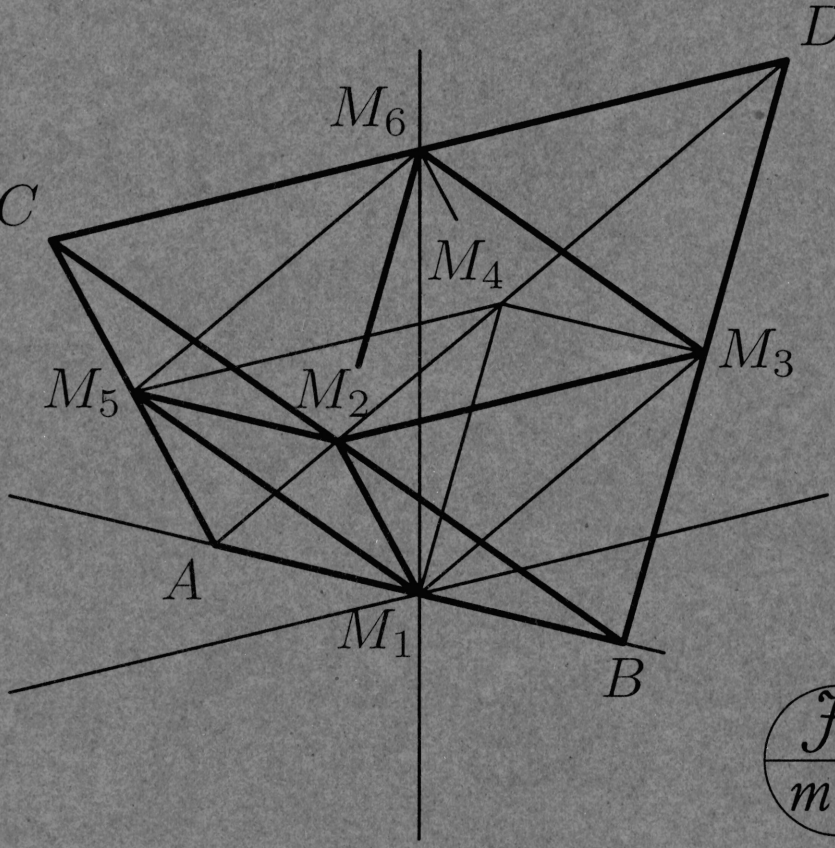
42. ročník matematické olympiády na středních školách

MO

42. ročník matematické olympiády na středních školách



JČ
m+f

ČTYŘICÁTÝ DRUHÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1992/1993

34. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

PÁTÁ MEZINÁRODNÍ OLYMPIÁDA V INFORMATICE

JEDNOTA ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYZIKŮ PRAHA

Za přispění spolupracovníků zpracovali
doc. RNDr. Leo Boček, CSc., RNDr. Karel Horák, CSc.,
prof. RNDr. Jozef Moravčík, DrSc.,
doc. RNDr. Václav Sedláček, CSc., doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.,
doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc.

ISBN 80-7015-888-3

Obsah

O průběhu 42. ročníku matematické olympiády 5
Výsledky celostátního kola 42. ročníku MO kategorie A 8
Výsledky celostátního kola 42. ročníku MO kategorie P 10
Nejúspěšnější řešitelé II. kola MO v kategoriích A, B, C a P 11

Kategorie C 26
Texty úloh 26
Řešení úloh 29

Kategorie B 38
Texty úloh 38
Řešení úloh 41

Kategorie A 50
Texty úloh 50
Řešení úloh 54

Kategorie P 68
Texty úloh 68
Řešení úloh 78

Korespondenční seminář ÚV MO 1992/93 103
Úlohy korespondenčního semináře 103
Řešení úloh korespondenčního semináře 106

34. mezinárodní matematická olympiáda 114
Texty soutěžních úloh 116
Řešení úloh 117

5. mezinárodní olympiáda v informatice 129
Texty soutěžních úloh 131

O průběhu 42. ročníku matematické olympiády

Soutěž Matematická olympiáda ve školním roce 1992/93 pořádaly pro žáky středních a základních škol Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR, Ministerstvo školství, mládeže a sportu SR ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků, Jednotou slovenských matematiků a fyziků a Matematickým ústavem AV ČR. Soutěž řídil ústřední výbor matematické olympiády (ÚV MO) prostřednictvím oblastních a okresních výborů matematické olympiády.

Cílem soutěže je vyhledávání žáků talentovaných v matematice, probouzení jejich hlubšího zájmu o matematiku a rozvíjení jejich matematických schopností. Ve školním roce 1992/93 se uskutečnil její 42. ročník.

Ústřední výbor MO pracoval ve složení, v němž byl jmenován ministerstvy školství ČR a SR na pětileté období při zahájení 39. ročníku. Předsedou ÚV MO byl doc. dr. Leo Boček, CSc., z MFF UK v Praze, tajemníky byli dr. Karel Horák, CSc., z MÚ AV ČR v Praze a dr. Jiří Binder, CSc., z PF UK v Praze.

V průběhu 42. ročníku MO se konala tři zasedání ÚV MO, první dne 2. prosince 1992 v Praze, druhé 26.–27. dubna 1993 na gymnáziu v Jevíčku při celostátním kole kategorie A a pak se ústřední výbor sešel ještě jednou 10. června 1993 na gymnáziu na třídě kpt. Jaroše v Brně. Bylo projednáváno hodnocení průběhu soutěže, zabezpečení celostátních soustředění úspěšných řešitelů MO včetně soustředění pro přípravu na MMO, korespondenční seminář ÚV MO a organizace dalších kol soutěže a v neposlední řadě i další spolupráce mezi českým a slovenským výborem olympiády.

V organizaci vlastní soutěže nedošlo k žádným podstatným změnám. Přes rozpad Československa na počátku roku 1993 proběhla všechna kola MO společně včetně závěrečných III. kol kategorií A a P (proto v ročence najdete zadání a řešení některých úloh ve slovenštině). Byla to však poslední společná celostátní kola, nicméně dle vzájemné dohody českého i slovenského organizačního výboru zůstanou nadále společné úlohy a termíny jednotlivých kol MO. Mezinárodních olympiád se poprvé účastnila samostatná družstva obou republik.

Pro žáky středních škol byla soutěž organizována ve čtyřech kategoriích A, B, C a P. Kategorie A byla určena žákům 3. a 4. ročníků středních škol, kategorie B byla pro žáky 2. ročníků a v kategorii C soutěžili žáci 1. ročníků. Pro žáky všech tříd středních škol byla určena ještě kategorie P, zaměřená na úlohy z programování a matematické informatiky.

V kategoriích A, B a C má I. kolo dvě části. V první části řeší soutěžící 6 úloh doma nebo v matematických kroužcích a mohou se přitom radit se svými učiteli, vedoucími kroužků apod. Druhá část má formu klauzurní práce, v níž řeší žáci tři úlohy v omezeném čase 4 hodin. Řešitelé, kteří úspěšně projdou prvním kolem, jsou pozváni do druhého (oblastního) kola soutěže, kde řeší čtyři úlohy opět v limitu čtyř hodin.

V kategoriích A a P se koná ještě třetí, celostátní kolo. V něm je vlastní soutěž rozdělena do dvou dnů. V kategorii A řeší soutěžící každý den tři úlohy v časovém limitu čtyři hodiny, v kategorii P ve stejném limitu vždy dvě úlohy.

Celostátní kolo se mělo podle dosud zaběhnutého cyklu původně konat v Praze. Jeho organizace v metropoli se však ukázala jako finančně příliš nákladná, a tak nakonec přijali Pražané nabídnutou pomoc malého města v srdci Malé Hané, jehož význam pro českou matematiku bude ještě doceněn.

Celostátní kolo 42. ročníku se tak uskutečnilo v Jevíčku ve dnech 25.–28. dubna 1993 (kategorie A) a 28. dubna až 1. května 1993 (kategorie P). Na zabezpečení soutěže včetně bohatého doprovodného programu pro soutěžící i členy ÚV MO se obětavě podíleli profesoři a pedagogický sbor jevíčského gymnázia včele s jeho ředitelem dr. *Dagem Hrubým.*

Vybraná družstva se zúčastnila mezinárodní matematické olympiády i mezinárodní olympiády v informatice. Těmto soutěžím je věnována samostatná kapitola v závěru této ročenky.

K matematické olympiádě vedle vlastní soutěže patří i řada doprovodných akcí pro talentované žáky. Z akcí pořádaných oblastními výbory MO k nim zejména patří semináře pro řešitele MO a instruktáže pro učitele. Pro nejúspěšnější řešitele oblastních kol MO a korespondenčních seminářů byla pořádána (většinou týdenní) soustředění.

Ústřední výbor MO zajišťoval dvě celostátní soustředění. Pro žáky nematurujících ročníků to bylo již tradiční soustředění řešitelů úloh MO a FO. Proběhlo ve dnech 6.–18. 6. 1993 v Jevíčku (naposledy společně pro úspěšné řešitele z Čech i Slovenska). Další soustředění bylo věnováno přípravě českého a slovenského družstva na mezinárodní matematickou olympiádu a konalo se 6.–13. května 1993 v Bratislavě. Vybraní čeští

i slovenští reprezentanti se společně s náhradníky v září 1993 zúčastnili společného týdenního přípravného soustředění před mezinárodní olympiádou v informatice. Soustředění se konalo na matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Komenského v Bratislavě pod vedením vedoucího družstva Slovenské republiky mgr. Richarda Nemce.

Soutěžní úlohy I. (domácího) kola všech kategorií matematické olympiády jsou publikovány v tzv. soutěžních letácích. Úlohy jsou dále zveřejňovány v časopisech *Matematika, fyzika, informatika* a *Rozhledy matematicko-fyzikální*. Na pomoc učitelům jsou pak rozesílány na školy komentáře k úlohám.

Po roce 1990 přestaly vycházet obvyklé ročenky MO, které uváděly všechny zajímavé výsledky, přehledy o počtu účastníků v jednotlivých regionech a zejména pak všechny úlohy jak naší, tak i mezinárodních olympiád včetně jejich řešení. Po ročence 40. ročníku vydané ještě péčí Státního pedagogického nakladatelství se až do jubilejního 50. ročníku objevily jen dvě ročenky (41. a 45. ročníku). Ročenky dalších ročníků MO však chyběly. Nyní se vám konečně dostává do ruky první z chybějících ročenek, a to péčí Ústředního výboru MO, Jednoty českých matematiků a fyziků a Polygrafického střediska Univerzity Palackého v Olomouci. Vzápětí vyjde i ročenka právě ukončeného 51. ročníku MO. Postupně by se tak měly objevit i ostatní chybějící ročenky, jejichž těžištěm je zejména bohatství velkého počtu zajímavých a originálních úloh. Těšíme se na váš ohlas a připomínky.

Autoři ročenky jménem Ústředního výboru MO děkují touto cestou všem organizátorům soutěže, především pak učitelům za jejich obětavou spolupráci a za péči, kterou věnují svým žákům. Zároveň vyzývají všechny zájemce o spolupráci při tvorbě zajímavých úloh. Zkuste zažít pocit radosti z toho, objevíte-li svou úlohu i se svým jménem v soutěžním letáku.

Návrhy na soutěžní úlohy pro kategorie A, B a C laskavě zasílejte na adresu předsedy úlohové komise MO doc. RNDr. Jaromíra Šimši, CSc., MÚ AV ČR, Žižkova 22, 616 00 Brno. Úlohová komise se schází zpravidla dvakrát ročně za účasti českých i slovenských kolegů.

Návrhy úloh vhodných pro kategorii P zasílejte na adresu doc. RNDr. Pavla Töpfera, MFF UK Praha, Malostranské nám. 25, 118 00 Praha 1.

Výsledky celostátního kola 42. ročníku MO
kategorie A

Vítězové

1.	*Villiam Búr*, 4b G Bratislava, Grösslingová	35 b.
2.	*Andrej Zlatoš*, 3b G Bratislava, Grösslingová	34 b.
3.	*Jiří Černý*, 4a G Plzeň, Mikulášské nám.	32 b.
4.–5.	*Michal Brodský*, 4a G Brno, kpt. Jaroše	31 b.
	Jana Syrovátková, 4a G Brno, kpt. Jaroše	31 b.
6.–7.	*Marek Mačuha*, 3b G Bratislava, Grösslingová	30 b.
	Vít Novák, 4e G Praha 2, Korunní	30 b.
8.	*Robert Šámal*, 2d G Praha 2, Korunní	29 b.
9.–11.	*Petr Kaňovský*, 2a G Brno, kpt. Jaroše	28 b.
	Pavol Marton, 4 G Bratislava, Grösslingová	28 b.
	Daniel Štefankovič, 4b G Bratislava, Grösslingová	28 b.
12.–14.	*Marcela Hlawiczková*, 4c G Třinec	27 b.
	Daniel Pastor, 3b G Bratislava, Grösslingová	27 b.
	Jiří Vaníček, 4e G Praha 2, Korunní	27 b.
15.	*Ondřej Klíma*, 4a G Brno, kpt. Jaroše	26 b.
16.	*František Vymazal*, 4a G Brno, kpt. Jaroše	25 b.
17.–19.	*Jan Mach*, 3c G Bílovec	24 b.
	Martin Niepel, 3b G Bratislava, Grösslingová	24 b.
	Martin Vagaský, 3b G Bratislava, Grösslingová	24 b.

Další úspěšní řešitelé

20.–24.	*Kamil Budínský*, 4b G Bratislava, Novohradská	23 b.
	Blažej Neradílek, 3a G Brno, kpt. Jaroše	23 b.
	Jan Rychtář, 2c G Strakonice	23 b.
	Katarína Skalová, 4b G Bratislava, Grösslingová	23 b.
	Juraj Slanička, 4 G Bratislava, Grösslingová	23 b.
25.–26.	*Jana Uhrová*, 4d G Bílovec	22 b.
	Miloš Volauf, 4 G Bratislava, Grösslingová	22 b.

27.–28.	*Matej Ondrušek*, 4b G Bratislava, Novohradská	21 b.
	Marek Žabka, 4f Banská Bystrica, Tajovského	21 b.
29.–31.	*Milan Hokr*, 3d G Praha 2, Korunní	20 b.
	Filip Krška, 2a G Brno, kpt. Jaroše	20 b.
	Libor Mašíček, 2a G Brno, kpt. Jaroše	20 b.
32.–35.	*Ivana Brudňáková*, 2e G Prešov, Konštantínova	19 b.
	David Kruml, 4a G Brno, kpt. Jaroše	19 b.
	Boris Krupa, 1 G Bratislava, Grösslingová	19 b.
	Petr Vachovec, 3a G Plzeň, Mikulášské nám.	19 b.
36.–38.	*Matúš Kirchmayer*, 3a G Bratislava, Metodova	17 b.
	Mikuláš Piňos, 3a G Brno, kpt. Jaroše	17 b.
	Martin Semerád, 4e G Praha 2, Korunní	17 b.

Výsledky celostátního kola 42. ročníku MO
kategorie P

Vítězové

1.	*Tomáš Vinař*, 3.A G Košice, Šrobárova	33 b.
2.	*Jiří Vaníček*, 4.E G Praha, Korunní	31 b.
3.–5.	*Martin Mareš*, 2.E G Praha, U libeňského zámku	30 b.
	Martin Niepel, 3.B G Bratislava, Grösslingová	30 b.
	Matej Ondrušek, 4.B G Bratislava, Novohradská	30 b.
6.	*Bronislava Brejová*, 3.B G Bratislava, Novohradská	29 b.
7.–8.	*Vít Novák*, 4.E G Praha, Korunní	26 b.
	Daniel Štefankovič, 4.B G Bratislava, Grösslingová	26 b.
9.–10.	*Jiří Hanika*, 4.E G Praha, Korunní	23 b.
	Cyril Sochor, 4.E G Praha, Korunní	23 b.
11.–13.	*Martin Gažák*, 3.B G Žilina, Veľká Okružná	22 b.
	Ondřej Pár, 3.D GMK Bílovec	22 b.
	Jana Syrovátková, 4.A G Brno, kpt. Jaroše	22 b.

Další úspěšní řešitelé

14.–15.	*Ivana Brudňáková*, 2.E G Prešov, Konštantínova	20 b.
	Rastislav Kráľovič, 4.F G Bratislava, Vazovova	20 b.
16.–19.	*Milan Bok*, 4.E G Praha, Korunní	19 b.
	Zoltán Bugár, 4.A G Galanta	19 b.
	Pavel Machek, 2.D G Praha, Korunní	19 b.
	Ondřej Pořádek, 4.E G Praha, Korunní	19 b.
20.	*Jan Mach*, 3.C GMK Bílovec	18 b.
21.–24.	*Marek Fekete*, 4.A G Michalovce	17 b.
	Patrik Horník, 2.B G Bratislava, Grösslingová	17 b.
	Boris Letocha, 3.A G Hradec Králové, Tylovo nám.	17 b.
	Robert Šámal, 2.D G Praha, Korunní	17 b.
25.–27.	*Kamil Budinský*, 4.B G Bratislava, Novohradská	16 b.
	Pavel Petrovič, 4.B G Bratislava, Novohradská	16 b.
	Marián Varga, 3.A G Bratislava, Novohradská	16 b.

Nejúspěšnější řešitelé II. kola MO v kategoriích A, B, C a P

Z každého kraje a z každé kategorie jsou uvedeni úspěšní řešitelé na nejvýše prvních deseti místech. Označení G znamená gymnázium, M, resp. MF zaměření studijního oboru 01 Matematika, resp. 02 Matematika a fyzika.

Praha

Kategorie A

1. *Lucie Bittnerová*, 4M, G Praha 2, Korunní
2.–3. *Martin Semerád*, 4M, G Praha 2, Korunní
Jiří Vaníček, 4M, G Praha 2, Korunní
4. *Martin Vejražka*, 4MF, G Praha 8, U lib. zámku
5. *Vít Novák*, 3M, G Praha 2, Korunní
6. *Milan Hokr*, 4M, G Praha 2, Korunní
7.–8. *Robert Šámal*, 2M, G Praha 2, Korunní
Jan Rataj, 3M, G Praha 2, Korunní
9. *Tomáš Kočka*, 4MF, G Praha 8, U lib. zámku
10. *Jan Tichý*, 4M, G Praha 2, Korunní

Kategorie B

1. *Martin Mareš*, 2E, G Praha 8, U lib. zámku
2. *Robert Šámal*, 2D, G Praha 2, Korunní
3.–4. *Pavel Kůrka*, 2D, G Praha 2, Korunní
Michal Fabinger, 2E, G Praha 6, Nad alejí
5. *Norbert Vaněk*, 2D, G Praha 2, Korunní
6. *Michal Ostatnický*, 2D, G Praha 2, Korunní
7. *Lukáš Bernard*, 2C, G Praha 2, Korunní
8. *Jan Adamčák*, 2D, G Praha 2, Korunní
9.–11. *Jiří Hájek*, 2D, G Praha 2, Korunní

Karel Patera, 2D, G Praha 2, Korunní
Zdeněk Štěpán, 2D, G Praha 2, Korunní

Kategorie C

1.–4. *Karel Výborný*, 1A, G Praha 2, Korunní
Petra Nečasová, 1D, G Praha 2, Korunní
Jiří Vaněk, 1D, G Praha 2, Korunní
Dagmar Podaná, 1D, G Praha 2, Korunní
5. *Petr Holzhauser*, 1D, G Praha 2, Korunní
6.–10. *Alan Drozen*, 1D, G Praha 2, Korunní
Petr Janeček, 1D, G Praha 2, Korunní
Václav Šubrta, 1D, G Praha 2, Korunní
Jan Vodička, 1D, G Praha 2, Korunní
Michal Beneš, 1D, G Praha 2, Korunní

Kategorie P

1. *Pavel Machek*, 2D, G Korunní 2, P2
2. *Jiří Vaníček*, 4E, G Korunní 2, P2
3.–4. *Milan Bok*, 4E, G Korunní 2, P2
Robert Šámal, 2D, G Korunní 2, P2
5. *Martin Mareš*, 2D, G U libeň. zámku 1/3, P8
6. *Vít Novák*, 4E, G Korunní 2, P2
7.–8. *Jiří Hanika*, 4E, G Korunní 2, P2
Cyril Sochor, 4E, G Korunní 2, P2
9. *Ondřej Pořádek*, 4E, G Korunní 2, P2
10. *Jiří Kosek*, 3D, G Korunní 2, P2

Středočeský kraj

Kategorie A

1. *Jakub Strnad*, 4C, G Mladá Boleslav
2.–3. *Pavel Kučera*, 3A MF, G Mladá Boleslav
Jiří Louša, 4A MF, G Benešov
4.–6. *Jan Bláha*, 4A MF, G Beroun
František Liška, 4A MF, G Beroun

Václav Petříček, 3A MF, G Mladá Boleslav
7. *Karel Duda*, 4A MF, G Kladno

Kategorie B

1. *Petr Špička*, 2A, G Kralupy
2. *Martin Jaroš*, 2B, G Benešov
3.–4. *Ondřej Beran*, 2B, G Sedlčany
Jan Strnad, 2A, G Kolín
5.–7. *Milan Jakubec*, 2A, G Sedlčany
Jitka Kratochvílová, 2A, G Kolín
Martin Růžek, 2A, G Slaný
8.–10. *Pavel Erben*, 2A, G Kolín
David Konvalina, 2A, G Čáslav
Iva Kovářová, 2A, G Mladá Boleslav

Kategorie C

1. *Jiří Franta*, 1A, G Příbram
2.–4. *Ondřej Crha*, 1A, G Mladá Boleslav
Miroslav Knotek, 1A, G Kolín
Tomáš Müler, 1A, G Mladá Boleslav
5.–6. *Václav Havlík*, 1C, G Benešov
Michal Špiryt, 1B, G Beroun
7.–9. *Jaroslav Borovička*, 1A, G Mladá Boleslav
Marek Herda, 1B, G Kutná Hora
Veronika Novotná, 1B, G Sedlčany
10. *Pavel Ambrož*, 1A, G Slaný

Kategorie P

1. *Jan Bláha*, 4A MF, G Beroun
2.–3. *Miloš Kleint*, 4A MF, G Benešov
Jaroslav Borovička, 1A MF, G Mladá Boleslav
4.–5. *Pavel Kučera*, 3A MF, G Mladá Boleslav
David Sitenský, 3A MF, G Kladno

Jihočeský kraj

Kategorie A

1. *Daniel Průša*, 6B, G Tábor
2. *Petr Šlechta*, 6B, G JVJ Č. Budějovice

3.–6. *David Kimr*, 5B, G JVJ Č. Budějovice
Luděk Hájíček, 2B, G Jírovcova, Č. Budějovice
Jan Rychtář, 6B, G Strakonice
Vít Pekárek, 6B, G JH

7.–9. *Ondřej Mareš*, 4B, G Jírovcova, Č. Budějovice
O. Hanzal, 2B, G Dačice
H. Deverová, 4B, G Jírovcova, Č. Budějovice

10.–11. *O. Pangrác*, 4B, G Pelhřimov
D. Rožek, 4B, G JH

Kategorie B

1. *Karel Švadlenka*, 2, G Jírovcova, Č. Budějovice
2. *Jan Rychtář*, 2, G Strakonice
3. *Michaela Prokešová*, 2, G Jírovcova, Č. Budějovice

4.–5. *Václav Honetschläger*, 2, G Jírovcova, Č. Budějovice
Stanislav Šmejkal, 2, G Tábor

Kategorie C

1.–3. *M. Elisová*, 1A, G J Č. Budějovice
J. Hamrle, 1A, G Pelhřimov
J. Honnerová, 1, G CA Č. Budějovice

4.–6. *J. Huml*, 1A, G J Č. Budějovice
M. Toman, 1B, G J. Hradec
M. Vojta, 1A, G Strakonice

7. *P. Zeman*, 1C, G Tábor
8. *M. Květoň*, 1A, G Jírovcova, Č. Budějovice

9.–10. *J. Doležal*, 1, G Kaplice
R. Ženka, 1, G Jírovcova, Č. Budějovice

Západočeský kraj

Kategorie A

1. *Jiří Černý*, 4M, 1. G Plzeň
2. *Petr Vachovec*, 3M, 1. G Plzeň
3. *Jan Gillar*, 3P, G Cheb

4.–5. *Josef Černý*, 4MF, G Domažlice
Michal Škop, 3M, 1. G Plzeň

6. *František Šanda*, 3, G Klatovy

7.–8. *Jan Pospíšil*, 3M, 1. G Plzeň
Miroslav Skala, 3M, 2. G Plzeň

9.–11. *Roman Kníže*, 4MF, G Cheb
Romana Lavičková, 4M, 1. G Plzeň
Petr Písek, 3M, 1. G Plzeň

Kategorie B

1. *Petr Mařík*, 2M, 1. G Plzeň
2. *Stanislav Štěpánek*, 2M, 1. G Plzeň

3.–4. *Kateřina Němcová*, 2, Svob. chebská škola Cheb
Jiří Svoboda, 2M, 1. G Plzeň

5.–6. *Jiří Fornous*, 2M, 1. G Plzeň
Eva Legátová, 2, G Sušice

7. *Soňa Demjanovičová*, 2M, 1. G Plzeň
8. *Pavel Kalianko*, 2M, 1. G Plzeň

Kategorie C

1.–2. *Michal Ježek*, 1M, 1. G Plzeň
Tomáš Suda, 1, G Klatovy

3.–4. *Jiří Benedikt*, 1M, 1. G Plzeň
Jakub Slovan, 1M, 1. G Plzeň

5.–6. *Dana Kovaříková*, 1M, 1. G Plzeň
Lukáš Šmahel, 1M, 1. G Plzeň

7. *Jan Vachulka*, 1MF, 2. G Plzeň

8.–9. *Kristina Forstová*, 1M, 1. G Plzeň
Jan Ludvík, 1M, 1. G Plzeň

10.–13. *Jiří Fajt*, 1, G Domažlice

Alena Svobodová, 1MF, 1. G Plzeň
Jiří Valenta, 1, G Ostrov
Zuzana Vydrová, 1MF, 2. G Plzeň

Liberec

Kategorie A

1. *Michal Čermák*, 3G, GFXŠ Liberec
2. *Tomáš Marek*, 4G, GFXŠ Liberec
3. *Václav Cintl*, 4G, G Česká Lípa
4.–5. *Daniel Havelka*, 4G, GFXŠ Liberec
Jiří Lahvička, 4G, GFXŠ Liberec
6. *Vladimír Čermák*, 4G, GFXŠ Liberec

Kategorie B

1. *Pavel Strnad*, 4G, GFXŠ Liberec
2. *Eva Čmelíková*, 4G, GFXŠ Liberec
3.–4. *David Kamenář*, 4G, G Česká Lípa
Petr Strnad, 4G, GFXŠ Liberec
5. *Martin Vidner*, 4G, G Frýdlant v Č.

Kategorie C

1. *Michal Celler*, 4G, GFXŠ Liberec
2. *Petr Rálek*, 4G, GFXŠ Liberec
3. *Michal Bodnár*, 4G, G Česká Lípa
4. *Jiří Princ*, 4G, GFXŠ Liberec

Ústí nad Labem

Kategorie A

1. *Sylva Rydvalová*, G Teplice, Čs. dobrovolců
2. *Jakub Velímský*, G Ústí n.L., Jateční
3. *Pavel Pelc*, G Teplice, Čs. dobrovolců

Východní Čechy

Kategorie A

1. *Michal Hvězda*, 3D, G Pardubice
2. *Jan Kříž*, 4D, G Pardubice
3.–4. *Karel Houfek*, 3A, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Michal Šorel, 4D, G Pardubice
5.–6. *Stanislav Hencl*, 3D, G Pardubice
Michal Johanis, 3A, G J. K. Tyla, Hradec Králové
7. *Jiří Hartman*, 3A, G J. K. Tyla, Hradec Králové
8. *Roman Konečný*, 4DA, G Pardubice

Kategorie B

1.–3. *Petr Doubek*, G Pardubice
Jan Vebersik, G B. Němcové, Hradec Králové
Martin Vohralík, G Pardubice
4. *Alena Píšová*, G Pardubice
5.–7. *Emil Jeřábek*, G Turnov
David Stanovský, G Pardubice
Pavel Zahradník, G Polička
8.–10. *Pavel Carvan*, G Lanškroun
Radek Erban, G Nová Paka
Květa Chotěnovská, G J. K. Tyla, Hradec Králové

Kategorie C

1. *Martin Tajovský*, G B. Němcové, Hradec Králové
2.–4. *Zdeňka Broklová*, G Polička
Petr Vodstrčil, G Polička
Vít Žďára, G Polička
5. *Tomáš Tichý*, G Pardubice
6. *Aleš Král*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
7.–9. *Petr Horák*, G Náchod
Martin Kopecký, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Václav Novák, G J. K. Tyla, Hradec Králové
10.–11. *Lenka Pražanová*, G Polička
Vojtěch Rejdák, G J. K. Tyla, Hradec Králové

Brno

Kategorie A

1. *Jana Syrovátková*, 4A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
2. *Ondřej Klíma*, 4A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
3. *Mikuláš Piňos*, 3A, G Brno, tř. kpt. Jaroše

4.–8. *Michal Brodský*, 4A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Petr Kaňovský, 2A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
David Kruml, 4A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Blažej Neradilek, 3A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
František Vymazal, 4A, G Brno, tř. kpt. Jaroše

9.–10. *Jan Hradil*, 3A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Markéta Kylouškova, 4A, G Brno, tř. kpt. Jaroše

Kategorie B

1. *Libor Mašíček*, 2A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
2. *Martin Nečesal*, 2A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
3. *Filip Krška*, 2A, G Brno, tř. kpt. Jaroše

4.–5. *Pavel Stehlík*, 2A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Josef Šilhan, 2A, G Brno, tř. kpt. Jaroše

6.–7. *Marta Bednářová*, 2A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Daniel Polanský, 2A, G Brno, tř. kpt. Jaroše

8. *Josef Novotný*, 2A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
9. *Jan Strejček*, 2A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
10. *Jan Bursa*, 2A, G Brno, tř. kpt. Jaroše

Kategorie C

1.–2. *Jan Mašek*, 1A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Eva Synková, 1B, G Brno, tř. kpt. Jaroše

3.–5. *Pavel Klang*, 1A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Silvie Křivánková, 1A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Martin Šteflíček, 1A, G Brno, tř. kpt. Jaroše

6.–8. *Milan Fikar*, 1A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Petr Vejchoda, 1A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Michal Vít, 1A, G Brno, tř. kpt. Jaroše

9.–11. *Radek Běhavý*, 1A, G Brno, Křenová

Ondřej Dolínek, 1B, G Vyškov
Jan Pešl, 1A, G Brno, tř. kpt. Jaroše

Jihlava

Kategorie A

1. *Michal Nikiforov*, 4A, G Jihlava
2. *Helena Málková*, 3A, G Mor. Budějovice
3. *Jiří Komzák*, 3A, G Jihlava

Kategorie B

1. *Tomáš Vejchodský*, 2B, G Jihlava
2.–3. *Radek Rychnovský*, 2B, G Jihlava
Oldřich Večerek, G Třebíč
4. *Josef Novotný*, 2B, G Žďár nad Sázavou

Kategorie C

1.–2. *Petr Příplata*, 1B, G Jihlava
Karel Zikmund, 1B, G Jihlava
3. *Tomáš Karban*, 1B, G Jihlava
4. *Zdeněk Ambrož*, 1B, G Velké Meziříčí
5. *Martin Černý*, 1A, G Žďár nad Sázavou
6.–7. *Vojtěch Minárik*, 1B, G Jihlava
Michal Vopálenský, 1D, G Jihlava
8. *Ondřej Kubík*, 1A SPŠ Jihlava
9. *Jakub Machek*, 1A, G Žďár nad Sázavou
10.–11. *Tomáš Dvořák*, 1C, G Znojmo
David Zelený, G Třebíč

Zlín

Kategorie B

1. *Pavel Dostál*, G Kroměříž
2. *Jan Petrásek*, G Zlín

3.–4. *David Mrlík*, G Zlín
Michal Novotný, G Kroměříž
5. *Lukáš Josefík*, G Uherský Brod

Kategorie C

1. *Daniel Kráľ*, G Zlín
2. *Jiří Vajdík*, G Uherské Hradiště
3. *Josef Pavela*, G Uherské Hradiště
4. *David Hanslian*, G Uherské Hradiště
5.–6. *Radek Svoboda*, G Hodonín
Marek Zdráhal, G Holešov
7. *Václav Bezděk*, G Uherské Hradiště
8.–11. *Barbora Hedbávná*, G Uherské Hradiště
Michak Kusák, G Uherský Brod
Jakub Mácha, G Uherské Hradiště
Zuzana Šiblová, G Holešov

—— Severomoravský kraj ——

Kategorie A

1. *Marcela Hlawiczková*, 4C, G Komenského 713, Třinec
2. *Petr Staufčík*, 4C, GMK, Bílovec
3. *Jaromír Fiurášek*, 3D, G Komenského 29, Přerov
4. *Jana Uhrová*, 4D, GMK, Bílovec
5. *Jan Mach*, 3C, GMK, Bílovec
6. *Petr Jiříček*, 4D, GMK, Bílovec
7. *Jaroslav Kuba*, 4A, G Tomkova 45, Olomouc-Hejčín
8. *Renáta Sikorová*, 4C, GMK, Bílovec
9. *Zdeněk Románek*, 3C, G Dukelská 1, Bruntál
10. *Petr Jandík*, 4C, GMK, Bílovec

Kategorie B

1. *David Pavlica*, 2C, GMK, Bílovec
2. *Martin Kubala*, 2A, GPB ČSA 517, Frýdek Místek
3. *Lenka Bartoňková*, 2B, G Dukelská 1, Bruntál

4.–6. *Petr Trávníček*, 2C, GMK, Bílovec
Pavel Cenek, 2A, G Tomkova 45, Olomouc-Hejčín
Petr Dub, 2B, SPŠE gen.Svobody 2, Mohelnice
7. *Vojtěch Záškodný*, 2C, GMK, Bílovec
8. *Luděk Meca*, 2A, GPB ČSA 517, Frýdek Místek
9. *Eva Kašpárková*, 2B, MG Jičínská 528, Příbor

Kategorie C

1.–7. *Jan Foniok*, 1C, GMK, Bílovec
David Opěla, 1C, GMK, Bílovec
Petr Škovroň, 1C, GMK, Bílovec
Zbyněk Pawlas, 1C, GMK, Bílovec
Hynek Okon, 1C, GMK, Bílovec
Stanislav Elbl, 1E, SPŠS Zakaldat., Karviná 6
Pavel Skalický, 1D, Slovan. G, tř. J. z Pod., Olomouc
8. *Aleš Keprt*, 1D, Slovan. G, tř. J. z Pod., Olomouc
9.–10. *Ondřej Nejdek*, 1C, GMK, Bílovec
Miroslav Hebký, 1A, České G, Český Těšín

Kategorie P

1. *Ondřej Pár*, 3D, GMK, Bílovec
2. *Jan Mach*, 3C, GMK, Bílovec
3. *Vít Strádal*, 4C, GMK, Bílovec
4. *Pavel Frýda*, 4G, G Zábřeh na Moravě
5.–6. *Pavel Běhal*, 3B, G Rožnov pod Radhoštěm
Martin Stiller, 4A, G Rožnov pod Radhoštěm
7.–8. *Roman Zámečník*, 4B, G Rožnov pod Radhoštěm
Bohuslav Czudek, 4C, G Dr. E. Beneše 7, Hlučín
9.–10. *Jiří Kupczyn*, 4C, G J. Palacha 794, Bohumín
Jan Valuštík, 4C, G J. Palacha 794, Bohumín

——— Západoslovenský kraj ———

Kategorie A

1.–2. *Jozef Drahovský*, 4G, G Piešťany

Andrej Krídl, 4G, G Malacky
3.–4. *František Gábriš*, 4G, G Hlohovec
Stanislav Gronský, 4G, G Skalica
5.–6. *Martin Pabiš*, 4G, G Piešťany
Michal Šebáň, 4G, GĽŠ Trenčín
7.–10. *Roland Haulitusz*, 4G, G Komárno
Miroslav Hroššo, 4G, G Nitra, Párovská ul.
Tünde Keszeghová, 4G, GM Komárno
Lajos Ódor, 4G, GM Komárno

Kategorie B

1.–4. *Ivana Lovásová*, 2, G Nitra, Párovská ul.
Tibor Macko, 2, G Piešťany
Gabriela Mišunová, 2, G Nitra, Párovská ul.
Ján Ulický, 2, G Hviezdoslavova, Trnava
5.–8. *Jana Havettová*, 2, G Senica
Karina Chudá, 2, G Piešťany
Jozef Opálený, 2, G Nitra, Párovská ul.
Marek Vaňuš, 2, GSCM Nitra
9. *Zoltán Horváth*, 2, GM Dunajská Streda

Kategorie C

1.–3. *Miroslav Šedivý*, 1, G Levica
Tomáš Varga, 1, GM Komárno
Martin Vojtek, 1, G Nitra, Párovská ul.
4. *Ondrej Lonek*, 1, GĽŠ Trenčín
5. *Juraj Juhás*, 1, G Nitra, Párovská ul.
6.–16. *Matúš Beresecký*, 1, G Nitra, Párovská ul.
Zoltán Fazekaš, 1, G Nové Zámky
Eva Lukáčová, 1, G Nitra, Párovská ul.
Zoltán Nagy, 1, G Nové Zámky
Juraj Poljovka, 1, G Nitra, Párovská ul.
Ľubica Sádovská, 1, G Nitra, Párovská ul.
Krisztián Sági, 1, GM Komárno
Peter Richtárik, 1, G Nitra, Párovská ul.
Peter Schmidt, 1, G Nitra, Piaristická ul.
Miroslav Toma, 1, G Nitra, Párovská ul.

