

43. ročník matematické olympiády na základních školách

Milan Koman (editor); Jiří Binder (editor); Antonín Vrba (editor): 43. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1993/1994. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1996.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404979>

Terms of use:

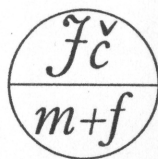
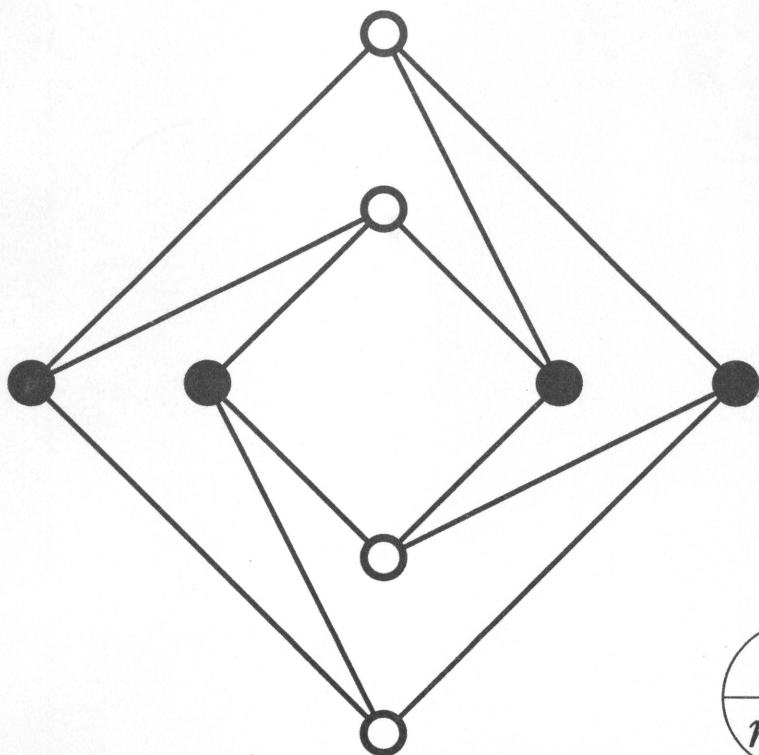
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MOZ

43. ročník matematické olympiády na základních školách



ČTYŘICÁTÝ TŘETÍ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA ZÁKLADNÍCH ŠKOLÁCH

Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1993/1994

ÚLOHY A JEJICH ŘEŠENÍ

JEDNOTA ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYZIKŮ

Zpracovali
prof. RNDr. Milan Koman, CSc., RNDr. Jiří Binder, CSc.,
RNDr. Antonín Vrba, CSc.

© Milan Koman, Jiří Binder, Antonín Vrba, 1996

ISBN 80-7015-552-3

Obsah

Předmluva	5
43. ročník matematické olympiády na základních školách	7
Úspěšní řešitelé III. kola kategorie Z8	11
Kategorie Z8	15
Úlohy I. kola	15
Úlohy II. kola	16
Úlohy III. kola	17
Řešení úloh I. kola	18
Řešení úloh II. kola	23
Řešení úloh III. kola	26
Kategorie Z7	28
Úlohy I. kola	28
Úlohy II. kola	29
Řešení úloh I. kola	30
Řešení úloh II. kola	34
Kategorie Z6	36
Úlohy I. kola	36
Úlohy II. kola	37
Řešení úloh I. kola	38
Řešení úloh II. kola	41
Kategorie Z5	43
Zadání úloh I. kola	43
Zadání úloh II. kola	44
Řešení úloh I. kola	45
Řešení úloh II. kola	48
Kategorie Z4	49
Zadání úloh I. kola	49
Zadání úloh II. kola	50
Řešení úloh I. kola	51
Řešení úloh II. kola	53

Předmluva

Milí mladí přátelé,

knížka, kterou jste právě otevřeli, je věnována matematické olympiádě, která probíhala ve školním roce 1993/94 na základních školách.

Jejím hlavním posláním je dát do rukou novým řešitelům matematické olympiády i jejich učitelům vhodnou studijní literaturu. Žákům má pomoci v řešení úloh v dalších ročnících soutěže, učitelům má poskytnout vhodné úlohy pro práci s talentovanými žáky a řešiteli matematické olympiády.

V knížce jsou uvedeny všechny soutěžní úlohy právě uplynulého ročníku včetně jejich řešení a některé další obdobné úlohy, které mohou sloužit jako pomocné úlohy k řešení soutěžních úloh.

Jak máte při četbě ročenek postupovat?

Můžeme vám doporučit několik dobrých rad.

- Knížka by měla být pro vás především sbírkou úloh, na kterých si sami můžete vyzkoušet a zdokonalit svou dovednost řešit takové matematické úlohy, s jakými se ve škole většinou nesetkáte. Každá úloha by pro vás měla být výzvou: „Pojď a zkus mne řešit aniž by ses předem podíval na mé řešení, které je otištěno o několik stránek dále.“
- To znamená, že knížku nezačnete číst tak, jak je napsána stránku za stránkou. Doporučujeme vám, abyste si *úlohy vybírali*, především ty, které se vám budou líbit nebo vzbudí vaši zvědavost např. svou neobvyklostí, či tím, že jste podobnou úlohu už kdysi řešili. Možná i tím, že je podobná úloha zařazena do soutěže MO, které se právě zúčastňujete. Úlohy proto volte tak, aby odpovídaly i vašemu věku. Proto se zaměřte především na soutěžní kategorie odpovídající vašemu ročníku. Např. kategorie Z8 je určena žákům 8. a 9. ročníků, kategorie Z7 žákům 7. ročníků atd.
- Jak máte úlohy řešit? Nejdříve si *úlohy pozorně přečtěte*. Potom se je sami snažte řešit. Na řešení otištěná dále se nedívejte předčasně. Pokud

se vám nepodařilo řešit úlohu při prvním pokusu, zkuste to znovu. Hledejte jinou cestu. Pokud se vám úlohu podaří vyřešit, ošídili byste se sami o krásný pocit, který zažije každý, když se mu něco povede. Čím déle se budete trápit s řešením úlohy, tím větší pocit radosti zažijete po úspěšném řešení.

- Ale i v tom případě, že se vám úlohu nepodaří vyřešit, nebude to žádné neštěstí. Nikdo učený z nebe nespadl. Pak se podívejte na otištěné řešení, nebo ještě lépe, nejdříve na návodné či pomocné úlohy, které najdete za vzorovým řešením. Ty vám totiž mohou dost napovědět, jak můžete úlohu řešit.
- Když úlohu vyřešíte, *zkontrolujte si nejen výsledek, ale i postup řešení*. Postup řešení je často důležitější než vlastní výsledek. Tak se také hodnotí všechna řešení v matematické olympiádě. Samotný výsledek nestačí. Může se ovšem stát, že ke svému překvapení i potěšení zjistíte, že jste úlohy řešili jinak, než je uvedeno vzorové řešení.

Závěrem vám přejeme při řešení úloh i při studiu knížky hodně radosti z úspěšných výsledků. Budeme se těšit, že se s mnohými z vás ještě setkáme mezi soutěžícími i vítězi matematické olympiády.

Pokud se vám bude s knížkou dobře pracovat, bude to zásluha nejen všech pracovníků, kteří úlohy MO připravují, ale i lektorek RNDr. Libuše Hozové a RNDr. Jitky Kučerové, které přispěly na mnoha místech ke zlepšení srozumitelnosti a názornosti výkladu.

V červnu 1995

Autoři

43. ročník matematické olympiády na základních školách

Historie, organizace a průběh soutěže

Soutěž v matematické olympiádě v České republice navazuje na dlouholetou tradici z období Československé republiky. I po rozpadu Československé republiky pokračuje úspěšná spolupráce mezi oběma matematickými olympiádami v České republice a Slovenské republice. Jde především o spolupráci úlohových komisí. Úlohové komise pro základní školy vede v České republice prof. RNDr. Milan Koman, CSc. a ve Slovenské republice Mgr. Milan Demko. Komise pracují při Ústředních výborech MO v obou republikách. Předsedou Ústředního výboru MO ČR je doc. RNDr. Leoš Boček, CSc. z MFF UK Praha. Díky této spolupráci soutěží čeští i slovenští žáci tak jako v minulosti v řešení stejných úloh.

Soutěžní úlohy lze přibližně rozdělit do dvou skupin. Do první patří úlohy, které navazují na látku probíranou ve škole. Nejsou to však úlohy školského typu, ale vždy vyžadují určité zamyšlení nebo nápad jak využít školských znalostí a dovedností. Do druhé skupiny patří úlohy, které můžeme charakterizovat jako „netradiční“ a u kterých není na první pohled patrná bezprostřední návaznost na učivo základní školy.

Jde o úlohy, kde stačí, aby se žáci nebáli samostatně myslet, aby se naučili při řešení úloh experimentovat, aby se naučili systematickému třídění při řešení kombinatorických úloh ap. Cílem je vést žáky k samostatnosti a dovednosti i ochotě zamyslet se nad danou úlohou. Proto netradiční úlohy vyžadující spíše „badatelský“ přístup než rozšiřující vědomosti a dovednosti jsou zařazovány převážně do I. kol, kdy úlohy řeší žáci doma, mají na ně dost času a mohou konzultovat i se svými učiteli.

Jsou to však úlohy, jejichž vyřešení může způsobit žákům největší radost. Záměrem těchto úloh je tak nabídnout žákům nejen hezké úlohy, ale také motivovat jejich zvýšený zájem o matematiku. Je pravdou, že učitelé tyto úlohy zpočátku kritizovaly, protože se jim zdály příliš obtížné. V posledních letech však pocítujeme, že i těmto úlohám přichází „na chuť“ stále více učitelů. Snad je to i zásluha jejich vlastních žáků, kteří se stavějí k těmto úlohám bez předsudků. Snad tak můžeme konstatovat, že z netradičních úloh se stávají — alespoň v rámci matematické olympiády — úlohy tradiční.

Vyhlašovatelem soutěže bylo Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR a Jednota českých matematiků a fyziků (JČMF).

Pro žáky základních škol byla soutěž rozdělena do pěti kategorií Z4, Z5, Z6, Z7 a Z8, které byly určeny postupně žákům 4. až 8. ročníku. Ve výjimečných případech mohli soutěžit žáci ve vyšších kategoriích, než které odpovídaly jejich ročníku.

Počet soutěžních kol i počet úloh v těchto kolech v jednotlivých kategoriích je patrný z tabulky:

		I. kolo	II. kolo	III. kolo
Z8	8. a 9. ročník	6	4	4
Z7	7. ročník	6	3	—
Z6	6. ročník	6	3	—
Z5	5. ročník	6	3	—
Z4	4. ročník	6	3	—

V I. kole vypracovali žáci úkoly doma. Jejich řešení odevzdávali po trojicích ve dvou termínech:

Kategorie Z8 a Z4:	první trojici	do	5. 11. 1993
	druhou trojici	do	7. 1. 1993
Kategorie Z7, Z6 a Z5:	první trojici	do	10. 12. 1993
	druhou trojici	do	11. 3. 1994

Žáci, kteří úspěšně vyřešili aspoň 4 úlohy, postoupili do II. kola. II. kola probíhala formou klauzurní práce. Pro kategorie Z5 až Z8 zpravidla v okresním městě, pro kategorii Z4 v místě školy. Doba vyhrazená řešení kategorie Z8 byla čtyři hodiny, kategorie Z4 jedna hodina. Druhé kolo kategorie Z8 proběhlo 3. 2. 1994. Druhá kola pro kategorie Z5 až Z7 se uskutečnila 13. 4. 1994. Konečně kategorie Z4 měla druhé kolo 26. 1. 1994.

III. kolo kategorie Z8 proběhlo zpravidla v bývalém krajském městě 7. 4. 1994.

Soutěž byla dobrovolná. Byla organizována především tam, kde má již víceletou tradici, anebo tam, kde jsou příznivé místní podmínky. To se projevilo především v kategoriích Z4 a Z5.

