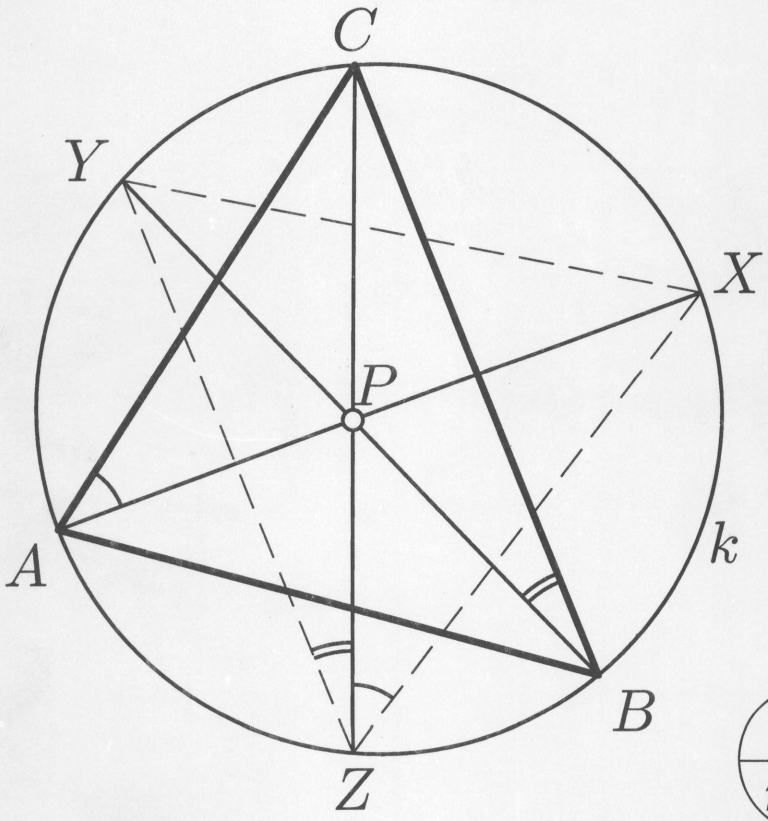
45. ročník matematické olympiády na středních školách

45. ročník matematické olympiády na středních školách



Fč
m+f

ČTYŘICÁTÝ PÁTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1995/1996

37. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

OSMÁ MEZINÁRODNÍ OLYMPIÁDA V INFORMATICE

JEDNOTA ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYZIKŮ PRAHA

Za přispění spolupracovníků zpracovali
doc. RNDr. Leo Boček, CSc., RNDr. Karel Horák, CSc.,
Richard Kollár, doc. RNDr. Václav Sedláček, CSc.,
doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Pavel Töpfer, CSc.

ISBN 80-7015-576-0

Obsah

O průběhu 45. ročníku matematické olympiády

Soutěž Matematická olympiáda ve školním roce 1995/96 pořádaly pro žáky středních a základních škol Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků a Matematickým ústavem AV ČR. Soutěž řídil ústřední výbor matematické olympiády (ÚV MO) prostřednictvím oblastních a okresních výborů matematické olympiády.

Cílem soutěže je vyhledávání žáků talentovaných v matematice, probouzení jejich hlubšího zájmu o matematiku a rozvíjení jejich matematických schopností. Ve školním roce 1995/96 se uskutečnil její 45. ročník.

Ústřední výbor MO pracoval ve složení, v němž byl jmenován Ministerstvem školství ČR v roce 1989. Předsedou ÚV MO byl doc. dr. *Leo Boček*, CSc., z MFF UK v Praze, tajemníky byli dr. *Karel Horák*, CSc., z MÚ AV ČR v Praze a dr. *Jiří Binder*, CSc., z PF UK v Praze.

V průběhu 45. ročníku MO se konala dvě zasedání ÚV MO, první dne 5. prosince 1995 v Praze, druhé 22.–23. dubna 1996 v Bílovci při celostátním kole kategorie A. Na programu bylo hodnocení průběhu soutěže, zabezpečení celostátních soustředění úspěšných řešitelů MO včetně soustředění pro přípravu na MMO, korespondenční seminář ÚV MO a organizace dalších kol soutěže. Jako vždy se diskutovalo o vhodnosti některých soutěžních úloh MO.

V organizaci vlastní soutěže nedošlo k žádným změnám. Pro žáky základních škol byla soutěž rozdělena do pěti kategorií Z4, Z5, Z6, Z7 a Z8, které byly určeny postupně žákům 4. až 8. ročníku. Podrobnosti mohou najít zájemci v brožurce *45. ročník MO na základních školách*, jejíž vydání se připravuje.

Pro žáky středních škol byla soutěž organizována ve čtyřech kategoriích A, B, C a P. Kategorie A byla určena žákům 3. a 4. ročníků středních škol, kategorie B byla pro žáky 2. ročníků a v kategorii C soutěžili žáci 1. ročníků. Pro žáky všech tříd středních škol byla určena ještě kategorie P, zaměřená na úlohy z programování a matematické informatiky.

V kategoriích A, B a C má I. kolo dvě části. V první části řeší soutěžící 6 úloh samostatně doma a mohou se případně i poradit se svými učiteli,

vedoucími kroužků apod. Druhá část má formu klauzurní práce, v níž řeší žáci tři úlohy v omezeném čase 4 hodin. Řešitelé, kteří úspěšně projdou prvním kolem, jsou pozváni do druhého (oblastního) kola soutěže, kde řeší čtyři úlohy opět v limitu čtyř hodin.

V kategoriích A a P se koná ještě třetí, celostátní kolo. V něm je vlastní soutěž rozdělena do dvou dnů. V kategorii A řeší soutěžící každý den tři úlohy v časovém limitu čtyři hodiny, v kategorii P ve stejném limitu vždy dvě úlohy.

Celostátní kolo 45. ročníku se uskutečnilo v Bílovci ve dnech 22. až 25. dubna 1996 (kategorie A) a 25.–28. dubna 1996 (kategorie P). Na zabezpečení soutěže včetně bohatého doprovodného programu pro soutěžící i členy ÚV MO se obětavě podíleli členové oblastního výboru MO Severní Moravy, pracovníci matematických kateder přírodovědecké fakulty Palackého univerzity v Olomouci a zejména profesoři a pedagogický sbor gymnázia Mikuláše Koperníka v Bílovci.

Vybraná družstva se zúčastnila mezinárodní matematické olympiády i mezinárodní olympiády v informatice. Těmto soutěžím je věnována samostatná kapitola v závěru této ročenky.

K matematické olympiádě vedle vlastní soutěže patří i řada doprovodných akcí pro talentované žáky. Z akcí pořádaných oblastními výbory MO k nim zejména patří semináře pro řešitele MO a instruktáže pro učitele. Pro nejúspěšnější řešitele oblastních kol MO a korespondenčních seminářů byla pořádána (většinou týdenní) soustředění.

Ústřední výbor MO zajišťoval tři soustředění. Pro žáky nematurujících ročníků to bylo již tradiční soustředění několika desítek úspěšných řešitelů úloh MO a FO. Proběhlo ve dnech 10.–21. 6. 1996 v Jevíčku. Další dvě soustředění byla věnována přípravě českého družstva na mezinárodní matematickou olympiádu a konala se opět v Jevíčku, a to pro 15 nejlepších řešitelů II. kola kategorie A v týdnu od 24. do 29. března ještě před celostátním kolem, druhé pak už jen pro vybraný tým 6 reprezentantů a 2 náhradníků od 9. do 14. června 1996.

Soutěžní úlohy I. (domácího) kola všech kategorií matematické olympiády jsou publikovány v tzv. soutěžních letácích. Úlohy jsou dále zveřejňovány v časopisech *Matematika, fyzika, informatika* a *Rozhledy matematicko-fyzikální*. Na pomoc učitelům jsou pak rozesílány na školy komentáře k úlohám.