Peter Zmeko, 1, G Nové Mesto nad Váhom

Kategorie P

1. *Ján Hulala*, G Hlohovec
2. *Zoltán Bugár*, GM Galanta
3. *Maroš Michalík*, SPŠ Nové Mesto nad Váhom
4. *Gabriela Mišunová*, G Nitra, Párovská ul.
5. *Filip Denker*, G Nitra, Piaristická ul.
6. *Milan Belica*, G Nitra, Párovská ul.

7.–9. *Peter Mruškovič*, G Partizánské
Martin Černák, G Šurany
Pavol Machyniak, G Trnava, Hviezdoslavova

Stredoslovenský kraj

Kategorie A

1.–2. *Monika Kozáková*, 4F, GT Banská Bystrica
Marek Žabka, 4F, GT Banská Bystrica
3. *Tomáš Bruna*, 4B, G Žilina, V. Okružná
4. *Michal Skokan*, 3B, G Žilina, V. Okružná
5. *Marián Bucholcer*, 4F, GT Banská Bystrica

6.–7. *Štefan Godiš*, 1B, G Žilina, V. Okružná
Ján Žabka, 4B, G Žilina, V. Okružná
8. *Peter Hazucha*, 4F, GT Banská Bystrica
9. *Martin Gažák*, 3B, G Žilina, V. Okružná

10.–11. *Vojtech Bálint*, 4B, G Žilina, V. Okružná
Roman Rückschlos, 3F, GT Banská Bystrica

Kategorie B

1. *Marek Piliarik*, M, GJGT Banská Bystrica
2. *Tomáš Machalík*, M, G Žilina, V. Okružná
3. *Michal Kubáňík*, G Liptovský Mikuláš
4. *Mária Feťková*, MF, G Žilina, V. Okružná

5.–6. *Marek Škereň*, M, G Žilina, V. Okružná
Marián Lichner, M, G Banská Štiavnica

Kategorie C

1. *Juraj Majerský*, M, GT Banská Bystrica
2. *Jozef Mika*, M, G Žilina, V. Okružná
3.–7. *Ivan Cimrák*, M, G Žilina, V. Okružná
Henrich Datel, G Martin
Štefan Godiš, M, G Žilina, V. Okružná
Peter Ochodnický, G Martin
Branislav Tichý, M, G Žilina, V. Okružná
8.–9. *Pavol Droba*, M, GT Banská Bystrica
Vladimír Hiadlovský, M, GT Banská Bystrica
10.–11. *Stacho Mudrák*, M, GT Banská Bystrica
Ivan Strohnerlovský, MF, G Prievidza

Kategorie P

1. *Martin Gažák*, 3B, G Žilina, V. Okružná
2. *Peter Kunetka*, 3C, G Martin
3. *Roman Guniš*, 3C, G Martin
4. *Pavol Jankech*, 2E, G Považská Bystrica
5. *Martin Škulec*, 4A, G Prievidza
6. *Peter Kočalka*, 4F, G Banská Bystrica

——— Východoslovenský kraj ———

Kategorie A

1. *Ivana Brudňáková*, 2E, G Konštantínova, Prešov
2. *Milan Matoš*, 4A, G Popr. nábr., Poprad
3. *Peter Kováčik*, 4A, G Alejová, Košice
4.–8. *Pavol Dikoš*, 4A, G Alejová, Košice
Vladimír Lacko, 4A, G Alejová, Košice
Peter Macko, 4D, G Spišská Nová Ves
Ján Šoltís, 4G, G Popr. nábr., Poprad
Peter Zámborský, 3A, G Poštová, Košice
9.–11. *Juraj Barát*, 4D, G Šrobárová, Košice
Miloš Gáj, 3A, G D. Tatarku, Poprad
Mikuláš Madaras, 3A, G Poštová, Košice

Kategorie B

1.–2. *Ivana Brudňáková*, 2E, G Konštantínova, Prešov
Ján Bábeľa, 2A, G Poštová, Košice
3. *Radoslav Gočík*, 2A, G Poštová, Košice
4. *Dalibor Blažek*, 2A, G Poštová, Košice
5. *Tomáš Vnenčák*, 2C, G D. Tatarku, Poprad
6.–8. *Slávka Jendrejová*, 2A, G Poštová, Košice
Radek Ivančo, 2A SPŠS Prešov
Peter Gašpar, 2B, G Bardejov

Kategorie C

1.–3. *Juraj Nemjo*, 1B, G Humenné
Eugen Kováč, 1B, G Stropkov
Peter Taraba, 1A, G Popr. nábr., Poprad
4. *Zuzana Hagarová*, 1A, G Kežmarok
5.–7. *Kornel Csach*, 1A, G Poštová, Košice
Juraj Lisoň, 1A, G Poštová, Košice
Jozef Šlepecký, 1B, G Stropkov
8. *Marek Neupauer*, 1C, G Stará Ľubovňa
9.–10. *Jozef Haleš*, 1kvinta, G Alejová, Košice
Eva Trenklerová, 1A, G Poštová, Košice

Kategorie P

1. *Tomáš Vinař*, 3, G Šrobárová, Košice
2. *Ivan Schréter*, 3, G Trebišovská, Košice
3. *Peter Fehér*, 3, G Poštová, Košice
4. *Jozef Ráheľ*, 4, G Bardejov
5.–8. *Ivana Brudňáková*, 2, G Konštantínova, Prešov
Marek Fekete, 4, G Michalovce
Ján Hrúz, 4, G Michalovce
Štefan Pčola, 4, G Opatovská, Košice
9. *Viktor Kováč*, 3, G Opatovská, Košice
10. *Marek Bezaniuk*, 4, G Bardejov

Kategorie C

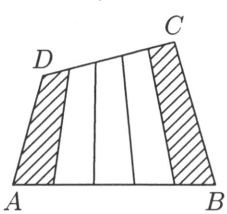
Texty úloh

C – I – 1

Dokažte, že pro přirozená čísla m, n $(m > n)$ je číslo $4^m - 4^n$ dělitelné devíti, právě když je číslo $m - n$ dělitelné třemi.

C – I – 2

Každá ze stran AB a DC konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ je rozdělena na 5 shodných úseček. Spojením odpovídajících si bodů (obr. 1) je čtyřúhelník rozdělen na pět čtyřúhelníků, z nichž první má obsah 10 a poslední $22\,\mathrm{cm}^2$. Určete obsah čtyřúhelníku $ABCD$.



Obr. 1

C – I – 3

Rovnostranný trojuholník je rozdelený na dve časti priamkou, ktorá prechádza jeho ťažiskom. Dokážte, že pre pomer p obsahov týchto častí platí

$$\frac{4}{5} \leqq p \leqq \frac{5}{4}.$$

C – I – 4

V matematické soutěži řešil každý žák 30 úloh. Za správně vyřešenou úlohu obdržel 4 body, špatně vyřešená úloha znamenala -1 bod, 0 bodů

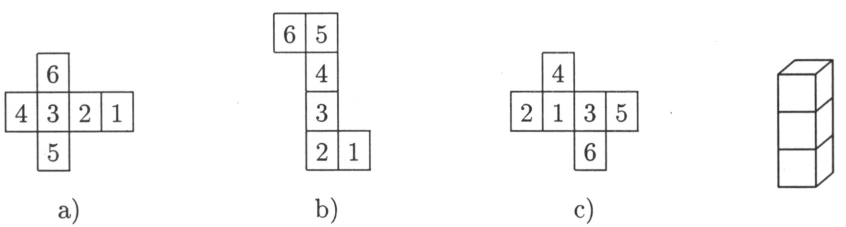
bylo za úlohu, kterou neřešil. Kolik muselo být účastníků, abychom mohli s jistotou tvrdit, že dva žáci skončili se stejným počtem bodů?

C – I – 5

Daný je lichobežník $ABCD$, v ktorom $|AB| = 8\,\text{cm}$, $|CD| = 4\,\text{cm}$, $|\sphericalangle DAB| = 53°$, $|\sphericalangle CBA| = 37°$. Vypočítajte vzdialenosť stredov základní AB, DC.

C – I – 6

Ze sítí na obr. 2 můžeme složit tři kostky. Pokud je postavíme do sloupečku, na jeho bocích si můžeme shora dolů přečíst trojmístná čísla (některé číslice budou ležet na boku nebo budou vzhůru nohama). Tato čtyři čísla sečteme. Kolik takových součtů můžeme dostat?



a) b) c)

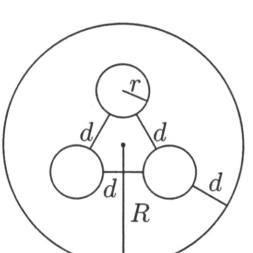
Obr. 2

C – S – 1

Dokažte, že pro přirozená čísla m, n $(m > n)$ je číslo $4^m - 4^n$ dělitelné číslem 27, právě když je rozdíl $m - n$ dělitelný devíti.

C – S – 2

Tri kruhy s polomerom r sú umiestnené do kruhu s polomerom R tak, že ich stredy tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka s ťažiskom v strede veľkého kruhu (obr. 3). Ďalej platí, že vzdialenosť d každých dvoch menších kruhov sa rovná vzdialenosti každého z týchto kruhov od hraničnej kružnice veľkého kruhu. Vyjadrite d pomocou R a r.



Obr. 3

C – S – 3

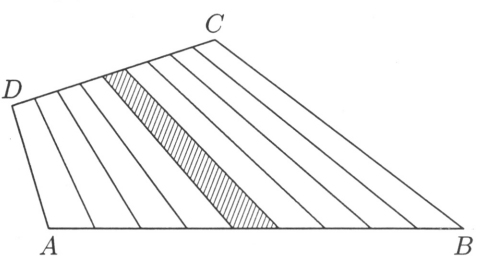
Uvnitř čtverce o straně 2 je dáno 61 různých bodů. Dokažte, že existuje kruh o poloměru $\frac{\sqrt{2}}{2}$, uvnitř kterého leží aspoň 16 těchto bodů.

C – II – 1

Ak je päťciferné číslo $6A\,B73$ deliteľné 99, tak je tiež deliteľné 19. Dokážte.

C – II – 2

Každá zo strán AB, DC konvexného štvoruholníka $ABCD$ je rozdelená na 9 zhodných úsečiek. Spojením odpovedajúcich si deliacich bodov sa štvoruholník rozdelí na 9 štvoruholníkov (obr. 4), z ktorých prostredný má obsah $7\,\mathrm{cm}^2$. Aký je obsah štvoruholníka $ABCD$?



Obr. 4

C – II – 3

V kruhu o poloměru 1 je dáno 77 různých bodů. Dokažte, že existuje kruh o poloměru $\frac{\sqrt{3}}{3}$, ve kterém leží aspoň 13 těchto bodů.

C – II – 4

Ve fotbalovém turnaji hrálo každé mužstvo s každým právě jednou. Za výhru získává 2 body, za nerozhodný výsledek 1 bod, za prohru žádný bod nezíská. Vítězné mužstvo získalo celkem 7 bodů, třetí v pořadí 5 bodů a čtvrté 3 body. Kolik bylo mužstev?

C – I – 1

Označme $m - n = d$; potom $4^m - 4^n = 4^n(4^d - 1)$. Keďže čísla 9 a 4^n sú nesúdeliteľné (pre ľubovoľné n prirodzené), je $4^m - 4^n$ deliteľné deviatimi práve vtedy, keď je deviatimi deliteľné číslo $4^d - 1$.

Platí však

$$4^d - 1 = (4-1)(4^{d-1} + 4^{d-2} + \ldots + 4^2 + 4 + 1) = 3M,$$

kde pre každé prirodzené číslo d volíme vhodné celé M. Z toho vyplýva, že pre každé d je číslo $4^d - 1$ deliteľné troma, čo taktiež znamená, že číslo 4^d má pri delení číslom 3 zvyšok 1. Ak v poslednej rovnosti dosadíme za $4^k = 3M_k + 1$, kde M_k sú vhodné prirodzené čísla a $1 \leqq k \leqq d - 1$, dostaneme

$$\begin{aligned} 4^d - 1 = 3\big((3M_{d-1} + 1) + (3M_{d-2} + 1) + \ldots + \\ + (3M_2 + 1) + (3M_1 + 1) + 1\big) = \\ = 9\big(M_{d-1} + M_{d-2} + \ldots + M_1\big) + 3d. \end{aligned}$$

Z toho je však zrejmé, že číslo $4^d - 1$ je deliteľné deviatimi práve vtedy, keď d je deliteľné troma, ako bolo treba dokázať.

Iné riešenie (založené na binomickej vete). Nech $d = 3k$, kde k je prirodzené. Potom

$$\begin{aligned} 4^d - 1 = 4^{3k} - 1 = 64^k - 1 = \\ = (64-1)(64^{k-1} + 64^{k-2} + \ldots + 64 + 1) = \\ = 9 \cdot 7(64^{k-1} + 64^{k-2} + \ldots + 64 + 1), \end{aligned}$$

čo znamená, že $4^d - 1$ je deliteľné deviatimi.

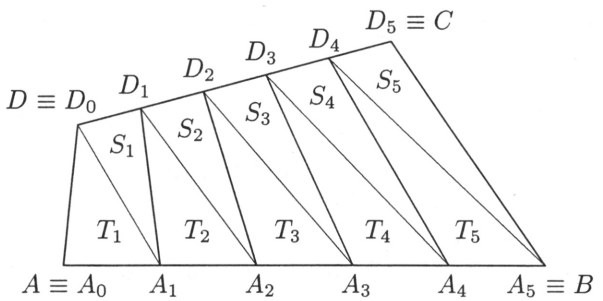
Nech naopak $4^d - 1 = 9K$ pre K prirodzené, čo však môže platiť len pre $d \geqq 3$. Keďže $4^d = (3+1)^d$, podľa binomickej vety dostaneme

$$\begin{aligned} 4^d - 1 = \big((3+1)^d - 1\big) = \\ = 3\left(3^{d-1} + \binom{d}{d-1}3^{d-2} + \ldots + \binom{d}{2}3 + d\right), \end{aligned}$$

z čoho vyplýva, že číslo d musí byť deliteľné troma, ako bolo treba dokázať.

C – I – 2

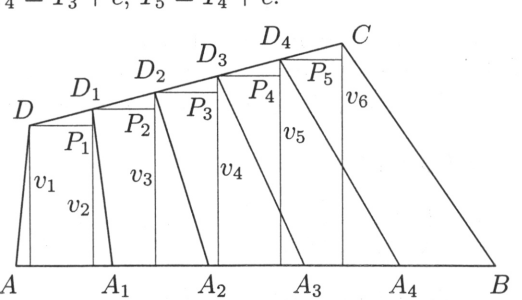
Označme deliace body podľa obr. 5. Nech pre $i = 0, 1, 2, 3, 4$ je $|A_iA_{i+1}| = a$ a $|D_iD_{i+1}| = b$. Pre $i = 1, 2, 3, 4, 5$ označme O_i obsah štvoruholníka $A_{i-1}A_iD_iD_{i-1}$. Vieme, že $O_1 = 10\,\text{cm}^2$, $O_5 = 22\,\text{cm}^2$.



Obr. 5

Zrejme je $AB \nparallel CD$. Ak by totiž bolo $AB \parallel CD$, všetky štvoruholníky $A_{i-1}A_iD_iD_{i-1}$ (pre $1 \leqq i \leqq 5$) by boli lichobežníky s rovnako veľkými základňami i zhodnou výškou v a tiež ich obsahy by museli byť rovnako veľké (totiž $\frac{1}{2}v(a+b)$), čo však nemôže nastať ($O_5 \neq O_1$).

Označme teraz T_i plošný obsah trojuholníka $A_{i-1}A_iD_{i-1}$ ($1 \leqq i \leqq 5$) a v_i jeho výšku z vrchola D_{i-1} na stranu $A_{i-1}A_i$. Platí teda $T_i = \frac{1}{2}av_i$. Nech P_i je päta kolmice z bodu D_{i-1} na výšku v_{i+1}, kde v_6 označuje vzdialenosť bodu C od priamky AB (obr. 6). Trojuholníky $D_{i-1}P_iD_i$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) sú zrejme zhodné, pretože majú zhodné vnútorné uhly a dĺžku jednej strany. Z toho vyplýva, že rozdiel $v_{i+1} - v_i$ je rovnaký pre všetky hodnoty $i = 1, 2, 3, 4, 5$; označme ho k. Teda ani rozdiel $T_{i+1} - T_i = \frac{1}{2}ak$ nezávisí na i; ak ho označíme ako c, bude $T_2 = T_1 + c$, $T_3 = T_2 + c$, $T_4 = T_3 + c$, $T_5 = T_4 + c$.



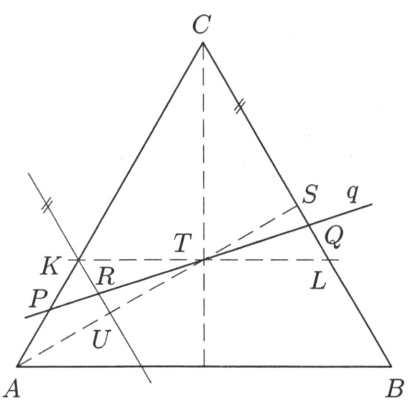
Obr. 6

Ak označíme S_i plošný obsah trojuholníka $D_{i-1}A_iD_i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, analogickou úvahou nahliadneme, že rozdiel $S_{i+1} - S_i$ nie je závislý na i, čiže pre vhodné d platí $S_2 = S_1 + d$, $S_3 = S_2 + d$, $S_4 = S_3 + d$, $S_5 = S_4 + d$. Zrejme je $O_i = T_i + S_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, aritmetická postupnosť s diferenciou $c + d$. Keďže je $O_1 = 10\,\text{cm}^2$, $O_5 = 22\,\text{cm}^2$, bude hľadaný obsah $O = O_1 + O_2 + O_3 + O_4 + O_5 = \frac{5}{2}(O_1 + O_5) = 5 \cdot 16\,\text{cm}^2 = 80\,\text{cm}^2$.

C – I – 3

Bez ujmy na všeobecnosti môžme predpokladať, že obsah daného trojuholníka ABC sa rovná 1. Nech q je priamka prechádzajúca ťažiskom T tohto trojuholníka. Ak prechádza niektorým z vrcholov trojuholníka ABC, rozdelí ho na dva trojuholníky rovnakého obsahu. V tomto prípade je teda $p = 1$.

Ak q neprechádza žiadnym z vrcholov trojuholníka ABC, potom pretína dve jeho strany, napr. (ako na obr. 7) stranu AC v bode P a stranu BC v bode Q.



Obr. 7

Keď je priamka q rovnobežná s priamkou AB, sú trojuholníky ABC a PQC rovnoľahlé, a teda podobné. Z podobnosti týchto trojuholníkov vyplýva, že $|PQ| = \frac{2}{3}|AB|$ a $|CT| = \frac{2}{3}v$, kde v je výška trojuholníka ABC. Preto obsah trojuholníka PQC je $\frac{4}{9}$, obsah štvoruholníka $ABQP$ je $\frac{5}{9}$. Teda $p = \frac{4}{5}$ alebo $p = \frac{5}{4}$. (Krajší spôsob, ako to zistiť, je však rozdeliť trojuholník na deväť rovnakých rovnostranných trojuholníkov.)

Nech $q \nparallel AB$. Označme K, resp. L priesečníky strán AC, resp. BC s rovnobežkou so stranou AB prechádzajúcou ťažiskom T (obr. 7). Nech

P je vnútorným bodom úsečky AK. Potom Q leží vo vnútri úsečky CL. Označme S stred strany BC. Bodom K veďme rovnobežku so stranou BC a jej priesečníky s úsečkami PT, resp. AT označme R, resp. U. Pretože T je stred úsečky KL, sú trojuholníky TKR a TLQ, ako aj TRU a TQS zhodné. Preto pre obsah O_{PQC} trojuholníka PQC platí

$$\begin{aligned} O_{PQC} &= O_{KLC} + O_{PTK} - O_{TLQ} = \\ &= \tfrac{4}{9} + O_{PTK} - O_{TKR} = \\ &= \tfrac{4}{9} + O_{KPR} > \tfrac{4}{9}; \end{aligned}$$

na druhej strane však

$$\begin{aligned} O_{PQC} &= O_{ASC} - O_{ATP} + O_{TQS} = \\ &= \tfrac{1}{2} - O_{ATP} + O_{TRU} = \\ &= \tfrac{1}{2} - O_{AURP} < \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že $\frac{4}{9} < O_{PQC} < \frac{1}{2}$, odkiaľ dostaneme, že $\frac{1}{2} < O_{ABQP} < \frac{5}{9}$. Pre pomer p obsahov oboch častí teda v tomto prípade musí platiť $\frac{4}{5} < p < \frac{5}{4}$. V oboch prípadoch sme úspešne dokázali danú nerovnosť.

Poznamenajme, že tvrdenie úlohy platí pre ľubovoľný trojuholník, nielen pre rovnostranný. Dôkaz možno urobiť tým istým spôsobom.

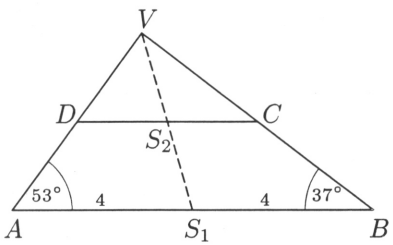
C – I – 4

Každý žiak mohol v súťaži dosiahnuť celkový bodový súčet od -30 bodov (ak riešil všetkých 30 úloh nesprávne) až do 120 bodov (pri správnom vyriešení všetkých 30 úloh) s výnimkou súčtov 119, 118, 117, 114, 113 a 109 bodov, ktoré sa pri danom bodovacom systéme nedajú žiadnym spôsobom dosiahnuť. Možných výsledkov v súťaži je teda $151 - 6 = 145$. Podľa Dirichletovho princípu to znamená, že ak sa súťaže zúčastní aspoň 146 žiakov, môžme s istotou tvrdiť, že aspoň dvaja žiaci skončili s rovnakým počtom bodov.

C – I – 5

Průsečík přímek AD a BC označme V. Protože $|\sphericalangle AVB| = 180° - (53° + 37°) = 90°$, je trojúhelník ABV pravoúhlý. Označme S_1 střed strany AB a S_2 střed strany CD daného lichoběžníku (obr. 8). Zřejmě

je $|AS_1| = 4\,\text{cm}$, $|DS_2| = 2\,\text{cm}$. V pravouhlém trojúhelníku ABV je S_1 středem kružnice opsané a platí $|S_1V| = |S_1A|$. Trojúhelníky S_2VD



Obr. 8

a S_1VA jsou podobné, protože mají všechny úhly shodné. Z rovnosti $|S_2D| : |S_1A| = 2 : 4 = 1 : 2$ proto plyne $|S_2V| : |S_1V| = 1 : 2$ a odtud pak, že $|S_1S_2| = |S_1V| - |S_2V| = 2\,\text{cm}$.

C – I – 6

Označme A kocku, ktorej sieť je na obr. 2a. Na tejto kocke bude stena s číslom 1 proti stene s číslom 3, stena s číslom 2 proti stene s číslom 4 a stena s číslom 5 proti stene s číslom 6.

Ak B bude kocka so sieťou na obr. 2b, bude na tejto kocke proti stene s číslom 1 stena s číslom 6, proti stene s číslom 2 stena s číslom 4 a proti stene s číslom 3 stena s číslom 5.

Na kocke C — so sieťou na obr. 2c — je proti stene s číslom 1 stena s číslom 5, proti stene s číslom 2 stena s číslom 3 a proti stene s číslom 4 stena s číslom 6.

Z toho vyplýva, že všetky tri kocky sú navzájom rôzne. Skôr, než začneme uvažovať o možnom počte súčtov štyroch trojmiestnych čísel na stenách stĺpčeka, musíme si uvedomiť, že tento počet nezávisí od umiestnenia číslic na viditeľných stenách jednotlivých kociek, ale len od usporiadania kociek v stĺpčeku a od toho, ktoré číslice sú na „skrytých stenách“ (hornej a dolnej) jednotlivých kociek. Pritom súčet číslic na viditeľných bočných stenách hornej kocky predstavuje počet stoviek, na strednej počet desiatok a na dolnej počet jednotiek v súčte. Možné polohy kociek v stĺpčeku, ktoré majú vplyv na počet súčtov, sú zapísané v nasledujúcej tabuľke (indexmi označujeme možné rôzne polohy príslušnej kocky):

Poloha kocky	Číslice na hornej, resp. dolnej stene	Číslice viditeľné na bočných stenách a ich súčet
A_1	1; 3	$2+5+4+6=17$
A_2	2; 4	$1+5+3+6=15$
A_3	5; 6	$1+2+3+4=10$
B_1	1; 6	$2+3+4+5=14$
B_2	2; 4	$1+3+6+5=15$
B_3	3; 5	$1+2+6+4=13$
C_1	1; 5	$2+4+3+6=15$
C_2	2; 3	$1+4+5+6=16$
C_3	4; 6	$1+2+3+5=11$

Pre usporiadanie kociek do stĺpčeka máme celkom 6 rôznych možností, ktoré môžme znázorniť touto schémou:

A	B	A	C	B	C
B	A	C	A	C	B
C	C	B	B	A	A

Z toho, že všetky tri kocky sú vzájomne rôzne a že rozdiel medzi najväčším a najmenším možným súčtom štyroch viditeľných číslic je menej ako desať, vyplýva, že všetkým polohám jednotlivých kociek pri usporiadaní ABC (zhora nadol) zodpovedá celkom $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ rôznych súčtov.

Vzhľadom na to, že pre každú kocku existuje jedna poloha s rovnakým súčtom číslic na viditeľných bočných stenách (totiž 15), pri ostatných usporiadaniach kociek v stĺpčeku dostaneme už menší počet nových súčtov.

Pri usporiadaní BAC to bude $3 \cdot 3 \cdot 3 - 3 = 24$, pretože súčet v polohe $B_2A_2C_i$ je rovnaký ako v polohe $A_2B_2C_i$ (pre $i = 1, 2, 3$). Pri usporiadaní ACB to bude opäť $3 \cdot 3 \cdot 3 - 3 = 24$, lebo súčet v polohe $A_iC_1B_2$ je rovnaký ako v polohe $A_iB_2C_1$, $i = 1, 2, 3$. Pri usporiadaní CAB pribudne už len $3 \cdot 3 \cdot 3 - 5 = 22$ nových súčtov, pretože súčet v polohe $C_1A_2B_i$ je rovnaký ako v polohe $A_2C_1B_i$ ($i = 1, 2, 3$) a súčet v polohe $C_1A_iB_2$ je rovnaký ako súčet v polohe $B_2A_iC_1$, pre $i = 1$ a $i = 3$. Pri usporiadaní BCA bude nových súčtov opäť len $3 \cdot 3 \cdot 3 - 5 = 22$, pretože súčet v polohe $B_2C_iA_2$ je rovnaký ako súčet v polohe $A_2C_iB_2$ (pre $i = 1$, 2, 3) a súčet v polohe $B_iC_1A_2$ je rovnaký ako súčet v polohe $B_iA_2C_1$, $i = 1, 3$. Konečne pri usporiadaní CBA pribudne už iba $3 \cdot 3 \cdot 3 - 7 = 20$ nových súčtov, lebo súčet v polohe $C_1B_2A_i$ je rovnaký ako v polohe $B_2C_1A_i$ ($i = 1$, 2, 3), súčet v polohe $C_1B_iA_2$ je rovnaký ako v polohe $A_2B_iC_1$ ($i = 1$, 3) a súčet v polohe $C_iB_2A_2$ je rovnaký ako v polohe $C_iA_2B_2$ ($i = 2$, 3).

Celkom teda môžeme dostať $27 + 2 \cdot 24 + 2 \cdot 22 + 20 = 139$ rôznych súčtov.

C – S – 1

Položme $d = m - n > 0$. Keďže je $4^m - 4^n = 4^n(4^d - 1)$ a číslo 4^n je pre každé n nesúdeliteľné s číslom 27, je $4^m - 4^n$ deliteľné 27 práve vtedy, keď má túto vlastnosť číslo $4^d - 1$. Je zrejmé, že ak číslo $4^m - 4^n$ je deliteľné číslom 27, musí byť deliteľné deviatimi. Z úlohy C–I–1 však vieme, že to platí práve vtedy, keď d je deliteľné troma. Nech preto $d = 3k$, kde k je prirodzené číslo. Potom je

$$\begin{aligned} 4^d - 1 = 4^{3k} - 1 = 64^k - 1 = \\ = (64 - 1)(64^{k-1} + 64^{k-2} + \ldots + 64 + 1) = \\ = 7 \cdot 9 \cdot (64^{k-1} + 64^{k-2} + \ldots + 64 + 1). \end{aligned}$$

Každé z čísel 64^s, $s = 1, \ldots, k - 1$, však pri delení troma dáva zvyšok 1, pretože

$$64^s = (3 \cdot 21 + 1)^s = 3M_s + 1,$$

kde M_s, $1 \leqq s \leqq k - 1$, sú vhodné prirodzené čísla. Preto bude

$$64^{k-1} + 64^{k-2} + \ldots + 64 + 1 = 3(M_{k-1} + M_{k-2} + \ldots + M_1) + k,$$

z čoho vyplýva, že

$$4^d - 1 = 7 \cdot 27 \cdot (M_{k-1} + M_{k-2} + \ldots + M_1) + 7 \cdot 9 \cdot k.$$

To však znamená, že číslo $4^d - 1$ je dělitelné 27, práve vtedy, keď k je deliteľné troma, a keďže je $d = 3k$, platí to práve vtedy, keď je d deliteľné deviatimi, ako bolo treba dokázať.

C – S – 2

Označme S stred veľkého kruhu a S_1, S_2, S_3 stredy jednotlivých do neho umiestnených menších kruhov. Pre polomer R veľkého kruhu zrejme platí $R = d + r + \frac{2}{3}v$, kde v je výška rovnostranného trojuholníka $S_1S_2S_3$. Keďže $|S_1S_2| = d + 2r$, je $v = (d + 2r) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Preto platí

$$R = d + r + \frac{2}{3}(d + 2r)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(3 + \sqrt{3})d + (3 + 2\sqrt{3})r}{3},$$

z čoho vyplýva, že

$$d = \frac{3R - (3 + 2\sqrt{3})r}{3 + \sqrt{3}} = \frac{(3 - \sqrt{3})R - (1 + \sqrt{3})r}{2}.$$

C – S – 3

Daný štvorec môžeme rozdeliť na štyri štvorce o strane 1; každému z týchto štvorcov opíšme kružnicu s polomerom $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Kruhy ohraničené týmito kružnicami celá pokryjú vnútorok daného štvorca. Keby v každom z týchto kruhov ležalo najvýše 15 bodov, nemohlo by v celom štvorci byť dohromady viac než $4 \cdot 15 = 60 < 61$ bodov. Preto aspoň v jednom z kruhov musí ležať aspoň 16 bodov.

C – II – 1

Vieme, že číslo $6A\,B73 = 60\,073 + 1\,000\,A + 100\,B = 606 \cdot 99 + 79 + 990\,A + 10\,A + 99\,B + B = 99(606 + 10A + B) + 79 + 10\,A + B$. Aby bolo toto číslo deliteľné číslom 99, musí byť $10\,A + B = 20$. Číslo $6A\,B73$ sa teda rovná číslu 62 073, ktoré je deliteľné číslom 19, čo sa malo dokázať.

Iné riešenie. Násobok $k \cdot 99$ končí dvojčíslím, ktoré sa rovná rozdielu 100 – koncové dvojčíslie čísla k. Odtiaľ vidíme, že $6A\,B73 = k \cdot 99$, kde k končí dvojčíslím 27. V úvahu pripadá $k = 627$ a $k = 727$. Úlohe vyhovuje len $k = 627$.

C – II – 2

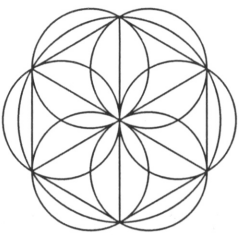
Z riešenia druhej úlohy domáceho kola vyplýva, že plošné obsahy štvoruholníkov, na ktoré sme rozdelili štvoruholník $ABCD$, tvoria aritmetickú postupnosť: P_0, $P_0 + d$, ..., $P_0 + 4d$, ..., $P_0 + 8d$. Plošný obsah P štvoruholníka $ABCD$ dostaneme ako súčet členov tejto postupnosti:

$$P = 9 \cdot \frac{P_1 + (P_1 + 8d)}{2} = 9 \cdot (P_1 + 4d).$$

Zo zadania úlohy vieme, že $P_1 + 4d = 7\,\mathrm{cm}^2$. Preto je $P = 9 \cdot 7\,\mathrm{cm}^2 = 63\,\mathrm{cm}^2$.

C – II – 3

Do kruhu s polomerom 1 môžme vpísať pravidelný konvexný šesťuholník so stranou 1, ktorý rozdelíme na 6 rovnostranných trojuholníkov so stranou 1 a spoločným vrcholom v strede daného kruhu. Každému z týchto rovnostranných trojuholníkov opíšeme kružnicu s polomerom $r = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Tým vznikne 6 zhodných kruhov s polomerom $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, ktoré celkom pokrývajú daný jednotkový kruh (obr. 9). Keďže $6 \cdot 12 = 72 < 77$, musí podľa Dirichletovho princípu aspoň v jednom z týchto kruhov ležať aspoň 13 z daných bodov.



Obr. 9

C – II – 4

Označme n hledaný počet mužstev. Celkem bylo sehráno $\frac{1}{2}n(n-1)$ zápasů a všechna mužstva získala dohromady $n(n-1)$ bodů. Přitom druhé získalo nejvýše 7 bodů, páté a všechna další nejvýše tři body. Dohromady získala všechna mužstva nejvýše $7+7+5+3+(n-4)\cdot 3 = 3n+10$ bodů, takže $n(n-1) \leqq 3n+10$, tedy $(n-2)^2 \leqq 14$, odtud vychází $n = 5$. Mužstva získala celkem 20 bodů, druhé a páté dohromady 5, takže druhé získalo 5 bodů a páté nezískalo ani bod. (Hodnota $n = 4$ nevyhovuje, protože počet přidělených bodů $7 + 5 + 3$ třem mužstvům je již větší než $4 \cdot 3$.)

K úplnému řešení musíme ještě ukázat, že tato situace mohla skutečně nastat. Příklad turnaje, který dané podmínky splňuje, je

	A	B	C	D	E	body
A	×	1	2	2	2	7
B	1	×	0	2	2	5
C	0	2	×	1	2	5
D	0	0	1	×	2	3
E	0	0	0	0	×	0

Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

Nechť a, b, c $(a \leqq b \leqq c)$ jsou délky stran trojúhelníku, jehož obsah je $10\,\mathrm{cm}^2$. Jakou nejmenší délku může mít strana b?

B – I – 2

Pre ktoré reálne čísla c existujú práve dve rôzne reálne čísla, ktoré sú riešením rovnice

$$x^3 + (c-1)x + c = 0?$$

B – I – 3

Jakou délku může mít šestá hrana čtyřstěnu, jestliže délky zbývajících pěti hran jsou 2 cm, 2 cm, 2 cm, 3 cm a 4 cm?

B – I – 4

Honza si zapomněl poznačit kvadratickou rovnici, kterou měl doma řešit. Pamatoval si však, že koeficient u kvadratického členu byl 3 a u lineárního členu 25. U absolutního členu se spletl pouze ve znaménku. Obě rovnice (ta, kterou měl řešit, i ta, kterou řešil) měly celočíselný kořen. Zjistěte, které to byly rovnice.

B – I – 5

Dané sú body A, B. Zostrojte dve navzájom kolmé priamky prechádzajúce bodom B tak, aby ich vzdialenosti od bodu A boli v pomere $1 : 2$.

B – I – 6

Jsou dány dva shodné kruhy o poloměru 1 cm. Mezi všemi čtyřúhelníky, které se dají pokrýt přemístěním těchto dvou kruhů, najděte takový, který má největší obsah.

B – S – 1

Najděte největší trojciferné přirozené číslo x, pro které existuje prvočíslo p takové, že číslo $\sqrt{x^2 - p^3}$ je celé.

B – S – 2

Pre ktoré reálne čísla p má sústava rovníc

$$x^3 - x + 3p = 6,$$
$$x^3 + x + 4p = 10$$

aspoň jedno riešenie v obore reálnych čísel?