Soutěžní úlohy I. kola byly publikovány v tzv. soutěžních letáčích. Úlohy byly dále zveřejněny v časopisech Matematika, fyzika, informatika a Rozhledy matematicko-fyzikální. Na pomoc učitelům byly rozesílány na školy komentáře k úlohám. Komentáře naznačovaly jeden nebo i více možných způsobů řešení úloh a zdůrazňovaly hlavní myšlenky řešení. Na pomoc

učitelům při vedení žáků přinášely i další pomocné úlohy k samostatnému řešení.

Soutěžní úlohy II. a III. kola byly tajné a byly zasílány organizátorům v okresech a bývalých krajích těsně před soutěží v zapečetěných obálkách. Na pomoc opravovatelům byla současně dodávána řešení soutěžních úloh a návrhy bodového hodnocení řešení.

Autoři ročenky jménem Ústředního výboru MO i jménem úlohové komise děkují touto cestou všem organizátorům soutěže, především pak učitelům za jejich obětavou spolupráci a za péči, kterou věnují svým žákům. Zároveň vyzývají všechny zájemce o spolupráci při tvorbě zajímavých — především vlastních — úloh.

Zkuste zažít pocit radosti z toho, objevíte-li vaši úlohu i s vaším jménem v soutěžním letáku.

Návrhy na soutěžní úlohy laskavě zasílejte na adresu tajemníka české úlohové komise RNDr. Jiřího Bindera, CSc., Pedagogická fakulta UK, M. D. Rettigové 4, PSČ 116 39.

Počty soutěžících (S) a úspěšných (U) žáků v kategoriích Z7 a Z6

Kraj	kategorie Z7				kategorie Z6			
	I. kolo		II. kolo		I. kolo		II. kolo	
	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	350	198	187	88	394	226	212	76
Středočeský	623	280	242	59	572	249	225	56
Jihočeský	499	242	206	73	517	243	214	36
Západočeský	543	234	215	98	1 540	266	246	68
Severočeský	1 153	457	374	92	1 218	461	336	76
Liberec	1 153	457	374	92	1 218	461	336	76
Východočeský	579	258	183	86	629	263	226	66
Jihlava	442	303	194	61	391	237	205	107
Zlín	416	153	108	52	153	66	60	14
Jihomoravský	351	212	181	93	401	172	143	57
Severomoravský	1 411	522	415	147	1 674	672	481	87
ČR	15 844	7 807	5 330	1 706	14 642	7 007	4 981	981

Počty soutěžících (S) a úspěšných (U) žáků v kategorii Z8

Kraj	I. kolo		II. kolo		III. kolo	
	S	U	S	U	S	U
Praha	553	307	261	80	43	38
Středočeský	682	262	234	48	32	32
Jihočeský	502	239	210	50	38	29
Západočeský	417	138	129	25	24	17
Severočeský	1 323	408	310	104	35	18
Liberec	1 323	408	310	104	35	18
Východočeský	596	286	217	54	43	32
Jihlava	305	102	92	62	18	12
Zlín	406	196	140	26	17	12
Jihomoravský	637	318	283	55	50	41
Severomoravský	1 629	659	656	140	140	81
ČR	14 165	6 516	4 654	1 530	698	390

Úspěšní řešitelé III. kola kategorie Z8

V každé oblasti uvádíme úspěšné řešitele, kteří se umístili na prvních deseti místech. Pokud není uvedeno jinak, jsou všichni jmenovaní řešitelé žáci 8. ročníku základní školy nebo třetího ročníku gymnázia s nástupem po 5. ročníku ZŠ.

Praha

- | | |
|-------------------------------|---------------------------|
| 1.-3. <i>Libor Barto,</i> | ZŠ, Uhelný Trh, Praha 1 |
| <i>Tomáš Korotvička,</i> | ZŠ, Kozinova, Praha 10 |
| <i>Pavel Stránský,</i> | ZŠ, Mikulandská, Praha 1 |
| 4.-7. <i>Lukáš Kroc,</i> | ZŠ, Horáčkova, Praha 4 |
| <i>Jiří Maruška,</i> | ZŠ, Na planině, Praha 4 |
| <i>Jakub Mikeš,</i> | ZŠ, Uhelný Trh, Praha 1 |
| <i>Oto Válek,</i> | ZŠ, Horáčkova, Praha 4 |
| 8.-9. <i>Jan Krček,</i> | ZŠ, Nad koupadly, Praha 4 |
| <i>Michal Rosický,</i> | G, J. Keplera, Praha 6 |
| 10.-14 <i>Soňa Janáčková,</i> | ZŠ, Barrandov, Praha 5 |
| <i>Michal Macek,</i> | ZŠ, Na planině, Praha 4 |
| <i>Jan Malý,</i> | ZŠ, Uhelný Trh, Praha 1 |
| <i>Jan Petr,</i> | ZŠ, Uhelný Trh, Praha 1 |
| <i>Pavel Třeboňák,</i> | ZŠ, Červený Vrch, Praha 6 |

Střední Čechy

- | | |
|-----------------------------------|-------------------|
| 1. <i>Jan Štoviček,</i> | 5. ZŠ, Kladno |
| 2.-4. <i>Petr Zima,</i> | G, Kladno |
| <i>Petr Novák,</i> | ZŠ, Sázava |
| <i>Jan Vařečka,</i> | G, Čáslav |
| 5. <i>Zdenka Vaňková,</i> | G, Říčany |
| 6.-7. <i>Michal Červenka,</i> | 1. ZŠ, Kutná Hora |
| <i>David Černý,</i> | ZŠ, Lysá n. L. |
| 8.-9. <i>Veronika Pavlíčková,</i> | G, Beroun |
| <i>Zuzana Karlová,</i> | G, Beroun |

10.–12 *Pavel Surynek,*
Zdeněk Šiblík,
Petr Chromec,

3. ZŠ, Vlašim
6. ZŠ, Příbram
ZŠ, Hostivice

Jižní Čechy

1. *Petra Hajná,*
2.–6. *Petra Veverková,*
Rostislav Doležal,
Jan Čepelák,
M. Cidl,
Petr Koranda,
7.–14. *Pavčina Marková,*
Miroslav Dvořák,
Marek Vlastník,
Libor Nenadál,
Roman Šitner,
Tomáš Holčapek,
František Daněk,
Miroslav Bulíček,

ZŠ, Nerudova, Čes. Budějovice
1. ZŠ, Pelhřimov
ZŠ, Nerudova, Čes. Budějovice
G, Čes. Krumlov
ZŠ, Za nádražím, Čes. Krumlov
4. ZŠ, J. Hradec
ZŠ, Trh. Sviny
2. ZŠ, Milevsko
ZŠ, Nerudova, Čes. Budějovice
1. ZŠ, Pelhřimov
1. ZŠ, Pelhřimov
G J. V. Jirsíka,
8. ZŠ, Tábor
ZŠ, Hálkova, Humpolec

Západní Čechy

- 1.–3. *Luboš Dostál,*
Jiří Kunc,
Martin Střelec,
4. *Petra Jeníčková,*
5.–6. *Karel Kolář,*
David Legát,
7.–9. *Eva Leškoviátová,*
Petra Skleničková,
Radka Švamberková,
10. *Martina Kodalíková,*

G, Stříbro
ZŠ, jižní př., Rokycany
1. G, Plzeň
ZŠ, Kaznějov
G, Sušice
ZŠ JAK, Karlovy Vary
G, Rokycany
ZŠ, jižní př., Rokycany
ZŠ, jižní př., Rokycany
1. G, Plzeň

Ústí nad Labem

Výsledková listina nebyla dodána.

Liberec

1. *Martin Steiner,*
2. *Dušan Marmange,*
- G, Frýdlant v Čechách
G, Frýdlant v Čechách

- | | |
|--------------------------|------------------------|
| 3. <i>Tomáš Kadlas,</i> | G F. X. Šaldy, Liberec |
| 4. <i>Michal Šída,</i> | G, Tanvald |
| 5. <i>Petr Just,</i> | ZŠ, Lesní, Liberec |
| 6. <i>Jan Štercl,</i> | G F. X. Šaldy, Liberec |
| 7. <i>Jana Kačerová,</i> | G, Jablonec n. N. |
| 8.-9. <i>Jan Fejfar,</i> | G, Jablonec n. N. |
| <i>Jan Jaderský,</i> | ZŠ, U školy, Liberec |

Východní Čechy

Výsledková listina nebyla dodána.

Severní Morava

- | | |
|------------------------------|-------------------------------|
| 1.-3. <i>Pavel Očenášek,</i> | 6. ZŠ, Šumavská 21, Šumperk |
| <i>Petr Kolovrat,</i> | ZŠ, Otická 18, Opava |
| <i>Do Thi Hue,</i> | ZŠ, V Zálomu, Zábřeh |
| 4.-16. <i>Tomáš Doseděl,</i> | ZŠ, Břidličná, |
| <i>Michal Vohralík,</i> | ZŠ, Šumvald, |
| <i>Radek Polák,</i> | ZŠ, Tršice, |
| <i>Filip Švrček,</i> | ZŠ, Kopaniny, |
| <i>Pavel Brandejs,</i> | 6. ZŠ, Šumavská 21, Šumperk |
| <i>Vladimír Vizina,</i> | 6. ZŠ, Šumavská 21, Šumperk |
| <i>Ladislav Šobr,</i> | 4. roč., G Jeseník, |
| <i>Zdeněk Svoboda,</i> | ZŠ, Křižná, Valašské Meziříčí |
| <i>Ondřej Matějka,</i> | ZŠ, Datýňská, Vratimov |
| <i>René Kawulok,</i> | PZŠ, Brigádnická, Horní Suchá |
| <i>Jan Lichovník,</i> | ZŠ, Otická 18, Opava |
| <i>Sylvie Plačková,</i> | ZŠ, Hornická, Hlučín |
| <i>Přemysl Čončka,</i> | ZŠ, Velká Polom, |

Brno

- | | |
|-------------------------------|-----------------------------------|
| 1.-7. <i>Zuzana Brabcová,</i> | G, Sirotkova, Brno |
| <i>Eva Burešová,</i> | 2. roč., G, tř. kpt. Jaroše, Brno |
| <i>Hana Karberová,</i> | ZŠ, Komenského, Židlochovice |
| <i>Pavel Krčál,</i> | G, tř. kpt. Jaroše, Brno |
| <i>Mojmír Mlčoch,</i> | G, Křenová, Brno |
| <i>Magda Salyková,</i> | G, Křenová, Brno |
| <i>Ondřej Výborný,</i> | G, tř. kpt. Jaroše, Brno |
| 8.-15. <i>Zdeněk Nečas,</i> | G, Křenová, Brno |

*Roman Nevrla,
Vladimír Pelc,
Pavel Podbrdský,
Ondřej Ševeček,
Josef Troch,
Lukáš Vémola,
Jan Vitula,*

2. roč., G, J. V. Choráze, Prostějov
ZŠ, Křídlovická, Brno
G, Vídeňská, Brno
G, tř. kpt. Jaroše, Brno
2. roč., G, Studentská, Prostějov
ZŠ, Křídlovická, Brno
G, Na hrádku, Tišnov

Zlín

- | | |
|--|---|
| 1. <i>Martin Ondráček,</i> | G, Kyjov |
| 2.-4. <i>Michal Houšť,
Marek Omelka,
Josef Zlomek,</i> | 10. ZŠ, Zlín
G, Uherské Hradiště
G, Strážnice |
| 5. <i>Jaromír Zajíček,</i> | G, Strážnice |
| 6. <i>Libor Petráš,</i> | 1. ZŠ, Holešov |
| 7.-8. <i>Vojtěch Derbek,
Lucie Hradecká,</i> | G, Zlín
5. ZŠ, Kroměříž |
| 9. <i>Michal Ordelt,</i> | 10. ZŠ, Zlín |
| 10.-11. <i>Zdeněk Pícha,
Petr Zapletal,</i> | G, Uherské Hradiště
5. ZŠ, Kroměříž |

Jihlava

- | | |
|--|---|
| 1.-5. <i>Zdeněk Charvát,
Michal Jonáš,
Petra Kesslerová,
David Kraus,
Karel Volný,</i> | ZŠ, Březinova, Jihlava
2. ZŠ, Komenského, Žďár n. Sázavou
ZŠ, Kollárova, Jihlava
G, Jihlava
ZŠ, kpt. Jaroše, Třebíč |
| 6. <i>Zdeněk Filipec,</i> | ZŠ, Tišnovská, Velká Bíteš |
| 7. <i>Martin Zítka,</i> | G, Žďár n. Sázavou |
| 8.-9. <i>Vladislav Koubek,
Marek Vyklický,</i> | ZŠ, Tišnovská, Velká Bíteš
ZŠ, Pražská, Znojmo |
| 10. <i>Jaroslav Surman,</i> | ZŠ, Pražská, Znojmo |

