

41. ročník matematické olympiády na středních školách

Andrej Blaho (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Jozef Moravčík (editor); Václav Sedláček (editor); Jaromír Šimša (editor); Pavel Töpfer (editor): 41. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1991/1992. 33. mezinárodní matematická olympiáda. 4. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1997.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404950>

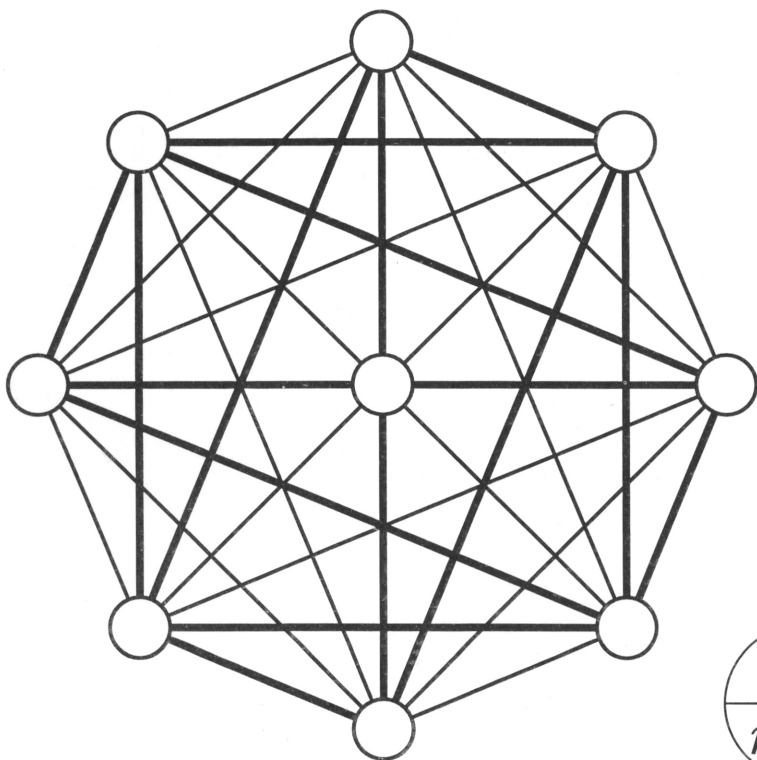
Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

41. ročník matematické olympiády na středních školách



ČTYŘICÁTÝ PRVNÍ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1991/1992

33. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA
ČTVRTÁ MEZINÁRODNÍ OLYMPIÁDA V INFORMATICE

JEDNOTA ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYZIKŮ PRAHA

Za přispění spolupracovníků zpracovali
RNDr. Andrej Blaho, doc. RNDr. Leo Boček, CSc.,
RNDr. Karel Horák, CSc., prof. RNDr. Jozef Moravčík, DrSc.,
doc. RNDr. Václav Sedláček, CSc., doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.,
doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc.

© Karel Horák, editor, 1997

ISBN 80-7015-564-7

Obsah

O průběhu 41. ročníku matematické olympiády	5
Výsledky celostátního kola 41. ročníku MO kategorie A	9
Výsledky celostátního kola 41. ročníku MO kategorie P	11
Nejúspěšnější řešitelé II. kola MO v kategoriích A, B, C a P	12
Kategorie C	27
Texty úloh	27
Řešení úloh	30
Kategorie B	40
Texty úloh	40
Řešení úloh	43
Kategorie A	54
Texty úloh	54
Řešení úloh	59
Kategorie P	79
Texty úloh	79
Řešení úloh	87
Korespondenční seminář ÚV MO 1991/92	118
Úlohy korespondenčního semináře	119
33. mezinárodní matematická olympiáda	124
Texty soutěžních úloh	125
Řešení úloh	127
4. mezinárodní olympiáda v informatice	134
Texty soutěžních úloh	136

O průběhu 41. ročníku matematické olympiády

Soutěž Matematická olympiáda ve školním roce 1991/92 pořádaly pro žáky středních a základních škol Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR, Ministerstvo školství, mládeže a sportu SR ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků, Jednotou slovenských matematiků a fyziků a Matematickým ústavem ČSAV. Soutěž řídil ústřední výbor matematické olympiády (ÚV MO) prostřednictvím oblastních a okresních výborů matematické olympiády.

Cílem soutěže je vyhledávání žáků talentovaných v matematice, probouzení jejich hlubšího zájmu o matematiku a rozvíjení jejich matematických schopností. Ve školním roce 1991/92 se uskutečnil její 41. ročník.

Ústřední výbor MO pracoval ve složení, v němž byl jmenován ministerstvy školství ČR a SR na pětileté období při zahájení 39. ročníku. Předsedou ÚV MO byl doc. dr. Leo Boček, CSc., z MFF UK v Praze, tajemníky byli dr. Karel Horák, CSc., z MÚ ČSAV v Praze a dr. Jiří Binder, CSc., z PF UK v Praze.

V průběhu 41. ročníku MO se konala dvě zasedání ÚV MO, první dne 9. prosince 1991 v Brně, druhé 6.–7. dubna 1992 v Bílovci při celostátním kole kategorie A. Bylo projednáváno hodnocení průběhu soutěže, zabezpečení celostátních soustředění úspěšných řešitelů MO včetně soustředění pro přípravu na MMO, korespondenční seminář ÚV MO a organizace dalších kol soutěže. Byla diskutována vhodnost výběru úloh MO.

V organizaci vlastní soutěže nedošlo k žádným změnám. Pro žáky základních škol byla soutěž rozdělena do pěti kategorií Z4, Z5, Z6, Z7 a Z8, které byly určeny postupně žákům 4. až 8. ročníku. Podrobnosti mohou najít zájemci v brožurce M. Koman a kol.: *41. ročník MO na základních školách*, jejíž vydání se rovněž připravuje.

Pro žáky středních škol byla soutěž organizována ve čtyřech kategoriích A, B, C a P. Kategorie A byla určena žákům 3. a 4. ročníků středních škol, kategorie B byla pro žáky 2. ročníků a v kategorii C soutěžili žáci 1. ročníků. Pro žáky všech tříd středních škol byla určena ještě kategorie P, zaměřená na úlohy z programování a matematické informatiky.

V kategoriích A, B a C má I. kolo dvě části. V první části řeší soutěžící 6 úloh doma nebo v matematických kroužcích a mohou se přitom radit se svými učiteli, vedoucími kroužků apod. Druhá část má formu klauzurní práce, v níž řeší žáci tři úlohy v omezeném čase 4 hodin. Řešitelé, kteří úspěšně projdou prvním kolem, jsou pozváni do druhého (oblastního) kola soutěže, kde řeší čtyři úlohy opět v limitu čtyř hodin.

V kategoriích A a P se koná ještě třetí, celostátní kolo. V něm je vlastní soutěž rozdělena do dvou dnů. V kategorii A řeší soutěžící každý den tři úlohy v časovém limitu čtyři hodiny, v kategorii P ve stejném limitu vždy dvě úlohy.

Celostátní kolo 41. ročníku se uskutečnilo v Bílovci ve dnech 5.–8. dubna 1992 (kat. A) a 8.–11. dubna 1992 (kat. P). Na zabezpečení soutěže včetně bohatého doprovodného programu pro soutěžící i členy ÚV MO se obětavě podíleli členové oblastního výboru MO Severní Moravy, pracovníci matematických kateder přírodovědecké fakulty Palackého univerzity v Olomouci a zejména profesori a pedagogický sbor gymnázia Mikuláše Koperníka v Bílovci.

Vybraná družstva se zúčastnila mezinárodní matematické olympiády i mezinárodní olympiády v informatice. Těmto soutěžím je věnována samostatná kapitola v závěru této ročenky.

K matematické olympiádě vedle vlastní soutěže patří i řada doprovodných akcí pro talentované žáky. Z akcí pořádaných oblastními výbory MO k nim zejména patří semináře pro řešitele MO a instruktáže pro učitele. Pro nejúspěšnější řešitele oblastních kol MO a korespondenčních seminářů byla pořádána (většinou týdenní) soustředění.

Ústřední výbor MO zajišťoval dvě celostátní soustředění. Pro žáky nematurujících ročníků to bylo již tradiční soustředění 80 řešitelů úloh MO a FO. Proběhlo ve dnech 14.–26. 6. 1992 v Banské Štiavnici. Další soustředění bylo věnováno přípravě československého družstva na mezinárodní matematickou olympiádu a konalo se 22.–26. června 1992 v Pardubicích (8 účastníků). ÚV MO též zajišťoval celostátní korespondenční seminář (semináři je věnována samostatná část této brožury).

Soutěžní úlohy I. (domácího) kola všech kategorií matematické olympiády jsou publikovány v tzv. soutěžních letácích. Úlohy jsou dále zveřejňovány v časopisech *Matematika*, *fyzika*, *informatika* a *Rozhledy matematicko-fyzikální*. Na pomoc učitelům jsou pak rozesílány na školy komentáře k úlohám.

Na závěr každého ročníku MO byla ministerstvem školství ve Státním pedagogickém nakladatelství až do 40. ročníku vydávána ročenka, která uvedla všechny zajímavé výsledky, přehled o počtu účastníků v jednotlivých regionech a zejména všechny úlohy jak naší, tak i mezinárodních olympiád včetně jejich řešení. Ročenky dalších ročníků však několik let chyběly. Nyní se vám konečně dostává do ruky první z chybějících ročenek, a to péčí Ústředního výboru MO a Jednoty českých matematiků a fyziků. Současně vychází i ročenka 43. ročníku MO na základních školách a vzápětí vyjde i ročenka právě ukončeného 45. ročníku MO. Postupně by se tak měly objevit i ostatní chybějící ročenky, jejichž těžištěm je zejména bohatství velkého počtu zajímavých a originálních úloh. Těšíme se na váš ohlas a připomínky.

Autoři ročenky jménem Ústředního výboru MO děkují touto cestou všem organizátorům soutěže, především pak učitelům za jejich obětavou spolupráci a za péči, kterou věnují svým žákům. Zároveň vyzývají všechny zájemce o spolupráci při tvorbě zajímavých — především původních — úloh.

Zkuste zažít pocit radosti z toho, objevíte-li svou úlohu i se svým jménem v soutěžním letáku.

Návrhy na soutěžní úlohy pro kategorie A, B a C laskavě zasílejte na adresu předsedy české úlohové komise doc. RNDr. Jaromíra Šimši, CSc., MÚ AV ČR, Žitkova 22, 616 00 Brno. Návrhy úloh vhodných pro kategorii P zasílejte na adresu doc. RNDr. Pavla Töpfera, MFF UK Praha, Malostranské nám. 25, 118 00 Praha 1.

Tabulka 1

Počty žáků středních škol soutěžících v I. kole 41. ročníku MO

Oblast	Kategorie								Celkem	
	A		B		C		P			
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	100	30	90	56	80	53	17	17	287	156
Střední Čechy	86	27	87	38	160	44	12	10	345	119
Jižní Čechy	58	45	55	46	61	47	20	18	194	156
Západní Čechy	52	31	63	46	77	50	17	12	209	139
Severní Čechy										
Východní Čechy										
Brno	114	42	97	78	73	51	9	9	293	180
Jihlava	42	22	57	31	72	38	4	2	175	93
Zlín	9	8	43	20	45	24			97	52
Severní Morava	128	54	158	100	138	69	12	12	436	235
Bratislava	110	55	140	97	170	160			420	312
Západní Slovensko	167	135	207	184	273	201	48	39	695	559
Střední Slovensko	85	71	180	137	125	98	12	8	402	314
Východní Slovensko	82	55	175	121	387	184	29	16	673	376
Česká republika	589	259	650	415	706	376	91	80	2036	1130
Slovenská republika	444	316	702	539	955	643	89	63	2190	1561
ČSFR	1033	575	1352	954	1661	1019	180	143	4226	2691

Tabulka 2

Počty žáků středních škol soutěžících v II. kole 41. ročníku MO

Oblast	Kategorie								Celkem	
	A		B		C		P			
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	29	24	52	19	49	45	17	9	147	97
Střední Čechy	24	7	38	7	41	20	10	6	113	40
Jižní Čechy	32	15	42	21	39	21	17	3	130	60
Západní Čechy	28	13	43	13	47	39	10	4	128	69
Severní Čechy										
Východní Čechy										
Brno	41	27	71	22	51	35	9	5	172	89
Jihlava	20	3	29	5	37	13			86	21
Zlín	8	1	19	2	19	10			46	13
Severní Morava	51	29	99	46	69	59	9	8	228	142
Bratislava	53	43	94	32	138	98			285	173
Západní Slovensko	131	31	176	9	185	77	38	10	530	127
Střední Slovensko	62	36	95	21	95	61	8	4	260	122
Východní Slovensko	53	17	105	26	173	79	16	7	347	129
Česká republika	233	119	393	135	352	242	72	35	1050	531
Slovenská republika	299	127	470	88	591	315	62	21	1422	551
ČSFR	532	246	863	223	943	557	134	56	2472	1082

S ... počet všech soutěžících

U ... počet úspěšných řešitelů

Výsledky celostátního kola 41. ročníku MO

kategorie A

Vítězové

1.-2.	<i>Luboš Motl</i> , 4 G Plzeň, Opavská,	42 b.
	<i>Michal Stehlík</i> , 4 G Brno, kpt. Jaroše,	42 b.
3.	<i>Juraj Lanyi</i> , 4 GAM Bratislava,	41 b.
4.-6.	<i>Kamil Budinský</i> , 3 GJH Bratislava,	38 b.
	<i>Vít Novák</i> , 3 G Praha, Korunní,	38 b.
	<i>Pavel Růžička</i> , 4 G Brno, kpt. Jaroše,	38 b.
7.-10.	<i>Ondřej Klíma</i> , 3 G Brno, kpt. Jaroše,	37 b.
	<i>Michal Kubeček</i> , 4 G Praha, Korunní,	37 b.
	<i>Martin Niepel</i> , 2 GAM Bratislava,	37 b.
	<i>Matej Ondrušek</i> , 3 GJH Bratislava,	37 b.
11.-16.	<i>Viliam Búr</i> , 3 GAM Bratislava,	35 b.
	<i>Pavol Mederly</i> , 4 GAM Bratislava,	35 b.
	<i>Filip Münz</i> , 4 G Brno, kpt. Jaroše,	35 b.
	<i>Josef Menšík</i> , 4 G Brno, kpt. Jaroše,	35 b.
	<i>Daniel Štefankovič</i> , 3 GAM Bratislava,	35 b.
	<i>Herbert Vojčík</i> , 4 G Košice, Pivovarská,	35 b.
17.-19.	<i>Richard K. Kollár</i> , 3 GAM Bratislava,	34 b.
	<i>Luboš Pástor</i> , 4 G Košice, Pivovarská,	34 b.
	<i>Andrej Zlatoš</i> , 2 GAM Bratislava,	34 b.

Další úspěšní řešitelé

20.-21.	<i>Katarína Skalová</i> , 3 GAM Bratislava	33 b.
	<i>Michal Skokan</i> , 2 G Žilina, Velká Okružná	33 b.
22.-23.	<i>Pavol Marton</i> , 3 GAM Bratislava	32 b.
	<i>Petr Novotný</i> , 4 G Praha, Korunní	32 b.
24.-26.	<i>Petr Staufčík</i> , 3 GMK Bílovec	31 b.
	<i>Miloš Volauf</i> , 3 GAM Bratislava	31 b.
	<i>Tomáš Zellerin</i> , 4 G Ústí n. L., Jateční	31 b.
27.-29.	<i>Jiří Černý</i> , 3 G Plzeň, Mikulášské nám.	30 b.

	<i>Roman Koch</i> , 4 GMK Bílovec	30 b.
	<i>Václav Komínek</i> , 3 G Brno, kpt. Jaroše	30 b.
30.–36.	<i>Martin Beneš</i> , 3 GMK Bílovec	29 b.
	<i>Marcela Hlawiczková</i> , 3 G Třinec	29 b.
	<i>Ján Maňuch</i> , 4 G Košice, Pivovarská	29 b.
	<i>Dušan Svitek</i> , 4 G Ban. Bystrica, Tajovského	29 b.
	<i>Jana Uhrová</i> , 3 GMK Bílovec	29 b.
	<i>Jiří Vaníček</i> , 3 G Praha, Korunní	29 b.
	<i>Ján Žabka</i> , 3 G Žilina, Veľká Okružná	29 b.
37.–43.	<i>Tomáš Bruna</i> , 3 G Žilina, Veľká Okružná	28 b.
	<i>Martin Kačer</i> , 3 G Liberec	28 b.
	<i>Ladislav Kis</i> , 4 GAM Bratislava	28 b.
	<i>Matej Kordoš</i> , 4 GJH Bratislava	28 b.
	<i>Alexander Kupčo</i> , 4 GMK Bílovec	28 b.
	<i>Roman Mackovčák</i> , 4 G Banská Štiavnica	28 b.
	<i>Michael Schenk</i> , 4 G Č. Budějovice, Jírovcova	28 b.

Výsledky celostátního kola 41. ročníku MO
kategorie P

Vítězové

1. <i>Matej Ondrušek</i> , 3 GJH Bratislava	40 b.
2. <i>Michal Kubeček</i> , 4 G Praha, Korunní	37 b.
3. <i>Herbert Vojčík</i> , 4 G Košice, Pivovarská	30 b.
4. <i>Jana Syrovátková</i> , 3 G Brno, kpt. Jaroše	29 b.
5.–6. <i>Tomáš Vinař</i> , 2 G Košice, Šrobárova	28 b.
<i>Jan Kotas</i> , 4 G Plzeň, Mikulášské nám.	28 b.
7.–8. <i>Jan Kybic</i> , 4 G Praha, Korunní	27 b.
<i>Rastislav Královič</i> , 3 G Bratislava, Vazovova	27 b.
9. <i>Pavel Kaňkovský</i> , 4 G Brno, kpt. Jaroše	26 b.
10.–11. <i>Michal Koucký</i> , 4 G Praha, Korunní	25 b.
<i>Daniel Štefankovič</i> , 3 GAM Bratislava	25 b.
12. <i>Pavel Petrovič</i> , 3 GJH Bratislava	24 b.

Další úspěšní řešitelé

13.–16. <i>Martin Helmich</i> , 4 G Mladá Boleslav	22 b.
<i>Jaroslav Kaas</i> , 4 G Plzeň, Mikulášské nám.	22 b.
<i>Martin Mareš</i> , 1 G Praha, U libeň. zámku	22 b.
<i>Karel Sršeň</i> , 4 G Benešov	22 b.
17.–18. <i>Peter Budai</i> , 4 G Košice	22 b.
<i>Tomáš Němec</i> , 4 G Beroun	22 b.
19.–22. <i>Juraj Barát</i> , 3 G Košice, Šrobárova	19 b.
<i>Milan Bok</i> , 3 G Praha, Korunní	19 b.
<i>Vít Novák</i> , 3 G Praha, Korunní	19 b.
<i>Dušan Vallo</i> , 4 GJH Bratislava	19 b.
23.–26. <i>Marek Gura</i> , 4 G Poprad	18 b.
<i>Richard Ostertág</i> , 4 GJH Bratislava	18 b.
<i>Michael Schenk</i> , 4 G Č. Budějovice, Jírovcova	18 b.
<i>Jiří Vaníček</i> , 3 G Praha, Korunní	18 b.

**Nejúspěšnější řešitelé II. kola MO
v kategoriích A, B, C a P**

Z každého kraje a z každé kategorie je uvedeno nejvýše prvních deset řešitelů. Označení G znamená gymnázium.

—— **Praha** ——

Kategorie A

1. *Jiří Vaníček*, 3E, G Korunní
- 2.–4. *Vít Novák*, 3E, G Korunní
 Tomáš Krakolev, 4E, G Korunní
 Michal Kubeček, 4D, G Korunní
5. *Jan Vondrák*, 4E, G Korunní
6. *Petr Novotný*, 4D, G Korunní
7. *Tomáš Kočka*, 3D, G U libeňského zámku
- 8.–9. *Jiří Hanika*, 3E, G Korunní
 Vladimír Boháček, 4A, G Voděradská
10. *Tomáš Dušek*, 3E, G Korunní

Kategorie B

1. *Pavel Kraemer*, 2A, G Nad alejí
2. *Jan Vaněk*, 2D, G Korunní
3. *Jitka Nečasová*, 2D, G Korunní
- 4.–5. *Pavel Korber*, 2D, G Korunní
 Michaela Marková, 2D, G Korunní
6. *Robert Chudý*, 2D, G Korunní
7. *Milan Hokr*, 2D, G Korunní
- 8.–9. *Pavčina Mařánková*, 2D, G Korunní
 Petr Pajas, 2D, G Korunní
- 10.–12. *Jiří Kosek*, 2D, G Korunní
 Kateřina Pacovská, 2D, G Korunní

Kategorie C

- 1.–10. *Lukáš Bernard, 1C, G Korunní*
Martin Potužník, 1C, G Korunní
Jiří Hájek, 1D, G Korunní
Pavel Kundrát, 1D, G Korunní
Lukáš Novák, 1D, G Korunní
Michal Ostatnický, 1D, G Korunní
Robert Šámal, 1D, G Korunní
Norbert Vaněk, 1D, G Korunní
Mikuláš Vejlupek, 1D, G Korunní
Michal Fabinger, 1E, G Korunní

Kategorie P

1. *Jan Kybic, 4D, G Korunní*
2. *Petr Novotný, 4D, G Korunní*
3. *Michal Koucký, 4D, G Korunní*
4. *Michal Kubeček, 4D, G Korunní*
5. *Vít Novák, 3E, G Korunní*
6. *Martin Mareš, 1E, G U libeňského zámku*
7. *Jiří Vaníček, 3E, G Korunní*
8. *Milan Bok, 3E, G Korunní*
9. *Ondřej Pořádek, 3E, G Korunní*

———— *Střední Čechy* ————

Kategorie A

1. *Martin Helmich, 4, G Mladá Boleslav*
2. *Petr Burian, 4, G Vlašim*
3. *Vlastimil Juříček, 4, G Mladá Boleslav*
4. *Tomáš Němec, 4, G Beroun*
5. *Dušan Janovský, 4, G Slaný*
6. *Jan Skřivánek, 4, G Kralupy*
7. *Jakub Strnad, 3, G Mladá Boleslav*

Kategorie B

1. *Pavla Drábková*, G Kladno
- 2.-3. *Renata Šlehoferová*, G Beroun
Martina Trejbalová, G Beroun
- 4.-5. *Petr Ivančák*, G Příbram
Olga Janouchová, G Čáslav
- 6.-7. *Antonín Fuksa*, G Kolín
Martina Valášková, G Mladá Boleslav

Kategorie C

1. *Martin Růžička*, G Slaný
2. *Štěpán Verecký*, G Kolín
3. *Eva Novotná*, G Mladá Boleslav
- 4.-5. *Iva Kolářová*, G Mladá Boleslav
Marek Ort, G Mnichovo Hradiště
- 6.-8. *Martin Jaroš*, G Benešov
Jan Šuráň, G Mladá Boleslav
Jan Wasserbauer, G Mladá Boleslav
- 9.-11. *Jan Berný*, G Poděbrady
Milan Jakubec, G Sedlčany
Martina Jeřábková, G Vlašim

Kategorie P

1. *Karel Sršeň*, 4A, G Benešov
2. *Tomáš Němec*, 4A, G Beroun
3. *Jan Bláha*, 3A, G Beroun
4. *Martin Helmich*, 4A, G Mladá Boleslav
- 5.-6. *Vlastimil Juříček*, 4A, G Mladá Boleslav
Jan Stoklasa, 4A, G Benešov

———— Jižní Čechy ————

Kategorie A

- 1.-2. *P. Juruš*, 3A, G Jírovcova, Č. Budějovice

- M. Schenk*, 4A, G Jírovcova, Č. Budějovice
- 3.–5. *O. Cikhart*, 4B, G Tábor
P. Miksová, 3A, G Jírovcova, Č. Budějovice
L. Štěpničková, 4C, G Písek
- 6.–7. *M. Mertěnová*, 4A, G Jírovcova, Č. Budějovice
D. Průša, 3B, G Tábor
- 8.–9. *D. Jelínek*, 4A, G VJ Č. Budějovice
P. Macháček, 4A, G Pelhřimov
10. *J. Franěk*, 4A, G Jírovcova, Č. Budějovice

Kategorie B

- 1.–2. *Ondřej Mareš*, 2A, G Jírovcova, Č. Budějovice
Jaroslav Novotný, 2A, G Jírovcova, Č. Budějovice
3. *Tomáš Mrkvička*, 2A, G Strakonice
4. *Vojtěch Kačírek*, 2A, G VJ Č. Budějovice
5. *Karel Smolek*, 2A, G Jírovcova, Č. Budějovice
- 6.–7. *Kateřina Hubová*, 2A, G Strakonice
Vladimír Kožíšek, 2C, G Písek
- 8.–15. *Jana Červenková*, 2A, G VJ Č. Budějovice
Igor Glücksmann, 2D, G Písek
Marie Kasková, 2A, GJ Č. Budějovice
Ondřej Pangrác, 2A, G Pelhřimov
Jan Plojhar, E2b, SPŠ Písek
Lucie Snášelová, 2A, G VJ Č. Budějovice
Ondřej Stašek, 2A, G Jírovcova, Č. Budějovice
Pavla Tichovská, 2A, G VJ Č. Budějovice

Kategorie C

- 1.–3. *M. Havlíček*, OA Písek
F. Hudák, OA Písek
M. Piller, G Pelhřimov
4. *T. Novák*, G Jírovcova, Č. Budějovice
- 5.–6. *V. Honetschlager*, G Jírovcova, Č. Budějovice
M. Prokešová, G Jírovcova, Č. Budějovice
7. *L. Koblížková*, G Jindřichův Hradec
8. *S. Šmejkal*, G Tábor
- 9.–12. *I. Borovková*, G Jírovcova, Č. Budějovice

O. Filip, G Jírovceva, Č. Budějovice
J. Rychtář, G Strakonice
K. Švadlenka, G Jírovceva, Č. Budějovice

Kategorie P

1. *Petr Macháček*, G Pelhřimov
2. *Michal Schenk*, G Jírovceva, Č. Budějovice
3. *Ondřej Cikhard*, G Tábor

———— *Západní Čechy* ————

Kategorie A

- 1.–2. *Jaroslava Kass*, 4, 1. G Plzeň
Luboš Kotl, 4, 3. G Plzeň
- 3.–4. *Jan Kotas*, 4, 1. G Plzeň
Jan Smolík, 4, 1. G Plzeň
5. *Jiří Černý*, 3, 1. G Plzeň
- 6.–7. *Ondřej Králík*, 4, G Klatovy
Jan Kuneš, 4, G Plzeň
8. *Miroslava Orság*, 4, G Plzeň
9. *Jitka Drábková*, 3, 1. G Plzeň
- 10.–11. *Miroslav Skala*, 3, 2. G Plzeň
Tomáš Větrovský, 4, 1. G Plzeň

Kategorie B

- 1.–2. *Pavel Janda*, 2, G Sokolov
Michal Škop, 2, 1. G Plzeň
3. *Petr Vachovec*, 2, 1. G Plzeň
- 4.–5. *Roman Čechil*, 2, 2. G Plzeň
Petr Písek, 2, 1. G Plzeň
- 6.–7. *Zdeňek Jedlička*, 2P, G Cheb
Eva Wenigrová, 2, G Karlovy Vary
- 8.–10. *Jan Hajič*, 2, 1. G Plzeň
Jitka Lhotská, 2, 1. G Plzeň
Robert Pelikán, 2, 1. G Plzeň

Kategorie C

- 1.-2. *S. Demjanovičová*, 1, 1. G Plzeň
Eva Froňková, 1, 1. G Plzeň
- 3.-6. *Alfréd Kraus*, 1, 1. G Plzeň
Hedvika Šimková, 1, 1. G Plzeň
St. Štěpánek, 1, 1. G Plzeň
Petr Zdeněk, 1, 1. G Plzeň
- 7.-8. *Veronika Hyťhová*, 1, 2. G Plzeň
Karel Trefný, 1, 1. G Plzeň
- 9.-13. *Daniel Basl*, 1, 1. G Plzeň
Martin Klička, 1, 1. G Plzeň
František Kanský, 1, 1. G Plzeň
Petr Mařík, 1, 1. G Plzeň
Kateřina Němcová, 1, Svob. chebská škola Cheb

Kategorie P

1. *Jaroslava Kass*, 4, 1. G Plzeň
2. *Jan Kotas*, 4, 1. G Plzeň
3. *Ondřej Králík*, 4, G Klatovy
3. *Vladimír Kot*, 4, G Cheb

———— **Brno** ————

Kategorie A

- 1.-4. *Ondřej Klíma*, 3A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Václav Komínek, 3A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Josef Menšík, 4A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Pavel Vrbachý, 4A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
- 5.-6. *Filip Münz*, 4A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Michal Stehlík, 4A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
7. *Jana Syrovátková*, 3A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
- 8.-9. *Blažej Neradílek*, 2A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Pavel Růžička, 4A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
- 10.-11. *Petr Kaňovský*, 1A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Markéta Kyloušková, 3A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno

Kategorie B

1. *Mikuláš Piňos*, 2A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
2. *Blažej Neraďílek*, 2A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
3. *Michal Politzer*, 2A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
4. *Dana Černá*, 2A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
- 5.-7. *Jan Hradil*, 2A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Pavel Klepáč, 2B, G, Vídeňská, Brno
Martina Krčová, 2C, G Prostějov
- 8.-10. *Petr Lužný*, 2C, G Prostějov
9. *Břetislav Regner*, 2A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
10. *Jan Václavík*, P2B, SPŠE, Kounicova, Brno

Kategorie C

- 1.-9. *Jitka Crhová*, 1A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Petr Kaňovský, 1A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Filip Krška, 1A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Jiří Kunovjánek, 1A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
David Nečas, 1A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Martin Nečesal, 1A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Milan Roupec, 1A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Barbora Seidlová, 1A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Jan Sirotek, 1A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
10. *Josef Novotný*, 1A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno

Kategorie P

1. *Pavel Kaňkovský*, 4A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
- 2.-3. *Jana Šyrovátková*, 3A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
Petr Špatka, 3A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
4. *Filip Doušek*, 2A, G, tř. kpt. Jaroše, Brno
5. *Pavel Pitner*, 3D, G Boskovice

———— Jihlava ————

Kategorie A

- 1.-2. *Eva Nováková*, 4A, G Jihlava

- Zdeněk Zahradka*, 4E, G Třebíč
3. *Irena Přibyllová*, 4A, G Jihlava

Kategorie B

- 1.–2. *Jiří Komzák*, 2A, G Jihlava
Helena Málková, 2A, G Mor. Budějovice
3. *Iveta Tomenendálová*, 2A, G Jihlava
4.–5. *Martina Benešová*, 2A, G Jihlava
Antonín Svoboda, 2A, G Mor. Budějovice

Kategorie C

1. *Tomáš Vejchodský*, 1B, G Jihlava
2. *Petr Kuba*, 1A, G Žďár nad Sáz.
3. *Josef Šilhan*, 1B, G Velké Meziříčí
4. *Milan Beneš*, 1B, G Telč
5. *Josef Novotný*, 1B, G Žďár nad Sáz.
6. *Petr Časa*, 1B, G Jihlava
7. *Zdeněk Molík*, 1A, G Znojmo
8. *Petr Pavlínec*, 1B, G Jihlava
9.–12. *Tomáš Fuňka*, 1B, G Jihlava
Jan Kratochvíl, 1C, G Třebíč
Jana Minářová, 1C, G Jihlava
Miloslav Trojan, 1C, G Třebíč

———— Zlín ————

Kategorie A

proběhla společně s Brněnskou oblastí

Kategorie B

- 1.–2. *Marek Juřica*, G Zlín
Pavel Urban, G Zlín

Kategorie C

1. *Radek Vintr*, 1A, G Zlín
- 2.-3. *Jan Budík*, 1A, G Kroměříž
Libor Foltýnek, 1B, G Valašské Klobúky
- 4.-5. *Zdeněk Hanák*, 1C SPŠ Uherské Hradiště
Václav Jirkovský, 1A, G Zlín
- 6.-8. *Libuše Cibulková*, 1C, G Uherské Hradiště
Tomáš Duda, 1C, G Uherské Hradiště
Zdeněk Jelínek, 1A, G Zlín
9. *Jan Petrásek*, 1A, G Zlín
10. *Tomáš Graja*, 1A, G JAK Uherský Brod

———— Severní Morava ————

Kategorie A

1. *Marcela Hlawiczková*, 3C, G Komenského, Třinec
- 2.-3. *Jana Uhrová*, 3D, GMK Bílovec
Petr Staufčík, 3C, GMK Bílovec
4. *Alexander Kupčo*, 4D, GMK Bílovec
5. *Roman Koch*, 4D, GMK Bílovec
- 6.-8. *Martin Beneš*, 3C, GMK Bílovec
Petr Kačenka, 3C, GMK Bílovec
Petr Jandík, 3C, GMK Bílovec
9. *Ondřej Kameník*, 4D, GMK Bílovec
10. *Marta Janebová*, 4A, GMK Bílovec

Kategorie B

1. *Tomáš Jurtík*, 2D, GMK Bílovec
- 2.-3. *Zdeněk Románek*, 2C, G Bruntál
Jaromír Fiurášek, 2D, G Přerov
4. *Viktor Pavliska*, 2B, G, Komenského, Havířov
- 5.-13. *Pavel Fekar*, 2C, GMK Bílovec
Jan Kňazovčík, 2C, GMK Bílovec
Petr Ludvík, 2C, GMK Bílovec
Zbyněk Richter, 2C, GMK Bílovec

Ivo Milota, 2C, GMK Bílovec
Zdeněk Staško, 2C, GMK Bílovec
Daniel Vachtarčík, 2B, G, Studentská, Havířov
Michal Bartoň, 2D, Slovan. G, tř. J. z Pod., Olomouc
Kamil Sýkora, 2D, Slovan. G, tř. J. z Pod., Olomouc

Kategorie C

- 1.-2. *Martin Volařík*, 1C, GMK Bílovec
Jiří Novák, 1C, GMK Bílovec
3.-7. *Petr Mareš*, 1C, GMK Bílovec
Jana Sítková, 1C, GMK Bílovec
Zdeněk Vodička, 1C, GMK Bílovec
Luděk Meca, 1A, G ČSLA 517, Frýdek-Místek
Radek Mlčák, 1D, G Přerov
8.-12. *Milada Bičovská*, 1C, GMK Bílovec
Petr Němec, 1C, GMK Bílovec
Daniel Klímsza, 1C, GMK Bílovec
Paula Bartoňová, 1D, Slovan. G, tř. J. z Pod., Olomouc
Václav Knápek, 1D, Slovan. G, tř. J. z Pod., Olomouc