B – S – 3

Uvnitř daného pravého úhlu AMB sestrojte body K a L tak, aby KLM byl rovnostranný trojúhelník o straně 5 cm a aby vzdálenost bodu K od ramene MA byla dvojnásobkem vzdálenosti bodu L od ramene MB.

B – II – 1

Zistite, pre ktoré reálne čísla a má sústava rovníc

$$x + y = z + 2,$$
$$x^2 + y^2 = z^2 + 4,$$
$$x^3 + y^3 = z^3 + a$$

riešenie v obore reálnych čísel, a riešte ju.

B – II – 2

Rozhodněte, zda existuje pravoúhlý trojúhelník, jehož obě odvěsny mají délky vyjádřené celými čísly a jehož výška na přeponu je vyjádřena prvočíslem.

B – II – 3

Ak pre reálne čísla p, q, r platí, že obe čísla $4p + 2q + r$, $-p + q - r$ sú kladné, potom je $q^2 > 4pr$. Dokážte.

B – II – 4

Záhon tvaru rovnostranného trojúhelníku je pokryt pěti navzájem shodnými plachtami tvaru rovnostranného trojúhelníku. (Části plachet se mohou překrývat i přesáhnout záhon.) Dokažte, že na pokrytí záhonu stačí čtyři tyto plachty.

B – I – 1

Je-li γ velikost úhlu, který svírají strany délek a, b, je obsah trojúhelníku $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Protože $0 < \sin\gamma \leqq 1$, $a \leqq b$, platí $20 \leqq ab\sin\gamma \leqq ab \leqq b^2$, neboli $b \geqq \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Odtud přímo vyplývá, že b bude nejmenší, právě když $\sin\gamma = 1$ a zároveň $b = a$. Odpovídající trojúhelník má strany $a = b = 2\sqrt{5}\,\mathrm{cm}$, jež svírají úhel $\gamma = 90°$, takže $c = 2\sqrt{10}\,\mathrm{cm}$.

B – I – 2

Rovnicu upravíme nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned} x^3 - x + c(x+1) &= 0, \\ x(x-1)(x+1) + c(x+1) &= 0, \\ (x+1)(x^2 - x + c) &= 0. \end{aligned}$$

Odtiaľ je zrejmé, že rovnica má pre každé reálne číslo c koreň $x_1 = -1$.

Ak má mať celkom dva rôzne reálne korene, musí byť alebo $x_2 = x_3$, alebo $x_2 = -1$, pričom x_3 je reálne číslo rôzne od čísla -1. Vzhľadom na to, že x_2, x_3 sú korene rovnice $x_2 - x + c = 0$, prvý prípad nastane práve vtedy, ak je jej diskriminant $1 - 4c$ nulový, čiže pre $c = \frac{1}{4}$ (bude $x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$).

V druhom prípade využijeme vzťahy medzi koreňmi a koeficientami kvadratickej rovnice. Pre $x_2 = -1$ dostávame $-1 + x_3 = 1$, $-x_3 = c$, čiže $x_3 = 2$ a $c = -2$.

Daná rovnica má teda práve dve rôzne riešenia, práve keď $c = \frac{1}{4}$ alebo $c = -2$.

Iné riešenie. Využijeme Viètové vzťahy. Označme u, v rôzne reálne korene rovnice $x_3 + (c-1)x + c = 0$, pričom predpokladáme, že koreň v je dvojnásobný. Potom platí

$$x^3 + (c-1)x + c = (x-u)(x-v)^2.$$

Po roznásobení a porovnaní koeficientov u rovnakých mocnín premennej x dospejeme k vzťahom

$$\begin{aligned} u &= -2v, \\ c - 1 &= v^2 + 2uv, \\ uv^2 &= -c. \end{aligned}$$

Dosadením z prvej rovnice do druhých dvoch dostaneme

$$\begin{aligned} c - 1 &= -3v^2, \\ c &= 2v^3. \end{aligned} \tag{1}$$

Vylúčením premennej c dostaneme rovnicu

$$2v^3 + 3v^2 - 1 = 0,$$

ktorá má zrejme koreň $v_1 = -1$ a je teda možné ju upraviť na tvar

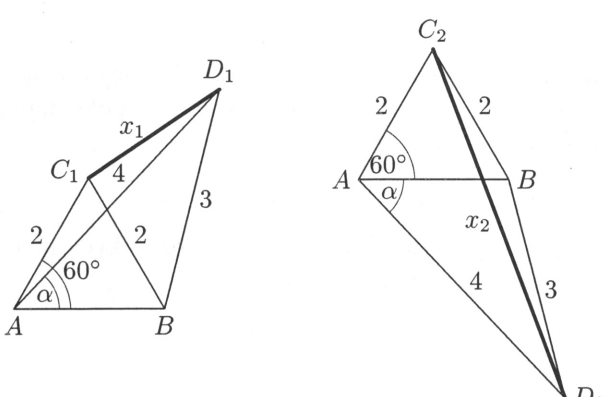
$$(v + 1)(2v^2 + v - 1) = 0.$$

Odtiaľ obdržíme $v_2 = v_1 = -1$, $v_3 = \frac{1}{2}$. Dosadením do (1) dospejeme k tomu istému záveru ako v prvom riešení: pre $c = -2$ je $u = 2$ a $v = -1$, pre $c = \frac{1}{4}$ je $u = -1$, $v = \frac{1}{2}$.

B – I – 3

Všimneme si dvou stěn, jejichž hrany mají uvedené délky (čili těch dvou, které neobsahují šestou hranu neznámé délky). Jejich společná hrana (nechť je označena AB) nemůže mít délku 4 cm — pak by totiž nebyla pro některou z těchto stěn splněna trojúhelníková nerovnost. Rozlišíme proto zbylé dvě možnosti.

Nejprve vyřešíme případ, kdy společná hrana těchto stěn má délku 2 cm. Pak délka x hrany CD (mimoběžné s AB) je omezena situacemi, kdy stěny ABC, ABD leží v téže rovině (obr. 10).



Obr. 10

Jinak řečeno: úhel stěn ABC, ABD má velikost $0° < \varphi < 180°$. Omezující hodnoty pro délku x hrany CD jsou $x_1 = |C_1D_1|$ pro $\varphi = 0°$ a $x_2 = |C_2D_2|$ pro $\varphi = 180°$.

Z obr. 10 určíme pomocí kosinové věty pro trojúhelníky ABD_1 a ABD_2, že

$$\cos\alpha = \frac{4+16-9}{2\cdot 2\cdot 4} = \frac{11}{16}, \quad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{135}}{16}.$$

Odtud

$$\cos(60° \pm \alpha) = \cos 60° \cos\alpha \mp \sin 60° \sin\alpha = \frac{1}{32}\left(11 \mp 9\sqrt{5}\right).$$

Z trojúhelníků C_1D_1A a C_2D_2A obdržíme opět pomocí kosinové věty:

$$x_{1,2} = \sqrt{4+16-16\cos(60° \mp \alpha)} = \\ = \sqrt{\frac{1}{2}\left(29 \mp 9\sqrt{5}\right)} \doteq \begin{cases} 2{,}107\,\text{cm}, \\ 4{,}956\,\text{cm}. \end{cases}$$

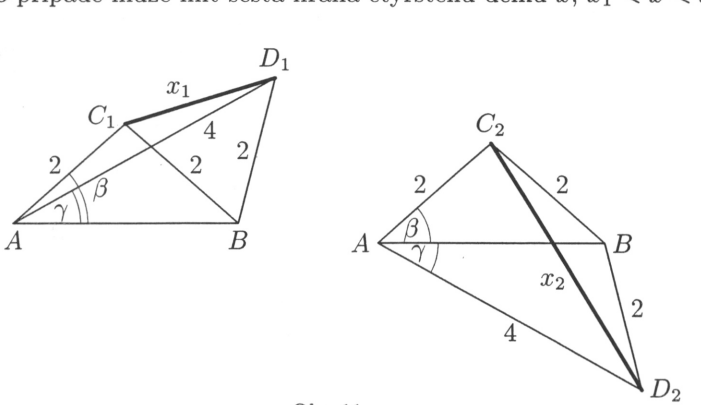
Šestá hrana čtyřstěnu má délku x větší než x_1 a menší než x_2.

Má-li ve čtyřstěnu $ABCD$ hrana AB společná stěnám, jejichž délky hran známe, délku 3 cm (obr. 11), zjistíme analogickým postupem jako v předchozím případě, že $\cos\beta = \frac{3}{4}$, $\sin\beta = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\cos\gamma = \frac{7}{8}$, $\sin\gamma = \frac{\sqrt{15}}{8}$. Je tedy

$$\cos(\beta \mp \gamma) = \frac{1}{32}\left(21 \pm \sqrt{105}\right),$$

$$x_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(19 \mp \sqrt{105}\right)} \doteq \begin{cases} 2{,}092\,\text{cm}, \\ 3{,}824\,\text{cm}. \end{cases}$$

V tomto případě může mít šestá hrana čtyřstěnu délku x; $x_1 < x < x_2$.



Obr. 11

B – I – 4

Rovnice mají tvar

$$3x^2 + 25x \pm c = 0; \quad c > 0.$$

Jejich diskriminanty jsou

$$D_{1,2} = 625 \mp 12c \tag{2}$$

a kořeny

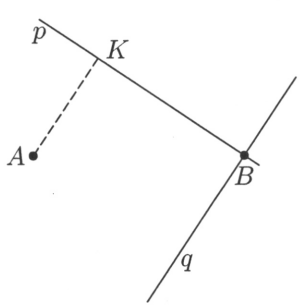
$$x_{1,2} = \frac{-25 \pm \sqrt{D_i}}{6}, \quad i = 1, 2.$$

Odtud $\pm\sqrt{D_i} = 25 + 6x_{1,2}$. Je-li některý z kořenů celé číslo, musí být také $\pm\sqrt{D_i}$ celé a dále některý z výrazů $-25 \pm \sqrt{D_i}$ je dělitelný šesti. Číslo $\sqrt{D_1} = \sqrt{625 - 12c} < 25$ budeme tedy hledat ve tvaru $\sqrt{D_1} = 6k \pm 1$, $k \in \mathbb{N}_0$. Ze vztahu (2) vyplývá, že $D_1 + D_2 = 1\,250$. $\sqrt{D_2} = \sqrt{1\,250 - D_1}$ musí být celé. Postupně volíme za $\sqrt{D_1}$ čísla 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 a určujeme $\sqrt{D_2}$. Zjistíme, že vyhovuje pouze $\sqrt{D_1} = 5$ nebo $\sqrt{D_1} = 17$.

V prvém případě je $c = \frac{1}{12}(625 - D_1) = 50$ a jedná se o rovnice $3x^2 + 25x \pm 50 = 0$, ve druhém případě to budou rovnice $3x^2 + 25x \pm 28 = 0$. Vyřešením rovnic se přesvědčíme, že vyhovují podmínkám úlohy. Existují tedy dvě různé dvojice rovnic, které jsou řešením dané úlohy.

B – I – 5

Označme p, q priamky, ktoré máme zostrojiť, tak, aby vzdialenosť bodu A od priamky q bola dvakrát väčšia ako od priamky q (obr. 12). Nech K je



Obr. 12

päta kolmice z A na p, teda $AK \parallel q$ a priamka BK je totožná s p. Priamky

p, q sú teda rovnobežky s odvesnami pravouhleho trojuholníka ABK a tieto odvesny sú rovnobežkami s odvesnami ľubovoľného trojuholníka, ktorý je s trojuholníkom ABK rovnoľahlý.

Odtiaľ vyplýva konštrukcia. Zostrojíme pravouhlý trojuholník RST tak, aby odvesna RS mala akúkoľvek zvolenú dĺžku a odvesna ST bola dvakrát dlhšia. Tento trojuholník otočíme napríklad podľa stredu R o taký uhol, aby otočený trojuholník $RS'T'$ mal preponu RT' rovnobežnú so stranou AB. Priamky p, q dostaneme ako rovnobežky s priamkami RS', $S'T'$.

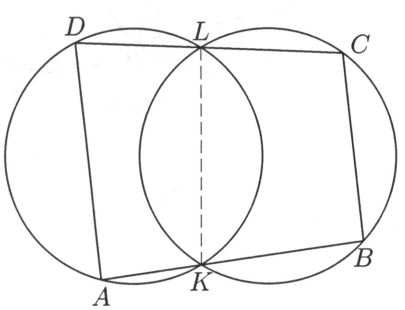
Úloha má dve riešenia, lebo okrem takto zostrojených priamok p, q vyhovujú aj ich obrazy v osovej súmernosti podľa priamky AB.

B – I – 6

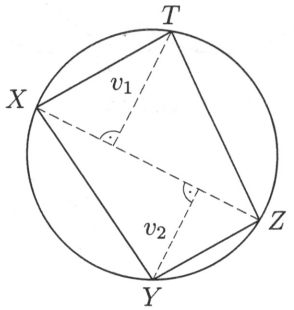
Čtyřúhelník maximálního obsahu musí obsahovat celou společnou tětivu kruhů, které jej pokrývají. Jinak bychom mohli jeho obsah zvětšit při zachování podmínek úlohy — mohli bychom posunout kruhy dál od sebe.

Rozeberme možnosti, které mohou nastat:

Čtyřúhelník (označme jej $ABCD$) se skládá ze dvou čtyřúhelníků vepsaných do kruhů — obr. 13. Tyto čtyřúhelníky $AKLD$, $KBCL$ mají maximální obsah, právě když to jsou čtverce.



Obr. 13



Obr. 14

Důkaz tvrzení, že ze všech čtyřúhelníků vepsaných do téhož kruhu má největší obsah čtverec, provedeme pomocí obr. 14. Čtyřúhelník $TXYZ$ je složen z trojúhelníků ZXY, ZXT. Jeho obsah je

$$O_{TXYZ} = \tfrac{1}{2}|XZ| \cdot v_1 + \tfrac{1}{2}|XZ| \cdot v_2 = \tfrac{1}{2}|XZ|(v_1 + v_2),$$

ale $|XZ| \leqq 2r$ a $v_1 + v_2 \leqq 2r$. Odtud

$$O_{TXYZ} \leqq \tfrac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r = 2r^2.$$

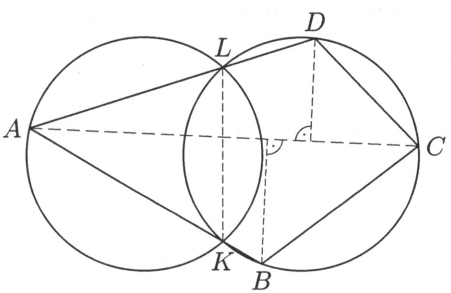
Rovnost nastane pouze pro čtverec vepsaný do daného kruhu.

Čtyřúhelník $ABCD$ ze zadání úlohy má v tomto případě maximální obsah $4r^2$.

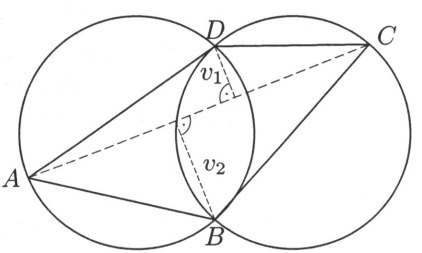
Čtyřúhelník se skládá z trojúhelníka vepsaného do prvního kruhu a pětiúhelníku vepsaného do druhého kruhu (obr. 15), nebo se skládá ze dvou trojúhelníků vepsaných do kruhů (obr. 16). V obou situacích odhadneme obsah čtyřúhelníku shora následujícím výrazem

$$\tfrac{1}{2}|AC| \cdot v_1 + \tfrac{1}{2}|AC| \cdot v_2 = \tfrac{1}{2}|AC| \cdot (v_1 + v_2)$$

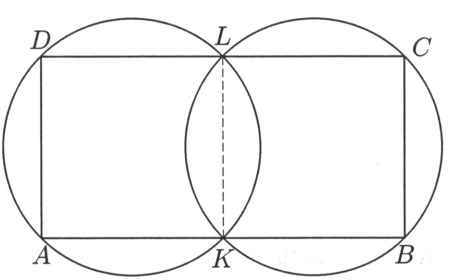
Podle obrázků platí $|AC| < 4r$, $v_1 + v_2 \leqq |BD| \leqq 2r$. V tomto případě je tedy obsah menší než $4r^2$.



Obr. 15



Obr. 16



Obr. 17

Čtyřúhelník maximálního obsahu je obdélník se stranami délky $\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ a $2\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$; je znázorněn na obr. 17.

B – S – 1

Je-li y hodnota dané odmocniny, je $x^2 - y^2 = p^3$, takže $(x-y)(x+y) = p^3$. Protože p je prvočíslo a čísla $x - y < x + y$ jsou přirozená, musí nastat jedna ze dvou možností

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = p^3, \end{cases} \quad \text{nebo} \quad \begin{cases} x - y = p, \\ x + y = p^2. \end{cases}$$

Snadný výpočet v obou případech dává

$$\begin{cases} x = \dfrac{1 + p^3}{2}, \\ y = \dfrac{p^3 - 1}{2}, \end{cases} \quad \text{resp.} \quad \begin{cases} x = \dfrac{p^2 + p}{2}, \\ y = \dfrac{p^2 - p}{2}. \end{cases}$$

(Tato čísla jsou přirozená pro každé liché $p \geqq 3$.) Pro funkci $f(p) = \frac{1}{2}(p^3 + 1)$ platí

$$f(11) = 666 \quad \text{a} \quad f(13) = 1\,099 > 10^3,$$

a pro funkci $g(p) = \frac{1}{2}(p^2 + p)$

$$g(43) = 946 \quad \text{a} \quad g(47) = 1\,128 > 10^3.$$

Hledané největší trojciferné číslo x je proto rovno 946.

B – S – 2

Je-li u společný kořen obou rovnic, pak

$$0 = (u^3 - u + 3p - 6) - (u^3 + u + 4p - 10) = -2u - p + 4,$$

odkud $u = -\frac{1}{2}p + 2$. Dosazením zpět do libovolné z obou rovnic dostaneme podmínku na číslo p, která je po úpravě tvaru kubické rovnice $p(p^2 - 12p + 20) = 0$ s kořeny $p_1 = 0$, $p_2 = 2$ a $p_3 = 10$. Snadno se přesvědčíme, že daná dvojice rovnic pak má skutečně společný kořen u rovný 2, 1 resp. -3.

B – S – 3

V úhlu AMB sestrojíme nejdříve pomocný trojúhelník $K'L'M$, který je stejnolehlý s hledaným trojúhelníkem KLM v některé stejnolehlosti

se středem M a kladným koeficientem, a přitom bod K' má od ramene MA vzdálenost 2 cm. Konstrukce bodů K' a L' je snadná: protože bod L' musí mít od ramene MB vzdálenost 1 cm, leží body K' a L' po řadě na polopřímkách PQ a RS, kde PQ dostaneme posunutím MA o 2 cm ve směru MB a RS posunutím MB o 1 cm ve směru MA. Protože bod L' je obrazem bodu K' při otočení se středem M o 60°, určíme L' jako průsečík polopřímky RS s polopřímkou $P'Q'$, která je obrazem PQ ve zmíněném otočení. (Bod K' je pak obrazem L' při opačném otočení.) Zobrazíme-li nakonec body K' a L' ve stejnolehlosti se středem M a koeficientem $5/|MK'|$, dostaneme hledané body K a L. Důkaz správnosti je zřejmý, úloha má jediné řešení (i když existují dvě různá otočení kol M o 60°, jen při jedné z nich protne obraz polopřímky PQ polopřímku RS).

B – II – 1

Umocníme-li první rovnici na druhou a od výsledku odečteme rovnici druhou, dostaneme $2xy = 4z$. Z dvojice rovnic $xy = 2z$ a $x + y = z + 2$ vyplývá, že $\{x, y\} = \{2, z\}$. Proto $x^3 + y^3 = z^3 + 8$, takže $a = 8$ je jediná hodnota, kdy má soustava řešení. Všechna řešení pro $a = 8$ jsou trojice (x, y, z) tvaru $(2, p, p)$ nebo $(p, 2, p)$, kde p je libovolný parametr.

B – II – 2

Pro výšku v na přeponu a odvěsny a, b platí $v\sqrt{a^2 + b^2} = ab$, neboli $v^2(a^2 + b^2) = a^2b^2$. Protože v je prvočíslo, plyne odtud $v \mid a$ nebo $v \mid b$. Nechť $a = mv$ pro vhodné celé $m > 1$ (bez újmy na obecnosti). Po dosazení do rovnice a krácení číslem v^2 dostaneme $m^2v^2 + b^2 = m^2b^2$, neboli $m^2v^2 = b^2(m^2 - 1)$. Z poslední rovnice plyne, že (kladné) číslo $m^2 - 1$ je druhou mocninou celého čísla, a to je spor, neboť

$$(m-1)^2 < m^2 - 1 < m^2 \quad \text{pro každé} \quad m > 1.$$

Žádný takový trojúhelník proto neexistuje.

Jiné řešení. Podle Eukleidovy věty výška v na přeponu a odvěsny a, b splňují rovnost $v^2 = \sqrt{a^2 - v^2}\sqrt{b^2 - v^2}$, neboli $v^4 = (a^2 - v^2)(b^2 - v^2)$. Protože v je prvočíslo a činitelé $(a^2 - v^2)$, $(b^2 - v^2)$ jsou dvě celá čísla větší než 1, je buď jedno z nich v a druhé v^3, nebo jsou obě rovna v^2. Druhá možnost vede k $a = b = v\sqrt{2}$, a to je spor, neboť číslo $v\sqrt{2}$ je iracionální. Zkoumejme první možnost: předpokládejme $a^2 - v^2 = v$ bez

újmy na obecnosti. Z rovnosti $a^2 = v^2 + v$ plyne $v < a < v + 1$, což pro celá a, v nemůže nastat. Žádný takový trojúhelník proto neexistuje.

B – II – 3

Nerovnost $q^2 > 4pr$ jistě platí, pokud $pr < 0$. Pokud $pr \geqq 0$, rozlišíme dva případy: jsou-li obě čísla p a r nezáporná, pak můžeme umocnit nerovnost $q > p + r$ a dostat tak

$$q^2 > (p + r)^2 = (p - r)^2 + 4pr \geqq 4pr;$$

jsou-li obě čísla p a r nekladná, pak umocněním nerovnosti $2q \geqq -4p - r$ $(\geqq 0)$ dostaneme

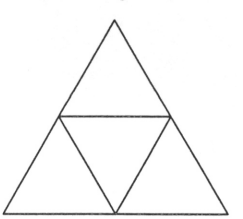
$$4q^2 > (4p + r)^2 = (4p - r)^2 + 16pr \geqq 16pr.$$

V obou případech tedy platí $q^2 > 4pr$.

Jiné řešení. Označíme-li $f(x) = px^2 + qx + r$, bude podle zadání $f(-1) < 0$ a $f(2) > 0$. To je možné, jen když diskriminant $q^2 - 4pr$ kvadratického trojčlenu f je kladný.

B – II – 4

Jednou z pěti plachet musejí být přikryty aspoň dva body z množiny, která je tvořena třemi vrcholy trojúhelníku a třemi středy jeho stran. To ale znamená, že strana plachty je přinejmenším rovna aspoň polovině strany celého záhonu. Ten se pak dá pokrýt čtyřmi plachtami podle obr. 18.



Obr. 18

Kategorie A

Texty úloh

A – I – 1

Uvažujme n jednotkových kružnic se středy ve vrcholech konvexního mnohoúhelníku. Dokažte, že na některé z těchto kružnic existuje oblouk délky $2\pi/n$, který nemá společný bod s žádnou jinou z uvažovaných kružnic.

A – I – 2

Najděte všechny hodnoty parametru p, pro který existují reálná čísla x, y, z taková, že

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4, \\ xy + yz + zx &= 4, \\ xyz &= p. \end{aligned}$$

A – I – 3

Jsou dány dvě rekurentní posloupnosti

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 5a_n + 2b_n, \\ b_{n+1} &= -2a_n + b_n, \\ a_1 &= 12, \quad b_1 = -3. \end{aligned}$$

Najděte n-tý člen obou posloupností.

A – I – 4

Označme S obsah trojúhelníku ABC a ϱ poloměr jeho kružnice vepsané, v výšku čtyřstěnu $ABCD$ na stěnu ABC. Pro povrch P čtyřstěnu $ABCD$

pak platí

$$P \geqq S\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{v}{\varrho}\right)^2}\right).$$

Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost.

A – I – 5

Ve čtvercovém schématu je zapsáno $1\,000 \times 1\,000$ celých čísel. Přitom každá dvě sousední čísla v řádku nebo ve sloupci se liší nejvýše o 100. Dokažte, že mezi zapsanými čísly je jedno, jež se ve schématu vyskytuje aspoň šestkrát.

A – I – 6

Dokažte, že pro $n \geqq 1$ má zlomek $\dfrac{3n+1}{n(2n-1)}$ nekonečný periodický rozvoj.

A – S – 1

Pre ktoré hodnoty reálneho parametra p má sústava rovníc

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} &= 1, \\ x^2+y^2+z^2 &= p \end{aligned}$$

riešenie v obore reálnych čísel?

A – S – 2

Pro každé přirozené číslo n jsou přirozená čísla a_n, b_n určena podmínkou $a_n + b_n\sqrt{5} = \left(3+\sqrt{5}\right)^n$. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n jsou obě čísla $a_n + b_n$, $a_n - b_n$ dělitelná číslem 2^n.

A – S – 3

V pravidelném čtyřstěnu $ABCD$ označme P patu výšky vedené bodem D na rovinu ABC a M střed úsečky DP. Rovina rovnoběžná s přímkou BC a obsahující přímku AM rozdělí čtyřstěn na dvě části. Určete poměr jejich objemů.

A – II – 1

Určte dvaciaty člen postupnosti prirodzených čísel (a_k), ak je člen $a_{1\,992}$ rovný prvočíslu 1 993 a pre každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{k+1} = a_k + n(a_k, a_{k+1}) - D(a_k, a_{k+1}),$$

kde $n(x, y)$, resp. $D(x, y)$ označuje najmenší spoločný násobok, resp. najväčší spoločný deliteľ čísel x, y.

A – II – 2

Je dána kružnice k a na ní dva různé body A, B. Uvažujme kružnice k_1, k_2 takové, že k_1 se dotýká k zevnitř v bodě A, k_2 se dotýká k zevnitř v bodě B a obě kružnice k_1, k_2 se navzájem dotýkají v bodě C. Najděte množinu všech takto vzniklých bodů C.

A – II – 3

Ak pre reálne nenulové čísla x, y, z platí

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1,$$

potom $xy + yz + zx < 0$. Dokážte.

A – II – 4

Uvažujme čtyřstěn $ABCD$, jehož stěna ABC má obsah $60\,\mathrm{cm}^2$ a žádná z jejích stran a, b, c není delší než 13 cm. Přitom zvolíme-li jejich označení tak, že $a \geqq b \geqq c$, mají aspoň dvě z hran DA, DB, DC čtyřstěnu délku b. Určete největší možný objem takového čtyřstěnu.

A – III – 1

Pre ktoré prirodzené číslo n je číslo $7^n - 1$ násobkom čísla $6^n - 1$?

A – III – 2

V tabulce 19×19 jsou zapsána celá čísla tak, že čísla zapsaná v sousedních políčkách se liší nejvýše o 2. Jaký je nejvyšší možný počet různých čísel v takovéto tabulce? (Dvě políčka tabulky považujeme za sousední, mají-li společnou stranu.)

A – III – 3

V rovině je dán trojúhelník AKL takový, že $|\sphericalangle ALK| > 90° + |\sphericalangle LAK|$. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, $AB \parallel CD$, tak, aby bod K ležel na straně BC, bod L ležel na úhlopříčce AC a průsečík S úseček AK a BL byl středem kružnice opsané lichoběžníku $ABCD$.

A – III – 4

Daná je postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ prirodzených čísel určená rekurentne takto: $a_1 = 2$, pre každé $n \geqq 1$ je a_{n+1} rovné súčtu desiatych mocnín cifier čísla a_n. Rozhodnite, či sa môže v postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vyskytnúť nejaká hodnota dvakrát.

A – III – 5

Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ také, že

$$f(x) + f(y) = f(x + 2xy) + f(y - 2xy) \tag{1}$$

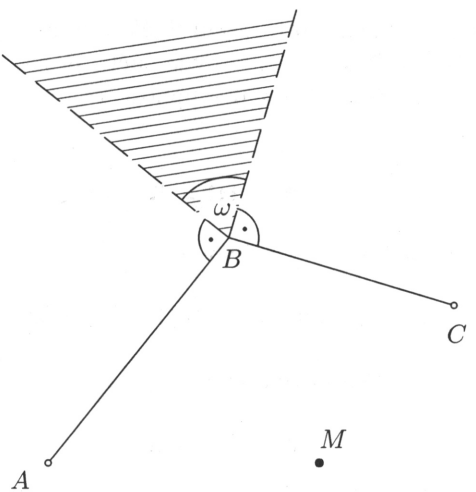
platí pre každé x, y celé a naviac $f(-1) = f(1)$.

A – III – 6

Dokažte, že existuje čtyřstěn, který lze rozdělit na osm shodných čtyřstěnů podobných původnímu.

A – I – 1

Uvažujme nejprve konvexní úhel ABC a jeho vnitřní bod $M \neq B$ a dále dvě kružnice se stejnými poloměry a se středy v bodech M a B (obr. 19).



Obr. 19

Průsečíky těchto kružnic (existují-li) leží v polorovině určené bodem M a přímkou procházející bodem B kolmo k BM. Tyto průsečíky tedy neleží uvnitř úhlu s vrcholem B, jehož ramena jsou kolmá k BA, BC a neleží v úhlu ABC.

Buďte nyní A, B, C sousední vrcholy konvexního mnohoúhelníku. Průsečíky jednotkové kružnice, která má střed ve vrcholu B, s jednotkovými kružnicemi, které mají středy v ostatních vrcholech, neleží uvnitř úhlu ω, neboť tyto vrcholy leží v úhlu ABC. Zbývá uvážit, že nejmenší z vnitřních úhlů n-úhelníku není větší než ω, takže největší z příslušných úhlů není menší než $2\pi/n$.

A – I – 2

Podle známých vztahů mezi kořeny a koeficienty mnohočlenu má daná soustava rovnic řešení v oboru reálných čísel, právě když mnohočlen

$$f(t) = t^3 - 4t^2 + 4t - p$$

má tři reálné kořeny. Vyšetříme průběh této funkce. Zřejmě

$$\lim_{t\to-\infty} f(t) = -\infty, \qquad \lim_{t\to\infty} f(t) = \infty.$$

Protože f má derivaci

$$f'(t) = 3t^2 - 8t + 4 = 3\left(t^2 - \frac{8}{3}t + \frac{4}{3}\right) = 3\left(t - \frac{2}{3}\right)(t-2),$$

funkce $f(t)$ v intervalech $(-\infty, \frac{2}{3})$ a $(2, \infty)$ roste a v intervalu $(\frac{2}{3}, 2)$ klesá. Funkce má tedy v bodě $t_1 = \frac{2}{3}$ lokální maximum a v bodě $t_2 = 2$ lokální minimum. Mnohočlen bude mít tři reálné kořeny (počítány i s násobností), právě když $f(t_1) \geqq 0$ a zároveň $f(t_2) \leqq 0$. Snadno zjistíme, že to nastane, právě když $p \in \langle 0, \frac{32}{27} \rangle$.

A – I – 3

Uvažujme posloupnost c_n definovanou vztahem

$$c_n = a_n + b_n.$$

Protože

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= a_{n+1} + b_{n+1} = 5a_n + 2b_n - 2a_n + b_n = \\ &= 3a_n + 3b_n = 3c_n, \\ c_1 &= 12 - 3 = 9, \end{aligned}$$

je $c_n = 3^{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Odtud

$$\begin{aligned} b_n &= c_n - a_n = 3^{n+1} - a_n, \\ a_{n+1} &= 5a_n + 2\left(3^{n+1} - a_n\right) = 3a_n + 2 \cdot 3^{n+1}. \end{aligned} \qquad (*)$$

Z tohoto rekurentního vztahu můžeme posloupnost a_n určit např. takto: Všimneme si, že $3^n \mid a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a položíme

$$a_n = 3^n x_n.$$

Dosadíme-li do (∗), dostaneme

$$x_{n+1} = x_n + 2,$$

a protože $x_1 = 4$, máme

$$x_n = 2(n+1), \qquad a_n = 2 \cdot 3^n(n+1),$$
$$b_n = 3^{n+1} - a_n = -3^n(2n-1).$$

Snadno se přesvědčíme, že tyto posloupnosti a_n, b_n splňují požadavky úlohy.

A – I – 4

Označme Q patu výšky čtyřstěnu na stěnu ABC, a, b, c délky stran trojúhelníku ABC a x, y, z vzdálenosti bodu Q od stran BC, CA, AB. Pro obsah $S(BCD)$ trojúhelníku BCD platí

$$S(BCD) = \frac{1}{2}\, a\sqrt{v^2 + x^2} \geqq \frac{1}{2}\, a\, \frac{v^2 + \varrho x}{\sqrt{v^2 + \varrho^2}}$$

(podle Cauchyovy nerovnosti

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,\sqrt{y_1^2 + y_2^2} \geqq |x_1 y_1 + x_2 y_2|,$$

v níž nastane rovnost, právě když $x_1 y_2 = x_2 y_1$), analogicky

$$S(ACD) \geqq \frac{1}{2}\, b\, \frac{v^2 + \varrho y}{\sqrt{v^2 + \varrho^2}}, \qquad S(ABD) \geqq \frac{1}{2}\, c\, \frac{v^2 + \varrho z}{\sqrt{v^2 + \varrho^2}}.$$

Je tedy

$$\begin{aligned} P &= S + S(BCD) + S(ACD) + S(ABD) \geqq \\ &\geqq S + \frac{1}{2\sqrt{v^2 + \varrho^2}}\left[a(v^2 + \varrho x) + b(v^2 + \varrho y) + c(v^2 + \varrho z)\right] = \\ &= S + \frac{1}{2\sqrt{v^2 + \varrho^2}}(a\varrho + b\varrho + c\varrho) + \frac{\varrho}{\sqrt{v^2 + \varrho^2}}(ax + by + cz). \end{aligned}$$

Přitom

$$\frac{1}{2}(ax + by + cz) = S(BCD) + S(ACD) + S(ABD) \geqq S,$$

protože trojúhelník ABC je vždy obsažen ve sjednocení trojúhelníků BCQ, ACQ, ABQ. (Rovnost zde nastane, právě když bod Q leží v trojúhelníku ABC.) Je tedy

$$P \geqq S + \frac{v^2}{\varrho\sqrt{v^2+\varrho^2}}S + \frac{\varrho}{\sqrt{v^2+\varrho^2}}S = S\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{v}{\varrho}\right)^2}\right).$$

Rovnost nastane, právě když $\varrho = x = y = z$, tj. právě když bod Q splyne se středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC.

Poznámka. Ze všech čtyřstěnů daného objemu a s danou podstavou má nejmenší povrch ten, který má shodné odchylky všech tří pobočných stěn od podstavy. Ze všech čtyřstěnů daného objemu s podstavou daného obsahu má nejmenší povrch právě ten, jehož podstava je navíc rovnostranný trojúhelník.

A – I – 5

Zvolme libovolná dvě čísla ve schématu. Od jednoho k druhému se můžeme dostat nanejvýš $999 + 999 = 1\,998$ kroky tak, že postupně procházíme přes sousední čísla. Žádná dvě čísla ve schématu se tedy neliší více než o 199 800, proto čísla ve schématu nabývají nanejvýš 199 801 různých hodnot. Kdyby tam byla každá hodnota zastoupena nejvýše pětkrát, nebylo by ve schématu více než $5 \cdot 199\,801 < 10^6$ čísel, je jich tam však milión. Musí tam tedy být aspoň jedno číslo nejméně šestkrát.

A – I – 6

Nejprve prozkoumáme soudělnost čitatele a jmenovatele. Čísla $3n+1$, n jsou zřejmě nesoudělná a čísla $3n+1$, $2n-1$ mohou mít jako společného dělitele jedině číslo 5: je-li d jejich společný dělitel, $3n+1 = da$, $2n-1 = db$, je

$$d(2a-3b) = 2(3n+1) - 3(2n-1) - 5.$$

Všechna uvažovaná čísla jsou racionální a jejich desetinné rozvoje mohou tedy být, jak známo, buď konečné, nebo nekonečné periodické (ke zdůvodnění je potřeba vědět něco málo o nekonečných řadách).

