom nie je problém zostrojiť. Stačí si uvedomiť, že susedné strany sú na seba kolmé.

Konštrukcia: (Predpokladáme, že body X , D , S zo zadania sú vyznačené.)

1. Zostrojíme bod X' súmerne združený s bodom X podľa stredu S .

2. Zostrojíme priamku DX' .
3. Zostrojíme priamku k kolmú na priamku DX' , prechádzajúcu bodom D .
4. Zostrojíme priamku l rovnobežnú s priamkou DX' , prechádzajúcu bodom X .
5. Zostrojíme bod A ako prienik priamok k, l .
6. Zostrojíme bod C , súmerne združený s bodom A podľa stred S .
7. Zostrojíme bod B , súmerne združený s bodom D podľa stred S .
8. Zostrojíme obdĺžnik $ABCD$.

Poznámka. Namiesto bodu X' sme mohli najprv zostrojiť bod B ako obraz bodu D v stredovej súmernosti podľa stred S .

Pomocné úlohy

1. Nájdite všetky stredy a osi súmerností a) štvorca, b) obdĺžnika, c) kosoštvorca, d) rovnobežníka.

2. Zostrojte štvorec $ABCD$, ak je daný jeho stred S a body X, Y , ktoré ležia a) na priamke AB , b) na rovnobežkách AB a CD (teda $X \in AB, Y \in CD$).

Riešenie úlohy Z6–I–4 (str. 70)

1. *riešenie* (úvahou). Ak by mal najstarší o 5 guľôčok menej, mal by polovicu z toho, čo majú ostatní spolu. Spolu by potom bolo $206 - 5 = 201$ guľôčok, teda najstarší by mal $201 : 3 = 67$ guľôčok a ostatní spolu 134 guľôčok. Najstarší má ale o 5 viac, teda najstarší má 72 guľôčok. Podobne, ak by zvyšní traja chlapci mali o 5 guľôčok druhého najstaršieho menej, mali by spolu $134 - 5 = 129$ guľôčok, teda druhý

najstarší by mal $129 : 3 = 43$ gulôčok. Ten má však o 5 viac, teda má 48 gulôčok. Tak isto, ak by mal tretí v poradí o 5 gulôčok menej, mal by polovicu z toho čo najmladší. Spolu by potom mali $86 - 5 = 81$ gulôčok, teda tretí najstarší má $81 : 3 + 5 = 27 + 5 = 32$ gulôčok a najmladší má $27 \cdot 2 = 54$ gulôčok.

Skúška: $54 + 32 + 48 + 72 = 206$.

Chlapci majú, v poradí od najstaršieho, 72, 48, 32, 54 gulôčok.

2. *riešenie* (rovniciou). Označme si počet gulôčok chlapcov od najstaršieho a, b, c, d . Potom zo zadania úlohy zrejme platí:

$$c = \frac{d}{2} + 5 = \frac{d+10}{2} = \frac{1}{2}(d+10)$$

$$b = \frac{c+d}{2} + 5 = \frac{\frac{d+10}{2} + d + 10}{2} = \frac{3d+30}{4} = \frac{3}{4}(d+10)$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{b+c+d+10}{2} = \frac{\frac{3d+30}{4} + \frac{d+10}{2} + d + 10}{2} = \\ &= \frac{3d+30+2d+20+4d+40}{8} = \frac{9d+90}{8} = \frac{9}{8}(d+10) \end{aligned}$$

Potom zo zadania: $a+b+c+d=206$, teda

$$\frac{9}{8}(d+10) + \frac{3}{4}(d+10) + \frac{1}{2}(d+10) + d = 206$$

$$\frac{(9+6+4) \cdot (d+10)}{8} + d = 206$$

$$\frac{19}{8}d + d + \frac{190}{8} = 206$$

$$\frac{27}{8}d = \frac{1648-190}{8}$$

$$d = 54$$

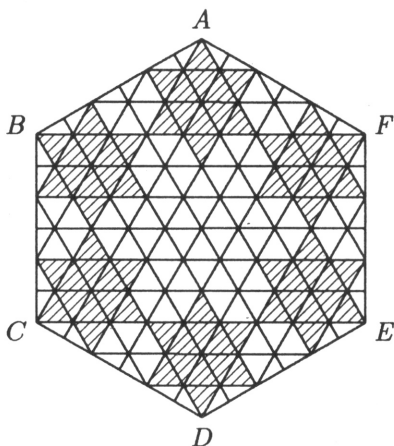
Z toho $c = 32$, $b = 48$, $a = 72$.

Pomocné úlohy

Úlohy Z5-I-5, Z4-I-4, Z6-II-1.

Riešenie úlohy Z6-I-5 (str. 71)

Celý šesťuholník aj s hviezdami je možné rozdeliť na zhodné rovnostranné trojuholníčky veľkosti cípu hviezdy, prípadne ich polovice (obr. 38). Potom z obrázku ľahko zistíme, že v šesťuholníku je práve 162 trojuholníčkov a v ozdobe je práve 72 trojuholníčkov. Teda na odpad zostáva $162 - 72 = 90$ trojuholníčkov. Z toho už zistíme, že odpad je $\frac{90}{162} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$ celého šesťuholníka.



Obr. 38

Poznámka. Úlohu možno riešiť aj počítaním obsahov, čo je však oveľa obtiažnejšie a aj neprimerané vedomostiam šestiaka.

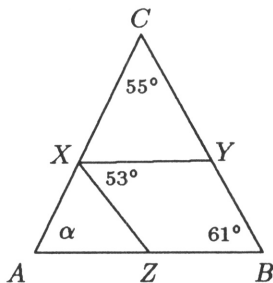
Pomocné úlohy

1. Akú časť šesťuholníka $ABCDEF$ tvorí trojuholník ABC ?

2. Akú časť šesťuholníka $ABCDEF$ tvorí trojuholník ACE ?

3. Akú časť šesťuholníka $ABCDEF$ tvorí zjednotenie trojuholníkov ACE a BDF ?

Riešenie úlohy Z6-I-6 (str. 71)



Obr. 39

Z trojuholníka ABC (obr. 39) vypočítame uhol $\alpha = 180^\circ - (61^\circ + 55^\circ) = 64^\circ$. Z rovnoramenného trojuholníka AXZ vypočítame veľkosť uhla AZX , $|\angle AZX| = 180^\circ - 2 \cdot 64^\circ = 52^\circ$. Potom veľkosť uhla CXY $|\angle CXY| = 180^\circ - \alpha - |\angle ZXY| = 180^\circ - 64^\circ - 53^\circ = 63^\circ$. Ak by boli priamky AB , XY rovnobežné, potom by museli byť uhly

BAC a YXC rovnako veľké. Ako sme spočítali, $|\sphericalangle BAC| = \alpha = 64^\circ$, avšak $|\sphericalangle YXC| = 63^\circ$. Teda priamky AB a XY nie sú rovnobežné.

Podobne priamky BC , XZ nie sú rovnobežné, pretože $|\sphericalangle AZX| = 52^\circ$ a $|\sphericalangle ABC| = 61^\circ$.

Pomocná úloha

V lichobežníku $ABCD$ je na základni AB zvolený bod X . Pre veľkosti uhlov platí: $|\sphericalangle BAD| = 64^\circ$, $|\sphericalangle ABC| = 56^\circ$, $|\sphericalangle DXC| = 57^\circ$. Zistite, či sú priamky DX a CX rovnobežné s niektorým ramenom lichobežníka $ABCD$.

RIEŠENIA ÚLOH II. KOLA

Riešenie úlohy Z6–II–1 (str. 72)

1. riešenie (úsudkom). Súčet všetkých uhlov trojuholníka je 180° . Ak by sme k najväčšiemu uhlu pripočítali 4° , tak súčet by bol 184° a pritom takto zväčšený uhol by mal takú istú veľkosť ako súčet veľkostí zvyšných dvoch. Teda takto zväčšený uhol by mal veľkosť $184^\circ : 2 = 92^\circ$. Ale najväčší uhol je o 4° menší, teda má veľkosť 88° .

Najmenší uhol je štyrikrát menší ako súčet ostatných dvoch, teda tvorí pätinu celého súčtu, čo je $180^\circ : 5 = 36^\circ$.

Potom stredný uhol bude mať veľkosť $180^\circ - 88^\circ - 36^\circ = 56^\circ$.

Skúška: $56 + 32 = 92$, čo je o 4 viac ako 88. Najväčší uhol je o 4 menší ako súčet ostatných dvoch.

$88 + 56 = 144$; $144 : 4 = 36$ — najmenší uhol je štvrtina súčtu ostatných dvoch.

Uhly v danom trojuholníku majú veľkosti 88° , 56° , 36° .

2. *riešenie* (rovnícou). Zvoľme $\alpha > \beta > \gamma$. Potom

$$\alpha = \beta + \gamma - 4$$

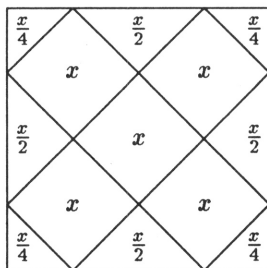
$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{4}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Z toho $\alpha = 88^\circ$, $\beta = 56^\circ$, $\gamma = 36^\circ$.

Riešenie úlohy Z6-II-2 (str. 72)

Označme obsah štvorčeka „križa“ x . Potom obsahy trojuholníkov odpadu sú $\frac{x}{2}$ a $\frac{x}{4}$ (obr. 40).



Obr. 40

Teda platí:

$$4 \cdot \frac{x}{2} + 4 \cdot \frac{x}{4} = 48$$

$$3x = 48$$

$$x = 16$$

Teda obsah "križa" je $5 \cdot 16 \text{ cm}^2 = 80 \text{ cm}^2$ a potom obsah celého štvorca je $80 \text{ cm}^2 + 48 \text{ cm}^2 = 128 \text{ cm}^2$.

Riešenie úlohy Z6-II-3 (str. 72)

Aby bol výsledok deliteľný 12, musí byť dané číslo násobkom 3 a 4. Posledne dvojčíslenie musí byť deliteľné 4, teda na konci musí byť 72, alebo 76 a ciferný súčet musí byť deliteľný 3. Z toho na mieste stoviek bude 3, 6, 9 alebo 2, 5, 8. Môžu to byť čísla 57 372, 57 672, 57 972, 57 276, 57 576, 57 876.