Úlohy pro jednotlivá kola soutěže připravuje již čtvrtý rok úlohová komise pod vedením doc. RNDr. *Jaromíra Šimši*, CSc., z pobočky MÚ AV ČR v Brně. Komise se schází dvakrát ročně na podzim a na jaře, tentokrát

se úlohové semináře konaly v Bratislavě a v Jevíčku. V komisi pracuje zhruba 16 členů z Čech i Slovenska (úlohy obou národních olympiád jsou vybírány i zadávány společně). V tomto ročníku zodpovídali za výběr úloh pro jednotlivé kategorie RNDr. *Pavol Černek*, CSc., z Bratislavy (kategorie A), doc. RNDr. *Antonín Vrba*, CSc., z Prahy (kategorie B) a RNDr. *Jaroslav Zhouf* z Prahy (kategorie C). Autory jednotlivých úloh uvádíme za jejich texty.

Autoři ročenky jménem Ústředního výboru MO i jménem úlohové komise děkují touto cestou všem organizátorům soutěže, především pak učitelům za jejich obětavou práci a za péči, kterou věnují svým žákům. Zároveň vyzývají všechny zájemce o spolupráci při tvorbě zajímavých — především původních — úloh.

Zkuste zažít pocit radosti z toho, objevíte-li svou úlohu i se svým jménem v soutěžním letáku nebo v této ročence.

Návrhy na soutěžní úlohy pro kategorie A, B a C laskavě zasílejte na adresu předsedy české úlohové komise doc. RNDr. Jaromíra Šimši, CSc., MÚ AV ČR, Žižkova 22, 616 00 Brno. Návrhy úloh vhodných pro kategorii P zasílejte na adresu doc. RNDr. Pavla Töpfera, MFF UK Praha, Malostranské nám. 25, 118 00 Praha 1.

Tabulka 1

Počty žáků středních škol soutěžících v I. kole 45. ročníku MO

Oblast	Kategorie								Celkem	
	A		B		C		P			
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	64	32	51	25	124	60	26	26	265	143
Střední Čechy	94	33	83	22	145	70	13	6	335	131
Jižní Čechy	71	41	52	36	105	64			228	141
Západní Čechy	41	29	37	26	71	54	9	9	158	118
Liberec	31	11	18	5	30	10	5	5	84	31
Ústí n. Labem										
Východní Čechy	25	25	48	36	28	15	31	25	132	101
Brno	88	41	43	36	84	63			215	140
Jihlava	36	19	38	20	47	29	12	8	133	76
Zlín	16	4	30	14	19	16	4	2	69	36
Severní Morava	81	31	102	40	193	81	23	23	399	175
ČR	547	266	502	260	846	462	123	104	2 018	1 092

Tabulka 2

Počty žáků středních škol soutěžících v II. kole 45. ročníku MO

Oblast	Kategorie								Celkem	
	A		B		C		P			
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	30	23	24	12	49	24	26	10	129	69
Střední Čechy	29	8	19	6	67	7	6	3	121	24
Jižní Čechy	28	9	23	12	44	14			95	35
Západní Čechy	29	11	25	13	50	26	8	2	112	52
Liberec	10	4	5	2	9	5	5	2	29	13
Ústí n. Labem										
Východní Čechy	23	7	31	11	11	5	24	7	89	30
Brno	40	25	30	15	51	22			121	62
Jihlava	16	7	16	4	26	10	8	6	66	27
Zlín	4	1	13	2	14	6	2	1	33	10
Severní Morava	31	17	40	20	81	29	22	7	174	73
ČR	240	112	226	97	402	148	101	38	969	395

S ... počet všech soutěžících U ... počet úspěšných řešitelů

Výsledky celostátního kola 45. ročníku MO
kategorie A

Vítězové

1.	*David Opěla*, 4.r. GMK Bílovec	34 b.
2.	*Tomáš Bárta*, 4.r. G Zborovská, Praha	32 b.
3.	*Jan Spěvák*, 3.r. G Hellichova, Praha	29 b.
4.	*Michal Beneš*, 4.r. G Zborovská, Praha	28 b.
5.–6.	*Daniel Kráľ*, 4.r. G Zlín	26 b.
	Robert Špalek, 4.r. G tř. Kpt. Jaroše, Brno	26 b.
7.–9.	*Tomáš Brauner*, 3.r. G Moravský Krumlov	23 b.
	Petr Vilím, 4.r. GMK Bílovec	23 b.
	Jan Vybíral, 3.r. GMK Bílovec	22 b.
10.–11.	*Karel Výborný*, 4.r. G Zborovská, Praha	21 b.
	Petr Vodstrčil, 4.r. G Polička	21 b.

Další úspěšní řešitelé

12.–13.	*Roman Žeňka*, 4.r. G Jírovcova, Č. Budějovice	20 b.
	Pavel Strnad, 5.r. GFXŠ Liberec	20 b.
14.	*Zbyněk Pawlas*, 4.r. GMK Bílovec	17 b.
15.–17.	*Petr Pudlák*, 3.r. G Zborovská, Praha	15 b.
	Jana Flašková, 3.r. Svob. cheb. škola, Cheb	15 b.
	Petr Škovroň, 4.r. GMK Bílovec	15 b.
18.–20.	*Jan Štola*, 3.r. G Zborovská, Praha	14 b.
	Radek Pelánek, 2.r. G tř. Kpt. Jaroše, Brno	14 b.
	Jiří Benedikt, 4.r. G Mikulášské nám., Plzeň	14 b.
21.	*Karel Zikmund*, 4.r. G Jihlava	13 b.

Výsledky celostátního kola 45. ročníku MO
kategorie P

Vítězové

1.	*Daniel Kráľ*, 4 G Zlín	48 b.
2.	*Stanislav Mikeš*, 4 G Jírovcova, České Budějovice	38 b.
3.–4.	*Michal Beneš*, 4 G Zborovská, Praha	37 b.
	Tomáš Tichý, 4 G Dašická, Pardubice	37 b.
5.	*Robert Špalek*, 4 G tř. Kpt. Jaroše, Brno	35 b.
6.	*Jan Vodička*, 4 G Zborovská, Praha	33 b.
7.–8.	*Tomáš Müller*, 4 G J. Pekaře, Mladá Boleslav	32 b.
	Mikuláš Patočka, 3 G Kpt. Jaroše, Brno	32 b.

Další úspěšní řešitelé

9.	*Pavel Jelínek*, 4 G Mikulášské nám., Plzeň	30 b.
10.–13.	*Vlastimil Janda*, 5 G Humpolec	29 b.
	Věroslav Kaplan, 3 G tř. Kpt. Jaroše, Brno	29 b.
	Petr Vilím, 4 GMK Bílovec	29 b.
	Roman Ženka, 4 G Jírovcova, České Budějovice	29 b.
14.	*Aleš Přívětivý*, G Dašická, Pardubice	28 b.
15.–16.	*Jan Březina*, 3 G F. X. Šaldy, Liberec	27 b.
	Karel Zikmund, 4 G Jihlava	27 b.

Nejúspěšnější řešitelé II. kola MO v kategoriích A, B, C a P

Z každého kraje a z každé kategorie je uvedeno nejvýše prvních deset řešitelů. Označení G znamená gymnázium, M, resp. MF zaměření studijního oboru 01 Matematika, resp. 02 Matematika a fyzika.

Praha

Kategorie A

1.–3. *Jan Spěvák*, 3A, G Hellichova
Petr Pudlák, 3A M, G Zborovská
Karel Výborný, 4A, G Zborovská
4.–5. *Martin Rumlena*, 3D M, G Zborovská
Jan Štola, 3D M, G Zborovská
6. *Michal Beneš*, 4D M, G Zborovská
7.–9. *Ondřej Demel*, 3A, G Zborovská
Milan Hladík, 3D M, G Zborovská
Mikuláš Vejlupek, 4D M, G Zborovská
10.–12. *Anna Jančaříková*, 4C, G Zborovská
Petr Janeček, 4D M, G Zborovská
Jiří Vaněk, 4D M, G Zborovská

Kategorie B

1. *Libor Barto*, 2A, G Hellichova
2. *Filip Matějka*, 2C, G Zborovská
3. *Jiří Lhotský*, 2C, G Zborovská
4. *Zdeněk Michl*, 2C, G Zborovská
5.–6. *Michaela Horinová*, 2C, G Zborovská
Jan Malý, 2A, G Sladkovského
7. *Jan Petr*, 2C, G Zborovská
8. *Michal Mackanič*, 2A, G Litoměřická