Kategorie P

1. *David Žák*, 4C, GMK Bílovec

———— Bratislava ————

Kategorie A

- 1.-5. *Ladislav Kis*, 4, GAM Bratislava
Matej Kordoš, 4, GJH Bratislava
Juraj Lányi, 4, GAM Bratislava
Pavol Mederly, 4, GAM Bratislava
Andrej Zlatoš, 2, GAM Bratislava
6.-8. *Kamil Budinský*, 3, GJH Bratislava
Katarína Skalová, 3, GAM Bratislava
Miloš Volauf, 3, GAM Bratislava
9.-12. *Viliam Búr*, 3, GAM Bratislava

Michal Kopčok, 4, GAM Bratislava
Pavol Marton, 3, GAM Bratislava
Martin Niepel, 2, GAM Bratislava

Kategorie B

1. *Martin Niepel*, 2 GAM Bratislava
- 2.-3. *Andrej Zlatoš*, 2 GAM Bratislava
Pastor, GAM Bratislava
- 4.-5. *Martinka*, GAM Bratislava
Vagaský, GAM Bratislava
- 6.-12. *Mederlyová*, GAM Bratislava
Topolský, GAM Bratislava
Kuklisová, GAM Bratislava
Vegh, G Dunajská
Kusnieriková, GJH Bratislava
Ondrejovič, GAM Bratislava
Uzovič, BIL

Kategorie C

- 1.-10. *Ivona Bezáková*, 1A, GAM Bratislava
Martin Čaprnda, 1A, GJH Bratislava
Matej Černák, 1A, GAM Bratislava
Patrik Hormík, 1B, GAM Bratislava
Michal Kovár, 1A, GAM Bratislava
František Luzsicza, 1A, GAM Bratislava
Juraj Marcinčin, 1A, GAM Bratislava
Katarina Pirchanová, 1B, GJH Bratislava
Jakub Steiner, 1A, GAM Bratislava
Radoslav Tausinger, 1B, GJH Bratislava

———— Západní Slovensko ————

Kategorie A

- 1.-2. *Norbert Futó*, 4, G maď. Galanta
Roman Hrmo, 3, G, Párovská, Nitra

3. *Tibor Drinka*, 4, G maď. Galanta
- 4.-5. *Andrej Hrmo*, 4, G, Piaristická, Nitra
Ingrid Szabóová, 4, G maď. Galanta
- 6.-7. *Radovan Garabík*, 4, G, Piaristická, Nitra
Andrej Huček, 3, G, Párovská, Nitra
8. *Anikó Báderová*, 4, G maď. Galanta
- 9.-11. *René Pizúr*, 4, G, Párovská, Nitra
Eva Tomašová, 3, G Nové Město nad Váhom
Ivana Vladovičová, 4, G, Hollého, Trnava

Kategorie B

1. *Július Šiška*, 2, G, Párovská, Nitra
2. *Miroslav Hroššo*, 2, G, Párovská, Nitra
3. *František Gábriš*, 2, G Hlohovec
4. *Peter Strešík*, 2, G, Piaristická, Nitra
- 5.-7. *Juraj Chlpík*, 2, G, Párovská, Nitra
Ferenc Mizera, 2, G maď. Komárno
Lea Uhrinová, 2, G Komárno
- 8.-9. *Ivan Mesároš*, 2, G, Párovská, Nitra
Gabriel Tóth, 2, G Komárno

Kategorie C

- 1.-5. *Zoltán Horváth*, 1, G maď. Dunajská Streda
Andrej Macko, 1, G Topoľčany
Miroslav Nachtmann, 1, G Ľudovíta Štúra Trenčín
Branislav Šnajder, 1, G Senica
Ján Ulický, 1, G, Hviezdoslavova, Trnava
6. *Ladislav Gaál*, 1, G maď. Dunajská Streda
- 7.-9. *Jana Havettová*, 1, G Senica
Peter Kósa, 1, G maď. Veľký Meder
Gabriela Mišunová, 1, G, Párovská, Nitra
- 10.-11. *Tibor Csollár*, 1, G Partizánske
Ladislav Szabó, 1, G maď. Šamorín

Kategorie P

1. *Zoltán Bugár*, 3, G maď. Galanta

2. *Ľubomír Štuller*, 4, G Levice
3. *Ľubomír Salanci*, 4, G, Párovská, Nitra
- 4.-7. *Rastislav Heglas*, 4, SPŠ Nové Mesto nad Váhom
Peter Majerník, 4, G maď. Galanta
Peter Miština, 4P, G Piešťany
Pavol Privitzer, 4, G, Piaristická, Nitra
- 8.-9. *Andrej Hrmo*, 4, G, Piaristická, Nitra
Martin Pabiš, 3P, G Piešťany
10. *Jozef Nagy*, 3, G Levice

——— Střední Slovensko ———

Kategorie A

1. *Marek Žabka*, 3, G, Tajovského, Banská Bystrica
2. *Vojtěch Bálint*, 3, G, Velká Okružná, Žilina
- 3.-5. *Tomáš Bruna*, 3, G, Velká Okružná, Žilina
Michal Skokan, 3, G, Velká Okružná, Žilina
Monika Kozáková, 2, G, Tajovského, Banská Bystrica
- 6.-7. *Roman Mackovčák*, 4, G Banská Štiavnica
Ján Žabka, 3, G, Velká Okružná, Žilina
8. *Peter Sívák*, 4, G, Velká Okružná, Žilina
- 9.-11. *Martin Sívák*, 2, G, Velká Okružná, Žilina
Dušan Svitek, 4, G, Tajovského, Banská Bystrica
Ján Šimon, 3, G, Tajovského, Banská Bystrica

Kategorie B

1. *Martin Gažak*, 2B, G, Velká Okružná, Žilina
2. *Michal Skokan*, 2B, G, Velká Okružná, Žilina
3. *Peter Humaj*, 2B, G, Velká Okružná, Žilina
4. *Jitka Hušková*, 2C, G V.P. Tótha, Martin
- 5.-6. *Stanislav Stanek*, 2C, G V.P. Tótha, Martin
Lucie Reháková, 2, G, Tajovského, Banská Bystrica
7. *Miroslav Kulla*, 2C, G V.P. Tótha, Martin
- 8.-11. *Martin Nemček*, 2A, G Liptovský Hrádok
Karol Boško, 2A, G B. Němcovej, Prievidza
Martin Liner, 2A, G Púchov

Kategorie C

1. *Marek Škereň*, 1, G, Veľká Okružná, Žilina
- 2.–5. *Alena Djabliková*, 1, G, Kysucké Nové Mesto
Michal Hlaváč, 1, G Martin
Ján Kudlička, 1, G Martin
Zuzana Surová, 1, G, Veľká Okružná, Žilina
- 6.–8. *Ondřej Kasák*, 1, G, Veľká Okružná, Žilina
Tána Krasuľová, 1, G, Veľká Okružná, Žilina
Radoslav Vážan, 1, G Martin
- 9.–12. *Ivan Debnár*, 1, G, Tajovského, Banská Bystrica
Veronika Joštiaková, 1, G, Veľká Okružná, Žilina
Tomáš Machalík, 1, G, Veľká Okružná, Žilina
Michal Pikna, 1, G, Veľká Okružná, Žilina

Kategorie P

1. *Marián Kučera*, 4A, G Liptovský Hrádok
2. *Peter Kunetka*, 2C, G VPT Martin

———— **Východní Slovensko** ————

Kategorie A

- 1.–2. *Peter Katuščák*, 3A, G, Álejová, Košice
Ján Maňuch, 4A, G, Pivovarská, Košice
- 3.–5. *Miroslav Chladný*, 4A, G, Pivovarská, Košice
Luboš Pástor, 4A, G, Pivovarská, Košice
Herbert Vojčík, 4A, G, Pivovarská, Košice
6. *Jana Višňovská*, 4A, G, Pivovarská, Košice
- 7.–8. *Oskar Hritz*, 4A, G, Pivovarská, Košice
Vladimír Lacko, 3A, G, Álejová, Košice
9. *Andrea Annová*, 4C, G, Hnilná, Košice
- 10.–11. *Cyril Hruščák*, 4A, G Poprad
Milan Matoš, 3A, G Poprad

Kategorie B

1. *Radoslav Vaľovský*, 2A, G Michalovce
2. *Reguli Štefan*, 2E, G Michalovce
3. *Tomáš Vinař*, 2A, G, Šrobárova, Košice
- 4.-6. *Martin Rexa*, 2E, G, Šrobárova, Košice
Jana Šimočková, 2B, G, Konštantínova, Prešov
Róbert Kučera, 2A, G, Opatovská, Košice
- 7.-11. *Tomáš Csajka*, 2A, G, Kuzmányho, Košice
Peter Feher, 2E, G, Pivovarská, Košice
Lenka Michališínová, 2A, G, Pivovarská, Košice
Tomáš Futáš, 2A, G, Álejová, Košice
Milan Žipaj, 2E, G, Konštantínova, Prešov

Kategorie C

- 1.-3. *Ivana Brudňáková*, 1E, G, Konštantínova, Prešov
Martin Domány, 1A, G Michalovce
Radoslav, Gočík, 1A, G, Pivovarská, Košice
4. *Ladislav Oravec*, 1A, G, Šrobárova, Košice
- 5.-11. *Dušana Bajusová*, 1B, G, Pivovarská, Košice
Dalibor Blažek, 1A, G, Pivovarská, Košice
Zuzana Hrinková, 1E, G, Konštantínova, Prešov
Radek Ivančo, 1A SPŠS Prešov
Peter, Gašpar, 1B, G Bardejov
Martin Vozár, 1B, G Bardejov
Martin Lach, 1D, G, Tat., Poprad

Kategorie P

1. *Herbert Vojčík*, 4A, G, Pivovarská, Košice
2. *Tomáš Vinař*, 2A, G, Šrobárova, Košice
3. *Marek, Gura*, 4A, G Poprad
4. *Juraj Barát*, 3D, G, Šrobárova, Košice
5. *Peter Budai*, 4B, G, Opatovská, Košice
6. *Peter Feher*, 2A, G, Pivovarská, Košice

Kategorie C

Texty úloh

C – I – 1

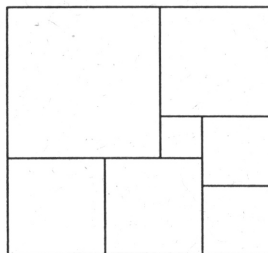
Mezi čísla $6n+2$, kde n je přirozené číslo, neexistuje žádná druhá mocnina přirozeného čísla. Naopak mezi čísla $6n+3$, kde n je přirozené číslo, je nekonečně mnoho druhých mocnin přirozených čísel. Dokažte.

C – I – 2

Kamilka si na tři kartičky napsala po jedné číslici. Potom z nich vytvořila všechna možná trojciferná čísla, která sečetla. Vyšlo jí 3 159. Pak si ale uvědomila, že jedno číslo zapomněla. Které to bylo?

C – I – 3

Obdélník, jehož jedna strana je 13,2 cm, je rozdělen na sedm čtverců podle obr. 1. Zjistěte velikost druhé strany.



Obr. 1

C – I – 4

Vypočítejte objem čtyřřetěnu, jehož rovinná síť vyplní čtverec se stranou 10.

C – I – 5

Jsou-li a, b, c velikosti stran trojúhelníku a t_a, t_b, t_c velikosti příslušných těžnic, pak

$$\frac{3}{4} < \frac{t_a + t_b + t_c}{a + b + c} < 1.$$

Dokažte.

C – I – 6

Najděte nejmenší přirozené číslo n tak, aby existovalo právě 45 uspořádaných dvojic (u, v) přirozených čísel, jejichž nejmenší násobek je n .

C – S – 1

Najděte všechny přirozené čísla n menší než 100, pro které je číslo $7n + 4$ druhou mocninou přirozeného čísla.

C – S – 2

Pro která přirozená čísla p existují přirozená čísla x, y tak, že

$$\begin{aligned}x + y &= p^2, \\10x + y &= p^3?\end{aligned}$$

C – S – 3

Lichobežník je střednou příčkou rozdělený na dva lichobežníky, které mají poměr obsahů rovný q . Určete poměr délek základní lichobežníka. Pro které q má úloha řešení?

C – II – 1

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x + 2y &= 4, \\2xy - 3z^2 &= 4.\end{aligned}$$

C – II – 2

Délky a, b, c stran trojúhelníka sú prirodzené čísla, pre ktoré platí $a + b = 9, a + c = 10$. Zo všetkých trojúhelníkov takýchto vlastností určte ten, ktorý má najmenší obvod, a ten, ktorý má najväčší obvod.

C – II – 3

Součtem trojčiferného čísla A s trojčifernými čísly B, C , jež dostaneme z čísla A cyklickou záměnou číslic, je čtyřčiferné číslo, které je dělitelné číslem 72. Určete čísla A, B, C , víte-li, že každé z nich je zapsáno navzájem různými číslicemi.

C – II – 4

Dokážte, že pre každý ostroúhly trojuholník platí

$$\frac{1}{2} < \frac{v_a + v_b + v_c}{a + b + c} < 1,$$

kde a, b, c sú dĺžky strán a v_a, v_b, v_c dĺžky výšok trojuholníka.

Řešení úloh

C – I – 1

Zjistíme, jaké zbytky při dělení číslem šest dávají druhé mocniny přirozených čísel. Jak ukážeme, zbytek čísla m^2 závisí jen na zbytku celého čísla m . Skutečně, je-li r zbytek při dělení čísla m šesti, pak $r \in \{0, 1, \dots, 5\}$ a $m = 6k + r$ pro vhodné celé číslo k . Rozlišíme proto šest případů podle hodnoty r :

$$m = 6k + 0 \Rightarrow m^2 = 36k^2 = 6 \cdot 6k^2 + 0$$

$$m = 6k + 1 \Rightarrow m^2 = 36k^2 + 12k + 1 = 6(6k^2 + 2k) + 1$$

$$m = 6k + 2 \Rightarrow m^2 = 36k^2 + 24k + 4 = 6(6k^2 + 4k) + 4$$

$$m = 6k + 3 \Rightarrow m^2 = 36k^2 + 36k + 9 = 6(6k^2 + 6k + 1) + 3$$

$$m = 6k + 4 \Rightarrow m^2 = 36k^2 + 48k + 16 = 6(6k^2 + 8k + 2) + 4$$

$$m = 6k + 5 \Rightarrow m^2 = 36k^2 + 60k + 25 = 6(6k^2 + 10k + 4) + 1$$

Vidíme tedy, že při dělení šesti se zbytek čísla m^2 rovná pouze některému z čísel 0, 1, 4 nebo 3, nikdy se nerovná dvěma (ani pěti). Proto žádné celé číslo tvaru $6n + 2$ není druhou mocninou přirozeného čísla. Naše výpočty rovněž potvrzují, že číslo $6n + 3$ je pro některé přirozené n druhou mocninou přirozeného čísla, právě když je n tvaru $n = 6k^2 + 6k + 1$, kde k je celé číslo. Pro $k = 0, 1, \dots$ tak dostáváme nekonečně mnoho čísel tvaru $6n + 3$, jež jsou druhých mocninami přirozených čísel. Jsou to čísla $3^2, 9^2, 15^2$ atd.

C – I – 2

Označme číslice na kartičkách a, b, c v takovém pořadí, aby číslo, které Kamilka zapomněla, bylo právě $100a + 10b + c$. Kamilka tedy vypočetla součet pěti čísel

$$(100a + 10c + b) + (100b + 10a + c) + (100b + 10c + a) + \\ + (100c + 10a + b) + (100c + 10b + a) = 122a + 212b + 221c,$$

takže máme řešit rovnici $122a + 212b + 221c = 3\,159$ v oboru $\{0, 1, \dots, 9\}$. Provedeme následující trik: k oběma stranám rovnice přičteme zapomenuté číslo $100a + 10b + c$,

$$222(a + b + c) = 3\,159 + (100a + 10b + c).$$

Budeme tak hledat celé násobky N čísla 222, tedy $N = 222k$, které leží mezi čísly 3 159 a $3\,159 + 1\,000 = 4\,159$ a poté porovnávat, zda je číslo k rovno cifernému součtu „přebytku“ $N - 3\,159$.

Předně platí $222 \cdot 14 = 3\,108 < 3\,159$ a dále

$$222 \cdot 15 = 3\,159 + 171, \quad 15 \neq 1 + 7 + 1,$$

$$222 \cdot 16 = 3\,159 + 393, \quad 16 \neq 3 + 9 + 3,$$

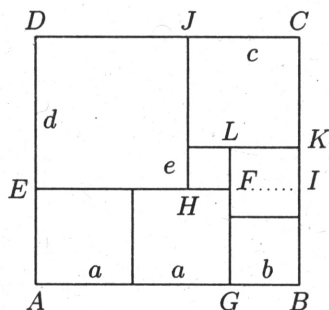
$$222 \cdot 17 = 3\,159 + 615, \quad 17 \neq 6 + 1 + 5,$$

$$222 \cdot 18 = 3\,159 + 837, \quad 18 = 8 + 3 + 7.$$

Další násobky už testovat nemusíme, neboť $222 \cdot 19 = 4\,218 > 4\,159$. Kamilka proto zapomněla napsat číslo $100 \cdot 8 + 10 \cdot 3 + 7 = 837$.

C – I – 3

Strany a vrcholy čtverců si označíme tak, jak je uvedeno na obr. 2. Mezi délkami $a, b, \dots, e$ lze podle tohoto obrázku najít řadu závislostí. Tak



Obr. 2

z rovností délek úseček

$$|AG| = |EF|, \quad |HI| = |CJ|, \quad |BK| = |GL|, \quad |HJ| = |ED|$$

plynou po řadě rovnosti

$$2a = d + e, \quad e + b = c,$$

$$2b = a + e, \quad e + c = d.$$

Odtud pomocí délky e snadno vyjádříme ostatní:

$$a = \frac{7}{3}e, \quad b = \frac{5}{3}e, \quad c = \frac{8}{3}e, \quad d = \frac{11}{3}e.$$

Podle toho, která ze stran obdélníku $ABCD$ má zadanou velikost 13,2 cm, platí buď $2a + b = 13,2$, nebo $a + d = 13,2$. Dosadíme-li sem předchozí vyjádření délek a, b, c a d , dostaneme rovnici pro určení neznámé e :

$$2 \cdot \frac{7}{3}e + \frac{5}{3}e = 13,2 \quad \text{resp.} \quad \frac{7}{3}e + \frac{11}{3}e = 13,2.$$

V prvním případě vychází $e = \frac{198}{95}$, ve druhém $e = \frac{11}{5}$. Délka druhé strany obdélníku je tedy v prvním případě rovna

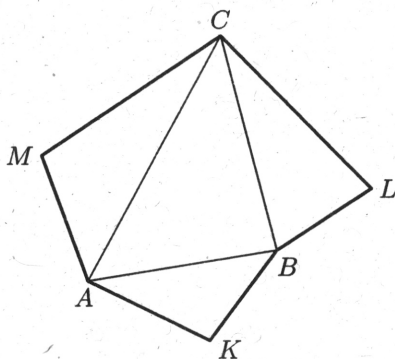
$$a + d = 6e = \frac{1188}{95} \text{ cm},$$

ve druhém

$$2a + b = \frac{19}{3}e = \frac{209}{15} \text{ cm}.$$

C – I – 4

Síť libovolného čtyřstěnu $ABCV$ rozvinutá do roviny ABC se skládá ze čtyř trojúhelníků (obr. 3), jejichž sjednocení vytvoří „šestiúhelník“



Obr. 3

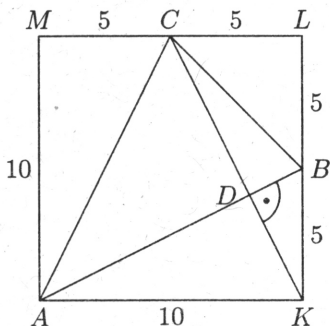
$AKBLCM$, ve kterém platí

$$|AK| = |AM|, \quad |BK| = |BL| \quad \text{a} \quad |CL| = |CM|. \quad (1)$$

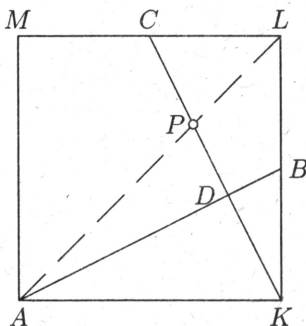
Použití uvozovek v předchozí větě je namístě, neboť některé z dvojic úseček AK , AM nebo BK , BL resp. CL , CM mohou svírat přímý úhel 180° , tehdy je síť mnohoúhelník s menším počtem stran. V naší úloze je síť čtverec, zvolme označení vrcholů tak, aby $|\sphericalangle KBL| = |\sphericalangle LCM| = 180^\circ$, potom s ohledem na (1) platí

$$|AK| = |AM| = 10, |BK| = |BL| = |CL| = |CM| = 5$$

(obr. 4). Protože při otočení čtverce $AKLM$ kol jeho středu o 90° přejde úsečka AB v úsečku KC , platí $AB \perp KC$. Označíme-li proto D průsečík



Obr. 4



Obr. 5.

přímek AB a KC , je bod D patou stěnové výšky spuštěné z vrcholu V čtyřstěnu $ABCV$ na hranu AB . To ale znamená, že pata P tělesové výšky z vrcholu V na stěnu ABC padne na úsečku KC . Protože $|AC| = |AB|$ a $|VC| = |VB|$, je čtyřstěn $ABCV$ souměrný podle roviny souměrnosti úsečky BC ; bod P proto padne i na úhlopříčku AL (obr. 5). Z podobnosti trojúhelníků AKP a LCP plyne, že bod P dělí úsečku KC v poměru $2 : 1$ od vrcholu K , a tedy

$$|PK| = \frac{2}{3}|KC| = \frac{2}{3}\sqrt{10^2 + 5^2} = \frac{10}{3}\sqrt{5}.$$

Úsečka DK je výška na přeponu trojúhelníku ABK , proto

$$|DK| = \frac{|AK| \cdot |KB|}{|AB|} = \frac{10 \cdot 5}{5\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

Můžeme proto určit velikost $|PD| = |PK| - |DK| = \frac{4}{3}\sqrt{5}$, a tedy i tělesovou výšku

$$\begin{aligned} |PV| &= \sqrt{|VD|^2 - |PD|^2} = \sqrt{|DK|^2 - |PD|^2} = \\ &= \sqrt{20 - \frac{16}{9} \cdot 5} = \frac{1}{3}\sqrt{100} = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

Obsah S trojúhelníku ABC získáme odečtením od obsahu čtverce $AKLM$ obsahů tří trojúhelníků AKB , BLC a CMA :

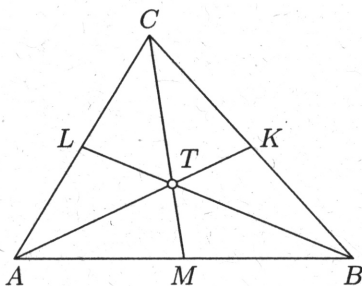
$$S = 100 - 25 - \frac{25}{2} - 25 = \frac{75}{2}.$$

Proto je hledaný objem čtyřstěnu roven

$$\frac{1}{3} S \cdot |PV| = \frac{1}{3} \cdot \frac{75}{2} \cdot \frac{10}{3} = \frac{125}{3}.$$

C - I - 5

Označme K , L , M středy stran po řadě protilehlých vrcholům A , B , C daného trojúhelníku a T jeho těžiště (obr. 6). Podle trojúhelníkové



Obr. 6

nerovnosti v trojúhelníku BCT platí

$$|BC| < |BT| + |CT|, \text{ tj. } a < \frac{2}{3}t_b + \frac{2}{3}t_c.$$

Podobně z trojúhelníků ABT a CAT usoudíme, že

$$c < \frac{2}{3}t_a + \frac{2}{3}t_b \quad \text{a} \quad b < \frac{2}{3}t_c + \frac{2}{3}t_a.$$

Sečtením těchto tři nerovností dostaneme

$$a + b + c < \frac{4}{3} \cdot (t_a + t_b + t_c),$$

což je vlastně levá dokazovaná nerovnost. Dále si všimněme, že podle trojúhelníkové nerovnosti v trojúhelníku KMA platí

$$|AK| < |KM| + |AM|, \quad \text{tj.} \quad t_a < \frac{b}{2} + \frac{c}{2},$$

podobně z trojúhelníků LKB a MLC plyne

$$t_b < \frac{c}{2} + \frac{a}{2} \quad \text{a} \quad t_c < \frac{a}{2} + \frac{b}{2}.$$

Sečtením těchto tři nerovností dostaneme

$$t_a + t_b + t_c < 2\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right) = a + b + c,$$

a to je vlastně pravá dokazovaná nerovnost.

C – I – 6

Je-li $p, q, r, \dots$ posloupnost všech prvočíselných dělitelů hledaného čísla n , pak rozklad n na prvočinitele má tvar $n = p^a q^b r^c \dots$, kde exponenty $a, b, c, \dots$ jsou celá kladná čísla. Libovolní dva dělitele čísla n pak mají tvar

$$n = p^d q^e r^f \dots \quad \text{a} \quad n = p^g q^h r^i \dots,$$

kde $d, e, f, \dots, g, h, i, \dots$ jsou celá *nezáporná* čísla. Navíc je číslo n je nejmenší společný násobek těchto čísel u a v , právě když platí soustava rovností

$$a = \max(d, g), \quad b = \max(e, h), \quad c = \max(f, i), \quad \dots$$

Výběry možných dvojic $(d, g), (e, h), (f, i), \dots$ jsou tedy navzájem nezávislé, např. pro dvojici (d, g) máme možnosti

$$(0, a), (1, a), \dots, (a, a), (a, a-1), \dots, (a, 1), (a, 0),$$

tj. právě $(2a+1)$ možností. Existuje tedy právě $(2a+1)(2b+1)(2c+1)\dots$ uspořádaných dvojic (u, v) zkoumané vlastnosti. (Všimněte si, že určený počet závisí na exponentech $a, b, c, \dots$, nikoliv na hodnotách prvočísel $p, q, r, \dots$ v rozkladu čísla n .) Požadovaná rovnost

$$45 = (2a+1)(2b+1)(2c+1)\dots$$

představuje rozklad čísla 45 na několik celých činitelů větších než 1, tedy jeden ze součinů 45, $15 \cdot 3$, $9 \cdot 5$ nebo $5 \cdot 3 \cdot 3$ (na pořadí činitelů nebereme ohled). To znamená, že číslo n má jeden z tvarů

$$p^{22}, \quad p^7 q^1, \quad p^4 q^2, \quad p^2 q^1 r^1.$$

Nejmenší představitelé těchto čtyř typů jsou čísla 2^{22} , $2^7 \cdot 3$, $2^4 \cdot 3^2$ a $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ (za p, q, r dosazujeme nejmenší prvočísla, přitom vždy k menšímu prvočíslu přiřazujeme větší exponent). Nejmenší je poslední z těchto čísel, tj. číslo 60.

C – S – 1

Hledáme všechna přirozená čísla $n < 100$ taková, že $7n + 4 = m^2$ pro vhodné přirozené m . Možné zbytky při dělení čísla m číslem 7 bychom mohli zjistit stejnou metodou jako v úloze C–I–1, ukažme si však kratší postup: Upravíme-li rovnici na tvar $7n = (m-2)(m+2)$, ihned vidíme, že prvočíslem 7 musí být dělitelné jedno z čísel $(m-2)$ nebo $(m+2)$. Číslo m je tedy buďto tvaru $7k+2$, nebo $7k-2$. Platí

$$m = 7k + 2 \Rightarrow m^2 = 49k^2 + 28k + 4 = 7k(7k + 4) + 4,$$

$$m = 7k - 2 \Rightarrow m^2 = 49k^2 - 28k + 4 = 7k(7k - 4) + 4,$$

tedy hledaná čísla n jsou tvaru $k(7k+4)$ nebo $k(7k-4)$. Dosadíme-li sem postupně $k = 1, 2, \dots$, dostaneme všechna hledaná čísla 3, 11, 20, 36, 51, 75, 96 (další čísla jsou již větší než 100).

C – S – 2

Dosadíme-li vyjádření $x = p^2 - y$ z první rovnice do rovnice druhé, dostaneme

$$10(p^2 - y) + y = p^3, \quad \text{odkud} \quad y = \frac{1}{9}p^2(10 - p),$$

takže $x = p^2 - y = \frac{1}{9}p^2(p - 1)$. Mají-li být obě čísla x a y přirozená, musí platit $1 < p < 10$. Postupným dosazením $p = 2, 3, \dots, 9$ se snadno přesvědčíme, že ve skutečnosti vyhovují pouze hodnoty $p = 3, 6$ a 9 .

C - S - 3

Označíme-li a, c délky základů a v výšku hledaného lichoběžníku, pak délka jeho střední příčky je rovna $\frac{a+c}{2}$ a oba lichoběžníky vzniklé dělením mají tutéž výšku $\frac{1}{2}v$. Podle zadání platí

$$\left(\frac{\left(a + \frac{a+c}{2} \right) \cdot \frac{v}{2}}{2} \right) : \left(\frac{\left(\frac{a+c}{2} + c \right) \cdot \frac{v}{2}}{2} \right) = q.$$

Protože poměr nalevo je roven $(3a+c) : (a+3c)$, můžeme např. délku a vyjádřit s pomocí délky c a poměru q . Vychází

$$a = \frac{3q-1}{3-q} \cdot c, \quad \text{odkud} \quad \frac{a}{c} = \frac{3q-1}{3-q}.$$

Tím je poměr délek základů určen. Protože tento poměr může být libovolné kladné číslo různé od jedné, zbývá najít všechna $q > 0$, pro která je

$$\frac{3q-1}{3-q} > 0.$$

V každém ze tří případů

$$0 < q < \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3} < q < 3 \quad \text{a} \quad q > 3$$

snadno rozhodneme o znaménku zkoumaného zlomku, který je roven 1 jedinečně pro $q = 1$; zjistíme tak, že hledané hodnoty q tvoří množinu $(\frac{1}{3}, 1) \cup (1, 3)$.

C - II - 1

Dosadíme-li vyjádření $x = 4 - 2y$ z první rovnice do rovnice druhé, dostaneme

$$2(4 - 2y)y - 3z^2 = 4 \quad \text{neboli} \quad 3z^2 = -4y^2 + 8y - 4.$$

Všimněme si, že $-4y^2 + 8y - 4 = -4(y - 1)^2 \leq 0$ pro každé reálné y . Protože na druhé straně $3z^2 \geq 0$ pro každé reálné z , musí platit $z^2 = (y - 1)^2 = 0$, a tedy $z = 0$ a $y = 1$. Nakonec určíme $x = 4 - 2y = 2$. Jediné řešení dané soustavy je trojice $(x, y, z) = (2, 1, 0)$.

C - II - 2

Podle trojúhelníkové nerovnosti platí $c < a + b$, takže musí být $c \leq 8$, což spolu s rovností $a + c = 10$ vede k odhadu $a \geq 2$. Protože $b + c = (9 - a) + (10 - a)$, plyne z další trojúhelníkové nerovnosti $a < b + c$ nerovnost $a < 19 - 2a$, odkud $a \leq 6$. Máme tedy tyto možnosti:

a	2	3	4	5	6
$b = 9 - a$	7	6	5	4	3
$c = 10 - a$	8	7	6	5	4
<i>obvod</i>	17	16	15	14	13

Nejmenší obvod má trojúhelník o stranách 3, 4, 6, největší obvod trojúhelník o stranách 2, 7, 8.

C - II - 3

Jsou-li a, b, c cifry hledaného čísla A (zleva doprava), pak $A = 100a + 10b + c$ a čísla B, C mají tvar

$$B = 100b + 10c + a \quad \text{a} \quad C = 100c + 10a + b.$$

Číslo

$$A + B + C = 111(a + b + c) = 3 \cdot 37(a + b + c)$$

je dělitelné číslem $72 = 3 \cdot 24$, právě když číslo 24 dělí součet $a + b + c$. Protože a, b, c jsou po dvou různé cifry, platí

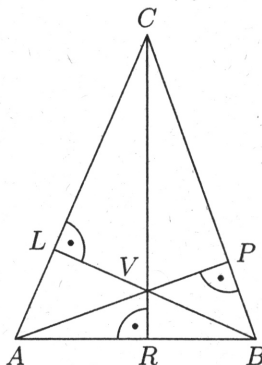
$$a + b + c \leq 9 + 8 + 7 = 24,$$

takže musí být

$$a + b + c = 24.$$

Navíc poslední rovnost platí, jen když $\{a, b, c\} = \{7, 8, 9\}$. Až na pořadí je pak trojice A, B, C rovna buď trojici 987, 879, 798, nebo trojici 978, 789, 897.

Označme P, Q, R paty výšek spuštěných po řadě z vrcholů A, B, C daného ostroúhlého trojúhelníku a V — jeho ortocentrum (obr. 7). Protože



Obr. 7

přepona je nejdelší stranou každého pravoúhlého trojúhelníku, dostaneme z trojúhelníků APC, BQA a CRB nerovnosti

$$v_a < b, v_b < c \text{ a } v_c < a$$

a jejich sečtením pravou dokazovanou nerovnost. Protože ortocentrum V je vnitřním bodem úseček AP, BQ a CR , platí

$$v_a > |AV|, v_b > |BV| \text{ a } v_c > |CV|.$$

Pak ale z trojúhelníkových nerovností

$$\begin{aligned} |AV| + |BV| &> |AB|, |BV| + |CV| > |BC|, \\ |CV| + |AV| &> |CA| \end{aligned}$$

ihned plynou odhady

$$v_a + v_b > c, v_b + v_c > a, v_c + v_a > b,$$

jejichž sečtením dostaneme

$$2(v_a + v_b + v_c) > a + b + c,$$

tj. levou dokazovanou nerovnost.

Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

Jedna z výšek trojúhelníku ABC je menší než každá z jeho stran a tvoří s délkami stran trojúhelníku ABC čtyři za sebou jdoucí přirozená čísla. Určete velikost této výšky.

B – I – 2

Nech $0 < a < c$. Najděte všechny $x \in \langle a, c \rangle$, pro které platí

$$x(2a - x + 2c)^3 \geq 27a^2c^2.$$

B – I – 3

Uvnitř trojúhelníku o stranách 3, 4, 5 najděte všechny body, jejichž vzdálenosti od stran tvoří trojici délek stran nějakého trojúhelníku.

B – I – 4

Dokážte, že obvod každého pythagorejského trojúhelníka je párne číslo.

B – I – 5

Na listě papíru jsou narýsovány části stran daného trojúhelníku, jehož vrcholy leží mimo. Sestrojte střed kružnice vepsané danému trojúhelníku.

B – I – 6

Kolko existuje celých kladných čísel $x \leq 1\,992\,000$ takých, že $1\,992\,000$ dělí $x^3 - x$?

B – S – 1

Nájdite najväčšie dvojčiferné číslo n s tou vlastnosťou, že existuje pytagorejský trojuholník s obsahom n .

B – S – 2

Na listu papíru jsou narýsovány části stran konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ a jeho vrcholy B, D . Vrcholy A, C leží mimo papír. Sestrojte úhlopříčku AC .