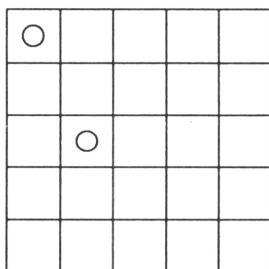
Kategória Z5

ÚLOHY I. KOLA

(Riešenia úloh na str. 88)

Z5 – I – 1

Na šachovnici 5×5 sú už položené dve figúrky (obr. 41). Na šachovnicu budeme klásť ďalšie figúrky, ale tak, aby žiadne dve figúrky nestáli na susedných poliach (t. j. poliach so spoločnou stranou). Figúrky kladieme dovtedy, kým je možné umiestniť ďalšiu figúrku. Koľko najmenej a koľko najviac figúrok môže byť na šachovnici?



Obr. 41

Z5 – I – 2

Hviezdičky nahradzte číslicami tak, aby platilo naznačené násobenie.

$$\begin{array}{r}
 \text{**} \\
 \cdot \text{ * 7} \\
 \hline
 22* \\
 \\
 \text{***} \\
 \hline
 **2*
 \end{array}$$

Z5 – I – 3

Ktorých trojciferných čísel je viac? Tých, ktoré pri delení číslom 7 dávajú zvyšok 3, alebo tých, ktoré dávajú pri delení číslom 7 zvyšok 6. O koľko?

Z5 – I – 4

Na obrázku 42 je 5 bodov. Podľa toho, ako ich spojíme, dostaneme rôzne päťuholníky. Nájdite aspoň 8 riešení. Môže mať úloha 10 riešení?



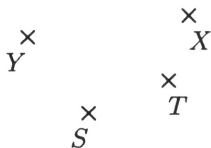
Obr. 42

Z5 – I – 5

Štyria chlapci majú spolu 157 gulôčok. Každý z nich, okrem najmladšieho, má o 5 gulôčok menej, ako majú jeho mladší kamaráti spolu. Koľko gulôčok má každý chlapec?

Z5 – I – 6

Dané sú štyri body S, T, X, Y (obr. 43). Zostrojte pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C , ak viete, že body X, Y ležia na priamke BC , bod S leží na priamke AC , bod T leží na priamke AB a dĺžka strany BC je 4 cm.



Obr. 43

ÚLOHY II. KOLA

(Riešenia úloh na str. 98)

Z5 – II – 1

Jurko si na krajčírskom metri (150 cm) vyfarbil všetky čísla deliteľné 5, ktoré neboli deliteľné 3.

Miško si na svojom krajčírskom metri vyfarbil všetky čísla, ktoré pri delení siedmymi dávajú zvyšok 6.

Kto z nich vyfarbil viac čísel?

Z5 – II – 2

Hviezdičky nahradzte číslicami tak, aby platilo naznačené násobenie

$$\begin{array}{r} \\ \\ \hline 9 \\ \\ \hline 1 1 \\ \\ \hline 5 \end{array}$$

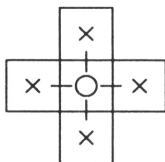
Z5 – II – 3

Danka si z plastických obalov vystrihla dva štvorce s obsahmi 16 cm^2 a 36 cm^2 . Preložila ich cez seba tak, že sa prekrývali v štvorci. Vzniknutý osemuholník mal o 20 cm väčší obvod ako obvod štvorca, ktorý vznikol prekrytím. Určite rozmer prekrytého štvorca.

RIEŠENIA ÚLOH I. KOLA

Riešenie úlohy Z5-I-1 (str. 84)

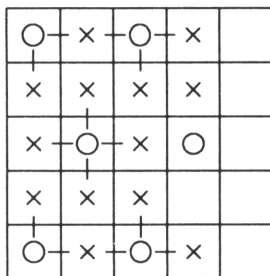
Ak je vnútri šachovnice jedna figúrka, tak ďalšiu nemôžeme položiť na políčka vedľa nej — teda táto figúrka „obsadzuje“ akýsi päťpolíčkový kríž (obr. 44).



Obr. 44

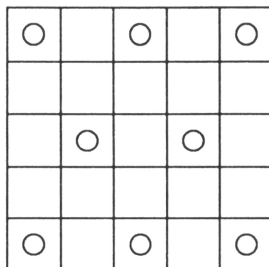
Figúrky označujeme O a políčka, na ktoré už nemôžeme klásť ďalšie figúrky, ×. Takže každá figúrka obsadzuje najviac 5 miest — kde stojí plus najviac štyri okolo.

Na šachovnici by bolo najmenej figúrok, ak by sa nám podarilo pokryť celú šachovnicu neprekrývajúcimi sa krížmi. To sa nám nemôže podariť (skúste si to). Pokúšame sa teda pokrývať šachovnicu tak, aby bolo čo najmenej prekrývajúcich sa obsadených miest. Takéto optimálne pokrytie je na obr. 45.



Obr. 45

Tomu odpovedá riešenie (obr. 46):



Obr. 46

Ak chceme na šachovnicu umiestniť čo najviac figúriek, musíme ich umiestňovať tak, aby sa obsadzované políčka čo najviac prekryvali. Teda kladieme ich na všetky „biele“, resp. „čierne“ políčka. Tomu odpovedá riešenie na obr. 47.

○			○	
		○		○
	○		○	
○		○		○
	○		○	

Obr. 47

Na šachovnicu môžeme za daných podmienok položiť najmenej 8, najviac 11 figúrok.

Pomocná úloha

Riešte túto úlohu na prázdnej šachovnici.

Riešenie úlohy Z5-I-2 (str. 85)

Ak z tohto súčinu vyberieme násobenie 7, dostaneme:

$$\begin{array}{r} ** \\ \cdot 7 \\ \hline 22* \end{array}$$

To ale znamená, že číslo 22* musí byť deliteľné číslom 7. Vyskúšaním zistíme, že vyhovuje jedine číslo 224, lebo $224 = 32 \cdot 7$. Po dosadení do zadania dostávame:

$$\begin{array}{r} 32 \\ \cdot *7 \\ \hline 224 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ** \bullet \\ \hline **24 \end{array}$$

Zrejme na mieste • musí byť 0. Potom ale * v druhom činiteli (pri 7) musí byť 5, lebo je to jediná nenulová cifra, ktorá po násobení 2 dáva číslo končiace nulou. Z toho už je zřejmé riešenie:

$$\begin{array}{r} 32 \\ \cdot 57 \\ \hline 224 \\ 160 \\ \hline 1824 \end{array}$$

Pomocné úlohy

Úlohy Z4-I-2 a Z5-II-2.

Riešenie úlohy Z5-I-3 (str. 85)

Vypíšeme si niekoľko najmenších a najväčších čísel z oboch skupín: Pri delení siedmymi dávajú

zvyšok 3: 101, 108, 115, 122, , 976, 983, 990, 997

zvyšok 6: 104, 111, 118, 125, , 979, 986, 993.

1. riešenie. Vidíme, že po čísle jednej skupiny veľkosťou nasleduje vždy číslo druhej skupiny (je o tri väčšie). Teda trojciferných čísel, ktoré pri delení siedmymi dávajú zvyšok 3, je o jedno viac ako trojciferných čísel, ktoré pri delení siedmymi dávajú zvyšok 6.

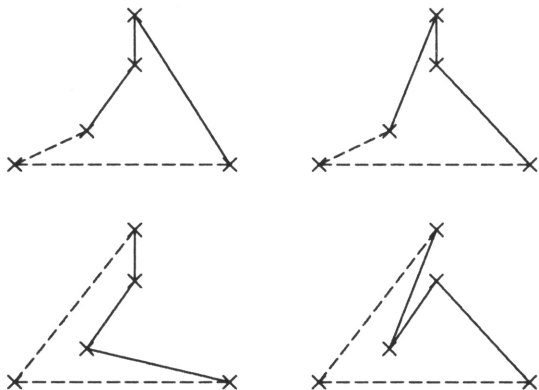
2. riešenie. Najmenšie trojciferné číslo, ktoré pri delení siedmymi dáva zvyšok 3, je 101, najväčšie je číslo 997. Tieto čísla sú v poradí vždy o 7 väčšie, teda ich spolu je $(997 - 101) : 7 + 1$ (rozmyslite si prečo!), čo je 129. Podobne pri zvyšku 6 je najmenšie také číslo 104, najväčšie 993, teda takýchto čísel bude $(993 - 104) : 7 + 1 = 128$.

Pomocná úloha

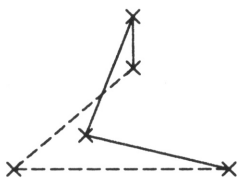
Kolko je čísel menších ako 1 000, ktoré sú deliteľné a) 2, b) 3, c) 7.

Riešenie úlohy Z5-I-4 (str. 85)

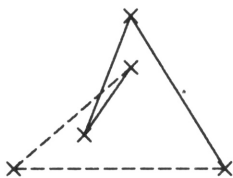
Úlohu riešime skusmo, ale aby sme mali istotu s odpoveďou na druhú otázku, musíme nájsť nejaký systém, ako budeme tvoriť päťuholníky. Napríklad z ľavého dolného bodu vychádzajú dve strany. Je práve 6 možností, ako tieto strany pôjdu. Potom už zostávajú len dva nespojené body. Tie môžeme spojiť s koncovými bodmi vytvorenej (dvoj)lomenej čiary práve dvomi spôsobmi. Teda teoreticky by bolo 12 možností, ale niektoré z nich netvoria päťuholníky. Je teda práve 8 možností nájdenia päťuholníka, teda 10 takých päťuholníkov neexistuje. (Riešenie je na obr. 48a, 48b).



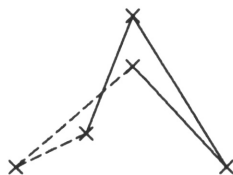
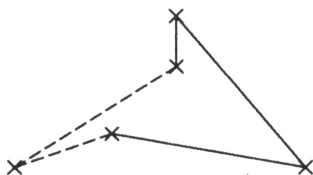
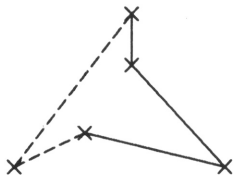
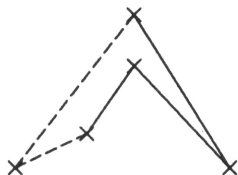
Obr. 48a



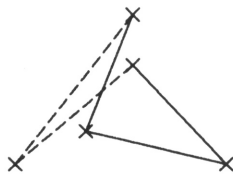
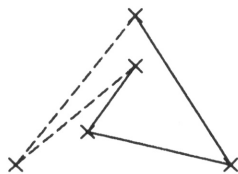
nie



nie



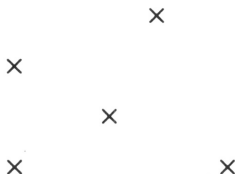
nie



Obr. 48b

Pomocná úloha

Narysujte všetky päťuholníky, ktorých vrcholy sú v bodoch na obr. 49.