9.–10. *Ondřej Hromádka*, 2C, G Parléřova
Jan Kára, 2C, G U libeňského zámku

Kategorie C

1.–3. *Marek Čtrnáct*, V., G Buďánka, Voctářova
Jiří Domlátil, 1C, G Zborovská
Robert Káldy, 2C, G Zborovská
4.–5. *Markéta Havlíčková*, V., G Buďánka, Voctářova
Alexandr Kára, 2C, G Hellichova
6. *Jaroslav Hlinka*, 1C, G Zborovská
7.–8. *Martin Diensbier*, 1C, G Zborovská
Filip Laně, 1C, G Zborovská
9. *Jan Stuchl*, 1C, G Zborovská
10. *Jan Tax*, 1C, G Zborovská

Kategorie P

1. *Michal Beneš*, 4D, G Zborovská
2. *Jan Štola*, 3D, G Zborovská
3.–4. *Lukáš Neterda*, 3D, G U libeňského zámku
3.–4. *Jan Vodička*, 4D, G Zborovská
5. *Tomáš Ostatnický*, 4D, G Zborovská

—— Střední Čechy ——

Kategorie A

1. *Jiří Franta*, G Příbram
2.–4. *Vladimír Pilný*, G Český Brod
Petr Sedláček, G Benešov
Jiří Šrain, G Beroun
5. *Jiří Lukavský*, Sport. škola a G Kladno
6. *Tomáš Müller*, G Mladá Boleslav
7.–8. *Milena Svobodová*, Sport. škola a G Kladno
Matouš Jirák, G Říčany

Kategorie B

1. *Jan Šťovíček*, 2A, G Kladno
2. *Petr Zima*, 2A, G Kladno
3. *Lucie Henzlová*, 2, G Český Brod
4. *Jakub Koňas*, V, G Vlašim
5.–6. *Michal Červenka*, 2C, G Kutná Hora
Pavel Surynek, 2A, G Vlašim

Kategorie C

1. *Jaroslav Černý*, 1A, G Mladá Boleslav
2.–3. *Jan Hanák*, IV, G Slaný
Michaela Nová, IV, G Hořovice
4.–7. *Jaroslav Kopsa*, IV.C, G Kladno
Tomáš Hora, IV, G Slaný
Luboš Lipinský, IV.B, G Beroun
František Janoušek, 3B, G Kladno

Kategorie P

1. *Tomáš Müller*, 4A, G Mladá Boleslav
2. *Jiří Šrain*, kvinta, G Beroun
3. *Radan Baše*, 4C, G Benešov

—— Jižní Čechy ——

Kategorie A

1.–2. *Markéta Elisová*, 4, G, Jírovcova, Č. Budějovice
Roman Žeňka, 4, G, Jírovcova, Č. Budějovice
3. *Martin Hadrávek*, 4, G, Jírovcova, Č. Budějovice
4.–5. *Klára Bezpalcová*, 3, G, Jírovcova, Č. Budějovice
Miroslav Šiman, 3, G, Jírovcova, Č. Budějovice
6. *M. Houda*, 4, G Tábor
7. *Václav Porod*, 3, G Týn nad Vltavou

Kategorie B

1.–2. *Rostislav Doležal*, G, Jírovcova, Č. Budějovice
Jan Trávníček, G, Jírovcova, Č. Budějovice
3. *Jana Koubovská*, G, Strakonice
4. *František Daněk*, SPŠS Tábor
5. *Radim Brůžek*, G Tábor
6. *Jan Kališ*, G Soběslav
7. *Petr Pekárek*, G, Jírovcova, Č. Budějovice
8. *Miroslav Bulíček*, G Humpolec
9. *Jan Ehrlich*, Biskupské G Č. Budějovice
10.–13. *Jiří Cajthaml*, G Tábor
Michal Codl, G Český Krumlov
Petr Kostka, G Pelhřimov

Kategorie C

1. *Jan Houštěk*, G Pelhřimov
2. *Jan Čepelák*, G Český Krumlov
3. *Jaroslav Trnka*, G Pelhřimov
4. *Aleš Krajník*, G Pelhřimov
5. *Helena Kunstová*, G Pelhřimov
6.–7. *Kamila Pacovská*, G Tábor
Jan Vida, G Jindřichův Hradec
8.–10. *Miloslav Brada*, G Tábor
Vladimír Faltus, G, Jírovcova, Č. Budějovice
Jiří Ortman, G, Jírovcova, Č. Budějovice

Kategorie P

1. *Roman Žeňka*, 4A, G Jírovcova, Č. Budějovice
2. *Jan Hubička*, 4A, G Jírovcova, Č. Budějovice
3. *Stanislav Mikeš*, 4A, G Jírovcova, Č. Budějovice

—— Západní Čechy ——

Kategorie A

1. *Jana Flašková*, 4M, 1. G Plzeň

2.–3. *Jiří Benedikt*, 3, Svobodná chebská škola, Cheb
Tomáš Pešek, 3M, 1. G Plzeň
4.–5. *Michal Krčma*, 4MF, 1. G Plzeň
Martin Moravec, 3, Svobodná chebská škola, Cheb
6. *Tomáš Ebelendr*, sexta, Masarykovo G Plzeň
7.–9. *Zdeněk Slovan*, 3M, 1. G Plzeň
Tomáš Suda, 4, G Klatovy
Lukáš Šmahel, 4M, 1. G Plzeň
10. *Michal Ježek*, 4M, 1. G Plzeň

Kategorie B

1. *Karel Kolář*, kvinta, G Sušice
2. *Jan Šnaidauf*, kvinta, 1. G Plzeň
3. *Jan Ježek*, 2, G Rokycany
4.–5. *Tomáš Kubař*, 2, G Domažlice
Martin Střelec, kvinta, 1. G Plzeň
6. *David Legát*, 2, G Karlovy Vary
7.–9. *Michal Hazi*, sexta, G Cheb
Stanislav Kašný, kvinta, G Cheb
Jan Tauš, 2MF, 1. G Plzeň
10.–11. *Josef Bečvář*, 2MF, 1. G Plzeň
Ondřej Černý, 2, G Rokycany

Kategorie C

1.–2. *Luboš Dostál*, kvinta, G Stříbro
Michal Havlena, kvarta, G Karlovy Vary
3. *Michal Belihar*, kvarta, 2. G Plzeň
4.–5. *Dana Šteklová*, 1, 1. G Plzeň
Lenka Zdeborová, 1, 1. G Plzeň
6.–8. *Michaela Šimandlová*, kvarta, 1. G Plzeň
Jan Šroub, 1, 1. G Plzeň
David Štěpánek, 1, 1. G Plzeň
9.–10. *Petr Böhm*, kvarta, Svobodná chebská škola, Cheb
Kateřina Dolejšová, kvarta, 3. G Plzeň

Kategorie P

1. *Pavel Jelínek*, 4, 1. G Plzeň
2. *Dalibor Šmíd*, 4, 1. G Plzeň
3. *Michal Ježek*, 4M, 1. G Plzeň

—— Liberec ——

Kategorie A

1. *Petr Strnad*, 5, GFXŠ, Liberec
2. *Pavel Strnad*, 5, GFXŠ, Liberec
3. *Michal Celler*, 4, GFXŠ, Liberec
4. *Jan Březina*, 3, GFXŠ, Liberec

Kategorie B

1. *Petr Just*, GFXŠ, Liberec
2. *Václav Klimpl*, GFXŠ, Liberec

Kategorie C

1. *Jan Vršovský*, GFXŠ, Liberec
2. *Jakub Vidner*, G Frýdlant
3.–4. *Lukáš Hlůže*, G Tanvald
   Jakub Staněk, SPŠSE Liberec
5. *Lukáš Cerman*, G Česká Lípa
6. *Soňa Kvochová*, G Jablonec n. N.
7. *Zbyněk Dolejší*, GFXŠ, Liberec

Kategorie P

1. *Jan Březina*, 3D, GFXŠ, Liberec

—— Ústí nad Labem ——

Kategorie A

1. *Zuzana Pokorná*, G T.G. Masaryka, Litvínov

Kategorie P

1. *Pavel Rydvan*, G Kadaň

—— Východní Čechy ——

Kategorie A

1. *Petr Vodstrčil*, 4A, G Polička
2. *Tomáš Tichý*, 4D, G Pardubice
3. *Pavel Příhoda*, 3A, G J.K. Tyla, Hradec Králové
4. *Martin Klíma*, 6A, G Havl. Brod.
5. *Jan Fátor*, 3A, G J.K. Tyla, Hradec Králové