Vyloučíme první případ: Konečný rozvoj mají právě ty zlomky v základním tvaru, které mají jmenovatele tvaru $2^r 5^s$ (to vidíme hned, uvědomíme-li si, že vynásobením takového zlomku vhodnou mocninou deseti dostaneme celé číslo). Dejme tomu, že jmenovatel našeho zlomku má

tento tvar (o to, zda je v základním tvaru, se starat nemusíme, zkrátit by šel, jak už víme, leda číslem 5). Čísla n, $2n-1$ jsou nesoudělná, $2n-1$ je liché, musí tedy být $n = 2^r$, $2n - 1 = 5^s$. Potom je

$$2^{p+1} = 5^s + 1 = (4+1)^s + 1.$$

Toto číslo dává při dělení čtyřmi zbytek 2 (binomická věta), je tedy $r = 0$, $s = 0$ a $n = 1$. Pro $n > 1$ tento případ nemůže nastat a rozvoj je nekonečný.

A – S – 1

Protože

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx),$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + yz + zx}{xyz},$$

je uvedená soustava tří rovnic pro $xyz \neq 0$ ekvivalentní soustavě

$$x + y + z = 1,$$
$$xy + yz + zx = \frac{1-p}{2},$$
$$xyz = \frac{1-p}{2}.$$

Dále postupujeme jako při řešení úlohy A–I–2: Čísla x, y, z jsou řešením této soustavy, právě když jsou řešením rovnice

$$t^3 - t^2 + \frac{1-p}{2}\,t - \frac{1-p}{2} = 0,$$

neboli

$$(t-1)\left(t^2 + \frac{1-p}{2}\right) = 0.$$

Je zřejmé, že poslední rovnice má tři *nenulové* reálné kořeny, právě když pro parametr p platí $p > 1$.

Jiné řešení dostaneme, jestliže dosadíme z z první rovnice do druhé; po úpravě dostaneme $(x+y)(1-x)(1-y) = 0$. Odtud plyne, že aspoň jedno z čísel x, y, z je rovno 1. Dále postupujeme stejně jako v předešlém řešení.

A – S – 2

Využijeme toho, že dvě čísla $a+b\sqrt{5}$, $c+d\sqrt{5}$, kde a, b, c, d jsou celá čísla, se rovnají, právě když $a = c$ a $b = d$ (to plyne z iracionality čísla $\sqrt{5}$). Po roznásobení pravé strany rovnosti

$$a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{5} = \left(a_n + b_n\sqrt{5}\right)\left(3 + \sqrt{5}\right)$$

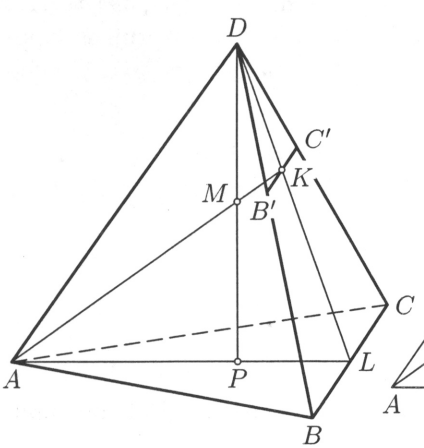
tak dostaneme dva rekurentní vztahy

$$a_{n+1} = 3a_n + 5b_n,$$
$$b_{n+1} = a_n + 3b_n.$$

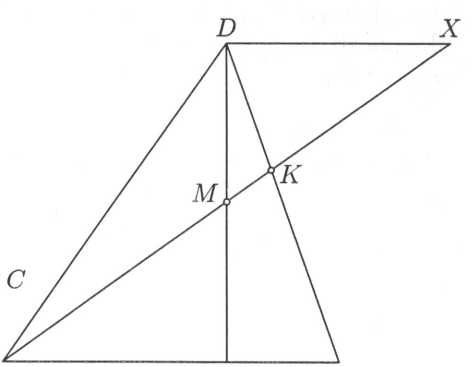
Tvrzení úlohy dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 1$ je $a_1 = 3$, $b_1 = 1$, takže $a_1 + b_1 = 4$, $a_1 - b_1 = 2$, tj. obě čísla jsou dělitelná dvěma. Předpokládejme, že $a_n + b_n$, $a_n - b_n$ jsou dělitelná číslem 2^n. Potom je $a_{n+1} + b_{n+1} = 4a_n + 8b_n = 6(a_n + b_n) - 2(a_n - b_n)$, takže $a_{n+1} + b_{n+1}$ je dělitelné číslem 2^{n+1}. Podobně je i $a_{n+1} - b_{n+1} = 2a_n + 2b_n = 2(a_n + b_n)$ dělitelné číslem 2^{n+1}. Tím je důkaz hotov.

A – S – 3

Označme K průsečík přímky AM s rovinou BCD, L střed úsečky BC a B', C' průsečíky dané roviny s hranami DB, DC (obr. 20).



Obr. 20



Obr. 21

Bodem D veďme přímku rovnoběžnou s přímkou AL a její průsečík s přímkou AK označme X (obr. 21 ukazuje situaci v rovině AKD). Trojúhelníky ALK a XDK jsou souměrně sdružené podle středu M, takže $|DX| = |AP|$. Ze stejnolehlosti trojúhelníků $ALK \sim XDK$ vychází

$$\frac{|DK|}{|KL|} = \frac{|DX|}{|AL|} = \frac{|AP|}{|AL|} = \frac{2}{3},$$

neboť P je těžiště trojúhelníku ABC. Je tedy

$$\frac{|DK|}{|DL|} = \frac{|DK|}{|DK| + |KL|} = \frac{1}{1 + \dfrac{|KL|}{|DK|}} = \frac{2}{5}.$$

Objemy čtyřstěnů $AB'C'D$ a $ABCD$ jsou ve stejném poměru jako obsahy trojúhelníků $B'C'D$ a BCD, tj. $4 : 25$. Hledaný poměr je tedy $4 : 21$.

A – II – 1

Nejmenší společný násobek $n = n(a, b)$ dvou přirozených čísel $a > b$ a jejich největší společný dělitel $d = D(a, b)$ zřejmě splňují nerovnost $n \geqq a > b \geqq d$, přičemž znaménko rovnosti v obou krajních nerovnostech nastane, právě když $b \mid a$. To ale znamená, že $n - d \geqq a - b$ s rovností, právě když $b \mid a$.

Pro danou posloupnost (a_k) odtud tedy plyne, že $a_1 \mid a_2$, $a_2 \mid a_3$, ..., $a_{1\,990} \mid a_{1\,991}$, $a_{1\,991} \mid a_{1\,992}$. Protože 1 993 je prvočíslo, vyskytují se v posloupnosti $(a_k)_1^{1\,992}$ jen čísla 1 a 1 993. Proto je buď $a_{20} = 1$, nebo $a_{20} = 1\,993$.

Jiné řešení. Označme $D = D(a_k, a_{k+1})$, potom je $a_{k+1} = cD$, $a_k = dD$, kde c, d jsou nesoudělná čísla. Podle předpokladu pro dané k platí

$$cD = dD + cdD - D,$$

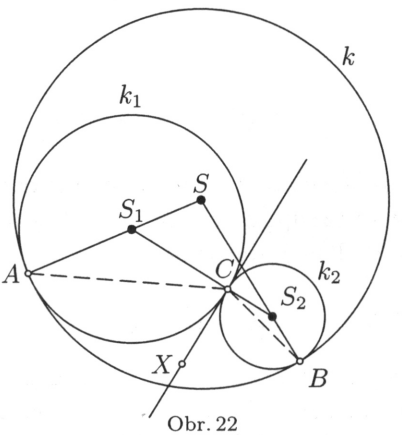
tj.

$$(c + 1)(d - 1)D = 0,$$

takže $d = 1$. Je tedy a_{k+1} přirozeným násobkem čísla a_k. Dále postupujeme stejně.

A – II – 2

Uvažujme společnou tečnu kružnic k_1, k_2 v bodě C. Pro úsekové úhly příslušné tětivám AC a BC platí (obr. 22)



Obr. 22

$$|\sphericalangle XCA| = \tfrac{1}{2}|\sphericalangle AS_1C|, \qquad |\sphericalangle XCB| = \tfrac{1}{2}|\sphericalangle CS_2B|,$$

takže

$$\begin{aligned} |\sphericalangle ACB| &= \tfrac{1}{2}\left(|\sphericalangle AS_1C| + |\sphericalangle CS_2B|\right) = \\ &= \tfrac{1}{2}\left(2\pi - |\sphericalangle SS_1C| - |\sphericalangle SS_2C|\right) = \\ &= \tfrac{1}{2}\left(2\pi - (\pi - |\sphericalangle ASB|)\right) = \\ &= \frac{\pi + |\sphericalangle ASB|}{2} = \text{konst.} \end{aligned}$$

Bod C tedy leží na oblouku příslušné kružnice nad tětivou AB. Je-li ovšem $|\sphericalangle ASB| = 180°$ (body A, B jsou krajními body průměru dané kružnice k), vychází $|\sphericalangle ACB| = 180°$, takže hledanou množinu bodů C tvoří vnitřek úsečky AB.

Naopak pro libovolný bod tohoto oblouku (resp. úsečky AB) různý od bodů A, B sestrojme kružnice k_1', resp. k_2' tak, aby se dotýkaly kružnice k v bodě A, resp. B a procházely bodem C. Obrácením předchozího postupu je vidět, že obě kružnice mají v bodě C společnou tečnu.

A – II – 3

Podle předpokladu pro daná nenulová reálná čísla x, y, z platí

$$(x+y+z)(xy+yz+zx) = xyz,$$

což po úpravě dává

$$(x+y)(y+z)(z+x) = 0.$$

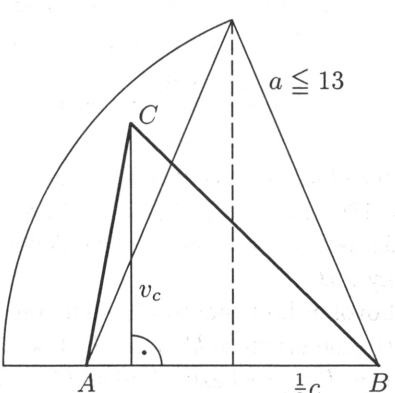
Protože daná rovnost je invariantní vůči permutacím čísel x, y, z, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že je např. $y = -x$, a tudíž i $xy + yz + zx = -x^2 < 0$. Tím je důkaz hotov.

A – II – 4

Předpokládejme, že pro hrany a, b, c platí $13 \geqq a \geqq b \geqq c$. Jednu ze stěn uvažovaného čtyřstěnu při vrcholu D tvoří rovnoramenný trojúhelník s rameny délky b, pro jehož výšku na základnu x, a tedy i pro výšku v čtyřstěnu při vrcholu D platí

$$v \leqq \sqrt{b^2 - \tfrac{1}{4}x^2} \leqq \sqrt{13^2 - \tfrac{1}{4}c^2}.$$

Odtud je zřejmé, že objem $V = \frac{1}{3}v \cdot 60$ čtyřstěnu $ABCD$ bude největší, bude-li délka strany c co nejmenší (a uvažovaná stěna bude zároveň kolmá na stěnu ABC).



Obr. 23

Pro výšku v_c trojúhelníku ABC podobně platí $v_c \leqq \sqrt{13^2 - \frac{1}{4}c^2}$ (obr. 23), a protože $60 = \frac{1}{2}cv_c$, splňuje c nerovnici

$$60 \leqq \tfrac{1}{2}c\sqrt{13^2 - \tfrac{1}{4}c^2}.$$

Vyřešením této nerovnice dostaneme pro délku strany c nerovnost $10 \leqq c \leqq 24$. Pro $c = 10$ pak vyjde $v = 12$, takže maximální objem uvažovaného čtyřstěnu je $V = \frac{1}{3} \cdot 60 \cdot 12 = 240\,\mathrm{cm}^3$.

A – III – 1

Je jasné, že každé číslo tvaru $6^n - 1 = (6-1)(6^{n-1} + \ldots + 1)$ pro n přirozené je dělitelné pěti. Probereme-li zbytky mocnin 7^i, $1 \leqq i \leqq 5$, zjistíme, že $7^n - 1$ je dělitelné pěti právě jen pro čísla n tvaru $n = 4k$ (tomu, kdo zná malou Fermatovu větu, stačí probrat mocniny 7, 7^2 a 7^4). Pro taková čísla n však platí, že $6^n - 1 = 6^{4k} - 1 = 36^{2k} - 1 = (7 \cdot 5 + 1)^{2k} - 1$ je dělitelné sedmi. Číslo $7^n - 1$ tedy nemůže být násobkem čísla $6^n - 1$ pro žádné přirozené n, protože není dělitelné sedmi.

A – III – 2

Uvažujme tabulku $n \times n$, $n \geqq 3$, a označme m nejmenší a M největší z čísel tabulky.

Cestou mezi políčky tabulky o souřadnicích (i, j) a (k, l) nazveme každou posloupnost sousedních políček tabulky, která začíná v (i, j) a končí v (k, l). Vzdálenost dvou políček tabulky o souřadnicích (i, j) a (k, l) definujeme jako $|i - k| + |j - l|$. Je jasné, že pro takovouto vzdálenost libovolných dvou políček tabulky platí, že je nejvýše rovna $2n - 2$.

Pokud je vzdálenost políček s čísly m a M menší, tedy nejvýše $2n - 3$, dostaneme pro rozdíl $M - m$ odhad $M - m \leqq 2(2n - 3) = 4n - 6$, takže tabulka může obsahovat nejvýše $4n - 5$ různých čísel (víc se jich do intervalu $\langle m, M \rangle$ nevejde).

Je-li vzdálenost políček s čísly m a M právě $2n - 2$ (maximální možná), musí příslušná políčka ležet v protějších rozích tabulky. V takovém případě označme k počet různých čísel v dané tabulce a nechť $b_1 = m < b_2 < \ldots < b_{k-1} < b_k = M$ jsou všechna čísla v ní zapsaná. Vzdálenost mezi políčky obsahujícími čísla b_2 a b_{k-1} je nejvýše $2n - 4$, a proto $b_{k-1} - b_2 \leqq 2(2n - 4) = 4n - 8$. Pro rozdíl čísel M a m tak máme

$$M - m = (M - b_{k-1}) + (b_{k-1} - b_2) + (b_2 - m) \leqq$$
$$\leqq (M - b_{k-1}) + 4n - 8 + (b_2 - m).$$

Podle toho, zda některé z čísel $M - b_{k-1}$ a $b_2 - m$ je 1 nebo 2, odtud plyne, že může nastat jedna z následujících tří možností:

1) $M - m \leqq 4n - 6$,

2) $M - m \leqq 4n - 5$, přičemž tabulka neobsahuje buď číslo $m + 1$, nebo číslo $M - 1$,

3) $M - m \leqq 4n - 4$, přičemž tabulka neobsahuje ani jedno z čísel $m + 1$ a $M - 1$.

V každém případě vychází, že tabulka obsahuje nejvýše $4n - 5$ různých celých čísel intervalu $\langle m, M \rangle$.

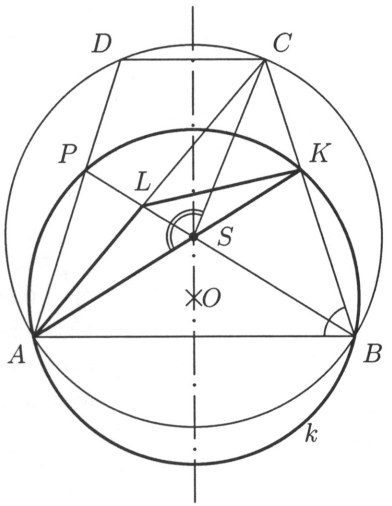
Nyní stačí ukázat, že do tabulky $n \times n$ lze zapsat čísla $1, 2, 3, \ldots, 4n - 5$ tak, aby byly splněny podmínky úlohy. To můžeme udělat například tak, že rozmístíme čísla podle schématu

1	3	5	...	$2n - 3$	$2n - 1$
2	4	6	...	$2n - 2$	$2n$
4	6	8	...	$2n$	$2n + 1$
.....					
$2n - 4$	$2n - 2$	$2n$	...	$4n - 8$	$4n - 7$
$2n - 2$	$2n$	$2n + 2$	...	$4n - 6$	$4n - 5$

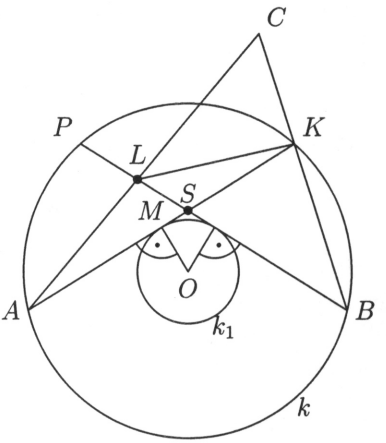
A – III – 3

Předpokládejme, že hledaný lichoběžník $ABCD$ existuje. Protože obvodovému úhlu ABC v kružnici opsané trojúhelníku ABC přísluší středový úhel ASC (obr. 24), jehož velikost je $180° - 2|\sphericalangle LAK|$, známe velikost úhlu $\beta = |\sphericalangle ABC| = 90° - |\sphericalangle LAK|$ hledaného lichoběžníku. Jeho vrchol B tedy leží na oblouku l kružnice k o středu O, kterému nad tětivou AK v polorovině opačné k polorovině AKL odpovídá obvodový úhel β. Protože $|\sphericalangle ALK| > 180° - \beta$, je bod L vnitřním bodem kruhu vymezeného kružnicí k.

Uvažujme průsečík P kružnice k s ramenem AD lichoběžníku $ABCD$. Ze souměrnosti podle osy SO úsečky AB plyne, že bod P je v této souměrnosti obrazem bodu K, bod L leží uvnitř úsečky BP a platí $|AK| = |BP|$. Odtud plyne konstrukce tětivy BP: Daným bodem L je nutno vést takovou přímku, která by na již sestrojené kružnici k vyťala tětivu BP dané délky $|AK|$. Takovou přímku sestrojíme jako tečnu vedenou bodem L ke kružnici k_1 soustředné s kružnicí k, jejíž poloměr je roven $|OM|$, kde M je střed AK. Protože $|AS| = |CS| > |SK|$, vybereme



Obr. 24



Obr. 25

ze dvou takových tečen tu, která protíná úsečku MK (a ne MA, obr. 25). Bod C pak najdeme jako průsečík polopřímek AL a BK.

Důkaz správnosti konstrukce. Stačí ověřit, že průsečík S sestrojené tětivy BP s úsečkou MK je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a že $|\sphericalangle CAB| < |\sphericalangle ABC|$ (pak je totiž možné doplnit ABC na lichoběžník $ABCD$). Předně ze shodnosti tětiv AK a BP ihned plyne, že $|AS| = |BS|$. Označme $\delta = |\sphericalangle LAK|$ a $\varepsilon = |\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle SBA|$. Podle konstrukce je $|\sphericalangle CBA| = \beta = 90° - \delta$ a z jednotlivých trojúhelníků plyne

$$\begin{aligned}
BSA\colon\ |\sphericalangle BSA| &= 180° - |\sphericalangle SAB| - |\sphericalangle SBA| = 180° - 2\varepsilon,\\
BAL\colon\ |\sphericalangle BLA| &= 180° - |\sphericalangle LBA| - |\sphericalangle LAB| = 180° - \varepsilon - (\varepsilon + \delta) =\\
&= 180° - 2\varepsilon - \delta,\\
BCL\colon\ |\sphericalangle BCL| &= 180° - |\sphericalangle CBL| - |\sphericalangle CLB| =\\
&= 180° - (90° - \delta - \varepsilon) - (2\varepsilon + \delta) = 90° - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Platí tedy $|\sphericalangle BSA| = 2|\sphericalangle BCA|$, a to podle věty o středovém a obvodovém úhlu znamená, že bod C leží na kružnici o středu S procházející body A a B. Konečně platí

$$|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle LAB| < |\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle KBA| = |\sphericalangle CBA|,$$

Diskuse. Protože přímky LA a LK kružnici k_1 neprotínají a přímka LM je její sečna, lze bodem L proložit právě jednu tečnu ke kružnici

k_1, která protne úsečku MK (druhá tečna protne úsečku MA). Existence bodu C: Polopřímky AL a BK se protnou (v jediném bodě), pokud $|\sphericalangle LAB| + |\sphericalangle ABK| < 180°$. Protože platí $|\sphericalangle LAB| < |\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle ABK| = \beta < 90°$, je také $|\sphericalangle LAB| + |\sphericalangle ABK| < 2\beta < 180°$. Úloha má proto jediné řešení.

A – III – 4

Ukážeme, že daná posloupnost je shora omezená číslem 10^{12}. Z čísel menších než 10^{12} má zřejmě největší součet desátých mocnin svých číslic číslo $10^{12} - 1$, přičemž je $12 \cdot 9^{10} < 12 \cdot 10^{10} < 10^{12}$. V omezené (nekonečné) posloupnosti se aspoň jedna hodnota vyskytuje dokonce nekonečněkrát.

A – III – 5

Položíme-li v (1) $x := -y$ a $y := x$, dostaneme

$$f(-y) + f(x) = f(-y - 2xy) + f(x + 2xy). \tag{2}$$

Odečtením (2) a (1) vyjde rovnost

$$f(y) - f(-y) = f\big(y(1 - 2x)\big) - f\big(y(-1 - 2x)\big).$$

Protože $1-2x$ a $-1-2x$ jsou libovolná dvě sousední lichá čísla, usoudíme, že f je lineární na množině všech lichých násobků pevného čísla y. Tedy

$$f(x) = a_k x + b_k \qquad (x \in \mathsf{T}_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots),$$

kde T_k značí množinu všech lichých násobků čísla 2^k.

Abychom zjistili čísla a_k, b_k, dosadíme do (1): je-li $x \in \mathsf{T}_k$ a $y \in \mathsf{T}_l$, je ovšem

$$x(1 + 2y) \in \mathsf{T}_k \qquad \text{a} \qquad y(1 - 2x) \in \mathsf{T}_l,$$

takže rovnost (1) bude mít tvar

$$a_k x + b_k + a_l y + b_l = a_k(x + 2xy) + b_k + a_l(y - 2xy) + b_l,$$

neboli $xy(a_k - a_l) = 0$. Protože $xy \neq 0$, dostáváme nutnou i postačující podmínku: všechna čísla a_k jsou rovna témuž číslu a. Protože rovnost (1) je triviálně splněna, je-li jedno z čísel x, y rovno nule, mají všechny funkce, jež vyhovují podmínce (1), tvar

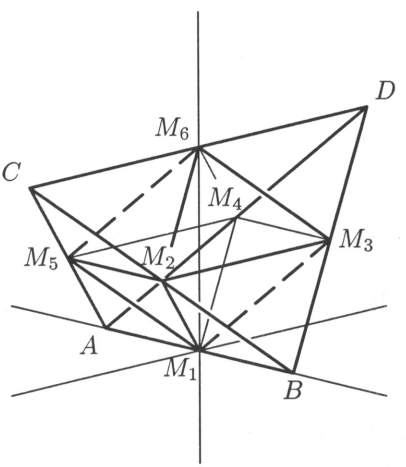
$$f(x) = \begin{cases} ax + b_k, & x \in \mathsf{T}_k, \\ c, & x = 0, \end{cases}$$

kde a, c a b_k jsou libovolné konstanty. V naší úloze

$$a = \frac{f(1) - f(-1)}{2} = 0, \quad \text{a tedy} \quad b_k = f(2^k) \text{ a } c = f(0).$$

A – III – 6

Ukážeme, že takový čtyřstěn existuje. Uvažujme čtyřstěn $ABCD$ (obr. 26), jehož dvě protější hrany AB a CD délky 2 jsou shodné a navzájem kolmé a který je osově souměrný podle střední příčky těchto dvou hran. Stěny tohoto čtyřstěnu jsou navzájem shodné trojúhelníky o stranách 2, $\sqrt{3}$ a $\sqrt{3}$.



Obr. 26

Rozdělme každou stěnu uvažovaného čtyřstěnu $ABCD$ středními příčkami na čtyři shodné trojúhelníky. Každá z rovin určených středy tří hran se společným vrcholem je rovnoběžná s protější stěnou a ze čtyřstěnu oddělí čtyřstěn podobný původnímu (stejnolehlý s koeficientem $\frac{1}{2}$). Odříznutím těchto čtyř čtyřstěnů dostaneme osmistěn $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$, který lze rozložit na čtyři shodné čtyřstěny, jež mají společnou hranu M_1M_6 (střední příčku hran AB a CD). Bude-li velikost této společné hrany rovna velikosti k ní kolmých hran osmistěnu, budou uvedené čtyřstěny podobné původnímu čtyřstěnu s koeficientem $\frac{1}{2}$.

Početně se uvedená tvrzení snadno ověří, zvolíme-li vrcholy A, B, C, D v mřížových bodech krychlové sítě:

$$A = (1,0,0),\ B = (-1,0,0),\ C = (0,1,1),\ D = (0,-1,1).$$

Kategorie P

Texty úloh

P – I – 1

Úloha o výmene podreťazcov

Je daný reťazec znakov dĺžky N uložený v poli A. (V jazyku PASCAL by sme to mohli vyjadriť deklaráciou **var** A: **array** $[1\,..\,N]$ **of** *char*.) Hodnota N je pritom tak veľká, že A zaberá skoro celú operačnú pamäť; predstavte si napríklad, že A slúži ako pracovná pamäť editora a práve editujeme obrovský súbor.

Blok je súvislý podreťazec reťazca A začínajúci znakom s indexom z a končiaci znakom s indexom k ($1 \leqq z \leqq k \leqq N$); takýto blok budeme označovať $A[z\,..\,k]$. Bloky $A[z_1\,..\,k_1]$ a $A[z_2\,..\,k_2]$ sa *neprekrývajú*, ak $k_1 < z_2$ alebo $k_2 < z_1$. Napríklad podreťazce $A[4\,..\,5] = ak$ a $A[8\,..\,10] = abr$ sú neprekrývajúce sa bloky reťazca $A = abrakadabra$.

Napíšte a zdôvodnite algoritmus (program v programovacom jazyku), ktorý *vymení* dva neprekrývajúce sa bloky reťazca A, t. j. pre zadané indexy $z_1 \leqq k_1 < z_2 \leqq k_2$ premení reťazec

$$A = A[1\,..\,(z_1-1)]A[z_1\,..\,k_1]A[(k_1+1)\,..\,(z_2-1)]A[z_2\,..\,k_2]A[(k_2+1)\,..\,N]$$

na reťazec

$$A[1\,..\,(z_1-1)]A[z_2\,..\,k_2]A[(k_1+1)\,..\,(z_2-1)]A[z_1\,..\,k_1]A[(k_2+1)\,..\,N]$$

Napríklad výmenou vyznačených blokov v reťazci $A = abrakadabra$ by mal vzniknúť reťazec $A = abrabradaka$.

Algoritmus smie použiť len pomocnú pamäť konštantnej veľkosti (operačná pamäť je skoro plná, nemusí sa do nej zmestiť ani kópia menšieho z blokov) a počet krokov algoritmu by mal byť úmerný N (editor nesmie byť pomalý).

P – I – 2

Úloha o priemere mnohouholníka

Priemer rovinného útvaru S je najväčšia vzájomná vzdialenosť medzi dvoma bodmi S:

$$\operatorname{diam}(\mathsf{S}) = \max_{\substack{(x,y)\in\mathsf{S}\\(x',y')\in\mathsf{S}}} \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}.$$

Body $X_1 = (x_1, y_1), \ldots, X_n = (x_n, y_n)$ $(n \geqq 3)$ tvoria (v tomto poradí) vrcholy konvexného n-uholníka M v rovine. Napíšte a zdôvodnite program, ktorý určí diam(M) — priemer mnohouholníka M!

Poznámka. Existuje algoritmus s lineárnou časovou zložitosťou.

P – I – 3

Multiplikatívna zložitosť

Lineárny algoritmus je algoritmus nasledujúceho tvaru:

Vstup: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (vstupné premenné)

$f_1 := g_1 \odot h_1$

$f_2 := g_2 \odot h_2$

$\vdots$

$f_i := g_i \odot h_i$

$\vdots$

$f_k := g_k \odot h_k$

Výstup: $y_1, y_2, \ldots, y_m$ (výstupné premenné)

pričom

(i) pre každé $i = 1, \ldots, k$ je $g_i, h_i \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \cup \{f_1, f_2, \ldots, f_{i-1}\}$ a operácia $\odot$ je jedna z operácií $+$, $-$, $*$ (sčítanie, odčítanie, násobenie).

(ii) pre každé $i = 1, \ldots, m$ je $y_i \in \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$.

Zložitosť lineárneho algoritmu je počet operácií $\odot$, **multiplikatívna zložitosť** lineárneho algoritmu je počet operácií $*$ (násobenie).

Napríklad nasledujúci lineárny algoritmus

Vstup: a, b, c, d

$f_1 := a * b$

$f_2 := c * d$

$f_3 := f_1 - f_2$

Výstup: f_3

počíta hodnotu výrazu $ab - cd$ a má multiplikatívnu zložitosť 2.

Úlohy

(a) Nájdite lineárny algoritmus, ktorý pre vstup x vypočíta hodnotu mnohočlena $1x+9x^2+9x^3+2x^4$ a má najmenšiu možnú multiplikatívnu zložitosť! Svoje tvrdenie zdôvodnite (ukážte, že neexistuje lineárny algoritmus s menšou multiplikatívnou zložitosťou než váš algoritmus!)

(b) Ukážte, že hodnota výrazu $ab - cd$ sa nedá vypočítať lineárnym algoritmom s multiplikatívnou zložitosťou 1!

P – I – 4

McCullochov stroj

McCullochov stroj je opísaný v študijnom texte.

1. Nájdite také číslo M, ktoré vytvára samo seba, t. j. $M \vdash M$!
2. Existuje N, ktoré vytvára svoje zdvojenie, t. j. $N \vdash NN$?
3. Existuje číslo P, ktoré vytvára číslo $P2$, t. j. $P \vdash P2$?
4. Existuje číslo Q, ktoré vytvára číslo $6Q$, t. j. $Q \vdash 6Q$?
5. (*McCullochov zákon*) Pre každé číslo A existuje také číslo X, že X vytvára AX, t. j. $X \vdash AX$. Dokážte!
6. Existuje také R, že $R \vdash R6$?

McCullochov stroj (študijný text)

McCullochov stroj slúži na spracovanie čísel. Má *vstup* a *výstup*; ak na vstup podáme *číslo*, t. j. konečnú neprázdnu postupnosť cifier 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, po konečnom čase sa na výstupe môže (ale nemusí) objaviť (iné) číslo — *odpoveď* stroja na vstupné číslo. V prvom prípade (t. j. ak sa odpoveď objaví), vstupné číslo sa nazýva *prijateľným*. Odpoveď stroja je vstupným číslom jednoznačne určená:

– ak vstupné číslo je prijateľné, tak sa odpoveď objaví vždy a je vždy rovnaká,

– ak vstupné číslo nie je prijateľné, nikdy sa neobjaví odpoveď a stroj sa po konečnom čase zastaví (t. j. môžeme zistiť, že vstupné číslo nie je prijateľné).

Stroj sa riadi určitými pravidlami — najprv ale uvedieme niekoľko definícií. Ako už vieme, čísla sú pre nás kladné celé čísla, ktorých desiatkový zápis neobsahuje nulu.

Ak X, Y sú čísla, tak XY označuje ich *spojenie*: číslo, ktoré dostaneme napísaním zápisov čísel X, Y za sebou. Napr. ak X je 53 a Y je 728, tak XY je 53728 a XYX je 5372853. Číslo $\underbrace{XX\ldots X}_{k\text{-krát}}$ zapíšeme ako X^k.

Zdvojením čísla X je číslo XX. Napr. zdvojením čísla $X = 12345$ je číslo $XX = 1234512345$.

Hovoríme, že číslo X *vytvára* číslo Y, ak X je prijateľné a po podaní X na vstup stroja odpoveďou je Y. Tento vzťah budeme skrátene zapisovať $X \vdash Y$.

McCullochov stroj sa riadi nasledujúcimi pravidlami:

Pravidlo P_1. *Pre ľubovoľné číslo* X, $2X2$ *je prijateľné a vytvára* X. *Skrátene,* $2X2 \vdash X$.

Pravidlo P_2. *Pre ľubovoľné čísla* X, Y, *ak* X *vytvára* Y, *tak* $7X$ *vytvára číslo* $Y2$. *Skrátene, z* $X \vdash Y$ *vyplýva* $7X \vdash Y2$.

Pravidlo P_3. *Pre ľubovoľné čísla* X, Y, *ak* X *vytvára* Y, *tak* $5X$ *vytvára zdvojenie čísla* Y. *Skrátene, z* $X \vdash Y$ *vyplýva* $5X \vdash YY$.

Pravidlo P_0. *Číslo* X *je prijateľné len vtedy, ak to vyplýva z pravidiel* P_1, P_2, P_3.

Napríklad, $2532 \vdash 53$ podľa P_1, $72532 \vdash 532$ podľa P_2, $572532 \vdash \vdash 532532$ podľa P_3, ale 4253 nie je prijateľné podľa P_0.

P – II – 1

Úloha o nákladných autách

Mestá A a B sú spojené rovným úsekom cesty. Na tejto ceste ležia mestá $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ (nie nutne v tomto poradí, ale mesto A_i je bližšie k A než mesto B_i $(1 \leqq i \leqq n)$). Nákladné auto premáva medzi A a B a má n *objednávok*: previezť náklad z každého A_i do príslušného B_i; pritom naraz môže viezť len jeden náklad a po naložení v A_i ho môže vyložiť len v B_i.

Jazdou nákladného auta budeme rozumieť cestu auta z mesta A do mesta B (s prípadným splnením niektorých objednávok) a späť; počas jazdy smie zmeniť smer len v meste B.

Napíšte a zdôvodnite program, ktorý zostaví *plán* nákladného auta (t.j. určí počet jázd a splnené objednávky pre každú jazdu) tak, aby splnilo všetky objednávky minimálnym počtom jázd!

P – II – 2

Úloha o pokrytí štvorcom

Body $X_1 = (x_1, y_1)$, ..., $X_n = (x_n, y_n)$ $(n \geqq 3)$ tvoria (v tomto poradí) vrcholy konvexného n-uholníka M v rovine. Napíšte a zdôvodnite program, ktorý určí dĺžku strany štvorca S s nasledujúcimi vlastnosťami:

(a) S *pokrýva* M: $\mathsf{M} \subseteq \mathsf{S}$,

(b) aspoň jedna strana M leží na strane S,

(c) S má najmenší možný obsah.

Poznámka. V programe môžete využiť vzorce z analytickej geometrie (napr. pre vzdialenosť dvoch bodov alebo vzdialenosť bodu od priamky) ako funkcie; tieto funkcie nemusíte programovať.

P – II – 3

Multiplikatívna zložitosť

Lineárny algoritmus je algoritmus nasledujúceho tvaru:

Vstup: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (vstupné premenné)

$$f_1 := g_1 \odot h_1$$
$$f_2 := g_2 \odot h_2$$
$$\vdots$$
$$f_i := g_i \odot h_i$$
$$\vdots$$
$$f_k := g_k \odot h_k$$

Výstup: $y_1, y_2, \ldots, y_m$ (výstupné premenné)

pričom

(i) pre každé $i = 1, \ldots, k$ je $g_i, h_i \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \cup \{f_1, f_2, \ldots, f_{i-1}\}$ a operácia $\odot$ je jedna z operácií $+$, $-$, $*$ (sčítanie, odčítanie, násobenie);

(ii) pre každé $i = 1, \ldots, m$ je $y_i \in \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$.

Zložitosť lineárneho algoritmu je počet operácií $\odot$, **multiplikatívna zložitosť** lineárneho algoritmu je počet operácií $*$ (násobenie).

Úlohy

(a) Zistite, akú činnosť vykonáva nasledujúci lineárny algoritmus:

Vstup: $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$,

$$
\begin{aligned}
f_1 &= a_{11} + a_{22} & f_{14} &= a_{22} * f_5 \\
f_2 &= b_{11} + b_{22} & f_{15} &= f_6 * b_{22} \\
f_3 &= a_{21} + a_{22} & f_{16} &= f_7 * f_8 \\
f_4 &= b_{12} - b_{22} & f_{17} &= f_9 * f_{10} \\
f_5 &= b_{21} - b_{11} & f_{18} &= f_{11} + f_{14} \\
f_6 &= a_{11} + a_{12} & f_{19} &= f_{15} - f_{17} \\
f_7 &= a_{21} - a_{11} & f_{20} &= f_{11} + f_{13} \\
f_8 &= b_{11} + b_{12} & f_{21} &= f_{12} - f_{16} \\
f_9 &= a_{12} - a_{22} & f_{22} &= f_{18} - f_{19} \\
f_{10} &= b_{21} + b_{22} & f_{23} &= f_{12} + f_{14} \\
f_{11} &= f_1 * f_2 & f_{24} &= f_{13} + f_{15} \\
f_{12} &= f_3 * b_{11} & f_{25} &= f_{20} - f_{21} \\
f_{13} &= a_{11} * f_4
\end{aligned}
$$

Výstup: $f_{22}, f_{23}, f_{24}, f_{25}$

(b) Nájdite lineárny algoritmus s čo najmenšou multiplikatívnou zložitosťou, ktorý pre vstup $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$ vypočíta

$$
\begin{aligned}
&x_1u_1 + \ldots + x_nu_n, \\
&x_1v_1 + \ldots + x_nv_n, \\
&y_1u_1 + \ldots + y_nu_n, \\
&y_1v_1 + \ldots + y_nv_n.
\end{aligned}
$$

P – II – 4

McCullochov stroj

Operačné číslo je číslo zložené z cifier 5,7. Každé operačné číslo M *určuje operáciu* $M()$ v nasledujúcom zmysle: z $X \vdash Y$ vyplýva $MX \vdash M(Y)$.