Kategorie Z8

ÚLOHY I. KOLA

(Řešení úloh na str. 18)

Z8 – I – 1

Čtyři kamarádi z 8.C měli štěstí. Společně si koupili tiket loterie a vyhráli první cenu. Byla v korunách vyjádřená pěticiferným číslem. Samozřejmě, že si výhru rozdělili stejným dílem. Petr si všiml zajímavé věci: dostal částku zapsanou stejnými číslicemi jako první cena, ale v opačném pořadí. Kolik korun byla první cena? *(Burjan)*

Z8 – I – 2

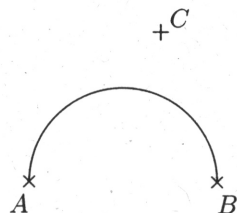
Představ si, že na papíře je narysovaný trojúhelník a úsečka. Napiš postup, jak se z tohoto trojúhelníka dá narysovat rovnoramenný trojúhelník se stejným obsahem a s jednou stranou shodnou s danou úsečkou. Postup se musí hodit na každý trojúhelník a na každou úsečku. *(Černek)*

Z8 – I – 3

Na číselné ose jsou znázorněna tři čísla x , y , z . Narýsuj na této číselné ose obraz nuly, jestliže víš, že $3y = x + z$. Najdi řešení pro všechny polohy čísel x , y , z , pro které $x < y < z$. *(Černek)*

Z8 – I – 4

Nad průměrem AB je opsaná půlkružnice, jejíž střed není viditelný. Dále je daný bod C tak, že trojúhelník ABC je ostroúhlý (obr. 1). Z bodu C sestroj kolmici na AB . Ale pozor! Na konstrukci můžeš použít jen tužku a pravítko bez měřítka, které má jen jednu stranu rovnou. *(Hozová)*



Obr. 1

Z8 – I – 5

Na ostrově Pavouk je šest měst. Každé z nich je spojené přímými cestami s dalšími čtyřmi z daných šesti měst. Tyto cesty se nikde nekřížují. Zajímavé je to, že všechny cesty mají jen tři různé délky. Nejkratší měří 10 km, nejdelší 40 km. Kolik kilometrů měří ostatní? (Černek)

Z8 – I – 6

Dva plavci se koupou v obdélníkovém bazénu. Délka bazénu je vyjádřena v metrech celým číslem a šířka bazénu je 40 m. Jeden z plavců plave na šířku, a to uprostřed. Druhý zase na délku (ne nutně uprostřed). Oba najednou skočili do bazénu a plavali stejnou rychlostí. Když se poprvé setkali, uplaval každý z nich 510 m. Jak dlouhý je bazén? Naleznete všechna řešení. (Demko)

ÚLOHY II. KOLA

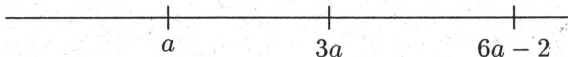
(Řešení úloh na str. 23)

Z8 – II – 1

V rovině je dán trojúhelník ABC . Sestrojte trojúhelník ABZ , jehož obsah je roven polovině obsahu trojúhelníku ABC a přitom $|BZ| = \frac{1}{4}|BC|$. Kolik má úloha řešení? Počet řešení diskutujte v závislosti na velikosti úhlu β .

Z8 – II – 2

Na číselné ose jsou vyznačeny obrazy čísel a , $3a$, $6a - 2$. Sestrojte obrazy čísel 0 a 1.



Z8 – II – 3

Jestliže v čtyřciferném čísle zvětšíme dvě číslice o 3 a zbývající dvě zmenšíme o 4, dostaneme dvakrát větší číslo. Najděte všechna taková čísla.

Z8 – II – 4

Nová pneumatika se na zadním kole úplně opotřebí po ujetí 80 000 km, na předním kole po ujetí 60 000 km. Koupí-li otec na auto 4 nové pneumatiky, po kolika km jízdy má přehodit přední a zadní pneumatiky, aby s nimi mohl ujet co nejvíce kilometrů? Kolik km ujede? (Rezervní kolo neuvažujeme.)

ÚLOHY III. KOLA

(Řešení úloh na str. 26)

Z8 – III – 1

V pravoúhlém trojúhelníku ABC se osy úhlů protínají v bodě P . Jeho vzdálenost od přepony AB je $\sqrt{8}$ cm. Jaká je vzdálenost bodu P od vrcholu C ?

Z8 – III – 2

Jirka napsal čtyřciferné číslo, které mělo zajímavou vlastnost. Když zvětšil jeho obě krajní číslice o jisté číslo a zároveň zbývající číslice o toto číslo zmenšil, dostal trojnásobek původního čísla. Najděte všechna čtyřciferná čísla, která mají tuto vlastnost.

Z8 – III – 3

Kolik je přirozených čísel menších než 501, která nejsou dělitelná třemi ani sedmi? (Přirozená čísla jsou celá čísla větší než 0.)

Z8 – III – 4

V rovině jsou dány dva body A, B . Narýsujte osy x, y soustavy souřadnic tak, aby $A = [5, 1]$, $B = [1, 5]$.

ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA

Řešení úlohy Z8–I–1 (str. 15)

Číslice pěticiferného čísla v , které udává celkovou výhru, označíme A, B, C, D, E , a to tak, že $A \neq 0$ udává desetitisíce, B tisíce, C stovky atd., takže $v = 10\,000A + 1\,000B + 100C + 10D + E$ korun, stručně budeme psát $ABCDE$. Podle podmínky úlohy je

$$ABCDE = 4 \cdot EDCBA \quad (1)$$

Kdyby bylo $E \geq 3$, bylo by $4 \cdot E > 10$ a číslo v by bylo šesticiferné. Proto je $E \leq 2$. Protože je $ABCDE$ násobek 4, tedy sudé číslo, je i E sudé. Tedy $E = 0$ nebo $E = 2$.

Kdyby bylo $E = 0$, muselo by platit $A = 5$ (aby $4 \cdot A$ končilo číslicí 0). Avšak čtyřnásobek čtyřciferného čísla $DCBA$ je menší než $4 \cdot 10\,000 = 40\,000$, takže nemůže být $A = 5$ ani $E = 5$.

Proto je $E = 2$ a tudíž podle (1) je $v \geq 80\,000$ a tedy $A \geq 8$. Protože $4 \cdot A$ končí číslicí 2 a $A \geq 8$, musí být $A = 8$. Rovnost (1) můžeme zapsat

$$8BCD2 = 4 \cdot 2DCB8. \quad (2)$$

Porovnáním desítek dostáváme, že číslo $4 \cdot B + 3$ končí číslicí D , takže je liché. Kdyby bylo $D \geq 3$, bylo by $4 \cdot 2DCD8 \geq 90\,000$ a to podle (2) není možné, takže $D = 1$. Proto musí číslo $4 \cdot B$ končit číslicí 8, takže $B = 2$ nebo $B = 7$. Avšak porovnáním číslice udávající tisíce vidíme, že $B \geq 4 \cdot D = 4$, tudíž $B = 7$. Po dosazení do (2) dostaneme

$$87C12 = 4 \cdot 21C78. \quad (3)$$

Porovnáním stovek vidíme, že číslo $4 \cdot C + 3$ má končit číslicí C , takže $3 \cdot C + 3$ má končit nulou, $3 \cdot C$ sedmičkou, proto je $C = 9$.

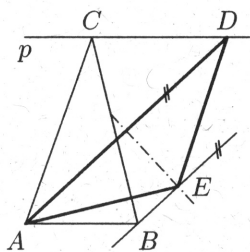
Celkem dostaneme

$$87912 = 4 \cdot 21978$$

První cena činila 87 912 Kč, každý ze čtyř kamarádů dostal 21 978 Kč. To je velmi pěkná výhra. Zkouškou se přesvědčíme o správnosti tohoto výsledku.

Řešení úlohy Z8–I–2 (str. 15)

Je-li dán trojúhelník ABC a vedeme-li bodem C přímkou p rovnoběžnou se stranou AB , mají všechny trojúhelníky ABX , kde $X \in p$, stejný obsah jako trojúhelník ABC . Je-li vzdálenost přímk p , AB nejvýše rovna délce dané úsečky (označme ji KL), můžeme na p zvolit bod D tak, že $|AD| = |KL|$. Osa úsečky AD protne přímkou vedenou bodem B rovnoběžně s AD v bodě E . Přitom se rovnají obsahy trojúhelníků ADE a ADB a také obsahy trojúhelníků ADB a ACB . Trojúhelník ADE má tedy všechny požadované vlastnosti.



Obr. 2

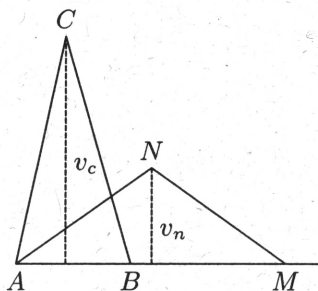
Je-li vzdálenost přímk p , AB větší než délka úsečky KL , nahradíme nejdříve bod B bodem B' na přímce q ($q \parallel AC$, $B \in q$) tak, aby vzdálenost bodu C od přímky AB' byla nejvýše $|KL|$.

Bod B' můžeme sestrojít např. takto: Opíšeme kolem bodu C kružnici k o poloměru $r = |KL|$ a bod B' sestrojíme tak, aby přímka AB' proťala kružnici k . Pak pokračujeme pro nový trojúhelník $AB'C$ stejně jako v prvním případě pro trojúhelník ABC .

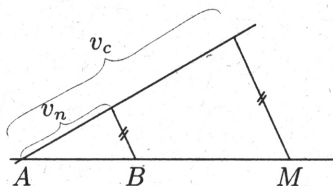
Nevýhodou uvedeného řešení je, že musíme rozlišit dva případy. Uvedeme proto ještě jedno řešení, kde se této nevýhodě vyhneme.

Jiné řešení: Nechť ABC je daný trojúhelník a AMN hledaný trojúhelník, kde M leží na polopřímce AB a strana AM je shodná s danou

úsečkou (obr. 3 a). Výšky ke stranám AB a AM v trojúhelnících ABC a



Obr. 3 a



Obr. 3 b

AMN označme v_c a v_n . Potom z rovnosti obsahů trojúhelníků ABC a AMN plyne:

$$|AB| \cdot v_c = |AM| \cdot v_n$$

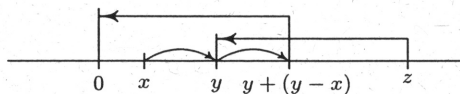
Odtud dostaneme:

$$|AB| : |AM| = v_n : v_c$$

Neznámou výšku v_n pak snadno sestrojíme užitím podobnosti trojúhelníků (obr. 3 b). Pak už snadno sestrojíme hledaný trojúhelník AMN .

Řešení úlohy Z8–I–3 (str. 15)

Danou rovnost $3y = x + z$ můžeme upravit takto: $y + (y - x) + (y - z) = 0$. Proto dostaneme obraz počátku tak, že k obrazu bodu y „přičteme“ $y - x$ a $y - z$. Obě tyto hodnoty vyčteme z číselné osy (obr. 4).



Obr. 4

Jiné řešení: Rovnost $3y = x + z$ dělíme číslem 2. Dostaneme

$$1,5 \cdot y = \frac{x + z}{2}$$

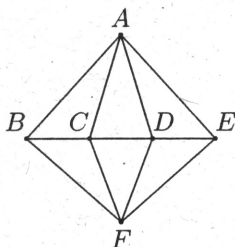
Obrazem aritmetického průměru x a z je střed úsečky určené body x a z , což je zároveň obraz bodu $1,5 \cdot y$. Známe-li obrazy čísel y a $1,5 \cdot y$ snadno najdeme počátek.