B – S – 3

Nechť a, b jsou daná reálná čísla. Potom platí

$$(a + b)^4 \geq 8(a^3b + ab^3).$$

Dokažte!

B – II – 1

Nájdite všetky pytagorejské trojuholníky, ktorých výška na preponu sa rovná 12.

B – II – 2

Bod T je bodom vonkajšieho dotyku kružnice k s priemerom AT a kružnice h s priemerom BT . Dotyčnica kružnice h vedená bodom A zvierá s priamkou AT uhol α a dotyčnica kružnice k vedená bodom B zvierá s priamkou AT uhol β .

Dokažte, že

$$3 \sin \alpha \sin \beta + \sin \alpha + \sin \beta = 1.$$

B – II – 3

Nechť $x, y, z \in (-1, \infty)$ a $x + y + z = 3$. Pak

$$\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1} \leq \frac{3}{2}. \quad (1)$$

Dokažte. Kedy ve vztahu (1) platí rovnost?

B – II – 4

Je dán trojúhelník ABC se stranami 3, 4, 5. V rovině daného trojúhelníku najděte všechny body X , pro které existuje pravoúhlý trojúhelník se stranami $|XA|$, $|XB|$, $|XC|$.

Řešení úloh

B – I – 1

Označme n velikost výšky na stranu c , zbývající strany označme a, b . Obsah trojúhelníku ABC lze vyjádřit dvěma způsoby (používáme Herónův vzorec)

$$\frac{cn}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

kde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Je tedy

$$\frac{cn}{2} = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}.$$

Ze zadání víme, že $\{a, b, c\} = \{n+1, n+2, n+3\}$, můžeme proto předchozí rovnost upravit na tvar

$$2cn = \sqrt{(3n+6)(n+2)n(n+4)}.$$

Po umocnění a menší úpravě dostaneme

$$4c^2n = 3(n+2)^2(n+4). \quad (1)$$

Nyní rozlišíme tři situace:

a) Je-li $c = n+1$, pak z (1) po dosazení a úpravě dostaneme

$$n^2 - 16n - 56 = \frac{48}{n}.$$

Výraz na levé straně je pro $n \in \mathbb{N}$ celočíselný, tj. n musí být dělitelem čísla 48. Postupným dosazováním se snadno přesvědčíme, že žádný z množiny dělitelů čísla 48 dané rovnici nevyhovuje.

b) Pro $c = n+2$ dostaneme z (1) lineární rovnici (po dosazení a vydělení výrazem $(n+2)^2$) s kořenem $n = 12$. Tomu odpovídá ostroúhlý trojúhelník se stranami 13, 14 a 15.

c) Je-li $c = n+3$, obdržíme podobně jako v a) rovnici

$$n^2 - 24 = \frac{48}{n},$$

která opět v množině $\mathbb{N}$ nemá řešení.

Jediným řešením tedy je trojúhelník se stranami délek 13, 14 a 15 a výškou 12 na stranu délky 14.

Poznámka. Úlohu lze řešit také na základě Pythagorovy věty diskusí tří různých možností strany proti výšce délky n :

Přísluší-li např. výška nejdelší straně (obr. 8), pak platí

$$\sqrt{(n+2)^2 - n^2} + \sqrt{(n+1)^2 - n^2} = n+3.$$

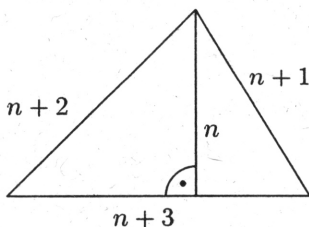
Z tohoto vztahu po úpravě a dvojím umocnění postupně dostaneme

$$2\sqrt{n+1} + \sqrt{2n+1} = n+3,$$

$$4\sqrt{(n+1)(2n+1)} = n^2 + 4,$$

$$n^2 - 24 = \frac{48}{n}.$$

Tato rovnice, jak již víme, nemá řešení v $\mathbb{N}$. Další případy se řeší obdobně.



Obr. 8

B – I – 2

Za daných podmínek zřejmě platí

$$(c-x) \left(1 - \frac{a}{x}\right) \geq 0.$$

Odtud dostáváme

$$a + c - x \geq \frac{ac}{x}.$$

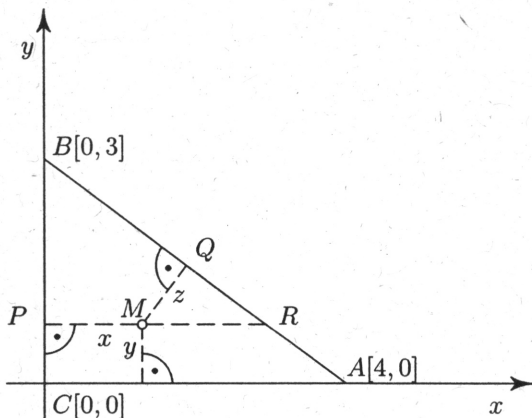
Tento vztah a nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem tří kladných čísel využijeme při úpravách levé strany zadané nerovnice. Je tedy

$$\begin{aligned} x(2a + 2c - x)^3 &= x(a + c + (a + c - x))^3 \geq \\ &\geq \left(a + c + \frac{ac}{x}\right)^3 \geq \\ &\geq x \cdot 3^3 \cdot a \cdot c \cdot \frac{ac}{x} = 27a^2c^2. \end{aligned}$$

Nerovnice proto platí pro všechna $x \in \langle a, c \rangle$. Platí vždy dokonce ostrá nerovnost, neboť podle předpokladu je $a \neq c$.

B – I – 3

Vzdálenosti libovolného vnitřního bodu M od jednotlivých stran trojúhelníku označme x, y, z (obr. 9). Paty kolmic z bodu M na strany BC ,



Obr. 9

AB označme P, Q a R necht' je průsečík přímek PM, AB . Trojúhelníky BCA, MQR, BPR jsou navzájem podobné, tj. mají délky stran v poměru $3 : 4 : 5$. Platí tedy

$$\begin{aligned} |MR| &= \frac{5}{3} |MQ| = \frac{5}{3} z, \\ |PR| &= \frac{4}{3} |BP| = \frac{4}{3} (3 - y), \\ |MP| &= x. \end{aligned}$$

Po dosazení těchto vztahů do rovnosti

$$|MP| + |MR| = |PR|$$

zjistíme, že

$$z = \frac{12 - 4y - 3x}{5}. \quad (2)$$

Kladná čísla x, y, z jsou délky stran nějakého trojúhelníku, právě když platí

$$x + y > z \wedge x + z > y \wedge y + z > x.$$

Dosazením výrazu (2) do těchto tří vztahů vyjádříme hledanou množinu jako průnik vnitřků polorovin určených nerovnicemi

$$8x + 9y > 12 \wedge 9y - 2x < 12 \wedge 8x - y < 12.$$

Množinou je vnitřek trojúhelníku XYZ , jehož vrcholy $X = [\frac{3}{2}, 0]$, $Y = [0, \frac{4}{3}]$, $Z = [\frac{12}{7}, \frac{12}{7}]$ leží uvnitř stran daného trojúhelníku ABC .

Poznámka. Vztah (2) se dá odvodit i jinými způsoby. Například použitím vzorce z analytické geometrie pro vzdálenost bodu od přímky, nebo z faktu, že součet obsahů trojúhelníků ABM , ACM , BCM se rovná obsahu trojúhelníku ABC .

B - I - 4

Označme c přeponu trojúhelníku a a, b jeho odvěsny. Druhá mocnina obvodu je

$$\begin{aligned} o^2 &= (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = \\ &= 2(c^2 + ab + ac + bc). \end{aligned}$$

To je sudé číslo, takže i o musí být sudé.

B - I - 5

Vepíšeme-li nějakému trojúhelníku ABC kružnici k , pak je její střed S od jeho stran stejně vzdálen a tato vzdálenost je rovna poloměru ϱ kružnice k . Sestrojíme-li k trojúhelníku ABC stejnoolehý trojúhelník $A'B'C'$ se středem S a koeficientem stejnoolehlosti κ , $0 < \kappa < 1$, má střed S od stran trojúhelníku $A'B'C'$ shodné vzdálenosti $k\varrho$. Proto i vzdálenosti

stran trojúhelníků odpovídajících si v dané stejnolehlosti jsou shodné. Toho využijeme k vyřešení úlohy.

Konstrukce: Uvnitř daného trojúhelníku vedeme ve stejných vzdálenostech rovnoběžky s jeho stranami tak, aby se protly ve vrcholech A' , B' , C' uvnitř obdélníku tvořeného uvažovaným listem papíru a sestrojíme střed S kružnice vepsané trojúhelníku $A'B'C'$. Ten bude zároveň středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC .

B – I – 6

Před řešením úlohy připomeňme následující tvrzení: Jsou-li a , b , c celá čísla a a , b nesoudělná, má diofantovská rovnice

$$au + bv = c \quad (3)$$

s neznámými $u, v \in \mathbb{Z}$ vždy řešení. Vyhovují-li této rovnici nějaká čísla $u_0, v_0 \in \mathbb{Z}$, dá se množina všech řešení rovnice (3) vyjádřit ve tvaru

$$\{(u, v) : u = u_0 + bt, v = v_0 + at, t \in \mathbb{Z}\}. \quad (4)$$

Řešení úlohy. Číslo $1\,992\,000 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 83$ má dělit součin tří po sobě jdoucích nezáporných čísel

$$x^3 - x = (x - 1)x(x + 1).$$

Pro tři po sobě jdoucí čísla vždy platí, že

- a) právě jedno je dělitelné třemi,
- b) nejvýše jedno je dělitelné daným číslem větším než 3,
- c) sudé je buď prostřední z obou čísel, anebo obě krajní. Jsou-li však obě krajní sudá, je jedno z nich lichým násobkem čísla 2.

Se zřetelem na tato fakta mohou pro činitele $x - 1$, x , $x + 1$ nastat možnosti, jejichž přehled je uveden v následujících tabulkách.

Tabulka III vznikne z tabulky II záměnou $x - 1$ za $x + 1$.

Zabývejme se nejprve tabulkou I. Pro první řádek dostáváme tři řešení, neboť $x = 664\,000l \leq 1\,992\,000$, tedy $l = 1, 2, 3$. Ostatní řádky vedou na rovnice typu (3). Například v posledním řádku dosadíme $x = 64l$ do vztahu $x - 1 = 125k$, dostaneme rovnici $64l - 125k = 1$, jejíž kořeny mají tvar $k = k_0 + 64r$, $l = l_0 + 125r$, $r \in \mathbb{Z}$. To vede na $x = x_1 + 64 \cdot 125r$, což dosadíme do vztahu $x + 1 = 83m$. Dostaneme $83m - 8\,000r = 1 + x_1$. Tato rovnice vede nakonec na $x = x_0 + 664\,000t$, $t \in \mathbb{Z}$. Vzhledem k dané

$x - 1$	x	$x + 1$
	$2^6 \cdot 5^3 \cdot 83l$	
5^3k	$2^6 \cdot 83l$	
	$2^6 \cdot 83l$	5^3m
$83k$	$2^6 \cdot 5^3l$	
	$2^6 \cdot 5^3l$	$83m$
$83 \cdot 5^3k$	2^6l	
	2^6l	$83 \cdot 5^3m$
$83k$	2^6l	5^3m
5^3k	2^6l	$83m$

Tabulka I

$x - 1$	x	$x + 1$
$2^5 \cdot 5^3 \cdot 83k$		
$2^5 \cdot 5^3k$	$83l$	
$2^5 \cdot 5^3k$		$83m$
$2^5 \cdot 83k$	5^3l	
$2^5 \cdot 83k$		5^3m
2^5k	$83 \cdot 5^3l$	
2^5k		$83 \cdot 5^3m$
2^5k	$83l$	5^3m
2^5k	5^3l	$83m$

Tabulka II

periodě můžeme kořen x_0 zvolit v intervalu $\langle 1, 664\,000 \rangle$ a z podmínky $x < 1\,992\,000$ zjistíme $t \in \{0, 1, 2\}$. Každý řádek tabulky I tedy vede na tři vyhovující řešení. Obdobně postupujeme i v tabulkách II a III. Tentokrát však vede každý řádek na šest řešení, neboť kořeny příslušných rovnic dávají x tvaru

$$x = x_0 + 332\,000t, \quad x_0 \in \langle 1, 332\,000 \rangle, \quad t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Dané úloze vyhovuje celkem $9 \cdot 3 + 18 \cdot 6 = 135$ přirozených čísel x .

B – S – 1

Ako je známe (pozri napr. Štefan Znáť: *Teória čísel*, časť I., kap. 6) pre odvesny a , b a preponu c ľubovoľného pytagorejského trojuholníka platí

$$\begin{aligned} a &= k(q^2 - p^2), \\ b &= 2kpq, \\ c &= k(q^2 + p^2), \end{aligned} \tag{1}$$

kde k , p , q sú prirodzené čísla, p , q sú nesúdeliteľné čísla rôznej parity a $q > p$. Pre obsah P tohto pravouhlého trojuholníka však platí $P = \frac{1}{2}ab$, čiže $P = k^2pq(q^2 - p^2)$. Z toho vyplýva, že úlohe môže vyhovovať len také dvojciferné číslo n , ktoré možno vyjadriť v tvare

$$n = k^2pq(q^2 - p^2), \tag{2}$$

kde k, p, q sú prirodzené čísla uvedených vlastností. Vzhľadom k tomu, že p, q musia mať rôznu paritu, stačí uvažovať len o párných n . Keďže je $98 = 2 \cdot 7^2$, číslo 98 nevyhovuje. Platí však $96 = 3 \cdot 2^5 = 4^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (2^2 - 1^2)$, z čoho porovnaním s (2) dostaneme $k = 4, p = 1, q = 2$ a po dosadení do (1) máme

$$a = 4(2^2 - 1^2) = 12,$$

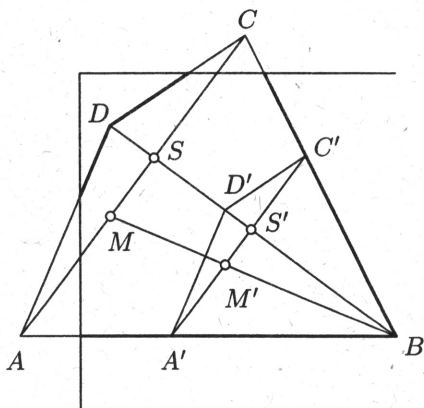
$$b = 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 = 16,$$

$$c = 4(2^2 + 1^2) = 20.$$

Pre plošný obsah P pytagorejského trojuholníka so stranami 12, 16, 20 skutočne platí $P = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96$. Hľadaným číslom je teda číslo 96.

B – S – 2

Rozbor (pozri obr. 10). V rovnofahlosti so stredom B a vhodným koefi-



Obr. 10

cientom $0 < k < 1$ zodpovedá konvexnému štvoruholníku $ABCD$ štvoruholník $A'BC'D'$ ($A'D' \parallel AD$ a $C'D' \parallel CD$), ktorý sa už celý nachádza vo vnútri obdĺžnika predstavujúceho daný list papiera. Bodu $S \in AC \cap BD$ v tejto rovnofahlosti zodpovedá bod $S' \in A'C' \cap B'D'$, pričom $BD' = BD$ a $A'C' \parallel AC$.

Z toho plynie nasledujúca *konštrukcia*. Vo vnútri úsečky DB zvolíme bod D' tak, aby body $A' \in p = AB$ ($A'D' \parallel AD$), $C' \in q = BC$ ($C'D' \parallel CD$) ležali vo vnútri uvažovaného obdĺžnika. Označme $S' \in A'C' \cap BD$

a zvolíme vo vnútri úsečky $A'S'$ (resp. vo vnútri úsečky $S'C'$) ľubovoľne bod M' . Bodom D vedieme rovnobežku s priamkou $D'M'$ a jej priesečník s polpriamkou BM' označme M . Rovnobežka s priamkou $A'C' = M'S'$ idúca bodom M je priamka AC .

Dôkaz správnosti konštrukcie vyplýva zo základných vlastností rovnobežnosti. Je zrejmé, že úloha má riešenie vždy, a to jediné.

B – S – 3

Najskôr dokážeme, že pre každé dve čísla a, b platí $(a+b)^4 \geq 8(ab^3 + a^3b)$. Podľa binomickej vety platí

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

ale tiež

$$0 \leq (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4,$$

čiže

$$a^4 + 6a^2b^2 + b^4 \geq 4(a^3b + ab^3).$$

Preto platí

$$(a+b)^4 \geq 4(a^3b + ab^3) + 4(a^3b + ab^3) \geq 8(a^3b + ab^3),$$

ako bolo treba dokázať.

B – II – 1

Ako je známe, pre odvesny a, b a preponu c ľubovoľného pytagorejského trojuholníka platí

$$a = k(q^2 - p^2), \quad b = 2kpq, \quad c = k(q^2 + p^2), \quad (1)$$

kde k, p, q sú prirodzené čísla, p, q sú nesúdeliteľné čísla rôznej parity a $q > p$. Ak výška v_c na preponu c sa rovná 12, potom pre plošný obsah P uvažovaného trojuholníka platí jednak $P = \frac{1}{2} \cdot 12c = 6c$ a jednak $P = \frac{1}{2}ab$. Vzhľadom na (1) z toho vyplýva, že

$$k^2pq(q^2 - p^2) = 6k(q^2 + p^2),$$

čiže

$$k = \frac{6(q^2 + p^2)}{pq(q^2 - p^2)}. \quad (2)$$

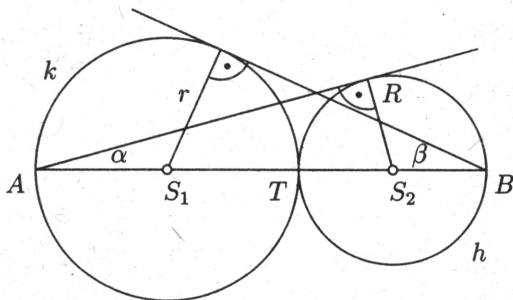
Z toho, že čísla p a q sú nesúdeliteľné, vyplýva, že musia byť nesúdeliteľné aj čísla $q^2 + p^2$, p a čísla $q^2 + p^2$, q . Preto číslo k z (2) môže byť prirodzené len vtedy, keď súčin pq delí 6. Vzhľadom na predpoklady o číslach p , q prichádzajú do úvahy len dvojice a) $p = 1$, $q = 2$; b) $p = 1$, $q = 6$; c) $p = 2$, $q = 3$. Dosadením do pravej strany (2) sa ľahko presvedčíme, že prirodzené k dostaneme len pre $p = 1$, $q = 2$ ($k = 5$). Ak tieto hodnoty dosadíme do (1), dostaneme $a = 15$, $b = 20$, $c = 25$. Z toho, že v pravouhlom trojuholníku platí $ab = v_c c$, dostávame, že $v_c = \frac{ab}{c} =$

$$= \frac{15 \cdot 20}{25} = 12.$$

Úlohe teda vyhovuje jediný pytagorejský trojuholník so stranami $a = 15$, $b = 20$, $c = 25$.

B – II – 2

Označme r polomer kružnice k a R polomer kružnice h (obr. 11). Potom



Obr. 11

je

$$\sin \alpha = \frac{R}{R + 2r}, \quad \sin \beta = \frac{r}{r + 2R}.$$

Preto platí

$$\begin{aligned} 3 \sin \alpha \sin \beta + \sin \alpha + \sin \beta &= \frac{3Rr}{(R + 2r)(r + 2R)} + \frac{R}{R + 2r} + \frac{r}{r + 2R} = \\ &= \frac{3Rr + Rr + 2R^2 + Rr + 2r^2}{(R + 2r)(r + 2R)} = 1, \end{aligned}$$

čo bolo treba dokázať.

B - II - 3

Pre každé tri kladné reálne čísla a, b, c vyplýva z nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom, že

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} = 9.$$

Pre $a = x + 1, b = y + 1, c = z + 1$ z tohto vzťahu dostaneme

$$((x + 1) + (y + 1) + (z + 1)) \left(\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{y + 1} + \frac{1}{z + 1} \right) \geq 9,$$

odkiaľ vzhľadom na podmienku $x + y + z = 3$ vyplýva, že

$$\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{y + 1} + \frac{1}{z + 1} \geq \frac{3}{2}.$$

Platí však

$$\begin{aligned} \frac{x}{x + 1} + \frac{y}{y + 1} + \frac{z}{z + 1} &= \\ &= \left(1 - \frac{1}{x + 1} \right) + \left(1 - \frac{1}{y + 1} \right) + \left(1 - \frac{1}{z + 1} \right) \leq \\ &\leq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

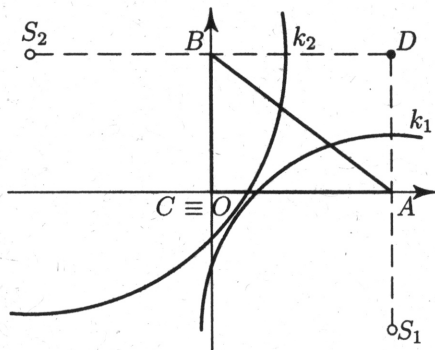
čo už je nerovnosť, ktorej správnosť sme mali dokázať.

V nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom platí rovnosť práve vtedy, keď platí $a = b = c$. Z toho vyplýva, že vo vzťahu (1) platí rovnosť práve vtedy, keď $x + 1 = y + 1 = z + 1$ čiže $x = y = z = 1$ (vzhľadom na podmienku $x + y + z = 3$).

B - II - 4

Je zrejmé, že pravouhlý trojuholník so stranami $|XA|, |XB|, |XC|$ existuje práve vtedy, keď nastane niektorý z týchto prípadov:

- 1) $|XA|^2 + |XB|^2 = |XC|^2$,
- 2) $|XA|^2 + |XC|^2 = |XB|^2$,
- 3) $|XB|^2 + |XC|^2 = |XA|^2$.



Obr. 12

Ak v rovine zvolíme karteziánsku súradnicovú sústavu tak, že platí (obr. 12) $C = [0, 0]$, $A = [4, 0]$, $B = [0, 3]$, $X = [x, y]$, potom $|XA|^2 = (x-4)^2 + y^2$, $|XB|^2 = x^2 + (y-3)^2$, $|XC|^2 = x^2 + y^2$ a v jednotlivých uvedených prípadoch dostaneme

$$1) \quad (x-4)^2 + y^2 + x^2 + (y-3)^2 = x^2 + y^2, \text{ čiže}$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 0.$$

Tejto rovnici vyhovuje jediný bod $D = [4, 3]$.

$$2) \quad (x-4)^2 + y^2 + x^2 + y^2 = x^2 + (y-3)^2, \text{ čiže}$$

$$(x-4)^2 + y^2 + 6y = 9,$$

odkiaľ po doplnení na úplný štvorec dostaneme

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 18.$$

To je rovnica kružnice k_1 so stredom $S_1 = [4, -3]$ a polomerom $r_1 = 3\sqrt{2}$.

3) $x^2 + (y-3)^2 + x^2 + y^2 = (x-4)^2 + y^2$, čiže $x^2 + 8x + (y-3)^2 = 16$, odkiaľ opäť po doplnení na úplný štvorec dostaneme

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 32,$$

čo je rovnica kružnice k_2 so stredom $S_2 = [-4, 3]$ a polomerom $r_2 = 4\sqrt{2}$.

Záver. Podmienkam úlohy vyhovujú teda všetky body $X \in M = k_1 \cup k_2 \cup \{D\}$.

Kategorie A

Texty úloh

A – I – 1

Nech $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ je polynóm stupňa $n \geq 1$, pričom pre každé $0 \leq k \leq n$ platí $a_0 + a_1 + \dots + a_k \geq 0$ a súčasne $a_{k+1} + \dots + a_n \geq 0$. Potom pre každé $x \geq 0$ je $p(x) \geq 0$. Dokážte.

A – I – 2

Nech A' , B' sú kolmé priemety bodov A , B do stien BCD a ACD štvorstena $ABCD$. Ak A' je ortocentrom trojuholníka BCD , tak B' je ortocentrom trojuholníka ACD . Dokážte.

A – I – 3

Jestliže všechny zlomky se jmenovatelem nejvýše rovným n , jež leží v intervalu $(0, 1)$ a jsou zapsány v základním tvaru, seřadíme podle velikosti, pak pro každé dva sousední zlomky $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ bude platit $cb - ad = 1$ (čísla 0 a 1 chápeme jako zlomky $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$). Dokažte.

A – I – 4

Vypočítajte všetky prirodzené čísla n , pre ktoré platí rovnosť $\tau(n) + 33 = \tau(n^2)$, kde $\tau(a)$ udáva počet nezáporných deliteľov prirodzeného čísla a .

A - I - 5

Zjistěte, pro která n má soustava $n + 1$ rovnic

$$\begin{aligned}x_0 + 2x_1 &= 1, \\nx_0 + x_1 + 4x_2 &= n, \\&\dots\dots \\(n - i + 1)x_{i-1} + x_i + 2(i + 1)x_{i+1} &= \binom{n}{i}, \\&\dots\dots \\x_{n-1} + x_n &= 1\end{aligned}$$

řešení v oboru celých nezáporných čísel

A - I - 6

Označme $A = \{n(t) : t > 0\}$ množinu všech reálných čísel $n(t)$, jejichž dekadický zápis má tvar

$$n(t) = 0, a_1(t)a_2(t)a_3(t) \dots a_k(t) \dots,$$

kde $a_k(t) = [tk + 5] \pmod{10}$. Najděte nejmenší α takové, že $x < \alpha$ pro každé $x \in A$.

A - S - 1

Jestliže pro mnohočlen

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

s reálnými kořeny $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí, že $|a_i| = 1$ pro všechna $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, potom $n \leq 3$. Dokažte.

A - S - 2

V prostoru je dán čtyřstěn $ABCD$, jehož mimoběžné hrany jsou navzájem kolmé. Dokažte, že středy jeho hran leží na jedné kulové ploše.

A – S – 3

Nájdite n , pre ktoré má sústava

$$\begin{aligned}\binom{2}{2}x_1 &= \binom{4}{4}, \\ \binom{3}{2}x_1 + \binom{2}{2}x_2 &= \binom{5}{4}, \\ &\dots\dots\dots \\ \binom{n+1}{2}x_1 + \binom{n}{2}x_2 + \dots + \binom{2}{2}x_n &= \binom{n+3}{4}.\end{aligned}$$

riešenie $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ také, že $x_n = 100$.

A – II – 1

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x(y+z) = 1,$$

$$y(z+x) = 1,$$

$$z(x+y) = p$$

s parametrem p . Provedte diskusi vzhledem k parametru p .

A – II – 2

Zistite najväčšie štvorciferné číslo n , pre ktoré platí

$$3\tau(n) = \tau(n^2),$$

kde $\tau(n)$ označuje počet kladných deliteľov čísla n .

A – II – 3

Nech H je priesečník výšok trojuholníka ABC a DH je výška štvorstena $ABCD$. Potom platí

$$\begin{aligned}\cos |\sphericalangle ADB| : \cos |\sphericalangle BDC| : \cos |\sphericalangle CDA| &= \\ &= |CD| : |AD| : |BD|.\end{aligned}$$

Dokážte.

A – II – 4

Najděte všechny hodnoty parametru p , pro které má mnohočlen

$$x^3 - 3x + p$$

aspoň dva různé celočíselné kořeny.

A – III – 1

Nech $p = (a_1, a_2, \dots, a_{17})$ je libovolné poradie čísel $1, 2, \dots, 17$. Označme k_p najväčší index k taký, že ešte platí nerovnosť

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k < a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{17}.$$

Určte najväčšiu a najmenšiu hodnotu k_p a nájdite súčet čísel k_p odpovedajúcich všetkým rôznym poradiam p .

A – III – 2

Označme a, b, c, d, e, f veľikosti hran štvorstenu a S jeho povrch. Dokažte, že

$$S \leq \frac{\sqrt{3}}{6} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2).$$

A – III – 3

Určete všechna přirozená čísla n , pro která platí rovnosti

$$S(n) = S(2n) = S(3n) = \dots = S(n^2),$$

kde $S(x)$ označuje ciferný součet čísla x (zapsaného v desítkové soustavě).

A – III – 4

Riešte rovnicu

$$\cos 12x = 5 \sin 3x + 9 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x.$$

A – III – 5

Uvažujme funkci f definovanou v intervalu $(0, 1)$ jako

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ iracionální} \\ \frac{p+1}{q}, & x = \frac{p}{q}, \end{cases}$$

kde $0 < p < q$ jsou nesoudělná celá čísla. Najděte maximum funkce f na intervalu $(\frac{7}{8}, \frac{8}{9})$.

A – III – 6

V rovině je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Jeho výška procházející bodem B protíná kružnici s průměrem AC v bodech P, Q a výška procházející bodem C protíná kružnici s průměrem AB v bodech M, N . Dokažte, že body M, N, P, Q leží na jedné kružnici.

A - I - 1

Z vyjádření

$$\begin{aligned} p(x) - p(1) &= a_1(x-1) + a_2(x^2-1) + \dots + a_n(x^n-1) = \\ &= (x-1)(a_1 + a_2(x+1) + \dots + \\ &\quad + a_n(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)) = \\ &= (x-1)((a_1 + a_2 + \dots + a_n) + \\ &\quad + (a_2 + a_3 + \dots + a_n)x + \dots + a_n x^{n-1}) \end{aligned}$$

a z předpokladů $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq 0$, $a_2 + a_3 + \dots + a_n \geq 0$, ..., $a_n \geq 0$ je zřejmé, že pro $x \geq 1$ platí

$$p(x) \geq p(1) = a_0 + a_1 + \dots + a_n \geq 0.$$

Abychom dokázali, že $p(x) \geq 0$ pro $x \in (0, 1)$, stačí položit $x = \frac{1}{y}$.

Pak je

$$p(x) = \frac{1}{y^n} (a_n + a_{n-1}y + \dots + a_0 y^n).$$

Předcházející postup aplikujeme na mnohočlen $a_n + a_{n-1}y + \dots + a_0 y^n$ a využijeme předpokladů $a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_0 \geq 0$, $a_{n-2} + a_{n-3} + \dots + a_0 \geq 0$, ..., $a_0 \geq 0$. Pro $x = 0$ je $p(x) = a_0 \geq 0$.

Jiné řešení. Úlohu lze řešit i matematickou indukcí. Pro $n = 1$ dokazovaná věta zřejmě platí. Mějme $n > 1$ a předpokládejme, že věta platí pro všechny mnohočleny stupně menšího než n . Pro $x \geq 1$ je

$$p(x) \geq a_0 + a_1 x + \dots + (a_{n-1} + a_n) x^{n-1}$$

a pro $0 \leq x \leq 1$ je

$$\begin{aligned} p(x) &\geq (a_0 + a_1)x + \dots + a_n x^n = \\ &= ((a_0 + a_1) + \dots + a_n x^{n-1})x. \end{aligned}$$

Mnohočleny na pravé straně obou nerovností nabývají nezáporných hodnot podle indukčního předpokladu.

Předpokládejme tedy, že zlomek $\frac{p}{q}$ ($q \leq n$) v naší posloupnosti není,

pak musí ležet mezi dvěma jejími sousedními členy $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$, tj. $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$, odkud plyne $bp - aq \geq 1$, $cq - dp \geq 1$. Vynásobíme-li první nerovnost d , druhou b a sečteme-li je, dostaneme s využitím vztahu $bc - ad = 1$ nerovnost $q \geq b + d$. To ale znamená, že $b + d \leq n$. Pak by ale zlomky $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ nemohly být sousedními členy uvažované posloupnosti, protože by mezi nimi ležel ještě zlomek $\frac{a+c}{b+d}$. Tím je dokázáno, že po n -tém kroku obsahuje posloupnost všechny zlomky $\frac{p}{q}$, pro které je $0 \leq p \leq q \leq n$.

A - I - 4

Je-li $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ rozklad čísla n na prvočinitele, je zřejmě

$$\tau(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1),$$

a tedy

$$\tau(n^2) = (2a_1 + 1)(2a_2 + 1) \dots (2a_k + 1).$$

Řešme rovnici

$$\tau(n^2) - \tau(n) = 33,$$

neboli

$$\begin{aligned} (2^k - 1)a_1 a_2 \dots a_k + \\ + (2^{k-1} - 1)(a_1 a_2 \dots a_{k-1} + \dots + a_2 a_3 \dots a_k) + \dots + \\ + (2 - 1)(a_1 + a_2 + \dots + a_k) = 33. \end{aligned}$$

Pro $k = 1$ má tvar $a_1 = 33$, pro $k = 2$ má tvar

$$3a_1 a_2 + a_1 + a_2 = 33$$

a řešením jsou dvojice $(3, 3)$, $(8, 1)$ a $(1, 8)$, pro $k = 3$ má tvar

$$7a_1 a_2 a_3 + 3a_1 a_2 + 3a_1 a_3 + 3a_2 a_3 + a_1 + a_2 + a_3 = 33$$

a řešením jsou trojice $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$, pro $k = 4$ má tvar

$$\begin{aligned} 15a_1 a_2 a_3 a_4 + 7(a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4) + \\ + 3(\dots) + (\dots) = 33 \end{aligned}$$

a nemá řešení, neboť pro každou čtveřici přirozených čísel a_1, a_2, a_3, a_4 je levá strana alespoň $15 + 7 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 4$. Tím spíše nemá rovnice řešení pro $k > 4$.

Závěr: Úloze vyhovují právě ta čísla n , která mají rozklad na prvočinitele $n = p^3$, $n = p_1^3 p_2^3$, $n = p_1^8 p_2$ nebo $n = p_1^2 p_2 p_3$.

A - I - 5

Pro $n = 1$ dostaneme soustavu

$$x_0 + 2x_1 = 1,$$

$$x_0 + x_1 = 1,$$

která má jediné řešení $x_0 = 1, x_1 = 0$.

Pro $n = 2, 3$ dostaneme soustavy rovnic, které mají také právě jedno řešení, ne však v oboru celých čísel, pouze v oboru racionálních čísel. Stejný výsledek dostaneme i pro $n = 5$, případně i pro některá další přirozená čísla. To nás vede k domněnce, že soustava nemá pro $n > 1$ řešení v oboru celých čísel.