Napríklad 5 určuje operáciu zdvojenia ($5(Y) = YY$), lebo $X \vdash Y \Rightarrow$ $\Rightarrow 5X \vdash YY$; 75 určuje operáciu pripísania 2 k zdvojeniu ($75(Y) =$ $= YY2$), lebo $X \vdash Y \Rightarrow 75X \vdash YY2$; $757(89) = 8928922$, lebo $7572892 \vdash$ $\vdash 8928922$.

Úlohy

1. (*Craigov zákon*) Pre každé operačné číslo M a pre každé číslo A existuje číslo X vytvárajúce $M(AX)$, t. j.

$$(\forall \text{ operačné } M)(\forall A)(\exists X)(X \vdash M(AX)).$$

Dokážte!

2. Nájdite čísla $X \neq Y$ také, že $X \vdash Y$ a zároveň $Y \vdash X$!

3. (*Fergussonov zákon*) Pre ľubovoľné A, B existujú čísla X, Y také, že $X \vdash AY$ a zároveň $Y \vdash BX$. Dokážte!

P – III – 1

Úloha o viditeľnosti mnohouholníka

Body $X_1 = (x_1, y_1)$, ..., $X_m = (x_m, y_m)$ ($m \geqq 3$) sú (v tomto poradí, proti smeru hodinových ručičiek) vrcholy konvexného m-uholníka M v rovine.

Mnohouholník M leží vo vnútri kruhu K so stredom $S = (x_S, y_S)$ a polomerom r (to znamená, že každé X_i je vnútorným bodom K).

Hovoríme, že bod u ležiaci na obvode (hranici) M je *viditeľný* z bodu v, ak úsečka uv neobsahuje vnútorné body M. (Všimnite si, že podľa tejto definície sú všetky body strany $x_i x_{i+1}$ viditeľné z každého bodu priamky $x_i x_{i+1}$; na druhej strane, obvod M je „neviditeľný“ pre vnútorné body M!)

Napíšte a zdôvodnite čo najrýchlejší program, ktorý

a) vypíše také údaje, z ktorých bude možné pre ľubovoľný bod v ležiaci na obvode kruhu K určiť množinu tých bodov z obvodu M, ktoré sú viditeľné z bodu v,

b) určí minimálny počet bodov ležiacich na obvode K tak, aby každý bod na obvode M bol viditeľný aspoň z jedného z týchto bodov.

Poznámka. V programe môžete využiť vzorce z analytickej geometrie (napr. pre vzdialenosť dvoch bodov alebo priesečník dvoch priamok, priamky a kružnice apod.) ako funkcie; tieto funkcie nemusíte programovať.

P – III – 2

Multiplikatívna zložitosť

Lineárny algoritmus je algoritmus nasledujúceho tvaru:

$$\begin{aligned}
&\textbf{Vstup: } x_1, x_2, \ldots, x_n \qquad \text{(vstupné premenné)}\\
&f_1 := g_1 \odot h_1\\
&f_2 := g_2 \odot h_2\\
&\vdots\\
&f_i := g_i \odot h_i\\
&\vdots\\
&f_k := g_k \odot h_k\\
&\textbf{Výstup: } y_1, y_2, \ldots, y_m \qquad \text{(výstupné premenné)}
\end{aligned}$$

pričom

(i) pre každé $i = 1, \ldots, k$ je $g_i, h_i \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \cup \{f_1, f_2, \ldots, f_{i-1}\}$ a operácia $\odot$ je jedna z operácií $+$, $-$, $*$ (sčítanie, odčítanie, násobenie);

(ii) pre každé $i = 1, \ldots, m$ je $y_i \in \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$.

Zložitosť lineárneho algoritmu je počet operácií $\odot$, **multiplikatívna zložitosť** lineárneho algoritmu je počet operácií $*$ (násobenie).

Zistite, akú činnosť vykonáva nasledujúci lineárny algoritmus:

$$\begin{aligned}
&\textbf{Vstup: } a,\ b,\ c,\ d\\
&f_1 = a + b \qquad f_5 = f_1 * f_2\\
&f_2 = c + d \qquad f_6 = f_5 - f_3\\
&f_3 = a * c \qquad f_7 = f_3 - f_4\\
&f_4 = b * d \qquad f_8 = f_6 - f_4\\
&\textbf{Výstup: } f_7,\ f_8
\end{aligned}$$

a rozhodnite, či existuje lineárny algoritmus počítajúci f_7 a f_8 s lepšou multiplikatívnou zložitosťou!

P – III – 3

Úloha o platení

Dané sú mince v hodnote $q_1, q_2, \ldots, q_n$ korún, kde $1 \leqq q_1 < q_2 < \ldots < q_n$ sú prirodzené čísla a q_{i+1}/q_i je nepárne prirodzené číslo pre $1 \leqq i < n$.

Platiteľ aj príjemca majú k dispozícii neobmedzený počet mincí každej hodnoty. Platiteľ ma zaplatiť obnos X korún príjemcovi. Platba je *optimálna*, ak sa pri nej vymení najmenší možný počet mincí; t. j. pre každé $1 \leqq i \leqq n$ dá platiteľ x_i ($\geqq 0$) mincí hodnoty q_i, príjemca vydá y_i ($\geqq 0$) mincí hodnoty q_i tak, že $\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)q_i = X$, a pritom $\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)$ je minimálne.

Napríklad pri minciach s hodnotou 1, 3 a 9 korún ($n = 3$) sa dá 17 korún vyplatiť tak, že platiteľ dá 1 deväťkorunáčku, 2 trojkorunáčky a 2 jednokorunáčky; vymení sa 5 mincí. Pri optimálnej platbe ovšem dá platiteľ 2 deväťkorunáčky a príjemca vráti 1 jednokorunáčku; vymenia sa 3 mince.

Napíšte a zdôvodnite program, ktorý pre vstupné celé kladné číslo X určí optimálny spôsob platby X korún!

P – III – 4

McCullochov stroj

Chovanie McCullochovho stroja je popísané v študijnom texte! Nájdete tam aj zhrnutie známych vlastností dokázaných v minulých kolách.

Číslo X_0 je *nesmrteľné*, ak nasledujúci proces je nekonečný (t. j. nevyskytne sa v ňom neprijateľné číslo):

Zadám stroju číslo X_0;
Ak sa objaví odpoveď X_1, zadám stroju číslo X_1;
Ak sa objaví odpoveď X_2, zadám stroju číslo X_2,
Ak sa objaví odpoveď X_3, zadám stroju číslo X_3,
... ; atď.

Otázky:

1. Nájdite 4 nesmrteľné čísla!
2. Nájdite 1993 nesmrteľných čísel!
3. *McCullochov algoritmus zisťovania nesmrteľnosti čísel*
   Základom algoritmu je číslo H také, že (X je nesmrteľné) $\Leftrightarrow$ (HX nie je nesmrteľné). Použijeme dva stroje — **S1** a **S2**.
   VSTUP: Číslo X.
   OTÁZKA: Je X nesmrteľné?
   ALGORITMUS

1. $Y := X$; $U := HX$;
2. Stroju **S1** zadáme číslo Y; stroju **S2** zadáme číslo U;
3. AK stroj **S1** vydá odpoveď Z, TAK $Y := Z$

INAK STOP; Číslo X nie je nesmrteľné!

4. AK stroj **S2** vydá odpoveď V, TAK $U := V$
INAK STOP; Číslo X je nesmrteľné!

5. SKOK na **2**.

Je tento algoritmus správny?

P – I – 1

Uvažujme o „veľkom“ bloku $A[z_1 \,..\, k_2]$, ktorý zahŕňa obidva vyznačené bloky $A[z_1 \,..\, k_1]$, $A[z_2 \,..\, k_2]$ aj nevyznačený blok $A[(k_1 + 1) \,..\, (z_2 - 1)]$ medzi nimi; tento „medziblok“ je v prípade $k_1 = z_2 - 1$ prázdny. Základom algoritmu je pozorovanie, že obrátením poradia znakov v bloku $A[z_1 \,..\, k_2]$ sa vyznačené bloky dostanú na „správne“ miesto, ale ich znaky budú v obrátenom poradí. To sa dá napraviť tým, že pred obrátením veľkého bloku obrátime jeho „podbloky“.

Aby sme to mohli presnejšie sformulovať, označme X^{R} reťazec, ktorý dostaneme obrátením poradia znakov v reťazci X. Príklad:

$$(abrakadabra)^{\mathrm{R}} = arbadakarba.$$

Potom pre ľubovoľné reťazce U, V, W, X, Y platí

$$U(V^{\mathrm{R}}W^{\mathrm{R}}X^{\mathrm{R}})^{\mathrm{R}}Y = UXWVY, \qquad (*)$$

t. j. postupnosť štyroch operácií obrátenia bloku vymení bloky V, X v reťazci $UVWXY$. (Bloky dĺžky $\leqq 1$ nemusíme obracať.) Príklad:

$$ab((raka)^{\mathrm{R}}(d)^{\mathrm{R}}(ab)^{\mathrm{R}})^{\mathrm{R}}ra = ab((akar)(d)(ba))^{\mathrm{R}}ra = ab(ab)(d)(raka)ra.$$

K dokončeniu algoritmu si stačí všimnúť, že blok sa dá obrátiť v čase úmernom jeho dĺžke s použitím pomocnej pamäti konštantnej veľkosti.

Program v PASCALe:

```
program VYMENA;
  const N = ...;
  type index = 1..N;
  var
    A : array [index] of char;
    z1, z2, k1, k2, zpom, kpom : index;
  procedure OBRAT(zac, kon : index);
      (* Ak zac ≧ kon, neurobí nič *)
    var
      pom : char;
    begin
```

```
      while (zac < kon) do begin
        pom := A[zac];
        A[zac] := A[kon];
        A[kon] := pom;
        zac := zac + 1;
        kon := kon - 1;
      end;   (* while *)
    end;   (* OBRAT *)
  begin   (* hlavný program *)
    ...   (* Načítanie reťazca A a medzí blokov: *)
    ...   (* z1 ≦ k1, z2 ≦ k2 *)
    if (z1 > z2) then begin
      zpom := z1; z1 := z2; z2 := zpom;
      kpom := k1; k1 := k2; k2 := kpom;
    end;
    if (k1 ≧ z2) then
      writeln('Bloky sa prekrývajú!')
    else
      begin
        OBRAT(z1, k1);
        OBRAT(k1 + 1, z2 - 1);
        OBRAT(z2, k2);
        OBRAT(z1, k2);
      end
  end.   (* hlavný program *)
```

Správnosť algoritmu vyplýva zo vzťahu (∗); správnosť procedúry $OBRAT$ je očividná.

Odhad časovej a pamäťovej zložitosti: Procedúra $OBRAT$ sa vyvolá štyrikrát; jedno jej prevedenie pozostáva z nanajvýš $c \cdot l$ krokov, kde l je dĺžka bloku, ktorý chceme obrátiť, a c je vhodná konštanta. Celkový počet krokov je teda nanajvýš

$$c \cdot [(k_1 + 1 - z_1) + (z_2 - k_1 - 1) + (k_2 + 1 - z_2) + (k_2 + 1 - z_1)] \leqq$$
$$\leqq 2c \cdot (k_2 + 1 - z_1) \leqq 2c \cdot N,$$

t. j. lineárny v N. Zo zápisu programu je jasné, že sme použili pomocnú pamäť konštantnej veľkosti.

Vzdialenosť bodov X, Y označíme $d(X,Y)$; vzdialenosť bodu X od priamky YZ označíme $d(X,YZ)$. V ďalšom budeme predpokladať, že vrcholy M sú usporiadané (v cyklickom zozname $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_1$) proti smeru hodinových ručičiek, a položíme $X_0 = X_n$, $X_{n+1} = X_1$.

Kľúčovým pozorovaním je nasledujúce

Tvrdenie. $\operatorname{diam}(\mathsf{M}) = \operatorname{diam}(\{X_1, \ldots, X_n\})$.

NÁZNAK DÔKAZU. Prijmime (bez dôkazu) fakt, že existujú body X, $Y \in \mathsf{M}$, ktoré majú vzdialenosť $\operatorname{diam}(\mathsf{M})$. Tieto body zrejme ležia na hranici M (inak by vzdialenosť priesečníkov priamky XY s hranicou M bola väčšia, než $d(X,Y)$.) Keby X ležalo vnútri hrany X_iX_{i+1}, bolo by $d(X,Y) < \max\{d(X_i,Y), d(X_{i+1},Y)\}$, čo je spor s definíciou bodov X a Y. Podobne sa nahliadne, že Y nemôže byť vnútorným bodom hrany M, a teda X aj Y sú vrcholy M, čo bolo treba dokázať.

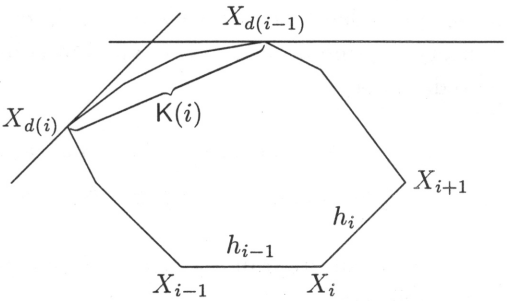
Vyzbrojení týmto aparátom ľahko navrhneme kvadratický algoritmus spočívajúci vo vyskúšaní každej dvojice vrcholov. Keby sa nám podarilo zredukovať úlohu na vyskúšanie lineárneho počtu *dvojíc* vrcholov, dostali by sme lineárny algoritmus.

Predpokladajme najprv, že M nemá dvojicu rovnobežných hrán. Pre každú hranu $h_i = X_iX_{i+1}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ označíme $X_{d(i)}$ vrchol M najviac vzdialený od priamky X_iX_{i+1}.

Pre každý vrchol X_i definujeme množinu *kandidátov* pre vrchol $X_{d(i)}$:

$$\mathsf{K}(i) = \left\{X_{d(i-1)}, X_{d(i-1)+1}, \ldots, X_{d(i)-1}, X_{d(i)}\right\}.$$

Pozorovanie (obr. 27). *Pre* $1 \leqq i, j \leqq n$ *ak* $X_j \notin \mathsf{K}(i)$, *potom* $\operatorname{diam}(\mathsf{M}) > d(X_i, X_j)$.



Obr. 27

Intuitívne, ak X_j nie je kandidátom pre i, tak je *vylúčené*, aby sa priemer dosahoval na dvojici vrcholov X_i, X_j.

DÔKAZ. Ak totiž $x_j \notin \mathsf{K}(i)$ a $X_j \neq X_i$, tak

$$X_j \in \{X_{i+1}, \ldots, X_{d(i-1)-1}\} \quad \text{alebo} \quad X_j \in \{X_{d(i)+1}, \ldots, X_{i-1}\}.$$

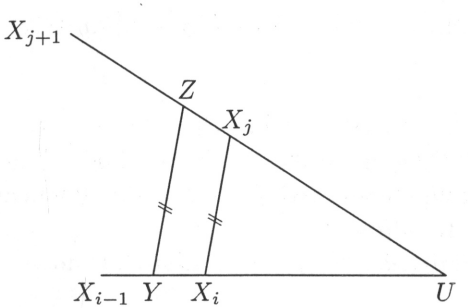
V prvom prípade

$$d(X_{j+1}, X_{i-1}X_i) > d(X_j, X_{i-1}X_i);$$

zostrojíme priamku rovnobežnú s X_iX_j pretínajúcu hrany h_{i-1}, h_j vo vnútorných bodoch Y, Z a priesečník U priamok $X_{j+1}X_j$ a $X_{i-1}X_i$. Potom (obr. 28) uhol X_iUX_j je ostrý (podľa predchádzajúcej nerovnosti), a preto

$$\operatorname{diam}(\mathsf{M}) \geqq d(Y, Z) > d(X_i, X_j),$$

čo bolo treba ukázať. V druhom prípade sa postupuje podobne.



Obr. 28

Pre každé i teda stačí vyskúšať dvojice (X_i, X_j), $X_j \in \mathsf{K}(i)$. V prípade $h_i \parallel h_j$ sa situácia zmení len v tom, že sa musia vyskúšať všetky dvojice (X_i, X_j), (X_i, X_{j+1}), (X_{i+1}, X_j), (X_{i+1}, X_{j+1}).

V každom prípade tvorí množina kandidátov vrcholu X_i „súvislý" úsek vrcholov M a „susedné" množiny kandidátov (t. j. pre X_i, X_{i+1}) majú nanajvýš dva spoločné prvky. To je základom nasledujúceho algoritmu.

Program v PASCALe:

program *PRIEMER*;

```
const
  n = ...;
type
  bod=record x, y : real end;
var
  m : array [1..n] of bod;
  i, j : 1..n;
  diam : real;
function d(i, j : index) : real;   (* vzdialenosť bodov *)
  begin d := sqrt(sqr(m[i].x − m[j].x) + sqr(m[i].y − m[j].y)); end;
function dalsi(i : index) : index;   (* ďalší bod v cykl. usporiadaní *)
  begin dalsi := i mod n + 1; end;
function max(x, y : real) : real;   (* maximum čísel *)
  begin if (x > y) then max := x else max := y; end;
function P(i, j, k : index) : real;   (* obsah trojuholníka *)
  begin
    P := ((m[j].x − m[i].x) * (m[k].x − m[i].x)
          − (m[j].y − m[i].y) * (m[k].y − m[i].y))/2;
  end;
begin
  ...   (* Načítanie súradníc zadaných bodov *)
    (* POZOR! Program neoveruje, či dané body skutočne tvoria *)
    (* (v zadanom poradí) vrcholy konvexného mnohouholníka!!! *)
  i := n;   j := 1;   diam := 0;
  while P(i, dalsi(i), dalsi(j)) > P(i, dalsi(i), j) do
    j := dalsi(j);
  while j ≠ 1 do begin
    i := dalsi(i);
    diam := max(diam, d(i, j));
    while P(i, dalsi(i), dalsi(j)) > P(i, dalsi(i), j) do begin
      j := dalsi(j);
      diam := max(diam, d(i, j));
    end;
    if P(i, dalsi(i), dalsi(j)) = P(i, dalsi(i), j) then
      diam := max(diam, d(i, dalsi(j)));
  end;
  writeln(diam);
end.
```

Odhad časovej zložitosti: Priradenie $j := dalsi(j)$ sa vykoná presne n-krát; priradenie $i := dalsi(i)$ sa vykoná nanajvýš n-krát. Telo **if**-príkazu sa vykoná nanajvýš $\frac{1}{2}n$-krát (nemôže byť viac dvojíc paralelných hrán). Každé priradenie hodnoty premennej *diam* je spojené s priradením hodnoty premennej i alebo j alebo s vykonaním tela **if**-príkazu; to znamená, že premennej *diam* sa priradí hodnota nanajvýš $\frac{5}{2}n$-krát. Každý príkaz v programe sa vykoná nanajvýš $\frac{5}{2}n$-krát, algoritmus má teda lineárnu časovú zložitosť.

Poznámky k implementácii: Vzdialenosti bodov od priamky (určenej úsečkou) porovnávame pomocou obsahov trojuholníkov určených týmito bodmi a danou úsečkou. Je to efektívnejšie, než mechanická aplikácia postupu z analytickej geometrie, hlavne ak vezmeme do úvahy, že chceme len *porovnávať* vzdialenosti, a nepotrebujeme ich explicitne spočítať.

P – I – 3

(a) Napríklad nasledujúci lineárny algoritmus

Vstup: x

$$f_1 = x * x \qquad f_4 = x + x \qquad f_7 = f_3 + f_6$$
$$f_2 = f_1 + x \qquad f_5 = f_4 + f_4 \qquad f_8 = f_2 * f_7$$
$$f_3 = f_1 + f_2 \qquad f_6 = f_4 + f_5 \qquad f_9 = f_8 + f_3$$

Výstup: f_9

má multiplikatívnu zložitosť 2.

Lineárny algoritmus pre vstup x nepoužívajúci násobenie dokáže spočítať iba polynómy tvaru kx, kde $k \in \mathbb{Z}$. Ak lineárny algoritmus používa jediné násobenie, potom činitele sú tvaru k_1x, k_2x a výsledok násobenia je $k_1k_2x^2$. Teda lineárny algoritmus dokáže spočítať iba polynómy tvaru $kx^2 + jx$, $k, j \in \mathbb{Z}$, t. j. iba kvadratické polynómy. Náš polynóm je štvrtého stupňa, a preto neexistuje lineárny algoritmus s multiplikatívnou zložitosťou 1, ktorý ho počíta.

(b) Sporom dokážeme, že $ab - cd$ sa nedá spočítať lineárnym algoritmom zložitosti 1.

Lineárny algoritmus pre vstup a, b, c, d nepoužívajúci násobenie dokáže spočítať iba polynómy tvaru $k_1a + k_2b + k_3c + k_4d$, $k_i \in \mathbb{Z}$, lineárny algoritmus používajúci práve jedno násobenie dokáže spočítať iba polynómy tvaru

$$v_1(t_1a+t_2b+t_3c+t_4d)(u_1a+u_2b+u_3c+u_4d)+v_2a+v_3b+v_4c+v_5d. \quad (*)$$

Keby $ab - cd$ bolo tvaru $(*)$, potom z porovnania máme (vzhľadom na symetriu možno bez újmy na všeobecnosti predpokladať $t_1 \neq 0$):

$$\begin{array}{llll} t_1u_1 = 0, & (1) & t_1u_3 + t_3u_1 = 0, & (5) \\ t_2u_2 = 0, & (2) & t_1u_4 + t_4u_1 = 0, & (6) \quad v_1(t_1u_2 + t_2u_1) = 1, \quad (9) \\ t_3u_3 = 0, & (3) & t_2u_3 + t_3u_2 = 0, & (7) \quad v_1(t_3u_4 + t_4u_3) = -1, \quad (10) \\ t_4u_4 = 0, & (4) & t_2u_4 + t_4u_2 = 0, & (8) \end{array}$$

$$v_1 \neq 0, \quad v_2 = v_3 = v_4 = v_5 = 0,$$

potom $u_1 = 0$ z (1), $u_3 = 0$ z (5), $t_3 \neq 0$ a $u_4 \neq 0$ z (10), $t_4 = 0$ z (4), $t_2 = 0$ z (8) a $u_2 \neq 0$ z (9). Teda $t_1, t_3, u_2, u_4 \neq 0$, $u_1, u_3, t_2, t_4 = 0$, avšak to je podľa (6) spor:

$$0 \neq t_1u_4 = t_1u_4 + 0 = t_1u_4 + t_4u_1 = 0.$$

Všimnime si, že hodnota výrazu $a \cdot a - b \cdot b = a^2 - b^2$ sa dá vypočítať lineárnym algoritmom zložitosti 1!

P – I – 4

1. Keby sme našli také H, že

$$X \vdash Y \Rightarrow HX \vdash Y2Y2, \qquad (*)$$

po dosadení $X := 2Y2$ by sme dostali $2Y2 \vdash Y \Rightarrow H2Y2 \vdash Y2Y2$, čo dáva (spolu s P_1 a po dosadení $Y := H$) $H2H2 \vdash H2H2$ a stačilo by položiť $M := H2H2$.

Podmienka $(*)$ nám vlastne hovorí, že H spôsobí pripísanie 2 na koniec čísla a následné zdvojenie. Z toho je vidieť, že $H = 57$ vyhovuje $(*)$. Riešením je teda $M = 572572$. Skutočne, $2572 \vdash 57$ (P_1), $72572 \vdash 572$ (P_2), $572572 \vdash 572572$ (P_3).

Ak $(*)$ nahradíme podmienkou $X \vdash Y \Rightarrow HX \vdash YY2$, po dosadení $Y := H2$, $X := 2Y2 = 2H22$, $H := 75$ dostaneme riešenie $M = 7527522$ (overte!).

Teraz príde malý podraz: vyriešime hneď 5. otázku.

5. Chceme nájsť X také, že $X \vdash AX$. Hľadajme ho v tvare $X = 5Y$ (prijateľné sú len čísla tvaru $2Y2$, $5Y$ a $7Y$). Potom $Y \vdash Z \Rightarrow X = 5Y \vdash ZZ$. My ale chceme, aby $ZZ = AX = A5Y$. Teraz je rozumné predpokladať, že Y je dlhšie než A, t. j. $Z = A5U$. Hľadáme teda také U,

že $UA5U \vdash A5U$. Prečo by U nemohlo byť tvaru $U = 7V$? (5 sme už mali, skúsme 7!) Teraz chceme splniť podmienku $7VA57V \vdash A57V$. Pritom $VA57V \vdash W \Rightarrow 7VA57V \vdash W2$, t.j. by malo platiť $W2 = A57V$. Túto podmienku splníme položením $W := A57$, $V := 2$. Po spätnom dosadení dostaneme $X = 572A572$. Ľahko sa overí, že toto X vyhovuje.

Keď v predchádzajúcej úvahe prehodíme úlohu 5 a 7, dostaneme druhé riešenie $X = 752A7522$ (overte!)

Poznámka. Ak dovolíme, aby A bolo „prázdne číslo", vyriešili sme 1. úlohu iným spôsobom (dostali sme ovšem rovnaké riešenia).

2. Skúsme hľadať N v tvare $5X$. Ak $X \vdash 5X$, potom $5X \vdash 5X5X$. T.j. (použijeme McCullochov zákon pre $A = 5$) $N = 55725572$ alebo $N = 575257522$ vyhovuje.

3. Hľadajme P v tvare $7X$. $X \vdash 7X \Rightarrow 7X \vdash 7X2$, teda možné riešenia sú $P = 75727572$, $P = 775277522$.

4. To je triviálna aplikácia McCullochovho zákona: $Q = 5726572$ alebo $Q = 75267522$.

6. Predpokladajme, že existuje číslo R vytvárajúce $R6$; z tohoto predpokladu odvodíme spor.

Počet cifier čísla Y budeme označovať $|Y|$, počet jeho pätiek resp. sedmičiek $\sharp_5(Y)$ resp. $\sharp_7(Y)$.

Prijateľné čísla sú tvaru $H2Y2$, kde H pozostáva z cifier 5, 7, Y je ľubovoľné, $|Y| \geqq 1$.

Pozorovanie. *Nech* $X \vdash Y$, $HX \vdash Z$. *Potom* $|Z| \geqq 2^{\sharp_5(H)}|Y| + \sharp_7(H)$.

Číslo R je tvaru $H2Y2$, lebo je prijateľné; pritom R vytvára číslo $R6 = H2Y26$. Z Pozorovania vyplýva $|H2Y26| \geqq 2^{\sharp_5(H)}|Y| + \sharp_7(H)$, t.j.

$$\sharp_5(H) + \sharp_7(H) + |Y| + 3 \geqq 2^{\sharp_5(H)}|Y| + \sharp_7(H),$$
$$\sharp_5(H) + 3 \geqq \left(2^{\sharp_5(H)}|Y| - 1\right)|Y|,$$

a teda $\sharp_5(H) \in \{0, 1, 2\}$, lebo $|Y| \geqq 1$.

Rozlíšime tri prípady:

(1) $\sharp_5(H) = 0$. V tomto prípade R je tvaru 7^s2Y2, ale $7^s2Y2 \vdash Y2^s$ a $|Y2^s| < |7^s2Y26|$ — spor.

(2) $\sharp_5(H) = 1$. V tomto prípade $R = 7^a57^b2Y2 \vdash Y2^bY2^{a+b} = R6$, t.j. $a + b = 0$, $a = b = 0$, $R = 52Y2 \vdash YY = R6$ a porovnanie dĺžok ($|R| + 1 = |R6|$) dáva $|Y| + 4 = 2|Y|$, $Y = 4$, pričom Y končí cifrou 6. Teda $Y = uvw6$ a podmienka $52uvw626 = R6 = uvw6uvw6$ vedie k sporu (porovnanie 2. cifier dáva $v = 2$, porovnanie 6. cifier $6 = v$).

(3) $\sharp_5(H) = 2$. V tomto prípade $R = 7^a57^b57^c2Y2 \vdash Y2^cY2^{b+c}Y2^{a+b+c}$ a podobne ako vyššie dostaneme $a = b = c = 0$, $R = 552Y2 \vdash YYYY$ a porovnanie dĺžok vedie k sporu: $4|Y| = |YYYY| = |R6| = |R| + 1 = |Y| + 5 \Rightarrow 3|Y| = 5$.

Zhrnutie: neexistuje R také, že $R \vdash R6$.

P – II – 1

Označme $\alpha_i = |AA_i|$, $\beta_i = |AB_i|$. Podľa zadania $0 \leqq \alpha_i < \beta_i$ pre $1 \leqq \leqq i \leqq n$. V ďalšom *objednávka j* bude označovať objednávku patriacu mestám A_j, B_j.

Myšlienka algoritmu je jednoduchá: pokiaľ sú nejaké nesplnené objednávky, pridáme ďalšiu jazdu a simulujeme cestu auta z A do B; ak v nejakom meste je auto voľné, vyberieme si ako ďalšiu tú objednávku zo zatiaľ nesplnených, ktorá začína čo najskôr.

Efektívna implementácia tejto myšlienky vedie k príliš zložitému programu. Nebudeme preto priraďovať objednávky jazdám, ale naopak. Vektory $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ a $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ usporiadame vzostupne a potom „prechádzame“ úsek AB. Pritom si udržiavame zatiaľ potrebný počet jázd v premennej p a zoznam „voľných jázd“ (spočiatku je prázdny). Ak narazíme na mesto A_i a zoznam je prázdny, zvýšime počet jázd na $p + 1$ a i-tu objednávku splníme v $(p + 1)$-vej jazde. Ak zoznam je neprázdny, vyberieme si z neho voľnú jazdu a i-tu objednávku splníme v tejto jazde. Ak narazíme na mesto B_i, jazdu, v ktorej sme splnili i-tu objednávku, „uvoľníme“ — pridáme do zoznamu voľných jázd.

Program v PASCALe:

```
program MINJAZD;
  const n=...;
  type
    mesto=record
            vzd : real;   (* vzdialenosť od mesta A *)
            por : 1..n;   (* číslo mesta *)
          end;
    zoznam=record
             prvky : array [1..n] of 1..n;
             ukaz : 0..n;
           end;
```

```
var
  a, b : array [1..n] of mesto;
  plan : array [1..n] of 1..n;   (* jazdy priradené objednávkam *)
  volne_jazdy : zoznam;   (* zoznam voľných jázd *)
  i, j, p : 1..n;
procedure INIT(var z : zoznam);
  begin z.ukaz := 0; end;
function EMPTY(var z : zoznam) : boolean;
  begin EMPTY := (z.ukaz = 0) end;
function GET(var z : zoznam) : 1..n;
  begin GET := z.prvky[z.ukaz];   z.ukaz := z.ukaz-1; end;
procedure PUT(var z : zoznam; x : 1..n);
  begin z.ukaz := z.ukaz+1;   z.prvky[z.ukaz] := x; end ;
begin
  for i := 1 to n do begin   (* vstup *)
    read(a[i].vzd, b[i].vzd);
    a[i].por := i; b[i].por := i;
  end;   (* for *)
  INIT(volne_jazdy);
  SORT(a);
  SORT(b);
  i := 1; j := 1; p := 0;
  while i ≦ n do
    if a[i].vzd < b[j].vzd then begin
        (* začiatok objednávky a[i].por *)
      if EMPTY(volne_jazdy) then begin
        p := p+1;
        plan[a[i].por] := p;
      end else
        plan[a[i].por] := GET(volne_jazdy);
      i := i+1;
      end
      else begin   (* koniec objednávky b[j].por *)
        PUT(volne_jazdy, plan[b[j].por]);
        j := j+1;
      end;
  for i := 1 to n do   (* výsledok *)
    writeln('Objednávku č.', i, 'splníme v jazde č.', plan[i]);
end.
```

Poznámky k implementácii:

– pomocná procedúra *SORT* usporiada pole záznamov typu *mesto* vzostupne podľa hodnoty položky *vzd*. V položke *por* sa uchováva informácia o mestách — ak $a[i].por = j$, potom $|AA_j| = \alpha_j = a[i].vzd$, podobne pre mestá B_j.

– zoznam voľných jázd pripomína zásobník, ale to nie je podstatné — zvolili sme si čo najjednoduchšiu implementáciu. Tento zoznam nikdy nepretečie, lebo počet volaní procedúry *PUT* je zhora ohraničený číslom n.

DÔKAZ SPRÁVNOSTI ALGORITMU. Je jasné, že po skončení **while**-cyklu má každý prvok poľa *plan* priradenú hodnotu (všetky objednávky sú splnené). Objednávky s rovnakým číslom jazdy sú súčasne (t. j. počas jednej jazdy) splniteľné, lebo rovnosť $plan[a[i].por] = plan[a[i'].por] = q$ pre $i < i'$ znamená, že pri preberaní prvku $a[i']$ bola jazda q na zozname voľných jázd, t. j. koncový bod $\beta_{a[i].por}$ objednávky $a[i].por$ predchádza začiatočnému bodu $a[i'].vzd$ objednávky $a[i'].por$.

Dokážme teraz optimálnosť získaného plánu. Označme

$$k_0 = \max_{x \in \langle 0, |AB| \rangle} |\{i : x \in (\alpha_i, \beta_i\rangle\}|$$

maximálny počet intervalov $(\alpha_i, \beta_i\rangle$ s neprázdnym prienikom. Je jasné, že potrebujeme aspoň k_0 jázd. Ukážeme, že algoritmus vytvorí plán s presne k_0 jazdami.

Uvažujme také i, že počet jázd (premenná p) sa v programe zvyšuje z p_0 na $p_0 + 1$ pri preberaní počiatočného bodu $a[i].vzd$ objednávky $a[i].por$. Vtedy nie je k dispozícii žiadna voľná jazda, t. j. platí $EMPTY(volne\_jazdy)$. Ku každej jazde q, $1 \leqq q \leqq p_0$, priraďme index

$$i_q = \max\{i' : 1 \leqq i' < i \ \wedge \ plan[a[i'].por] = q\}.$$

Z $i_q < i$ vyplýva $\alpha_{a[i_q].por} = a[i_q].vzd \leqq a[i].vzd$; z toho, že pri preberaní $a[i].vzd$ jazda q nie je voľná, vyplýva $\beta_{a[i_q].por} > a[i].vzd$ (v prípade nerovnosti $\leqq$ by algoritmus preberal koncový bod $\beta_{a[i_q].por}$ pred počiatočným bodom $a[i].vzd$ a uvoľnil by jazdu q).

Zhrnutie: Bod $x = \alpha_{a[i].por} = a[i].vzd$ leží v p_0 intervaloch

$$(\alpha_{a[i_q].por}, \beta_{a[i_q].por}) \quad (1 \leqq q \leqq p_0);$$

bod $x + \varepsilon \in (\alpha_i, \beta_i\rangle$, kde ε je veľmi malé kladné číslo, leží v $p_0 + 1$ intervaloch, t. j. $k_0 \geqq p_0 + 1$ — algoritmus nikdy nezvýši hodnotu premennej p nad k_0.

Odhad časovej zložitosti: Program (okrem dvoch volaní procedúry *SORT*) v podstate pozostáva z jediného **while**-cyklu. V tele cyklu sa zvyšuje hodnota súčtu $i + j$, a pritom platí invariant $j \leqq i$ (v žiadnom úseku AX nemôže skončiť viac objednávok, než sa ich začalo), t. j. $i+j \leqq$ $\leqq 2i \leqq 2n$ — cyklus prebehne $\leqq 2n$-krát. Každé vykonanie tela cyklu trvá konštantný počet krokov (por. implementáciu operácií so zoznamom) — **while**-cyklus trvá $O(n)$ krokov.

Kritickým miestom programu je teda procedúra *SORT*. Nebudeme ju tu implementovať ani dokazovať, že horným odhadom jej časovej zložitosti (pri vhodnej implementácii) je *konštanta* $\times\, n \log_2 n$.

Horný odhad časovej zložitosti algoritmu je *konštanta* $\times\, n \log_2 n$.

P – II – 2

Vzdialenosť bodu X od priamky YZ označme $d(X, YZ)$, priemet rovinného útvaru X na priamku p označme $\mathrm{pr}(\mathsf{X}, p)$. Vzdialenosť bodu $C = (x_C, y_C)$ od priamky AB ($A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$) určíme vzorcom

$$\mathrm{vzd}(A, B, C) = \frac{(y_C - y_A)(x_B - x_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}.$$

Na rozdiel od $d(C, AB)$, $\mathrm{vzd}(A, B, C)$ má znamienko, a to kladné pre C ležiace naľavo od priamky AB (t. j. pre $|\sphericalangle BCA| \in (0, \pi)$) a záporné pre C ležiace napravo od tejto priamky.