Řešení úlohy Z8-I-4 (str. 15)

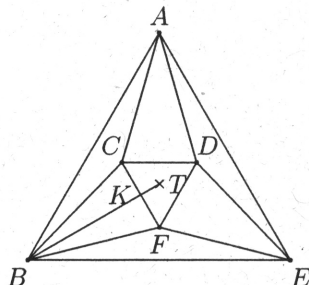
Úsečka BC protne danou půlkružnici v bodě K a podle Thaletovy věty je $AK \perp BC$ (Nakreslete si obrázek!). Podobně AC protne půlkružnici v bodě L , $BL \perp AC$. Vidíme, že AK a BL jsou výšky v trojúhelníku ABC , proto jejich průsečíkem V prochází i výška vedená bodem C , přímka CV je kolmá na AB .

Řešení úlohy Z8-I-5 (str. 16)

Žák by si měl nejdříve zkusit nakreslit schéma spojení jednotlivých měst. Označme je A, B, C, D, E, F tak, že A je spojeno přímou cestou s B, C, D, E a nemá přímé spojení s F . Pak je F též spojeno s B, C, D, E . Přitom každé z měst B, C, D, E je spojeno přímou cestou s dvěma dalšími. Na obrázku 5a lehce spojíme C s B a D , D s C a E . Je však



Obr. 5 a



Obr. 5 b

třeba ještě spojit přímou cestou E s B , což nejde. Musíme body B, E posunout například dolů. Novou situaci znázorňuje obrázek 5b.

Nejdelší úseky dlouhé 40 km jsou zřejmě mezi body A, B, E , nejkratší úseky dlouhé 10 km jsou mezi body C, F, D . Trojúhelníky ABE a CDF jsou proto rovnostranné. Podle zadání jsou zbylé úseky shodné a tedy trojúhelníky ACD, BFC, EFD jsou rovnoramenné. Proto mají rovnoramenné trojúhelníky CDF a ABE společné těžiště a rovnoběžné strany

$CD \parallel BE$, $|CD| = 10$, $|BE| = 40$. Úsečka BT se rovná $\frac{2}{3}$ výšky v rovno-

ramenném trojúhelníku ABE , tedy $|BT| = \frac{2}{3} \cdot \frac{40}{2} \sqrt{3} = \frac{40}{3} \sqrt{3}$.

Úsečka TK se rovná $\frac{1}{3}$ výšky v trojúhelníku CDF , tj.

$$|TK| = \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{2} \sqrt{3} = \frac{5}{3} \cdot \sqrt{3}.$$

Odtud vypočteme $|BK| = \frac{35}{3} \sqrt{3}$. Podle Pythagorovy věty je

$$|BF|^2 = |BK|^2 + |KF|^2 = 1\,300 : 3, \quad |BF| = \frac{10}{3} \sqrt{39} \doteq 20,8$$

Třetí vzdálenost je přibližně 20,8 km.

Řešení úlohy Z8–I–6 (str. 16)

Každý plavec uplaval 510 m. Protože $500 = 40 \cdot 12 + 30$, přeplaval první plavec bazén šestkrát na šířku tam i zpět a pak ještě 30 m. Druhý uplaval také 510 m. Označíme-li délku bazénu a (v metrech),

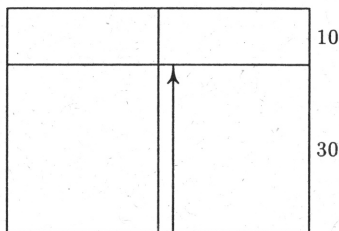
uplaval $(n \cdot a + \frac{a}{2})$ metrů, kde n udává, kolikrát přeplaval celý bazén.

Je tedy $510 = a(n + \frac{1}{2})$, tj. po úpravě

$1\,020 = a(2n + 1)$. Protože $1\,020 = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 17$ a $2n + 1$ je číslo liché, mohou nastat jen tyto případy:

$2n + 1$	1	3	5	15	17	51	85	255
a	1 020	340	204	68	60	20	12	4

Poslední tři možnosti musíme vyloučit, délka bazénu nemůže být kratší než šířka. Zbývá pět možností, bazén však nebude delší než kilometr. Pravděpodobně bude délka bazénu 60 m. V tom případě je $2n + 1 = 17$, $n = 8$, druhý plavec přeplaval bazén čtyřikrát tam a zpět a pak ještě do poloviny bazénu, celkem tedy $4 \cdot (60 + 60) + 30 = 510$ metrů.

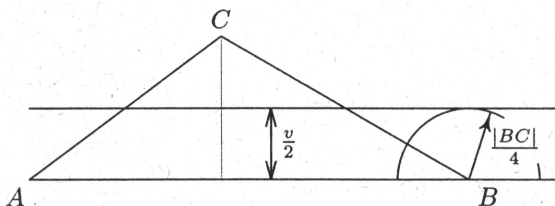


Obr. 6

ŘEŠENÍ ÚLOH II. KOLA

Řešení úlohy Z8-II-1 (str. 16)

Obsah trojúhelníku ABZ se rovná polovině obsahu trojúhelníku ABC , přitom oba trojúhelníky mají společnou základnu. Proto musí mít trojúhelník ABZ poloviční výšku. Bod Z tedy leží na rovnoběžce, jejíž vzdálenost od přímky AB je rovna polovině výšky trojúhelníka ABC příslušné ke straně AB . Takové rovnoběžky existují dvě.



Obr. 7

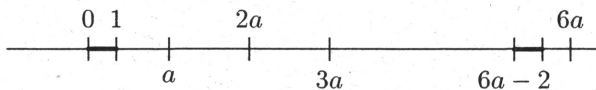
Dále $|BZ| = \frac{1}{4}|BC|$, takže bod Z leží na kružnici o středu B a poloměru $\frac{1}{4}|BC|$. Tato kružnice může mít s každou z rovnoběžek jeden, dva nebo žádný společný bod. Přitom jeden společný bod má, právě když $\frac{v}{2} = \frac{|BC|}{4}$ (viz obr. 7; v jsme označili velikost výšky trojúhelníka ABC ke straně AB), tj. když $v = \frac{|BC|}{2}$. V tomto případě tvoří body B , C a D , kde D je pata výšky na stranu AB , trojúhelník, který se rovná polovině rovnostranného trojúhelníka. Proto je $\beta = 30^\circ$. Je-li $\beta > 30^\circ$, je $\frac{v}{2} > \frac{1}{4}|BC|$ a obě rovnoběžky nemají s kružnicí žádný společný bod. Je-li $\beta < 30^\circ$, je $\frac{v}{2} < \frac{1}{4}|BC|$ a kružnice protíná každou z rovnoběžek ve dvou bodech.

Úloha má čtyři řešení, je-li $\beta < 30^\circ$, dvě řešení, je-li $\beta = 30^\circ$ a žádné řešení v případě, kdy $\beta > 30^\circ$.

Řešení úlohy Z8-II-2 (str. 16)

Nejprve najdeme obraz čísla $2a$ jako střed úsečky s krajními body a a $3a$ a pak obraz 0 (a je střed úsečky určené obrazy čísel 0 a $2a$) a čísla $6a$ ($3a$ je střed dvojice bodů 0 a $6a$). Orientovaná úsečka s počátečním bodem $6a - 2$ a koncovým bodem $6a$ znázorňuje číslo 2 , takže její polovina odpovídá jednotkové úsečce. Jejím posunutím do bodu 0 dostaneme obraz čísla 1 .

Při konstrukci je třeba rozlišit případy, kdy obraz $6a - 2$ leží vlevo nebo vpravo od obrazu $6a$. Pokud by tyto obrazy splynuly, nemá úloha řešení.



Obr. 8

Řešení úlohy Z8-II-3 (str. 17)

Hledané číslo označíme x . Aby se číslo x zvětšilo, musíme první číslici zvětšit. Můžeme proto rozlišit tři případy:

1. Zvětšíme první a druhou cifru. Číslo x se zvětšením prvních dvou cifer o 3 zvětší o 3 300 a zmenšením zbývajících dvou cifer o 4 se zmenší o 44. Z rovnice $x + 3\,300 - 44 = 2x$ dostaneme $x = 3\,256$.
2. Zvětšíme první a třetí cifru. Stejným způsobem jako v prvním případě dostaneme rovnici $x + 3\,030 - 404 = 2x$. Její řešení je $x = 2\,626$.
3. Zvětšíme první a čtvrtou cifru. Dostaneme rovnici $x + 3\,003 - 440 = 2x$. Její řešení je $x = 2\,563$.

Zkouškou se přesvědčíme, že každé z nalezených čísel je řešením úlohy:

nalezené číslo	3 256	2 626	2 563
číslo po záměně číslic	6 512	5 252	5 126

Zkouška je zde nutná, neboť např. zvětšení čtyřciferného o 3 300 nemusí vždy znamenat zvětšení prvních dvou cifer o 3. Podobně zmenšení

čtyřciferného čísla o 44 nemusí znamenat zmenšení jeho posledních číslic o 4.

Úloha má tři řešení.

Řešení úlohy Z8-II-4 (str. 17)

Při současném maximálním využití všech pneumatik ujede každá z nich stejný počet kilometrů na předním i na zadním kole. Po ujetí jednoho kilometru se zadní pneumatika opotřebí o $\frac{1}{80\,000}$ celkového přípustného opotřebení a přední pneumatika o $\frac{1}{60\,000}$. Ujede-li nová pneumatika x km na zadním kole a stejný počet kilometrů na předním kole a zároveň bude maximálně opotřebovaná, musí platit

$$\frac{x}{80\,000} + \frac{x}{60\,000} = 1.$$

Rovnice má jedno řešení; po zaokrouhlení je $x = 34\,286$.

Pneumatiky vydrží celkem asi 68 572 km, z toho po 34 286 km je třeba vyměnit přední pneumatiky za zadní a obráceně.

Poznámka: Maximální možná vzdálenost, kterou můžeme na pneumatikách ujet je tzv. harmonický průměr čísel 80 000 a 60 000. Označíme-li $A(a, b)$ aritmetický průměr čísel a a b , je jejich harmonický průměr

$$H(a, b) = \frac{1}{A(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a + b}.$$

ŘEŠENÍ ÚLOH III. KOLA

Řešení úlohy Z8–III–1 (str. 17)

Protože P je průsečíkem os úhlů trojúhelníku ABC , je zároveň středem kružnice tomuto trojúhelníku vepsané. Spojíme-li bod P s body dotyku této kružnice s odvěsnami trojúhelníku, vznikne při vrcholu C čtverec o straně $r = \sqrt{8}$ cm. Délka jeho úhlopříčky PC je hledaná vzdálenost.

Proto je $|PC| = r\sqrt{2} = 4$ cm.

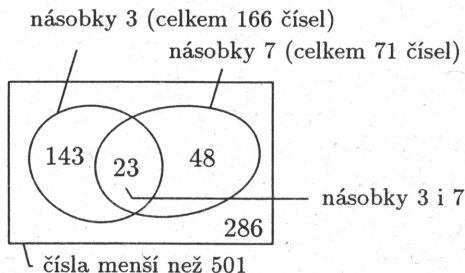
Řešení úlohy Z8–III–2 (str. 17)

Označíme-li x hledané číslo a k číslo, o které krajní číslice zvětšíme, má pro ně platit $x + 1001k - 110k = 3x$, tedy $2x = 891k$. Proto musí být k sudé, takže ho můžeme zapsat $k = 2m$, odkud vyjde $x = 891m$. Protože $k < 10$, je $m < 5$. Přitom m nemůže být rovno 1, jinak by x nebylo čtyřciferné číslo. Pro $m = 2$ je $k = 4$, $x = 1782$. Toto číslo vyhovuje, protože jeho trojnásobek se rovná 5346. Podobně pro $m = 3$ a tedy $k = 6$ dostáváme $x = 2673$. Toto číslo opět vyhovuje, protože jeho trojnásobek se rovná 8019. Pro $m = 4$ je $k = 8$, $x = 3564$. Tentokrát toto číslo nevyhovuje, protože žádnou číslici nemůžeme zvětšit ani zmenšit o 8.

Úloha má dvě řešení 1782 a 2673.

Řešení úlohy Z8-III-3 (str. 17)

Z čísel menších než 501 je 166 dělitelné třemi ($500 : 3 = 166$, zbytek 2), 71 je dělitelné sedmi ($500 : 7 = 71$, zbytek 3) a 23 je dělitelné třemi i sedmi ($500 : 21 = 23$, zbytek 17). Třemi ani sedmi není dělitelné $500 - 166 - 71 + 23 = 286$ čísel (viz obrázek 9).