Předpokládejme naopak, že soustava má v oboru celých čísel řešení $x_0, x_1, \dots, x_n$. Pravé strany rovnic jsou kombinační čísla, koeficienty mocnin q^r v rozvoji dvojčlenu $(1 + q)^n$. Vynásobíme tedy první rovnici číslem 1, druhou zatím neurčeným číslem q , třetí číslem q^2 atd., poslední číslem q^n a všechny získané rovnice sečteme. Na pravé straně dostaneme $(1 + q)^n$, na levé bude součet

$$(1 + qn)x_0 + [2 + q + (n - 1)q^2]x_1 + \dots + \\ + [2i + q + (n - i)q^2]q^{i-1}x_i + \dots + [2n + q]q^{n-1}x_n.$$

Zvolíme-li $q = \sqrt{2}$, rovnají se všechny výrazy v hranatých závorkách výrazu $\sqrt{2}(1 + n\sqrt{2})$, takže pak platí

$$(1 + n\sqrt{2})[x_0 + x_1\sqrt{2} + 2x_2 + 2x_3\sqrt{2} + \dots + (\sqrt{2})^n x_n] \\ = (1 + n\sqrt{2})^n,$$

stejně tak pro $q = -\sqrt{2}$ dostaneme rovnici

$$(1 - n\sqrt{2})[x_0 - x_1\sqrt{2} + 2x_2 - 2x_3\sqrt{2} + \dots + (-\sqrt{2})^n x_n] \\ = (1 - n\sqrt{2})^n.$$

Vynásobíme-li obě rovnice, dostaneme

$$(1 - 2n^2)[x_0 + 4x_0x_2 - 2x_1^2 + \dots + (-1)^n \cdot 2^n x_n^2] = (-1)^n.$$

V hranaté závorce je podle předpokladu celé číslo, to znamená, že číslo $1 - 2n^2$ dělí číslo 1. Odtud plyne, že $n = 1$, pro $n > 1$ nemá daná soustava celočíselné řešení.

A - I - 6

Zřejmě $\alpha \leq 1$, neboť $n(t) \leq 1$ pro každé reálné $t > 0$. Hledané α (jde o supremum) sestrojíme „po číslicích“ zleva doprava: Jeho první číslice c_1 za desetinnou čárkou bude rovna největší ze všech prvních číslic $a_1(t)$ pro $t > 0$. Druhá číslice c_2 bude největší z druhých číslic $a_2(t)$ všech těch t , která mají $a_1(t) = c_1$ atd. Ještě si uvědomme, že se stačí omezit na $t \in (0, 10)$. Snadno zjistíme, že

$$a_1(t) = 9 \text{ pro } t \in \langle 4, 5 \rangle, \text{ tedy } c_1 = 9,$$

$$a_2(t) \leq 4 \text{ pro } t \in \langle 4, 5 \rangle,$$

$$a_2(t) = 4 \text{ pro } t \in \left\langle \frac{9}{2}, 5 \right\rangle, \text{ tedy } c_2 = 4,$$

$$a_3(t) = 9 \text{ pro } t \in \left\langle \frac{14}{3}, 5 \right\rangle, \text{ tedy } c_3 = 9 \text{ atd.}$$

Dostáváme tak zmenšující se intervaly typu $\left\langle \frac{5m-1}{m}, 5 \right\rangle$, které obsahují právě ta $t \in (0, 10)$, pro něž desetinný rozvoj $n(t)$ začíná číslicemi $c_1, c_2, \dots, c_m$. Vzhledem k tomu, že tyto intervaly vždy obsahují čísla libovolně blízká k 5, budeme postupně dostávat $c_m = 9$ pro lichá m a $c_m = 4$ pro sudá m . Hledané číslo je tedy $\alpha = 0,949494 \dots = \frac{94}{99}$. Přitom pro žádné $t > 0$ není $n(t) = \alpha$, jde o pěkný příklad suprema, které není maximum.

A – S – 1

Roznásobením jednotlivých dvojčlenů dostaneme známé algebraické vztahy mezi kořeny algebraické rovnice a jejími koeficienty

$$a_0 = (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \prod_{i=1}^n x_i,$$

.....

$$a_{n-2} = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \sum_{i < j} x_i x_j,$$

$$a_{n-1} = -(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = - \sum_{i=1}^n x_i$$

a samozřejmě $a_n = 1$.

Pro druhou mocninu součtu kořenů dané rovnice tedy platí

$$\begin{aligned} 1 = |a_{n-1}|^2 &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i < j} x_i x_j = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2a_{n-2}, \end{aligned}$$

takže

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 - 2a_{n-2} = 3.$$

Z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro nezáporná čísla $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$ ovšem plyne

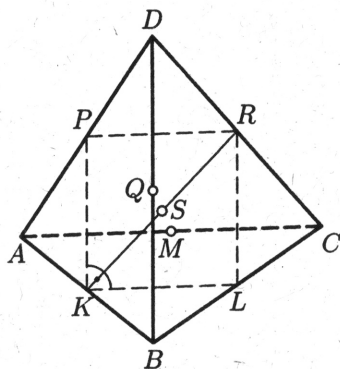
$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt[n]{a_0^2} = 1,$$

neboli $n \leq 3$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

A – S – 2

Označme K, L, M středy hran AB, BC, CA a P, Q, R středy hran AD, BD, CD . Každá ze spojnic dvou středů hran je rovnoběžná s někte-

rou hranou čtyřstěnu (je střední příčkou příslušné trojúhelníkové stěny,



Obr. 14

obr. 14), proto jsou $KLRP$, $KQRM$ a $MLQP$ rovnoběžníky. Protože mimoběžné hrany jsou navzájem kolmé, jsou uvedené čtyřúhelníky pravoúhelníky, a tak např. body K, L, R, P leží na kružnici se středem S ve středu úsečky KR a průměrem $|KR|$. Podobně ale leží na kružnici se středem S a průměrem $|KR|$ i body K, Q, R, M (protože jsme v prostoru, nemusí se ovšem jednat o tutéž kružnici). Odtud plyne, že všech šest uvedených bodů leží na kulové ploše se středem S a poloměrem $|SR|$.

A – S – 3

Z první rovnice dostaneme $x_1 = 1$, dosazením do druhé rovnice vyjde $x_2 = 2$. Z třetí rovnice vypočteme $x_3 = 3$.

Předpokládejme, že jsme již vypočetli, že $x_i = i$ pro $i = 1, 2, \dots, k-1$. Hodnotu x_k vypočteme z k -té rovnice, která má tvar

$$\binom{k+1}{2}x_1 + \binom{k}{2}x_2 + \dots + \binom{3}{2}x_{k-1} + \binom{2}{2}x_k = \binom{k+3}{4}.$$

Dosadíme-li za x_i číslo i ($i = 1, 2, \dots, k-1$), dostaneme

$$x_k \binom{k+1}{2} + 2 \binom{k}{2} + 3 \binom{k-1}{2} + \dots + (k-2) \binom{4}{2} + \\ + (k-1) \binom{3}{2} x_k = \binom{k+3}{4}.$$

Opakovaným použitím vztahu $\binom{r+1}{s+1} = \binom{r}{s} + \binom{r}{s+1}$ dostaneme

$$\begin{aligned}\binom{k+3}{4} &= \binom{k+2}{3} + \binom{k+2}{4} = \\ &= \binom{k+2}{3} + \binom{k+1}{3} + \binom{k+1}{3} + \binom{k}{3} + \dots + \binom{3}{3}.\end{aligned}$$

Rozložíme-li obdobně každý sčítanec na pravé straně, dostaneme

$$\begin{aligned}\binom{k+3}{4} &= \binom{k+1}{2} + 2\binom{k}{2} + 3\binom{k-1}{2} + \dots + \\ &\quad + (k-1)\binom{3}{2} + k\binom{2}{2},\end{aligned}$$

takže $x_k = k$. Tím je dokázáno, že $x_i = i$ pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, řešením úlohy je tedy $n = 100$.

Jiné řešení. První rovnici ponecháme, od každé další odečteme předcházející. Využitím vztahu $\binom{r}{s} - \binom{r}{s-1} = \binom{r-1}{s-1}$, dostaneme ekvivalentní soustavu

$$\begin{array}{rcl}x_1 & & = 1 \\ 2x_1 + x_2 & & = \binom{4}{3} \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 & & = \binom{5}{3} \\ \dots\dots\dots & & \\ (n-1)x_1 + (n-2)x_2 + \dots + 2x_{n-2} + x_{n-1} & & = \binom{n+1}{3} \\ nx_1 + (n-1)x_2 + \dots + 2x_{n-1} + x_n & & = \binom{n+2}{3}\end{array}$$

Zopakujeme-li uvedený postup ještě jednou, dostaneme další ekvivalentní soustavu

$$\begin{array}{rcl}x_1 & & = 1 \\ x_1 + x_2 & & = 3 \\ \dots\dots\dots & & \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2} + x_{n-1} & & = \binom{n}{2} \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n & & = \binom{n+1}{2}\end{array}$$

Odtud už snadno dostaneme jediné řešení dané soustavy $x_i = i$ pro $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Řešením úlohy je tedy $n = 100$.

A - II - 1

Z dané soustavy spočteme

$$xy = 1 - \frac{p}{2}, \quad yz = \frac{p}{2}, \quad zx = \frac{p}{2}.$$

Je-li $p = 0$, je $xy = 1$, $yz = xz = 1$, takže $z = 0$. Soustavě rovnic vyhovují všechny trojice (x, y, z) , pro které je $z = 0$, $x \neq 0$ a $y = \frac{1}{x}$.

Je-li $p \neq 0$, je $xyz \neq 0$ a $x = y$, přičemž $x^2 = 1 - \frac{p}{2}$. Soustava tedy nemá řešení pro $p > 2$, ale ani pro $p = 2$ (bylo by $x = y = 0$).

Pro $p < 2$ ($p \neq 0$) vyhovují dané soustavě právě dvě trojice reálných čísel

$$x = y = \sqrt{1 - \frac{p}{2}}, \quad z = \frac{p}{2\sqrt{1 - \frac{p}{2}}}$$

a

$$x = y = -\sqrt{1 - \frac{p}{2}}, \quad z = -\frac{p}{2\sqrt{1 - \frac{p}{2}}}.$$

A - II - 2

Je-li $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ rozklad čísla n na prvočinitele, je zřejmě

$$\tau(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1),$$

a tedy

$$\tau(n^2) = (2a_1 + 1)(2a_2 + 1) \dots (2a_k + 1).$$

Rovnice

$$\tau(n^2) = 3\tau(n),$$

nemá zřejmě pro $k = 1$ žádné nezáporné řešení a_1 . Pro $k = 2$ ji můžeme zapsat ve tvaru

$$3(a_1 + 1)(a_2 + 1) = (2a_1 + 1)(2a_2 + 1),$$

neboli

$$(a_1 - 1)(a_2 - 1) = 3.$$

Proto je $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, anebo obráceně. Pro $k = 2$ tak dostáváme řešení $n = p^2 q^4$.

Pro $k \geq 3$ má uvedená rovnice tvar

$$\begin{aligned} & (2^k - 3)a_1 a_2 \dots a_k + \\ & + (2^{k-1} - 3)(a_1 a_2 \dots a_{k-1} + \dots + a_2 a_3 \dots a_k) + \dots = \\ & = a_1 + a_2 + \dots + a_k + 2, \end{aligned}$$

přičemž první dva členy na levé straně jsou nejméně $5 + a_1 + a_2 + \dots + a_k > a_1 + a_2 + \dots + a_k + 2$; rovnice nemá tedy pro $k \geq 3$ žádné celočíselné řešení.

Z nerovnosti $(pq^2)^2 < 10^4$ plyne $pq^2 < 100$ a snadno zjistíme, že největším číslem tohoto tvaru je $99 = 11 \cdot 3^2$. Hledané n tedy je $n = 99^2 = 9801$.

Jiné řešení. (Podle Josefa Menšíka, gymnázium v Brně, tř. kpt. Jaroše.) Rovnici

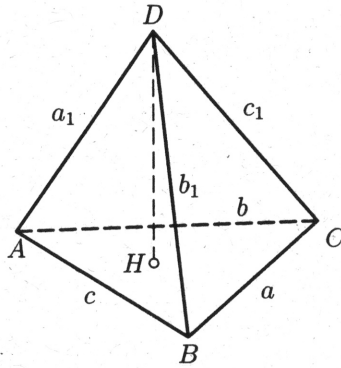
$$\tau(n^2) = 3\tau(n)$$

můžeme napsat ve tvaru

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1) = (2a_1 + 1)(2a_2 + 1) \dots (2a_k + 1).$$

Protože pravá strana uvedené rovnice je lichá, jsou všechna čísla $a_1, a_2, \dots, a_k$ vesměs sudá, takže vidíme, že číslo n je úplný kvadrát. Největší takové čtyřciferné číslo je 99^2 . Snadno se přesvědčíme, že $n = 99^2$ dané rovnici vyhovuje.

Označme a, b, c strany trojúhelníku ABC a $a_1 = |AD|$, $b_1 = |BD|$,



Obr. 15

$c_1 = |CD|$ zbylé hrany čtyřstěnu $ABCD$ (obr. 15). Podle kosinové věty pro trojúhelníky ABD a BCD platí

$$\cos |\sphericalangle ADB| = \frac{a_1^2 + b_1^2 - c^2}{2a_1 b_1},$$

$$\cos |\sphericalangle BDC| = \frac{b_1^2 + c_1^2 - a^2}{2b_1 c_1},$$

takže

$$\frac{\cos |\sphericalangle ADB|}{\cos |\sphericalangle BDC|} = \frac{(a_1^2 + b_1^2 - c^2)c_1}{(b_1^2 + c_1^2 - a^2)a_1}.$$

Zřejmě stačí ukázat, že poslední výraz je roven c_1/a_1 . (Cyklickou záměnou obdržíme další dvě rovnosti.)

Je-li $v = |DH|$ uvažovaná výška čtyřstěnu $ABCD$ a BB_1 výška trojúhelníku ABC , dostaneme několikerým použitím Pythagorovy věty

$$\begin{aligned} c_1^2 - a_1^2 &= (v^2 + |CH|^2) - (v^2 + |AH|^2) = \\ &= |CH|^2 - |AH|^2 = |CB_1|^2 - |AB_1|^2 \end{aligned}$$

a zároveň

$$a^2 - c^2 = |CB_1|^2 - |AB_1|^2.$$

Odtud ovšem plyne

$$b_1^2 + c_1^2 - a^2 = a_1^2 + b_1^2 - c^2.$$

Tím je důkaz hotov.

Dopustili jsme se ovšem malého zjednodušení vynecháním případu, kdy je úhel ADB pravý, a tedy $\cos |\sphericalangle ADB| = 0$. Pak je $b_1^2 + c_1^2 - a^2 = a_1^2 + b_1^2 - c^2 = 0$, takže pravý je i úhel BDC . Stejně bychom dokázali, že je pravý i úhel CDA . Jde o čtyřstěn, jehož každé dvě z hran DA , DB , DC jsou kolmé a všechny tři hodnoty kosinů na levé straně dokazované rovnosti se rovnají nule. Chápeme-li ji jako rovnosti

$$\frac{\cos |\sphericalangle ADB|}{|CD|} = \frac{\cos |\sphericalangle BDC|}{|AD|} = \frac{\cos |\sphericalangle CDA|}{|BD|},$$

platí i v tomto zvláštním případě.

Jiné řešení. (Podle *Josefa Menšíka*, gymnázium v Brně, tř. kpt. Jaroše.) Tvrzení úlohy můžeme zapsat pomocí vektorů jako

$$\vec{AD} \cdot \vec{BD} = \vec{BD} \cdot \vec{CD} = \vec{CD} \cdot \vec{AD}.$$

Přitom je

$$\vec{AD} \cdot \vec{BD} = (\vec{AH} + \vec{HD}) \cdot (\vec{BH} + \vec{HD}) = \vec{AH} \cdot \vec{BH} + \vec{HD} \cdot \vec{HD},$$

neboť z kolmosti HD k rovině ABC plyne rovnost $\vec{AH} \cdot \vec{HD} = \vec{HD} \cdot \vec{BH} = 0$. Zřejmě tedy stačí dokázat rovnosti

$$\vec{AH} \cdot \vec{BH} = \vec{BH} \cdot \vec{CH} = \vec{CH} \cdot \vec{AH}.$$

Protože vektory $\vec{AC}$ a $\vec{BH}$ jsou navzájem kolmé, platí

$$\vec{AH} \cdot \vec{BH} = (\vec{AC} + \vec{CH}) \cdot \vec{BH} = \vec{CH} \cdot \vec{BH}.$$

Druhou rovnost dokážeme obdobně.

Jiné řešení. Protože výška DH je kolmá k podstavě ABC , je speciálně $DH \perp AC$ a zároveň $BH \perp AC$, takže hrana AC je kolmá na rovinu BDH . Odtud plyne, že hrany AC a BD jsou navzájem kolmé, to

znamená, že oba vrcholy A i C mají týž kolmý průmět P na přímku BD . Potom

$$\cos |\sphericalangle ADB| = \pm \frac{|DP|}{|AD|} \quad \text{a} \quad \cos |\sphericalangle BDC| = \pm \frac{|DP|}{|CD|},$$

příčemž v obou rovnostech platí stejné znaménko (podle toho, zda P leží na polopřímce DB , anebo na polopřímce k ní opačné). Odtud ale plyne rovnost

$$\cos |\sphericalangle ADB| : \cos |\sphericalangle BDC| = |CD| : |AD|.$$

Zbylou rovnost dokážeme analogicky.

A – II – 4

Je-li m celočíselný kořen daného mnohočlenu, je $p = 3m - m^3$ a rovnice

$$x^3 - 3x + 3m - m^3 = (x - m)(x^2 + mx + m^2 - 3) = 0$$

by měla mít ještě další celočíselný kořen $x \neq m$. To ale znamená, že diskriminant

$$D = m^2 - 4(m^2 - 3) = 12 - 3m^2$$

kvadratického trojčlenu v druhé závorce musí být druhou mocninou celého čísla. Je tudíž $3m^2 \leq 12$, neboli $|m| \leq 2$. Z pěti možných celých čísel m nevyhovuje uvedené podmínce pouze číslo $m = 0$, pro ostatní vyjde $p = \pm 2$.

A – III – 1

Je-li $p = (a_1, a_2, \dots, a_{17})$ uvažované pořadí a k_p příslušný index, pak zřejmě platí

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{k_p} &< a_{k_p+1} + \dots + a_{17} = \\ &= 153 - (a_1 + a_2 + \dots + a_{k_p}), \end{aligned}$$

takže

$$1 + 2 + \dots + k_p \leq \sum_{i=1}^{k_p} a_i \leq 76,$$

odkud plyne, že je $k_p(k_p + 1) \leq 152$, neboli $k_p \leq 11$.

Podobně dostaneme nerovnost

$$153 - (a_{k_p+1} + \dots + a_{17}) < a_{k_p+1} + \dots + a_{17},$$

takže

$$77 \leq \sum_{i=k_p+1}^{17} a_i \leq (k_p + 1) + \dots + 17 = 153 - \frac{1}{2}k_p(k_p + 1).$$

Odtud vyjde odhad $k_p \geq 5$. Snadno nahlédneme, že pro pořadí $a = (1, 2, \dots, 17)$ vyjde $k_a = 11$ a pro pořadí $z = (17, 16, \dots, 2, 1)$ zase $k_z = 5$.

Uvažujme dvě navzájem opačná pořadí

$$p = (a_1, a_2, \dots, a_{17}), \quad q = (a_{17}, a_{16}, \dots, a_1).$$

Protože $a_1 + a_2 + \dots + a_{17} = 1 + 2 + \dots + 17 = 153$ je liché číslo, platí zároveň

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{k_p} &< a_{k_p+1} + \dots + a_{17}, \\ a_1 + a_2 + \dots + a_{k_p+1} &> a_{k_p+2} + \dots + a_{17}. \end{aligned}$$

To ale znamená, že je $k_p + k_q = 16$ pro libovolná navzájem opačná pořadí p, q . Rozdělíme-li všech $17!$ možných pořadí sedmnácti čísel do $\frac{1}{2}17!$ dvojic navzájem opačných pořadí, plyne odtud, že hledaný součet je $8 \cdot 17!$.

A - III - 2

Pro obsah P trojúhelníku o stranách a, b, c dostaneme podle Heronova vzorce

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{1}{16} (2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4) = \\ &= \frac{1}{16} ((a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)). \end{aligned}$$

Podle Cauchyovy nerovnosti je

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \leq 3(a^4 + b^4 + c^4),$$

takže

$$P^2 \leq \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2)^2,$$

$$P \leq \frac{\sqrt{3}}{12} (a^2 + b^2 + c^2).$$

Pro povrch S uvažovaného čtyřstěnu odtud plyne

$$\begin{aligned} S &\leq \frac{\sqrt{3}}{12} (a^2 + b^2 + c^2 + b^2 + e^2 + f^2 + \\ &\quad + c^2 + f^2 + d^2 + a^2 + d^2 + e^2) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2). \end{aligned}$$

Protože pro pravidelný čtyřstěn nastane rovnost, nedá se koeficient $\frac{1}{6}\sqrt{3}$ v dokázané nerovnosti zmenšit.

A - III - 3

Je-li $n = c_1 \cdot 10^{p-1} + c_2 \cdot 10^{p-2} + \dots + c_p$ ($c_1 \neq 0$) rozvoj p -ciferného přirozeného čísla n v desítkové soustavě, budeme stručně psát $n = |c_1|c_2| \dots |c_p|$. Jelikož je $c_1 \neq 0$, je $n \geq 10^{p-1}$. Číslo 10^{p-1} zřejmě podmínce úlohy nevyhovuje, vyloučíme-li triviální případ $p = 1$. Stačí tedy uvažovat jen ta p -ciferná čísla, která jsou větší než 10^{p-1} . Zkusíme porovnat ciferný součet $c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_p$ čísla n a čísla $m = (10^{p-1} + 1)n$. Je

$$\begin{array}{r} 10^{p-1}n = |c_1|c_2| \dots |c_{p-1}|c_p|0|0| \dots |0| \\ n = |c_1|c_2|c_3| \dots |c_p| \\ \hline m = |d_0|d_1|d_2| \dots |d_{p-1}|d_p|c_2|c_3| \dots |c_p| \end{array}$$

Je-li $c_p + c_1 \leq 9$, je $d_p = c_p + c_1$, $d_{p-1} = c_{p-1}$, $\dots$, $d_1 = c_1$, $d_0 = 0$ a $S(m) = 2(c_1 + c_2 + \dots + c_p) \neq S(n)$. Je-li $c_p + c_1 \geq 10$, je $d_p = c_p + c_1 - 10$, a pokud $c_{p-1} \leq 8$, je $d_{p-1} = c_{p-1} + 1$, $d_{p-2} = c_{p-2}$, $\dots$, $d_1 = c_1$, $d_0 = 0$, $S(m) = 2S(n) - 9$, $S(n) \geq 10$, takže opět je $S(m) \neq S(n)$. Aby $S(m) = S(n)$, musí být nutně $c_{p-1} = 9$. Podobně bychom dokázali, že musí být $c_{p-2} = \dots = c_2 = c_1 = 9$. Protože $c_p \geq 1$ a n musí být dělitelné devíti (to plyne ze vztahu $S(2n) = S(n)$), je i $c_p = 9$. Aby tedy číslo n splňovalo podmínku $S(m) = S(n)$, musí být nutně $n = 10^p - 1$ nebo $n = 1$.

Ukážeme, že tato čísla splňují podmínku úlohy. V případě $n = 1$ je to zřejmé, zvolme tedy $n = 10^p - 1$, tedy $S(n) = 9p$, $p \geq 1$ a necht' k je libovolné přirozené číslo menší než 10^p . Necht' je $k = |b_1| |b_2| \dots |b_p|$ zápis čísla k v desítkové soustavě, přičemž nevylučujeme případ $b_1 = 0$ nebo $b_1 = b_2 = 0$ atd., tedy nevylučujeme případy, kdy je k číslo q -ciferné a $q < p$. Budeme však nejdříve předpokládat, že k není dělitelné deseti, tj. $b_p \neq 0$. Je pak $kn = k \cdot 10^p - k$,

$$\begin{array}{rcl} k \cdot 10^p = & |b_1| |b_2| \dots & \dots |b_p| \overbrace{|0| |0| \dots |0|}^p \\ -k = & & -|b_1| |b_2| \dots |b_p| \\ \hline kn = & |b_1| \dots |b_{p-1}| b_p - 1 & |9 - b_1| \dots |9 - b_{p-1}| 10 - b_p, \end{array}$$

takže $S(kn) = 9p = S(n)$. Pokud je $b_p = 0$, je $k = 10^r l$, $r \geq 1$, a l není dělitelné deseti. Podle předcházejícího je $S(ln) = S(n)$ a zřejmě $S(10^r ln) = S(n)$. Tím je důkaz dokončen, úloze vyhovují právě čísla 1, 9, 99, 999, ...

Jiné řešení. Předpokládejme, že p -ciferné číslo n vyhovuje dané soustavě rovnic a že $c_1c_2\dots c_p$ je jeho zápis v desítkové soustavě, takže $S(n) = c_1 + c_2 + \dots + c_p$. Protože $n \geq 10^{p-1}$, ale $S(10^{p-1}) = 1 \neq 2 = S(2 \cdot 10^{p-1})$, je $n \geq 10^{p-1} + 1$. Číslo $n(10^{p-1} + 1) \leq n^2$ má v desítkové soustavě zápis

$$\begin{aligned} 10^{p-1}n + n &= \overline{c_1 c_2 \dots c_p \underbrace{00 \dots 0}_{p-1}} + \overline{c_1 c_2 \dots c_p} = \\ &= \overline{(c_1 c_2 \dots c_p + c_1) c_2 c_3 \dots c_p}. \end{aligned}$$

Odtud plyne rovnost

$$S((10^{p-1} + 1)n) = S(\overline{c_1 c_2 \dots c_p} + c_1) + c_2 + c_3 + \dots + c_p,$$

takže

$$S(\overline{c_1 c_2 \dots c_p} + c_1) = c_1.$$

Číslo $\overline{c_1 c_2 \dots c_p} + c_1$ není p -ciferné (jinak by začínalo číslicí c_1 nebo číslicí $c_1 + 1$, takže by bylo $S(\overline{c_1 c_2 \dots c_p} + c_1) > c_1$). Platí tedy $10^p \leq \overline{c_1 c_2 \dots c_p} + c_1$, zároveň ovšem je $\overline{c_1 c_2 \dots c_p} \leq 99 \dots 9 = 10^p - 1$. Dohromady tak dostáváme nerovnosti

$$10^p \leq \overline{c_1 c_2 \dots c_p} + c_1 \leq 10^p + 8.$$

Díky této nerovnosti snadno zjistíme, že nemůže být $c_1 \leq 8$, neboť $89 \dots 9 + 8 < 10^p$; je tedy $c_1 = 9$ a $S(\overline{c_1 c_2 \dots c_p} + 9) = 9$. Protože rovnice $S(x) = 9$ má v intervalu $\langle 10^p, 10^p + 8 \rangle$ jediné řešení $x = 10^p + 8$, vychází

$$n = \overline{c_1 c_2 \dots c_p} = 10^p + 8 - 9 = 10^p - 1.$$

Zbývá ověřit, že nalezené číslo $n = 10^m - 1$ vyhovuje pro libovolné přirozené m všem rovnostem úlohy. Pro $k \leq n$ označme $\overline{c_1 c_2 \dots c_p}$ dekadický zápis čísla $k - 1$. Potom

$$\begin{aligned} kn &= k(10^m - 1) = (k - 1)10^m + (10^m - k) = \\ &= \overline{c_1 c_2 \dots c_p \underbrace{00 \dots 0}_m} + \\ &+ \underbrace{\overline{99 \dots 9}}_{m-p} (9 - c_1)(9 - c_2) \dots (9 - c_p), \end{aligned}$$

neboť $10^m - k = (10^m - 1) - (k - 1) = \underbrace{99 \dots 9}_m - \overline{c_1 c_2 \dots c_p}$. Je tedy

$$kn = \overline{c_1 c_2 \dots c_p \underbrace{99 \dots 9}_{m-p} (9 - c_1)(9 - c_2) \dots (9 - c_p)},$$

a proto

$$\begin{aligned} S(kn) &= c_1 + c_2 + \dots + c_p + 9(m - p) + \\ &+ (9 - c_1) + (9 - c_2) + \dots + (9 - c_p) = 9m. \end{aligned}$$

A - III - 4

Levá strana rovnice

$$\cos 12x - 5 \sin 3x = 9 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x.$$

splňuje pro libovolné reálné číslo x nerovnost

$$\cos 12x - 5 \sin 3x \leq 6, \tag{1}$$

pravá

$$9 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x \geq 6, \tag{2}$$

neboť pro každé kladné u platí $u + \frac{1}{u} \geq 2$, a tedy

$$9 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x = 3 \left((\sqrt{3} \operatorname{tg} x)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3} \operatorname{tg} x} \right)^2 \right) \geq 6.$$

Danou rovnici splňují tedy právě ta x , pro něž v obou nerovnostech (1) a (2) nastane rovnost. To znamená, že

$$\cos 12x = 1, \quad \sin 3x = -1, \quad |\operatorname{tg} x| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Z těchto podmínek vychází, že

$$x = k \frac{\pi}{6}, \quad 3x = (4l - 1) \frac{\pi}{2} \quad \text{a} \quad x = (6m \pm 1) \frac{\pi}{6},$$

kde k, l, m jsou celá čísla. Společným řešením jsou čísla

$$x = (12k + 11) \frac{\pi}{6} \quad \text{a} \quad x = (12k + 7) \frac{\pi}{6},$$

kde $k \in \mathbb{Z}$ je libovolné celé číslo.

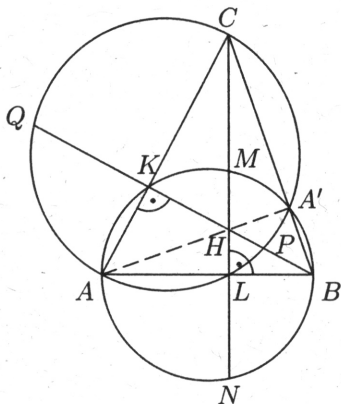
A – III – 5

V intervalu $(\frac{7}{8}, \frac{8}{9})$ leží číslo $\frac{15}{17}$, pro které je $f(\frac{15}{17}) = \frac{16}{17} > \frac{8}{9}$. Podle řešení úlohy A–I–3 neleží v intervalu $(\frac{7}{8}, \frac{15}{17})$ žádné racionální číslo $\frac{p}{q}$ se jmenovatelem $q < 25$ a podobně interval $(\frac{15}{17}, \frac{8}{9})$ neobsahuje žádné racionální číslo $\frac{p}{q}$ se jmenovatelem $q < 26$. Pro každé racionální číslo $\frac{p}{q}$ z intervalu $(\frac{7}{8}, \frac{8}{9})$, $\frac{p}{q} \neq \frac{15}{17}$, tedy platí $q \geq 26$, a proto je

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} + \frac{1}{q} < \frac{8}{9} + \frac{1}{26} < \frac{16}{17}.$$

Protože pro každé iracionální číslo $x \in (\frac{7}{8}, \frac{8}{9})$ je $f(x) = x < \frac{8}{9}$, je hledané maximum $\frac{16}{17}$.

Označme K patu výšky z bodu B na stranu AC , L patu výšky z bodu C na stranu AB .



Obr. 16

du C na stranu AB . Z Eukleidovy věty pro pravoúhlý trojúhelník APC (obr. 16) dostaneme rovnost

$$|AP|^2 = |AK| \cdot |AC| = |AB| \cdot |AC| \cos \alpha.$$

Stejný výsledek dostaneme i pro velikost $|AM|^2$ z Eukleidovy věty pro pravoúhlý trojúhelník ABM ,

$$|AM|^2 = |AL| \cdot |AB| = |AB| \cdot |AC| \cos \alpha.$$

Je tedy $|AP| = |AQ| = |AM| = |AN|$, takže body M, N, P, Q leží na kružnici se středem ve vrcholu A daného trojúhelníku.

Jiné řešení. Zřejmě AC je osa úsečky PQ , AB je osa úsečky MN . Odtud plyne, že $|AM| = |AN|$ a $|AP| = |AQ|$. (Pokud tedy leží body M, N, P, Q na kružnici, je jejím středem bod A .)

Protože P leží na výšce z bodu B , je $\vec{PB} \cdot \vec{AC} = 0$. Z Thaletovy věty dále plyne rovnost $\vec{AP} \cdot \vec{PC} = 0$. Analogicky dostaneme $\vec{CN} \cdot \vec{AB} = 0$

a $AM \cdot MB = 0$. Je tedy

$$\begin{aligned}|AP|^2 &= AP \cdot AP = AP \cdot AP + AP \cdot PC = AP \cdot AC = \\ &= AP \cdot AC + PB \cdot AC = AB \cdot AC,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|AM|^2 &= AM \cdot AM = AM \cdot AM + AM \cdot MB = AM \cdot AB = \\ &= AM \cdot AB + MC \cdot AB = AC \cdot AB,\end{aligned}$$

takže $|AN| = |AM| = |AP| = |AQ|$. Tím je důkaz tvrzení úlohy hotov.

Jiné řešení. Označme H průsečík výšek trojúhelníku ABC a A' patu výšky vedené bodem A . Pro mocnost bodu H ke každé z obou uvažovaných kružnic platí

$$|HA| \cdot |HA'| = |HM| \cdot |HN|$$

a zároveň

$$|HA| \cdot |HA'| = |HP| \cdot |HQ|.$$

Odtud ovšem plyne, že body M, N, P, Q leží na kružnici.

Kategorie P

Texty úloh

P – I – 1

Permutáciou čísel $1, 2, \dots, N$ (krátko *permutáciou*) nazývame prosté zobrazenie množiny $\{1, 2, \dots, N\}$ na seba. Permutácia P priradí každému číslu z intervalu $\langle 1 \dots N \rangle$ nejaké číslo z intervalu $\langle 1 \dots N \rangle$. Skladaním permutácií dostávame znova permutácie. Dvojité zloženie permutácie P je permutácia D s vlastnosťou: $D[i] = P[P[i]]$ pre každé i z intervalu $\langle 1 \dots N \rangle$. Permutácia čísel $1, 2, \dots, N$ sa v počítači reprezentuje dátovou štruktúrou typu pole, pričom i -ty prvok poľa obsahuje funkčnú hodnotu $P[i]$.

Úloha: Napíšte a zdôvodnite program, ktorý pre zadané celé číslo $N > 0$ a pole $P[1 \dots N]$, reprezentujúce permutáciu čísel $1, 2, \dots, N$, vypočíta jej dvojité zloženie. Výsledná permutácia musí byť po ukončení výpočtu uložená v poli P a program nesmie používať iné pole (resp. inú väčšiu dátovú štruktúru).

P – I – 2

So špeciálnym grafickým výstupom sa pracuje tak, že jeho štvorcová obrazovka je rozdelená na štvrtiny označené 1, 2, 3 a 4 (ľavá horná má číslo 1, pravá horná 2, ľavá dolná 3 a pravá dolná 4), každá zo štvrtín je zase rozdelená na štvrtiny a tak ďalej. Takto získané štvrtinky sa označujú kódom (tj. konečnou postupnosťou obsahujúcou číslice 1, 2, 3, 4) a nazývajú sa typizované štvorce. Pri komunikácii s programom sa kódy zapisujú vo forme prirodzených čísel v desiatkovej sústave (zmysel majú samozrejme len čísla obsahujúce iba cifry 1, 2, 3, 4). Celá obrazovka má kód 0. Napríklad štvorec 1, 4, 2 vidno na obrázku s nápisom „TU“ a jeho kód je číslo 142. Útvar je množina typizovaných štvorcov, reprezentovaná množinou ich kódov.