V ďalšom budeme predpokladať, že vrcholy M sú usporiadané (v poli $X[1\,..\,n]$) proti smeru hodinových ručičiek, a položíme $X_{n+1} = X_1$.

Pre každé i, $1 \leqq i \leqq n$, nám stačí určiť nasledujúce dve čísla:

$$\textit{šírka}_i = \max_{1 \leqq j \leqq n} d(X_j, X_i X_{i+1}),$$

$$\textit{priemet}_i = \text{dĺžka } \mathrm{pr}(\mathsf{M}, X_i X_{i+1}).$$

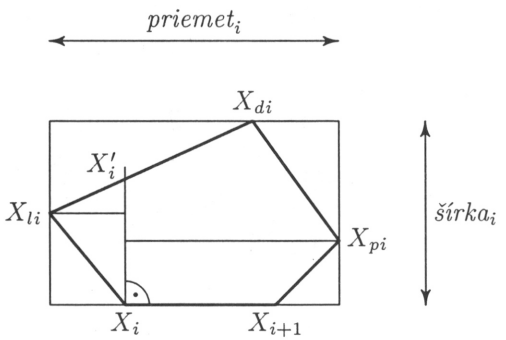
Hľadaná dĺžka strany S je potom $\min\limits_{1 \leqq i \leqq n} \max\{\textit{šírka}_i, \textit{priemet}_i\}$.

Pre každý index i určíme indexy di, li a pi nasledovne:

- X_{di} je vrchol M najviac vzdialený od priamky $X_i X_{i+1}$;
- $\mathrm{pr}(\mathsf{M}, X_i X_{i+1}) = \mathrm{pr}(X_{li} X_{pi}, X_i X_{i+1})$ a body $\mathrm{pr}(X_{li}, X_i X_{i+1})$, X_i, X_{i+1}, $\mathrm{pr}(X_{pi}, X_i X_{i+1})$ ležia na priamke $X_i X_{i+1}$ v tomto poradí (li — ľavý index, pi — pravý index).

Body X_{li}, X_{pi} sa dajú charakterizovať aj takto: položme $X_i' =$ obraz bodu X_{i+1} v otočení o $\pi/2$ okolo bodu X_i (X_i' leží vľavo od priamky X_iX_{i+1} a $X_iX_{i+1} \perp X_iX_i'$). Potom X_{li} (X_{pi}) je najvzdialenejší vrchol M ležiaci naľavo (napravo) od priamky X_iX_i' (obr. 29). Teda

$$\begin{aligned} \textit{šírka}_i &= d(X_{di}, X_iX_{i+1}) = \mathrm{vzd}(X_i, X_{i+1}, X_{di}), \\ \textit{priemet}_i &= d(X_{li}, X_iX_i') + d(X_{pi}, X_iX_i') \\ &= \mathrm{vzd}(X_i, X_i', X_{li}) - \mathrm{vzd}(X_i, X_i', X_{pi}). \end{aligned}$$



Obr. 29

Zostáva určiť, ako prejsť od indexov di, li, pi pre i k indexom di', li', pi' pre $i+1$. Predstavme si priamku, ktorá sa otáča z polohy X_iX_{i+1} do polohy $X_{i+1}X_{i+2}$. Vrchol M najvzdialenejší od tejto priamky sa postupne presúva z polohy X_{di} do polohy $X_{di'}$. Novú hodnotu di' určíme z podmienky $d(X_{di'}, X_{i+1}X_{i+2}) \geqq d(X_{di'+1}, X_{i+1}X_{i+2})$. Podobne určíme aj li' a pi'. Tieto úvahy dokazujú správnosť nasledujúceho programu, v ktorom $A = X_i$, $B = X_{i+1}$, $C = X_i'$ a $maxi = \max\{\textit{šírka}_i, \textit{priemet}_i\}$.

Odhad časovej zložitosti: Počiatočné nastavenie hodnôt di, li, pi trvá lineárny čas (prvé tri **while**-cykly). **for**-cyklus sa vykoná $(n-1)$-krát; vnorené **while**-cykly (v súčte pre všetky vykonania **for**-cyklu) trvajú lineárny čas, lebo indexy di, li, pi „obídu" mnohouholník M nanajvýš raz, ako to ukazuje vyššie uvedená úvaha s otáčajúcou sa priamkou.

Časová zložitosť algoritmu je teda lineárna.

Program v PASCALe:

```
program STVOREC;
const
  n = ...;
```

```
type
  bod = record x, y : real end;
var
  X : array [1..n] of bod;
  i, li, pi, di : 1..n;
  sirka, priemet, minstrana, maxi : real;
  A, B, C : bod;
function vzd(A, B, C : bod) : real;
  begin
    vzd := ((C.y - A.y) * (B.x - A.x) - (C.x - A.x) * (B.y - A.y))/
      sqrt((B.x - A.x) * (B.x - A.x) + (B.y - A.y) * (B.y - A.y));
  end;
function dalsi(i : integer) : integer;
  begin
    dalsi := i mod n + 1;
  end;
function max(x, y : real) : real;
  begin
    if x > y then max := x else max := y
  end;
function min(x, y : real) : real;
  begin
    if x < y then max := x else max := y
  end;
begin
  for i := 1 to n do
    readln(X[i].x, X[i].y);
  A := X[n];
  B := X[1];
  C.x := A.x - (B.y - A.y);
  C.y := A.y + (B.x - A.x);
  li := n; pi := 1; di := 1;
  while vzd(A, C, X[li - 1]) > vzd(A, C, X[li]) do li := li - 1;
  while vzd(A, C, X[pi + 1]) < vzd(A, C, X[pi]) do pi := pi + 1;
  while vzd(A, B, X[di + 1]) > vzd(A, B, X[di]) do di := di + 1;
  sirka := vzd(A, B, X[di]);
  priemet := vzd(A, C, X[li]) - vzd(A, C, X[pi]);
  maxi := max(sirka, priemet);
  minstrana := maxi;
```

```
    for i := 1 to n − 1 do begin
      A := X[i];
      B := X[i + 1];
      C.x := A.x − (B.y − A.y);
      C.y := A.y + (B.x − A.x);
      while vzd(A, C, X[dalsi(li)]) > vzd(A, C, X[li])
            do li := dalsi(li);
      while vzd(A, C, X[dalsi(pi)]) < vzd(A, C, X[pi])
            do pi := dalsi(pi);
      while vzd(A, B, X[dalsi(di)]) > vzd(A, B, X[di])
            do di := dalsi(di);
      sirka := vzd(A, B, X[di]);
      priemet := vzd(A, C, X[li]) − vzd(A, C, X[pi]);
      maxi := max(sirka, priemet);
      minstrana := min(maxi, minstrana);
    end;
end.
```

P – II – 3

(2a)

$$f_{22} = a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1}, \qquad f_{24} = a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2},$$
$$f_{23} = a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1}, \qquad f_{25} = a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2},$$

teda matica $\begin{pmatrix} f_{22} & f_{24} \\ f_{23} & f_{25} \end{pmatrix}$ je výsledkom násobenia matíc:

$$\begin{pmatrix} f_{22} & f_{24} \\ f_{23} & f_{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}.$$

(2b) Ak n je párne, potom $\frac{1}{2}n$-krát použijeme algoritmus z časti (2a) postupne pre vstup $x_i, x_{i+1}, y_i, y_{i+1}, u_i, v_i, u_{i+1}, v_{i+1}, i = 1, 3, \ldots, \frac{1}{2}n-1$, pomocou $\frac{7}{2}n$ násobení získame

$$x_iu_i + x_{i+1}u_{i+1},$$
$$x_iv_i + x_{i+1}v_{i+1},$$
$$y_iu_i + y_{i+1}u_{i+1},$$
$$y_iv_i + y_{i+1}v_{i+1}$$

$(i = 1, 3, \ldots, \frac{1}{2}n - 1)$ a sčítaním príslušných medzivýsledkov dostaneme požadované súčty. Ak n je nepárne, potom $n - 1$ je párne a súčty

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i u_i, \quad \sum_{i=1}^{n-1} x_i v_i, \quad \sum_{i=1}^{n-1} y_i u_i, \quad \sum_{i=1}^{n-1} y_i v_i$$

získame popísaným spôsobom pomocou $\frac{7}{2}(n-1)$ násobení a ďalších 4 násobení $x_n u_n$, $x_n v_n$, $y_n u_n$, $y_n v_n$. Požadované súčty tak získame použitím $\frac{7}{2}(n-1)+4 = \frac{1}{2}(7n+1)$ násobení.

P – II – 4

1. Ak $Y \vdash AMY$, tak $MY \vdash M(AMY)$ podľa definície operácie $M()$. Stačí teda nájsť takéto Y (ale to je McCullochov zákon) a položiť $X := MY$.

Odpoveď: $X = M572AM572$ alebo $X = M752AM7522$.

2. Zrejme $2X2 \vdash X$ (pravidlo P_1); stačí teda nájsť také X, že $X \vdash \vdash 2X2$. Ovšem $2X2 = 7(2X)$ a môžeme použiť Craigov zákon s $M = 7$, $A = 2$: dostávame $X = 757227572$ a $X = 7752277522$.

3. Postupujme podobne ako v predchádzajúcom riešení: $2BX2 \vdash BX$, teda hľadáme také X, že $X \vdash A2BX2 = 7(A2BX)$. Craigov zákon (s $M = 7$, $A = A2B$) dáva riešenia $X = 7572A2B7572$ alebo $X = 7752A2B77522$.

P – III – 1

Obvod (hraničnú kružnicu) kruhu K označíme C. Body $u, v \in \mathsf{C}$ jednoznačne určujú oblúk $\overset{\frown}{uv}$ (od u k v proti smeru hod. ručičiek). Položíme $X_k = X_{(k \bmod m)+1}$ pre $k \in \mathbb{Z}$. Pre $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, *$j$ leží medzi i a k*, ak $i \leqq j \leqq k$, $k \leqq i \leqq j$ alebo $j \leqq k \leqq i$ (tento fakt v programe zistí boolovská funkcia $medzi(i, j, k)$).

Ak bod u ležiaci vnútri hrany $X_k X_{k+1}$ je viditeľný z bodu $v \in \mathsf{C}$, z definície viditeľnosti vyplýva, že celá hrana $X_k X_{k+1}$ je viditeľná z bodu v. Z toho a z konvexnosti M vyplýva, že z bodu v na kružnici C je viditeľný úsek („*množina viditeľnosti*“) $\mathsf{M}_\mathsf{v}(v) = X_i X_{i+1} \cup X_{i+1} X_{i+2} \cup \ldots \cup X_{j-1} X_j$ z obvodu M. Tento úsek je jednoznačne určený (usporiadanou) dvojicou indexov (i, j) (v ďalšom budeme rozumieť pod (i, j) buď usporiadanú dvojicu, alebo úsek obvodu M medzi X_i a X_j — z kontextu bude jasné, ktorý význam máme na mysli). Obrátene, každý vrchol X_i je viditeľný

z oblúka $\widehat{zac_i kon_i} \subseteq \mathsf{C}$, kde $zac_i = \overrightarrow{X_i X_{i-1}} \cap \mathsf{C}$ („*začiatok*“) a $kon_i = \overrightarrow{X_i X_{i+1}} \cap \mathsf{C}$ („*koniec*“). Navrhneme algoritmus, ktorý určí body zac_i, kon_i $(1 \leqq i \leqq m)$, usporiada ich na kružnici C a tým rozdelí C na $2m$ oblúkov s konštantnými množinami viditeľnosti (niektoré oblúky môžu byť pritom jednobodové). Pre každý oblúk určíme aj $\mathsf{M_v}$ — úsek (i, j). $\mathsf{M_v}$ pre koncové (t. j. styčné) body oblúkov určíme tak, že porovnáme množiny viditeľnosti susediacich oblúkov a $\mathsf{M_v}$ styčného bodu je väčšia z nich. Výsledkom časti a) bude (cyklický) zoznam koncových bodov oblúkov s príslušnými usporiadanými dvojicami (i, j) (t. j. pre v na danom oblúku je $\mathsf{M_v}(v) = (i, j)$); prvé, resp. druhé prvky týchto dvojíc budú v zozname usporiadané proti smeru hodinových ručičiek.

Aby sme nemuseli triediť, budeme prechádzať priesečníkmi proti smeru hodinových ručičiek. Ak „prejdeme“ cez zac_j, $\mathsf{M_v}$ sa rozšíri o $X_{j-1}X_j$; ak „prejdeme“ cez kon_i, z $\mathsf{M_v}$ vypadne hrana $X_{i+1}X_i$. Daný priesečník sa pritom stane koncovým bodom oblúka (pole *obluky* v programe). Cyklus naštartujeme tým, že (tentokrát výnimočne v smere hod. ručičiek) nájdeme vrchol X_i, ktorý nie je viditeľný z bodu zac_1, ale X_{i+1} ešte áno. Potom oblúk začínajúci v bode zac_1 má $\mathsf{M_v} = (i + 1, 1)$. Za zvláštnu pozornosť stojí len prípad $kon_i = zac_j$, vtedy dostaneme jednobodový „oblúk“ s $\mathsf{M_v} = \mathsf{M_v}(kon_i) = \mathsf{M_v}(zac_j) = (i, j)$. Algoritmicky to znamená, že pri usporiadaní má zac_j prednosť pred kon_i.

V časti b) stačí určiť minimálny počet oblúkov (dvojíc), ktorých množiny viditeľnosti „pokrývajú“ obvod M. Budeme hľadať takýto „minimálny zoznam“ (nemusí byť určený jednoznačne). Vstupom algoritmu bude cyklický zoznam $\mathscr{L}$ usporiadaných dvojíc z časti a); koncové body oblúkov nebudeme potrebovať. Nech $dalsi(d)$ je dvojica nasledujúca za dvojicou $d = (d.i, d.j)$ v zozname $\mathscr{L}$. (V programe sa $\mathscr{L}$ reprezentuje poľom L a $dalsi$ je inkrement indexu modulo $2m$.)

Ku každej dvojici $d \in \mathscr{L}$ určíme dvojicu $najdalej(d)$, pre ktorú platí

$$medzi(d.i, najdalej(d).i, d.j)$$
$$\textbf{and not } medzi(d.i, dalsi(najdalej(d)).i, d.j).$$

Je jasné, že ak sa v minimálnom zozname vyskytne d, tak existuje minimálny zoznam obsahujúci d a $najdalej(d)$ a neobsahujúci dvojice z $\mathscr{L}$ „medzi nimi“ — z dvojíc $dalsi(d)$, $dalsi^2(d)$, $dalsi^3(d)$, ..., $najdalej(d)$ musí byť aspoň jedna v minimálnom zozname; zoznam zostane minimálnym, ak ju nahradíme dvojicou $najdalej(d)$. V prípade $d' = dalsi^k(d)$,

$najdalej(d) = najdalej(d')$ hodnotu $najdalej(d')$ zmeníme na nedefinovanú. (V programe sa $najdalej$ reprezentuje poľom indexov; nedefinovaná hodnota je 0.)

K dokončeniu algoritmu si všimnime, že minimálny zoznam musí obsahovať dvojicu d, ktorá *pokrýva* X_1, t. j. platí $medzi(d.i, 1, d.j)$. (Všetky dvojice pokrývajúce X_1 sú v poli L na začiatku, lebo $obluky[1] = zac_1$.) Pre každé takéto d postupne vypočítame $najdalej(d)$, $najdalej^2(d)$, ..., pokiaľ nenájdeme najmenšie k také, že $najdalej^k(d)$ pokrýva $d.i$. Ak pritom narazíme na nedefinovaný ukazovateľ $najdalej^l(d)$, tak existujú postupnosti $d, najdalej(d), \ldots, najdalej^{l-1}(d)$ a $d', najdalej(d'), \ldots, najdalej^{l-1}(d')$ rovnakej dĺžky bez spoločných prvkov (keby mali spoločný prvok, bolo by $najdalej^{l'}(d) = 0$ už pre $l' < l$), pričom d aj d' pokrývajú X_1, d' je pred d v zozname $\mathscr{L}$ a hodnota $najdalej^l(d)$ je nedefinovaná, lebo by sa mala rovnať hodnote $najdalej^l(d')$. To znamená, že existuje minimálny zoznam neobsahujúci d: podzoznam $d, najdalej(d), \ldots$ nahradíme podzoznamom $d', najdalej(d'), \ldots$, a teda výpočet pre dané d môžeme ukončiť.

Program v PASCALe:

```
program VIDITELNOST;
const m = ...;   dvem = 2 * m;
type
  bod = record x, y : real end;
  dvojica = record i, j : 1 .. m end;
  index = 1 .. m;   index2 = 1 .. dvem;
var
  X : array [index] of bod;
  C : record S : bod; r : real end;
  zac, kon : array [index] of bod;
  L : array [index2] of dvojica;
  obluky : array [index2] of bod;
  najdalej : array [index2] of 0 .. dvem;
  k : index2;
function medzi(i, j, k : index) : boolean;
  begin medzi := (i <= j and j <= k)
          or (k <= i and i <= j) or (j <= k and k <= i) end;
function inc1(i : index) : index; begin inc1 := i mod m + 1; end;
function dec1(i : index) : index;
          begin dec1 := (i + m - 2) mod m + 1; end;
```

```
function dalsi(i : index2) : index2;
            begin dalsi := i mod dvem + 1; end;
procedure p_polpriamka_kruznica(i, j : index; var pries : bod);
  begin   (* určí priesečník X_iX_j ∩ C *) end;
function uhol(U, V : bod) : real;
  begin   (* určí veľkosť uhla USV: číslo z intervalu ⟨0, 2π) *) end;
procedure cast_a;
  var ii, jj : integer;
  begin
    for k := 1 to m do begin
      p_polpriamka_kruznica(k, dec1(k), zac[k]);
      p_polpriamka_kruznica(k, inc1(k), kon[k]);
    end;
    jj := 1;   ii := m;
    repeat ii := dec1(ii)
    until uhol(kon[m], zac[1]) < uhol(kon[m], kon[ii]);
      (* X_ii je posledný vrchol ešte neviditeľný z bodu zac[1] *)
    obluky[1] := zac[1];
    for k := 1 to dvem - 1 do begin
      L[k].i := inc1(ii);   L[k].j := jj;
      if uhol(zac[inc1(jj)], kon[ii]) <= uhol(kon[inc1(ii)], kon[ii])
          then begin jj := inc1(jj);   obluky[k + 1] := zac[jj]; end
          else  begin ii := inc1(ii);   obluky[k + 1] := kon[ii]; end;
    L[dvem].i := inc1(ii);   L[dvem].j := jj;
  end;   (* cast_a *)
procedure cast_b;
  var k, minpocet, pocet : index2;   nd : 0 .. dvem;
  begin
      (* výpočet hodnôt najdalej *)
    nd := 1;
    for k := 1 to dvem do begin
      while medzi(L[k].i, L[dalsi(nd)].i, L[k].j) do nd := dalsi(nd);
      najdalej[k] := nd
    end;
      (* vynulovanie zbytočných hodnôt najdalej *)
    nd := najdalej[dvem];
    for k := dvem downto 2 do
      if (najdalej[k] = najdalej[k - 1]) then najdalej[k] := 0;
```

```
    if (najdalej[1] = nd) then najdalej[1] := 0;
      (* určenie minimálneho počtu bodov *)
    k := 1;   minpocet := dvem;
    while medzi(L[k].i, 1, L[k].j) do begin
      nd := najdalej[k];   pocet := 2;
      while (nd <> 0) and not medzi(L[nd].i, L[k].i, L[nd].j) do
      begin
        nd := najdalej[nd];   pocet := pocet + 1;
      end;
      if (nd <> 0) and (pocet < minpocet) then minpocet := pocet;
      k := k + 1;
    end;
  end;   (* cast_b *)
```

Časová zložitosť je lineárna. Procedúra *časť_a* neobsahuje vnorené cykly. V procedúre *časť_b* sú dva vnorené cykly: v prvom prípade je to **while**-cyklus vnorený do **for**-cyklu. Pritom **while**-cyklus sa vykoná lineárny počet krát, lebo k „prebehne" zoznamom $\mathscr{L}$ práve raz, nd prebieha zoznamom $\mathscr{L}$ v cyklickom poradí $(1, 2, 3, \ldots, 2m, 1, 2, \ldots)$ a nikdy „nepredbehne" k, t. j. prebehne $\mathscr{L}$ nanajvýš dvakrát.

Druhý vnorený cyklus trvá tiež lineárny počet krokov, lebo každým nenulovým smerníkom *najdalej* sa „prejde" nanajvýš raz a nulové sa testujú tiež len raz.

P – III – 2

Pre výstup daného algoritmu platí $f_7 = ac - bd$, $f_8 = ad + bc$, teda komplexné číslo $f_7 + f_8\,\mathrm{i}$ je súčin komplexných čísel: $f_7 + f_8\,\mathrm{i} = (a + b\,\mathrm{i}) * (c + d\,\mathrm{i})$.

Lineárny algoritmus pre vstup a, b, c, d používajúci práve jedno násobenie dokáže spočítať iba polynómy tvaru

$$v_1(t_1a+t_2b+t_3c+t_4d)(u_1a+u_2b+u_3c+u_4d)+v_2a+v_3b+v_4c+v_5d \quad (*)$$

a z riešenia úlohy P–I–3 vieme, že výraz $ac - bd$ nie je tohoto tvaru, t. j. nedá sa spočítať lineárnym algoritmom (multiplikatívnej) zložitosti 1. Celkom analogicky to môžme dokázať aj o výraze $ad + bc$.

Teraz sporom dokážeme, že na súčasný výpočet $ac - bd$, $ad + bc$ potrebujeme aspoň tri násobenia. Keby sa dali spočítať pomocou dvoch násobení, nech p_1 je výsledok prvého násobenia, p_2 výsledok druhého

násobenia (pripúšťame aj možnosť, že pri výpočte p_2 sa použil súčin p_1). Výstupné hodnoty $ac - bd$, $ad + bc$ potom dostaneme pomocou operácií $+$, $-$ z p_1, p_2, a, b, c a d:

$$ac - bd = r_1p_1 + r_2p_2 + r_3a + r_4b + r_5c + r_6d,$$
$$ad + bc = s_1p_1 + s_2p_2 + s_3a + s_4b + s_5c + s_6d,$$

kde koeficienty sú celé čísla, pričom $r_2 \neq 0 \neq s_2$ (lebo na $ac-bd$ i na $ad+bc$ potrebujeme dve násobenia). Odčítaním r_2-násobku druhej rovnice od s_2-násobku prvej dostaneme

$$\begin{aligned} &s_2ac - r_2ad - s_2bd - r_2bc = \\ &\quad = (s_2r_1 - r_2s_1)p_1 + (s_2r_3 - r_2s_3)a + (s_2r_4 - r_2s_4)b + \\ &\qquad\qquad + (s_2r_5 - r_2s_5)c + (s_2r_6 - r_2s_6)d, \end{aligned}$$

vidíme teda, že výraz $s_2ac - r_2ad - s_2bd - r_2bc$ sa dá spočítať pomocou jedného násobenia, a je preto tvaru $(*)$ s $v_1 \neq 0$. Keby sa totiž v_1 rovnalo nule, pre $a = b = c = d$ by sme dostali $-2r_2a^2 = (v_2 + v_3 + v_4 + v_5)a$. Ak $v_2 + v_v + v_4 + v_5 = 0$, dostávame spor dosadením $a := 1$, v opačnom prípade dosadením $a := v_2 + v_3 + v_4 + v_5$.

Porovnaním koeficientov pri a, b, c, d, a^2, b^2, c^2, d^2, ab, ac, ad, bc, bd, cd postupne dostávame

$$v_2 = v_3 = v_4 = v_5 = 0,$$
$$t_1u_2 + t_2u_1 = 0 \qquad (5)$$
$$t_1u_1 = 0, \quad (1) \qquad v_1(t_1u_3 + t_3u_1) = s_2, \qquad (6)$$
$$t_2u_2 = 0, \quad (2) \qquad v_1(t_1u_4 + t_4u_1) = -r_2, \qquad (7)$$
$$t_3u_3 = 0, \quad (3) \qquad v_1(t_2u_3 + t_3u_2) = -r_2, \qquad (8)$$
$$t_4u_4 = 0, \quad (4) \qquad v_1(t_2u_4 + t_4u_2) = -s_2, \qquad (9)$$
$$t_3u_4 + t_4u_3 = 0, \qquad (10)$$

pričom v_1, s_2 a r_2 sa nerovnajú nule. Vzhľadom k symetrii $(*)$ môžeme predpokladať, že $u_1 = 0$ (kvôli (1)) a postupne dostaneme $t_1 \neq 0 \neq u_3$ z (6), $u_2 = 0$ z (5), $u_4 \neq 0$ z (7), $t_3 = t_4 = 0$ z (3) a (4), $t_2 \neq 0$ z (8), t. j. $t_1, t_2, u_3, u_4 \neq 0$, $u_1, u_2, t_3, t_4 = 0$, a teda $s_2 = v_1t_1u_3$, $-r_2 = v_1t_1u_4$, $-r_2 = v_1t_2u_3$, $-s_2 = v_1t_2u_4$ a získavame spor

$$0 > -s_2^2 = (v_1t_1u_3)(v_1t_2u_4) = (v_1t_1u_4)(v_1t_2u_3) = r_2^2 > 0,$$

ktorý dokazuje, že dvojica výrazov $ac - bd$, $ad + bc$ sa nedá spočítať pomocou dvoch násobení.

P – III – 3

Najprv si všimnime, že pri hľadaní optimálnej platby sa stačí obmedziť na také platby, pri ktorých pre každé i je buď $x_i = 0$, alebo $y_i = 0$, lebo nemá cenu, aby platiteľ dával mince, ktoré potom príjemca vráti. *Platbou* teda budeme rozumieť n-ticu $\boldsymbol{U} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{Z}^n$ (kladné u_i znamená, že platiteľ dal u_i mincí hodnoty q_i; záporné u_i znamená, že príjemca vrátil $-u_i$ mincí tejto hodnoty).

Ďalej si uvedomme, že sa stačí zaoberať obnosmi deliteľnými q_1 — iné obnosy danými mincami nevyplatíme.

Označme $t_i = \frac{1}{2}(q_{i+1}/q_i - 1)$, t. j. $q_{i+1}/q_i = 2t_i + 1$, $t_i \geqq 1$ pre $1 \leqq i < n$. Predpokladáme $q_1 \mid X$ a budeme uvažovať platby $\boldsymbol{U}$ s vlastnosťou $\sum_{i=1}^{n} u_i q_i = X$.

Pozorovanie 1. *Pre ľubovoľnú platbu $\boldsymbol{U}$ sa dá zostrojiť platba $\boldsymbol{U}^* = (u_1^*, \ldots, u_n^*)$ s rovnakým zaplateným obnosom, nie vyšším celkovým počtom mincí a s vlastnosťou*

$$|u_i^*| \leqq t_i \qquad \text{pre } 1 \leqq i < n. \tag{$*$}$$

DÔKAZ. Ak totiž $\boldsymbol{U}$ nesplňuje podmienku $(*)$, označíme si i_0 najmenšie $i < n$ také, že $|u_i| > t_i$. Existujú (jednoznačne určené) celé čísla p, r s vlastnosťou $u_{i_0} = p(2t_{i_0} + 1) + r$, $|r| \leqq t_{i_0}$, $p \neq 0$. Teraz $p(2t_{i_0} + 1)$ mincí hodnoty q_{i_0} zameníme p mincami hodnoty q_{i_0+1}: položíme $u'_{i_0} = u_{i_0} - p(2t_{i_0} + 1)$, $u'_{i_0+1} = u_{i_0+1} + p$; ostatné zložky vektora $\boldsymbol{U}$ necháme nezmenené. Dostali sme tak novú platbu $\boldsymbol{U}'$ s rovnakým zaplateným obnosom a s $|u'_{i_0}| = |r| \leqq t_{i_0}$, $|u'_{i_0+1}| = |u_{i_0+1} + p| \leqq |u_{i_0+1}| + |p|$. Spočítajme, ako sa zmenil počet použitých mincí!

Ak $|u_{i_0}| \geqq 2t_{i_0} + 1$, počet mincí hodnoty q_{i_0} sa znížil o $|p|(2t_{i_0} + 1)$ a počet mincí hodnoty q_{i_0+1} sa zvýšil nanajvýš o $|p|$, celkový počet sa teda určite znížil.

Ak $t_{i_0} < |u_{i_0}| \leqq 2t_{i_0}$ (v tomto prípade $|p| = 1$), počet mincí hodnoty q_{i_0} sa znížil aspoň o 1 a počet mincí hodnoty q_{i_0+1} sa zvýšil nanajvýš o $|p| = 1$, celkový počet sa teda určite nezvýšil.

Príklad: Pre $q_1 = 1$, $q_2 = 5$ sa platba $(6, -2)$ zmení na $(1, -1)$, $(-4, 2)$ na $(-1, 3)$ a $(3, 1)$ na $(-2, 2)$. Zmena počtu mincí je -6, -2 resp. 0.

Zhrnutie: dostali sme platbu $\boldsymbol{U}'$ s rovnakým obnosom, nie vyšším počtom mincí a s vlastnosťou $|u'_{i_0}| \leqq t_{i_0}$ pre $1 \leqq i \leqq i_0$. Postup môžeme opakovať s platbou $\boldsymbol{U}'$, ..., atď; po nanajvýš $n-1-i_0$ takýchto krokoch dostaneme platbu $\boldsymbol{U}^*$ splňujúcu $(*)$, čo bolo treba ukázať.

Nasledujúce pozorovanie ukazuje, že platba $\boldsymbol{U}$ s vlastnosťou $(*)$ je jednoznačne určená:

Pozorovanie 2. *Nech* $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{U}'$ *sú platby s vlastnosťou* $(*)$. *Potom* $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}'$.

Dôkaz. Ak totiž $\boldsymbol{U} \neq \boldsymbol{U}'$, existuje $i_0 < n$ také, že

$$u_i = u'_i \quad (1 \leqq i < i_0), \qquad u_{i_0} \neq u'_{i_0}.$$

(Zrejme nemôže byť $i_0 = n$, lebo potom by obnosy zaplatené $\boldsymbol{U}$ a $\boldsymbol{U}'$ neboli rovnaké.) Potom

$$\sum_{i=i_0}^{n} u_i q_i = \sum_{i=i_0}^{n} u'_i q_i.$$

Obe strany tejto rovnosti vydelíme číslom $q_{i_0+1} = q_{i_0}(2t_{i_0}+1)$. Dostaneme

$$(u_{i_0} - u'_{i_0}) q_{i_0} = k q_{i_0}(2t_{i_0}+1)$$

a vzhľadom k $(*)$

$$|k|(2t_{i_0}+1) = |u_{i_0} - u'_{i_0}| \leqq |u_{i_0}| + |u'_{i_0}| \leqq 2t_{i_0},$$

t.j. $k = 0$ a $u_{i_0} = u'_{i_0}$, čo je spor s definíciou i_0. Tým je pozorovanie dokázané.

Algoritmus je vlastne hotový, ak si všimneme, že obnos X sa dá vyplatiť X/q_1 mincami hodnoty q_1. Vyjdeme z tejto platby $\boldsymbol{U} = (X/q_1, 0, 0, \ldots, 0)$ a zostrojíme k nej platbu $\boldsymbol{U}^*$ s vlastnosťou $(*)$ podľa Pozorovania 1. Na druhej strane určite existuje optimálna platba $\boldsymbol{U}_{\text{opt}}$; k nej môžeme zostrojiť (podľa Pozorovania 1) optimálnu platbu $\boldsymbol{U}^*_{\text{opt}}$ s vlastnosťou $(*)$. Platby $\boldsymbol{U}^*$ a $\boldsymbol{U}^*_{\text{opt}}$ majú vlastnosť $(*)$, a preto podľa Pozorovania 2 sa musia rovnať: $\boldsymbol{U}^* = \boldsymbol{U}^*_{\text{opt}}$. To ale znamená, že platba $\boldsymbol{U}^*$, ktorú sme zostrojili, je optimálna.

Správnosť algoritmu sme už dokázali; nasledujúci program určí platbu $\boldsymbol{U}$ vyhovujúcu vzťahu $(*)$ (ktorá je optimálna). Názvy premenných v programe sa zhodujú s názvami použitými v predchádzajúcich úvahách

až na to, že v programe sa nepracuje s poľom hodnôt $q[1\,..\,n]$. V programe vystupuje len hodnota q_1 ako premenná $q1$, hodnota q_i (pre aktuálne i) ako premenná q a pole $t[1\,..\,n]$ s hodnotami t_i. Hodnota $t[n]$ je ľubovoľná a slúži len na zabránenie behovej chyby pri testovaní podmienky **while**-cyklu pre $i = n$ (keby sa testovala aj druhá časť **and**-podmienky napriek neplatnosti prvej časti). Program netestuje, či vstupné dáta spĺňajú podmienky úlohy (vstupný súbor mincí 1, 4, 8 napr. „transformuje" na 1, 5, 15).

Odhad časovej zložitosti: Pri odhade zložitosti záleží na reprezentácii čísel vystupujúcich v algoritme. Ak $q_1, q_2, \ldots, q_n$ a X sú celé čísla menšie než nejaká konštanta $INTMAX$, tak hodnota n je zhora ohraničená konštantou ($2^{n-1} \leqq q_1(2t_1+1)(2t_2+1)\ldots(2t_{n-1}+1) = q_n \leqq INTMAX$, a teda $n \leqq \log_2 INTMAX + 1$). Vykoná sa najviac n opakovaní **while**-cyklu a každý prechod cyklom trvá konštantný počet krokov (vykonávajú sa len aritmetické operácie). Algoritmus teda trvá konštantný počet krokov a použije pamäť konštantnej veľkosti. (Pri použití aritmetiky veľkých čísel by boli potrebné iné odhady.)

Program v PASCALe:

```
program PLATBA;
  const n = ...;
  var
    t : array [1..n] of integer;
    q1, q, qq : integer;
    U : array [1..n] of integer;
    X : integer;
    i : 1..n;
  begin
    read(q1);
    qq := q1;
    for i := 1 to n - 1 do begin
      read(q);
      t[i] := (q div qq) div 2;
      qq := q;
    end;
    t[n] := 0;
    read(X);
    if (X mod q1 = 0) then begin
      U[1] := X div q1;
```

```
    i := 1;   q := q1;
    while (i < n) and (abs(U[i]) > t[i]) do begin
      U[i + 1] := (abs(U[i]) + t[i]) div (2 * t[i] + 1);
      if U[i] < 0 then U[i + 1] := -U[i + 1];
      U[i] := U[i] - U[i + 1] * (2 * t[i] + 1));
      writeln(U[i], ' mincí hodnoty ', q);
      q := q * (2 * t[i] + 1);
      i := i + 1;
    end;
    writeln(U[i], ' mincí hodnoty ', q);
  end else
    writeln('Obnos ', X, ' Kčs sa nedá vyplatiť.');
end.
```

P – III – 4

1. Spomeňme si na úlohy predchádzajúcich kôl. Našli sme tam čísla 7527522, 572572 (vytvárajúce sami seba) resp. 757227572 a 27572275722 (vytvárajúce sa navzájom). Hneď vidíme, že všetky sú nesmrteľné.

2. Pre každé $n \geqq 1$ nájdeme n čísel $X_1, \ldots, X_n$ takých, že

$$X_i \vdash X_{i+1} \qquad (i = 1, \ldots, n-1),$$
$$X_n \vdash X_1.$$

Položíme $X_1 = 2^{n-1}X2^{n-1}$, ..., $X_i = 2^{n-i}X2^{n-i}$, ..., $X_n = X$ a chceme nájsť také X, že $X = X_n \vdash X_1 = 2^{n-1}X2^{n-1}$. Ale $2^{n-1}X2^{n-1} = 7^{n-1}(2^{n-1}X)$ a stačí použiť Craigov zákon s $M = 7^{n-1}$, $A = 2^{n-1}$: existuje X s vlastnosťou $X \vdash M(AX) = 2^{n-1}X2^{n-1}$.

Riešením je napr. $X = M572AM572 = 7^{n-1}5722^{n-1}7^{n-1}572$.

Pre $n = 1, 2$ sme dostali niektoré riešenia z bodu 1.

3. Neexistuje také H, aby bola splnená ekvivalencia uvedená ako základ algoritmu. To sa nahliadne pomocou McCullochovho zákona: keby také H existovalo, nájdeme X s vlastnosťou $X \vdash HX$. Potom

- ak X je nesmrteľné, HX je tiež nesmrteľné;
- ak X nie je nesmrteľné, HX tiež nie je nesmrteľné.

To je spor s uvedenou ekvivalenciou.

Korespondenční seminář ÚV MO 1992/93

Korespondenční seminář je jednou z forem péče o talentované žáky. Vznikl ve 24. ročníku MO proto, aby bylo možno věnovat individuální péči i těm žákům, kteří neměli možnost navštěvovat speciální školy a pracovat v tamních seminářích. V tomto ročníku matematické olympiády se však poprvé nepodařilo rozběhnout korespondenční seminář ÚV MO způsobem obvyklým v dřívějších letech. Po roce 1990 bohužel ubylo času i ochotných spolupracovníků, a tak se podařilo rozeslat jen dvě sedmice úloh, které uvádíme dále (většina úloh byla vybrána z materiálu jury 33. MMO). K prvním sedmi úlohám zde najdete i jejich řešení.