Obr. 49

Riešenie úlohy Z5-I-5 (str. 86)

Ak by mal najstarší chlapec o 5 gulôčok viac, mal by toľko ako ostatní spolu. Všetci by potom mali $157 + 5 = 162$ gulôčok, takže najstarší by mal $162 : 2 = 81$, avšak má o 5 menej, teda má 76 gulôčok.

Ak by mal druhý najstarší o 5 gulôčok viac, mal by rovnako ako dvaja mladší spolu, všetci traja by potom mali $81 + 5 = 86$ gulôčok, teda druhý najstarší by mal $86 : 2 = 43$ gulôčok, má však o 5 menej, teda má 38 gulôčok. Poslední dvaja teda majú spolu 43 gulôčok, starší z nich má o 5 gulôčok menej ako najmladší, teda má $(43 - 5) : 2 = 19$ gulôčok. Najmladší potom má 24 gulôčok.

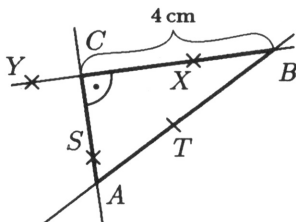
Chlapci majú v poradí od najstaršieho 76, 38, 19, 24 gulôčok.

Pomocná úloha

Úloha Z4 - I - 4.

Riešenie úlohy Z5-I-6 (str. 86)

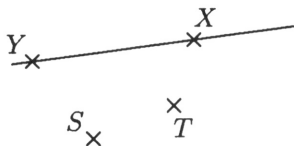
Načrtníme si obrázok, ako by úloha už bola vyriešená (obr. 50).



Obr. 50

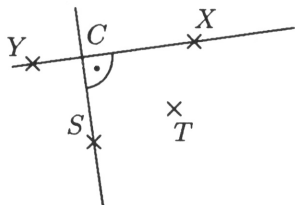
Ak sa pozrieme na obrázok, vidíme, že máme vlastne narysovať priamky, prechádzajúce nejako (podľa zadania) danými bodmi S , T , X , Y .

Budeme postupovať tak, že urobíme vždy to, čo vieme. Teda najskôr priamku prechádzajúcu bodmi X , Y (obr. 51).



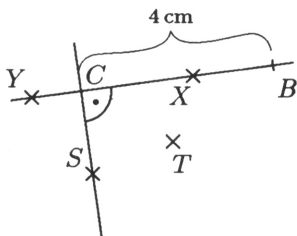
Obr. 51

Potom kolmicu na túto priamku prechádzajúcu bodom S . Priesečník týchto dvoch priamok je bod C (obr. 52).

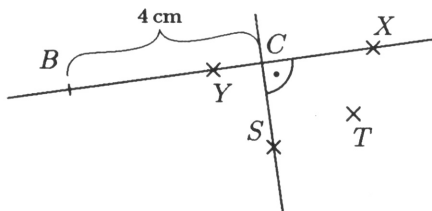


Obr. 52

Potom nanesieme na priamke 4 cm od bodu C (to môžeme urobiť dvoma spôsobmi), dostaneme bod B (obr. 53a, b).

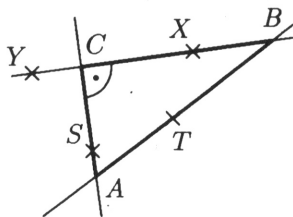


Obr. 53a

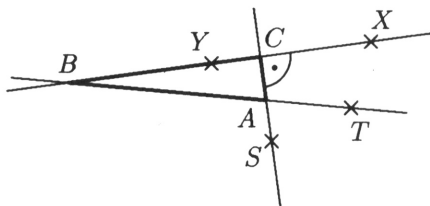


Obr. 53b

Teraz už len spojíme bod B s bodom T a vyznačíme bod A . Dostali sme pravoúhly trojuholník ABC (obr. 54a, b).



Obr. 54a



Obr. 54b

Úloha má dve riešenia.

Pomocná úloha

Zostrojte rovnostranný trojuholník ABC , ak sú dané body A, X, Y tak, že bod X leží na priamke AB a Y leží na priamke BC .



Obr. 55

RIEŠENIA ÚLOH II. KOLA

Riešenie úlohy Z5-II-1 (str. 87)

Čísel deliteľných piatimi je $150 : 5 = 30$. Jurkovi nepočítame čísla deliteľná 3, teda čísla deliteľná číslom 15. Tých je 10. Spolu teda Jurko vyfarbí 20 čísel.

Miško vyfarbí všetky čísla, ktoré pri delení siedmymi dávajú zvyšok 6. Teda vyfarbí každé siedme číslo od čísla 6 po číslo 146 včítane. Takých čísel je $(146 - 6) : 7 + 1 = 21$. Takže Miško vyfarbí 21 čísel.

Miško vyfarbil viac čísel.

Riešenie úlohy Z5-II-2 (str. 87)

$$\begin{array}{r}
 ** \\
 \cdot \quad *9 \\
 \hline
 11\bullet \\
 *** \\
 \hline
 **5*
 \end{array}$$

- musí byť 7, lebo len 117 je deliteľné deviatimi. $117 : 9 = 13$, teda prvý činiteľ súčinu je 13.

$$\begin{array}{r}
 13 \\
 \cdot \quad *9 \\
 \hline
 117 \\
 *** \\
 \hline
 **57
 \end{array}$$

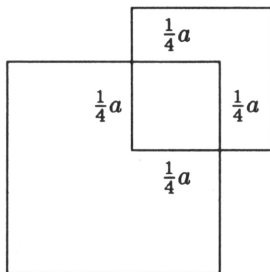
- je isto 4, teda cifra na mieste desiatok v druhom činiteli je 8.

$$\begin{array}{r}
 13 \\
 \cdot \quad *9 \\
 \hline
 117 \\
 **4 \\
 \hline
 **57
 \end{array}$$

Teraz už len dopočítame a zapíšeme vypočítané hodnoty na miesta hviezdíčiek.

$$\begin{array}{r}
 13 \\
 \cdot \quad 89 \\
 \hline
 117 \\
 104 \\
 \hline
 1157
 \end{array}$$

Riešenie úlohy Z5-II-3 (str. 87)



Obr. 56

Obvod vzniknutého osemuholníka je $4 \cdot 4 + 4 \cdot 6 - a = 40 - a$, kde a je obvod štvorca, ktorý vznikne prekrytím. Teda rozdiel obvodov je $40 - a - a = 40 - 2a$, čo je podľa zadania 20. Z toho $40 - 2a = 20$, $2a = 20$. Teda obvod štvorca je 10 cm. Strana štvorca je 2,5 cm.

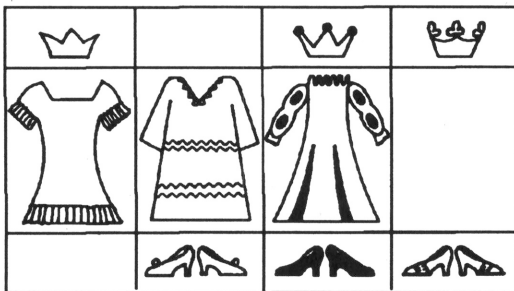
Kategória Z4

ÚLOHY I. KOLA

(Riešenia úloh na str. 103)

Z4 – I – 1

Ako vidíme na obrázku 57, princezná Martinka stojí pred ťažkou úlohou. Nevie, ktorú korunku, ktoré šaty a ktoré topánky si má na najbližšiu slávnosť obliecť. Nakoniec sa rozhodla, že z tej istej skrine zoberie najviac jednu vec. Koľkými spôsobmi sa môže Martinka obliecť?



Obr. 57

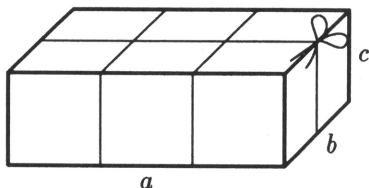
Z4 – I – 2

Nahradte hviezdičky číslicami tak, aby platilo naznačené násobenie:

$$** \cdot 8 = *04$$

Z4 – I – 3

Škatuľka (obr. 58) bola zviazaná špagátom. Rozmery škatule sú $a = 21$ cm, $b = 15$ cm, $c = 12$ cm. Vypočítajte dĺžku špagátu. Na mašličku počítajte o 20 cm viac.



Obr. 58

Z4 – I – 4

Traja chlapci majú spolu 128 guľôčok. Karol má o 4 guľôčky menej ako Fero a Juro dohromady. Juro má o 4 guľôčky viac ako Fero. Koľko guľôčok má každý z nich?

Z4 – I – 5

Štvorec so stranou 4 cm je rozdelený na 16 rovnakých štvorčekov. Odstrihnite z neho niekoľko týchto štvorčekov, aby ostal a) 18-uholník, b) 16-uholník s obvodom 24 cm.

Z4 – I – 6

Kamilka sa hrala s miskovými váhami a hracími kockami. Pritom dostala rovnováhy znázornené na obr. 59.

Zistite, ktorá kocka má najväčšiu a ktorá najmenšiu hmotnosť. Svoju odpoveď vysvetlite.



Obr. 59

ÚLOHY II. KOLA

(Riešenia úloh na str. 108)

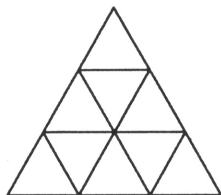
Z4 – II – 1

Nahradte hviezdičky číslicami tak, aby platilo naznačené násobenie

$$** \cdot 7 = *36$$

Z4 – II – 2

Trojuholník so stranou 3 cm je rozdelený na 9 rovnakých trojuholníkov (obr. 60). Odoberte niekoľko z týchto trojuholníkov, aby ste dostali šesťuholník. Nakreslite obrázok po odobratí trojuholníkov. Nájdite aspoň tri rôzne také šesťuholníky.



Obr. 60

Z4 – II – 3

Anka, Kamilka a Martinka nazbierali spolu 21 šišiek. Anka nazbierala 2krát viac šišiek ako Kamilka a Martinka nazbierala 4krát menej ako Anka. Koľko šišiek nazbierala každá z nich?

RIEŠENIA ÚLOH I. KOLA

Riešenie úlohy Z4-I-1 (str. 100)

Riešenie si zapíšeme do tabuľky. Skrine sú číslované zľava doprava.

vec	číslo skrine										
korunka	1	1	1	1	3	3	3	4	4	4	4
šaty	2	2	3	3	1	1	2	1	1	2	3
topánky	3	4	2	4	2	4	4	2	3	3	2

Každý stĺpec v tabuľke určuje jedno z oblečení princezny Martinky. Martinka sa teda môže obliecť celkom 11 spôsobmi.