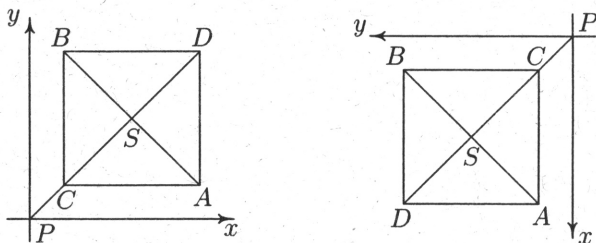
Obr. 9

Řešení úlohy Z8-III-4 (str. 18)

Protože souřadnice bodů A a A se liší jen svým pořadím, musí být osa úsečky AB přímkou $y = x$. Střed S úsečky AB má souřadnice $x_S = y_S = 3$ (obrázek). Doplníme-li body A, B na čtverec $ACBD$ (pozor úsečka AB je jeho úhlopříčkou), snadno zjistíme, že $C = [1, 1]$, $D = [5, 5]$ (nebo obráceně). Pak už lehce sestrojíme bod $P[0, 0]$ (např. $|PC| = \frac{1}{2}|CS|$).

Osa x je rovnoběžná s AC , osa y s CB .

Úloha má dvě řešení; jedna soustava je pravotočivá, druhá levotočivá.



Obr. 10

Kategorie Z7

ÚLOHY I. KOLA

(Řešení úloh na str. 30)

Z7 – I – 1

V kině Rozkvět prodávali vstupenky na dětské představení po 4 korunách. Každý desátý divák měl vstup volný a každý stý vyhrál ještě 100 korun. Za poslední představení utržili celkem 2660 korun.

Hanka prohlásila: „To nemohlo být méně než 1000 diváků.“

Ivana nesouhlasila: „Naopak, diváků nemohlo být více než 1000.“

Petr ukončil debatu: „Mýlíte se obě.“

Rozhodněte, kdo z nich měl pravdu. Svou odpověď zdůvodněte.

(Koman)

Z7 – I – 2

Představ si, že na papíře je narysovaný trojúhelník a úsečka. Napiš postup, jak se z tohoto trojúhelníku dá narysovat trojúhelník se stejným obsahem a s jednou stranou shodnou s danou úsečkou. Tvůj postup se musí hodit na každý trojúhelník a každou úsečku.

(Černek)

Z7 – I – 3

Franta, Jirka a Milan si koupili míče. Frantův míč byl o 20 % dražší než Milanův. Milanův byl o 20 % levnější než Jirkův. Jirkův míč byl o ... % ... než Frantův. Správně doplňte chybějící vytečkovaná místa.

(Černek)

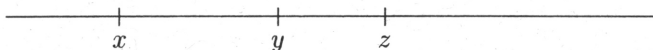
Z7 – I – 4

Kamilka a Kristýnka mají dvě stejně velké dřevěné koule. Kamilka ponořila svou kouli do zelené barvy tak, aby obarvila její polovinu. Potom změřila délku kružnice, kterou vytvořil barevný okraj. Kristýnka ponořila svoji kouli trochu hlouběji do modré barvy. Délka její okrajové kružnice

měřila $\frac{4}{5}$ délky Kamilčiny kružnice. Jakou částí svého svislého průměru byla ponořena koule Kristýnky? (Pytllová)

Z7 – I – 5

Na číselné ose jsou vyznačena tři čísla x , y , z :



Narýsuj na této číselné ose obraz nuly, jestliže víš, že rozdíl dvou vyznačených čísel se rovná třetímu. Najdi všechna řešení. (Černek)

Z7 – I – 6

Města A , B , C jsou spojena přímými cestami. Jestliže jdu z města A do města B přes město C , cesta mi trvá 41 minut. Jestliže jdu stejnou rychlostí z města B do města C přes město A , cesta mi trvá 49 minut. Jestliže jdu stejnou rychlostí z města C do města A přes město B , cesta mi trvá 50 minut.

Ukaž, že trojúhelník ABC , který vytvářejí tato města, je pravoúhlý. (Černek)

ÚLOHY II. KOLA

(Řešení úloh na str. 34)

Z7 – II – 1

Objevili jsme zajímavé číslo. Když jsme před ně napsali jedničku, dostali jsme šesticiferné číslo A . Jestliže jsme však jedničku přidali na konec, dostali jsme jiné šesticiferné číslo, které bylo třikrát větší než A . Nalezněte původní pěticefurné číslo. (Havlicová)

Z7 – II – 2

V pravoúhlém lichoběžníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$; $|\angle DAB| = 90^\circ$) platí: $|AB| = 50$ mm; $|AC| = 40$ mm; $|BC| = 30$ mm. Vypočtete obsah lichoběžníku.

Z7 – II – 3

Na ostrově Pavučina jsou 4 bělošské a 4 černošské osady. Každá osada je spojena přímočarými cestami se třemi osadami obydlenými obyvateli druhé pleti. Tyto cesty se nikde nekříží. Nakreslete, jak mohou být osady rozmístěny a jak mohou být cestami spojeny. (Koman)

ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA

Řešení úlohy Z7–I–1 (str. 28)

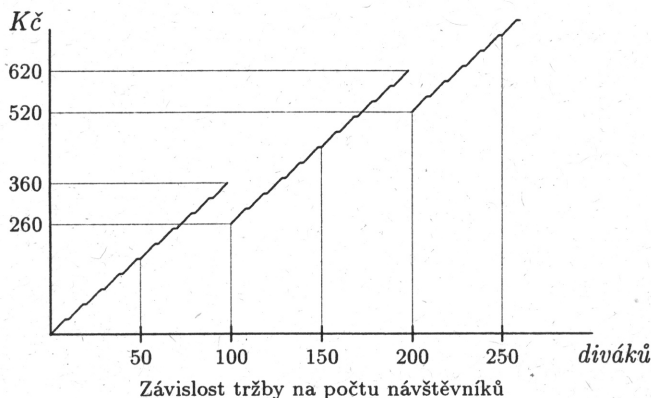
Protože každý desátý divák má vstup zdarma, vyberou v kinu Rozkvět od každé desítky diváků $9 \cdot 4 = 36$ korun. Od stovky diváků pak vyberou $10 \cdot 36$ korun, avšak po příchodu stého návštěvníka vyplatí výhru 100 korun, takže za každou úplnou stovku diváků utrží 260 korun (obr. 11).¹

Kdyby do kina přišlo více než 1 000 diváků, bylo by po příchodu tisícího diváka v pokladně kina $10 \cdot 260$ korun. Zbývajících 60 korun by vybrali po příchodu dalších 16 diváků ($1 \cdot 36 + 6 \cdot 4 = 60$).

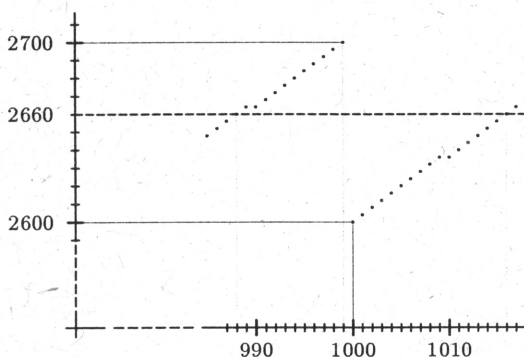
Kdyby do kina přišlo jen 999 diváků, nevypláceli by výhru pro tisícího diváka a v pokladně by měli dokonce $9 \cdot 260 + 360 = 2\,700$ korun. Tržby 2 660 Kč mohli proto dosáhnout i tehdy, kdyby přišlo o 10 platících diváků méně, tj. při 988 divácích (obr. 12).

Do kina mohlo přijít 988 nebo 1 016 diváků. Pravdu měl Petr.

¹ Zavislost tržby na počtu návštěvníků je na obrázku 11 znázorněna pouze schematicky, neboť ve skutečnosti jsou počty diváků jen celá čísla.



Obr. 11



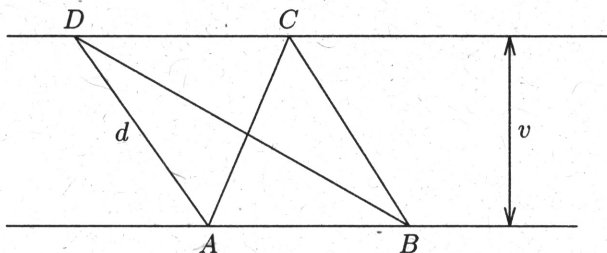
Výřez z grafu závislosti tržby na počtu návštěvníků

Obr. 12

Řešení úlohy Z7-I-2 (str. 28)

Platí-li pro velikost dané úsečky d a pro některou výšku v daného trojúhelníka $v \leq d$, je postup patrný z obr. 13, kde ABC je daný trojúhelník, $CD \parallel AB$, $AD = d$. Trojúhelníky ABC a ABD mají stejný obsah.

Není-li pro žádnou výšku v daného trojúhelníka $v \leq d$, sestrojíme nejprve trojúhelník, který má stejný obsah a přitom některou výšku $v \leq d$. Takový trojúhelník dostaneme, posuneme-li jeden vrchol daného trojúhel-



Obr. 13

níka dostatečně daleko po přímce rovnoběžné s protější stranou. Na tento trojúhelník již můžeme použít uvedenou konstrukci.

Další řešení. Úlohu můžeme řešit také tak, že nejprve sestojíme (užitím podobnosti trojúhelníků) úsečku velikosti $v = \frac{a \cdot v_a}{d}$. Trojúhelník s jednou stranou délkou d , jehož výška na tuto stranu má velikost v , má pak stejný obsah jako daný trojúhelník.

Řešení úlohy Z7-I-3 (str. 28)

Ceny míčů, které si koupili Franta, Jirka a Milan označme postupně F , J a M . Podle zadání platí:

$$F = \frac{120}{100}M \quad \text{a} \quad M = \frac{80}{100}J$$

Odtud máme:

$$J = \frac{100}{80}M = \frac{100}{80} \cdot \frac{100}{120}F = \frac{100 \cdot 100}{8 \cdot 12} \cdot \frac{F}{100} = \left(104\frac{1}{6}\right) \cdot \frac{F}{100}$$

Jirkův míč byl o $4\frac{1}{6}$, tj. přibližně o 4,17 % dražší než Frantův.

Řešení úlohy Z7-I-4 (str. 28)

Na obrázku je znázorněn svislý řez středem ponořené Kristýnčiny koule. Poloměr okrajové kružnice je označen g , poloměr koule r a hloubka ponoření h . Protože Kamilka ponořila svojí kouli do poloviny, byl poloměr její okrajové kružnice roven poloměru koule r .

Podle zadání:

$$\frac{2\pi \varrho}{2\pi r} = \frac{\varrho}{r} = \frac{4}{5}$$

Máme určit, jaká část svislého průměru Kristýnčiny koule byla ponořena, tj. poměr $\frac{h}{2r}$. Abychom určili hloubku h ponoření koule, stačí určit velikost úsečky x . Tu vypočteme pomocí Pythagorovy věty:

$$x = \sqrt{r^2 - \varrho^2}$$

Pro hledaný poměr dostáváme:

$$\begin{aligned} \frac{h}{2r} = \frac{r+x}{2r} &= \frac{r + \sqrt{r^2 - \varrho^2}}{2r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Kristýnka ponořila kouli do $\frac{4}{5}$ jejího průměru.

Řešení úlohy Z7-I-5 (str. 29)

Viz řešení úlohy Z6-I-4 (str. 39).

Řešení úlohy Z7-I-6 (str. 29)

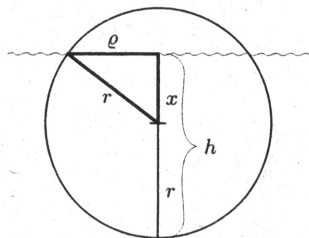
Označme a , b , c pořadě doby chůze v minutách mezi městy B a C , A a C , A a B . Podle zadání platí:

$$b + a = 41$$

$$c + b = 49$$

$$a + c = 50$$

Dostali jsme soustavu tří rovnic pro tři neznámé a , b a c . Můžeme ji řešit například tak, že sečteme první dvě rovnice a od tohoto součtu odečteme rovnici třetí. Dostáváme $2b = 40$, tj., $b = 20$. Odtud z první rovnice máme $a = 21$ a z druhé rovnice $c = 29$.