Úlohy korespondenčního semináře

1.1 Označme $\mathbb{R}_+$ množinu všech nezáporných reálných čísel a pro daná kladná čísla a, b uvažujme funkci $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, která splňuje funkcionální rovnici

$$f\big(f(x)\big) + af(x) = b(a+b)x.$$

Dokažte, že tato rovnice má jediné řešení.

1.2 Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčky AC, BD jsou na sebe kolmé, $AC \perp BD$. Vně daného čtyřúhelníku sestrojme nad jeho stranami čtverce $AEFB$, $BGHC$, $CIJD$, $DKLA$ (jejich vrcholy jsou značeny proti směru hodinových ručiček). Dokažte, že čtyřúhelníky Q_1, Q_2 ohraničené přímkami AG, BI, CK, DE, resp. AJ, BL, CF, DH jsou shodné.

1.3 Je-li f mnohočlen s racionálními koeficienty a α reálné číslo, pro které platí

$$\alpha^3 - \alpha = \big(f(\alpha)\big)^3 - f(\alpha) = 33^{1\,992},$$

pak pro každé $n \geqq 1$ platí

$$\big(f^{(n)}(\alpha)\big)^3 - f^{(n)}(\alpha) = 33^{1\,992},$$

kde $f^{(n)}(x) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{n}(x)\ldots))$ pro každé přirozené n. Dokažte.

1.4 V daném trojúhelníku ABC označme D a E průsečíky os úhlů ABC a ACB s odpovídajícími stranami AC, AB. Najděte velikosti úhlů trojúhelníku ABC, jestliže $|\sphericalangle BDE| = 24°$, $|\sphericalangle CED| = 18°$.

1.5 Dokažte, že $N = \dfrac{5^{125} - 1}{5^{25} - 1}$ je složené číslo.

1.6 Pro libovolné kladné celé číslo x označme

$$g(x) = \text{největší lichý dělitel čísla } x,$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{g(x)}, & \text{je-li } x \text{ sudé,} \\ 2^{\frac{1}{2}(x+1)}, & \text{je-li } x \text{ liché.} \end{cases}$$

Ukažte, že se v posloupnosti $x_1 = 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$ vyskytne číslo 1 992, a zjistěte nejmenší n, pro které $x_n = 1\,992$. Vyskytne se číslo 1 992 v dané posloupnosti víckrát?

1.7 V rovině jsou dány tři kružnice k, k_1, k_2, jež se navzájem dotýkají tak, že kružnice k_1, k_2 se dotýkají vně v bodě W ležícím uvnitř kružnice k. Navíc jsou na kružnici k dány tři body A, B, C tak, že přímka BC se dotýká v různých bodech obou kružnic k_1, k_2 a spojnice WA je zároveň jejich společnou tečnou, přičemž body A a W leží v téže polorovině určené přímkou BC. Dokažte, že W je středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC.

2.1 Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x_1 + 3 \operatorname{cotg} x_1 &= 2 \operatorname{tg} x_2, \\ \operatorname{tg} x_2 + 3 \operatorname{cotg} x_2 &= 2 \operatorname{tg} x_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \operatorname{tg} x_n + 3 \operatorname{cotg} x_n &= 2 \operatorname{tg} x_1. \end{aligned}$$

2.2 Zjistěte, pro jaká přirozená čísla n existuje konvexní n-úhelník, kterému lze vepsat kružnici a jehož strany mají (v nějakém pořadí) velikosti $1, 2, \ldots, n$.

2.3 Jestliže f a g jsou mnohočleny s reálnými koeficienty a pro libovolná reálná čísla x, y platí

$$f(x) - f(y) = a(x, y)\big(g(x) - g(y)\big),$$

pak existuje mnohočlen h takový, že $f(x) = h\big(g(x)\big)$ pro libovolné reálné x. Dokažte.

2.4 Rozhodněte, zda existuje množina M s následujícími vlastnostmi:
(1) Množina M obsahuje 1 992 přirozených čísel.
(2) Každý prvek množiny M a součet libovolného počtu jejích prvků má tvar m^k (m, k jsou přirozená čísla, $k \geqq 2$)?

2.5 Jestliže

$$f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m,$$
$$g(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

jsou dva mnohočleny s reálnými koeficienty takové, že pro každé reálné číslo x je $f(x)$ druhou mocninou celého čísla, právě když je druhou mocninou celého čísla i $g(x)$, potom pro $m + n > 0$ existuje mnohočlen h s reálnými koeficienty takový, že $f(x) \cdot g(x) = \big(h(x)\big)^2$ pro každé x. Dokažte.

2.6 Nechť $\lfloor x \rfloor$ označuje největší celé číslo nejvýše rovné číslu x. Zvolme libovolné číslo x_1 v intervalu $\langle 0, 1)$ a definujme posloupnost $(x_k)_{k \geqq 1}$ vztahy

$$x_{n+1} = \begin{cases} 0, & \text{je-li } x_n = 0, \\ \dfrac{1}{x_n} - \left\lfloor \dfrac{1}{x_n} \right\rfloor & \text{jinak.} \end{cases}$$

Dokažte, že pro libovolné n přirozené platí

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n < \frac{F_1}{F_2} + \frac{F_2}{F_3} + \ldots + \frac{F_n}{F_{n+1}},$$

kde $F_1 = F_2 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geqq 1$.

2.7 Jestliže $\alpha(n)$ označuje počet jedniček ve dvojkovém zápisu čísla n, potom
a) $\alpha(n)^2 \leqq \frac{1}{2}\alpha(n)\big(\alpha(n) + 1\big)$;
b) v předchozí nerovnosti nastává rovnost pro nekonečně mnoho kladných čísel n;
c) existuje posloupnost $(n_i)_{i=1}^{\infty}$, pro kterou podíl $\alpha(n_i^2)/\alpha(n_i)$ konverguje pro $n \to \infty$ k nule.
Dokažte.

1.1 Nebylo zvlášť obtížné uhodnout, že $f(x) = bx$ je řešením dané rovnice; problém byl ukázat, že jiná neexistují. Uvedené řešení je podle *M. Hlawiczkové.*

Uvažujme libovolné číslo $y \in \mathbb{R}_+$ a definujme rekurentně posloupnost $\{a_n\}$ vztahy

$$a_0 = y, \qquad a_n = f(a_{n-1}),$$

tj. $a_1 = f(y)$, $a_2 = f\big(f(y)\big)$, ..., atd. Daná funkcionální rovnice pro $x = a_n$ pak říká, že

$$a_{n+2} + aa_{n+1} = b(a+b)a_n. \tag{1}$$

Charakteristická rovnice tohoto rekurentního vztahu (tj. rovnice, kterou dostaneme, hledáme-li řešení rekurentního vztahu mezi geometrickými posloupnostmi (q^n))

$$q^2 + aq = b(a+b)$$

má kořeny $q_1 = b$, $q_2 = -(a+b)$. Existují tedy reálná čísla A, B tak, že

$$a_n = Ab^n + B(-1)^n(a+b)^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

a tedy

$$\frac{a_n}{b^n} = A + B(-1)^n\Big(1 + \frac{a}{b}\Big)^n.$$

Protože $a/b > 0$, vyplývá z binomické věty, že

$$\Big(1 + \frac{a}{b}\Big)^n \geqq 1 + \frac{a}{b}\,n.$$

Je-li $B < 0$, je pro n sudé

$$\frac{a_n}{b^n} = A + B\Big(1 + \frac{a}{b}\Big)^n \leqq A + B\Big(1 + n\frac{a}{b}\Big) = nB\frac{a}{b} + (A+B),$$

což však bude (v rozporu se zadáním) menší než nula pro dostatečně velká n. Obdobně pro $B > 0$ a n liché

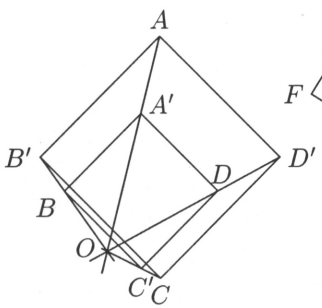
$$\frac{a_n}{b^n} = A - B\Big(1 + \frac{a}{b}\Big)^n \leqq A - B\Big(1 + n\frac{a}{b}\Big) = -nB\frac{a}{b} + (A-B),$$

což je menší než nula pro dostatečně velké n. Musí tedy být $B = 0$, tj. $a_n = Ab^n$. Tím pádem

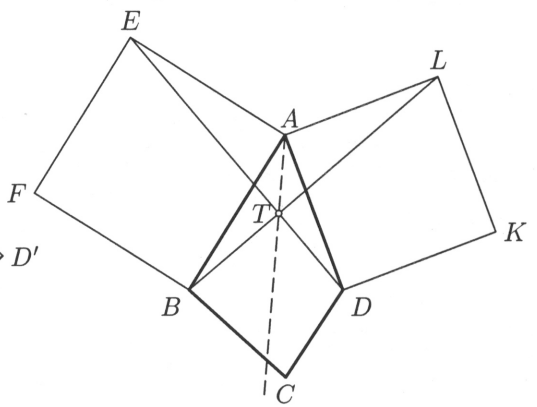
$$y = a_0 = A, \qquad f(y) = a_1 = Ab,$$

takže $f(y) = by$, což jsme chtěli dokázat.

1.2 Uvažujme nejprve dva čtverce $AB'CD'$ a $BC'DA'$ s úhlopříčkami AC a BD (obr. 30). Protože $BD \perp CD$, jsou oba uvedené čtverce stejnolehlé. To znamená, že přímky AA', BB', CC' a DD' procházejí společným bodem O (středem stejnolehlosti).

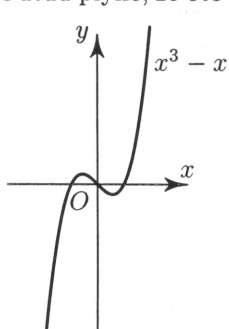


Obr. 30



Obr. 31

Otočení kolem vrcholu A o $+90°$ zřejmě zobrazí trojúhelník AED na trojúhelník ABL (obr. 31), takže přímky BL a ED jsou navzájem kolmé. Přitom množina všech takových bodů X, že otočení kolem středu X o $+90°$ zobrazí přímku BL na DE, je zřejmě osa úhlu BTD, kde T označuje průsečík přímek BL na DE. Na této ose tedy leží i vrchol A. Bod T leží na Thaletově kružnici nad průměrem BD stejně jako bod A'. Navíc osa úhlu BTD prochází středem oblouku BD, což je právě bod A', prochází tedy i středem O uvažované stejnolehlosti. Odtud plyne, že otočení kolem středu O o $+90°$ zobrazí přímku BL na DE, a analogicky zjistíme, že stejné otočení zobrazí i přímku AJ na CK, DH na BI a CF na AG. Čtyřúhelník Q_1 je tedy v uvedeném otočení obrazem čtyřúhelníku Q_2. Oba čtyřúhelníky jsou proto shodné.

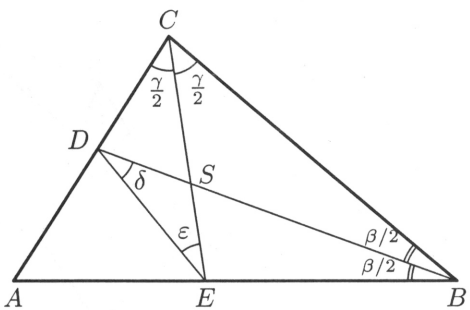


Obr. 32

1.3 Kubický mnohočlen $x^3 - x - 33^{1\,992}$ má pouze jeden reálný kořen. Stačí si uvědomit, jak vypadá funkce $g(x) = x^3 - x$ (obr. 32), uvedený mnohočlen z ní vznikne posunutím o konstantu $33^{1\,992}$ mnohem větší, než je lokální extrém pro $x = 1/\sqrt{3}$: pro

$x < 1$ je určitě $x^3 - x - 33^{1\,992} < 0$ a pro $x \geqq 1$ je funkce $x^3 - x - 33^{1\,992}$ ostře rostoucí. Protože α i $f(\alpha)$ jsou dle předpokladu úlohy reálné kořeny uvažovaného kubického mnohočlenu, je $f(\alpha) = \alpha$ a matematickou indukcí pak odtud plyne rovnost $f^{(n)}(\alpha) = \alpha$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

1.4 Označme S průsečík obou os BD a CE (obr. 33), $\beta = |\sphericalangle ABC|$,



Obr. 33

$\gamma = |\sphericalangle BCA|$, $\alpha = |\sphericalangle CAB|$, $\delta = |\sphericalangle SDE| = 24°$, $\varepsilon = |\sphericalangle SED| = 18°$. Podle vztahu pro vnější úhly trojúhelníku je

$$|\sphericalangle BDA| = \gamma + \frac{\beta}{2}, \qquad |\sphericalangle CEA| = \beta + \frac{\gamma}{2}.$$

Podle sinové věty v trojúhelníku SDE platí

$$\frac{|DS|}{|ES|} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\delta}.$$

Podle sinové věty v trojúhelnících DSA a ESA máme (víme, že SA je osou úhlu BAC)

$$\frac{|DS|}{|ES|} = \frac{|DS|}{|AS|}\frac{|AS|}{|ES|} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(\gamma + \frac{\beta}{2})}\frac{\sin(\beta + \frac{\gamma}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Srovnáním obou vztahů vidíme, že

$$\sin\delta \cdot \sin\Big(\beta + \frac{\gamma}{2}\Big) = \sin\varepsilon \cdot \sin\Big(\gamma + \frac{\beta}{2}\Big).$$

Zároveň platí

$$\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \pi - |\sphericalangle CSB| = \pi - |\sphericalangle DSE| = \delta + \varepsilon = 42°. \qquad (1)$$

Až do tohoto bodu dospěli víceméně všichni řešitelé; korektně však tuto soustavu rovnic nevyřešil žádný.

Označíme-li

$$\beta + \frac{\gamma}{2} - 48^\circ = x,$$

bude

$$\beta + \frac{\gamma}{2} = x + 48^\circ,$$

$$\gamma + \frac{\beta}{2} = 3\,\frac{\beta+\gamma}{2} - \left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) = 3 \cdot 42^\circ - (x + 48^\circ) = 78^\circ - x,$$

a potřebujeme tedy řešit rovnici

$$\sin\delta \cdot \sin(x + 48^\circ) = \sin\varepsilon \cdot \sin(78^\circ - x),$$

tj.

$$\sin 24^\circ \sin(x + 48^\circ) = \sin 18^\circ \sin(78^\circ - x), \tag{2}$$

neboli

$$\begin{aligned}\sin 24^\circ(\sin 48^\circ \cos x + \cos 48^\circ \sin x) &= \\ = \sin 18^\circ(\sin 78^\circ \cos x - \cos 78^\circ \sin x).&\end{aligned} \tag{3}$$

Označme na okamžik $\cos 36^\circ = a$. Podle vzorců pro $\cos 2\alpha$ a $\cos 3\alpha$ pak bude

$$\cos 72^\circ = 2a^2 - 1,$$
$$\cos 108^\circ = 4a^3 - 3a.$$

Zároveň $\cos 108^\circ = \cos(180^\circ - 72^\circ) = -\cos 72^\circ$, takže

$$4a^3 + 3a^2 - 3a - 1 = 0,$$

čili

$$2(a+1)(2a^2 - a - 1) = 0.$$

Zřejmě $\cos 36^\circ \neq -1$, takže $a + 1 \neq 0$, a tedy

$$2a^2 - a - \frac{1}{2} = 0,$$

$$2a^2 - 1 = a - \frac{1}{2},$$

$$\cos 72^\circ = \cos 36^\circ - \cos 60^\circ.$$

Protože $\cos 72° = \sin 18°$ a $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}$, dostáváme

$$\sin 18° = 2\sin 12°\sin 48°$$

a po vynásobení obou stran číslem $\sin 78° = \cos 12°$ vyjde

$$\sin 18°\sin 78° = \sin 24°\sin 48°.$$

Dosazením tohoto vztahu do (3) obdržíme rovnici

$$\sin 24°\cos 48°\sin x = -\sin 18°\cos 78°\sin x.$$

Pokud by platilo $\sin 24°\cos 48° = -\sin 18°\sin 78°$, byla by rovnice (3), a tedy i (2) splněna identicky pro všechna x; to však není pravda (např. pro $x = 78°$ je pravá strana (2) nulová, zatímco levá ne). Musí tedy být $\sin x = 0$, to znamená, že

$$x = k\cdot 180°, \qquad k \text{ celé}.$$

Avšak $x + 48° = \beta + \frac{1}{2}\gamma$ leží v intervalu $(0°, 180°)$, takže $k = 0$, a tedy

$$\beta + \frac{\gamma}{2} = 48°.$$

Odtud pomocí (1) plyne

$$\beta = 12°, \qquad \gamma = 72°,$$

a konečně

$$\alpha = 180° - \beta - \gamma = 96°.$$

Tím je příklad vyřešen.

1.5 Označme $x = 5^{25}$, pak

$$\begin{aligned} N &= x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2 - 5x(x+1)^2 = \\ &= \big((x^2 + 3x + 1) - 5^{13}(x+1)\big)\big((x^2 + 3x + 1) + 5^{13}(x+1)\big). \end{aligned}$$

Odtud je zřejmé, že N je složené přirozené číslo.

1.6 Je-li (pro nějaké a) $x_a = l \cdot 2^k$, kde l je liché a $k \geqq 1$, pak

$$x_{a+1} = \frac{x_a}{2} + 2^k = (l+2) \cdot 2^{k-1}.$$

Speciálně, pokud $x_a = 2^k$, dostáváme postupně

$$\left.\begin{aligned} x_a &= 2^k, \\ x_{a+1} &= 3 \cdot 2^{k-1}, \\ x_{a+2} &= 5 \cdot 2^{k-2}, \\ &\vdots \\ x_{a+j} &= (2j+1) \cdot 2^{k-j}, \\ &\vdots \\ x_{a+k} &= (2k+1) \cdot 2^0, \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

načež

$$x_{a+(k+1)} = 2^{k+1}.$$

Protože $x_1 = 1 = 2^0$ a $x_2 = 2 = 2^1$, bude

$$x_{1+1} = 2^1, \qquad x_{1+1+2} = 2^2, \qquad x_{1+1+2+3} = 2^3, \quad \ldots,$$

čili

$$x_{m_k} = 2^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

kde jsme označili $m_k = 1 + (1 + 2 + \ldots + k) = 1 + \frac{1}{2}k(k+1)$. Z $(*)$ pak vyplývá, že

$$x_{m_k+j} = (2j+1) \cdot 2^{k-j}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, k.$$

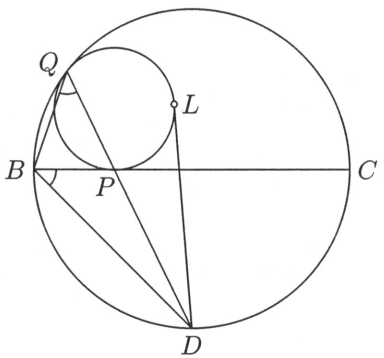
Protože $m_k + (k+1) = m_{k+1}$, jsou tímto vzorcem určeny všechny členy posloupnosti (tj. každé přirozené číslo n se dá, a přitom zřejmě jediným způsobem, napsat ve tvaru $n = m_k + j$, kde $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ a $j \in \in \{0, 1, \ldots, k\}$).

Nyní $1\,992 = 2^3 \cdot 249$, takže

$$x_{m_k+j} = 1\,992 \iff j = 124,$$
$$k = 127 \iff m_k + j = 1 + \frac{127 \cdot 128}{2} + 124 = 8\,253.$$

Číslo 1 992 se tedy vyskytne v posloupnosti $\{x_n\}$ právě jednou, a to pro $n = 8\,253$.

1.7 Označme Q resp. P body dotyku kružnice k_1 s kružnicí k resp. s přímkou BC, D střed toho oblouku BC kružnice k, který neobsahuje bod A, a budiž DL_1, $L_1 \in k_1$, ta tečna z bodu D ke kružnici k_1, která leží na opačné straně přímky QD než bod B (obr. 34). Uvažujme stejnolehlost



Obr. 34

se středem Q, která zobrazuje kružnici k_1 na kružnici k. Protože tečna ke k v bodě D je rovnoběžná s přímkou BC, zobrazí se při této stejnolehlosti bod P do bodu D. Odtud vyplývá, že Q, P a D leží v přímce. Dále $|BD| = |CD|$, takže $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle BQD|$ (obvodové úhly), trojúhelníky BQD a PBD jsou tedy podobné. Tím pádem

$$|DB|^2 = |DP| \cdot |DQ| = |DL_1|^2$$

(poslední rovnost plyne z mocnosti bodu D ke kružnici k_1), takže $|DL_1| = |DB|$. Podobná úvaha pro k_2 místo k_1 (jestliže definujeme L_2 pro k_2 analogicky jako L_1 pro k_1) ukazuje, že i $|DL_2| = |DC| = |DB|$. Platí tedy

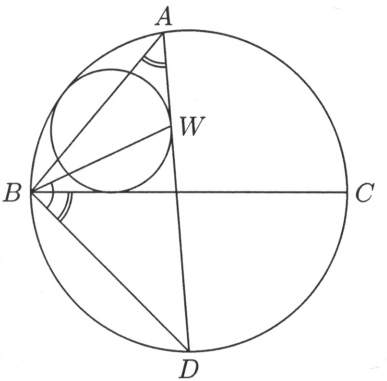
$$|DL_1| = |DL_2|.$$

Protože se však k_1 a k_2 dotýkají, plyne odtud, že $L_1 = L_2 = W$ a

$$|DW| = |DB| = |DC|. \qquad (*)$$

Protože $|BD| = |CD|$, shodují se obvodové úhly BAD a CAD, tj. AW je osa úhlu BAC (obr. 35).

Protože BWD je vnějším úhlem trojúhelníku ABW, platí $|\sphericalangle ABW| + |\sphericalangle BAW| = |\sphericalangle BWD|$. Dále díky $(*)$ $|\sphericalangle BWD| = |\sphericalangle WDB|$ a podle



Obr. 35

věty o obvodových úhlech $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle BAD|$. Celkem máme

$$|\sphericalangle ABW| = |\sphericalangle BWD| - |\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle WBD| - |\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle CBW|,$$

a tedy BW je osa úhlu ABC. Bod W je tedy průsečíkem os úhlů trojúhelníku ABC, neboli středem jeho vepsané kružnice.

34. mezinárodní matematická olympiáda

Ve dnech 13.–24. července 1993 se v tureckém İstanbulu konala 34. mezinárodní matematická olympiáda. Českou republiku na ní velmi úspěšně reprezentovala šestice studentů tří gymnázií. Jejich výsledky vidíte v následující tabulce:

Umístění		Body za úlohu 1	2	3	4	5	6	Body	Cena
102.–110.	Michal Brodský 4. roč. gymnázia Brno, tř. kpt. Jaroše	2	2	1	7	4	3	19	III.
143.–150.	Marcela Hlawiczková 4. roč. gymnázia Třinec	1	7	0	0	7	0	15	III.
122.–132.	Ondřej Klíma 4. roč. gymnázia Brno, tř. kpt. Jaroše	1	0	4	7	1	4	17	III.
52.–58.	Vít Novák 4. roč. gymnázia Praha, Korunní	7	0	4	5	3	6	25	II.
19.–24.	Jana Syrovátková 4. roč. gymnázia Brno, tř. kpt. Jaroše	7	2	7	4	7	5	32	I.
59.–66.	Robert Šámal 2. roč. gymnázia Praha, Korunní	7	2	0	7	5	3	24	II.
	Celkem	25	13	16	30	27	21	132	

Vedoucím české delegace byl jednatel ÚV MO dr. *Karel Horák*, CSc., z Matematického ústavu Akademie věd, který se zúčastnil i zasedání mezinárodní jury. 16. července pak do İstanbulu přijelo naše šestičlenné

družstvo vedené doc. dr. *Leo Bočkem*, CSc., z Matematicko-fyzikální fakulty University Karlovy, předsedou ÚV MO. Celkem se 34. MMO zúčastnilo 413 studentů ze 73 zemí (soutěž však dokončilo jen 410 z nich). Podle pravidel byla polovina účastníků oceněna jednou ze tří medailí: za zisk 30–42 bodů byla udělena zlatá medaile (I. cena), za 20–29 bodů stříbrná (II. cena) a za 11–19 bodů bronzová (III. cena).

V neoficiálním pořadí družstev jednotlivých zemí se Česká republika s jednou zlatou, dvěma stříbrnými a třemi bronzovými medailemi umístila se 132 body na 10. místě, což je výsledek, který se nám asi dlouho nepodaří zopakovat!

	I	II	III	body
ČLR	6	0	0	215
Německo	4	2	0	189
Bulharsko	2	4	0	178
Rusko	4	1	1	177
Tchaj-wan	1	4	1	162
Írán	2	3	1	153
USA	2	2	2	151
Maďarsko	3	1	2	143
Vietnam	1	4	1	138
Česká republika	1	2	3	132
Rumunsko	1	2	3	128
Slovensko	1	3	1	126
Austrálie	1	2	3	125
Velká Británie	0	3	3	118
Indie	0	4	1	116
Korea	0	3	3	116
Francie	2	1	1	115
Izrael	1	2	2	113
Kanada	1	1	3	113
Japonsko	0	2	3	98
Ukrajina	0	2	3	96
Rakousko	0	1	4	87
Itálie	1	0	2	86
Turecko	0	1	2	81
Kazachstán	0	1	3	80
Gruzie	0	1	3	79
Kolumbie	0	0	4	79
Arménie	1	1	0	78
Polsko	0	2	1	78
Singapur	0	1	3	75
Lotyšsko	0	2	1	73
Dánsko	0	1	3	72
Hongkong	0	0	4	70
Brazílie	0	0	1	60
Nizozemsko	0	0	1	58
Kuba	0	1	1	56
Belgie	0	0	1	55

	I	II	III	body
Bělorusko	0	1	1	54
Švédsko	0	1	1	51
Maroko	0	0	1	49
Thajsko	0	0	2	47
Argentina	0	1	1	46
Švýcarsko	0	1	1	46
Norsko	0	0	2	44
Nový Zéland	0	0	2	43
Slovinsko	0	0	2	43
Španělsko	0	1	1	43
Makedonie	0	0	3	42
Litva	0	0	0	41
Irsko	0	0	1	39
Portugalsko	0	0	1	35
Ázerbájdžán	0	0	1	33
Filipíny	0	0	1	33
Finsko	0	0	0	33
Chorvatsko	0	0	1	32
Estonsko	0	0	1	31
JAR	0	0	0	30
Trinidad a Tobago	0	0	0	30
Moldavsko	0	0	0	29
Kirgizie	0	0	0	28
Macao	0	0	0	24
Mexiko	0	0	1	24
Mongolsko	0	0	1	24
Island	0	0	0	23
Lucembursko	0	1	0	20
Albánie	0	0	0	18
Severní Kypr	0	0	0	17
Bahrajn	0	0	0	16
Kuvajt	0	0	0	16
Indonézie	0	0	0	15
Bosna a Hercegovina	0	0	1	14
Alžírsko	0	0	0	9
Turkmenistán	0	0	0	9

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Nechť $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, kde $n > 1$ je přirozené číslo. Dokažte, že f nelze rozložit na součin dvou mnohočlenů, z nichž každý má celočíselné koeficienty a stupeň aspoň 1. (*Irsko*)

2. Nechť D je vnitřní bod ostroúhlého trojúhelníku ABC, pro který platí

$$|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB| + 90°$$

a

$$|AC| \cdot |BD| = |AD| \cdot |BC|.$$

a) Spočtěte hodnotu podílu $\dfrac{|AB| \cdot |CD|}{|AC| \cdot |BD|}$.

b) Dokažte, že tečny v bodě C kružnic opsaných trojúhelníkům ACD a BCD jsou na sebe kolmé. (*Velká Británie*)

3. Uvažujme následující hru na nekonečné šachovnici. Na počátku je n^2 kamenů uspořádáno do bloku $n \times n$ sousedících polí, přičemž v každém poli stojí jeden kámen. *Tahem* rozumíme přemístění kamene horizontálním či vertikálním směrem přes jedno obsazené sousední pole na bezprostředně následující pole volné. Přeskočený kámen odstraníme.
Najděte všechna n, pro něž může hra skončit s jediným kamenem na šachovnici. (*Finsko*)

4. Pro body P, Q, R v rovině označme $m(PQR)$ minimum délek výšek trojúhelníku PQR ($m(PQR) = 0$ pro kolineární body P, Q, R).
Jsou-li A, B, C tři body v dané rovině, dokažte, že pro každý bod X této roviny platí

$$m(ABC) \leqq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC).$$

(*Makedonie*)

5. Nechť $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Rozhodněte, zda existuje funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pro niž

$$f(1) = 2,$$
$$f\big(f(n)\big) = f(n) + n \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}$$

a

$$f(n) < f(n+1) \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

(*Německo*)

6. Nechť $n > 1$ je celé číslo. Uvažujme n lampiček $L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}$ uspořádaných do kruhu. Každá lampička je buď zapnutá, nebo vypnutá. Postupně provádíme kroky $Z_0, Z_1, \ldots, Z_i, \ldots$, přičemž krok Z_j ovlivní pouze stav lampičky L_j (nechává všechny ostatní lampičky nezměněny), a to následovně: Je-li L_{j-1} zapnutá, změní Z_j stav lampičky L_j ze zapnutého na vypnutý, anebo z vypnutého na zapnutý. Je-li L_{j-1} vypnutá, Z_j nechá stav L_j nezměněn. Lampičky jsou číslovány modulo n, to znamená, že $L_{-1} = L_{n-1}$, $L_0 = L_n$, $L_1 = L_{n+1}$, atd. Na začátku jsou všechny lampičky zapnuty. Dokažte, že

a) existuje kladné celé číslo $M(n)$ takové, že po $M(n)$ krocích budou všechny lampičky zapnuty,
b) je-li n tvaru 2^k, budou po $n^2 - 1$ krocích všechny lampičky zapnuty,
c) je-li n tvaru $2^k + 1$, budou po $n^2 - n + 1$ krocích všechny lampičky zapnuty. (*Nizozemsko*)

Řešení úlohy

1. Předpokládejme, že daný mnohočlen f lze rozložit, tj. že platí $f = gh$, kde g a h jsou mnohočleny s celočíselnými koeficienty stupně aspoň 1 a s koeficientem 1 u nejvyšší mocniny. Protože $f(0) = g(0)h(0) = 3$, je buď $|g(0)| = 1$, nebo $|h(0)| = 1$. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že $|g(0)| = 1$.

Nechť $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ $(k \geqq 1)$ jsou kořeny rovnice $g(x) = 0$ v oboru komplexních čísel, tj. platí

$$g(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_k). \tag{1}$$

Je tedy zároveň $|g(0)| = |\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k| = 1$.

Protože $f = gh$, jsou čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ $(k \geqq 1)$ kořeny i rovnice $f(x) = x^{n-1}(x + 5) + 3 = 0$, proto

$$\alpha_i^{n-1}(\alpha_i + 5) = -3, \quad 1 \leqq i \leqq k.$$

Součinem těchto vztahů pro $i = 1, 2, \ldots, k$ dostaneme

$$|(\alpha_1 + 5)(\alpha_2 + 5)\ldots(\alpha_k + 5)| = 3^k. \tag{2}$$

Z vyjádření (1) podle (2) nyní plyne

$$|g(-5)| = |(\alpha_1 + 5)(\alpha_2 + 5)\ldots(\alpha_k + 5)| = 3^k,$$

přitom ale pro mnohočleny g a h s celočíselnými koeficienty máme $3 = f(-5) = g(-5)h(-5)$. Protože $g(-5)$ dělí číslo 3, musí v rovnosti (2) nutně být $k = 1$, a mnohočlen g je tedy lineární.

Jestliže g je lineární dvojčlen s koeficientem 1 u nejvyšší mocniny a s vlastností $|g(0)| = 1$, je $g(x) = x \pm 1$, takže je buď $g(-1) = 0$, nebo $g(1) = 0$. Odtud plyne, že je buď $f(-1) = 0$, nebo $f(1) = 0$. Jak se snadno přesvědčíme, ani jedno z čísel $f(-1)$, $f(1)$ však není nulové.

Rozklad mnohočlenu f na součin dvou netriviálních mnohočlenů s celočíselnými koeficienty není tedy možný.

Jiné řešení. Racionálními kořeny daného mnohočlenu f mohou být jedině čísla ± 1, ± 3, pro liché číslo x je však hodnota $f(x)$ rovněž lichá, takže f nemá žádný racionální kořen. To znamená, že mnohočlen f není dělitelný lineárním dvojčlenem s celočíselnými koeficienty (takový má vždy racionální kořen!).

Předpokládejme, že

$$f(x) = (a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0) \times \\ \times (b_{n-k}x^{n-k} + b_{n-k-1}x^{n-k-1} + \ldots + b_1 x + b_0), \qquad (3)$$

kde a_i $(0 \leqq i \leqq k)$ a b_j $(0 \leqq j \leqq n-k)$ jsou celá čísla, $k \geqq 2$, $n-k \geqq 2$ (je tedy $n \geqq 4$ a $2 \leqq k \leqq n-2$). Porovnáním koeficientů vychází $a_0 b_0 = 3$. Volme označení tak, že a_0 je dělitelné třemi a $|b_0| = 1$. Koeficienty a_i prvního mnohočlenu na pravé straně (3) nemohou být všechny dělitelné třemi (to by byly třemi dělitelné i koeficienty mnohočlenu f), existuje tedy index t $(1 \leqq t \leqq k)$ takový, že $3 \mid a_i$ pro všechna $i < t$ a $3 \nmid a_t$. Protože $t \leqq k \leqq n-2$, je koeficient u x^t mnohočlenu f roven nule:

$$0 = a_t b_0 + (a_{t-1}b_1 + \ldots).$$

Protože výraz v závorce je dle předpokladu dělitelný třemi, ale $3 \nmid |a_t b_0| = |a_t|$, dostáváme spor.

Poznámka. Analogicky druhému řešení můžeme dokázat následující obecnější tvrzení (tvrzení úlohy dostaneme pro $p = 3$ a $k = n-1$):

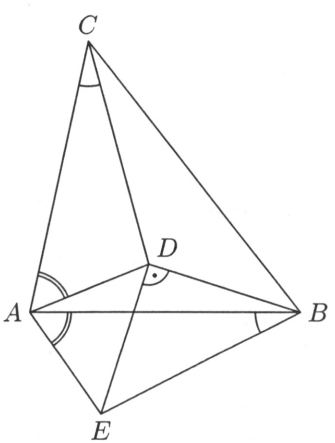
Nechť $f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$ je mnohočlen s celočíselnými koeficienty takový, že pro nějaké prvočíslo p jsou koeficienty c_i dělitelné p pro všechna i, $0 \leqq i < k \leqq n$, $p \nmid c_k$ a $p^2 \nmid c_0$. Jestliže se f dá rozložit na součin dvou mnohočlenů s celočíselnými koeficienty, má aspoň jeden z nich stupeň nejvýše $n-k$.

Je to zobecnění tzv. *Eisensteinova kritéria*, které dostaneme pro $k = n$ a které říká, že mnohočlen s koeficientem 1 u nejvyšší mocniny, jehož všechny ostatní koeficienty jsou dělitelné prvočíslem p, přičemž absolutní člen je dělitelný jen p, a nikoli p^2, je nerozložitelný ve třídě mnohočlenů s celočíselnými koeficienty.

2. a) V polorovině opačné k ABC uvažujme bod E takový, že DEB je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu D. Platí tak $|BD| = |DE|$. Protože $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB| + 90°$, je $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle ACB|$. Podle zadání

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AD|}{|DE|},$$

odkud plyne, že trojúhelníky ABC a AED jsou podobné, a proto $|\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle CAB|$ (obr. 36). Odečtením $|\sphericalangle DAB|$ od obou stran předešlé rovnosti dostáváme rovněž $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle BAE|$.