Riešenie úlohy Z4-I-2 (str. 101)

1. riešenie (asi jednoduchšie). Číslo *04 musí byť deliteľné číslom 8. Vyskúšame všetkých deväť možností doplnenia * v tomto čísle. 104, 204, 304, 404, 504, 604, 704, 804, 904. Len čísla 104, 304, 504, 704, 904 sú deliteľné ôsmi. Dosadíme do pôvodného zadania; dostaneme 4 riešenia úlohy:

$$13 \cdot 8 = 104, 38 \cdot 8 = 304, 63 \cdot 8 = 504, 88 \cdot 8 = 704.$$

Súčin $113 \cdot 8 = 904$ nevyhovuje (prečo?).

2. riešenie (možno zložitejšie, ale poučnejšie). Rozpíšeme si príklad, ako keby sme ho písomne násobili:

$$\begin{array}{r} * * \\ \cdot 8 \\ \hline * 0 4 \end{array}$$

Pýtame sa: Akým číslom treba vynásobiť číslo 8, aby sme dostali na konci cifru 4? Sú dve možnosti — číslom 3 a číslom 8. Máme teda dva prípady, označme ich a), b).

a)

$$\begin{array}{r} * 3 \\ \cdot 8 \\ \hline * 0 4 \end{array}$$

Pýtame sa: Akým číslom treba vynásobiť číslo 8 a potom k výsledku pripočítať 2, aby sme dostali na konci číslo 0? Také čísla sú dve: číslo 1 a číslo 6 a tým dostávame dve riešenia:

$$\begin{array}{r} 13 \\ \cdot 8 \\ \hline 104 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 63 \\ \cdot 8 \\ \hline 504 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} * 8 \\ \cdot 8 \\ \hline * 04 \end{array}$$

Pýtame sa: Akým číslom treba vynásobiť číslo 8 a potom k výsledku pripočítať 6 (to nám zostalo), aby sme dostali na konci číslo 0? Také čísla sú dve: číslo 3 a číslo 8 a tým dostávame ďalšie dve riešenia:

$$\begin{array}{r} 38 \\ \cdot 8 \\ \hline 304 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 88 \\ \cdot 8 \\ \hline 704 \end{array}$$

Riešenie úlohy Z4-I-4 (str. 101)

Najprirodzenejšie je zrejme rozdelenie špagátu na úseky zhora nadol, sprava doľava, spredu dozadu.

Zhora nadol je 6 úsekov (dva vpredu, dva vzadu a dva na bokoch), každý je dĺžky 12 cm, čo je spolu $6 \cdot 12 \text{ cm} = 72 \text{ cm}$.

Sprava doľava sú dva úseky (hore a dole), každý dĺžky 21 cm, čo je spolu $2 \cdot 21 \text{ cm} = 42 \text{ cm}$.

Spredu dozadu sú 4 úseky (dva hore, dva dole), každý je dĺžky 15 cm, čo je spolu $4 \cdot 15 = 60 \text{ cm}$.

Celý špagát spolu s mašľou teda má $(72 + 42 + 60 + 20) \text{ cm} = 194 \text{ cm}$.

Riešenie úlohy Z4-I-4 (str. 101)

Vyriešime si najprv pomocnú úlohu. Predstavte si, že máte hromadu guľôčok (neviete koľko presne ich je a ani to nechcete vedieť) a máte ich rozdeliť na dve časti tak, aby v jednej bolo o 4 guľôčky menej ako v druhej.

Riešenie pomocnej úlohy. Najskôr dáme 4 guľôčky nabok a potom striedavo dávame po jednej guľôčke na dve kôpky, teda zvyšok rozdelíme na polovice. Keď guľôčky rozdelíme, potom 4 guľôčky (zboku) pridáme k jednej kôpke.

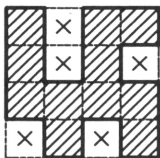
Riešenie danej úlohy. $128 - 4 = 124$ (oddelíme 4 guľôčky pre Jura a Fera spolu); $124 : 2 = 62$ (zvyšok rozdelíme na polovice). Teda Karol má 62 guľôčok a Fero s Jurom spolu 66 guľôčok.

A ešte raz. $66 - 4 = 62$ (oddelíme 4 guľôčky pre Jura); $62 : 2 = 31$ (zvyšok rozdelíme na polovice). Teda Fero má 31 guľôčok a Juro 35 guľôčok.

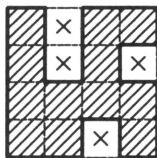
Karol má 62 guľôčok, Juro 35 a Fero 31 guľôčok.

Riešenie úlohy Z4-I-5 (str. 101)

Riešime skusmo. Úloha má viac riešení. Jedno z nich je na obr. 61a, b.



Obr. 61a



Obr. 61b

Riešenie úlohy Z4-I-6 (str. 102)

1. riešenie. Z prvej rovnováhy vyplýva, že $\triangle$ má väčšiu hmotnosť ako $\square$, lebo $\triangle \triangle$ majú väčšiu hmotnosť ako $\square \square$. Potom z druhej rovnováhy vyplýva, že $\bigcirc$ je medzi nimi. Riešenie $\triangle > \bigcirc > \square$.

2. riešenie. Snažíme sa upraviť misky pridávaním, alebo odoberaním toho istého tak, aby na miskách boli len dva druhy útvarov. Napr. (označme si rovnosť $\square \bigcirc \square \stackrel{1}{=} \square \square$ a rovnosť $\bigcirc \bigcirc \stackrel{2}{=} \square \triangle$):

$$\begin{aligned} \square \bigcirc \square &\stackrel{1}{=} \triangle \triangle \Rightarrow \square \bigcirc \square \big| \square \square = \triangle \triangle \big| \square \square \Rightarrow \\ &\Rightarrow \square \bigcirc \square \square \square = \square \triangle \big| \square \triangle \Rightarrow \\ &\Rightarrow \square \bigcirc \square \square \square \stackrel{2}{=} \bigcirc \bigcirc \big| \bigcirc \bigcirc \Rightarrow \\ &\Rightarrow \square \square \square \square = \bigcirc \bigcirc \bigcirc \Rightarrow \\ &\Rightarrow \square < \bigcirc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \square \bigcirc \square &\stackrel{1}{=} \triangle \triangle \Rightarrow \square \bigcirc \square \big| \triangle \triangle = \triangle \triangle \big| \triangle \triangle \Rightarrow \\ &\Rightarrow \square \triangle \big| \square \triangle \big| \big| \bigcirc = \triangle \triangle \triangle \triangle \stackrel{2}{=} \\ &\stackrel{2}{=} \bigcirc \bigcirc \big| \bigcirc \bigcirc \big| \big| \bigcirc = \triangle \triangle \triangle \triangle \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bigcirc < \triangle \end{aligned}$$

RIEŠENIA ÚLOH II. KOLA

Riešenie úlohy Z4-II-1 (str. 102)

1. riešenie. Uvažujeme podiel $*36 : 7$, kde na miesto hviezdičky dosadzujeme postupne 1, 2, ... , 9. Ak vydelíme bezo zvyšku, našli sme riešenie.

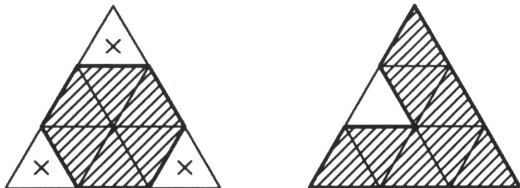
2. riešenie. $* * \cdot 7 = 36$; číslicu 6 v súčine dostaneme vynásobením 7 s neznámou číslicou na mieste jednotiek. Jedinou vhodnou číslicou je 8.

Číslicu 3 v súčine dostaneme vynásobením 7 s neznámou na mieste desiatok a pričítaním 5 (zostatok zo súčinu $7 \cdot 8 = 56$). Teda hľadáme násobok 7, ktorý má na mieste jednotiek číslicu 8 (pretože $8 + 5 = 13$). Jediná možnosť je $4 \cdot 7 = 28$.

Úloha má jediné riešenie $48 \cdot 7 = 336$.

Riešenie úlohy Z4-II-2 (str. 102)

Sú tieto možnosti (obr. 62):





Obr. 62

Riešenie úlohy Z4-II-3 (str. 103)

Označme ako jeden diel to, čo nazbierala Martinka. Anka potom nazbierala 4krát viac, teda 4 diely.

Kamilka nazbierala polovicu toho čo Anka, teda dvakrát viac ako Martinka, teda dva diely. Spolu nazbierali 7 dielov — čo je ale 21 šišiek. Teda jeden diel sú 3 šišky. Takže Anka nazbierala 12, Kamilka 6 a Martinka 3 šišky.

KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘE A TÝMOVÉ SOUTĚŽE

Jako v předcházejících letech i ve školním roce 1990/91 se mnoho žáků základních škol zúčastnilo různých korespondenčních seminářů. Lze je rozdělit do dvou hlavních skupin. Jedna je určena starším žákům ze 7. a 8. ročníků, druhá mladším žákům ze 4. až 6. ročníků.

Účastníci korespondenčních seminářů dostávají k řešení zpravidla ve více kolech a sériích úlohy, jejichž řešení zasílají pořadatelům. Ti je po opravě bodují a zašlou zpět řešitelům i se vzorovými řešeními. Vítězové korespondenčních seminářů bývají zváni na několikadenní soustředění a letní tábory, na které se účastníci vždy velmi těší. Na těchto akcích přednáší žákům vybraní učitelé matematiky ze základních, středních i vysokých škol. Program většinou spojuje vážnou matematiku s matematikou zábavnou, se sportem a dalšími hrami.

Ve školním roce se konaly dále uvedené korespondenční semináře. Ze seminářů označených hvězdičkou přinášíme v dalším textu ukázky. Všem autorům děkujeme za zaslané úlohy a za svolení k publikování ukázek úloh.