Obr. 14

Protože se pohybují stále stejnou rychlostí, je trojúhelník tvořený městy A , B a C podobný trojúhelníku o stranách 20, 21 a 29. Protože $29^2 = 20^2 + 21^2$, je podle Pythagorovy věty tento trojúhelník pravoúhlý.

ŘEŠENÍ ÚLOH II. KOLA

Řešení úlohy Z7-II-1 (str. 29)

Hledané pěticiferné číslo a jeho číslice označme $abcde$. Má platit:

$$1abcde \cdot 3 = abcde1$$

Aby poslední číslice na pravé straně byla 1, musí být $e = 7$. Máme tedy:

$$1abcd7 \cdot 3 = abcd71$$

Aby předposlední číslice na pravé straně byla 7, musí být $d = 5$. Analogicky najdeme postupně $c = 8$, $b = 2$, $a = 4$. Hledané číslo je 42857.

Další řešení. Hledané pěticiferné číslo označme x . Připíšeme-li před ně jedničku, dostaneme $100\,000 + x$. Připíšeme-li za ně jedničku, dostaneme $10x + 1$. Má platit

$$3(100\,000 + x) = 10x + 1$$

neboli

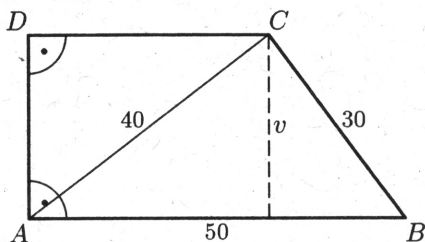
$$7x = 299\,999, \quad x = 42\,857.$$

Řešení úlohy Z7-II-2 (str. 30)

Protože $30^2 + 40^2 = 50^2$, je podle Pythagorovy věty trojúhelník ABC pravoúhlý. Jeho výšku v na stranu AB vypočítáme tak, že dvojnásobkem vyjádříme obsah trojúhelníka ABC

$$\frac{40 \text{ mm} \cdot 30 \text{ mm}}{2} = \frac{50 \text{ mm} \cdot v}{2},$$

odkud dostaneme $v = 24$ mm.



Obr. 15

Lichoběžník $ABCD$ je pravoúhlý s pravými úhly při vrcholech A a D , takže délku jeho strany CD můžeme vypočítat pomocí Pythagorovy věty:

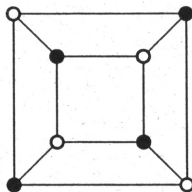
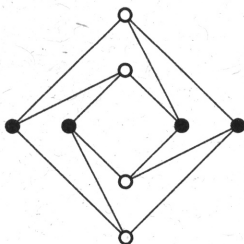
$$|CD| = \sqrt{|AC|^2 - |AD|^2} = \sqrt{40^2 - 24^2} \text{ mm} = 32 \text{ mm}$$

Obsah lichoběžníku $ABCD$ je:

$$S = \frac{(|AB| + |DC|) \cdot v}{2} = \frac{(50 + 32) \cdot 24}{2} \text{ mm}^2 = 984 \text{ mm}^2$$

Řešení úlohy Z7-II-3 (str. 30)

Osady lze rozmístit a spojit různým způsobem, uvádíme dvě varianty:



Kategorie Z6

ÚLOHY I. KOLA

(Řešení úloh na str. 38)

Z6 – I – 1

Michal má šesticiferné telefonní číslo. Je symetrické, to znamená, že je stejné, jako když ho čteme zezadu. Navíc první trojčíslí je 34krát větší než druhé. Urči Michalův telefon. (Černek)

Z6 – I – 2

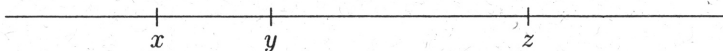
Na ostrově je 3 000 000 obyvatel. Na každých 400 obyvatel připadá jeden pes. Zjistilo se, že každým rokem se počet psů zvětšuje o $\frac{1}{25}$. Současně se však každým rokem zmenší počet lidí o $\frac{3}{250}$. Urči, na kolik obyvatel bude za dva roky připadat jeden pes.

Z6 – I – 3

Představ si, že na papíře je naryšovaný trojúhelník. Napiš postup, jak se dá z tohoto trojúhelníka naryšovat rovnoramenný trojúhelník se stejným obsahem. Tvůj postup se musí hodit na každý trojúhelník. (Černek)

Z6 – I – 4

Na obrázku je naryšována číselná osa a na ní jsou vyznačena tři čísla x , y , z . Narýsuj na této číselné ose obraz nuly, jestliže víš, že součet dvou vyznačených čísel se rovná třetímu.



Najdi všechna řešení.

(Černek)

Z6 – I – 5

Z bílého moduritu jsem si vymodeloval krychli a obarvil jsem ji na modro. Potom jsem ji rozřezal na 64 stejných menších krychlíček. Je možné z těchto krychlíček složit modrobílou šachovnici? Dá se to udělat tak, aby svislé stěny celého okraje šachovnice byly modré? Svou odpověď vysvětli.
(Černek)

Z6 – I – 6

V jednom městě mají tři kina. V kině Naděje prodávají vstupenky po 7 korunách. V kině Víra prodávají lístky po 8 korunách, ale každý desátý návštěvník má vstup zdarma. V kině Lásky prodávají vstupenky po 9 korunách a též každý desátý návštěvník má vstup zdarma, ale navíc každý stý vyhrává 100 korun. Každé z těchto kin vybralo na posledním představení 4 144 korun. Kolik diváků navštívilo jednotlivá kina?
(Koman)

ÚLOHY II. KOLA

(Řešení úloh na str. 41)

Z6 – II – 1

Krychle o hraně délky 8 cm byla namočena do zelené barvy a potom rozřezána na malé krychle o hraně 1 cm. Pak z nich byl slepen zelený kvádr o podstavě velikosti 4 cm^2 . Jakou mohl mít největší výšku? Kolik malých krychlí zbylo po slepení nejvyššího možného kvádru?
(Mida)

Z6 – II – 2

V kinu Morava prodávají vstupenky po 16 korunách. Každý desátý divák má slevu rovnou $\frac{1}{2}$ původní ceny a každý patnáctý divák má slevu o $\frac{1}{4}$ původní ceny.

a) Kolik zaplatí za vstupenku divák, který má nárok na obě slevy?

- b) Kolik diváků navštívilo kino, jestliže se za vstupenky vybralo 1 620 korun? (Koman)

Z6 – II – 3

Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, kde $|AB| = 6$, $|BC| = 5$, $|CD| = 7$, $|AD| = 8$ a $|AC| = 5,5$. Označme K střed strany BC , M střed strany AD , L střed úhlopříčky BD a N střed úhlopříčky AC . Co můžete říct o čtyřúhelníku $KLMN$? Vypočtete jeho obvod. (Volfová)

ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA

Řešení úlohy Z6–I–1 (str. 36)

Druhé trojčíslí nemůže být větší než 029, aby jeho 34 násobek byl trojčíferný, a proto začíná nulou. Hledané číslo má tedy tvar $(ab00ba)$, přitom $34 \cdot (ba) = (ab0)$. Je tedy buď $a = 0$ nebo $a = 5$.

Pro $a = 0$ dostáváme číslo 000000, které patrně nebude hledaným telefonním číslem (připustíme-li, že je šesticiferné).

Pro $a = 5$ máme $34 \cdot (b5) = (5b0)$ a zřejmě vyhovuje jen $b = 1$. Snadno se přesvědčíme, že číslo 510015 vyhovuje.

Řešení úlohy Z6–I–2 (str. 36)

1. řešení: Sestavíme tabulku jak se mění počty obyvatel a počty psů.

	Dnes	Za rok	Za 2 roky
Počet obyvatel	3 000 000	2 964 000	2 928 432
Počet psů	7 500	7 800	8 112

Jeden pes připadá po 2 letech na $2\,928\,432 : 8\,112 = 361$ obyvatel.

2. řešení: Označme o počet obyvatel a p počet psů. Po r letech bude počet obyvatel roven $o_r = o \cdot \left(\frac{247}{250}\right)^r$ a počet psů $p_r = p \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^r$, jeden pes bude pak připadat na $\frac{o_r}{p_r} = \frac{o}{p} \cdot \left(\frac{247}{260}\right)^r$ obyvatel.

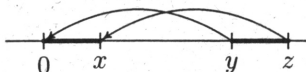
V našem případě je $\frac{o}{p} = 400$, $r = 2$ a jeden pes bude připadat na 361 obyvatel.

Řešení úlohy Z6-I-3 (str. 36)

Vrcholem C vedeme přímkou rovnoběžnou se stranou AB trojúhelníku ABC , její průsečík s osou úsečky AB označíme D . Trojúhelník ABD je rovnoramenný a má stejný obsah jako trojúhelník ABC .

Řešení úlohy Z6-I-4 (str. 36)

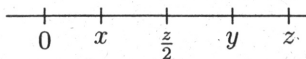
Kdybychom znali body $0, x, y$, snadno bychom našli bod $z = x + y$: úsečku $0x$ bychom posunuli tak, aby bod 0 přešel do bodu y — přitom by bod x přešel do bodu z . My známe body x, y, z a bod 0 najdeme obráceným postupem: úsečku yz posuneme tak, aby bod z přešel do bodu x — přitom bod y přejde do bodu 0 . Tím jsme vyřešili úlohu pro případ



Obr. 16

$z = x + y$. Případy $x = y + z$ a $y = x + z$ řešíme analogicky.

Jiné řešení (pro $z = x + y$): Střed úsečky xy je číslo $\frac{x+y}{2} = \frac{z}{2}$ a tento bod je tedy středem úsečky $0z$.



Obr. 17

Řešení úlohy Z6-I-5 (str. 37)

Obarvená krychle se skládá z 64 krychliček, z nich má
8 obarveny 3 stěny (rohové),
24 obarveny 2 stěny (12 hran původní krychle, v každé hraně 2),
24 obarveny 1 stěnu (6 stěn původní krychle, v každé stěně 4),
8 neobarvenou žádnou stěnu (uprostřed původní krychle).

Pro šachovnici potřebujeme 32 krychliček s aspoň jednou stěnou modrou (máme jich dokonce 56) a 32 krychliček s aspoň jednou stěnou bílou (všechny). Mají-li být svislé stěny též modré, potřebujeme:

2 krychličky s 3 modrými stěnami (do 2 rohů),

14 krychliček s aspoň 2 modrými stěnami (2 do zbývajících rohů a po 3 při každém kraji),

30 krychliček s aspoň 1 stěnou modrou (tři při každém kraji, 18 do prostřed).

Takže i šachovnici se svislými modrými stěnami můžeme složit.

Řešení úlohy Z6-I-6 (str. 37)

Kino Naděje navštívilo $4\,144 : 7 = 592$ diváků.

V kině Víra vyberou za každou celou desítku diváků $9 \cdot 8 = 72$ korun. Protože $4\,144 : 72 = 57$ (zbytek 40), přišlo 57 celých desítek diváků, kteří zaplatili $4\,144 - 40 = 4\,104$ korun. Zbylých 40 korun zaplatilo dalších 5 diváků. Celkem to bylo 575 diváků.

V kině Lásky utrží za každou celou desítku $9 \cdot 9 = 81$ korun, ale za celou stovku je výnos jen $10 \cdot 81 - 100 = 710$ korun. Protože $4\,144 : 710 = 5$ (zbytek 594), bylo v kině 5 celých stovek diváků, kteří zaplatili 3 550 korun. Zbylých 594 korun zaplatilo 7 celých desítek diváků ($594 : 81 = 7$, zbytek 27) a 3 další jednotlivci ($27 : 9 = 3$). Celkem bylo v kině Lásky 573 diváků.

ŘEŠENÍ ÚLOH II. KOLA

Řešení úlohy Z6-II-1 (str. 37)

Kvádr s podstavou $4\text{ cm} \times 1\text{ cm}$ složit nemůžeme — k tomu bychom potřebovali i krychličky se čtyřmi zelenými stěnami, které rozřezáním krychle nevzniknou. Kvádr má tedy podstavu $2\text{ cm} \times 2\text{ cm}$ a kromě osmi vrcholových krychliček se třemi zelenými stěnami obsahuje už jen krychličky se dvěma zelenými stěnami. Těch máme $12 \cdot 6 = 72$. Nejvyšší možná výška hranolu bude 20cm.