Obr. 36

Z uvedené podobnosti trojúhelníků ABC a AED vychází

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|AC|}{|AD|}.$$

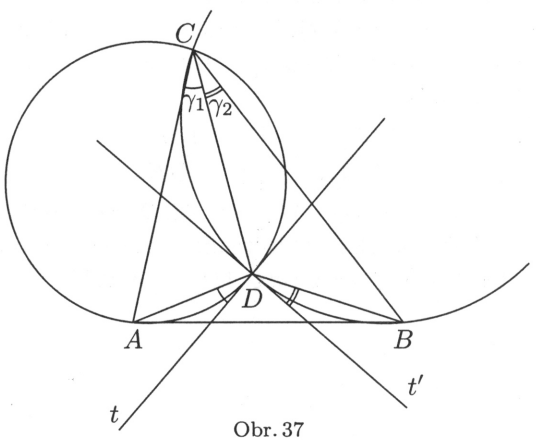
Ze shodnosti úhlů CAD a BAE a předešlé rovnosti dále plyne, že i trojúhelníky ADC a AEB jsou podobné. Platí tedy

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BE|}{|CD|},$$

a tudíž

$$\frac{|AB| \cdot |CD|}{|AC| \cdot |BD|} = \frac{|BE|}{|BD|} = \sqrt{2}.$$

b) Označme t a t' tečny ke kružnicím opsaným trojúhelníkům ACD a BCD v bodě D (obr. 37). Ze shodnosti vyznačených obvodových a úse-



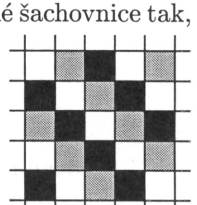
Obr. 37

kových úhlů γ_1 a γ_2 příslušných tětivě AD kružnice ADC a tětivě BD kružnice BDC dostáváme pro velikost úhlu φ, který svírají přímky t a t',

$$\varphi = |\sphericalangle ADB| - (\gamma_1 + \gamma_2) = |\sphericalangle ADB| - |\sphericalangle ACB| = 90°.$$

Protože tečny k oběma opsaným kružnicím v bodě C jsou s tečnami t a t' souměrně sdružené podle osy společné tětivy CD, je tvrzení b) dokázáno.

3. Zvolme kartézský souřadný systém v rovině nekonečné šachovnice tak, že jednotlivá pole v něm mají celočíselné souřadnice a n^2 kamenů zabírá všechny mřížové body (x, y), kde $1 \leqq x \leqq n$, $1 \leqq y \leqq n$. Každý tah má vliv na obsazení tří polí sousedících horizontálně či vertikálně. Obarvíme-li pole šachovnice třemi barvami (obr. 38) tak, že stejnou barvu budou mít pole, jejichž součet souřadnic $x + y$ dává stejný zbytek modulo 3, vidíme, že po každém tahu se celkový počet obsazených polí každé barvy změní o jednu (ve dvou případech klesne, v jednom vzroste).


Obr. 38

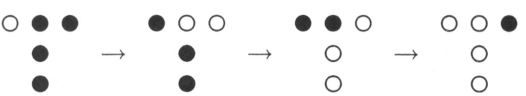
Označme a_0, a_1, a_2 počet obsazených polí té které barvy. Na počátku je počet obsazených polí roven n^2. Je-li n násobek tří, je počet obsazených

polí každé barvy stejný ($a_0 = a_1 = a_2 = \frac{1}{3}n^2$), takže všechna tři čísla mají stejnou paritu (jsou všechna sudá, nebo všechna lichá). Jak jsme už ukázali, po každém tahu se parita každého z čísel a_0, a_1, a_2 změní na opačnou, a protože konečné pozici odpovídá trojice čísel $0, 0, 1$ s různou paritou, je zřejmé, že pro n dělitelné třemi nelze této konečné pozice žádnou posloupností tahů dosáhnout.

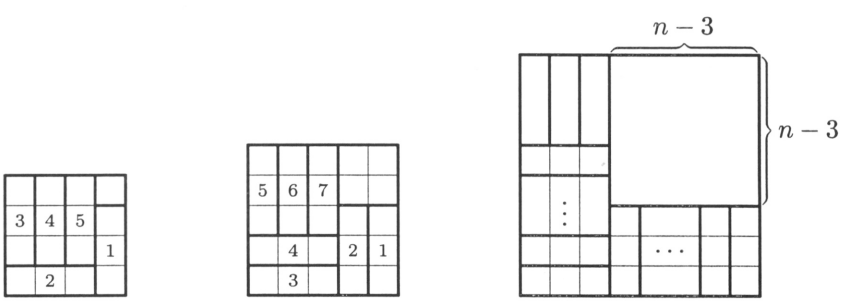
Není-li n dělitelné třemi, popíšeme postup, kterým lze vždy požadované konečné pozice dosáhnout. Tím bude úloha vyřešena.

Pro $n = 1$ jsme hotovi. Pro $n = 2$ dosáhneme konečné pozice následující posloupností tahů:

Nyní ukážeme, jak zredukovat čtyři obsazená pole z pětice polí tvaru „T“ na jediné obsazené pole, přičemž uvolníme trojici sousedních polí:



Pomocí tohoto postupu (ne nutně v uvedené orientaci) zredukujeme pro $n = 4$ počet obsazených polí na 1, pro $n = 5$ na 2^2 a obecně pro $n \geqq 6$ na čtverec $(n-3) \times (n-3)$ (obr. 39). Pro $n = 4$ a $n = 5$ postupujeme odebíráním trojic ve vyznačeném pořadí, pro $n \geqq 6$ postupujeme analogicky od pravého dolního rohu a skončíme vodorovnou trojicí v levém horním rohu. Odtud plyne naše tvrzení matematickou indukcí.



Obr. 39

Závěr. Hra může skončit s jediným kamenem na šachovnici, právě když n není dělitelné třemi.

4. V případě, že body A, B, C jsou kolineární, je tvrzení zřejmé.

Pro libovolné body P, Q, R uvažované roviny označme $M(PQR)$ maximum délek stran trojúhelníku PQR a $S(PQR)$ dvojnásobek jeho obsahu. Pak zřejmě platí

$$m(PQR) = \frac{S(PQR)}{M(PQR)}.$$

Dále si všimněme, že pro libovolný bod Z trojúhelníku PQR platí

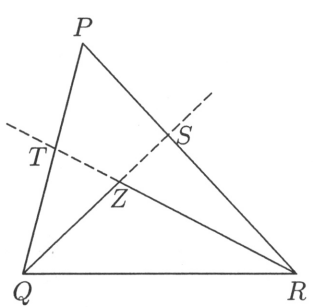
$$M(ZQR) \leqq M(PQR).$$

Označíme-li totiž S a T průsečíky polopřímek QZ a RZ s protějšími stranami PR a PQ trojúhelníku PQR (obr. 40), bude zřejmě (spojnice vrcholu s libovolným bodem protější strany není nikdy delší než delší z obou sousedních stran!)

$$|QZ| \leqq |QS| \leqq \max(|QP|, |QR|),$$
$$|RZ| \leqq |RT| \leqq \max(|QR|, |RP|),$$

takže

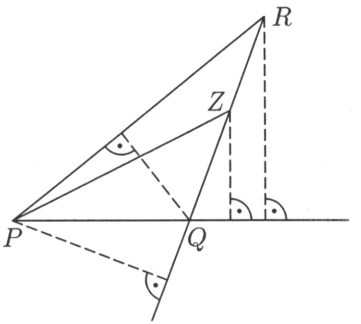
$$\begin{aligned} M(ZQR) &= \max(|QR|, |RZ|, |ZQ|) \leqq \\ &\leqq \max(|PQ|, |QR|, |RP|) = M(PQR). \end{aligned}$$



Obr. 40

Leží-li nyní bod Z na některé straně trojúhelníku PQR, řekněme QR (obr. 41), pak rozhodně nejsou délky výšek trojúhelníku PQZ z vrcholů P a Z větší než odpovídající délky výšek trojúhelníku PQR z vrcholů

P a R; a pokud je nejkratší výškou trojúhelníku PQR zbývající výška



Obr. 41

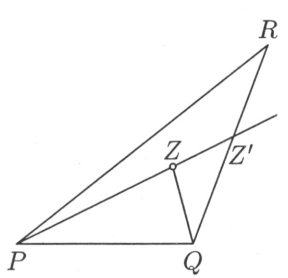
z vrcholu Q, musí být úhel QPR ostrý. V tom případě pro délku poslední výšky trojúhelníku PQZ platí

$$|PQ| \sin |\sphericalangle QPZ| \leqq |PQ| \sin |\sphericalangle QPR|,$$

takže je v každém případě

$$m(PQZ) \leqq m(PQR).$$

Poslední nerovnost snadno zobecníme pro libovolný bod Z trojúhelníku PQR (obr. 42): je-li Z vnitřní bod trojúhelníku PQR a Z' průsečík



Obr. 42

spojnice PZ s protější stranou QR, je podle právě dokázané nerovnosti

$$m(PQZ) \leqq m(PQZ') \leqq m(PQR). \tag{1}$$

Uvedené poznatky nyní využijeme k vyřešení úlohy.

a) Nechť X je bod trojúhelníku ABC (obr. 43).

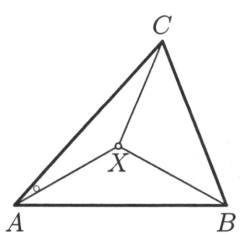
V tomto případě platí pro obsahy trojúhelníků ABC, ABX, AXC a XBC

$$\begin{aligned} S(ABC) &= S(ABX) + S(AXC) + S(XBC) = \\ &= m(ABX)M(ABX) + m(AXC)M(AXC) + m(XBC)M(XBC) \leqq \\ &\leqq \big(m(ABX) + m(AXC) + m(XBC)\big)M(ABC), \end{aligned}$$

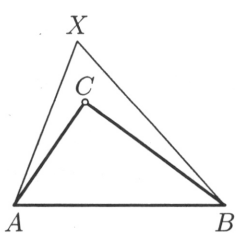
odkud po vydělení kladným číslem $M(ABC)$ plyne dokazovaná nerovnost.

b) Nechť X je vnějším bodem trojúhelníku ABC, přičemž jeden z vrcholů trojúhelníku ABC (označme ho např. C) leží uvnitř trojúhelníku určeného zbývajícími dvěma vrcholy a bodem X (tedy uvnitř trojúhelníku ABX, obr. 44). V tom případě je podle (1)

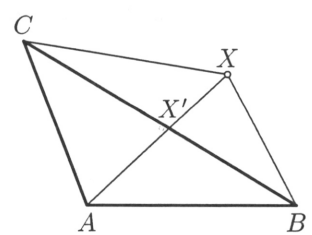
$$m(ABC) \leqq m(ABX) \leqq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC).$$



Obr. 43



Obr. 44



Obr. 45

c) Zbývá případ, kdy jsou body A, B, C, X vrcholy konvexního čtyřúhelníku. Volme označení vrcholů např. tak, že $ABXC$ je konvexní (obr. 45) a označme X' průsečík úhlopříček AX a BC.

Podle (1) pro bod X' platí $m(ABX') \leqq m(ABX)$ a $m(AX'C) \leqq m(AXC)$, zatímco $m(X'BC) = 0$. Užitím výsledku části a) tak dostáváme

$$\begin{aligned} m(ABC) &\leqq m(ABX') + m(AX'C) + m(X'BC) \leqq \\ &\leqq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC), \end{aligned}$$

což je opět nerovnost, kterou jsme chtěli dokázat.

Poznámka. Není těžké uvážit, že rovnost v dokázané nerovnosti nastane v případě rovnostranného trojúhelníku ABC pro všechny body X v trojúhelníku (tj. včetně jeho hranice), pro rovnoramenný trojúhelník ABC, jehož základna AB je menší než rameno AC, pro všechny body X základny AB a pro $X = C$ a pro všechny ostatní trojúhelníky jen pro body $X \in \{A, B, C\}$.

5. Ukážeme, že funkce f daných vlastností existuje.

Na základě hodnoty $f(1) = 2$ dostaneme opakovaným použitím vztahu $f\big(f(n)\big) = f(n) + n$ rovnosti

$$\begin{aligned} f(2) &= f(1) + 1 = 2 + 1 = 3, \\ f(3) &= f(2) + 2 = 3 + 2 = 5, \\ f(5) &= f(3) + 3 = 5 + 3 = 8, \\ f(8) &= f(5) + 5 = 8 + 5 = 13, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Předpokládejme, že $n \geqq 3$ a že máme již definovány hodnoty $f(1)$, $f(2), \ldots, f(n-1)$ tak, že současně platí

$$f(1) < f(2) < \ldots < f(n-1).$$

Položme

$$\begin{aligned} g(n) &= \max\{k\colon 1 \leqq k < n, f(k) \leqq n\}, \\ f(n) &= n + g(n). \end{aligned} \tag{1}$$

Protože $f(2) = 3 \leqq n$, je množina na pravé straně (1) neprázdná, takže definice funkce g má dobrý smysl. Navíc z předpokladu $f(1) < f(2) < \ldots < f(n-1)$ plyne, že je $g(n) \geqq g(n-1)$, a tedy $f(n) > f(n-1)$. Užitím principu matematické indukce zjistíme, že takto definovaná funkce f je rostoucí.

Zbývá ještě ověřit, že funkce f splňuje pro všechna $n \in \mathbb{N}$ podmínku $f\big(f(n)\big) = f(n) + n$. Protože f je rostoucí funkce a $f(1) = 2$, platí $f(n) > n$. Odtud již plyne

$$g\big(f(n)\big) = \max\{k\colon 1 \leqq k < f(n), f(k) \leqq f(n)\} \geqq n,$$

a proto $f\big(f(n)\big) = f(n) + g\big(f(n)\big) = f(n) + n$.

Nalezená funkce f má tedy všechny požadované vlastnosti.

Jiné řešení. Zkusme funkci f hledat mezi lineárními funkcemi tvaru $f(n) = \alpha n$. Z rovnosti $f\big(f(n)\big) = f(n) + n$ vychází

$$\alpha^2 n = \alpha n + n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Koeficient α tedy splňuje kvadratickou rovnici $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$, která má kladný kořen $\alpha = \frac{1}{2}\big(1 + \sqrt{5}\big)$. Funkce $n \mapsto \alpha n$ není ovšem celočíselná, zkusíme ji proto zaokrouhlit:

Nechť $\alpha = \frac{1}{2}\big(1 + \sqrt{5}\big)$. Položme

$$f(n) = \left\lfloor \alpha n + \frac{1}{2} \right\rfloor \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{2}$$

Protože α je iracionální číslo, bude pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platit

$$|f(n) - \alpha n| < \frac{1}{2} \tag{3}$$

a speciálně

$$\big|f\big(f(n)\big) - \alpha f(n)\big| < \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Spočtěme dále rozdíl (využijeme přitom rovnost $\alpha^2 - \alpha = 1$)

$$\begin{aligned} f\big(f(n)\big) - f(n) - n &= f\big(f(n)\big) - f(n) - (\alpha^2 - \alpha)n = \\ &= \big(f\big(f(n)\big) - \alpha f(n)\big) + (\alpha - 1)\big(f(n) - \alpha n\big). \end{aligned}$$

Odtud podle (3) a (4) plyne

$$\big|f\big(f(n)\big) - f(n) - n\big| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\alpha - 1) = \frac{1}{2}\alpha < 1.$$

Protože na levé straně stojí absolutní hodnota celého čísla, je rovna nule, tj.

$$f\big(f(n)\big) = f(n) + n.$$

Konečně rovnost $f(1) = 2$ plyne z definice (2) díky tomu, že $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

Poznámka. Z uvedených řešení je vidět, že funkce f není podmínkami úlohy určena jednoznačně.

6. Uvažujme posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$ nul a jedniček takovou, že pro $j \geqq 0$ je $a_j = 1$, právě když po provedení Z_j je lampička L_j zapnutá (v daném okamžiku j tak zapisujeme pouze stav lampičky L_j, protože v dalších $n-1$ krocích se její stav nebude měnit). Výsledek operace Z_j můžeme charakterizovat kongruencí

$$a_j = a_{j-n} + a_{j-1} \pmod 2. \tag{1}$$

Pravidlo (1) platí pro každé $j \geqq n$ a bude platit i pro $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, jestliže položíme

$$a_{-n} = a_{-n+1} = a_{-n+2} = \ldots = a_{-2} = a_{-1} = 1,$$

což odpovídá počátečnímu stavu, kdy jsou všechny lampičky zapnuty.

Vektor $\boldsymbol{v}_j = (a_{j-n}, \ldots, a_{j-1})$ charakterizuje stav lampiček v okamžiku j (bezprostředně před provedením operace Z_j), $\boldsymbol{v}_0 = (1, 1, \ldots, 1)$. Protože existuje jen konečný počet takových vektorů nul a jedniček (totiž 2^n), existují celá čísla $j \geqq 0$ a $m \geqq 1$ taková, že $\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_{j+m}$.

Uvědomme si, že ze složek vektoru $\boldsymbol{v}_j = (a_{j-n}, \ldots, a_{j-1})$ dokážeme pomocí vztahu (1) určit složky vektoru $\boldsymbol{v}_{j-1} = (a_{j-n-1}, \ldots, a_{j-2})$ — stačí pomocí (1) spočítat jedinou neznámou souřadnici:

$$a_{j-n-1} = a_{j-1} - a_{j-2} \pmod 2$$

(jinými slovy přiřazení $\boldsymbol{v}_{j-1} \mapsto \boldsymbol{v}_j$ je invertibilní). Z rovnosti $\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_{j+m}$ tak rovnou plyne $\boldsymbol{v}_{j-1} = \boldsymbol{v}_{j+m-1}, \ldots, \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_m$. Číslo $M(n) = m$ má tedy požadovanou vlastnost a).

Použijeme-li rovnost (1) opakovaně na sčítance na její pravé straně, dostaneme postupně

$$\begin{aligned}
a_j &= a_{j-n} + a_{j-1} = \\
&= (a_{j-2n} + a_{j-n-1}) + (a_{j-1-n} + a_{j-2}) = \\
&= a_{j-2n} + 2a_{j-n-1} + a_{j-2} \pmod 2, \\
a_j &= (a_{j-3n} + a_{j-2n-1}) + 2(a_{j-2n-1} + a_{j-n-2}) + \\
&\quad + (a_{j-2-n} + a_{j-3}) = \\
&= a_{j-3n} + 3a_{j-2n-1} + 3a_{j-n-2} + a_{j-3} \pmod 2.
\end{aligned}$$

Dostáváme tak vzorec

$$a_j = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} a_{j-(r-i)n-i} \pmod 2, \tag{2}$$

který platí pro všechna j a r taková, že index $j-(r-i)n-i$ je aspoň $-n$, tj. pro $j \geqq (r-1)n$, a který snadno zdůvodníme indukcí pomocí rovnosti (1) a vzorce $\binom{r+1}{i} = \binom{r}{i-1} + \binom{r}{i}$ pro $0 < i < r+1$.

Vzorec (2) se velmi zjednoduší pro $r = 2^k$, protože kombinační čísla tvaru $\binom{2^k}{i}$ jsou pro všechna $i \in \{1, \ldots, 2^k - 1\}$ sudá. To je snadno vidět např. z vyjádření

$$\binom{2^k}{i} = 2^k \frac{2^k - 1}{1} \cdot \frac{2^k - 2}{2} \cdot \frac{2^k - i + 1}{i - 1} \cdot \frac{1}{i},$$

v němž žádný ze zlomků $\dfrac{2^k - t}{t}$ po zkrácení neobsahuje mocninu dvojky, a přitom $2^k/i \geqq 2$.

Pro $r = n = 2^k$ a $j \geqq (n-1)n$ můžeme tedy psát

$$a_j = a_{j-n^2} + a_{j-n} = a_{j-n^2} + (a_j - a_{j-1}) \pmod 2$$

neboli

$$a_{j-n^2} = a_{j-1},$$

což znamená, že posloupnost (a_j) je periodická s periodou $n^2 - 1$. Tím je dokázáno tvrzení b).

Je-li konečně $n = 2^k + 1$, využijeme vzorec (5) pro $r = n - 1 = 2^k$, takže pro libovolné $j \geqq (n-2)n$ platí

$$a_j = a_{j-n^2+n} + a_{j-n+1} = a_{j-n^2+n} + (a_{j+1} - a_j) \pmod 2$$

neboli (je $x = -x \pmod 2$)

$$a_{j-n^2+n} = a_{j+1},$$

což znamená, že posloupnost (a_j) je periodická s periodou $n^2 - n + 1$. Tím je dokázáno tvrzení c).

5. mezinárodní olympiáda v informatice

Po vzoru mezinárodní matematické a fyzikální olympiády byla v roce 1989 založena také mezinárodní olympiáda v informatice (IOI — International Olympiad in Informatics). Zájem o tuto soutěž v celém světě neustále roste a každoročně se zvyšuje počet zúčastněných zemí. Ještě před dvěma lety v roce 1991 přijely na 3. mezinárodní olympiádu v informatice soutěžní družstva pouze z 23 zemí, na tomto 5. ročníku IOI byl již počet účastníků téměř dvojnásobný. Poprvé ve své historii také IOI opustila evropský kontinent a přenesla se až do Jižní Ameriky.

Pátá mezinárodní olympiáda v informatice IOI'93 pro středoškoláky se konala ve dnech 16.–25. 10. 1993 ve městě Mendoza v Argentině. Olympiády se zúčastnilo 155 soutěžících (z toho 5 dívek) ze 44 zemí, několik dalších zemí vyslalo na soutěž své pozorovatele.

Mezinárodní olympiáda v informatice je vyhlášena jako soutěž jednotlivců, každá země na ni může vyslat delegaci tvořenou dvěma vedoucími a nejvýše čtyřmi soutěžícími. Vedoucí delegace se automaticky stává členem mezinárodní jury, jeho zástupce se po dobu soutěže stará o soutěžní družstvo. Soutěžícími jsou studenti středních škol, případně čerství absolventi v příslušném školním roce ve věku do 19 let.

Československé družstvo se zúčastnilo všech čtyř předchozích ročníků a pravidelně dosahovalo výborných výsledků. Po rozdělení Československa jela poprvé soutěžit samostatná družstva České a Slovenské republiky. Obě družstva byla vybrána na základě výsledků 3. kola kategorie P. Vybraní čeští i slovenští reprezentanti se společně s náhradníky v září 1993 zúčastnili společného týdenního přípravného soustředění před mezinárodní olympiádou. Soustředění se konalo na matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Komenského v Bratislavě pod vedením vedoucího družstva Slovenské republiky mgr. Richarda Nemce.

České reprezentační družstvo pro IOI'93 odcestovalo do Argentiny v následujícím složení: *Martin Mareš*, student 3. ročníku gymnázia U libeňského zámku v Praze 8, *Jana Syrovátková*, absolventka gymnázia na tř. kpt. Jaroše v Brně (dnes studentka MFF UK v Praze), *Vít Novák* a *Jiří Vaníček*, oba absolventi gymnázia v Korunní ul. v Praze 2 (dnes oba

studenti MFF UK v Praze). Vedoucím delegace byl doc. RNDr. *Václav Sedláček*, CSc., z přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně, jeho zástupcem RNDr. *Pavel Töpfer*, CSc., z matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

V organizaci tohoto ročníku soutěže došlo k několika drobným úpravám. V prvním soutěžním dnu nebyla řešena pouze jedna velká úloha jako dříve, ale místo toho byly studentům zadány k řešení tři méně náročné problémy. Ve druhém soutěžním dnu pak byla soutěžícím předložena k řešení jedna obtížnější úloha. Soutěžní úlohy byly zvoleny vždy v den jejich řešení mezinárodní porotou složenou z vedoucích delegací všech zúčastněných států. Mezinárodní jury vybírala pokaždé ze tří různých návrhů na každou soutěžní úlohu. Soutěžící pracovali samostatně u přidělených osobních počítačů typu PC. V každém soutěžním dnu měli na práci 5 hodin čistého času. Výsledné programy pak byly za přítomnosti studenta a vedoucího delegace testovány koordinátory. Novinkou bylo stanovení časových limitů při testování studentských programů pomocí předem připravených souborů zkušebních dat. V hodnocení úloh se tak letos poprvé odrazila také efektivita vytvořených programů. Na základě výsledků předepsaných testů byla řešení úloh obodována. Každý den mohl soutěžící získat maximálně 100 bodů. Celkové výsledky byly stanoveny na základě součtu bodového zisku v obou soutěžních dnech.

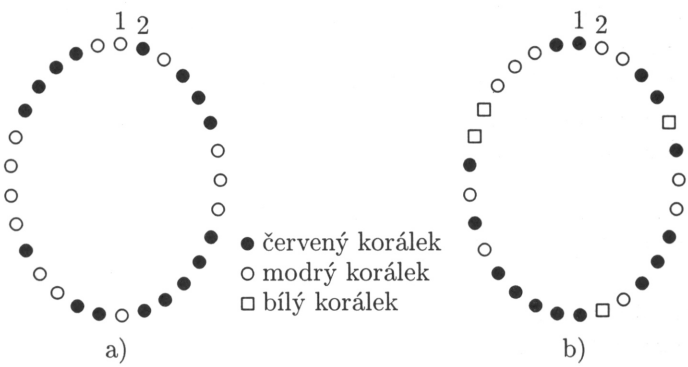
Prvních 82 soutěžících z přítomných 155 bylo oceněno některou z medailí. Celkově bylo uděleno 13 zlatých medailí (za bodový zisk 186–200 bodů), 27 stříbrných medailí (za 161–178 bodů) a 42 bronzové medaile (za 123–158 bodů). Naši studenti navázali na dobrou tradici československé reprezentace na IOI a opět dosáhli vynikajících výsledků. *Martin Mareš* získal zlatou medaili (200 bodů) a obsadil 1.–4. místo v celkovém pořadí. Dvě stříbrné medaile obdrželi *Vít Novák* (175 bodů, 15.–25. místo) a *Jana Syrovátková* (167 bodů, 31.–32. místo). Pouze *Jiří Vaníček* zůstal letos bez medaile (40 bodů, 137. místo). Navíc byl Martin Mareš jedním ze čtyř nejúspěšnějších řešitelů, kteří za absolutní možný zisk 200 bodů obdrželi zvláštní cenu UNESCO. Mezi oceněnými účastníky byly pouze dvě dívky, a to Jana Syrovátková z ČR a Bronislava Brejová ze SR (obě získaly stříbrnou medaili). Soutěž družstev nebyla na IOI vyhlášena a ani žádné pořadí družstev nebylo publikováno. Bylo by ostatně velmi obtížné jakékoliv pořadí družstev stanovit, neboť řada zemí vyslala do Argentiny neúplné delegace pouze se dvěma nebo třemi soutěžícími.

Mimo vlastní soutěž připravili organizátoři pro všechny účastníky bohatý doprovodný program. Jeho nejhodnotnější součástí byl závěrečný

celodenní výlet autobusy do And téměř až ke státní hranici Argentiny s Chile.

Texty soutěžních úloh

1. Máme náhrdelník složený z N korálků ($N \leqq 100$), z nichž některé jsou červené, jiné modré a zbývající bílé. Korálky jsou seřazeny náhodně. Na obr. 46 jsou dva příklady pro $N = 29$. (Korálky, považované v dalším textu za první a druhý, jsou na obrázku označeny.)



Obr. 46

Konfigurace na obrázku a) může být reprezentována jako řetězec znaků b a r, kde b reprezentuje modrý korálek a r korálek červený, následovně:

$$brbrrrbbbrrrrrbrrbbrbbbbrrrrb.$$

Vaším úkolem je přerušit náhrdelník, napřímit jej, a potom odebírat korálky jedné barvy z jednoho konce, dokud nenarazíte na korálek jiné barvy. Stejným způsobem odebíráte korálky z druhého konce (tyto korálky mohou mít jinou barvu, než měly korálky odebírané z opačného konce).

Určete bod, v němž má být náhrdelník přerušen, aby bylo možné odebrat největší počet korálků.

Například z náhrdelníku na obrázku a) může být odebráno 8 korálků, pokud bude dělicí bod mezi korálky 9 a 10 nebo mezi korálky 24 a 25.

Některé náhrdelníky mohou obsahovat i bílé korálky, jak ukazuje obrázek b). Při odebírání korálků může být bílý korálek považován za červený nebo modrý a obarven požadovanou barvou. Řetězec reprezentující

tuto konfiguraci bude obsahovat symboly r, b, w. Napište program, který dělá následující:

1. Přečte konfigurace ze vstupního ASCII souboru `NECKLACE.DAT`. Soubor obsahuje na každém řádku jednu konfiguraci. Zapíše vstupní data do výstupního ASCII souboru `NECKLACE.SOL`.

Příklad vstupního souboru `NECKLACE.DAT`:

```
brbrrrbbbrrrrrbrrbbrbbbbrrrrb
bbwbrrrwbrbrrrrrb.
```

2. Pro každou konfiguraci určí maximální počet M korálků, které lze odebrat a místo přerušení náhrdelníku.

3. Do výstupního souboru `NECKLACE.SOL` zapíše počet M a dělicí bod. Řešení různých konfigurací budou oddělena prázdným řádkem.

Příklad možného řešení (soubor `NECKLACE.SOL`):

```
brbrrrbbbrrrrrbrrbbrbbbbrrrrb
8 between 9 a 10

bbwbrrrwbrbrrrrrb
10 between 16 a 17
```

2. Některé společnosti jsou částečnými vlastníky jiných společností, neboť získaly část jejich akcií (podílů). Např FORD vlastní 12 % MAZDY. Řekneme, že společnost A kontroluje společnost B, pokud je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

a) $A = B$,

b) A vlastní více než 50 % B,

c) A kontroluje k ($k \geqq 1$) společností $C(1), \ldots, C(k)$ takových, že $C(i)$ vlastní $x(i)$ % společnosti B pro $1 \leqq i \leqq k$ a platí $x(1) + \ldots + x(k) > > 50$.

Řešte tuto **úlohu**:

Je dán seznam trojic (i, j, p), které znamenají, že společnost i vlastní p % společnosti j. Určete všechny dvojice (h, s) takové, že společnost h kontroluje společnost s. Existuje nejvýše 100 společností. Napište program, který dělá následující:

1. Ze vstupního ASCII souboru `COMPANY.DAT` přečte seznam trojic (i, j, k), který je považován za data pro jednu úlohu. Hodnoty i, j, k jsou kladná celá čísla. Data pro jednotlivé úlohy jsou ve vstupním souboru oddělena vždy prázdným řádkem.

2. Určí všechny dvojice (h, s) takové, že společnost h kontroluje společnost s.

3. Do výstupního souboru `COMPANY.SOL` zapíše všechny nalezené dvojice (h, s), v nichž h je různé od s. Dvojice (h, s) musí být při zápisu uspořádány podle rostoucí hodnoty h. Řešení jednotlivých úloh musí být oddělena prázdným řádkem.

Příklad:

`COMPANY.DAT`

```
2 3 25
1 4 36
4 5 63
2 1 48
3 4 30
4 2 52
5 3 30

1 2 30
2 3 52
3 4 51
4 5 70
5 4 20
4 3 20
```

`COMPANY.SOL`

```
4 2
4 3
4 5

2 3
2 4
2 5
3 4
3 5
4 5
```

3. Na bílý list papíru je pokládáno přes sebe N obdélníků různých barev. List papíru má rozměry: šířka a cm, délka b cm. Strany pokládaných obdélníků jsou rovnoběžné s okraji papíru. Žádný z obdélníků nepřesahuje okraje listu papíru. Po položení obdélníků jsou vidět různé obrazce různých barev. Dvě oblasti stejné barvy považujeme za části téhož obrazce, pokud mají aspoň jeden společný bod. Jinak jsou považovány za různé obrazce. Úkolem je určit plochu každého z těchto obrazců. Čísla a, b jsou kladná sudá čísla, ne větší než 30.

Uvažovaný souřadnicový systém má počátek ve středu listu, osy jsou rovnoběžné s okraji listu.

Data pro jednotlivá zadání úloh jsou zapsána ve vstupním ASCII souboru `RECTANG.DAT`. Hodnoty a, b, N jsou na prvním řádku každé skupiny dat a jsou odděleny mezerou. V každém z dalších řádků jsou:

- celočíselné souřadnice místa, kde bude umístěn levý dolní vrchol obdélníku,
- následované celočíselnými souřadnicemi místa, kde bude umístěn pravý horní roh obdélníku,

- a pak následuje barva obdélníku reprezentovaná celým číslem od 1 do 64.

Napište program, který:

1. čte vstupní data ze souboru `RECTANG.DAT`,
2. určí plochu každého obrazce,
3. zapíše do výstupního ASCII souboru `RECTANG.SOL` barvu a plochu každého obrazce, jak ukazuje příklad. Řádky budou uspořádány podle rostoucího čísla barvy. řešení jednotlivých úloh budou oddělena prázdným řádkem.

Příklad:

`RECTANG.DAT`

```
 20   12   5
 -7   -5  -3  -1   4
 -5   -3   5   3   2
 -4   -2  -2   2   4
  2   -2   3  -1  12
  3    1   7   5   1

 30   30   2
  0    0   5  14   2
-10   -7   0  13  15
```

`RECTANG.SOL`

```
 1  172
 2   47
 4   12
 4    8

 1  630
 2   70
15  200
```

4. Vyhrál jste soutěž kanadských aerolinií. Vaší výhrou je volná letenka na cestování po Kanadě. Vaše cesta začíná v nejzápadnějším místě, do kterého létají tyto aerolinie. Potom cestujete pouze směrem ze západu na východ, dokud nedoletíte do nejvýchodnějšího místa, do kterého létají tyto aerolinie. Potom se vracíte zpět pouze směrem z východu na západ, dokud nedoletíte do výchozího místa. Žádné město nesmí být navštíveno více než jednou s výjimkou výchozího místa, které musí být navštíveno přesně dvakrát (na začátku a na konci vašeho výletu). Nesmíte použít žádné jiné aerolinie ani žádný jiný druh dopravy.

Vyřešte následující **úlohu**: Je dán seznam měst a seznam letů mezi dvojicemi měst. Nalezněte rozpis, umožňující navštívit co nejvíce měst při splnění výše uvedených podmínek.

Data pro jednotlivá zadání úloh jsou uložena ve vstupním ASCII souboru `C:\IOI\ITIN.DAT`. Data pro každou úlohu mají následující tvar:

- Na prvním řádku je počet měst N a počet V přímých letů, jejichž seznamy budou následovat. Hodnota N bude celé kladné číslo ne větší než 100, V je celé kladné číslo.
- Na každém z následujících n řádků je jméno jednoho města. Jména

měst jsou ve vstupním souboru seřazena od západu na východ. To znamená, že i-té město leží východně od j-tého města, právě když $i > j$. (Neexistují žádná dvě města, která by ležela na stejném poledníku.) Jméno každého města je řetězec tvořený nejvýše 15 číslicemi nebo písmeny latinské abecedy, například

`AGR34` nebo `BEL4`.

- Na každém z dalších V řádků jsou vždy jména dvou měst z předchozího seznamu. Jsou oddělena mezerou. Dvojice měst

  `city1 city2`

  uvedená na jednom řádku znamená, že existuje přímé letecké spojení ze `city1` do `city2` a samozřejmě také přímé spojení ze `city2` do `city1`.

Data pro jednotlivé úlohy jsou ve vstupním souboru oddělena prázdným řádkem (tj. řádkem obsahujícím pouze znak `EOLN`). Za posledním řádkem dat pro poslední úlohu není prázdný řádek. **Příklad** vstupního souboru `C:\IOI\ITIN.DAT`:

```
8   9
Vancouver
Yellowknife
Edmonton
Calgary
Winnipeg
Toronto
Montreal
Halifax
Vancouver Edmonton
Vancouver Calgary
Calgary Winnipeg
Winnipeg Toronto
Toronto Halifax
Montreal Halifax
Edmonton Montreal
Edmonton Yellowknife
Edmonton Calgary
```

```
5  5
C1
C2
C3
C4
C5
C5 C4
C2 C3
C3 C1
C4 C1
C5 C2
```

Nalezené řešení každé úlohy musí být zapsáno do výstupního ASCII souboru `C:\IOI\ITIN.SOL` v následujícím tvaru: Na prvním řádku je zapsán celkový počet měst (zapsaný na vstupu), na druhém řádku je uveden počet M různých měst navštívených dle nalezeného rozpisu. Na dalších $M + 1$ řádcích jsou jména měst v pořadí, v němž budou navštívena. Na každém řádku je zapsáno jméno jednoho města. Pozor, první navštívené město musí být znovu uvedeno jako poslední. Pokud není nalezeno žádné řešení úlohy, do souboru `ITIN.SOL` zapište pouze dva řádky: první obsahuje celkový počet měst, na druhém je nápis `NO SOLUTION`. Výsledky řešení jednotlivých úloh oddělte v souboru `ITI.SOL` prázdným řádkem. Možné řešení předchozího příkladu:

```
8
7
Vancouver
Edmonton
Montreal
Halifax
Toronto
Winnipeg
Calgary
Vancouver

5
NO SOLUTION
```

Program uložte do ASCII souboru `C:\IOI\DDD.xxx`. Přípona `.xxx` je `.BAS` pro QBASIC, `.LCN` pro LOGO, `.C` pro C a `.PAS` pro Pascal.

doc. RNDr. Leo Boček, CSc. — RNDr. Karel Horák, CSc.
prof. RNDr. Jozef Moravčík, DrSc.
doc. RNDr. Václav Sedláček, CSc. — doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.
doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc.

ČTYŘICÁTÝ DRUHÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

Vydala Jednota českých matematiků a fyziků,
Žitná 25, 117 10 Praha 1
jako svou publikaci č. 57-555-02
Sazbu programem TEX připravil Karel Horák
1. vydání
Praha 2002

ISBN 80-7015-888-3

matematická olympiáda

MO

ISBN 80-7015-888-3