* PIKOMAT	<i>Gym., Korunní, Praha</i>	J. Zhouf	6.-8. roč.
* PIKOMAT	<i>ODDM, Kutná Hora</i>	K. Blažek	6.-8. roč.
KOVBOJ	<i>ODDM, Kutná Hora</i>	K. Blažek	4.-5. roč.
* PIKOMAT	<i>PF, České Budějovice</i>	P. Sokol	7.-8. roč.
PIKOMAT	<i>Gym., Kralupy</i>	J. Šimánek	4. roč.
PIKOMAT	<i>ZŠ, Plzeň</i>	S. Mrviková	4. roč.
* PIKOMAT	<i>Gym., Hradec Králové</i>	M. Kynterová	7.-8. roč.
		a M. Tichý	
PIKOMAT	<i>PF, Hradec Králové</i>	E. Krejčová	4. roč.
PIKOMAT	<i>ODDM, Jihlava</i>	M. Krejčová	6.-8. roč.
* PIKOMAT	<i>OOPS, Svitavy</i>	H. Lišková	6.-8. roč.
* KOKOS	<i>Gym., Bílovec</i>	P. Kačenka	6.-8. roč.
		a A. Kuběna	
* KOUMES	<i>Opava</i>	P. Czudek	4. roč.
		a L. Hozová	
PIKOMAT	<i>OPS, Frýdek-Místek</i>	Z. Bachelová	4.-5. roč.
* PIKOMAT	<i>Iuventa, Bratislava</i>	P. Černek	7.-8. roč.
KOMINÁR	<i>Iuventa, Bratislava</i>	I. Vojtela	4.-6. roč.
PIKOMAT	<i>MFF KU, Bratislava</i>		7.-8. roč.
* KOVBOJ	<i>PF, Banská Bystrica</i>	B. Sivák	5.-8. roč.
PIKOMAT	<i>Gym., Povážská Bystrica</i>	I. Bartko	7.-8. roč.
SPIKOMA	<i>TVŠDS, Žilina</i>	H. Bachratý	6.-8. roč.
PIKOMAT	<i>Gym., Dolný Kubín</i>	Š. Jány	6.-8. roč.
PIKOMAT	<i>PF, Přerov</i>	J. Duplák	
* MATIK	<i>PřF UPJŠ, Košice</i>	B. Vavrincíková	7.-8. roč.
MALINÁR	<i>Gym., Šmerdova, Košice</i>		5.-6. roč.

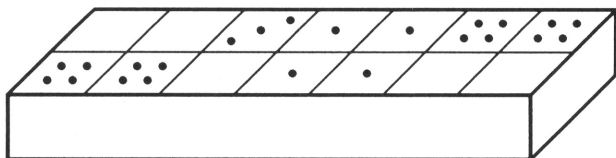
Kromě korespondenčních seminářů se konaly dvě týmové soutěže pro čtyřčlenná družstva žáků 6. ročníků, obě pod společným názvem „Dejte hlavy dohromady“ (DHV).

* DHV	<i>PO JČMF, Praha</i>	M. Koman	6. roč.
* DHV	<i>OPS Opava</i>	L. Hozová	6. roč.

Gymnázium v Praze 2, Korunní 2, pořádalo již čtvrtým rokem pod vedením dr. Jaroslava Zhoufa korespondenční seminář PIKOMAT pro žáky 7. a 8. ročníků. Soutěže se zúčastnilo 178 žáků, kteří v 5 kolech řešili celkem 30 úloh. V letošním roce, na rozdíl od předcházejících ročníků, se z finančních důvodů nepodařilo uskutečnit závěrečné soustředění.

Jako ukázkou uvedeme úkoly 2. série.

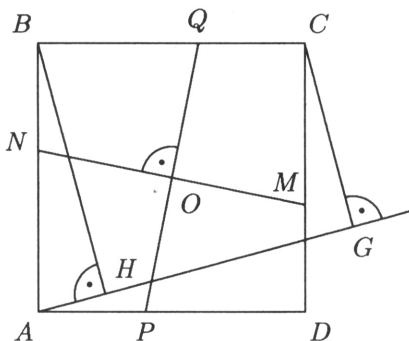
1. Na obrázku 63 je vidět plná krabička domina. Jak jsou rozděleny hrací kameny ve svrchní vrstvě?



Obr. 63

2. Gulliver se během svého pobytu v Laputě zabýval (mimo jiná dobrodružství) i finančním systémem země. Dozvěděl se, že se zde používají jedno-, dvou- a čtyřlaptiové mince, všechny z čistého zlata. Mince jsou kulaté a navíc mají tuto vlastnost: Položíme-li jednolaptii na dvoulaptii tak, aby její okraj procházel středem dvoulaptie, pak průsečíky okrajů mincí leží na průměru jednolaptie. Podobnou vlastnost mají i dvoulaptie a čtyřlaptie. Gulliver dále zjistil, že hmotnosti mincí jsou ve stejném poměru jako jejich hodnoty. Tloušťka jednolaptie je 1 mm. Určete tloušťku ostatních laputských mincí.

3. Na obrázku 64 byl nejdříve sestrojen čtverec $ABCD$ a pak zbylé čáry. Dokažte, že čtyřúhelníky $APON$ a $CQOM$ mají stejný součet obvodů jako čtyřúhelníky $BNOQ$ a $DMOP$.



Obr. 64

4. Vypočtete (obr. 64) obsah čtyřúhelníku $ABCG$ z úlohy 3, víte-li, že se délka BH rovná 1.

5. Dokažte, že z libovolných 52 celých čísel je možno vybrat 2 tak, že jejich součet nebo rozdíl je dělitelný stem.

6. Dokažte, že výšky libovolného trojúhelníku se protínají v jednom bodě.

Kutná Hora

Obvodní dům dětí a mládeže v Kutné Hoře pořádal pod vedením Karla Blažka 6. ročník korespondenčního semináře s názvem PIKOMAT pro žáky 6. až 8. ročníků ZŠ a 1. ročník

korespondenčního víceboje s názvem KOVBOJ pro žáky 4. a 5. ročníků ZŠ.

Pikomatu se zúčastnilo 65 soutěžících ve 4 kolech po 4 úlohách. Pro nejlepší řešitele byl uspořádán letní tábor ve Vrbně pod Pradědem. Tábor byl pořádán společně i pro úspěšné řešitele korespondenčního semináře KOKOS (viz str. 120). Tábor byl 14denní a zúčastnilo se ho 43 řešitelů.

Korespondenční víceboj KOVBOJ měl 5 kol po 4 úlohách. Zúčastnilo se 50 řešitelů, z nich bylo 36 vybráno na týdenní soustředění v únoru 1991 v Hraběticích v Jizerských horách.

Ukázka úloh ze 4. kola PIKOMATU

Podobně jako v předcházejících třech kolech se i ve 4. kole čerpaly úlohy a náměty z příhod odehrávajících se v pohádkové zemi Pikolandu. Jedním z hrdinů byl Pikomatek, což byl hrdinný rytíř a pozdější král Pikolandu.

Na počest Pikomatkova vítězství nad drakem (příhoda ze 3. kola) se pořádala v zemi řada soutěží a turnajů.

1. V soutěži ve sběru kokosových ořechů došlo ke kuriózní situaci. Majitelé kokosových plantáží poslali do soutěže několik cvičených opic. Každá opice utrhla stejný počet kokosových ořechů. Na zpáteční cestě se však opice pohádaly a každá hodila po každé právě jeden ořech. Zbytek ořechů přinesly do cíle, bylo jich dohromady 33.

S jakou největší ztrátou ořechů (tedy ořechů, které po sobě opice rozházely) musí pořadatelé počítat? (Nepředpokládáme, že by se tyto ořechy našly. Počet ořechů, které může opice najednou snést se stromu, není znám a není nijak omezen). Svou odpověď zdůvodněte.

Největší pozornosti se však těšil matematický turnaj, kterého se zúčastnil i Pikomatko, aby dokázal, že bude králem na svém místě. Jistě vás budou zajímat úlohy z tohoto turnaje:

2. Vezměte si papír a tužku a napište za sebou, kolik chcete přirozených čísel. Musí být ale taková, že když sečtu libovolných 17 po sobě jdoucích čísel, výsledek bude sudé číslo. A když sečtu libovolných 18 po sobě jdoucích čísel, výsledek bude liché číslo. Kolik čísel nejvíce mohu takto napsat?

3. Když jsem ještě chodil do školy, trvala mi cesta z domova do školy 20 minut. Jednou jsem si zapomněl sešit s domácím úkolem. Kdybych šel dále do školy, přišel bych 8 minut před začátkem vyučování. Kdybych se vrátil domů pro sešit, přišel bych 10 minut po zvonění. Jakou část cesty jsem již ušel? (Předpokládejte, že se pohybuji stále stejnou rychlostí.)

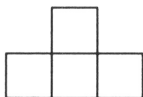
4. Jednou sestra koupila meloun. Třemi řezy jej rozřezala právě na sedm částí. Když jsme meloun snědli, zbylo po něm 8 kusů kůrek. (Žádnou kůrku jsme přitom nesnědli ani nezlomili). Jak to sestra s tím řezáním melounu udělala?

České Budějovice

Pro žáky z jižních Čech pořádali 4. ročník korespondenčního semináře společně dr. P. Sokol z katedry matematiky PF Jihočeské univerzity a dr. O. Švejda z gymnázia v Jírovcově ul. v Českých Budějovicích. Seminář měl 3 kola a zúčastnilo se ho asi 100 žáků většinou ze 7. a 8. ročníků ZŠ.

Uvedeme 4 úkoly ze 3. kola:

1. Dokažte, že šachovnici 10×10 nelze pokrýt 25 obrazci, z nichž každý je sjednocením čtyř políček šachovnice a má tvar podle obrázku 65:

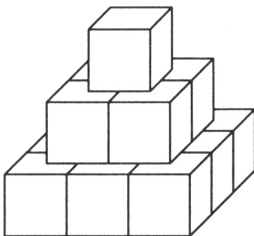


Obr. 65

2. Nalezněte všechna celá čísla x , y , která splňují rovnici $2xy + x + y = 83$. Výsledek se pokuste zdůvodnit.

3. Délky stran pravoúhlého trojúhelníku jsou celá čísla. Rozhodněte, zda jej lze rozdělit na tři trojúhelníky tak, aby jejich obsahy byly vyjádřeny celými čísly.

4. Artista má 14 krychlí, všechny o hraně 1 m. Ty jsou sestaveny do pyramidy podle obrázku 66. Tuto sestavu je třeba na povrchu natřít. Kolik metrů čtverečných musíme vlastně natřít?



Obr. 66

Ve školním roce 1990/91 pořádalo gymnázium J. K. Tyla v Hradci Králové již 3. ročník korespondenčního semináře. Vedli jej dr. Marie Kynterová a prof. Miroslav Tichý. Seminář měl 4 kola, každé po pěti úlohách. Zúčastnilo se asi 300 žáků přibližně z 80 základních škol. Nejlepší řešitelé měli možnost se zúčastnit letního tábora „Mladých Pythagorejců“, který pořádal DDM v Hradci Králové spolu s pobočkou JČMF v Hradci Králové.