11	12		2
13		TU	
	143		
3			4

Úloha: Napište a dokažte čo najefektívnejší algoritmus, ktorý pre zadané $N > 0$ a pole $K[1..N]$ celých čísel — kódov typizovaných štvorcov zistí, či z nich vytvorený útvar je typizovaný štvorec.

P – I – 3

Máme daný nasledovný program v Pascale:

```

program MOPI3;
    var  $k, x, pocvel, pocmal$ : integer;
begin
    write('K: '); readln( $k$ );
    {—————→}  $pocvel := 0; pocmal := 0;$ 
     $x := 0;$ 
    while  $k > 1$  do
        begin
            {—————→}  $pocvel := pocvel + 1;$ 
            while  $(k \bmod 2) = 0$  do
                begin
                     $x := x + 1; k := k \div 2$ 
                end;
             $k := k - 1;$ 
            while  $x > 0$  do
                begin
                    {—————→}  $pocmal := pocmal + 1;$ 
                     $k := k * 2 + 1; x := x - 1$ 
                end
            end;
        end;
    end;

```

writeln('Pocet velkych prechodov bol: ', pocvel);

writeln('Pocet malych prechodov bol: ', pocmal)

end.

Premenné *pocvel* a *pocmal* iba počítajú počty prechodov cez vonkajší cyklus a cez jeden z vnútorných.

Úloha: Zistite (a zdôvodnite svoje tvrdenie), pre ktoré čísla k je počet veľkých prechodov rovný počtu malých.

P – I – 4

Na vstupe máme slovo v tvare $w_1 \# w_2$, kde reťazce w_1, w_2 sú neprázdné a obsahujú iba znaky '0' a '1'. Tieto reťazce reprezentujú čísla v dvojkovej sústave, pričom vyššie rády sú zapísané neskôr. Napr. vstup '1011#011' reprezentuje dvojicu čísel 1101 a 110 zapísaných v dvojkovej sústave.

- Napište program vo Froscale, ktorý vypočíta súčet čísel w_1 a w_2 a vypíše ho v dvojkovom zápise v obrátenom poradí cifier (tj. tak isto, ako sú tie čísla zapísané na vstupe). Napríklad pre vstup v tvare '001#0111' by mal vypísať '01001'.
- Napište program vo Froscale, ktorý vypočíta súčin čísel w_1 a w_2 a vypíše ho v dvojkovom zápise v obrátenom poradí cifier. Napríklad pre vstup '01#1001101' by mal vypísať '01001101'.
- Popíšte (neformálne), ako by vyzerali programy riešené v časti a) a b) v prípade, že by reťazce w_1, w_2 obsahovali znaky '0' až '9' a reprezentovali by čísla v desiatkovej sústave.

Učebný text k 4. príkladu: Froscale — Frontový Pascal

Jazyk bez procedúr, premenných, syntaxou pripomínajúci Pascal (aj so skokmi) a s jedinou pamäťovou štruktúrou — frontom — to je **Froscale**. Front je dátová štruktúra s premenlivou veľkosťou (nie nepodobná zásobníku), u ktorej sa vkladá na jeden koniec a vyberá sa z druhého. Je známa rovnaká organizácia pamäti pod názvom FIFO — first in first out. Presnejšie: Froscale je Pascal bez premenných (a teda aj bez priradenia), s **while** a **repeat** cyklami, príkazmi **case** a **if** a skokom **goto**. Má dve fiktívne premenné **INP** a **TOP** typu **char** a skrytú premennú **front** znakov. **INP** je práve čítaný znak zo vstupu a **TOP** je znak na začiatku frontu. Ďalšie príkazy: **NEXT** načíta nový znak zo vstupu do fiktívnej premennej **INP**, **PUT(znak)** resp. **PUT(premenná)** uloží znak resp. hodnotu premennej **INP** alebo **TOP** na koniec frontu, **GET** vyhodí prvý prvok z frontu. Príkaz **write** má Pascalovskú definíciu, tj. môže sa vypísať znak, premenná, reťazec alebo postupnosť takýchto výrazov. Špeciálnym znakom na vstupe

a vo fronte je znak '?', ktorý na vstupe znamená presiahnutie vstupného slova a vo fronte znamená prázdny front. Ak INP = '?' (resp. TOP = '?'), potom príkaz NEXT (resp. GET) nič nespraví. Ani PUT('?') nič nevykoná.

Program pracuje tak, že na vstupe má slovo nad dopredu presne určenou abecedou (podmnožinou vypísateľných znakov) a na výstupe (**write**) môže vypísať riešenie problému. Testovať korektnosť vstupnej abecedy nie je nutné; dokonca ak je špecifikovaný formát vstupu, tak ho netreba testovať. Do frontu ukladať, testovať a vypisovať možno ľubovoľné vypísateľné znaky. Na začiatku práce programu je front prázdny (tj. TOP = '?').

Orientačná gramatika jazyka Frosca:

⟨program⟩ = **program** ⟨meno⟩; [(⟨dekl. skokov⟩)] ⟨telo programu⟩

⟨dekl. skokov⟩ = **label** ⟨skok⟩[, ⟨skok⟩]*;

⟨skok⟩ = ⟨celé číslo⟩

⟨telo programu⟩ = **begin** ⟨príkazy⟩ **end**.

⟨príkazy⟩ = ⟨nič⟩ | ⟨príkaz⟩[; ⟨príkazy⟩]

⟨príkaz⟩ = [(⟨skok⟩):]*⟨elem. príkaz⟩

⟨elem. príkaz⟩ = **begin** ⟨príkazy⟩ **end**

| **if** ⟨podm⟩ **then** ⟨príkaz⟩[**else** ⟨príkaz⟩]

| **case** ⟨výraz⟩ **of**

 (⟨selektor⟩: ⟨príkaz⟩);*

 [**else** ⟨príkaz⟩]

end

| **while** ⟨podm⟩ **do** ⟨príkaz⟩

| **repeat** ⟨príkazy⟩ **until** ⟨podm⟩

| **goto** ⟨skok⟩

| **write**(⟨write výraz⟩[, ⟨write výraz⟩])*

| PUT(⟨výraz⟩)

| GET

| NEXT

⟨podm⟩ = ⟨relácia⟩

| (⟨podm⟩) **and** (⟨podm⟩)

| (⟨podm⟩) **or** (⟨podm⟩)

| **not**(⟨podm⟩)

⟨relácia⟩ = ⟨výraz⟩⟨relačný znak⟩⟨výraz⟩

⟨relačný znak⟩ =

= | < | <= | > | >= | <> | in

$\langle \text{výraz} \rangle = \text{INP} \mid \text{TOP} \mid \langle \text{znak konšt.} \rangle$
 $\mid \langle \text{interval znakov} \rangle \mid \langle \text{množina znakov} \rangle$
 $\langle \text{write výraz} \rangle = \text{INP} \mid \text{TOP} \mid \langle \text{znak konšt.} \rangle \mid \langle \text{reťazec} \rangle$
 $\langle \text{poznámka} \rangle = \{ \langle \text{text bez '}' \rangle \}$
 poznámka môže byť kdekoľvek rovnako ako v Pascale.

Príklad: Program, ktorý má na vstupe slovo nad abecedou ['a', 'b', 'c', 'd'] v tvare $w_1 \# w_2$. Treba otestovať, či sa $w_1 = w_2$.

```

program TEST;
label 13;
begin
  {front síce prázdniť netreba, ale na precvičenie}
  while TOP<>'?' do GET;
  while not((INP = '#') or (INP = '?')) do
    begin {ešte sme vo  $w_1$ , treba uložiť}
      PUT(INP); NEXT
    end;
  if INP<>'#' then goto 13; {slovo má tvar  $w_1$  bez '#'}
  NEXT;
  while (INP<>'?') and (TOP = INP) do
    begin {ďalší znak sa rovná, ideme ďalej}
      GET; NEXT
    end;
  if ((INP = TOP) and (INP = '?')) then write('ANO')
  else 13: write('NIE')
end.
  
```

P – II – 1

Permutáciou čísel $1, 2, \dots, N$ (krátko permutáciou) nazývame prosté zobrazenie množiny $\{1, 2, \dots, N\}$ na seba. Permutácia P priradí každému číslu $i \in \langle 1..N \rangle$ nejaké číslo $P[i] \in \langle 1..N \rangle$. Skladaním permutácií dostávame znova permutácie. K -te zloženie permutácie P je permutácia P^K s vlastnosťou:

$$P^K[i] = \underbrace{P[P[\dots P[i]]]}_{K\text{-krát}} \quad \forall i \in \langle 1..N \rangle.$$

Permutácia čísel $1, 2, \dots, N$ sa v počítači reprezentuje dátovou štruktúrou typu pole, pričom i -ty prvok poľa obsahuje funkčnú hodnotu $P[i]$.

Úloha: Napíšte a zdôvodnite čo najefektívnejší program (dôraz je na rýchlosti), ktorý pre zadané celé číslo $N > 0$ a pole $P[1..N]$, reprezentujúce permutáciu čísel $1, 2, \dots, N$, a celé číslo K **podstatne väčšie** než N vypočíta jej K -te zloženie. Výsledná permutácia musí byť po ukončení výpočtu uložená v poli P .

P – II – 2

Uvažujme špeciálny grafický výstup opísaný v úlohe P–I–2.

Úloha: Napíšte a zdôvodnite program, ktorý pre dané dve celé čísla $S_1, S_2 \geq 0$, reprezentujúce dva typizované štvorčky (dané svojím kódom), zistí, či ležia pri sebe, tj. či sa dotýkajú svojimi stranami zvonka.

Príklad: Štvorčky 3 a 143 ležia pri sebe, ale 143 a 1423 neležia pri sebe, rovnako ani 14 a 143 neležia pri sebe.

P – II – 3

Napíšte a dokážte čo najefektívnejší (dôraz je na rýchlosti) program, ktorý pre zadaný reťazec R dĺžky N nájde také dva rôzne znaky Z_1 a Z_2 , pri ktorých vykoná nasledovný algoritmus maximálny počet výmen.

```

EsteHladaj:=true;
while EsteHladaj do
  begin
    EsteHladaj:=false;
    for i:=1 to N-1 do
      if (R[i]=Z1) and (R[i+1]=Z2) then
        begin
          { výmena }
          R[i]:=Z2;
          R[i+1]:=Z1;
          EsteHladaj:=true
        end;
    end;
  end;

```

Znaky v reťazci R môžete uvažovať z intervalu 'A'..'J'.

Poznámka: Dĺžka zadaného reťazca N môže byť veľmi veľká.

P – II – 4

Na vstupe je neprázdné slovo w obsahujúce iba znaky 'a'. Navrhnite a popíšte program vo Froscale, ktorý vypočíta dolnú celú časť dvojkového logaritmu dĺžky slova w a vypíše ju v dvojkovom zápise v obrátenom poradí cifier.

Poznámka: Príklad sa dá riešiť aj bez použitia príkazu **goto**.

P – III – 1

Permutáciou čísel $1, 2, \dots, N$ (krátko permutáciou) nazývame prosté zobrazenie množiny $\{1, 2, \dots, N\}$ na seba. Permutácia P priradí každému číslu $i \in \langle 1..N \rangle$ nejaké číslo $P[i] \in \langle 1..N \rangle$. Skladaním permutácií dostávame znova permutácie. *Dvojité zloženie* permutácie P je permutácia P^2 s vlastnosťou:

$$P^2[i] = P[P[i]] \quad \forall i \in \langle 1..N \rangle.$$

Permutácia čísel $1, 2, \dots, N$ sa v počítači reprezentuje dátovou štruktúrou typu pole, pričom i -ty prvok poľa obsahuje funkčnú hodnotu $P[i]$.

Úloha: Napíšte a zdôvodnite čo najefektívnejší program (dôraz je na rýchlosti), ktorý pre zadané celé číslo $N > 0$ a pole $P_2[1..N]$, reprezentujúce permutáciu čísel $1, 2, \dots, N$, vypočíta *počet* takých permutácií P , ktorých druhé zloženie je zadaná permutácia P_2 , tj. pre ktoré platí $P^2 = P_2$.

P – III – 2

Uvažujme špeciálny grafický výstup opísaný v úlohe P-I-2.

Niekedy treba typizovaný štvorec presunúť niekam inam. Aký bude jeho kód po jeho presunutí o K jeho širok doprava a L jeho širok nahor?

Úloha: Napíšte a zdôvodnite program, ktorý pre dané celé číslo $S \geq 0$, reprezentujúce typizovaný štvorec (daný svojim kódom), a nezáporné celé čísla $K, L \geq 0$ vypočíta a vypíše kód štvorca S po presunutí o K jeho širok doprava a L jeho širok nahor, alebo ohlási MIMO OBRAZOVKY, ak výsledný štvorec sa nachádza mimo obrazovky zariadenia.

P – III – 3

Máme daný nasledovný program v Pascale:

```
program MOPIII3;
  var k,x,poc:integer;
      q:0..9;
begin
  write('K:');readln(k);
  { -----> } poc:=0;
  while k>0 do { hlavný cyklus }
    begin
      { -----> } poc:=poc+1;
```

```
writeln('Pocet prechodov bol:', poc)
end.
```

zadanému P .

P - III - 4

délžka slova w_2 .

poradí cifier.

 $1100_2).$

P - I - 1

Každú permutáciu P môžeme rozložiť na niekoľko navzájom disjunkt-ných cyklov, $P = C_1 C_2 \dots C_m$. Každý cyklus tvoria nejaké prvky množiny $\{1, \dots, N\}$, označme preto $C_i = (a_{i,1} a_{i,2} \dots a_{i,l_i})$. Číslo l_i nazveme dĺžkou cyklu C_i .

Samotná permutácia (zobrazenie P) vznikne zložením jednotlivých cyklov. Podobne dvojité zloženie permutácie vznikne zložením dvojitých zložení jednotlivých cyklov; $D = P^2 = C_1^2 C_2^2 \dots C_m^2$. Stačí preto prejsť každým cyklom, „prečíslovať ho“, tj. zabezpečiť aby $P'[i] = P[P[i]]$ (P' je stav poľa P po skončení programu, $P'[i] = D[i]$) a úloha je vyriešená.

Cyklus C_i tvorený prvkami $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,l_i}$ môžeme prečíslovať postupnosťou priradení

$$P'[a_{i,1}] := P[P[a_{i,1}]]$$

$$P'[a_{i,2}] := P[P[a_{i,2}]]$$

.....

Ale v okamihu vykonania prvého priradenia je hodnota $P[a_{i,1}]$ prepísaná novou hodnotou $P'[a_{i,1}]$, preto si treba pôvodnú hodnotu predchádzajúceho prvku pamätať, aby sme vedeli určiť $a_{i,2}$ ($= P[a_{i,1}]$). Takisto narazíme na problém pri prečísľovaní posledného prvku cyklu. Totiž

$$P'[a_{i,l_i}] := P[P[a_{i,l_i}]] = P[a_{i,1}],$$

ale táto hodnota je opäť prepísaná (pamätáme si len jeden predchádzajúci prvok). Tento problém sa dá odstrániť uchovaním hodnoty prvého prvku cyklu.

Potrebuje teda zabezpečiť dve veci: nájsť cyklus, ktorý sme zatiaľ neprečíslovali, a prečíslovať ho.

Jeden spôsob, ako nájsť ešte neprečíslovaný cyklus, je takýto:

Nech všetky prvky, ktoré sú už prečíslované, majú záporné znamienko; teda nech $P'[x] = -P[P[x]]$. Potom sa začiatok cyklu nájde ľahko ako prvý výskyt kladného čísla:

```
novy:=1;
repeat
  while (novy<=N) and (p[novy]<0) do
    begin
      p[novy]:=-p[p[novy]];
```


prvok p[novy] už je prečíslovaný;
 môžeme mu obnoviť kladné znamienko,
 pretože ho už nebudeme testovať

```

        inc(novy)
    end;
    if novy<=N then
        precisluj(novy)
    until novy>N;

```

precisluj musí súčasne
 nastavovať znamienko

Úsek programu, ktorý zabezpečuje prečíslovanie jedného cyklu, môže vyzerať napr. takto:

```

procedure precisluj (zac:integer);
var i,j,pa:integer;
begin
    i:=zac;
    pa:=p[zac];
    while p[i]<>zac do
        begin
            j:=p[i];
            p[i]:=-p[p[i]];
            i:=j
        end;
    p[i]:=-pa
end;

```

zac je začiatok cyklu
 do pa uchováme P[prvý prvok cyklu]
 podmienka P[i]=zac je splnená, iba
 ak už je spracovaný posledný prvok
 cyklu
 uchováme P[i]
 ---> toto je vlastné priradenie;
 súčasne nastavujeme znamienko
 a posunieme sa na ďalší prvok cyklu
 ešte nastav posledný, opäť na záporné

Pretože maximálna dĺžka cyklu je N , je aj zložitosť prečíslovania jedného cyklu $O(N)$. Lenže pri prečísľovaní cyklu sa pristupuje iba k prvkom tohoto cyklu, teda pri prečísľovaní všetkých cyklov spolu sa vykoná $O(N)$ operácií. Časová zložitosť celého prečíslovania je teda lineárna vzhľadom k N . Pri hľadaní začiatku cyklu popísaný algoritmus testuje každý prvok práve raz (a práve raz sa mu otočí znamienko), preto je celková časová zložitosť tohoto riešenia úlohy $O(N)$.

Otáčanie znamienka je tu použité ako trochu nečistý trik, pretože sa takto vlastne simuluje pole logických hodnôt, a pomocné polia sú zakázané. Vychádzajúc z minulého ročníka MO-P, kde rozbor jedného príkladu považoval pomocné logické pole a „znamienkovanie“ za rovnocenné metódy z hľadiska pamäťovej náročnosti, nemalo by to vlastne byť korektné riešenie. Faktom však ostáva, že predkladané riešenie skutočne pole v pravom slova zmysle nepoužíva, dosahuje však pomerne výhodnú časovú zložitosť. Pozor! Ak by sme hľadali začiatok cyklu vždy znova od prvého prvku, zvyšuje sa tým časová zložitosť na $O(N^2)$.

Predvedieme teraz riešenie, ktoré sa dôsledne snaží nepoužívať metódy stotožniteľné s použitím poľa (majme napr. obmedzenie, že všetky prvky poľa P môžu nadobúdať iba hodnoty z intervalu $\langle 1..N \rangle$).

Na prvý pohľad sa zdá byť správna takáto metóda hľadania začiatku cyklu: Považujme za začiatky cyklov iba ich najľavejšie prvky. Pre každý prvok permutácie teda najprv predpokladáme, že v ňom cyklus začína. Prejdeme postupne celý cyklus, a ak sme pritom prešli prvok s indexom menším ako predpokladaný začiatok, práve testovaný prvok už nemôže byť začiatkom cyklu a treba skúsiť ďalší prvok:

```

for a:=1 to n do      skúšaj postupne všetky prvky
  begin
    i:=a;
    repeat
      moze:=(i>=a);    ak sme vpravo od a, ešte stále môže byť
      i:=p[i]          posunieme sa po permutácii
    until (a=i) or not moze;  celý cyklus alebo a nie je zač.
    if moze then       ak sme našli začiatok,
      precisluj2(a)    môžeme prečíslovať
    end;

```

(Pozn. `precisluj2` je ekvivalent procedúry `precisluj` s tým rozdielom, že neotáča znamienka.)

Pri tomto spôsobe vyhľadávania začiatku prechádzame pre každý prvok jeho cyklus (nie nutne celý, pretože hľadanie končí hneď pri prvom zlom prvku v cykle, ale vo všeobecnosti je počet prejdených prvkov v jednom cykle porovnateľný s N). Keďže prvkov je N , časová zložitosť je $O(N^2)$.

Popísaný spôsob má však výrazný nedostatok — rieši úlohu chybné. Ak totiž v permutácii P existuje cyklus párnej dĺžky, tak po dvojnásobnom zložení sa rozpadne na dva cykly polovičnej dĺžky. Ak potom pri hľadaní začiatku ďalšieho cyklu narazíme na najľavejší prvok patriaci druhej časti rozpadnutého cyklu (všetky prvky tejto druhej časti ležia vpravo od už nájdeného začiatku pôvodného veľkého cyklu), považujeme ho za začiatok nového, dosiaľ neprečíslovaného cyklu a aplikujeme naňho prečíslovanie. Tým sa však poruší pôvodné prečíslovanie, ktorým tento cyklus polovičnej dĺžky vlastne vznikol, čo v konečnom dôsledku poruší celé riešenie.

Celý postup teda zlyhá na druhej časti rozpadnutého veľkého cyklu. Stačí však za začiatok cyklu považovať nie najľavejší, ale najpravejší prvok cyklu. Tým sa zabezpečí, že žiaden z prvkov, ktoré sa práve prečísľujú,

sa už nebude testovať na to, či je začiatkom cyklu. Teda ak sa aj cyklus rozpadne, už to nevadí. Upravená časť programu:

```
for a:=1 to n do      skúšaj postupne všetky prvky
begin
  i:=a;
  repeat
    moze:=(i<=a);      ak sme pred a, ešte stále môže byť
    i:=p[i]             posunieme sa po permutácii
  until (a=i) or not moze; celý cyklus alebo a nie je zač.
  if moze then          ak sme našli začiatok,
    precisluj2(a)       môžeme prečíslovať
  end;
```

(Rovnako správne je hľadať najľavejší prvok, ale postupovať od konca poľa k začiatku.)

Pre takto upravený program platí všetko, čo sme povedali o predchádzajúcom (zložitost'), ale rieši úlohu správne a bez pomocného poľa.

Kompletný výpis jedného z riešení:

```
program P_I.1;
var p : array [1..100] of integer;
    n,a,i : integer;
    moze : boolean;
procedure precisluj (a:integer);
var i,j,pa:integer;
begin
  i:=a;
  pa:=p[a];
  while p[i]<>a do
  begin
    j:=p[i];
    p[i]:=p[p[i]];
    i:=j
  end;
  p[i]:=pa
end;
begin
  write('N: '); read(n);
  write('P: ');
  for i:=1 to n do read(p[i]);
  for a:=1 to n do
  begin
    moze:=true;
    i:=a;
    repeat
      moze:=(i<=a);
      i:=p[i]
```

```

until (a=i) or not moze;
if moze then
  precisluj(a)
end;
write('D: ');
for i:=1 to n do write(p[i], ' ');
writeln
end.

```

P – I – 2

Nech A, B sú kódy dvoch typizovaných štvorcov. Štvorec B leží v štvorci A (je pokrytý štvorcom A) práve vtedy, keď $\exists k \geq 0: A = B \text{ div } 10^k$, teda kód A je prefixom kódu B . Takúto situáciu označíme $A = \text{otec}(B)$.

Štvorec K sa dá pokryť (štvorcami $K_1 \dots K_n$), ak sa kód K vyskytuje medzi kódmi $K_1 \dots K_n$, alebo ak sa medzi týmito kódmi vyskytujú súčasne $10 \cdot K + 1, 10 \cdot K + 2, 10 \cdot K + 3, 10 \cdot K + 4$.

- (1) Nech $K_x = \text{otec}(K_y)$. Je zrejmé, že kód K_y neovplyvní, či výsledný útvar bude typizovaný štvorec, alebo nie, lebo štvorec K_y je úplne pokrytý štvorcom K_x . Kód K_y teda nemusíme brať do úvahy.
- (2) Nech K_x, K_y, K_z, K_v sú 4 rôzne kódy, pre ktoré platí:

$$K = K_x \text{ div } 10 = K_y \text{ div } 10 = K_z \text{ div } 10 = K_v \text{ div } 10.$$

Potom tieto štvorce tvoria spolu typizovaný štvorec K (o 1 „rád“ väčší).

Pravidlá (1) aj (2) redukujú počet kódov, ktoré treba brať do úvahy. Pravidlo (1) určuje, ktoré kódy sú zbytočné a pravidlo (2) skladá 4 štvorce do jedného. Prakticky všetky možné riešenia spočívajú v aplikovaní týchto pravidiel na vstupné kódy.

Tvrdenie: Ak $K_1 \dots K_N$ sú kódy, ktoré ešte treba spracovať, $N > 1$ a na kódy $K_1 \dots K_N$ sa nedá aplikovať žiadne z uvedených pravidiel, útvar nie je typizovaný štvorec.

DÔKAZ sporom: Predpokladajme, že výsledný útvar bude typizovaný štvorec, nech je jeho kód T . Nech $K_1 \dots K_N$ sú kódy, ktoré ostali po aplikovaní pravidiel (1) a (2) a nech sa už žiadne z týchto pravidiel nedá použiť. Potom výsledný útvar je typizovaný štvorec práve vtedy, keď sa T dá pokryť štvorcami $K_1 \dots K_n$. To znamená, že

- a) $\exists i, 1 \leq i \leq N: K_i = T$. Keďže ale T pokrýva všetky štvorce, platí $\forall j: K_i = \text{otec}(K_j)$ ($a = \text{otec}(a)$ platí). To znamená, že sa dá použiť pravidlo (1), čo je spor s predpokladom.

b) $\exists x, y, z, v: K_x = 10 \cdot T + 1, K_y = 10 \cdot T + 2, K_z = 10 \cdot T + 3, K_v = 10 \cdot T + 4$. Z toho vyplýva, že sa dá aplikovať pravidlo (2), čo je spor s predpokladom.

Rozdiel v riešení spočíva hlavne v rozdielnom spôsobe aplikácie pravidiel. Najjednoduchší algoritmus je nasledovný:

opakuj

skús aplikovať (1)

skús aplikovať (2)

pokiaľ sa ešte dá aplikovať

ak ostal jediný kód, tak Je typizovaný štvorec

inak Nie je typizovaný štvorec

skús aplikovať (1) je zložitosti N^2 (prehľadávanie dvojíc čísel)

skús aplikovať (2) je zložitosti N^4 (prehľadávanie štvorcí čísel)

Hlavný cyklus prebehne rádovo N -krát (pravidlo (1) zmenší N o 1 a pravidlo (2) o tri (jeden kód nahradí štyri)). Celková zložitosť takéhoto algoritmu teda môže byť podľa individuálnych vylepšení $O(N^4)$ a viac.

Výrazné zlepšenie zložitosti sa dá dosiahnuť *usporiadaním* poľa kódov. Nech pre kódy $K_1 \dots K_n$ platí:

a) $\forall x < y < z: K_x = otec(K_z) \Rightarrow K_x = otec(K_y)$, teda kódy štvorcov pokrytých štvorcami K_x tvoria súvislý úsek hneď za kódom K_x , a zároveň

b) $\forall x < y < z < v \left(\exists K: K_x = 10 \cdot K + 1; K_y = 10 \cdot K + 2; K_z = 10 \cdot K + 3; K_v = 10 \cdot K + 4 \Rightarrow \right.$

$$\left. \forall w; x \leq w \leq v: (K_w = otec(K_x) \vee K_w = otec(K_y) \vee K_w = otec(K_z) \vee K_w = otec(K_v)) \right)$$

potom by sa operácie z predchádzajúceho programu skús aplikovať (1), skús aplikovať (2) dali previesť lineárne vzhľadom na N aj s úpravou poľa.

Usporiadanie môže vyzeráť napríklad takto: Nech $A = a_1 \dots a_{n_A}$, $B = b_1 \dots b_{n_B}$. Potom

$$a_1 < b_1 \Rightarrow A < B$$

$$a_1 > b_1 \Rightarrow A > B$$

$$a_1 = b_1 \Rightarrow a_2 < b_2 \Rightarrow A < B$$

$$a_2 > b_2 \Rightarrow A > B$$

$$a_2 = b_2 \Rightarrow a_3 < b_3 \dots$$

pričom $a_x = 0$ pre $x > n_A$, podobne pre B . Toto usporiadanie vyhovuje požiadavkám.

Vidíme, že sa jedná o normálne usporiadanie podľa veľkosti kódov $K_1 \dots K_N$, keby sme ich všetky doplnili sprava nulami na rovnaký počet cifier. Nech maximálny počet cifier je L . Potom zarovnanie na rovnaké dĺžky kódov je zložitosti $L \cdot N$. Triedenie možno použiť Quick-sort, Dobosiewics-sort (zložitost' $N \cdot \log N$) alebo takzvaný Radix-sort zložitosti $L \cdot N$.

Toto triedenie využíva skutočnosť, že čísla $K_1 \dots K_N$ vieme jedným priechodom utriediť podľa jednej z cifier. Ak použijeme pomocné pole, dá sa dokonca zabezpečiť, aby pri triedení zachovával poradie kódov s rovnakou cifrou, podľa ktorej sa triedi, tzn. ak K_i, K_j sú kódy, zhodujú sa v cifre, podľa ktorej sa triedi a $i < j$, potom aj po roztriedení bude K_i pred K_j . Ak teda čísla roztriedime podľa poslednej (L -tej), predposlednej ($L-1$ -vej), ..., 2., 1. cifry, budú utriedené podľa veľkosti. Nech x -tá cifra

$$= \left\lfloor \frac{K_i}{10^{L-x}} \right\rfloor \bmod 10,$$

$$A = a_1 \dots a_{n_A}, 0, 0 \dots \quad (L \text{ cifier}),$$

$$B = b_1 \dots b_{n_B}, 0, 0 \dots \quad (L \text{ cifier}).$$

Nech $(\exists r: a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \dots \wedge a_r = b_r \wedge a_{r+1} < b_{r+1}) \Leftrightarrow A < B$.

Po triedení $(r+1)$ -vou cifrou musí byť A pred B ; po triedení $r, r-1, r-2, \dots, 1$. cifrou sa poradie A, B musí zachovať, čiže skutočne $A < B$, takže po pretriedení bude A pred B .

Triedenie jednou cifrou je jeden priechod poľa; triedenie podľa L cifier má zložitost' $L \cdot N$.

Opäť existuje viac spôsobov ako zistiť, či takto utriedené pole je typizovaný štvorec. Ideálne by bolo, keby zložitost' tejto operácie nebola väčšia ako zložitost' triedenia.

Nech sa na $K_1 \dots K_N$ nedá aplikovať (1) a dá sa (2). Môže nastať situácia, že by po aplikovaní (2) sa dalo aplikovať (1)? Nech $\exists x, y, z, v, K: K_x = 10 \cdot K + 1, K_y = 10 \cdot K + 2, K_z = 10 \cdot K + 3, K_v = 10 \cdot K + 4$. Teda K je predchodca K_x, K_y, K_z, K_v . Je jasné, že K_h také, že by $K = otec(K_h)$, ale ani jeden z $K_x \dots K_v$ nie sú predchodcom K_h môže existovať len vtedy, ak $K_h = K$. Potom by sa ale dal aplikovať (1), lebo $K = otec(K_x) \dots$, čo je spor s predpokladom. To znamená, že pravidlo (1) stačí aplikovať iba raz.

Majme utriedené pole $K_1 \dots K_N$, aplikujme naň pravidlo (1). Ak by zvyšné kódy tvorili typizovaný štvorec, tak by sa dalo opakovane aplikovať pravidlo (2), kým by nezostal jediný štvorec.

Všimnime si prvok K_1 :

- buď K_1 je kódom výsledného typizovaného štvorca, potom ale N musí byť 1.
- K_1 sa bude podľa pravidla (2) skladať s ďalšími kódmi; potom ale vďaka usporiadaniu sa musí $K_1 \bmod 10$ rovnať 1.

Algoritmus: opakovane, pokiaľ $N > 1$ a $K_1 \bmod 10 = 1$, skúšame poskladať kód $K_1 \div 10$.

Celé zistenie, či množina kódov je typizovaný štvorec, alebo nie, je zložitosti $L \cdot N$: každý kód sa použije na spájanie do väčšieho štvorca práve raz; vďaka usporiadaniu sa štvorce využívajú porade.

P - 1 - 3

Správne riešenie je, že $PocVel = K - 1$ a počet priechodov malým a veľkým cyklom sa rovná vtedy, keď $K = 2^i$, $i \in \mathbb{N}$.

Aby sme mohli dokázať toto tvrdenie, musíme najprv dokázať niekoľko pomocných tvrdení:

Majme daný nasledovný algoritmus:

vstupná hodnota: $K[0]$

```
for i:=1 to x do
  K[i]:=2*K[i-1]+1;
```

výstupná hodnota $K[x]$

Dokážme, že $K_x = K_0 \cdot 2^x + (2^x - 1)$.

$$K_x = (((\overbrace{((\overbrace{(\overbrace{(K_0 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1}^{K_1}) \cdot 2 + 1}^{K_2}) \cdot 2 + 1}^{K_3}) \cdot 2 + 1}^{K_x}) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1),$$

čo je v podstate princíp Hornerovej schémy na výpočet hodnoty polynómu $p(y) = K_0 \cdot y^x + 1 \cdot y^{x-1} + 1 \cdot y^{x-2} + \dots + 1 \cdot y + 1$ v bode 2. Hodnota polynómu bude

$$K_x = K_0 \cdot 2^x + (2^{x-1} + 2^{x-2} + \dots + 2 + 1) = K_0 \cdot 2^x + M,$$

kde $M = 2^{x-1} + 2^{x-2} + \dots + 2 + 1$. M je súčet geometrickej postupnosti:
 $a_0 = 2^{x-1}$; $n = x$; $q = \frac{1}{2}$,

$$M = a_0 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 2^{x-1} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^x}}{\frac{1}{2}} = 2^x \cdot \frac{2^x - 1}{2^x} = 2^x - 1,$$

teda $K_x = K_0 \cdot 2^x + 2^x - 1$, čo bolo treba dokázať.

- (1) Dokážme teraz, že hodnota K sa zmenší v každom priechode vonkajším cyklom o jedna, z čoho vyplýva, že hodnota *PocVel* bude $K - 1$:

Program Mopi3;

Var K,X,PocVel,PocMal:Integer;

Begin

Write('K:'); Readln(K);

PocVel:=0; PocMal:=0;

X:=0;

While K>1 Do

Begin

PocVel:=PocVel + 1;

$K = m \cdot 2^j$; $m \bmod 2 = 1$; taký
zápis musí existovať, lebo $K > 1$
bude splnené, až keď $K = m$,
lebo K sa jedine delí dvoma

While (K Mod 2)=0 Do

Begin

$X:=X+1$; $K:=K \text{ Div } 2$ $K = m \cdot 2^{j-1}, m \cdot 2^{j-2} \dots m \cdot 2^0$
 $K_X = m \cdot 2^{j-X}$

ak $K = m \cdot 2^{j1}$, tak $X = j - j1$

End;

$K = m$; $X = j$

K:=K-1;

$K = m - 1$

While X>0 Do

opakuj X -krát

Begin

PocMal:=PocMal + 1; zväčši *PocMal* o 1 $\Rightarrow$

na konci $PocMal = PocMal + X$

K:=K*2+1; X:=X-1

End

viď hore: $K_X = (m-1) \cdot 2^x + 2^x - 1 =$
 $= m \cdot 2^x - 1 = K - 1$

Vo veľkom cykle sa K zmenší o 1.