6.–7. *Aleš Král*, 4A, G J.K. Tyla, Hradec Králové
Petr Luner, 6A, G Moravská Třebová

Kategorie B

1.–2. *Martin Klíma*, 6A, G Havl. Brod.
Jan Němeček, G Česká Třebová

3.–4. *Petr Paluska*, G J.K. Tyla, Hradec Králové
Irena Hejlová, G Lanškroun

5. *Jakub Oma*, G Turnov

6.–8. *Jiří Vejnar*, G Pardubice
Jakub Kaše, G Ústí nad Orlicí
Karel Vaníček, G B. Němcové, Hradec Králové

5. *Zdeněk Korda*, G B. Němcové, Hradec Králové

Kategorie C

1. *Jan Krejčík*, G Pardubice
2. *Miroslav Kašpar*, SPŠE Pardubice
3. *Tomáš Jelínek*, G J.K. Tyla, Hradec Králové
4. *Přemysl Volf*, G J.K. Tyla, Hradec Králové
5. *Pavla Doubková*, G Pardubice
6. *Kateřina Rousová*, G Dvůr Králové n.L.

Kategorie P

1. *Tomáš Tichý*, G Pardubice
2. *Aleš Přívětivý*, G Pardubice
3. *Robert Chocholouš*, G J. K. Tyla, Hradec Králové

—— Brno ——

Kategorie A

1. *Tomáš Brauner*, 3B, G Moravský Krumlov
2. *Jan Pešl*, 4A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
3.–4. *Oldřich Stražovský*, 3A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Robert Špalek, 4A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
5. *Radek Pelánek*, 2A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
6.–7. *Pavel Moravec*, 1A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Pavel Šmerk, 3A, G Brno, Vídeňská
8. *Jaroslav Jánský*, 1A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
9.–12. *Pavel Klang*, 4A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Václav Linkov, 3A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Jiří Mikulášek, 3A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Mikuláš Patočka, 3A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

Kategorie B

1.–2. *Martin Ondráček*, VC, G Kyjov
Pavel Podbrdský, 2A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
3.–4. *Radek Pelánek*, 2A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Petr Šimeček, 2A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
5.–6. *Tomáš Hanžl*, 2A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Pavlína Vařeková, 2A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
7. *Ivana Vařeková*, 2A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
8. *Roman Rožník*, 2A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
9. *Zdeněk Daniel*, 2A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
10.–11. *Martin Ježek*, 2A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Vít Nováček, 2B MF, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

Kategorie C

1.–2. *Eva Burešová*, 1A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Martin Viščor, 1A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
3. *Lukáš Vokřínek*, 1A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
4.–5. *David Holec*, 1A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Pavel Moravec, 1A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
6.–8. *Michaela Hrnčířova*, 1A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Petr Liška, 1A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Ondřej Přibyla, 1A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
9. *Alexander Jevsejenko*, 1A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
10. *Jan Holeček*, 1A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

Kategorie P

1. *Robert Špalek*, 4A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
2. *Mikuláš Patočka*, 3A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
3. *Věroslav Kaplan*, 3A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
4.–5. *Roman Kozubík*, 4A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Helena Kupková, 4A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

—— Jihlava ——

Kategorie A

1. *Karel Zikmund*, 4B, G Jihlava
2. *Vojtěch Minárik*, 4B, G Jihlava
3. *Markéta Hladká*, 6G, G Třebíč
4.–5. *Ondřej Caha*, sexta, G Jihlava
Michal Janda, 4C, G Žďár nad Sázavou
6. *Martin Černý*, 4A, G Žďár nad Sázavou
7. *Tomáš Karban*, 4B, G Jihlava

Kategorie B

1. *Zdeněk Charvát*, 2B, G Jihlava
2.–3. *Jiří Banszel*, 5G, G Třebíč
Martin Zítka, kv, G Žďár nad Sázavou
4. *Karel Volný*, 5G, G Třebíč

Kategorie C

1. *Zdeněk Dvořák*, IVA, G Nové Město nad Metují
2. *Robert Vácha*, 1A, G Jihlava
3.–4. *Jaroslav Hulín*, 4G, G Třebíč
Sabina Richterová, 4A, SPgŠ a G Znojmo
5.–6. *Marta Smolíková*, 1A, G Jihlava
Pavel Svoboda, 1A, G Velké Meziříčí
7.–10. *Hana Bartušková*, 4G, G Třebíč
Karel Hladký, 1B, G Třebíč
Ondřej Hudec, 4G, G Třebíč
Markéta Vaňková, 1A, G Velké Meziříčí

Kategorie P

1. *Tomáš Karban*, 4B, G Jihlava
2. *Jindřich Makovička*, 3B, G Telč
3.–4. *Karel Zikmund*, 4G, G Jihlava
Aleš Povolný, 4C, G Třebíč
5.–6. *Jaroslav Abraham*, 6G, G Třebíč
Karel Volný, 2B, G Třebíč

—— Zlín ——

Kategorie A

1. *Daniel Kráľ*, 4, G Zlín

Kategorie B

1.–2. *Michal Jarošek*, G Hodonín
Zuzana Martínková, G Strážnice
3. *Tomáš Cehel*, G Uherský Brod
4.–6. *Milan Mahdal*, G Uherský Brod
Dagmar Marková, G Hodonín
Jindřiška Šobáňová, G Uherský Brod
7.–9. *Zdeněk Pícha*, G Uherské Hradiště
Martin Piškula, G Strážnice

Petr Staník, G Uherský Brod
10. *Marek Omelka*, G Uherské Hradiště

Kategorie C

1.–2. *Alena Vraníková*, G Kroměříž
Josef Zlomek, G Strážnice
3. *Jaromír Zajíček*, G Strážnice
4. *Marek Machalík*, G Uherský Brod
5.–6. *Jakub Fízeľ*, G Uherský Brod
Vít Marek, G Holešov
7. *Alena Dokulilová*, G Zlín
8.–10. *Lukáš Foltýn*, G Zlín
Jiří Hofman, G Strážnice
Ondřej Krejčíř, G Uherský Brod

Kategorie P

1. *Daniel Kráľ*, G Zlín
2. *Josef Zlomek*, G Strážnice
3. *Zbyněk Uher*, G Uherský Brod

—— Severní Morava ——

Kategorie A

1.–2. *David Opěla*, 4C, GMK Bílovec
Petr Vilím, 4C, GMK Bílovec
3. *Zbyněk Pawlas*, 4C, GMK Bílovec
4. *Jan Vybíral*, 3C, GMK Bílovec
5. *Petr Škovroň*, 4C, GMK Bílovec
6.–7. *Dominik Michálek*, 3B, G Komenského, Jeseník
Pavel Skalický, 4D, Slovan. G, tř. J. z Pod., Olomouc
8.–9. *Aleš Benda*, 3C, GMK Bílovec
Petr Hodaň, 3C, GMK Bílovec
10.–14. *Přemysl Jedlička*, 4E, Mendelovo G, Opava
Tomáš Kasl, 4C, GMK Bílovec
David Kubánek, 3B, G J. Škody, Přerov

Antonín Navrátil, 3C, GMK Bílovec
Josef Špaček, 4C, GMK Bílovec

Kategorie B

1. *Petr Kolovrat*, 2C, GMK Bílovec
2.–4. *Adam Ptašnik*, 2C, GMK Bílovec
Martin Trčka, 2C, GMK Bílovec
Ladislav Šobr, 6A, G Jeseník
5. *Filip Švrček*, 2B, G J. Škody, Přerov
6. *Přemysl Čončka*, 2A, Mendelovo G, Opava
7.–8. *Hue Do thi*, 2C, GMK Bílovec
Vladimír Šišma, 2C, GMK Bílovec
9.–11. *Roman Lukáš*, 5B, GJW, Prostějov
Daniel Pravda, 5D, G 17. listopadu, Orlová-Lutyně
Petr Táborský, 4B, G Rožnov pod Radhoštěm