Úlohy 4. série:

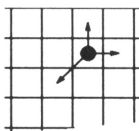
1. Vypočtete:

$$1\,002 - 992 + 982 - 972 + \dots + 22 - 12$$

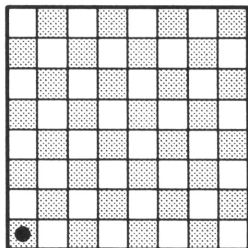
2. Nalezněte všechny trojice přirozených čísel a, b, c , pro něž zároveň platí:

$$a^2 + b - c = 100, \quad a + b^2 - c = 124$$

3. Delfín (obr. 67) je figura, která může skákat po šachovnici třemi způsoby: o jedno políčko nahoru, o jedno políčko doprava nebo o jedno políčko po úhlopříčce vlevo dolů. Stojí v levém dolním rohu šachovnice 8×8 (obr. 68). Zjistěte, zda může vykonat cestu na této šachovnici tak, že na každé políčko skočí právě jednou. (Na políčko vlevo dole už skočil).



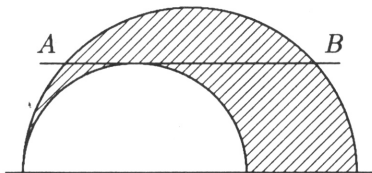
Obr. 67



Obr. 68

4. Tři bratři si mezi sebe rozdělili 24 ořechů. Nejvíce ořechů si nechal nejstarší bratr a nejméně se jich dostalo na nejmladšího. Ten nebyl spokojen, a proto navrhl: „Nechám si polovinu svých ořechů a ostatní rozdělím mezi vás rovným dílem. Potom ať si prostřední bratr také nechá polovinu a ostatní stejným dílem rozdělí mezi mne a nejstaršího bratra. A nakonec ať si nejstarší nechá polovinu svých ořechů a zbytek rozdělí stejným dílem mezi mne a prostředního.“ Bratři souhlasili a po přerozdělení zjistili, že mají všichni stejně. Kolik ořechů původně každý z nich dostal?

5. Úsečka AB (obr. 69) je rovnoběžná s průměry obou půlkruhů, dotýká se menšího půlkruhu a má délku 24. Vypočítejte obsah vyšrafovaného obrazce.



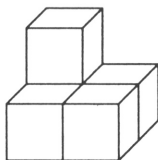
Obr. 69

Svitavy

V okrese Svitavy se uskutečnil 6. ročník korespondenčního semináře, který vedla RNDr. Hana Lišková. Seminář byl určen žákům 7. a 8. ročníků ZŠ a studentům primy a sekundy osmiletých gymnázií. V primě bylo uspořádáno jednodenní soustředění pro práci na počítačích rozdělené do dvou skupin, pro začátečníky a pro pokročilé. Letní soustředění pro 30 nejlepších řešitelů bylo třídní.

Na ukázkou uvedeme dvě úlohy.

1. Dva bratři Mini a Max měli úspěšný den, který chtěli oslavit. Proto zašli koupit dortík, podařilo se jim sehnat skutečně fantastický (obr. 70), který se pokusili rozdělit spravedlivě na dvě části stejného objemu. Najděte i vy dvě různá řešení, jestliže víte, že mohou řezat pouze kolmo na rovinu podstavy (tj. svisle). Vypočítejte v obou případech obsah řezu.



Obr. 70

2. Když dort snědli, vydali se do své zahrady. Cestou našli (ta náhoda) poklad. Byl to řetízek o 60 očkách ze vzácného kovu. Každé očko vážilo 1 gram. Očka se dala otevírat. Miniho napadla otázka: Kolik bychom museli minimálně otevřít oček, abychom ze vzniklých částí dokázali sestavit všechny hmotnosti od 1 g do 60 g?

Korespondenční seminář pod názvem KOKOS (zkratka KOperníkova KOrespondenčního Semináře) uspořádalo pro 11 až 15leté žáky gymnázium Mikoláše Koperníka (GMK) v Bílovci. Vedoucími semináře byli Aleš Kuběna a Petr Kačenka. Semináře se zúčastnilo 284 řešitelů, z nich nejvíce ze 7. ročníků ZŠ. Seminář se konal třetím rokem, avšak poprvé bylo organizováno pro řešitele soustředění a letní tábor, který byl uspořádán společně s řešiteli kutnohorského Pikomatu.

Týden po soustředění probíhaly talentové zkoušky na GMK v Bílovci. Až na jedinou výjimku všichni účastníci soustředění, kteří dělali talentové zkoušky, byli přijati do matematických tříd GMK v Bílovci.

Na ukázkou uvedeme úlohy 4. kola. Stejně jako v předcházejících kolech jsou i zde všechny úkoly uvedeny jednoduchými příhodami, z nichž mnohé mají společného hrdinu.

4. kolo semináře

Na nedávno uspořádaném soustředění mladých KOKO-Sáků se stalo několik příhod, se kterými bychom vás chtěli seznámit.

1. První příhoda nastala už při seznamování. Nejdříve se seznámili všichni instruktoři se všemi dětmi a potom všechna děvčata se všemi chlapci. Předpokládáme-li, že si při seznamování podávali ruce, bylo takových podání rukou nejdříve 92 a potom 130.

Kolik bylo na soustředění instruktorů, kolik dívek a kolik chlapců? Přitom instruktoři jsou dospělí lidé a nedělíme

je na dívky a chlapce. Dále víme, že dívek bylo více než chlapců.

2. Po všeobecném seznámení jsme nasedli do autobusu a vydali jsme se na Hůrku. Podle tachometru jel autobus rychlostí 45 km/h. Cestou jsme předjeli paní kuchařku, která jela také na Hůrku, ale na kole rychlostí 15 km/h. Když jsme dojeli na Hůrku, vyložili jsme věci, což trvalo 4 minuty, a autobus odjel. Chvilí po jeho odjezdu přijela paní kuchařka a oznámila nám, že ji autobus míjel v protisměru před 6 minutami.

Kolik kilometrů ujela paní kuchařka od místa předjetí do místa, kde potkala vracející se autobus, a kolik kilometrů jí zbývalo na Hůrku?

3. V neděli se běhal závod „bez kyslíku“. Tento závod se běhá na několika tratích. Asi hodinu před startem chybělo vyznačit jen jednu trať, která vedla kolem kruhového lesa o průměru 100 m. Zbylo celkem 6 praporků, kterými se vyznačuje trať. Jana s Renatou se dohodly, že tuto trať vyznačí. Podmínkou bylo, aby od každého praporku bylo vidět k sousednímu praporku.

Kolik metrů musí dívky nejméně ujít, aby celou trať vytyčily? Dívky jdou vždy nejkratší cestou od jednoho praporku ke druhému. Svou cestu skončí opět u prvního praporku. Pokud nejkratší spojnice dvou praporků neprotíná les, je od každého vidět k sousednímu.

4. Když skončil závod „bez kyslíku“, měl Aleš přednášku o bodulících (oživlé body z pohádkové geometrie). Tato přednáška na některé zapůsobila tak, že se jim o bodulících i zdálo. Pavlovi se zdál sen: Na velké louce se objevilo

55 550 bodulíků. Ti se rozdělili do 10 skupin, každá po 5 555 bodulících a pojmenovali se podle pořadového čísla skupin. V první skupině byli bodulíci „1“, ve druhé „2“, ... , v deváté „9“ a v desáté „0“. Pak se začali stavět takto do dlouhé řady:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	<u>11</u>	<u>12</u>	13	...	
										...	100	101	102	...

Každá číslice značí, do které skupiny ten který bodulík patří. (Např. na 12. až 14. místě stáli bodulíci ze skupiny „1“, jak ukazují podtržené číslice.)

Napište postavení posledních 9 bodulíků v této řadě a kolik bodulíků se do řady nevešlo. Řada končí, chybí-li k jejímu doplnění kterýkoli bodulík. Řada může, ale nemusí končit i uprostřed čísla.

Opava

Pro žáky 4. ročníků z Opavy a okolí pořádá korespondenční seminář Pavel Czudek a dr. Libuše Hozová pod názvem „KOUMES“. Jeho úkolem je nejen pobavit žáky, kteří mají rádi matematiku, zajímavými úlohami, ale také hledat zájemce a talentované žáky pro třídy s rozšířeným vyučováním matematiky a přírodovědných předmětů.

Úkoly 3. kola matematické soutěže „KOUMES“

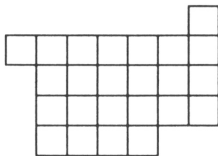
1. Jirka napsal na papír čtyřciferné číslo, které má na konci 76. Vynásobil ho číslem 9 a s překvapením zjistil, že

výsledek je symetrické číslo. Zjistěte, které číslo napsal Jirka na papír?

$$\begin{array}{r} * * 7 6 \\ \times \quad 9 \\ \hline A B C B A \end{array}$$

Symetrické číslo je takové, které je stejné, ať ho čteme zepředu nebo zezadu, např. 51815.

2. Představte si, že máte papírovou krychli a chcete ji rozvinout na stůl. Uděláme to tak, že krychli rozřízneme na sedmi hranách a jestli jsme zvolili správně, dostaneme z krychle jeden kus papíru, který se dá složit opět v krychli. Takovému kusu papíru říkáme síť krychle. Každá síť krychle se skládá ze šesti shodných čtverců. Na obrázku 71 je mnohoúhelník, který se skládá ze 24 shodných čtverců. Rozdělte ho na čtyři části tak, aby každá z nich byla sítí krychle. Stačí jedno řešení.



Obr. 71

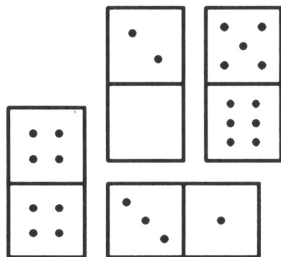
10. Petr a Pavel bydlí na stejné straně ulice. Mezi jejich domy je ještě šest domů. Jednou spočítali chlapci čísla na těchto šesti domech. Petrovi vyšlo 174 a Pavlovi 176. Jeden z nich sčítal čísla správně. Který a proč?

V Bratislavě organizuje velmi oblíbený korespondenční seminář dr. Pavol Černek, CSc., se svými spolupracovníky pod názvem KOMINÁR. Je určen žákům 4. až 6. ročníků ZŠ. Pro každou z těchto kategorií uvedeme 3 ukázky úloh.

Kategorie „čtvrťáci“.

1. Do jídelny přinesli pět bedniček jablek a hrušek. V každé bedničce byl jeden druh ovoce. V jednotlivých bedničkách bylo 105, 110, 115, 120 a 130 kusů ovoce. Když se spotřebovala jedna bednička jablek, zjistilo se, že zůstalo třikrát více hrušek než jablek. Kolik jablek a kolik hrušek přinesli do jídelny?