K teda nadobúda hodnoty

$K, K-1, K-2, \dots, 3, 2$.

Vo veľkom cykle sa zároveň *PocVel*

zväčší o 1 $\Rightarrow PocVel = K - 1$

End;

Writeln('Pocet velkych prechodov bol:',PocVel);

Writeln('Pocet malych prechodov bol:',PocMal)

End.

- (2) Hodnotu *PocMal* určíme nasledovne: Vieme, že veľký cyklus prebehne $K - 1$ krát s hodnotami K : $K, K - 1, K - 2, \dots, 3, 2, 1$. Ďalej vieme, že *PocMal* sa v každom cykle zväčší o i , kde $K = m \cdot 2^i$, $m \bmod 2 = 1$. Teda pre K deliteľné 2^i sa inkrementuje o i , ak 2^i je maximálna mocnina 2, ktorá delí K . Medzi číslami od 1 po K je deliteľných 2^i práve $\left\lfloor \frac{K}{2^i} \right\rfloor$, to znamená, že pri práve $\left\lfloor \frac{K}{2^i} \right\rfloor$ hodnotách premennej K sa *PocMal* zväčší o i . Celková hodnota *PocMal* je teda

$$PocMal = \sum_{i=1}^L i \cdot \left\lfloor \frac{K}{2^i} \right\rfloor, \quad 2^L \leq K < 2^{L+1} \quad (L = \lfloor \log_2 K \rfloor).$$

V tomto súčte sme ale niektoré hodnoty zarátali viackrát, lebo hodnota K , ktorá je deliteľná 2^i ($i > 1$), je deliteľná aj $2^{i-1}, \dots, 2^1$. Nech $1 \leq j < i$. Potom každé 2^{i-j} -te číslo deliteľné 2^j je deliteľné aj 2^i . Teda správna hodnota *PocMal* bude

$$\begin{aligned} PocMal &= \sum_{i=1}^L \left(i \cdot \left\lfloor \frac{K}{2^i} \right\rfloor - \sum_{j=1}^{i-1} \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{K}{2^{i-j}} \right\rfloor}{2^j} \right\rfloor \right) = \\ &= \sum_{i=1}^L \left(i \cdot \left\lfloor \frac{K}{2^i} \right\rfloor - \sum_{j=1}^{i-1} \left\lfloor \frac{K}{2^i} \right\rfloor \right) = \\ &= \sum_{i=1}^L \left\lfloor \frac{K}{2^i} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Tento výraz lepšie pochopíme nasledovne: Ak 2^i je najväčšia mocnina 2, ktorá delí K , tak číslo i je vlastne počet núl na konci čísla K zapísaného v dvojkovej sústave.

Poslednou časťou dôkazu je dokázať, že $\left\lfloor \frac{K}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{K}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{K}{8} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{K}{2^L} \right\rfloor \leq K - 1$ a že rovnosť nastáva práve vtedy, keď $K = 2^L$.

Nech

$$\begin{aligned} K &= 2^{A_1} + 2^{A_2} + 2^{A_3} + \dots + 2^{A_r}, \\ A_1 &= LA_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_r \end{aligned}$$

Potom

$$\left[\frac{K}{2} \right] = 2^{A_1-1} + 2^{A_2-1} + 2^{A_3-1} + \dots + 2^{A_r-1} \quad (1)$$

$$\left[\frac{K}{4} \right] = 2^{A_1-2} + 2^{A_2-2} + 2^{A_3-2} + \dots + 2^{A_r-2} \quad (2)$$

.....

$$\left[\frac{K}{2^{A_r}} \right] = 2^{A_1-A_r} + 2^{A_2-A_r} + 2^{A_3-A_r} + \dots + 1 \quad (A_r)$$

.....

$$\left[\frac{K}{2^{A_{r-1}}} \right] = 2^{A_1-A_{r-1}} + 2^{A_2-A_{r-1}} + 2^{A_3-A_{r-1}} + \dots + 0 \quad (A_{r-1})$$

.....

$$\left[\frac{K}{2^{A_1}} \right] = 1 + 0 + 0 + \dots + 0 \quad (A_1)$$

$$\begin{aligned} \text{Spolu } 2^{A_1} - 1 + 2^{A_2} - 1 + 2^{A_3} - 1 + \dots + 2^{A_r} - 1 &= \\ &= K - r, \end{aligned}$$

ale $r = 1$ len pre $K = 2^L$, čo bolo treba dokázať.

2. spôsob.

$$PocMal = \sum_{i=1}^L \left[\frac{K}{2^i} \right] \leq \sum_{i=1}^L \frac{K}{2^i} = K \cdot \sum_{i=1}^L 2^{-i} = K - \frac{K}{2^L},$$

L bolo ale definované tak, že $2^L \leq K$, teda $PocMal \leq K - 1$. Rovnosť nastáva práve pre $K = 2^L$. Vtedy

$$\sum_{i=1}^L \left[\frac{K}{2^i} \right] = \sum_{i=1}^L \frac{K}{2^i},$$

a teda $K - \frac{K}{2^L} = K - \frac{2^L}{2^L} = K - 1$, čo bolo treba dokázať.

P – I – 4

Nech A, B sú čísla, ktorým zodpovedajú dvojkové zápisy

$$A = a_m 2^m + a_{m-1} 2^{m-1} + \dots + a_0 2^0,$$

$$B = b_n 2^n + b_{n-1} 2^{n-1} + \dots + b_0 2^0,$$

a nech w_1, w_2 sú zápisy čísel A, B v dvojkovej sústave v obrátenom poradí cifier, teda $w_1 = a_0 a_1 \dots a_m, w_2 = b_0 b_1 \dots b_n$.

Súčet C čísel A a B môžeme určiť nasledujúcim postupom:

Vyhodnotením výrazu $a_0 + b_0$ získame prvú cifru c_0 zápisu súčtu v obrátenom poradí cifier a prvý prenos p_0 do vyššieho rádu, pretože $a_0 + b_0 = c_0 + 2p_0$. Podobne $a_1 + b_1 + p_0 = c_1 + 2p_1$. Takto môžeme vyjadriť všetky cifry súčtu. Dôležité pritom je, že na získanie c_i potrebujeme poznať iba a_i, b_i a p_{i-1} . Tieto tri vstupné hodnoty môžu byť určené znakom na začiatku frontu (a_i), na vstupe (b_i) a stavom programu (p_{i-1}). Keďže všetky tri môžu nadobúdať iba hodnoty 0 alebo 1, potrebujeme na správne rozlíšenie dva rôzne stavy programu (stav s prenosom 0 a stav s prenosom 1). Z toho už priamo vyplýva návrh štruktúry programu:

- (1) Načítame slovo w_1 reprezentujúce číslo A do frontu.
- (2) Výpočet začneme v stave s prenosom 0.
- (3) Prečítame a_i (z frontu) a b_i (zo vstupu). Vyhodnotíme $a_i + b_i + p_{i-1}$. Párnosť výsledku udáva i -tu cifru výsledku c_i . Podľa toho, či nastal prenos, pokračujeme v príslušnom stave.
- (4) Krok 3 opakujeme, kým sme neprečítali obe čísla, teda $\max(m, n)$ -krát, pričom za „chýbajúce cifry“ a_i (b_j), ak $i > m$ ($j > n$), použijeme 0.

Cifry čísla A čítame dvakrát (prvýkrát pri kopírovaní vstupu na front, druhýkrát pri samotnom výpočte), cifry čísla B iba raz; časová zložitosť popísaného algoritmu je teda lineárna vzhľadom na dĺžku vstupného slova $w_1 * w_2$.

Jeden z možných zápisov popísaného algoritmu v jazyku Froscaľ:

```
writeln;                                načítanie slova  $w_1$  do frontu
while INP<>'*' do begin PUT(INP); NEXT end;
NEXT                                     preskočenie oddeľovača *
0:                                       stav bez prenosu
while INP<>'?' do
  case INP of
    '0': begin
      NEXT;
      if TOP='1' then write('1') else write('0');
      GET
    end;
    '1': begin
      NEXT;
      if TOP='1' then begin write('0'); GET; goto 1 end;
```

```

        write('1');
        GET
    end
end;
goto 3;
1:
    while INP<>'?' do
        case INP of
            '0': begin
                NEXT;
                if TOP='1' then write('1')
                else begin write('1'); GET; goto 0 end;
                GET
            end;
            '1': begin
                NEXT;
                if TOP='1' then write('1') else write('0');
                GET
            end
        end;
    while TOP='1' do
        begin
            write('0');
            GET
        end;
        write('1');
        GET;
3:
    while TOP<>'?' do
        begin
            write(TOP);
            GET
        end;
    end.
end.

```

Základná myšlienka počítania súčinu dvoch čísel zapísaných v dvojkovej sústave spočíva v spočítavaní mocnín jedného z činiteľov. Nech A , B sú čísla vyjadrené rovnako ako v časti a), nech S je ich súčin. Platí

$$\begin{aligned}
 S &= A \cdot B = B \cdot A = \\
 &= (b_n 2^n + b_{n-1} 2^{n-1} + \dots + b_0 2^0) \cdot A = \\
 &= b_n (2^n A) + b_{n-1} (2^{n-1} A) + \dots + b_0 (2^0 A).
 \end{aligned}$$

Čísla b_i nadobúdajú hodnoty 1 alebo 0, určujú teda, či príslušný člen $2^i A$ do súčinu pripočítame alebo nie. Stačí teda postupne generovať čísla A ,

$2A, 2^2A, \dots, 2^n A$, po každom kroku prečítať príslušnú cifru čísla B , a ak je nenulová, pripočítať násobok A k súčinu. Číslo B teda netreba nikde uchovávať; každá jeho cifra prislúcha práve jednému násobku čísla A . Ak tieto násobky vieme generovať v potrebnom poradí (neskôr ukážeme, že áno), potom treba každé b_i použiť práve raz, môžu sa preto čítať priamo zo vstupu. Číslo A však treba uchovať na front. Spolu s týmto číslom je potrebné pamätať si vo fronte aj medzivýsledok sčítovania. Je vhodné ukladať tieto dve čísla tak, že pri sebe stoja vždy cifry rovnakého rádu, teda mať na fronte postupnosť $a_0s_0a_1s_1 \dots a_ms_m$, kde s_i sú cifry medzivýsledku. Takýto tvar uloženia čísel prináša výhodu, že pri sčítovaní násobku čísla A a medzivýsledku stačí prejsť frontom iba raz; takisto zdvojnásobenie čísla A (čo je vlastne posunutie cifier a_i o jedno miesto vpravo) vyžaduje iba jeden priechod frontom. Na vypočítanie celého súčinu je preto potrebných rádovo $m \cdot n$ základných frontových operácií.

Popíšme teraz bližšie samotnú implementáciu násobenia vo Froscale: Najskôr načítame číslo A do frontu a inicializujeme medzisúčet.

```
repeat
  PUT(INP); PUT('0'); NEXT
until INP='*';
NEXT;
```

Na fronte je teraz $a_0a_10a_20 \dots a_m0$. Tu začína samotné násobenie. Ak sa v čísle B vyskytuje cifra 1, ktorá zodpovedá práve sa vyskytujú-
cemu násobku čísla A na fronte, treba tento násobok pripočítať k dosiahnutému medzisúčtu. Algoritmus sčítania je totožný s riešením úlohy a) s tou výnimkou, že obe čísla sú teraz uložené na fronte.

```
repeat
  if INP='1' then
    begin
      PUT('*');
0:    if TOP='*' then goto 2;
      PUT(TOP);
      case TOP of
        '0': begin GET; PUT(TOP); GET; goto 0 end;
        '1': begin
              GET;
              case TOP of
                '0': begin PUT('1'); GET; goto 0 end;
                '1': begin PUT('0'); GET; goto 1 end
              end
            end
      end
    end
end;
```

```

1:      if TOP='*' then begin PUT('0'); PUT('1'); goto 2 end;
      PUT(TOP);
      case TOP of
        '0': begin
              GET;
              case TOP of
                '0': begin PUT('1'); GET; goto 0 end;
                '1': begin PUT('0'); GET; goto 1 end
              end
            end;
        '1': begin GET; PUT(TOP); GET; goto 1 end
      end;
2:      GET
      end;

```

Vytvoríme ďalší násobok čísla A . Znamená to, že súčasný násobok potrebujeme prenásobiť dvoma, čiže posunúť o jednu cifru vpravo vzhľadom na medzisúčet. To je ale to isté, ako keď posunieme medzisúčet o jednu cifru vľavo. Najnižšia cifra medzisúčtu, ktorá by takto zanikla, už patrí hľadanému súčinu, pretože všetky ďalšie pripočítavané násobky čísla A majú v dvojkovom zápise na konci dostatočný počet núl. Môžeme preto túto cifru vypísať.

```

      PUT('*');
      case TOP of
        '0': begin GET; write(TOP); GET; goto 10 end;
        '1': begin GET; write(TOP); GET; goto 11 end
      end;
10: if TOP='*' then goto 20;
    PUT('0');
    goto 19;
11: if TOP='*' then begin PUT('1'); PUT('0'); goto 20 end;
    PUT('1');
19: case TOP of
      '0': begin GET; PUT(TOP); GET; goto 10 end;
      '1': begin GET; PUT(TOP); GET; goto 11 end
    end;
20: GET;

```

Z pôvodného stavu frontu $a_0s_i a_1s_{i+1} \dots a_{m-1}s_{i+m-1} a_m s_{i+m}$ sme teda získali $a_0s_{i+1} a_1s_{i+2} \dots a_{m-1}s_{i+m} a_m 0$ a môžeme pokračovať v spracovávaní ďalšej cifry čísla B .

```

      NEXT
until INP='?';

```

Prečítali sme obe čísla, spočítali sme ich súčin a vypísali sme jeho

menej významné cifry. Najvyššie cifry ešte ostali na fronte; treba ich vypísať. Ak je najvýznamnejšia cifra súčinu nula, nevypisujeme ju.

```
GET;
while TOP in ['0','1'] do
  case TOP of
    '0': begin GET; if TOP<>'?' then write('0'); GET end;
    '1': begin GET; GET; write('1') end
  end;
writeln
```

Ak by sme čísla na fronte neuchovávali „pomiešané“, teda cifry rovnakého rádu pri sebe, ale najprv jedno číslo a potom druhé číslo — zložitosť by vzrástla na $m^2 \cdot n$.

Pri riešení časti c) si treba uvedomiť, ako sa zmenia počiatočné podmienky, ktoré sme položili pre naše riešenia a) a b).

Pre úlohu a) musíme namiesto štyroch kombinácií vstupných cifier uvažovať o 100 kombináciách. Znamená to, že každý príkaz case bude mať desať vetiev. Sčítavame vždy tri desiatkové číslice. Dve z nich patria zadaným číslam, ich súčet je najviac 18. V prvom kroku môžeme dostať prenos najviac 1, v druhom kroku teda max. súčet 19, čiže zase prenos 1. Je zrejmé, že prenos 2 nenastane nikdy, stačia preto dva stavy na vyjadrenie prenosu.

V úlohe b) sa rovnako rozšíri blok zabezpečujúci sčítanie. Všetky ostatné časti programu sa zmenia do tej miery, že namiesto dvoch cifier musíme rozlišovať cifier desať. Predpoklady riešenia zmena základu číselnej sústavy nemení, preto myšlienka riešenia zostáva rovnaká.

P – II – 1

Permutáciu P môžeme rozložiť na niekoľko navzájom disjunktných cyklov, $P = C_1 C_2 \dots C_m$. Každý cyklus tvoria nejaké prvky množiny $\{1, \dots, N\}$, označme preto $C_i = (a_{i,1} a_{i,2} \dots a_{i,l_i})$. Číslo l_i nazveme dĺžkou cyklu C_i .

Cykly sú navzájom disjunktné, takže každý prvok $x \in \{1, \dots, N\}$ patrí práve do jedného cyklu. Preto ak zoberieme ľubovoľné číslo e_i pre každý cyklus C_i , tak x patrí práve do jedného zo zložení $C_i^{e_i}$.

Nie je ťažké ukázať, že pre cyklus C_i dĺžky l_i a pre každé x spomedzi prvkov cyklu $a_{i,1}, \dots, a_{i,l_i}$ platí

$$C_i^u[x] = C_i^v[x] = l_i \mid (u - v).$$

Dalej ak $P = C_1 C_2 \dots C_m$, tak $P^K = C_1^K C_2^K \dots C_m^K$. Pretože K je oveľa väčšie ako N (a teda aj ako l_i), je výhodnejšie zapísať ako $P = C_1^{e_1} C_2^{e_2} \dots C_m^{e_m}$, kde $l_i \mid (K - e_i)$. Čím menšie budú čísla e_i , tým menej operácií budeme potrebovať na výpočet $C_i^{e_i}$, a tým bude náš algoritmus efektívnejší.

Zoberme $e_i = K \bmod l_i$. Potom $C_i^{e_i}[x] = C_i^K[x]$ pre každé zmysluplné x . Budeme preto počítať e_i -te zloženia cyklov C_i pre každé $i \in \{1, \dots, m\}$. Zjednotenie týchto „čiasťových zložení“ bude K -te zloženie permutácie P .

Na vypočítanie $C_i^{e_i}$ si stačí uchovať pôvodné hodnoty prvkov poľa P prislúchajúce danému cyklu C_i v pomocnom poli (H) a potom ich z tohoto poľa späť ukladať do poľa P „posunuté o e_i “, teda $P^K[x] = H[(x + e_i - 1) \bmod l_i + 1]$ (na ukladanie výsledku môžeme použiť opäť pole P , lebo cykly sú navzájom disjunktné).

Takéto riešenie spracuje každý prvok každého cyklu práve raz, preto je jeho časová zložitosť lineárna vzhľadom na N . Pamäťová zložitosť je taktiež lineárna, pretože v pomocnom poli potrebujeme uchovávať naraz vždy iba jeden cyklus s maximálnou dĺžkou N . Na vyhľadanie začiatku ďalšieho cyklu je použitá „znamienkovacia“ metóda, teda prvky už spracovaných cyklov dostanú dočasne záporné znamienko, aby sa odlišili od dosiaľ nespracovaných.

```

program Permutacie;
type pole = array [1..100] of integer;
var p      : pole;
    k,n    : integer;
    i,prvy : integer;

procedure cyklus (prvy:integer);
var h      : pole;
    i,dalsi,d,s : integer;
begin
    i:=prvy;
    d:=0;
    repeat
        inc(d);
        h[d]:=p[i];
        i:=p[i]
    until i=prvy;
    s:=k mod d;
    i:=prvy;
    repeat
        dalsi:=p[i];

```



```

    p[i]:=-h[s];
    i:=dalsi;
    s:=(s mod d)+1
until i=prvy
end;

begin
    write('Zadaj N: '); read(n);
    write('Zadaj P: '); for i:=1 to n do read(p[i]);
    write('Zadaj K: '); read(k);
    for prvy:=1 to n do
        if p[prvy]>0 then cyklus(prvy);
    for i:=1 to n do p[i]:=-p[i];
    write('P^',k,'');
    for i:=1 to n do write(' ',p[i]); writeln
end.

```

P – II – 2

Najvýznamnejšie cifry kódu budeme zrejme spracovávať ako prvé, preto je vhodné obrátiť poradie cifier v kódoch s_1 aj s_2 . Pôvodne prvá cifra sa potom ľahko zistí ako kód mod 10.

Kým sa kódy vo svojich cifrách (teraz už od konca) zhodujú, ležia oba zadané štvorce v tom istom typizovanom štvorci (nie je podstatné, v ktorom), a nemôžeme preto začať rozhodovať o susedstve. Zhodné cifry preto odstránime. Ak jeden zo zvyšných kódov je 0 (a ten pokrýva najmenší typizovaný štvorec, v ktorom sa oba zadané štvorce nachádzajú), nemôžu sa už dotýkať zvonku; takisto je tomu v prípade, že ležia v protiľahlých kvadrantoch (1 a 4 alebo 2 a 3, vždy teda súčet 5). Tieto triviálne prípady preto vylúčime.

Teraz môžu nastať dva prípady: štvorce budú mať spoločnú buď vodorovnú hranu (ležia v kvadrantoch 1 a 3, resp. 2 a 4), alebo zvislú hranu (1 a 2, resp. 3 a 4). Na vzájomnom poradí štvorcov pritom nezáleží, preto bez ujmy na všeobecnosti riešenia nech kód s_1 prislúcha štvorcu ležiacemu v kvadrante s nižším číslom (teda „ľavejšiemu“, resp. „vrchnejšiemu“ z oboch štvorcov).

Spomínané dva prípady rozlíšime vyhodnotením rozdielu posledných cifier zostávajúcich kódov. Pre každú z oboch možností existuje odteraz jednoznačný algoritmus na zistenie susedstva. Rozoberieme podrobnejšie iba prípad susedstva zvislou hranou; druhý prípad je obdobný:

Štvorec s_1 má poslednú cifru kódu 1 a štvorec s_2 dvojku (alebo 3 a 4) — pozor! tu už záleží na poradí týchto cifier. Potom jediné prípustné

kombinácie čífer na ďalšom mieste sú 2 a 1 alebo 4 a 3, inak sa susedstvo poruší. (Kód 0 je ekvivalentný všetkým kódom, teda napr. aj kombinácia 2, 0 je prípustná.)

V programe je definované pole *Test*. Jeho prvým indexom je druh susedstva (vodorovne/zvislo), druhý index je posledná cifra kódu *s1* a tretí index posledná cifra kódu *s2*. Toto pole predstavuje tabuľku stavov nejakého konečného automatu a je definované takto:

- 0 – oba kódy sú celé spracované a nezistilo sa, že štvorce nesusedia, teda štvorce susedia.
- 1 – dosiaľ spracované časti kódov zodpovedali susediacim dvojiciam štvorcov. Tento fakt susedstvo nepopiera, ale ani nepotvrďuje, preto treba testovať ďalšie cifry.
- 2 – štvorce nesusedia

```
program Stvorce;
const Test : array [0..1,0..4,0..4] of 0..2 =
  (((0,1,1,2,2),(2,2,2,2,2),(2,2,2,2,2),(1,1,2,2,2),(1,2,1,1,1)),
   ((0,1,2,1,2),(2,2,2,2,2),(1,1,2,2,2),(2,2,2,2,2),(1,2,2,1,2)));
var S1,S2,S1kon,S2kon,Pom,T : integer;
```

```
function Prevrat (S:integer) : integer;
var p : integer;
begin
  p:=0;
  while S>0 do
    begin
      p:=10*p+S mod 10;
      S:=S div 10
    end;
  Prevrat:=p
end;
```

```
begin
  write('Zadaj S1: '); readln(S1);
  write('Zadaj S2: '); readln(S2);
  S1:=Prevrat(S1);
  S2:=Prevrat(S2);
  while (S1 mod 10) = (S2 mod 10) do
    begin
      S1:=S1 div 10;
      S2:=S2 div 10
    end;
  S1kon:=S1 mod 10;
  S2kon:=S2 mod 10;
  if (S1kon=0) or (S2kon=0) or (S1kon+S2kon = 5) then T:=2
  { Keď jeden leží v druhom alebo sú v uhlopriečných štvorcoch.}
```

```

else
  begin
    if S1kon>S2kon then
      begin Pom:=S1; S1:=S2; S2:=Pom end;
    Pom:=abs(S1kon-S2kon) mod 2;
    repeat
      S1:=S1 div 10;
      S2:=S2 div 10;
      T:=Test[Pom, S1 mod 10, S2 mod 10];
    until T<>1
  end;
  if T=0 then writeln('Lezia pri sebe!')
    else writeln('Nelezia pri sebe!')
end.

```

P – II – 3

Pojmom *lokálny počet inverzií* znakov Z_1 a Z_2 v reťazci R rozumieme počet takých výskytov dvojíc Z_1 a Z_2 v reťazci R , že medzi nimi sa nenachádzajú iné znaky ako Z_1 a Z_2 . Ľahko sa nahliadne, že hľadané znaky zo zadania sú práve také dva znaky, ktoré majú maximálny lokálny počet inverzií.

Skúsme si teraz predstaviť, že máme vytvorenú tabuľku (dvojrozmernú) lokálnych inverzií pre nejaký začiatočný úsek reťazca R . Pridaním ďalšieho znaku (inp) môžu nastať tri prípady:

- (1) Nový znak je zhodný s posledným (pos12) a nech pred ním existuje znak rôzny od neho (pos11). Vtedy stačí opraviť tabuľku inverzií iba na mieste [pos11, inp] pričítaním počtu výskytov znaku pos11 na konci prerušovaných nanajvyš výskytmi znaku inp.
- (2) Nový znak je zhodný s predposledným znakom pos11. Vtedy stačí na mieste [pos12, inp] pričítať počet výskytov pos12 (posledného znaku) prerušovaných nanajvyš znakom pos11.
- (3) Nový znak je rôzny od posledného (pos12) aj od pos11. Vtedy stačí tabuľku inverzií poopraviť na mieste [pos12, inp] o veľkosť posledného súvislého úseku znakov pos12.

Z uvedeného vidíme, že by bolo vhodné si viesť priebežne hodnoty posledných dvoch rôznych znakov pos11, pos12, ich počty posledných výskytov prerušovaných len navzájom (poc1, poc2), a veľkosť posledného súvislého úseku posledného znaku (poc2pos1). Po prepísaní do programu dostávame lineárny algoritmus s poľom konštantnej veľkosti.

Hľadanie maximálnej hodnoty sa dá robiť priebežne. Osobitne treba ešte vyriešiť inicializáciu a začiatok, lebo v rozbore sa predpokladá, že už máme aspoň dva rôzne znaky spracované.

```

program Znaky;
  var inp,posl1,posl2,max1,max2 : char;
      poc1,poc2,poc2posl,pom      : integer;
      inver : array['A'..'J','A'..'J'] of integer;

begin
  for max1:='A' to 'J' do
    for max2:='A' to 'J' do
      inver[max1,max2]:=0;           {inicializácia}
    max1:='A'; max2:='A';
    read(posl1); poc1:=0;             {prvé načítanie}
    repeat inc(poc1); read(posl2) until posl2<>posl1;
    poc2:=1; poc2posl:=1;
    while not(eoln) do                {hlavný cyklus}
      begin
        read(inp);
        if inp=posl2 then             {prípád (1)}
          begin inc(poc2); inc(poc2posl) end
        else if inp=posl1 then        {prípád (2)}
          begin
            posl1:=posl2; posl2:=inp;
            pom:=poc2; poc2:=poc1+1; poc1:=pom;
            poc2posl:=1;
          end
        else                          {iný znak --- (3)}
          begin
            posl1:=posl2; poc1:=poc2posl;
            posl2:=inp; poc2:=1; poc2posl:=1;
          end;
        pom:=inver[posl1,posl2]+poc1; {zvýšime počet }
        inver[posl1,posl2]:=pom;      { inverzií. }
        if pom>inver[max1,max2] then  {je maximálny ?}
          begin max1:=posl1; max2:=posl2 end;
        end;
        writeln('Z1=',max1,' Z2=',max2)
      end.
end.

```

P – II – 4

Dolná celá časť dvojkového logaritmu čísla je rovná počtu cifier v zápise tohoto čísla v dvojkovej sústave mínus 1. Tento počet cifier môžeme zistiť tak, že číslo celočíselne delíme dvoma. Počet delení, potrebný na to, aby

sme získali výsledok nula, sa rovná počtu cifier. Potrebujeme ale počet cifier mínus jedna, delenie preto skončíme, ak je výsledok menší ako 2.

Pre zadaný tvar vstupného slova, keď počet znakov 'a' udáva hodnotu čísla, sa delenie dvoma realizuje ľahko tak, že pre každú dvojicu po sebe idúcich znakov ('aa') do medzivýsledku pridáme iba jeden znak 'a'; tým získame číslo reprezentované polovičným počtom znakov, teda v našom zápise s polovičnou hodnotou. Súčasne zvyšujeme počítadlo, ktoré udáva počet vykonaných delení. Ak dosiahneme pri delení výsledok 0 alebo 1, náš výpočet končí. Stav počítadla potom udáva dolnú celú časť dvojkového logaritmu zadaného čísla.

```
program Logaritmus;
begin
  repeat PUT(INP); NEXT until INP='?';
  PUT('*'); PUT('0'); PUT('*');
  repeat      {redukuj počet 'a' na polovicu a zvýš čítač}
    GET;
    if TOP<>'*' then      {aspoň 2 znaky}
      begin
        GET; PUT('a');
        while TOP<>'*' do      {každú celú}
          begin      {dvojicu 'aa'}
            GET;      {zmeň na 'a'}
            if TOP<>'*' then begin GET; PUT('a') end
          end;
        GET; PUT('*');
        while TOP='1' do begin GET; PUT('0') end; {zvýš čítač}
        PUT('1'); if TOP<>'*' then GET;
        while TOP<>'*' do begin PUT(TOP); GET end;
        GET; PUT('*')      {čítač zvýšený}
      end
    until TOP='*';
  GET; repeat write(TOP); GET until TOP='*';
end.
```

Časová zložitosť tohoto riešenia je $O(2N + \log_2 N \cdot \log_2 \log_2 N)$, pamäťová zložitosť (maximálna veľkosť frontu) je $N + \log_2 \log_2 N$; N je dĺžka slova w .

P – III – 1

Pri riešení je dôležité si uvedomiť, čo sa s permutáciou deje, ak ju umocňujeme (teda vytvárame jej druhú mocninu), konkrétne nás zaujíma, čo sa deje s jej jednotlivými cyklami. Vieme, že cyklus nepárnej dĺžky bude po umocnení opäť cyklom (s rovnakou dĺžkou). Ale každý cyklus párnej

dĺžky sa po umocnení rozpadne na dva cykly polovičnej dĺžky. Z toho môžeme s určitou istotou tvrdiť, že ak sa v druhej mocnine vyskytuje cyklus párnej dĺžky, vznikol rozpadnutím cyklu dvojnásobnej dĺžky v pôvodnej permutácii. Ak sa v druhej mocnine vyskytuje cyklus nepárnej dĺžky, mohol vzniknúť z cyklu rovnakej dĺžky, alebo rozpadom cyklu dĺžky dvojnásobnej.

Spočítajme v druhej mocnine počty cyklov jednotlivých dĺžok. V ďalšom texte budeme L označovať dĺžku cyklu a $K(L)$ počet cyklov tejto dĺžky. Zrejme cyklom dvoch rozdielnych dĺžok môžeme prisúdiť nezávislé spôsoby vzniku, a teda pri stanovovaní počtu druhých odmocnín, teda počtu permutácií, z ktorých po ich umocnení vznikla zadaná permutácia, musíme vyčísliť súčin počtov spôsobov vzniku skupín cyklov jednotlivých dĺžok. Ak označíme $S(L)$ počet spôsobov, ktorými mohli vzniknúť cykly dĺžky L , môžeme písať

$$\text{počet druhých odmocnín} = \prod S(L),$$

pričom násobíme cez všetky L , pre ktoré $K(L) > 0$.

Našou úlohou ostáva stanoviť $S(L)$ pre jednotlivé L . Predchádzajúce úvahy vedú k rozdeleniu na dva prípady podľa párnosti L :

- (a) V prípade, že $L = 2m + 1$, teda L je nepárne, stanovíme $S(L)$ takto:
- jedna možnosť je, že všetky cykly vznikli zobrazením z cyklov rovnakej dĺžky (teda ani jeden nevznikol rozpadom dlhšieho cyklu) — príspevok do $S(L)$ je 1
 - druhá možnosť je, že práve dva z $K(L)$ cyklov vznikli rozpadom cyklu dĺžky $2L$; týchto možností je $\binom{K(L)}{2}$. Lenže rozpadom nejakého cyklu V (dĺžky $2L$) vzniknú rovnaké cykly W_1 a W_2 , ako rozpadom cyklu V' , ktorý sa od V líši tým, že má cyklicky posunuté prvky na všetkých párnych (alebo všetkých nepárnych, čo je to isté) miestach; napr. z cyklu $V = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ vzniknú cykly $W_1 = 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ a $W_2 = 2 \rightarrow 4 \rightarrow 2$, rovnako ako z cyklu $V' = 1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Možných vzájomných posunutí cyklov W_1 a W_2 (teda možných cyklov V) je L , teda celkový príspevok bude $L \binom{K(L)}{2}$
 - podobne mohli práve dve dvojice cyklov vzniknúť rozpadom cyklov dĺžky $2L$; analogickým odvodením získame príspevok $L^2 \cdot \frac{1}{2} \binom{K(L)}{2} \binom{K(L)-2}{2}$, atď.

Sčítaním týchto príspevkov dostávame $S(L)$:

$$S(L) = 1 + L \frac{\binom{K(L)}{2}}{1!} + L^2 \frac{\binom{K(L)}{2} \binom{K(L)-2}{2}}{2!} + \\ + L^3 \frac{\binom{K(L)}{2} \binom{K(L)-2}{2} \binom{K(L)-4}{2}}{3!} + \dots$$

pričom sčítame po prvý nulový sčítanec.