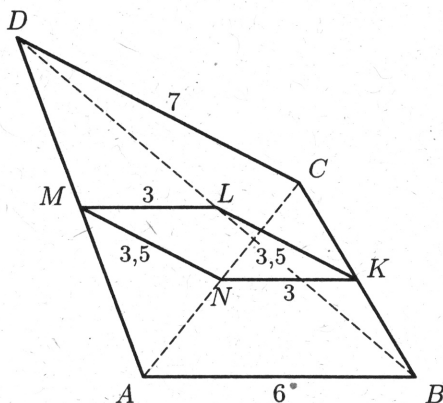
Z krychle jsme dostali $8^3 = 512$ krychliček, na kvádr jsme jich použili $4 \cdot 20 = 80$, zbývá 432 krychliček.

Řešení úlohy Z6-II-2 (str. 37)

- a) První sleva (připadající na každého desátého diváka) je 8 korun, druhá (připadající na každého patnáctého diváka) je 4 koruny. Obě slevy připadnou na každého 30. diváka. Ten zaplatí 4 koruny.
- b) Každá celá třicítka diváků zaplatí $30 \cdot 16 - 3 \cdot 8 - 2 \cdot 4 = 480 - 32 = 448$ korun. Každá lichá patnáctka diváků zaplatí $15 \cdot 16 - 8 - 4 = 240 - 12 = 228$ korun. Protože $1\,620 : 448 = 3$ (zbytek 276), $276 = 228 + 48$, $48 = 16 \cdot 3$, kino Morava navštívilo $3 \cdot 30 + 15 + 3 = 108$ diváků.

Řešení úlohy Z6-II-3 (str. 38)

Řešení budeme sledovat na obrázku 18. Úsečka ML je střední příčka v trojúhelníku ABD rovnoběžná se stranou AB , tj. $|ML| = \frac{1}{2}|AB| = 3$. Úsečka NK je střední příčka v trojúhelníku ABC rovnoběžná se stranou AB , tedy $|NK| = \frac{1}{2}|AB| = 3$.



Obr. 18

Obdobně z trojúhelníků ACD , BCD dostáváme $|MN| = |KL| = \frac{1}{2}|CD| = 3,5$, $MN \parallel LK \parallel DC$.

Čtyřúhelník má dvě dvojice rovnoběžných stran $ML \parallel NK$, $KL \parallel MN$, jde tedy o rovnoběžník. Jeho obvod je roven $2 \cdot 3 + 2 \cdot 3,5 = 13$.

Kategorie Z5

ZADÁNÍ ÚLOH I. KOLA

(Řešení úloh na str. 45)

Z5 – I – 1

Napiš datum svého narození a datum, ve kterém budeš oslavovat (nebo jsi už oslavoval) 4000. den svého života. (Černek)

Z5 – I – 2

Jan a Petr měli vykopat jámu. „Kopej ty“, povídá Petr, „ty vykopeš půlku takové jámy za tři hodiny.“ Jan se nedal: „To je pravda, ale ty vykopeš za dvě hodiny tolik, jako já za čtyři.“ Nakonec kopali společně. Za jak dlouho jámu vykopali? (Malynár)

Z5 – I – 3

Petr: „Podívej se, jaké mám zajímavé číslo: 231213. Mezi trojkami má tři číslice, mezi dvojkami má dvě číslice a mezi jedničkami jednu číslici.“

Kája: „To se mi líbí, já zkusím něco podobného pro deseticiferné číslo. Mělo by mít mezi pětkami pět číslic, mezi čtyřkami čtyři číslice, mezi trojkami tři, mezi dvojkami dvě a mezi jedničkami jednu číslici.“

Petr: „Také jsem to už zkoušel, ale nepodařilo se mi to. Myslím, že takové číslo nejde najít.“

Existuje takové číslo, nebo má pravdu Petr, že takové číslo nejde najít? Určete správnou odpověď a zdůvodněte ji. (Kyselová)

Z5 – I – 4

V jednom městě mají tři kina. V kině Slunce prodávají vstupenky za 7 korun. V kině Mars za 8 korun, ale každý desátý návštěvník má vstup zdarma. V kině Venuše prodávají vstupenky za 9 korun, také každý desátý

návštěvník má vstup zdarma, ale navíc každý stý návštěvník vyhrává 100 korun. V kině Mars vybrali na posledním představení 2 776 korun. Kolik by vybrali v kině Venuše a Slunce, kdyby je navštívil stejný počet diváků? (Pod vybranými penězi rozumíme ty, které zůstanou po zakoupení lístků v pokladně. Výhry se platí z vybraných peněz, tedy ve Venuši vyberou o to méně.) *(Koman)*

Z5 – I – 5

Devět zápalek můžeme na stůl položit tak, že na stole vytvoří 4 rovnostranné trojúhelníky se stranami po jedné zápalce.

Kolik nejméně zápalek potřebujete, chcete-li vytvořit šestkrát více stejných trojúhelníků? *(Koman)*

Z5 – I – 6

Na ostrově Pavouk je 6 měst. Každé z nich je spojené přímými cestami s některými čtyřmi ze zbývajících měst. Tyto cesty se nikde nekřížují. Nakreslete, jak mohou být tato města rozmístěna. Do obrázku zakreslete také cesty. Na sousedním ostrově Pavučina je pouze pět měst. Chystali se též vybudovat mezi městy přímé cesty tak, aby z každého města vedly tři cesty. Nějak se jim to však nedařilo. Dokázali byste jim vysvětlit, že to není možné? Zapište to. *(Volfová)*

ZADÁNÍ ÚLOH II. KOLA

(Řešení úloh na str. 48)

Z5 – II – 1

Dnes je středa 13. dubna 1994. Vypočtete, na který den v týdnu připadne 1. leden roku 2000.

Z5 – II – 2

V kinu Morava prodávají vstupenky po 16 korunách. Každý desátý divák má slevu o $\frac{1}{2}$ původní ceny a každý patnáctý divák má slevu o $\frac{1}{4}$ původní ceny.

- Kolik zaplatí za vstupenku divák, který má nárok na obě slevy?
- Kolik korun vybrali v kině od 855 diváků?

Z5 – II – 3

Ze 35 kartiček hry PEXESO byl sestaven obdélník složený ze 7 řad a 5 sloupců. Z něho bylo odebráno 10 kartiček. Délka obvodu zbylého útvaru se však nezměnila. Nakreslete aspoň 3 možnosti.

ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA

Řešení úlohy Z5–I–1 (str. 43)

Protože 4 000 dnů je téměř 11 roků, jsou v tomto intervalu tři přestupné roky. 11. roků od data narození je přesně $11 \cdot 365 + 3 = 4\,018$ dnů. Čtyřtisící den života tedy oslavíme 18 dnů před jedenáctými narozeninami. Například žák, který se narodil 3.2.1983, oslaví 4 000. den života 16.1.1994.

Řešení úlohy Z5–I–2 (str. 43)

Protože Petr pracoval dvakrát rychleji než Jan, vykopal při společné práci Jan $\frac{1}{3}$ jámy a Petr $\frac{2}{3}$ jámy. Dále víme, že Jan by vykopal půlku jámy za 3 hodiny, takže třetinu jámy kopal 2 hodiny.

Vykopání jámy trvalo Janovi s Petrem 2 hodiny.

Jiná varianta řešení: Podle zadání vykope Jan za 3 hodiny $\frac{1}{2}$ jámy, tj. za 1 hodinu $\frac{1}{6}$ jámy. Petr pracuje dvakrát rychleji, vykope tedy za 1 hodinu $\frac{1}{3}$ jámy. Budou-li pracovat oba, vykopou za hodinu dohromady $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ jámy. Celou jámu vykopou za 2 hodiny.

Řešení úlohy Z5-I-3 (str. 43)

Po několika pokusech dojdeme k domněnce, že takové deseticiferné číslo neexistuje. Abychom se o tom přesvědčili, budeme postupně do šablony $\underline{\hspace{1cm}}\underline{\hspace{1cm}}\underline{\hspace{1cm}}\underline{\hspace{1cm}}\underline{\hspace{1cm}}\underline{\hspace{1cm}}\underline{\hspace{1cm}}\underline{\hspace{1cm}}\underline{\hspace{1cm}}\underline{\hspace{1cm}}$ pro deseticiferné číslo vepisovat dvojice stejných číslic a ukážeme, že to nelze provést tak, aby výsledné číslo mělo požadované vlastnosti.

Při doplňování čísel budeme postupovat od číslic, pro jejíž vepsání máme nejméně možností, tj. postupně od pětěk po jedničky.

Aby mezi dvěma pětkami zůstalo pět volných míst, můžeme je umístit do deseticiferného čísla pouze čtyřmi způsoby:

$$\begin{array}{ccccccc} 5 & _ & _ & _ & _ & _ & 5 & _ & _ & _ \\ _ & 5 & _ & _ & _ & _ & _ & 5 & _ & _ \\ _ & _ & 5 & _ & _ & _ & _ & _ & 5 & _ \\ _ & _ & _ & 5 & _ & _ & _ & _ & _ & 5 \end{array}$$

Vzhledem k symetrii stačí prověřit pouze první dvě možnosti.

Uvažujme nyní první možnost a zkusme do čísla vepsat dvě čtyřky tak, aby mezi nimi byly čtyři místa. Máme tři možnosti:

$$\begin{array}{ccccccc} 5 & _ & 4 & _ & _ & _ & 5 & _ & 4 & _ \\ 5 & _ & _ & 4 & _ & _ & _ & 5 & _ & 4 \\ 5 & _ & _ & _ & 4 & _ & _ & _ & 5 & _ & 4 \end{array}$$

V prvním případě na místo jednotek můžeme zapsat pouze trojku, ale pak nelze požadovaným způsobem doplnit cifru na místě desítek.

V druhém případě na místo jednotek můžeme zapsat buď jedničku (pak nemáme kam vepsat trojku), anebo trojku. Vepíšeme-li na místo jednotek trojku, dostaneme číslo $5_4_3_5_4_3$. V něm lze na místo stovek vepsat pouze dvojku. Dostaneme číslo $5_4_2_3_5_2_4_3$, ve kterém mezi jedničkami nebude žádná cifra.

V třetím případě může být na místě desítek pouze dvojka, tím na místě stovek pouze trojka. Dostaneme nakonec opět nevyhovující číslo 5113425324.

Tím jsme vyloučili první možnost pro umístění pětěk. Stejným postupem ukážeme, že ani doplňování čísla $\underline{\hspace{1cm}}\underline{\hspace{1cm}}\underline{\hspace{1cm}}\underline{\hspace{1cm}}\underline{\hspace{1cm}}\underline{\hspace{1cm}}\underline{\hspace{1cm}}\underline{\hspace{1cm}}\underline{\hspace{1cm}}$, nelze dokončit při dodržení požadovaných vlastností.

Pravdu měl Petr.

Řešení úlohy Z5-I-4 (str. 43)

Od každé desítky diváků vyberou v kinu Mars $9 \cdot 8 = 72$ korun. Kino

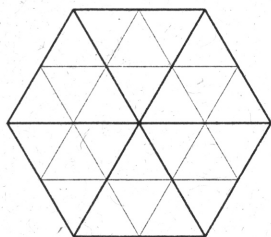
Mars navštívilo $2\,776 : 72 = 38$ (zbytek 40) celých desítek diváků. Zbývajících 40 korun vybrali od 5 diváků. Do kina Mars přišlo 385 diváků.

Od stejného počtu diváků by v kinu Slunce vybrali $7 \cdot 385 = 2\,695$ korun.

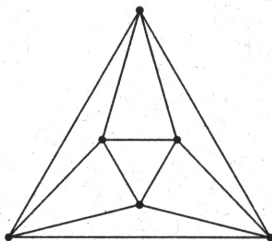
V kinu Venuše od 38 desítek diváků vyberou $38 \cdot (9 \cdot 9) = 3\,078$ korun a od posledních pěti diváků $5 \cdot 9 = 45$ korun. Na výhrách přitom vyplatili 300 korun. V pokladně kina Venuše zůstalo $3\,078 + 45 - 300 = 2\,823$ korun.