Kategorie C

1. *Petr Tomčík*, 1A, Matiční G, Ostrava
2. *Ondřej Baldrman*, 4A, G Havířov 1, Komenského
3.–4. *Veronika Vilášková*, 1C, GMK Bílovec
Martin Zdráhal, 4A, G J. Škody, Přerov
5. *Jan Haškovec*, 4, Matiční G, Ostrava
6.–10. *Tomáš Beránek*, 3A/6, reál. G, Prostějov, Studentská
Radomír Chabiniok, 1C, GMK Bílovec
Radek Kubiš, 1C, GMK Bílovec
Dušan Přecechtěl, 4, Matiční G, Ostrava
Roman Šimčík, 1A F, Slovanské G, Olomouc

Kategorie P

1. *Petr Vilím*, 4C, GMK Bílovec
2. *David Opěla*, 4C, GMK Bílovec
3. *Miroslav Hebký*, 4A, G Český Těšín

Kategorie C

Texty úloh

C – I – 1

V rovnostranném trojúhelníku ABC o straně délky a označme K, L, M po řadě středy stran AB, BC, CA. Uvnitř nebo na obvodu trojúhelníku ABC je zvolen bod S. Dokažte, že platí rovnost

$$|AS|^2 + |BS|^2 + |CS|^2 = |KS|^2 + |LS|^2 + |MS|^2 + \frac{3}{4}a^2.$$

(*J. Zhouf*)

C – I – 2

Rozhodněte, zda lze množinu čísel 1, 2, ..., 1995 rozdělit na dvě skupiny tak, aby v první skupině bylo

a) dvakrát, b) třikrát, c) čtyřikrát

více čísel než ve druhé skupině a aby součty čísel v obou skupinách byly stejné. (*J. Zhouf*)

C – I – 3

Sestrojte lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$) s pravým úhlem při vrcholu A, je-li $|AC| = 5\,\text{cm}$, $|BD| = 7\,\text{cm}$ a úhlopříčka AC dělí obsah lichoběžníku na dvě části v poměru $2 : 1$. (*J. Švrček*)

C – I – 4

Určete všechny dvojice x, y přirozených čísel, pro které současně platí:

a) $2\,100 < xy < 2\,500$,

b) $0{,}85 < \dfrac{x}{y} < 0{,}9$,

c) podíl $\dfrac{y+x}{y-x}$ je celočíselný. (*J. Zhouf*)

C – I – 5

Určete všechna čtyřciferná čísla A, která mají pro každé $k = 2, 3, 4, \ldots, 9$ tuto vlastnost: Vepíšeme-li cifru k mezi prostřední cifry čísla A, dostaneme pěticiferné číslo, jež je násobkem čísla k. (*J. Šimša*)

C – I – 6

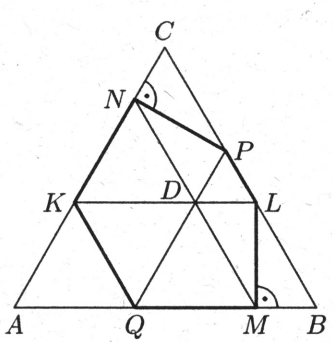
Určete délku přepony pravoúhlého trojúhelníku, znáte-li poloměr r kružnice vepsané a poloměr R kružnice připsané k přeponě tohoto trojúhelníku (tj. kružnice, která se dotýká zvnějšku přepony a prodloužení obou odvěsen trojúhelníku.) (*P. Leischner*)

C – S – 1

Rozložte všemi možnými způsoby číslo 1 996 na součet několika (aspoň dvou) po sobě jdoucích přirozených čísel. (*J. Zhouf*)

C – S – 2

Uvnitř rovnostranného trojúhelníku ABC je dán bod D, jímž jsou postupně vedeny rovnoběžky KL, MN, PQ se stranami AB, BC, CA jako na obrázku. Bod D je zvolen tak, že vzniklý šestiúhelník $QMLPNK$ má pravé úhly při vrcholech M a N. Určete poměr obsahů šestiúhelníku $QMLPNK$ a trojúhelníku ABC (obr. 1). (*J. Zhouf*)



Obr. 1

C – S – 3

Určete všechna pěticiferná čísla A s vlastností: Zapíšeme-li za sebe (zleva doprava) zbytky, které dává číslo A při dělení čísly 2, 3, 4, 5 a 6, dostaneme opět výchozí číslo A. (*J. Šimša*)

C – II – 1

Zjistěte, pro která přirozená čísla n je možno rozdělit množinu čísel 1, 2, ..., n na dvě skupiny tak, aby v první skupině bylo třikrát více čísel než ve druhé a aby součty čísel v obou skupinách byly stejné.

(*R. Kollár*)

C – II – 2

Určete všechny body S daného čtverce $ABCD$, pro které platí

$$|SA| \cdot |SC| = |SB| \cdot |SD|.$$

(*J. Zhouf*)

C – II – 3

Najděte nejmenší pěticiferné číslo $\overline{abcde}$, jehož všechny číslice jsou nenulové a které je dělitelné každým z čísel $\overline{e}$, $\overline{de}$, $\overline{cde}$, $\overline{bcde}$. (*J. Zhouf*)

C – II – 4

V polorovině ABM sestrojte kružnice k_1 a k_2, které se dotýkají přímky AB po řadě v daných bodech A a B, dotýkají se vně v nějakém bodě T a jejich společná tečna v tomto bodě prochází daným bodem M.

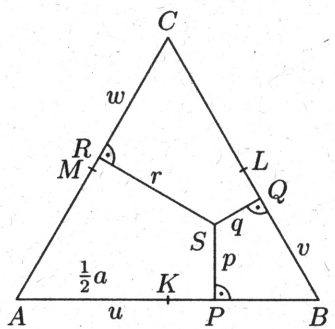
(*J. Švrček*)

Řešení úloh

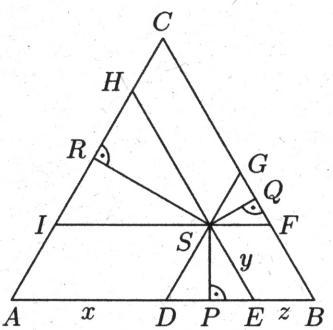
C – I – 1

Označme P, Q, R paty kolmic vedených z bodu S ke stranám AB, BC, CA (obr. 2) a dále označme

$$|SP| = p, \quad |SQ| = q, \quad |SR| = r,$$
$$|AP| = u, \quad |BQ| = v, \quad |CR| = w.$$



Obr. 2



Obr. 3

Platí

$$\begin{aligned}
&|AS|^2 + |BS|^2 + |CS|^2 = \\
&\quad = (u^2 + p^2) + (v^2 + q^2) + (w^2 + r^2), \\
&|KS|^2 + |LS|^2 + |MS|^2 = \\
&\quad = \left(u - \tfrac{1}{2}a\right)^2 + p^2 + \left(v - \tfrac{1}{2}a\right)^2 + q^2 + \left(w - \tfrac{1}{2}a\right)^2 + r^2 = \\
&\quad = u^2 + p^2 + v^2 + q^2 + w^2 + r^2 - a(u + v + w) + \tfrac{3}{4}a^2.
\end{aligned}$$

Abychom dokázali platnost dané rovnosti, stačí, když dokážeme, že platí

$$-a(u + v + w) = -\tfrac{3}{2}a^2, \qquad \text{tj.} \qquad u + v + w = \tfrac{3}{2}a.$$

Bodem S vedeme rovnoběžky IF, EH, GD se stranami AB, BC, CA trojúhelníku ABC (obr. 3). Označme

$$|AD| = |GC| = |HI| = x, \quad |DE| = |BF| = |IA| = y,$$
$$|EB| = |FG| = |CH| = z.$$

Porovnáme-li obrázky 1 a 2, můžeme psát

$$u+v+w=\left(x+\tfrac{1}{2}y\right)+\left(y+\tfrac{1}{2}z\right)+\left(z+\tfrac{1}{2}x\right)=$$
$$=\tfrac{3}{2}(x+y+z)=\tfrac{3}{2}a,$$

což jsme chtěli dokázat. Využili jsme toho, že $x+y+z=a$.