- (b) V prípade, že $L = 2m$, teda L je párne, museli všetky cykly vzniknúť rozpadom cyklov dĺžky $2L$ (okrem iného to znamená, že $K(L)$ je párne, ale to je pre nás skoro nevyužiteľné). Potom $S(L)$ je počet spôsobov, ktorými môžeme „popárovať“ $K(L)$ cyklov do dvojíc, krát $L^{\frac{1}{2}K(L)}$ (každá z $\frac{1}{2}K(L)$ dvojíc mohla vzniknúť z L rôznych cyklov; pozri úvahu v (a). Počet spôsobov vytvorenia dvojíc je $(K(L) - 1)(K(L) - 3) \dots 1$ (k prvému prvku môžeme vybrať druhý z $K(L) - 1$ prvkov, ostalo $K(L) - 2$ prvkov; k ďalšiemu prvému je to $(K(L) - 2) - 1 = K(L) - 3$ spôsobov atď.). Teda

$$S(L) = (K(L) - 1)(K(L) - 3) \dots 1 \cdot L^{\frac{1}{2}K(L)}$$

P – III – 2

Ak si uvedomíme, že dva typizované štvorce s kódmi dĺžky D a $D+1$ majú dĺžky svojich strán v pomere $2 : 1$, je prirodzené uvažovať o reprezentácii súradníc štvorca v dvojkovej sústave. Nech kód S má D cifier. Potom jemu zodpovedajúci štvorec je reprezentovaný dvoma súradnicami X a Y , ktoré majú v zápise v dvojkovej sústave D cifier. Priradíme týmto zápisom cifry nasledujúcim spôsobom (nech C_i je i -tá cifra čísla C):

$$X_i = 1 \Leftrightarrow S_i = 2 \text{ alebo } S_i = 4,$$

$$X_i = 0 \Leftrightarrow S_i = 1 \text{ alebo } S_i = 3,$$

$$Y_i = 1 \Leftrightarrow S_i = 3 \text{ alebo } S_i = 4,$$

$$Y_i = 0 \Leftrightarrow S_i = 1 \text{ alebo } S_i = 2, \quad 1 \leq i \leq D$$

Je zrejmé, že ak rozdelíme celú obrazovku na typizované štvorce rovnakej veľkosti zhodné so štvorcom s kódom S , tak súradnice X (resp. Y) zodpovedajúce týmto štvorcom stúpajú v smere vpravo (resp. dolu). Potom posunutie štvorca s kódom S o K jeho dĺžok vpravo znamená pripočítanie čísla K k X -ovej súradnici tohoto štvorca. Podobne posunutie

o L dĺžok hore znamená odčítanie čísla L od Y -ovej súradnice. Po tejto úprave získame kód nového štvorca spätným prevodom zo súradníc X a Y na kód S :

$$\begin{aligned} S_i = 1 &\Leftrightarrow X_i = 0 \text{ a } Y_i = 0, \\ S_i = 2 &\Leftrightarrow X_i = 1 \text{ a } Y_i = 0, \\ S_i = 3 &\Leftrightarrow X_i = 0 \text{ a } Y_i = 1, \\ S_i = 4 &\Leftrightarrow X_i = 1 \text{ a } Y_i = 1, \quad 1 \leq i \leq D, \end{aligned}$$

čo sa dá prehľadnejšie zapísať ako $S_i = 1 + X_i + 2Y_i$.

```
x:=0;
y:=0;
rad:=1;
while s>0 do
  begin
    last:=s mod 10;
    s:=s div 10;
    if (last=3) or (last=4) then y:=y+rad;
    if (last=2) or (last=4) then x:=x+rad;
    rad:=rad*2
  end;
x:=x+k;
y:=y-l;
if (x<0) or (y<0) or (x>=rad) or (y>=rad) then
  writeln('MIMO OBRAZOVKY')
else
  begin
    write('Po presunutí: ');
    repeat
      rad:=rad div 2;
      last:=1;
      if x>=rad then begin last:=last+1; x:=x-rad end;
      if y>=rad then begin last:=last+2; y:=y-rad end;
      write(last)
    until rad=1;
    writeln;
  end
end
```

P – III – 3

Pozrime sa, ako vyzerá dekrementovanie čísla v mínus-desiatkovej sústave.

Nech $A = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_{-10}$.

Ak $a_0 > 0$, potom $A - 1 = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 (a_0 - 1)}$.

Ak $a_0 = 0$ a $a_1 < 9$, potom $A - 1 = \overline{a_n a_{n-1} \dots (a_1 + 1) 9}$.

Ak $a_0 = 0$, $a_1 = 9$ a $a_2 > 0$, potom $A - 1 = \overline{a_n a_{n-1} \dots (a_2 - 1) 0 9}$.

...

Nech všeobecný algoritmus vyzerá nasledovne:

```
A) j:=0;
   while a[j] = 9*(j mod 2) do j:=j+1;
B) if j mod 2 = 1 then inc(a[j])
   else dec(a[j])
C) for i:=j-1 downto 0 do a[i]:=9-a[i];
```

Ukážme si, že uvedený algoritmus robí presne to isté, čiže zmenšuje číslo v (-10) -sústave.

- (1) Nech $A = \overline{a_n \dots a_j 9090 \dots 90}$, tzn. $j \bmod 2 = 0$. Potom $A = a_n \cdot (-10)^n + \dots + a_j \cdot 10^j - 9 \cdot 10^{j-1} - 9 \cdot 10^{j-3} - \dots - 90$. Uvedený algoritmus transformuje A na A' v tvare $A' = \overline{a_n \dots (a_j - 1) 09 \dots 09}$, tzn. $A' = a_n \cdot (-10)^n + \dots + (a_j - 1) \cdot 10^j + 9 \cdot 10^{j-2} + 9 \cdot 10^{j-4} + \dots + 9$. Tvrdíme, že $A - A' = 1$:

$$\begin{aligned} & (a_n \cdot (-10)^n + \dots + a_j \cdot 10^j - 9 \cdot 10^{j-1} - 9 \cdot 10^{j-3} - \dots - 90) - \\ & - (a_n \cdot (-10)^n + \dots + a_j \cdot 10^j - 10^j + 9 \cdot 10^{j-2} + 9 \cdot 10^{j-4} + \\ & + \dots + 9) = \\ & = 10^j - 9 \cdot 10^{j-1} - 9 \cdot 10^{j-2} - \dots - 90 - 9 = 1 \end{aligned}$$

- (2) Nech $A = \overline{a_n \dots a_j 090 \dots 90}$, tzn. $j \bmod 2 = 1$. Potom $A = a_n \cdot (-10)^n + \dots - a_j \cdot 10^j - 9 \cdot 10^{j-2} - 9 \cdot 10^{j-4} - \dots - 90$. Uvedený algoritmus transformuje A na $A' = \overline{a_n \dots (a_j + 1) 909 \dots 09}$, tzn. $A' = a_n \cdot (-10)^n + \dots - (a_j + 1) \cdot 10^j + 9 \cdot 10^{j-1} + 9 \cdot 10^{j-3} + \dots + 9$. Tvrdíme, že $A - A' = 1$:

$$\begin{aligned} & (a_n \cdot (-10)^n + \dots - a_j \cdot 10^j - 9 \cdot 10^{j-2} - 9 \cdot 10^{j-4} - \dots - 90) - \\ & - (a_n \cdot (-10)^n + \dots - a_j \cdot 10^j - 10^j + 9 \cdot 10^{j-1} + 9 \cdot 10^{j-3} + \\ & + \dots + 9) = \\ & = 10^j - 9 \cdot 10^{j-1} - 9 \cdot 10^{j-2} - \dots - 90 - 9 = 1 \end{aligned}$$

Ukážme si teraz, že daný program vykoná v jednom cykle presne túto operáciu (zmenšenie čísla v (-10) -sústave o 1).

Cyklos A) zjavne vykonáva časť A) nášho algoritmu, pričom si ešte vytvára pomocnú premennú X : $X_{j-1} = a_0$, $X_{j-2} = a_1$, ..., $X_0 = a_{j-1}$. Keďže očakávame $a_0 = 0$, potom $X_{j-1} = 0$, teda X má $j - 1$ cifier.

Premenná q predstavuje výraz $9 \cdot (j \bmod 2)$. Ak teda po skončení cyklu je $q = 9$, očakávali sme $a_j = 9$, teda $j \bmod 2 = 1$, podobne $q = 0$, a teda $j \bmod 2 = 0$.

Keď po skončení cyklu platí:

$q = 9$ a $k = 0$, $a_j = 0$; $a_{j-1} = 0$; $a_{j-2} = 9$; ...; znamená to, že A má zápornú hodnotu, nemôžeme ho zmenšovať, lebo by cyklus neskončil.

$q = 9$ a $k > 0$, $9 > a_j \geq 0$. V tomto prípade sa vykonajú priradenia: $a_j = a_j + 1$; $a_{j-1} = 9$ (treba si uvedomiť, že v tomto prípade $x_0 = 0$), následne sa vykoná cyklus B), ktorý vykoná priradenia: $a_{j-2} = x_0$, $a_{j-3} = x_1$, ..., $a_0 = x_{j-2}$. Ak sa a_{j-1} sa rovnalo 0, teraz má hodnotu 9. Ak sa a_{j-2} rovnalo 9, teraz má hodnotu 0 (x_0). Ak sa a_0 rovnalo 0, teraz má hodnotu 9 (x_{j-2}).

$q = 0$ ($j \bmod 2 = 0$), platí $x_0 = 9$ ($a_{j-1} = 9$, $a_{j-2} = 0$, ...). V tomto prípade sa vykonajú priradenia: $a = a - 1$; $x_{j-1} = x_{j-2}$, $x_{j-2} = x_{j-3}$, ..., $x_1 = x_0$, $x_0 = 0$ (teraz bude $x_0 = 0$, $x_1 = 9$, ..., $x_{j-1} = 9$) $a_{j-1} = x_0$, $a_{j-2} = x_1$, ..., $a_0 = x_{j-1}$.

Opäť sa môžeme ľahko presvedčiť, že cifry na pozíciách $j - 1$ až 0 sa „zinvertovali“. Iste ste si všimli, že predpokladáme priechod aj cyklom A), aj cyklom B). Vyjasnime si teda tieto krajné prípady:

(1) Počet priebehov prvým cyklom bol 0, tzn., že $a_0 \neq 0$. $A = Y + a_0$, teda $A - 1 = Y + (a_0 - 1)$. Presne takéto priradenie sa vykoná v podmienkovej časti, cyklus B) tiež neprebehne, výsledok je teda správny.

(2) Nech $a_0 = 0$, $a_1 \neq 9$. $A = Y - a_1 \cdot 10 + 0$, teda $A - 1 = Y - (a_1 + 1) \cdot 10 + 9$. Opäť sa presne takéto priradenie vykoná v podmienkovej časti, čiže aj v tomto prípade je výsledok správny.

Z uvedeného vyplýva, že uvedený program v cykle zmenšuje čísla v mínus-desiatkovej sústave o 1. Cyklus sa vykonáva, pokiaľ $K > 0$; *poc* určuje počet priechodov cyklu. Ak vstupné K je číslo v mínus-desiatkovej sústave, *poc* bude po skončení cyklu hodnota K (číslo v desiatkovej sústave). Ak chceme, aby výstup programu bol p (*poc* = p), musí byť vstupné K číslo p v mínus-desiatkovej sústave. Ťažisko úlohy je teda napísať program, ktorý vstupné p prevedie do mínus-desiatkovej sústavy.

Riešenie: Vytvorme polynóm $KK(-10)$, ktorého hodnota by bola p , nasledovne ($kk_0, kk_1, \dots, kk_m$ sú koeficienty polynómu KK):

Pre všetky cifry p (v desiatkovej sústave):

Ak cifra p_i by v (-10) -sústave zodpovedala kladnej mocnine -10 , tzn. $i \bmod 2 = 0$, potom vykonáme $kk_i = kk_i + p_i$.

Ak cifra p_i by v (-10) -sústave zodpovedala zápornej mocnine -10 , tzn. $i \bmod 2 = 1$, potom túto cifru rozpíšeme ako $kk_{i+1} = kk_{i+1} + 1$, $kk_i = kk_i + 10 - p_i$, napr. $(20)_{10} = (180)_{-10}$.

Takto vytvorený polynóm má hodnotu p . Ak by sme chceli z koeficientov polynómu zostaviť číslo v mínus-desiatkovej sústave, treba, aby pre všetky i platilo $0 \leq kk_i \leq 9$.

Treba teda vymyslieť pravidlo, ktoré by zmenilo koeficienty polynómu tak, aby bola zabezpečená podmienka, ale nezmenilo by jeho hodnotu. Keďže koeficienty kk nemôžu byť záporné, stačí nám uvažovať koeficienty väčšie ako 9.

Nech a_j je posledný koeficient väčší ako 9 (pre všetky $i > j$ platí $a_i < 10$). Potom sa hodnota polynómu nezmení, ak vykonáme:

$kk_{j+1} = kk_{j+1} - 1$, $kk_j = kk_j \bmod 10$ ($c \cdot (-10)^x = (c-10) \cdot (-10)^x - (-10)^{x+1}$). Ak je ale $kk_{j+1} = 0$, dostali by sme záporný koeficient, čo predpokladáme, že sa nestane. Vtedy priradenia trochu obmeníme: $kk_j = kk_j \bmod 10$, $kk_{j+1} = 9kk_{j+2} = kk_{j+2} + 1$ ($c \cdot (-10)^j = (c-10) \cdot (-10)^j + 9 \cdot (-10)^{j+1} + (-10)^{j+2}$) ($(-10) \cdot (-10)^{j+1} + 9 \cdot (-10)^{j+1} = -(-10)^{j+1} = 10 \cdot (-10)^j$).

Použitím tohoto pravidla na každý koeficient polynómu väčší ako 9 dostaneme polynóm, ktorého koeficienty sú nezáporné a menšie ako 10, dá sa jednoduchým použitím koeficientov ako cifier dostať číslo v mínus-desiatkovej sústave, ktorého hodnota je p .

Je jasné, že pôvodný polynóm môže mať $l + 1$ koeficientov, kde l je počet cifier p v (10) sústave. Aplikovanie pravidla môže počet koeficientov zväčšiť maximálne o 2, teda maximálny počet cifier je $l + 3$, teda algoritmus je konečný.

```
const MAXCIF = 15;
var kk:array[0..MAXCIF] of integer;
    p,i,j:integer;
begin
  writeln;
  write('Zadaj P :'); readln(p);
  for i:=0 to MAXCIF do kk[i]:=0;
  i:=0;
  while p>0 do
    begin
      if odd(i) then
        begin
          kk[i]:=kk[i]+10-(p mod 10);
          kk[i+1]:=kk[i+1]+1
        end
    end
```

```

else
    kk[i]:=kk[i] + (p mod 10);
    inc(i); p:=p div 10
end;
for j:= 0 to i do
    if kk[j]>9 then
        begin
            if kk[j+1]>0 then dec(kk[j+1])
            else
                begin
                    kk[j+1]:=9;
                    kk[j+2]:=kk[j+2]+1;
                    if j+2>i then i:=j+2;
                end;
            kk[j]:=kk[j]-10
        end;
    k:=0;
    for j:= i downto 0 do k:=10*k+kk[j];
    writeln('Vstupna hodnota musi byt ',k)
end.

```

P – III – 4

Základná myšlienka riešenia úlohy je založená na tom, že počas čítania slova w_2 si budeme v slove w_1 pamätať, pokiaľ až sa dosiaľ načítaná časť w_2 zhoduje so začiatkom w_1 .

Označme M dĺžku slova w_1 , N dĺžku slova w_2 . Keďže M je omnoho menšie ako N , môžeme ho považovať za konštantu.

Pre náš algoritmus je potrebné uchovať slovo w_1 vo fronte. Zvoľme nasledujúci tvar: Slovo w_1 uložíme do fronty a za každý znak, ktorý je posledným znakom dosiaľ zhodnej časti w_1 a w_2 , uložíme špeciálny znak ' '. Okrem toho budeme potrebovať mať uložené počítadlo výskytov w_1 vo w_2 . Odlíšme toto počítadlo od dosiaľ použitej abecedy 'a'..'z', ' ' použitím znakov '0', '1'.

Zavedme nasledujúce označenie: Z nech je ľubovoľný znak frontu z abecedy 'a'..'z' (potom postupnosť Z . označuje znak frontu, ktorý je zatiaľ posledným zhodným znakom medzi w_1 a časťou w_2), Q nech je práve spracúvaný znak slova w_2 , C nech je symbolické označenie počítadla výskytov, D nech je označenie počítadla reprezentujúceho hodnotu o 1 väčšiu ako C .

Vykonávanie algoritmu môžeme zapísať nasledujúcimi pravidlami:

- (0) $Z \rightarrow Z.$, ak $Z=Q$ a Z je prvý znak frontu (potenciálny začiatok výskytu w_1 vo w_2)
- (1) $.Z \rightarrow Z.$, ak $Z=Q$ (zhoduje sa aj ďalší znak)
- (2) $.Z \rightarrow Z$, ak $Z \neq Q$ (ďalší znak sa nezhoduje $\Rightarrow$ nenašli sme podslovo)
- (3) $.C \rightarrow D$ (celé w_1 sa vyskytovalo vo $w_2 \Rightarrow$ zarátame výskyt)

Po prepísaní do Froscaľu máme riešenie:

```
repeat                                     okopírujeme  $w_1$  do frontu
  PUT(INP);
  NEXT
until INP='*';
NEXT;
PUT('0');                                zatiaľ bolo 0 výskytov
```

Nášmu označeniu zodpovedajú $Q=INP$, $Z=TOP$ (lebo k inému znaku frontu ako k TOP nemáme prístup).

```
repeat
  PUT('*');                               zarážka proti zacykleniu
  PUT(TOP);
  if INP=TOP then PUT('..');              pravidlo (0)
  GET;

while TOP<>'*' do
  begin
    if TOP='..' then                      pravidlá (1,2) - začiatok
    begin
      GET;
      if TOP<>INP then begin PUT(TOP); GET end (2)
    else
      begin
        PUT(TOP); GET;
        if (TOP='0') or (TOP='1') or (TOP='*') then
        begin                               (2,3)
          while TOP='1' do begin PUT('0'); GET end;
          PUT('1');
          if TOP<>'*' then GET;
          while TOP<>'*' do begin PUT(TOP); GET end;
        end
        else PUT('..')                      (2)
      end
    end
  else begin PUT(TOP); GET end; ak sa nedá aplikovať
  end;                                     ani jedno pravidlo, zober ďalší znak
  GET;
NEXT;                                     ďalšie Q
```

```
until INP='?';
```

Nakoniec vypíšeme výsledok v požadovanom tvare:

```
repeat
  if (TOP='0') or (TOP='1') then write(TOP);
  GET
until TOP='?'
```

Stanovenie zložitosti riešenia:

Vo fronte je uchovaných max. $L = 2M + 1 + \log V$ znakov (V je počet výskytov, $V \leq N$). Keďže M môžeme považovať za konštantu, priestorová náročnosť navrhovaného algoritmu je logaritmická vzhľadom k dĺžke vstupného slova. Pre každý znak slova w_2 spracujeme každý znak frontu, celková časová zložitosť je teda $O(NL) = O(N \log V) = O(N \log N)$.

Korespondenční seminář je jednou z forem péče o talentované žáky. Vznikl ve 24. ročníku MO proto, aby bylo možno věnovat individuální péči i těm žákům, kteří neměli možnost navštěvovat speciální školy a pracovat v tamních seminářích. Nyní, kdy existují i krajské korespondenční semináře a kdy speciální školy s třídami zaměřenými na matematiku najdeme v každém kraji, je cílem tohoto semináře zlepšit individuální přípravu všech studentů, kteří prokázali své schopnosti a matematický talent v předchozích ročnících matematické olympiády. Korespondenční seminář tak nadále zůstává důležitou součástí přípravy na mezinárodní matematickou olympiádu.

K účasti v korespondenčním semináři jsme pozvali všechny špičkové řešitele kategorie A spolu s těmi studenty, kteří nějak vynikli v krajských kolech kategorií B a C předchozího ročníku MO. V průběhu 41. ročníku MO jim bylo postupně zasláno 5 sérií poměrně náročných úloh, jejichž texty najdete na následujících stranách. Došlá řešení pak byla opravena, ohodnocena a s rozmnoženým komentářem vrácena účastníkům semináře. Nejlepšími v celkovém hodnocení byli:

1. *Pavel Růžička*, 4. ročník G, kpt. Jaroše, Brno
2. *Pavel Vrbický*, 4. ročník G, kpt. Jaroše, Brno
3. *Josef Menšík*, 4. ročník G, kpt. Jaroše, Brno
4. *Richard K. Kollár*, 4. ročník GAM, Bratislava
5. *Filip Sajdák*, 3. ročník G, V. Okružná, Žilina

Korespondenční seminář byl řízen tajemníkem ÚV MO RNDr. *Karlem Horákem*, CSc., který se staral o výběr úloh a prováděl i redakci komentářů. Opravu pak zajišťovalo několik pracovníků MÚ ČSAV a několik studentů a aspirantů MFF UK Praha (všichni jsou bývalí olympionici).

1.1 V rovině je dána množina E 1991 bodů, z nichž některé dvojice jsou spojeny čarou. Předpokládejme, že pro každý bod $z \in E$ existuje v E aspoň 1953 dalších bodů, s kterými je uvedený bod spojen čarou. Dokažte, že v E existuje šest bodů, z nichž každé dva jsou spojeny čarou.

1.2 V ostroúhlém trojúhelníku ABC postupně označme M střed strany BC , P ten bod úsečky AM , pro který je $|PM| = |BM|$, H patu kolmice spuštěné z bodu P na stranu BC , Q průsečík strany AB s přímkou procházející bodem H , která je kolmá na PB , a R průsečík strany AC s přímkou procházející bodem H , která je kolmá na PC . Dokažte, že strana BC daného trojúhelníku se dotýká kružnice opsané trojúhelníku HQR .

1.3 Dokažte, že

$$\sum_{k=0}^{995} \frac{(-1)^k}{1991-k} \binom{1991-k}{k} = \frac{1}{1991}.$$

1.4 Je dáno přirozené číslo n a celá čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$, z nichž žádné není dělitelné n , dokonce ani jejich součet není n dělitelný. Dokažte, že existuje aspoň n různých posloupností $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ nul a jedniček takových, že n dělí součet $e_1 a_1 + e_2 a_2 + \dots + e_n a_n$.

1.5 Označme α kladný kořen rovnice $x^2 = 1991x + 1$ a pro kladná celá čísla m, n označme

$$m * n = mn + [\alpha m][\alpha n],$$

kde $[x]$ je celá část čísla x . Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla p, q, r platí

$$(p * q) * r = p * (q * r).$$

1.6 Dva studenti A a B hrají následující hru: Každý z nich napíše na lístek papíru kladné celé číslo a dá lístek rozhodčímu. Ten napíše na tabuli dvě čísla, z nichž jedno je rovno součtu čísel napsaných oběma hráči. Poté se rozhodčí zeptá studenta A : „Můžeš říci číslo napsané soupeřem?“ Je-li jeho odpověď „ne“, rozhodčí se zeptá na totéž hráče B . Jestliže i B odpoví záporně, zeptá se rozhodčí opět hráče A , atd. Předpokládejme, že oba studenti jsou inteligentní a pravdomluvní. Dokažte, že po konečném počtu otázek jeden z nich odpoví „ano“.

1.7 Najděte maximální hodnotu součtu

$$\sum_{i < j} x_i x_j (x_i + x_j)$$

kde n -tice $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ splňují podmínky $x_i \geq 0$ ($1 \leq i \leq n$) a $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.

2.1 Uvnitř trojúhelníku ABC je dán bod P . Označme P_1, P_2 paty kolmic spuštěných z bodu P na přímky AC a BC a Q_1, Q_2 nechť jsou paty kolmic spuštěných z bodu C na přímky AP a BP . Dokažte, že průsečík přímek Q_1P_2 a Q_2P_1 leží na přímce AB .

2.2 Předpokládejme, že a, b, c jsou celá čísla a p liché prvočíslo. Jestliže $f(x) = ax^2 + bx + c$ je druhou mocninou celého čísla pro $2p - 1$ po sobě jdoucích celých čísel x , pak p dělí $b^2 - 4ac$. Dokažte.

2.3 Nechť a je racionální číslo, $0 < a < 1$, a nechť

$$\cos 3\pi a + 2 \cos 2\pi a = 0.$$

Dokažte, že $a = \frac{2}{3}$.

2.4 Označme O střed kulové plochy opsané danému čtyřstěnu $ABCD$, středy jeho stran BC, CA, AB označme po řadě L, M, N a předpokládejme, že $|AB| + |BC| = |AD| + |DC|$, $|BC| + |CA| = |BD| + |DA|$ a $|CA| + |AB| = |CD| + |DB|$. Dokažte, že $|\sphericalangle LOM| = |\sphericalangle MON| = |\sphericalangle NOL|$.

2.5 Je dán trojúhelník ABC s úhlem $\alpha = 60^\circ$. Sestrojme rovnoběžku VF se stranou AC , kde V je střed kružnice vepsané a F bod ležící na straně AB . Jestliže pro bod P na straně BC platí $3|BP| = |BC|$, pak $|\sphericalangle BFP| = \frac{1}{2}\beta$.

2.6 Jsou dána reálná čísla a, b, c taková, že existuje právě jeden čtverec, jehož všechny vrcholy leží na kubické křivce $y = x^3 + ax^2 + bx + c$. Zjistěte velikost strany takového čtverce.

2.7 Jsou dány dvě celočíselné funkce f a g , jež jsou definovány pro všechna celá čísla a splňují následující dvě podmínky:

- (a) $f(m + f(f(n))) = -f(f(m + 1)) - n$ pro všechna celá čísla m a n ;
- (b) g je mnohočlen s celočíselnými koeficienty a $g(n) = g(f(n))$ pro všechna celá n .

Určete $f(1991)$ a tvar mnohočlenu g .

3.1 Uvažujme množinu S v rovině, která obsahuje n bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Dokažte, že existuje množina P obsahující $2n - 5$ bodů s touto vlastností: Uvnitř každého trojúhelníku, jehož vrcholy patří do S , leží bod množiny P .

3.2 Označme a_n poslední nenulovou číslici dekadického rozvoje čísla $n!$. Zjistěte, zda je posloupnost (a_n) od jistého členu počínaje periodická.

3.3 Je dán mnohočlen $f(x) = x^{1991} + a_1x^{1990} + \dots$ s celočíselnými koeficienty. Ukažte, že počet různých celočíselných kořenů mnohočlenu $g(x) = f^2(x) - 9$ nemůže být větší než 1995.

3.4 V rovině je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Předpokládejme, že kružnice s průměrem AB protíná přímku CC' v bodech M, N a přímku BB' v bodech P, Q , kde CC' a BB' jsou výšky trojúhelníku ABC . Dokažte, že body M, N, P, Q leží na jedné kružnici.

3.5 Náhrdelník A obsahuje 14 korálků a náhrdelník B 19 korálků. Dokažte, že pro každé liché přirozené číslo n existuje způsob, jak všech 33 korálků očíslovat čísla z množiny

$$\{n, n + 1, n + 2, \dots, n + 32\}$$

tak, že každé číslo použijeme jen jednou a sousední korálky budou označeny nesoudělnými čísly. (Na náhrdelník se díváme jako na kružnici s korálky, z nichž každý má právě dva sousední.)

3.6 Pravoúhelníkový list papíru o rozměrech $a \times b$ je rozřezán na obdélníkové kousky, z nichž každý má jednu stranu délky 1. Dokažte, že aspoň jedno z čísel a, b je celé.

3.7 V rovině je dáno n bodů. Vyznačme středy všech úseček s krajními body v daných bodech. Jaký je nejmenší možný počet takto označených bodů?

4.1 V daném trojúhelníku ABC označme A_1, B_1, C_1 středy stran BC, CA, AB . Jaký je nejmenší možný obsah průniku trojúhelníků $A_1B_1C_1$ a KLM , jestliže body K, L, M leží na úsečkách AB_1, BC_1 , resp. CA_1 ?

4.2 Uvažujme konvexní mnohoúhelník s následující vlastností: jestliže všechny jeho strany posuneme vně o jednotkovou vzdálenost, vytvoří odpovídající přímky mnohoúhelník podobný danému mnohoúhelníku. Dokažte, že takovému mnohoúhelníku lze vepsat kružnici.

4.3 Součet stovky přirozených čísel, z nichž žádné není větší než 100, je roven 200. Dokažte, že z nich lze vybrat několik čísel, jejichž součet je roven 100.

4.4 Uvažujme n závaží s celočíselnou hmotností, jež jsou rozdělena do k skupin stejné hmotnosti ($k \geq 2$). Dokažte, že lze nejméně k různými způsoby odstranit jedno ze závaží tak, aby zbývajících $n - 1$ závaží už nešlo rozložit na k skupin stejné hmotnosti.

4.5 V rovině je dáno $2n$ bodů — n modrých a n červených, přičemž žádné tři body neleží v přímce. Dokažte, že je možno sestavit n úseček tak, že každá z nich má jeden krajní bod modrý a jeden červený, přičemž žádné dvě úsečky nemají společný bod.

4.6 Dokažte, že na množině $\mathbb{Z}_+$ celých nezáporných čísel existuje právě jedna binární operace $\circ$ s následujícími vlastnostmi:

- (1) $a \circ b = b \circ a$;
- (2) jestliže $a \circ b = c$, je $b \circ c = a$;
- (3) jestliže $a \circ b > c$, pak $b \circ c < a$ nebo $a \circ c < b$.

Najděte pravidlo umožňující pro daná čísla $a, b \in \mathbb{Z}_+$ vypočítat $a \circ b$.

4.7 Do rovnoběžníku P_1 je vepsán rovnoběžník P_2 , do kterého je vepsán další rovnoběžník P_3 , jehož strany jsou rovnoběžné se stranami P_1 . Dokažte, že alespoň jedna ze stran rovnoběžníku P_3 je rovna nejméně jedné polovině strany P_1 , která je s ní rovnoběžná.

5.1 Je dáno přirozené číslo n . Jestliže pro libovolné reálné x platí

$$a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx \geq -1,$$

splňují čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ nerovnost

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq n.$$

Dokažte.

5.2 Na tětivách AB a $A'B'$ dané kružnice jsou zvoleny body C, C' tak, že přímky AA', BB' a CC' mají společný bod P . Označíme-li

$$\begin{aligned} t &= |AP| \cdot |A'P|, \\ s &= |AC| \cdot |CB|, \\ s' &= |A'C'| \cdot |C'B'|, \\ q &= |CP|, \quad q' = |C'P'|, \end{aligned}$$

pak platí

$$\sqrt{\frac{s'}{s}} = \frac{q'}{q} = \frac{s' + q'^2}{t} = \frac{t}{s + q^2}.$$

Dokažte.

5.3 V rovině je dán rovnostranný trojúhelník ABC o straně 1. První hráč vybere bod X na straně AB , druhý bod Y na straně BC a nakonec zas první hráč zvolí bod Z na straně CA .

a) Cílem prvního hráče je dostat trojúhelníku byl co nejmenší. Jakého největšího obsahu může první hráč dosáhnout při optimální hře druhého?

b) Řešte tutéž úlohu pro obvod místo obsahu.

5.4 Je dán mnohočlen p s celočíselnými koeficienty. Pro libovolné přirozené číslo n označme a_n součet číslic v dekadickém zápisu čísla $p(n)$. Dokažte, že existuje číslo, které se v posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \dots$ vyskytuje nekonečněkrát.

5.5 V rovině je dán obrazec, který je průnikem n kruhů a obsahuje aspoň dva body. Dokažte, že hranici takového obrazce lze vyjádřit jako sjednocení nejvýše $2n - 2$ kruhových oblouků.

5.6 V rovině je dána kružnice k a uvnitř ní bod P . Uvažujme čtyřstěny $ABCD$, jejichž stěny jsou shodné trojúhelníky a stěna ABC je vepsána do kružnice k tak, že bod P je jejím těžištěm. Pro které body P uvnitř kružnice k takový čtyřstěn existuje? Dokažte, že vrcholy D takových čtyřstěnů leží vždy v jednom ze dvou bodů prostoru, jež jsou souměrné podle dané roviny.

5.7 Mezi n -místnými čísly, jejichž zápis v desítkové soustavě neobsahuje žádnou nulu, najděte takové, jehož rozdíl od součinu jeho číslic je

- a) nejmenší;
- b) největší.

33. mezinárodní matematická olympiáda

se konala 10.–21. července 1992 v Moskvě, hlavním městě Ruska. Olympiády se zúčastnilo 322 žáků z 56 zemí a mimo vlastní soutěž ještě dalších 29 studentů z osmi zemí bývalého SSSR. Výsledky jednotlivých zemí, jejichž studenti měli v souhrnu nejvíce bodů, ukazuje následující tabulka:



	ceny			body
1. ČLR	6			240
2. USA	3	3		181
3. Rumunsko	2	2	2	177
4. Spolčenství nezáv. států	2	3		176
5. Velká Británie	2	2	2	168
6. Rusko	2	2	2	158
7. Německo	0	4	2	149
8.–9. Maďarsko	1	3	1	142
8.–9. Japonsko	1	3	1	142
10.–11. Vietnam	1	2	3	139
10.–11. Francie	1	3	1	139
12. Jugoslávie		2	4	136
13. Československo		2	3	134

I. cenu získalo celkem 26 soutěžících, kteří měli 32–42 bodů, II. cena se udělovala za 24–31 bodů a dostalo ji 55 soutěžících, o III. cenu se s 14–23 body podělili 74 studenti. Celkem tedy bylo rozděleno 155 „medailí“.

Celkově byl z našich nejlepších *Michal Stehlík* následován *Michalem Ku-
bečkem*, *Martinem Niepelem*, *Lubošem Motlem*, *Pavlem Růžičkou* a *Dan-
ielem Štefankovičem*. Jejich podrobnější výsledky vidíte v připojené ta-
bulce.

Naše družstvo vedli doc. *Leo Boček* z MFF UK Praha a prof. *Jozef Moravčík* z Vysoké školy dopravní v Žilině.

Umístění	Body za úlohu						Body	Cena
	1	2	3	4	5	6		
27.–31. Michal Stehlík, 3. roč. gymnázia Brno, tř. kpt. Jaroše	7	3	7	2	7	5	31	II.
47.–50. Michal Kubeček, 3. roč. gymnázium Praha, Korunní	7	7	7	1	0	6	28	II.
86.–92. Martin Niepel, 2. roč. gymnázia A. Markuša, Bratislava	7	3	1	5	0	6	22	III.
93.–99. Luboš Motl, 4. roč. gymnázia Plzeň, Opavská	5	2	1	7	0	6	21	III.
108.–114. Pavel Růžička, 4. roč. gymnázia Brno, tř. kpt. Jaroše	5	0	1	2	7	4	19	III.
156.–169. Daniel Štefankovič, 3. roč. gymnázia A. Markuša, Bratislava	5	4	0	0	0	4	13	
Celkem 36 19 17 17 14 31 134								

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Najděte všechna celá čísla a , b , c , pro která je $1 < a < b < c$ a číslo $(a-1)(b-1)(c-1)$ je dělitelem čísla $abc-1$.

(Nový Zéland)

2. Nechť $\mathbb{R}$ značí množinu všech reálných čísel. Najděte všechny funkce

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pro které platí

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

(Indie)

3. V prostoru je dáno 9 bodů, z nichž žádné čtyři neleží v rovině. Každá dvojice těchto bodů je spojena úsečkou a každá tato úsečka může být obarvena modře, nebo červeně, nebo může zůstat neobarvena. Najděte nejmenší hodnotu n tak, aby při libovolném obarvení právě n úseček obsahovala množina obarvených úseček nutně trojúhelník, jehož všechny strany mají stejnou barvu.

(ČLR)

4. V rovině je dána kružnice $\mathcal{C}$, přímka $\mathcal{L}$ dotýkající se $\mathcal{C}$ a bod M na přímce $\mathcal{L}$. Najděte množinu všech bodů P následující vlastnosti: Na přímce $\mathcal{L}$ existují body Q, R tak, že M je středem úsečky QR a kružnice $\mathcal{C}$ je trojúhelníku PQR vepsána.

(Francie)

5. Nechť (O, x, y, z) je pravoúhlá soustava souřadnic v prostoru a S konečná množina bodů tohoto prostoru. Nechť S_x, S_y, S_z jsou po řadě množiny kolmých průmětů všech bodů množiny S do rovin Oyz, Oxz, Oxy . Dokažte, že

$$|S|^2 \leq |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|,$$

kde $|A|$ značí počet prvků konečné množiny A .

Poznámka: Kolmým průmětem bodu do roviny rozumíme patu kolmice vedené tímto bodem na rovinu.