2. Igor s Ignácem hrají často domino. Jednou uložil Ignác čtyři destičky domina podle obrázku 72:



Obr. 72

Igor se na sestavu podíval a řekl: Vždyť ty jsi vlastně vymyslel příklad:

$$\begin{array}{r} 25 \\ 406 \\ \hline 431 \end{array}$$

Oběma se to zalíbilo a začali vymýšlet další podobné příklady. Vymyslete i vy podobný příklad z destiček domina na obr. 73.



Obr. 73

3. Čtyři kamarádky Kristinka, Kamilka, Anička a Janička – si mezi sebou zahrály turnaj ve stolním tenise. Prozradím vám i jejich příjmení: Janíková, Homolová, Kišová a Vilková. Nepovím vám však, která jména patří k těmto příjmením. Děvčata po dvou hodinách udatného boje turnaj dokončila. Janička a Homolová se umístily uprostřed celkového pořadí. Kristinka byla lepší než Anička, ale horší než Vilková. Kamilka neskončila poslední. Kišová byla lepší než Vilková. Dovedete z těchto údajů zjistit, jak skončil turnaj, a správně přiřadit k jednotlivým jménům jejich příjmení? Svou odpověď vysvětlete.

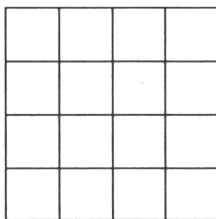
Kategorie „páťáci“.

1. Ignác napsal na papír pěticiferné symetrické číslo. (Symetrické číslo je takové, které se nezmění, ať ho čteme

odzadu či odpředu, např. 4 224, 51 815). Potom ho vydělil číslem 7. Dělení mu vyšlo beze zbytku. Výsledek končil dvojicí 78. Zjistěte, jaké číslo napsal Ignác na papír.

2. Ignác má doma stavebnici, ve které má válečky a klíny. Jednou, když maminka zapoměla při pečení koláčů uklidit váhu, začal si s ní Ignác hrát. Zjistil, že váleček a kostka mají dohromady stejnou hmotnost jako čtyři klíny. Klín a váleček zase mají dohromady stejnou hmotnost jako tři kostky. Nakonec zjistil, že... kostek má stejnou hmotnost jako... klínů. Dokážete zjistit chybějící čísla v předešlé větě? Svůj postup vysvětlete.

3. Na dílenských pracích se děti učily řezat lupenkovou pilkou. Všichni žáci dostali stejný kus překližky, který se skládal ze 16 shodných čtverců (obr. 74).



Obr. 74

Nakreslete všechny způsoby, kterými se dá tato tabulka rozřezat na dvě shodné části. Řezat se může jen po vyznačených čarách.

1. Na očíslování stran ve třech Ignácových knihách bylo potřeba 115krát číslice 7. Jedna knížka má o 10 stran méně než druhá, ale o 10 stran více než třetí. Kolik stran mají jednotlivé knihy? Svůj postup vysvětlete.

2. Zápis ukazuje nesprávně vypočítaný součet tří čísel:

$$\begin{array}{r} 385 \\ 972 \\ 654 \\ \hline 1588 \end{array}$$

Tento zápis máte opravit tak, že vyberete dvě dvojice z napsaných 13 číslic a vyměníte v obou dvojicích číslice mezi sebou. Takto opravený součet už musí být správný. Svůj postup vysvětlete a najděte všechna řešení.

3. Ignác a Igor se zúčastnili ve třídě šachového turnaje. Všichni soutěžící se dohodli, že každý z nich se utká jednou se všemi ostatními. Igor a Ignác však turnaj nedokončili. Oba současně onemocněli, takže odehráli stejný počet partií. Zbylí soutěžící dokončili turnaj bez nich. Celkem se sehrálo 31 partií. Zjistěte, zda před onemocněním hráli Igor a Ignác proti sobě. Svou odpověď odůvodněte.

Banská Bystrica

Jeden z nejstarších korespondenčních seminářů u nás vedl doc. dr. Bohuš Sivák, CSc., v Banské Bystrici. Ve školním roce se konal již jeho 11. ročník. Seminář se vrátil i ke svému původnímu názvu KOVBOJ, což je zkratka „KOrespondenčný Velký BOJ“.

Oproti jiným korespondenčním seminářům se KOVBOJ liší svým zaměřením, protože účastníci řeší nejen matematické úlohy, ale i úlohy z programování a šachové úlohy. Soutěž je určena žákům 6. až 8. ročníků. V tomto roce se zúčastnilo 35 soutěžících.

Věříme, že naše čtenáře zaujmou vedle matematických úloh svou neobvyklostí i úlohy z programování a šachové úlohy. Také ony pomáhají rozvíjet dovednost řešit problémy, umění se k nim „postavit“, rozvíjet tvořivé přístupy k řešení, logický úsudek a další důležité dovednosti budoucích tvůrčích osobností.

Uvedeme úlohy 1. kola.

Matematické úlohy

1. Rozložte číslo 199 091 na prvočinitele. (Naším čtenářům připomeneme, že úloha byla zadána ve školním roce 1990/91.)

2. Zjistěte, zda existuje souvislá řada 30 za sebou jdoucích přirozených čísel, z nichž každé je složeným číslem. Jestliže ano, najděte takovou řadu, která začíná co nejmenším číslem.

3. Číslo se nazývá palindromické, jestliže se čte stejně odpředu i odzadu. (Například číslo 13 731.) Najděte buď největší nepalindromické číslo, jehož 2. mocnina je palindromická, nebo dokažte, že takových čísel je nekonečně mnoho. (Příklad: Číslo 26 je nepalindromické, ale $26^2 = 676$ je palindromické číslo.)

Šachové úlohy

Úvodní pokyny: Ve všech úlohách začíná bílý a dá mat 2. tahem. Uvedte 1. tah bílého a doplňte, zda jde o hrozbu, nebo tempo. Pak napište všechna matová pokračování po všech možných obranách.

Příklad:

Výchozí postavení bílého: Ke3, Dh1, Sb8, Se8, Jd2 (5),
černého: Ke5, Pb5 (2).

Řešení:

- 1. Da1 hrozí 2. Dd4 mat,
- 1. ... Kd5, 2. De5 mat,
- 1. ... Kb6, 2. Da7 mat,
- 1. ... Kb4, 2. Sd6 mat.

Řešte úlohy mat 2. tahem pro postavení:

- 1. Bílý: Ka4, De2, Sd3 (3),
Černý: Ka1 (1)
- 2. Bílý: Kc8, Db1, Sf5, Pa4 (4),
Černý: Kc6, Sa8, Pc5, d6 (4)
- 3. Bílý: Ka4, Dc2, Jb5, Jc4, Pa6, g2 (6).
Černý: Kd5, Pa7, c5, e6, e7 (5)

Úlohy z programování

Úvodní pokyn a studijní text (pro naše čtenáře trochu upraven).

Programujeme v jazyce SKOMAR:

Vstupní abeceda je konečná množina písmen, např. *a*, *b*. Z nich se tvoří slova, např. *a*, *aa*, *abba*. Mezi slova počítáme i prázdné slovo, které nemá žádné písmeno – a značí se σ .

Pracovní abeceda může být shodná se vstupní abecedou nebo vznikne jejím doplněním, např. a, b, c , doplnili jsme c . V programu smí být užívána jen pracovní abeceda.

Substituce. Ukážeme na příkladu. Máme provést substituci $aa \rightarrow b$ na slova $baaa$, $baabaa$, $baba$. V daném slově najdeme (pokud existuje) první skupinu aa a nahradíme ji b . Ze slova $baaa$ vznikne bba , ze slova $baabaa$ vznikne $bbbaa$. Na slovo $baba$ nelze substituci provést, slovo se nezmění a zůstane $baba$.

Program je konečný počet tzv. programových řádků, které se číslují 1, 2, 3, ...

Příklad programovacího řádku č. 7:

7 ba 2 aca 4

(má vždy strukturu: číslo–slovo–číslo–slovo–číslo).

V každé etapě práce má program nějaké pracovní slovo. Ukažme, jak uvedený 7. řádek „zpracuje“ např. slova

$aaba$, aab ,

tj. které „nové“ slovo vznikne a kam ho program „pošle“.

a) 7. řádek má „zpracovat“ slovo $aaba$. Na toto slovo můžeme použít substituci:

$ba \rightarrow aca$

Jejím provedením vznikne „nové“ slovo $aaaca$. Nyní 7. řádek „pošle“ toto nové pracovní slovo na řádek 4. Tam zpracování pokračuje.

b) 7. řádek má „zpracovat“ slovo *aab*. Na toto slovo substituci

$$ba \longrightarrow aca$$

nemůžeme provést, pracovní slovo se nezmění. Zároveň jej program „odešle“ na řádek 2.

Ukázali jsme práci jednoho řádku, nyní příklad práce jednoduchého celého programu:

1	<i>a</i>	2	<i>c</i>	1
2	<i>b</i>	3	<i>a</i>	2
3	<i>c</i>	0	<i>b</i>	3

Do programu vložíme slovo *aab*. Dostaneme postupně následující slovo, v závorce uvádíme čísla řádků, na nichž došlo ke „zpracování“

$$\begin{array}{lclclcl} cab(1) & - & ccb(1) & - & ccb(1) & - \\ cca(2) & - & cca(2) & - & & \\ bca(3) & - & bba(3) & - & bba(3) & \end{array}$$

Poslední uvedené slovo *bba* „odešle“ řádek 3 na řádek 0. Ten v programu není zapsán, proto program končí. Ze vstupního slova *aab* vzniklo výstupní slovo *bba*. Ve vstupním slově se každé písmeno *a* nahradilo písmenem *b* a naopak. Vyzkoušejte si nejdříve sami, že stejně zpracuje daný program každé vstupní slovo.

Přejděte k úlohám, ve kterých máte sami sestavit programy, které zpracují všechna vstupní slova popsáním způsobem.

1. Vstupní abeceda je a, b . Jestliže vstupní slovo neobsahuje žádná písmena a , pak je výstupní slovo prázdné. V opačném případě je výstupní slovo složeno z tolika písmen b , kolik písmen a obsahuje vstupní slovo. (Např. je-li vstup $babb$, musí být výstup b .)

2. Vstupní abeceda je a, b . Výstupní slovo vznikne ze vstupního slova „čtením odzadu“. (Např. ze slova baa musí vzniknout aab .)

3. Vstupní abeceda je a, b, c . Jestliže vstupní slovo obsahuje aspoň 1 písmeno c , tak výpočet běží do nekonečna. V opačném případě je výstupní slovo složeno pouze z písmen c , těchto písmen je tolik, kolik písmen mělo celkem vstupní slovo.