Jiným způsobem zapsané řešení (obr. 2, obr. 3):

$$|AS|^2+|BS|^2+|CS|^2=$$
$$=\left(x+\tfrac{1}{2}y\right)^2+\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2+$$
$$+\left(y+\tfrac{1}{2}z\right)^2+\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2+\left(z+\tfrac{1}{2}x\right)^2+\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2=$$
$$=2(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx,$$
$$|KS|^2+|LS|^2+|MS|^2+\tfrac{3}{4}a^2=$$
$$=\left(x+\tfrac{1}{2}y-\tfrac{1}{2}a\right)^2+\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2+\left(y+\tfrac{1}{2}z-\tfrac{1}{2}a\right)^2+\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2+$$
$$+\left(z+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}a\right)^2+\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2+\tfrac{3}{4}a^2=$$
$$=2(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx+\tfrac{3}{4}a^2-\tfrac{3}{2}a^2+\tfrac{3}{4}a^2=$$
$$=2(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx$$

(využili jsme toho, že $x+y+z=a$). Vidíme, že dokazovaná rovnost skutečně platí.

Poznámka. V obrázcích je bod S zakreslen uvnitř trojúhelníku ABC, všechny výpočty jsou však v pořádku i v případě, že bod S leží na obvodu tohoto trojúhelníku.

C – I – 2

Nejprve si připravíme dva rozklady:

$$1\,995=3\cdot5\cdot7\cdot19, \tag{1}$$
$$1+2+\ldots+1\,995=\frac{1995\cdot1996}{2}=\frac{3\cdot5\cdot7\cdot19\cdot2^2\cdot499}{2}=$$
$$=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot19\cdot499. \tag{2}$$

a) Rozdělení do skupin existuje, není však jednoznačné, uvedeme jen jednu možnost. První dvě třetiny čísel od 1 do 1995 mají součet

$$1+2+\ldots+1\,330=\frac{1\,330\cdot1\,331}{2}=665\cdot1\,331,$$

zbývající třetina (obsahující 665 čísel) má součet

$$1\,331 + \ldots + 1\,995 = \frac{665}{2}(1\,995 + 1\,331) = 665 \cdot 1\,663.$$

Druhý součet je větší o $332 \cdot 665 = 166 \cdot 1\,330$, proto vyměníme 166 čísel, která se liší o 665. V první skupině pak budou např. čísla

$$1,\ 2,\ \ldots,\ 1\,164,\ 1\,830,\ 1\,831,\ \ldots,\ 1\,995,$$

ve druhé skupině čísla

$$1\,165,\ 1\,166,\ \ldots,\ 1\,330,\ 1\,331,\ \ldots,\ 1\,829.$$

b) Množinu nelze rozdělit, protože číslo 1 995 není dělitelné čtyřmi.

c) První čtyři pětiny čísel od 1 do 1 995 mají součet

$$1 + 2 + \ldots + 1\,596 = \frac{1\,596 \cdot 1\,597}{2} = 1\,597 \cdot 798,$$

zbývající pětina (obsahující 399 čísel) má součet

$$1\,597 + \ldots + 1\,995 = \frac{399 \cdot (1\,597 + 1\,995)}{2} = 893 \cdot 798.$$

Jelikož součet čtyř pětin nejmenších čísel je větší než součet jedné pětiny největších čísel, nelze podmínky úlohy splnit.

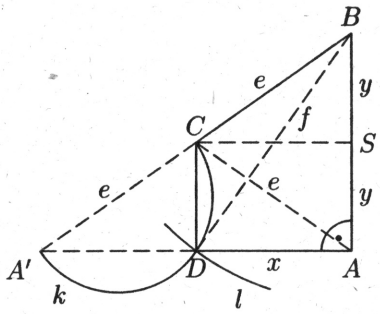
C – I – 3

Jelikož obsahy trojúhelníků ABC a CDA jsou v poměru 2 : 1 (obsah trojúhelníku ABC je větší než obsah trojúhelníku CDA, neboť $|BD| > |AC|$), a protože tyto trojúhelníky mají stejnou výšku $|DA|$, platí $|AB| = 2|CD|$. Proto též $|BC| = |AC| = |A'C| = e$ (obr. 4).

Konstrukce:

1. úsečka BA', $|BA'| = 2e$, kde $e = 5\,\text{cm}$, bod C ve středu úsečky BA',
2. kružnice k s průměrem $A'C$,
3. kružnice $l(B; f)$, kde $f = 7\,\text{cm}$,
4. bod $D \in k \cap l$,
5. bod A tak, aby D byl střed AA'.

Úloha má jediné řešení.



Obr. 4

Úlohu je též možno řešit pomocí výpočtu. Pro trojúhelníky ABD a ACD můžeme napsat Pythagorovu větu (obr. 4):

$$x^2 + (2y)^2 = f^2 = 49,$$
$$x^2 + y^2 = e^2 = 25.$$

Z této soustavy získáme $x = \sqrt{17}$, $y = 2\sqrt{2}$. Konstrukce je pak zřejmá z obr. 4.

C – I – 4

Nejprve určíme všechny dvojice x, y, které splňují podmínky a) a b), vyřešením soustavy nerovnic

$$2\,100 < xy < 2\,500, \tag{1}$$
$$0{,}85y < x < 0{,}9y. \tag{2}$$

Jestliže nerovnice (2) vynásobíme číslem y, dostaneme

$$0{,}85y^2 < xy < 0{,}9y^2. \tag{3}$$

Porovnáním nerovnic (1) a (3) zjistíme, že $0{,}85y^2 < 2\,500$ a zároveň $2\,100 < 0{,}9y^2$, odkud $48 < y < 55$.

Jestliže nerovnice (2) vynásobíme číslem x, dostaneme

$$0{,}85xy < x^2 < 0{,}9xy. \tag{4}$$

Porovnáním nerovnic (1) a (4) zjistíme, že $\frac{x^2}{0{,}9} < 2\,500$ a zároveň $2\,100 < \frac{x^2}{0{,}85}$, odkud $42 < x < 48$.

Získali jsme 30 možných dvojic x, y. Jelikož nešlo o ekvivalentní úpravy, je pro tyto dvojice nutné ověřit všechny tři podmínky. Podmínce a) nevyhovuje dvojice 47, 54. Po ověření podmínky b) zbude 11 dvojic x, y: 43, 49; 43, 50; 44, 49; 44, 50; 44, 51; 45, 51; 45, 52; 46, 52; 46, 53; 46, 54; 47, 53. Z nich podmínku c) splňuje jediná dvojice: $x = 45$, $y = 51$.

Jiné řešení. Označíme-li $k = \frac{y+x}{y-x}$, pak $\frac{x}{y} = \frac{k-1}{k+1} = 1 - \frac{2}{k+1}$. Odtud a z podmínky b) zjistíme, že pro celé číslo k platí $13 \leqq k \leqq 18$. Proto je zlomek $\frac{x}{y}$ roven jednomu ze zlomků (zapsány jsou v základním tvaru)

$$\frac{6}{7}, \quad \frac{13}{15}, \quad \frac{7}{8}, \quad \frac{15}{17}, \quad \frac{8}{9}, \quad \frac{17}{19}.$$

Nyní zbývá posoudit, které z těchto zlomků lze rozšířit přirozeným číslem n na zlomek $\frac{x}{y}$ tak, aby byla splněna podmínka a). Např. pro první zlomek je $x = 6n$, $y = 7n$ a podmínka má tvar $2\,100 < 42n^2 < 2\,500$, žádné n ji však nesplňuje. Analogicky vyzkoušíme ostatní zlomky. Úloha má jediné řešení $x = 45$, $y = 51$.