(Itálie)

6. Pro každé celé číslo n označme $S(n)$ největší celé číslo, pro které platí: Pro každé kladné celé číslo $k, 1 \leq k \leq S(n)$, lze číslo n^2 napsat jako součet k druhých mocnin kladných celých čísel.

a) Dokažte, že $S(n) \leq n^2 - 14$ pro každé $n \geq 4$.

b) Najděte celé číslo n , pro které je $S(n) = n^2 - 14$.

c) Dokažte, že existuje nekonečně mnoho celých čísel n , pro která je $S(n) = n^2 - 14$.

(Velká Británie)

Řešení úloh

1. (Podle *M. Niepela* z gymnázia A. Markuša v Bratislavě.) Zřejmě platí implikace

$$m \geq n > 1 \Rightarrow \frac{m}{m-1} \leq \frac{n}{n-1}.$$

Jelikož $a \geq 2$, $b \geq 3$ a $c \geq 4$, je

$$\frac{a}{a-1} \leq 2, \quad \frac{b}{b-1} \leq \frac{3}{2}, \quad \frac{c}{c-1} \leq \frac{4}{3},$$

a tedy

$$\frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)} < \frac{abc}{(a-1)(b-1)(c-1)} \leq 4.$$

Pro poměr

$$p = \frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)}$$

tedy přicházejí v úvahu pouze hodnoty $p = 1$, $p = 2$ a $p = 3$. Pro $p = 1$ by ale muselo platit $ab + bc + ca = a + b + c$, tj. $a(b-1) + b(c-1) + c(a-1) = 0$, což odporuje daným předpokladům. Budeme tedy řešit v oboru přirozených čísel rovnice

$$\frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)} = 2, \quad \frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)} = 3.$$

Nejdříve první rovnici. Je-li $a \geq 4$, je $b \geq 5$, $c \geq 6$, a tedy

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)} < \\ &< \frac{a}{a-1} \cdot \frac{b}{b-1} \cdot \frac{c}{c-1} \leq \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} = 2, \end{aligned}$$

což nejde. Je proto $a < 4$. Protože $abc - 1 = 2(a-1)(b-1)(c-1)$, musí být abc číslo liché, je tedy nutně $a = 3$. Pro b, c pak máme rovnici $3bc - 1 = 4(b-1)(c-1)$ a po úpravě $(b-4)(c-4) = 11$, takže vzhledem k předpokladu $b < c$ je $a = 3$, $b = 5$, $c = 15$ jediné řešení při $p = 2$.

Přejdeme k rovnici $abc - 1 = 3(a-1)(b-1)(c-1)$. Kdyby bylo $a \geq 3$, bylo by $b \geq 4$, $c \geq 5$ a $3 < \frac{a}{a-1} \cdot \frac{b}{b-1} \cdot \frac{c}{c-1} \leq 2,5$. Je proto nutně $a = 2$, pro b, c pak máme rovnici $3(b-1)(c-1) = 2bc - 1$, po úpravě $(b-3)(c-3) = 5$ s jediným řešením $b = 4$, $c = 8$.

Úloha má právě dvě řešení:

$$(a, b, c) = (3, 5, 15) \text{ a } (a, b, c) = (2, 4, 8).$$

2. Označme $f(0) = a$. Položíme-li $y = 0$, dostaneme $f(x^2 + a) = (f(x))^2$, položíme-li $x = 0$, dostaneme

$$f(f(y)) = y + a^2. \quad (1)$$

Z druhé rovnice vidíme, že f je funkce prostá a zobrazuje $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Kromě toho je $f(a) = a^2$, $f(f(-a^2)) = 0$. Je tedy $f(x^2 + a) = (f(x))^2 + f(f(-a^2))$. Aplikujeme-li na obě strany funkci f , dostaneme užitím daného vztahu pro f a (1) rovnost

$$x^2 + a + a^2 = f(-a^2) + (x + a^2)^2,$$

neboli

$$2a^2x = a + a^2 - a^4 - f(-a^2).$$

Jelikož uvedená rovnost platí pro každé $x \in \mathbb{R}$, je nutně $a = 0$, $f(0) = 0$, a tedy

$$f(x^2) = (f(x))^2, \quad f(f(x)) = x \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

Zvolíme-li pro dané x hodnotu y tak, aby bylo $f(y) = -x^2$, dostaneme z daného vztahu rovnost $f(-x^2) = -f(x^2)$. Funkce f je tedy lichá, zobrazuje kladná čísla na kladná a záporná čísla na záporná.

Předpokládejme, že existuje kladné číslo x tak, že $f(x) \neq x$. Položme $x = z^2$ a předpokládejme, že je například $z^2 - f(z^2) > 0$. Pak je $f(z^2 - f(z^2)) = f(z^2 + f(-z^2)) = -z^2 + f(z^2) < 0$. To je spor s tím, že obrazem kladného čísla je číslo kladné, podobně dojdeme ke sporu pro $z^2 - f(z^2) < 0$. To znamená, že pro všechna kladná x je $f(x) = x$, a protože f je lichá, platí to i pro x záporná.

Dané funkcionální rovnici vyhovuje pouze funkce $f(x) = x$.

Jiné řešení (*M. Kubeček z gymnázia v Praze 2, Korunní*). Kdyby pro některé $y \in \mathbb{R}$ platilo $y > f(y)$, dostali bychom pro $x = \sqrt{y - f(y)}$ rovnost

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2, \quad \text{tedy} \quad f(y) = y + (f(x))^2,$$

což vede ke sporu. Dále uvažujme nezápornou funkci $g(x) = f(x) - x$, která jak snadno ověříme, splňuje funkcionální rovnici

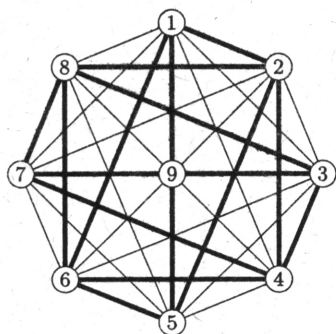
$$g(x^2 + g(y) + y) + g(y) = g(x)(2x + g(x)).$$

Kdyby byla funkce g kladná, platila by pro všechna reálná x nerovnost $g(x) > -2x$, g by tedy nemohla být omezená. Na druhé straně pro $x = 0$ dostaneme rovnost $g(y) + g(g(y) + y) = g^2(0)$, což znamená, že nezáporná funkce g musí být omezená. Proto existuje x_0 tak, že $g(x_0) = 0$. Pak je ale pro každé $y \in \mathbb{R}$ splněna rovnost

$$g(g(y) + y + x_0^2) + g(y) = 0,$$

což znamená, že $g(y) = 0$ pro všechna y , tedy $f(x) = x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

3. (Podle *M. Stehlíka* z gymnázia v Brně, tř. kpt. Jaroše.) Především je zřejmé, že existence obarvených úseček nijak nezávisí na poloze bodů v prostoru a všechny úvahy budou stejné i pro body v jedné rovině. Na příkladě ukážeme, že lze obarvit 32 úsečky tak, aby nevznikl jednobarevný trojúhelník. Dané body označme



Obr. 17

1, 2, 3, ..., 9, přičemž neobarvené zůstanou úsečky 15, 26, 37, 48, červeně obarvíme úsečky 91, 93, 95, 97, 24, 46, 68, 82, 12, 25, 56, 61 a 34, 47, 78, 83, ostatní obarvíme modře (obr. 17, kde 12345678 je pravidelný osmiúhelník a bod 9 je jeho středem).

Obarvíme-li 33 úsečky, existuje již nutně jednobarevný trojúhelník. Pak jsou totiž pouze 3 úsečky neobarvené, tedy nejvýše ze 6 bodů vychází aspoň jedna neobarvená úsečka. Jinými slovy existují 3 body tak,

že všech 8 úseček spojujících libovolný z těchto bodů s každým jiným bodem, je obarvených. Označme tyto body 1, 2, 3 a předpokládejme, že trojúhelník 123 není jednobarevný, jinak bychom byli hotovi. Pak můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že úsečky 12, 13 jsou modré a úsečka 23 červená. Dále rozlišíme dva případy:

a) Z bodu 1 vede další modrá úsečka do bodu 4 $\notin \{2, 3\}$. Pak je buď trojúhelník 423 červený, anebo trojúhelník 413 je modrý.

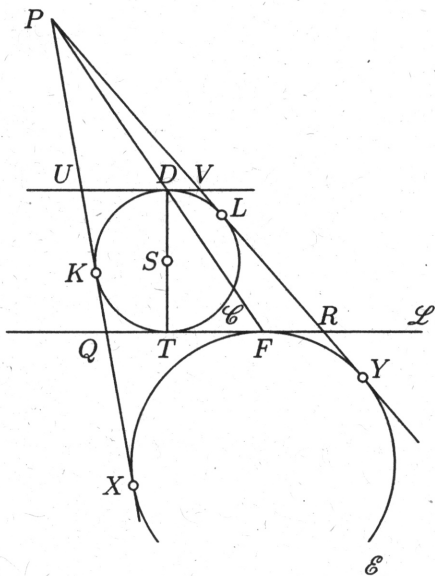
b) Všechny úsečky vycházející z bodu 1 (kromě úseček 12, 13) jsou červené. Mezi úsečkami spojujícími libovolné dva z bodů 4, 5, ..., 9 jsou

právě tři neobarvené, ostatní musejí být obarveny modře, jinak by každá červená úsečka spolu s bodem 1 dala červený trojúhelník. Nyní mohou nastat pouze tyto tři případy:

1. Všechny tři neobarvené úsečky vycházejí z jednoho bodu, pak ale jejich koncové body vytvoří modrý trojúhelník.
2. Dvě neobarvené úsečky vycházejí z téhož bodu, označení zvolíme tak, že to jsou úsečky 45, 46, další neobarvená úsečka je buď úsečka 56, nebo úsečka obsahující jeden z bodů různých od bodů 4, 5, 6, např. 7. Pak bude ale trojúhelník 589 modrý.
3. Žádné dvě neobarvené úsečky nemají společný bod — označení zvolíme tak, že to jsou úsečky 45, 67 a 89, pak však bude trojúhelník 468 modrý.

Tím jsme dokázali, že nejmenší hledané číslo s požadovanou vlastností je $n = 33$.

4. Předpokládejme, že PQR je trojúhelník opsaný kružnicí $\mathcal{C}$ (obr. 18), přičemž přímka QR je totožná s přímkou $\mathcal{L}$. Označme T bod dotyku přímky $\mathcal{L}$ a kružnice $\mathcal{C}$, S střed kružnice $\mathcal{C}$ a D bod souměrný s bodem T podle středu S . Průsečíky tečny kružnice $\mathcal{C}$ v bodě D s přímkami PQ , PR označme U , V . Stejnolehlost se středem P zobrazující bod U na bod Q zobrazuje trojúhelník PUV na trojúhelník PQR a kružnici $\mathcal{C}$ na kružnici $\mathcal{E}$, která se dotýká přímky $\mathcal{L}$ v bodě F , který je obrazem bodu D . V uvedené stejnoolehlosti se body K , L zobrazí na body X , Y , kde K , L jsou body dotyku kružnice $\mathcal{C}$ a přímek PQ , PR a body X , Y jsou body dotyku těchto přímek a kružnice $\mathcal{E}$. Je tedy $|KX| = |LY|$, tedy $|KQ| + |QX| = |RY| + |RL|$, tj. $|QT| + |QF| = |RF| + |RT|$. Přitom je $|QF| = |QT| + |TF|$, $|RT| = |RF| + |TF|$, takže $|QT| = |RF|$. Proto je bod M středem úsečky QR , právě když je středem úsečky TF , tedy právě



Obr. 18

když $SM \parallel DF$, tj. $SM \parallel PD$. Hledanou množinou je tedy polopřímka s počátečním bodem D rovnoběžná s SM a ležící v polorovině opačné k polorovině UVM (polopřímku bereme ovšem bez bodu D).

5. (Podle *P. Růžičky* z gymnázia v Brně, tř. kpt. Jaroše.) Rozdělme množinu S na disjunktní podmnožiny $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ tak, že do každé množiny Z_i dáme právě ty body množiny S , které mají stejnou souřadnici z . Pro každou množinu Z_i označme x_i počet těch bodů, které jsou průmětem aspoň jednoho bodu množiny Z_i do roviny Oyz , podobně y_i počet těch bodů, které jsou průmětem aspoň jednoho bodu množiny Z_i do roviny Oxz , a a_i označme počet bodů množiny Z_i . Je pak

$$|S_x| = \sum_{i=1}^n x_i, \quad |S_y| = \sum_{i=1}^n y_i, \quad |S| = \sum_{i=1}^n a_i,$$

$x_i y_i \geq a_i, |S_z| \geq \max(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Proto je

$$\begin{aligned} |S_z| \cdot |S_x| \cdot |S_y| &\geq \max_{1 \leq i \leq n} a_k \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i \geq \\ &\geq \max_{1 \leq i \leq n} a_k \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i y_i} \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} a_k} \sqrt{x_i y_i} \right)^2 \geq \\ &\geq \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} a_k} \cdot \sqrt{a_i} \right)^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = |S|^2. \end{aligned}$$

6. (Upraveno podle *Luboše Motla* z gymnázia v Plzni.)

a) K důkazu první části úlohy stačí dokázat, že přirozené číslo n^2 se nedá napsat jako součet $n^2 - 13$ druhých mocnin přirozených čísel. Předpokládejme, že tomu tak je, tj. $n^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \dots + z^2$, kde na pravé straně je $n^2 - 13$ sčítanců. Nejvýše čtyři z nich mohou být větší než 1, protože jinak by byl součet na pravé straně roven aspoň $5 \cdot 4 + (n^2 - 13 - 5) = n^2 + 2 > n^2$. Máme tedy $n^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + (n^2 - 17) \cdot 1^2$, takže $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 17$. Tato rovnice však nemá řešení v oboru přirozených čísel, což lehce ověříme přímým dosazením čísel 1, 2, 3, 4.

b) Ukážeme, že číslo 13 splňuje podmínky úlohy. Je totiž $13^2 = 12^2 + 5^2 = 12^2 + 4^2 + 3^2 = 8^2 + 8^2 + 5^2 + 4^2 = 8^2 + 8^2 + 4^2 + 4^2 + 3^2 = 8^2 + 6^2 + 6^2 + 5^2 + 2^2 + 2^2 = 8^2 + 8^2 + 4^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2$, takže 13^2 je součtem jednoho, dvou, tří, čtyř, pěti, šesti i sedmi druhých mocnin přirozených

čísel. Rozklad $13^2 = 8^2 + 8^2 + 4^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$ ukazuje, že 13^2 je také součtem devíti druhých mocnin přirozených čísel. Dále využijeme toho, že každou druhou mocninu $(2b)^2$ sudého čísla můžeme nahradit součtem $b^2 + b^2 + b^2 + b^2$ čtyř druhých mocnin, čímž se počet druhých mocnin v součtu zvýší o tři. Například číslo 8^2 můžeme nahradit součtem $4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2$ a každý sčítanec 4^2 můžeme postupně nahradit součtem $2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2$, konečně můžeme každý sčítanec 2^2 nahradit součtem $1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$. Tímto způsobem jsme ukázali, že dovedeme číslo 8^2 napsat postupně jako součet 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, ..., 64 druhých mocnin přirozených čísel. Podobně 4^2 dovedeme napsat jako součet 4, 7, 10, 13 a 16 druhých mocnin, číslo 2^2 jako součet čtyř druhých mocnin přirozených čísel. Vyjdeme-li tedy z rozkladu $13^2 = 8^2 + 8^2 + 4^2 + 4^2 + 3^2$ na pět druhých mocnin, dostaneme tak rozklady na součet 8, 11, 14, ... až na $64 + 64 + 16 + 16 + 1 = 161$ druhých mocnin přirozených čísel. Vyjdeme-li z rozkladu $13^2 = 8^2 + 8^2 + 4^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2$, tedy ze součtu sedmi druhých mocnin, můžeme tak dostat rozklad na 10, 13, 16, ... až $64 + 64 + 16 + 16 + 4 + 4 + 1 = 169$ druhých mocnin. Rozkladem součtu $8^2 + 8^2 + 4^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$ dostaneme postupně číslo 169 jako součet 12, 15, 18, ... až $64 + 64 + 16 + 1 + 1 + 4 + 1 + 1 + 1 = 153$ druhých mocnin přirozených čísel. Poslední rozklad obsahuje 151 jedniček a dvě devítky.

c) Ukážeme, že platí implikace

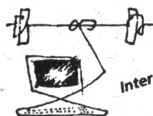
$$n \geq 8 \wedge S(n) = n^2 - 14 \Rightarrow S(2n) = 4n^2 - 14.$$

Předpokládejme tedy, že se číslo n^2 dá napsat jako k druhých mocnin přirozených čísel pro každé k , $1 \leq k \leq n^2 - 14$. Pak se dá také číslo $(2n)^2$ napsat jako k druhých mocnin přirozených čísel, která budou nyní vesměs sudá. Je-li totiž $n^2 = a^2 + b^2 + \dots$, je $(2n)^2 = (2a)^2 + (2b)^2 + \dots$. Nahradíme-li postupně číslo $(2a)^2$ součtem $a^2 + a^2 + a^2 + a^2$, číslo $(2b)^2$ součtem $b^2 + b^2 + b^2 + b^2$, vidíme, že se číslo $(2n)^2$ dá nejen napsat jako součet k , ale i jako součet $k + 3$, $k + 6$, $k + 9$, ..., $k + 3k = 4k$ druhých mocnin přirozených čísel. Jelikož k mohlo nabýt všech hodnot 1, 2, ..., $n^2 - 14$, dostáváme tak rozklad čísla $(2n)^2$ na součet r druhých mocnin přirozených čísel, kde r nabývá hodnot 1, 2, ..., $4n^2 - 62$, $4n^2 - 60$, $4n^2 - 59$ a $4n^2 - 56$. Kromě toho můžeme ale psát $(2n)^2 = 3n^2 + n^2$ a n^2 dovedeme napsat jako k druhých mocnin, $1 \leq k \leq n^2 - 14$, takže se dá $(2n)^2$ napsat jako součet $3n^2$ jedniček a k dalších druhých mocnin, tedy celkem jako $3n^2 + 2$, ..., $4n^2 - 14$ druhých mocnin přirozených čísel.

Jelikož $3n^2 + 1 \leq 4n^2 - 62$ pro $n > 8$, je tím dokázáno, že se dá číslo $(2n)^2$ napsat jako součet m druhých mocnin přirozených čísel, kde m je libovolné přirozené číslo splňující podmínku $m \leq 4n^2 - 14$. Tím jsme dokázali, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n s vlastností $S(n) = n^2 - 14$. Jsou to například všechna čísla tvaru $2^m \cdot 13$, kde m je přirozené číslo.

4. mezinárodní olympiáda v informatice

Čtvrtá mezinárodní olympiáda v informatice (IOI'92) pro středoškoly se konala ve dnech 12.–21. července 1992 v Bonnu pod záštitou UNESCO s přispěním několika desítek sponzorů, z nichž k nejvýznamnějším patřili IBM, APPLE, Springer Verlag, SIEMENS, Borland atd. Olympiády se zúčastnilo 166 soutěžících (z toho 5 dívek) ze 45 zemí ze všech kontinentů a navíc 5 dalších zemí vyslalo své pozorovatele.



4.
Internationale Olympiade
Bonn, Deutschland
in Informatik
IOI'92

Československý tým byl složen na základě výsledků studentů v celostátním kole matematické olympiády v kategorii P a podle výsledků testů, konaných v průběhu týdenního soustředění 11 vítězů v této kategorii, které se konalo na KU v Bratislavě. Složení našeho družstva bylo následující: *Matej Ondrušek*, student 3. ročníku gymnázia J. Hronca v Bratislavě, *Jan Kotas*, absolvent gymnázia na Mikulášském náměstí v Plzni, *Jan Kybic*, absolvent gymnázia v Korunní ulici v Praze a *Tomáš Vinař*, student 2. ročníku gymnázia na Šrobárově ulici v Košicích. Vedoucím delegace byl doc. *Václav Sedláček* z Masarykovy university v Brně a jeho zástupcem Mgr. *Richard Nemec* z Univerzity Komenského v Bratislavě.

V rámci vlastní soutěže byly řešeny 2 soutěžní úlohy, na které měli soutěžící vyhrazeno vždy 5 hodin čistého času. Úlohy byly vybrány v den jejich řešení mezinárodní porotou, složenou z vedoucích delegací všech zúčastněných států. Pro výběr byly vědeckou komisí soutěže předloženy vždy 3 úlohy. Každý student pak řešil úlohu na přiděleném osobním počítači. Výsledné produkty byly za přítomnosti studenta a vedoucího týmu testovány koordinátory, kteří je podrobili předepsaným testům a na jejich základě bodově ohodnotili tak, že maximální možný bodový zisk byl 100 bodů. Případné námítky ze strany delegací řešilo shromáždění koordinátorů, které rovněž stanovilo definitivní bodové hodnocení soutěžících. Ocenění zlatými, stříbrnými a bronzovými medailemi pak bylo dáno bodovým ziskem za obě úlohy.

Celkem bylo uděleno 13 zlatých (pro soutěžící se ziskem 198–200 bodů), 31 stříbrných (175–195 bodů) a 41 bronzových medailí (123–172 bodů). Českoslovenští soutěžící navázali na vynikající výsledky z předchozí olympiády a ve dvojnásobné konkurenci ve srovnání s předchozí olympiádou získali M. Ondrušek zlatou medaili (200 bodů), Jan Kotas (185 bodů) a Jan Kybic (190 bodů) medaile stříbrné. V neoficiální soutěži družstev, do níž byly sečteny body všech členů družstva, byl československý tým uveden mezi 12 nejúspěšnějšími družstvy se ziskem 645 bodů.

Mezinárodní olympiáda v programování se svým charakterem liší od naší kategorie P matematické olympiády především v tom, že účastníci řeší zadané úlohy na osobním počítači, který má každý soutěžící k dispozici. Zadání úlohy je mu k dispozici v angličtině a v rodném jazyku. Případné dotazy je možno klást pouze písemně přes mezinárodní jury, která dotaz předá vedoucímu delegace. Možné odpovědi na dotazy jsou jenom „ano“, „ne“, „bez komentáře“, a to pouze prvních 30 minut soutěže. Po skončení soutěže jsou úlohy soutěžících podrobeny testům. Na základě výsledků testů jsou úlohy obodovány. V žádném případě se neprovádí analýza zdrojového textu s ohledem na složitost navrhovaných algoritmů. Ostatně jak uvidíte z textu zadání úloh, byly v letošním roce vybrány mezinárodní jury obě úlohy, které bylo myslitelné řešit technikou backtracking. Trend v návrzích úloh je v současné době takový, že se uplatní úlohy typu spíše vytváření prostředků (tools) pro sérii úloh. Přestože naši soutěžící byli v rámci matematické olympiády orientováni poněkud jiným směrem, ukazuje se na základě jejich výsledků, že jejich průprava v psaní efektivních programů z hlediska paměťové či časové složitosti jim umožňuje úspěšné výsledky i v mezinárodních soutěžích s přímým použitím počítačů. Snad jenom větší pečlivost při návrhu testů omezujících podmínek pro vstupní data byla příčinou oněch nepatrných bodových ztrát, které nás dělily od dalších zlatých medailí. Přitom efektivita resp. osekávání možností pro backtracking nebyly vůbec zohledňovány ve výsledném bodovém ohodnocení, takže úloha trvající na počítači 1 sekundu byla ohodnocena stejně jako úloha trvající 8 hodin.

Mimo vlastní soutěž připravili organizátoři z Institutu pro matematiku a zpracování dat a z Institutu Gustava Stresemanna pod vedením dr. Petra Heyderhoffa bohatý kulturní, společenský a doprovodný program. Všichni účastníci soutěže byli přijati před zahájením soutěže starostou Bonnu, v průběhu zájezdu do Düsseldorfu byli přijati zemským ministrem školství, navštívili Kolín nad Rýnem, Heidelberg, poznali Bonn, jeho okolí i část Porýní. Sponzoři soutěže věnovali mimo jiné dr-

žitelům zlatých medailí hodnotné ceny a všem účastníkům věcné dárky. Při slavnostním vyhlášení výsledků byly tyto ceny předány řadou oficiálních osobností v čele s federálním ministrem školství SRN. Účastníkům olympiády poslal pozdravný telegram prof. Konrad Zuse.

Závěrem uvádíme doslovné znění úloh, které byly řešeny účastníky olympiády, abyste si na nich mohli prověřit svoje programátorské zkušenosti. Nezapomeňte dodržet všechna omezení a pokyny, jejichž nedodržení v soutěži by znamenalo bodovou ztrátu.

Texty soutěžních úloh

7. Ostrovy v moři

MORE je reprezentováno sítí velikosti N krát N . Každý OSTROV je „*“ v této síti. Vaší úlohou je zrekonstruovat MAPU ostrovů pouze z KÓDOVANÉ INFORMACE o horizontálním a vertikálním rozložení těchto ostrovů. Pro ilustraci tohoto kódování sledujte následující mapu:

*		*	*			1	2
		*	*	*		3	1
*		*		*		1	1 1
		*	*	*	*	5	
*	*		*		*	2	1 1
			*			1	
1	1	4	2	2	1		
1	2		3		2		
1							

Čísla napravo v každém řádku reprezentují pořadí a velikost každé skupiny ostrovů v tomto řádku. Například „1 2“ v prvním řádku znamená, že jeden ostrov je následován skupinou dvou ostrovů, které jsou obklopeny mořem nějaké délky nalevo i napravo od každé skupiny ostrovů. Podobně posloupnost „1 1 1“ pod prvním sloupcem znamená, že tento sloupec obsahuje tři skupiny, každá po jednom ostrovu, atd.

Zadání úlohy: Implementujte program, který opakuje následující kroky, dokud není úplně přečten vstupní soubor, který obsahuje několik takových bloků informací:

1. Přečti následující blok informací ze vstupního ASCII souboru (pro strukturu dat v tomto souboru viz příklad dále) a zobraz jej na obrazovce.

Každý blok informací je složen z velikosti čtvercové sítě, následované informacemi o řádcích a sloupcích. Popis každého řádku i sloupce se objevuje v jednom řádku souboru jako posloupnost čísel oddělených mezerami a ukončená 0.

2. Zrekonstruuje mapu (nebo všechny možné mapy, pokud je možné více než jedno řešení, viz Příklad-4 dále) a zobrazte je na obrazovce.

3. Zapište mapu (mapy) na konec výstupního ASCII souboru. Každé prázdné místo musí být reprezentováno dvojicí mezer. Každý ostrov nechť je reprezentován „*“ následovanou jednou mezerou. Různé mapy vyhovující stejným omezením nechť jsou odděleny prázdným řádkem. Pokud neexistuje řešení vyhovující popisům, indikujte to řádkem s textem „no map“. Řešení odpovídající různým blokům informací musí být oddělena řádkem s textem „next problem“.

Technická omezení:

Omezení-1: N nesmí být menší než 1 a větší než 8

Omezení-2: Uložte váš výsledný program do textového ASCII souboru C:\IOI\DAY-1\413-PROG.xxx.

Přípona .xxx je:

.BAS pro programy v BASICu, .C pro programy v jazyku C, .LCN pro LOGO programy, .PAS pro programy v PASCALu.

Omezení-3: Jméno vstupního ASCII souboru pro čtení kódované informace musí být C:\IOI\DAY-1\413-SEAS.IN.

Omezení-4: Jméno výstupního souboru pro zápis mapy (map) musí být C:\IOI\DAY-1\413-SEAS.OU.

Příklady:

6 Příklad-1. (viz problém v zadání): 6 je velikost
1 2 0 <-- začátek popisu řádků síť
3 1 0
1 1 1 0
5 0
2 1 1 0
1 0
1 1 1 0 <-- začátek popisu sloupců
1 2 0
4 0
2 3 0
2 0
1 2 0

4 Příklad-2. Řešení:sloupce: 1 2 3 4
0 řádek 1:
1 0 řádek 2: *
2 0 řádek 3: * *
0 řádek 4:
0
1 0
2 0
0

2 Příklad-3. Všimněte si, že neexistuje řešení
0 vyhovující těmto popisům
0
2 0
2 0

2 Příklad-4. Všimněte si, že existují dvě různé
1 0 mapy, vyhovující těmto popisům
1 0
1 0
1 0

Vzorové soubory:

Tyto správné příklady souborů jsou vám k dispozici v souborech:
C:\IOI\DAY-1\413-SEAS.IN a C:\IOI\DAY-1\413-SEAS.OU.

Upozornění: Úspěšný běh vašeho programu s těmito příklady nezaručuje nutně, že váš program je správný!!!

Bodové hodnocení:

Přečti blok informací ze vstupního souboru a zobraz jej ...	5 bodů
Zpracovávej všechny bloky informací postupně po jednom, dokud není úplně přečten celý vstupní soubor	10 bodů
Zrekonstruu jednu mapu pro každý blok informací (pokud existuje řešení) a zobraz ji.....	35 bodů
Zapiš výslednou mapu do výstupního souboru.....	5 bodů
Zrekonstruu všechny možné mapy (pokud existuje více ře- šení) a zobraz je	20 bodů
Zapiš všechny výsledné mapy do výstupního souboru správ- ně oddělené.....	10 bodů
Identifikuj bloky informací, které nemají řešení.....	5 bodů
Dodržení technických omezení	10 bodů

maximálně 100 bodů

8. Slézání hory

Klub horolezců má P členů očíslovaných 1 až P . Každý člen leze stejnou rychlostí a není rozdílu mezi rychlostí lezení nahoru a dolů. Horolezec číslo i spotřebuje denně $C(i)$ jednotek ZÁSOb a je schopen nést nejvýše $S(i)$ takových jednotek. Všechna $C(i)$ a $S(i)$ jsou celá čísla.

Předpokládejte, že horolezec s dostatečným množstvím zásob by potřeboval N dnů k dosažení vrcholu. Hora ale může být příliš vysoká, takže samotný horolezec není schopen nést všechny potřebné zásoby. Tudíž jistá SKUPINA horolezců začne na stejném místě a ve stejném čase. Horolezec, který se začne předčasně vracet ještě před dosažením vrcholu, odevzdá své nepotřebné zásoby ostatním horolezcům. Horolezci během expedice neodpočívají.

Vaší ÚLOHOU je najít rozvrh pro klub horolezců. Aspoň jeden horolezec musí dosáhnout vrcholu hory a všichni horolezci z vybrané skupiny se musí vrátit do startovního místa.

Zadání úlohy: Implementujte program, který dělá následující:

1. Přečte z klávesnice celé číslo N dnů potřebných k dosažení vrcholu, počet P horolezců v klubu a (pro všechna $1 \leq i \leq P$) hodnoty $S(i)$ a $C(i)$. Můžete předpokládat, že vstupní hodnoty jsou celá čísla. Zamítněte vstupy, které jsou nesmyslné.

2. Pokuste se najít plán pro slezání hory. Určete možnou skupinu $a(1), \dots, a(k)$ horolezců, kteří by měli být vybráni do skupiny a (pro všechna $1 \leq j \leq k$) množství zásob $M(j)$, které horolezec $a(j)$ ponese na startu.

Poznámka: Nemusí existovat plán pro všechny možné kombinace N , $S(i)$ a $C(i)$.

3. Vypište následující informace na obrazovce:

- Počet horolezců, kteří se skutečně zúčastní výpravy,
- celkové množství potřebných zásob,
- čísla horolezců $a(1), \dots, a(k)$,
- pro všechna $a(j)$ ($1 \leq j \leq k$) počáteční množství zásob $M(j)$, které ponese horolezec $a(j)$,
- den $D(j)$, kdy horolezec $a(j)$ začne sestupovat.

4. Rozvrh je OPTIMÁLNÍ, jestliže:

- počet vybraných horolezců je minimální a
- mezi všemi skupinami splňujícími podmínku a) jsou celkové spotřebované zásoby minimální.

Pokuste se najít řešení pokud možno nejbližší k optimálnímu.

Technická omezení:

Omezení-1: Uložte váš výsledný program do textového ASCII souboru C:\IOI\DAY-2\422-PROG.xxx. Přípona .xxx je: .BAS pro programy v BASICu, .C pro programy v jazyku C, .LCN pro LOGO programy, .PAS pro programy v PASCALu.

Omezení-2: Program musí zamítnout vstupy, kdy N je menší než 1 nebo větší než 100. P nesmí být menší než 1 ani větší než 20.

Vzorové soubory: Pro vaše potřeby je připraveno několik souborů obsahujících testovací data a vzory správných výstupů; podívejte se do adresáře C:\IOI\DAY-2.

Upozornění: Úspěšný běh vašeho programu s těmito příklady nezaručuje nutně, že váš program je správný!!!

Příklady: Následující text by mohl být dialogem s vaším programem, který může být i v rodném jazyce:

Dní na dosažení vrcholu:	4
Počet členů klubu:	5
Maximální zásoby horolezce	1:7
Denní spotřeba horolezce	1:1
Maximální zásoby horolezce	2:8
Denní spotřeba horolezce	2:2
Maximální zásoby horolezce	3:12
Denní spotřeba horolezce	3:2
Maximální zásoby horolezce	4:15
Denní spotřeba horolezce	4:3
Maximální zásoby horolezce	5:7
Denní spotřeba horolezce	5:1

2 potřební horolezci, potřebné množství zásob je 10.

Horolezci 1, 5 půjdou.

Horolezec 1 nese 7 a sestupuje po 4 dnu.

Horolezec 5 nese 3 a sestupuje po 1 dnu.

Naplánovat další výpravu? (Y/N) Y

Dní na dosažení vrcholu	:2
Počet členů klubu	:1
Maximální zásoby horolezce	1:3
Denní spotřeba horolezce	1:1

Uskutečnění výpravy není možné.

Naplánovat další výpravu? (Y/N) N

Bodové hodnocení:

Uživatelský dialog podle ilustračního příkladu	10 bodů
Nalezení řešení pro speciální případ, kdy všechna $C(i) = 1$ a všechna $S(i)$ jsou stejná	20 bodů
Nalezení řešení pro obecný případ	20 bodů
Nalezení řešení co nejbližší optimálnímu pro obecný případ	30 bodů
Detekce neřešitelných situací	10 bodů
Dodržení technických omezení	10 bodů

maximálně 100 bodů

RNDr. Andrej Blaho — doc. RNDr. Leo Boček, CSc.
RNDr. Karel Horák, CSc. — prof. RNDr. Jozef Moravčík, DrSc.
doc. RNDr. Václav Sedláček, CSc. — doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.
doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc.

**ČTYŘICÁTÝ PRVNÍ ROČNÍK
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
NA ZÁKLADNÍCH ŠKOLÁCH**

Vydala Jednota českých matematiků a fyziků,
Žitná 25, 117 10 Praha 1
jako svou publikaci č. 57-556-97
Sazbu programem $\text{\TeX}$ připravil Karel Horák
Vytiskla Olympia, a.s.,
Klimentská 1, Praha 1
1. vydání
Praha 1997

ISBN 80-7015-564-7



**matematická
olympiáda**

MO

ISBN 80-7015-564-7