Řešení úlohy Z5–I–5 (str. 44)

Nejméně zápalek spotřebujeme, jestliže jich co nejvíce bude tvořit společnou stranu dvou trojúhelníků, to znamená tehdy, bude-li co nejmeně zápalek ležet na obvodu sestaveného obrazce. Řešení je na obr. 19.



Obr. 19



Obr. 20

Řešení úlohy Z5–I–6 (str. 44)

Možné rozmístění měst na ostrově Pavouk je zakresleno na obr. 20.

K řešení druhé části úlohy si stačí uvědomit, že každá cesta má dva konce, takže celkový počet konců musí být sudý. Kdyby na ostrově Pavučina vedly z každého z pěti měst tři cesty, byl by celkový počet konců 15, což není sudé číslo.

ŘEŠENÍ ÚLOH II. KOLA

Řešení úlohy Z5-II-1 (str. 44)

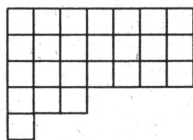
14. duben 1994 – 31. prosinec 1994 je $365 - 31 - 28 - 31 - 13 = 262$ dní,
1. leden 1995 až 31. prosince 1999 je $365 + 366 + 365 + 365 + 365 = 1826$
dní. Od 13. dubna 1994 do 1. ledna 2000 uplyne $262 + 1826 + 1 = 2089$
dní. Protože $2089 : 7 = 298$ a zbytek je 3, je 2089 dní celkem 298 týdnů
a 3 dny. Dnes je středa, proto 1. ledna roku 2000 bude sobota.

Řešení úlohy Z5-II-2 (str. 45)

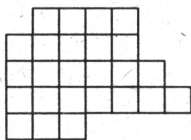
- a) 4 koruny; bude to každý 30. divák.
b) $855 : 10 = 85$ a zbude 5. Proto 85 diváků má poloviční slevu, ta činí
celkem $85 \cdot 8 = 680$ korun. $855 : 15 = 57$. Proto 57 diváků má ještě slevu
4 koruny (čtvrtina ze 16), to je celkem $57 \cdot 4 = 228$ korun. Slevy činí
dohromady $680 + 228 = 908$ korun z celkové částky $855 \cdot 16 = 13680$
korun. Vybralo se $13680 - 908 = 12772$ korun.

Řešení úlohy Z5-II-3 (str. 45)

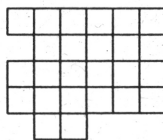
Řešení je mnoho. Kartičky se mohou odebírat „okolo rohů“ původního
obdélníku, např. obrázky 21 a 22. Jsou i řešení, kde vznikne „záliv“, v ta-
kovém případě musí ubýt jedna řada nebo jeden sloupec, např. obr. 23
(ubyl sloupec), 24 (ubyl řádek).



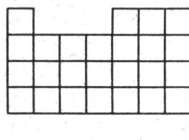
Obr. 21



Obr. 22



Obr. 23



Obr. 24

Kategorie Z4

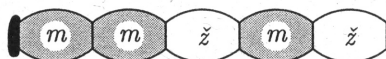
ZADÁNÍ ÚLOH I. KOLA

(Řešení úloh na str. 51)

Z4 – I – 1

Badatel objevil vzácný druh housenek. Jejich tělíčko se skládá z hlavičky a pěti článků (obr. 25). Každý článek je buď celý žlutý nebo celý modrý. Přitom dva žluté články nikdy nejsou vedle sebe. Modré však vedle sebe dost často bývají.

Kolik různě zbarvených housenek mohl badatel objevit? (Vojtela)



Obr. 25

Z4 – I – 2

Barborka je třikrát starší než Péťa. Máma je třikrát starší než Barborka. Táta je stejně starý jako máma. Dědečkovi je 88 let, což je tolik, kolik je všem ostatní dohromady. Kolik je Barborce? (Hozová)

Z4 – I – 3

V následujícím zápise jsou tři kaňky. Pod nimi se skrývají stejná čísla. Zjisti, která.

$$\text{kaňka} + 34 + \text{kaňka} = 103 - \text{kaňka}$$

(Černek)

Z4 – I – 4

Prohlédni si šesticiferné číslo 231 213. Mezi trojkami jsou tři číslice, mezi dvojkami dvě a mezi jedničkami jedna číslice. Najdi osmiciferné číslo, které bude mít mezi pětkami pět číslic, mezi čtyřkami čtyři číslice, mezi

dvojkami dvě číslice a mezi jedničkami jednu číslici. Najdi jich co nejvíc.
(Kyselová)

Z4 – I – 5

V kině Záliv prodávají lístky za 7 korun. V kině Zátoka prodávají lístky za 8 korun, ale každý desátý má vstup zdarma. V kině Zora prodávají lístky za 9 korun, ale každý stý divák vyhrává 200 korun. Do každého kina přišlo 638 diváků. Které kino získalo nejvíc korun? Napište také zdůvodnění svého tvrzení.
(Koman)

Z4 – I – 6

Na ostrově Pavučina je šest měst. Každé z nich je spojené přímými cestami s dalšími čtyřmi z těchto měst. Tyto cesty se nikde nekříží. Nakreslete, jak mohou být tato města rozmístěna. Do obrázku zakreslete i cesty.
(Volfová)

ZADÁNÍ ÚLOH II. KOLA

(Řešení úloh na str. 53)

Z4 – II – 1

Nahraď kaňky dvěma za sebou jdoucími čísly tak, aby byl výsledek správný.

$$432 + \text{kaňka} + 502 + \text{kaňka} = 2507$$

Z4 – II – 2

Lokomotiva táhne 6 vagónů, každý vagón je buď žlutý nebo modrý. Přitom pořadí barev jednotlivých vagónů je odpředu stejné jako odzadu. Kolik takových vláčků dokážete nakreslit?

V kinu Záliv prodávají vstupenky po 12 korunách a každý osmý divák má poloviční slevu. V kině vybrali 600 korun. Kolik se prodalo vstupenek po 12 Kč a kolik se slevou?

ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA

Řešení úlohy Z4–I–1 (str. 49)

Různě zbarvené housenky roztrídíme podle počtu žlutých článků. Žádný žlutý článek může mít jen jedna housenka, která je celá modrá. Má-li housenka jen jeden žlutý článek, můžeme to být jeden z pěti jejích článků. Počet barevných kombinací při dvou žlutých článcích je 6: tři kombinace v případě, kdy je mezi žlutými články jeden modrý článek, dvě kombinace pro případ, kdy jsou mezi nimi dva modré články a jedna kombinace se třemi modrými články uprostřed. Housenka se třemi žlutými články může být zbarvena jen jedním způsobem. Víc než tři žluté články mít housenka nemůže.

Badatel mohl objevit celkem $1 + 5 + 6 + 1 = 13$ různě zbarvených housenek.

Řešení úlohy Z4–I–2 (str. 49)

Věk jednotlivých členů rodiny si můžeme znázornit graficky:

Péťa:	—
Barborka:	— — —
Máma:	— — — — — — — —
Táta:	— — — — — — — —

Protože dědečkovi je tolik roků jako všem ostatním dohromady, odpovídá jeho věk $1 + 3 + 9 + 9 = 22$ dílkům. Jeden dílek tedy představuje $88 : 22 = 4$ roky.

Pěťovi jsou 4 roky, Barborce 12 a mámě i tátovi 36 let.

Řešení úlohy Z4-I-3 (str. 49)

Číslo skryté pod kaňkami označme K . Uvedený zápis byla rovnost:

$$K + 34 + K = 103 - K$$

Je tedy $3K = 103 - 34$ a $K = 23$.

Pod kaňkami bylo číslo 23.

Žáci 4. ročníku mohli určit řešení také experimentálně.

Řešení úlohy Z4-I-4 (str. 49)

Místa pro vepsání jednotlivých cifer hledaného osmiciferného čísla označíme $\square$. Do zápisu $\square\square\square\square\square\square\square\square$ se budeme snažit požadovaným způsobem vepsat číslice 1, 1, 2, 2, 4, 4, 5, 5. Nejvýhodnější bude přitom postupovat od větších číslic k menším, protože větší cifry musí být dále od sebe, takže pro jejich umístění máme méně možností.

Aby mezi dvěma pětkami zůstalo pět volných míst, můžeme je umístit pouze dvěma způsoby:

$$\begin{array}{c} 5\square\square\square\square\square 5\square \\ \square 5\square\square\square\square\square 5 \end{array}$$

Uvažujme nyní první možnost a zkusme do čísla vepsat dvě čtyřky tak, aby mezi nimi byla čtyři místa. To lze udělat pouze jediným způsobem $5\square 4\square\square\square\square 5\square 4$. Nyní zbývá i pro dvojky jediná možnost: $5\square 2\square 4\square\square 2\square 5\square 4$. Nakonec doplníme jedničky a dostaneme číslo 52412154, které má požadované vlastnosti.

Pro druhou možnost vepsání pětěk můžeme postupovat stejným způsobem. Můžeme si však také všimnout, že vycházíme ze zápisu, který je symetrický s první možností, takže druhé řešení musí být číslo 45121425.

Existují jen dvě taková čísla: 52412154 a 45121425.

Řešení úlohy Z4-I-5 (str. 50)

V kině Záliv vyberou od 638 diváků $638 \cdot 7 = 4\,466$ korun.

Od každé desítky diváků vyberou v kinu Zátoka $8 \cdot 9 = 72$ korun. Od 638 diváků vyberou $63 \cdot 72 + 8 \cdot 8 = 4\,600$ korun.

V kině Zora vyberou od 638 diváků $638 \cdot 9 = 5\,742$ korun, avšak na výhrách přitom vyplatí $6 \cdot 200 = 1\,200$ korun, takže získají $5\,742 - 1\,200 = 4\,542$ korun.

Nejvíce korun získalo kino Zátoka.

Řešení úlohy Z4-I-6 (str. 50)

Možné rozmístění měst na ostrově Pavučina je zakresleno na obr. 20 k řešení úlohy Z5-I-6 na straně 47.

ŘEŠENÍ ÚLOH II. KOLA

Řešení úlohy Z4-II-1 (str. 50)

Součet těchto dvou hledaných čísel je roven rozdílu $2507 - (432 + 502) = 1573$. Vzhledem k tomu, že jde o dvě po sobě jdoucí čísla, je jedno z nich rovno $(1573 - 1) : 2 = 786$ a druhé se rovná 787.

Řešení úlohy Z4-II-2 (str. 50)

Vzhledem k tomu, že pořadí barev je stejné odpředu jako odzadu, je obarvení celého vlaku určeno obarvením prvních tří vagónů. První vagón můžeme obarvit dvěma barvami. Při každém obarvení prvního vagónu máme dvě možnosti pro druhý vagón. Pro první dva vagóny proto máme $2 \cdot 2 = 4$ barevné kombinace a pro každou z nich můžeme vybrat barvu třetího vagónu opět dvěma způsoby.

Vlak můžeme sestavit celkem $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ způsoby.

Řešení úlohy Z4-II-3 (str. 51)

Každá skupina osmi diváků zaplatí $(7 \cdot 12 + 6) \text{ Kč} = 90 \text{ Kč}$. Protože $600 = 6 \cdot 90 + 60$, přišlo do kina šest takových skupin. Zbývajících 60 korun vybrali od 5 diváků s plným vstupným 12 Kč.

V kině Záliv prodali 6 vstupenek po 6 Kč a $7 \cdot 6 + 5 = 47$ vstupenek po 12 Kč.

prof. RNDr. Milan Koman, CSc. — RNDr. Jiří Binder, CSc. –
RNDr. Antonín Vrba, CSc.

**ČTYŘICÁTÝ TŘETÍ ROČNÍK
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
NA ZÁKLADNÍCH ŠKOLÁCH**

Vydala Jednota českých matematiků a fyziků,
Žitná 25, 117 10 Praha 1
jako svou publikaci č. 57-555-96
Sazbu programem T_EX připravil Jiří Binder
Vytiskla Olympia, a.s.,
Klimentská 1, Praha 1
1. vydání
Praha 1996

ISBN 80-7015-552-3

**matematická
olympiáda**

MO

ISBN 80-7015-552-3