C – I – 5

Je-li $A = \overline{pqrs}$ ciferný zápis hledaného čísla, pak číslo s vepsanou cifrou k můžeme rozložit na součet

$$\overline{pqkrs} = \overline{pq0rs} + k \cdot 100.$$

Protože druhý sčítanec je dělitelný číslem k, lze vlastnost čísla A vyjádřit takto: Pěticiferné číslo B se zápisem $B = \overline{pq0rs}$ je dělitelné každým z čísel 2, 3, 4, ..., 9, neboli každým z čísel 40, 9 a 7. Číslo B je násobkem čtyřiceti, právě když je násobkem čtyřiceti dvojčíslí $\overline{rs}$, tj. $\overline{rs} \in \{00, 40, 80\}$. Rozlišíme jednotlivé případy.

a) $\overline{rs} = 00$. Číslo $B = \overline{pq\,000}$ je dělitelné čísly 9 a 7 jedině v případě $\overline{pq} = 63$. Dostáváme první řešení $A = 6\,300$.

b) $\overline{rs} = 40$. Číslo $B = \overline{pq\,040}$ je dělitelné devíti, právě když $p + q = 5$ nebo $p + q = 14$. V prvním případě

$$B = 1\,000(10p + 5 - p) + 40 = 7(1\,285p + 720) + 5p,$$

což není násobek sedmi pro žádnou cifru $p \leqq 5$. V druhém případě

$$B = 1\,000(10p + 14 - p) + 40 = 7(1\,285p + 2\,005) + 5(p + 1),$$

což je násobek sedmi jedině pro $p = 6$. Tehdy $q = 8$ a $A = 6\,840$.

c) $\overline{rs} = 80$. Číslo $B = \overline{pq\,080}$ je dělitelné devíti, právě když $p + q = 1$ nebo $p + q = 10$. V prvním případě $B = 10\,080$, což je násobek sedmi, takže máme řešení $A = 1\,080$. V druhém případě

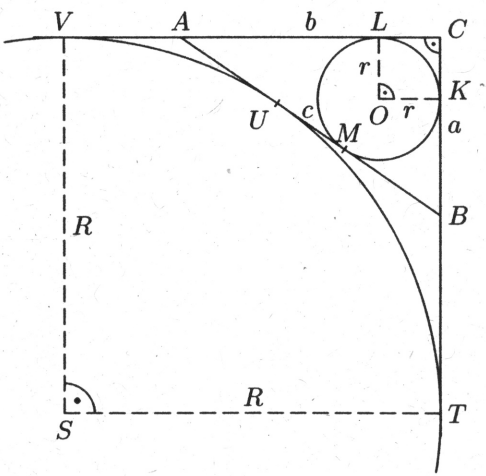
$$B = 1\,000(10p + 10 - p) + 80 = 7(1\,285p + 1\,440) + 5p,$$

což je násobek sedmi jedině pro $p = 7$. Tehdy $q = 3$ a $A = 7\,380$.

Odpověď: Hledaná čísla A jsou 1 080, 6 300, 6 840 a 7 380.

C – I – 6

Pro trojúhelník ABC (obr. 5) platí jednak



Obr. 5

$$a + b + c = (|BK| + r) + (|AL| + r) + c =$$
$$= |BM| + |AM| + 2r + c = c + 2r + c = 2c + 2r,$$

jednak

$$a + b + c = |BC| + |AC| + |AU| + |BU| =$$
$$= (|BC| + |BT|) + (|AC| + |AV|) = 2R.$$

Porovnáním obou rovností dostaneme $c = R - r$.

Uvažujme zvlášť nejprve lichý, potom sudý počet sčítanců.

Pro lichý počet sčítanců požadovaného rozkladu musí platit

$$1\,996 = (s-k) + \big(s-(k-1)\big) + \ldots + \\ + (s-1) + s + (s+1) + \ldots + (s+k),$$

kde s je prostřední sčítanec, a sčítanců je $2k+1$, $k \geqq 1$. Přitom musí být $s > k$. Součet upravíme na tvar

$$2^2 \cdot 499 = 1\,996 = (2k+1)s,$$

odkud vychází jedině $2k+1 = 499$, $s = 4$, což dává $k = 249$. Tento případ není řešením, protože vyšlo $s < k$.

Pro sudý počet sčítanců musí platit analogicky

$$2^2 \cdot 499 = 1\,996 = (s-k) + \ldots + (s-1) + s + (s+1) + \ldots + \\ + (s+k) + (s+k+1) = \\ = (2k+2)s + (k+1) = (k+1)(2s+1),$$

kde s, $s+1$ jsou prostřední sčítance, $k \geqq 0$ a $s > k$. Odtud vychází jedině $2s+1 = 499$, $k+1 = 4$, což dává $s = 249$, $k = 3$.

Tedy jediný rozklad čísla 1 996 na požadovaný součet je

$$1\,996 = 246 + 247 + 248 + 249 + 250 + 251 + 252 + 253.$$

Jiné řešení (pro sudý i lichý počet sčítanců najednou). Hledaný rozklad má tvar

$$1\,996 = p + (p+1) + \ldots + (p+k) = \\ = (k+1)p + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(2p+k)}{2},$$

kde p je první sčítanec; sčítanců je $k+1$, $k \geqq 1$. Musí tedy platit $2^3 \cdot 499 = (k+1)(2p+k)$.

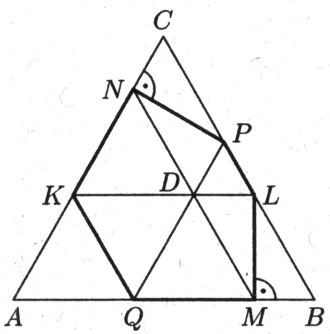
Je-li k sudé, může být jedině $k+1 = 499$, tj. $k = 498$ a $p < 0$, což není možné.

Je-li k liché, může být jedině $k+1=8$, tj. $k=7$, $p=246$, což dává jediné možné řešení

$$1\,996 = 246 + 247 + 248 + 249 + 250 + 251 + 252 + 253.$$

C – S – 2

Trojúhelník PCN je pravoúhlý a $|\sphericalangle PCN| = 60°$, proto $|CN| : |CP| = 1 : 2$ (obr. 6). Analogicky platí i $|MB| : |BL| = 1 : 2$.



Obr. 6

Jelikož $|NC| = |PD| = |PL|$ (trojúhelník LPD je rovnostranný), je

$$|CP| : |PL| : |LB| = 2 : 1 : 2$$

a obdobně

$$|AQ| : |QM| : |MB| = 2 : 2 : 1.$$

Je tedy

$$|AQ| = |AK| = |KQ| = |LB| = |PC| = \tfrac{2}{5}|AB|,$$
$$|MB| = |NC| = \tfrac{1}{5}|AB|.$$

Trojúhelník AQK je rovnostranný a spojením trojúhelníků PCN a LBM shodnými stranami NP a ML dostaneme trojúhelník shodný s trojúhelníkem AQK. Pro příslušné obsahy proto platí

$$S(QMLPNK) = S(ABC) - 2S(AQK) =$$
$$= \tfrac{1}{2}|AB| \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}|AB| - 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{5}|AB| \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \tfrac{2}{5}|AB| =$$
$$= \frac{17\sqrt{3}}{100}|AB|^2,$$
$$\frac{S(QMLPNK)}{S(ABC)} = \frac{\frac{17}{100}\sqrt{3}|AB|^2}{\frac{1}{4}\sqrt{3}|AB|^2} = \frac{17}{25}.$$

C – S – 3

Číslo A je nutně liché (jeho první číslice nemůže být 0, takže je 1), proto při dělení šesti dává zbytek 1, 3 nebo 5 (a tedy při dělení třemi dává po řadě zbytek 1, 0 nebo 2). Proto má zápis čísla A jeden z tvarů

$$11{*}{*}1, \quad 10{*}{*}3, \quad 12{*}{*}5,$$

které je možno s ohledem na dělení pěti upřesnit na

$$11{*}11, \quad 10{*}33, \quad 12{*}05.$$

S ohledem na dělení čtyřmi je tedy A rovno jednomu z čísel

$$11\,311, \quad 10\,133, \quad 12\,105.$$

Zbývá ověřit (např. pomocí ciferného součtu), zda zbytek při dělení třemi skutečně odpovídá druhé číslici zleva. Zjistíme, že tomu tak je pouze u prvního čísla.

Odpověď: Hledané číslo A je jediné: 11 311.

C – II – 1

Číslo n musí být dělitelné čtyřmi, neboť je čtyřnásobkem počtu prvků druhé skupiny. Jestliže do této skupiny zahrneme největší čísla, bude jejich součet

$$S_2 = \left(3 \cdot \frac{n}{4} + 1\right) + \ldots + \left(3 \cdot \frac{n}{4} + \frac{n}{4}\right) =$$
$$= \frac{n}{4} \cdot 3 \cdot \frac{n}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{4} \cdot \left(\frac{n}{4} + 1\right) = \frac{7n^2 + 4n}{32}.$$

V první (početnější) skupině bude pak součet čísel

$$S_1 = 1 + 2 + \ldots + 3 \cdot \frac{n}{4} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{n}{4} \cdot \left(3 \cdot \frac{n}{4} + 1\right) = \frac{9n^2 + 12n}{32}.$$

Jelikož pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $S_1 > S_2$, neexistuje přirozené číslo n, které by splňovalo podmínky úlohy.