Košice

V Košicích pořádal KV MO spolu s KDDM 4. ročník korespondenčního semináře MATIK. Vedoucí byla Beáta Vavrinčíková, studující posledního ročníku PF UPJŠ. Soutěž měla 4 kola po 6 úlohách, které čerpaly náměty z teorie čísel, geometrie a logiky. Úlohy byly zadávané formou příběhů různých pohádkových postavíček. Autoři semináře tím sledovali dva cíle:

- zpřístupnit žákům úlohy a udělat je zajímavější,
- učit žáky hledat podstatu úlohy, přeformulovat je do matematického jazyka

V létě je vždy 30 až 35 nejúspěšnějších řešitelů pozváno na pětidenní soustředění.

Uvedeme ukázky z 1. kola. Věříme, že i vám se budou úlohy líbit.

1. Orel Šťastný Let pracuje jako dispečer na letišti. Z letiště odlétají letadla na lince A každý třetí den, na lince B každý pátý den a na lince C každou středu a neděli. Dne 7. ledna 1990 startovala letadla na všech třech linkách. Šťastný Let chce zjistit, kolikrát budou letadla v roce 1991 startovat v jediném dni na všech třech linkách. Umíte mu poradit?

2. Zajíc Papákapustičku se stěhuje. Pomáhají mu Papámrkvičku, Papátravičku a Papáředkvičku. Papákapustičku má v zásobě 12 kapustiček, které mají hmotnost 1, 2, 3, ..., 12 kg. Každý zajíc odvezl 3 kapustičky, přitom žádný z nich nevezl dohromady více než 20 kg. Když všechno v komůrce složili, Papáředkvičku prohlásil, že určitě nikdo z nich nevezl trojici 5, 6 a 7 kg. Měl pravdu?

3. Na pasece uprostřed Černého Lesa žije v chaloupce na muří nožce 720letý Ježidědek. Jako starý mládenec se věnuje výlučně vědecké činnosti a právě se rozhodl napsat Malou encyklopedii čarodějnictví. Chce do ní napsat všechna zaklínadla, která zná. Těch je strašně moc. Přesně

1 10 100 1000 10000 100000 ...

a toto číslo má 1 000 cifer. Ježidědek chce napsat na jednu stránku knihy 72 zaklínadel a zajímá ho, zda i na poslední stránce bude 72 zaklínadel, nebo méně. Pomozte Ježidědkovi vyřešit tento problém, abychom si mohli Malou encyklopedii čarodějnictví co nejdříve koupit na pultech knihkupců.

Praha

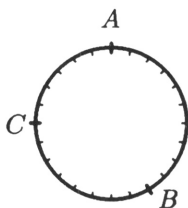
Pražská pobočka JČMF pořádala v roce 1990/91 pod vedením doc. RNDr. M. Komana, CSc., již 6. ročník soutěže „Dejte hlavy dohromady“. Soutěž je určena pro 4členná družstva z 6. ročníků ze tříd s rozšířeným vyučováním matematiky a přírodovědných předmětů. Účastní se jí družstva z Prahy a bývalého Středočeského kraje. Jejím cílem je dát příležitost žákům z těchto tříd změřit mezi sebou síly, učit je řešit úlohy týmově a rozvíjet jejich dovednost v řešení netradičních úloh. Podnítit je ke studiu další matematické literatury přístupné jejich věku i k vlastnímu vymýšlení podobných úloh. Úlohy pro soutěž připravili dr. V. Dřízal a doc. dr. M. Koman, CSc.

Úlohy:

1. Obvod kruhového jezera je 24 km. V místech A, B, C žijí tři kamarádi Adam, Bořek a Cyril. Na kterém místě si mají dát sraz, aby se setkali co nejdříve, jestliže:

- všichni tři vyjdou současně a jdou stejnou rychlostí
- není nutné, aby na místo srazu dorazili současně.

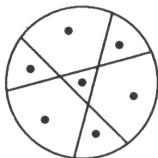
Výsledek vyznačte na obrázku 75 a odůvodněte.



Obr. 75

2. Jirka dostal k sedmým narozeninám dort se 7 svíčkami. Dokázal jej třemi řezy rozdělít na 7 dílů po 1 svíčce (obr. 76). Kolik bylo jeho sestře let, když podobným způsobem rozdělila dort na díly po 1 svíčce pěti řezy? Přitom za rok by jí už 5 řezů nestačilo.

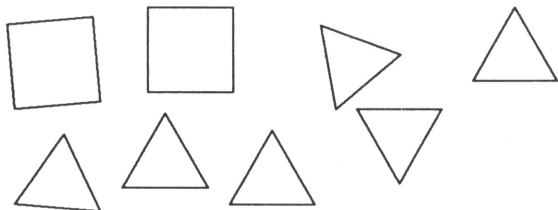
- Nakreslete její dort, vyznačte řezy i svíčky a určete její věk.
- Nakreslete, jak by mohla rozřezat svůj dort příští rok.



Obr. 76

3. Tomáš nesl z kabinetu do třídy duté modely těles. Jeden mu upadl na zem a rozpadl se na 8 kusů — na 2 čtverce a 6 rovnostranných trojúhelníků (obr. 77). Tomáš se pokusil model tělesa znovu slepit. Ke svému překvapení zjistil, že může slepit dva různé modely.

Dokážete slepit aspoň jeden model? Nakreslete síť tohoto tělesa a pak těleso slepte.



Obr. 77

4. Petr má dvě sestry. Oč je starší Hanka, o to je mladší Ivana. Součin věků všech tří je 2 080. Kolik jim je let?

5. Ceny vstupenek na koupaliště jsou:

dospělí	10 Kč
mládež od 10 do 15 let	3 Kč
děti do 10 let	0,50 Kč

V sobotu stejně jako v neděli navštívilo koupaliště 100 osob, které v obou případech zaplatily 100 Kč. V neděli bylo na koupališti méně dětí než v sobotu. Určete počet dětí, dospělých i mládeže, kteří navštívili koupaliště v jednotlivé dny.

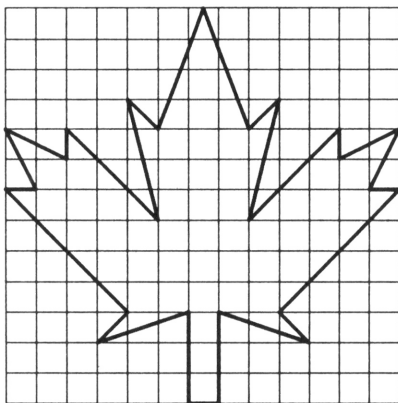
6. Řešte algebrogram:

$$\begin{array}{r} A \ B \ C \ D \ E \\ 4 \\ \hline E \ D \ C \ B \ A \end{array}$$

(Různá písmena značí různé číslice.)

7. Jirka sestavoval ze zápalek různé trojúhelníky. Kolik z nich mohlo mít obvod z patnácti zápalek?

8. Určete obsah listu na obr. 78.



Obr. 78

Opava

Opavská soutěž „Dejte hlavy dohromady“ probíhala v tomto školním roce již po čtvrté. Úkoly připravila podobně jako v minulých letech dr. Libuše Hozová. Soutěž byla určena — stejně jako ve stejnojmenné pražské soutěži — žákům 6. ročníků ze tříd s rozšířeným vyučováním matematiky a přírodovědných předmětů. Žáci řešili 6 úloh:

1. Je dána posloupnost přirozených čísel 2, 5, 8, 11, ... Která z čísel 195, 3 573, 17 924 a 44 444 444 patří do této posloupnosti? Odůvodněte.

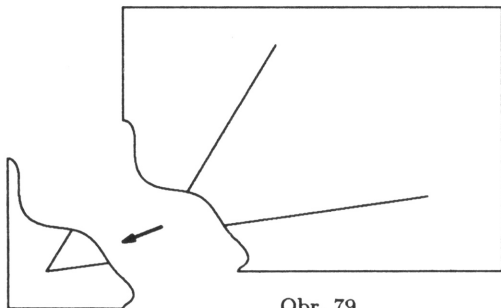
2. Narýsujte čtyřúhelník, který lze jednou přímkou rozdělit na tři trojúhelníky.

3. Do školy nastoupil nový učitel. Žákyně 6. třídy se dohadovaly, jak je vysoký. Jarmila hádala 196 cm, Jitka

163 cm, Tereška 178 cm a Šárka 185 cm. Ukázalo se, že jedna dívka se spletla o 1 cm, druhá o 6 cm, třetí o 17 cm a čtvrtá o 16 cm. Kolik centimetrů měřil pan učitel a která dívka měla nejlepší odhad.

4. Které z čísel $(222\,333)^2$, $(222\,332 \cdot 222\,334)$ je větší, a o kolik? Najděte takový způsob, při kterém se nebudete trápit velkým násobením.

5. Anička sestrojila na papír úhel. Když chtěla narýsovat osu tohoto úhlu, roztrhl se jí papír a vítr odnesl tu část úhlu, na níž byl vrchol úhlu s částmi ramen (obr. 79). Anička chvíli přemýšlela, ale nakonec se jí podařilo osu úhlu narýsovat. Jak to udělala? (Nepomáhejte si prodloužením ramen úhlu.)



Obr. 79

6. Tatínek rozdělil pěti dětem částku menší než 100 Kč. Zdeněk dostal $\frac{3}{4}$ toho, co Milada. Milada $\frac{3}{5}$ toho, co Pavel. Honza $\frac{2}{3}$ toho, co Zdeněk a Milada dohromady. Jirka dostal to, co Honza a $\frac{1}{3}$ toho, co Zdeněk. Pavel $\frac{2}{9}$ a 4 Kč z této částky. Kolik korun dostal každý? .

Prof. RNDr. Milan Koman, CSc.

RNDr. Jiří Binder, CSc., RNDr. Vladimír Repáš

**ČTYŘICÁTÝ ROČNÍK
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
NA ZÁKLADNÍCH ŠKOLÁCH**

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství Praha roku 1993
jako svou publikaci č. D-9B-0-0-13-0-40-0

Edice Zájmové náklady

Odpovědná redaktorka Anežka Bittnerová

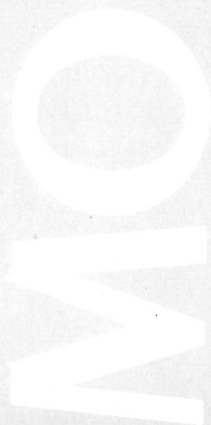
Výtvarná redaktorka Zdeňka Drahokoupilová

Technická redaktorka Jana Tarantová

Vytiskl MISTRAL, tiskárna skript a brožur, Praha 1, Bílkova 17
1. vydání

ISBN 80-04-26406-9

**matematická
olympiáda**



S P N

ISBN 80-04-26406-9