C – II – 2

Označme a velikost strany čtverce $ABCD$, x vzdálenost bodu S od strany AD a y vzdálenost bodu S od strany AB. Ze vztahu $|SA| \cdot |SC| = |SB| \cdot |SD|$ plyne

$$\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{(a-x)^2+(a-y)^2} = \sqrt{(a-x)^2+y^2}\sqrt{x^2+(a-y)^2}.$$

Umocněním na druhou, roznásobením a převedením na jednu stranu dostaneme

$$a^2(4xy - 2ax - 2ay + a^2) = 0,$$
$$a^2(2x-a)(2y-a) = 0.$$

Odtud $x = \frac{a}{2}$ nebo $y = \frac{a}{2}$. Této podmínce vyhovují všechny body, které leží na spojnici středů stran AB, CD nebo na spojnici středů stran AD, BC. Snadno se přesvědčíme, že všechny takovéto body S splňují rovnost $|SA| \cdot |SC| = |SB| \cdot |SD|$.

C – II – 3

Platí

$$\overline{abcde} = a \cdot 10^4 + \overline{bcde} = a \cdot 2^4 \cdot 5^4 + \overline{bcde}.$$

Aby bylo číslo $\overline{abcde}$ dělitelné číslem $\overline{bcde}$, musí jím být dělitelné i číslo $a \cdot 2^4 \cdot 5^4$. Protože je $e \neq 0$, musí být $\overline{bcde}$ lichý dělitel čísla $a \cdot 5^4$ (číslo $a \cdot 2^4$ není čtyřciferné ani pro $a = 9$).

Pokud $a = 1$, $a = 2$ nebo $a = 4$, neexistuje žádný takový dělitel. (Největší případný dělitel je $5^4 = 625$, který ale není čtyřciferný.)

Pokud $a = 3$, připadá v úvahu pouze dělitel $3 \cdot 5^4 = 1\,875$. Číslo $\overline{abcde} = 31\,875$ ale není dělitelné číslem 875.

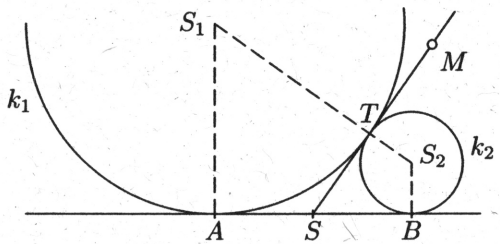
Pokud $a = 5$, připadá v úvahu pouze dělitel $5^5 = 3\,125$. Číslo $\overline{abcde} = 53\,125$ je skutečně dělitelné čísly 125, 25 i 5. (Případy $a > 5$ již není nutné diskutovat.)

Hledané číslo je $\overline{abcde} = 53\,125$.

Poznámka. Ostatní pěticiferná čísla s danou vlastností jsou 91 125, 91 875, 95 625.

C – II – 4

Označme S průsečík uvažované tečny obou hledaných kružnic s přímkou AB. Z vlastností tečen ke kružnici plyne, že je $|SA| = |ST| = |SB|$ (obr. 7), takže bod S je středem úsečky AB. Odtud již snadno plyne *konstrukce.*



Obr. 7

Nejprve sestrojíme střed S úsečky AB, pak najdeme bod T na polopřímce SM takový, že $|ST| = |SA|$. Střed S_1 hledané kružnice k_1 najdeme jako průsečík kolmice k přímce AB v bodě A a kolmice k přímce SM v bodě T. Podobně sestrojíme i střed S_2 kružnice k_2. Sestrojené kružnice k_1 a k_2 zřejmě mají všechny požadované vlastnosti.

Úloha má vždy jedno řešení.

Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

Zjistěte, pro která reálná čísla p má rovnice

$$x^3 + px^2 + 2px = 3p + 1$$

tři různé reálné kořeny x_1, x_2 a x_3 takové, že $x_1 x_2 = x_3^2$. (*J. Šimša*)

B – I – 2

V rovině je dán trojúhelník ABC, v kterém $|\sphericalangle BAC| = 105°$, $|\sphericalangle ABC| = 55°$ a $|AB| = 6\,\text{cm}$. Na straně BC sestrojte body X, Y ($|BX| < |BY|$) a na straně AC body M, N ($|AM| < |AN|$) tak, aby čtyřúhelníky $ABXM$ a $MXYN$ byly tětivové a kružnice jim opsané měly stejný poloměr jako kružnice opsaná trojúhelníku NYC. (*P. Černek*)

B – I – 3

Zvolíme-li libovolně 11 různých dvojciferných čísel, vždy z nich lze vybrat dvě skupiny čísel, které mají stejný počet prvků, neobsahují žádný společný prvek a dávají stejný součet. Dokažte. (*A. Vrba*)

B – I – 4

Číslo $2n^4 + n^3 + 50$ je dělitelné šesti právě pro ta přirozená čísla n, pro která je číslo $2 \cdot 4^n + 3^n + 50$ dělitelné třinácti. Dokažte. (*J. Šimša*)

B – I – 5

Je dán trojboký jehlan $ABCV$, jehož podstavou je rovnostranný trojúhelník ABC s délkou strany a. Přímky AV, BV a CV mají od roviny podstavy stejnou odchylku 45°. Určete poloměr koule, která se dotýká

jak roviny ABC v bodě A, tak přímky VB. (Odchylkou přímky od roviny rozumíme úhel, který přímka svírá se svým kolmým průmětem do této roviny.) (*R. Kollár*)

B – I – 6

Umístěte v rovině 7 navzájem různých bodů a 7 navzájem různých přímek tak, aby každými dvěma z těchto bodů procházela jedna z těchto přímek a aby se každé dvě z těchto přímek protínaly v jednom z těchto bodů. Proveďte diskusi. (*P. Hliněný*)

B – S – 1

Najděte všechna přirozená čísla n, pro která platí: Číslo $1\overbrace{99\ldots96}^{n}$ je dělitelné třinácti. (*A. Vrba, J. Šimša*)

B – S – 2

Do kružnice je vepsán čtverec $ABCD$. Libovolným bodem M úhlopříčky AC je vedena tětiva KL rovnoběžná se stranou AB. Dokažte, že

$$|KM|^2 + |ML|^2 = |AB|^2.$$

(*P. Leischner*)

B – S – 3

Najděte 1 996 navzájem různých celých čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{1996}$ tak, aby mezi součty všech jejich dvojic $a_i + a_j$ $(1 \leqq i < j \leqq 1\,996)$ bylo

a) co nejvíce různých čísel,

b) co nejméně různých čísel. (*R. Kollár*)

B – II – 1

Najděte všechna přirozená čísla n, pro která je číslo $5^n - 3^n + 2$ dělitelné sedmi. (*A. Vrba, J. Šimša*)

B – II – 2

Body dotyku tečen vedených z bodu V ke kružnici k označme A, B. Sestrojte sečnu kružnice k tak, aby procházela bodem V a kružnici k protínala v bodech C, D, kde $|AC| = |BD|$. (*J. Švrček*)

B – II – 3

Dokažte, že rovnice $x^3 - 1\,996x^2 + rx - 1\,995 = 0$ má pro každý reálný koeficient r nanejvýš jeden celočíselný kořen. (*A. Vrba*)

B – II – 4

Trojboký jehlan $ABCV$ má podstavu ABC ($|AB| = 8\,\text{cm}$, $|AC| = |BC| = 5\,\text{cm}$), jeho boční stěny mají od roviny podstavy odchylku 45° a pata P jeho výšky spuštěné z vrcholu V leží uvnitř podstavy. Vypočtěte velikost výšky VP. (Odchylkou dvou rovin rozumíme odchylku přímek, které leží v těchto rovinách a jsou kolmé na jejich průsečnici.)

(*P. Leischner*)

B – I – 1

Využijeme vztahů mezi kořeny a koeficienty mnohočlenu, tzv. Viètových vzorců. Podle nich je

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -p, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= 2p, \\ x_1x_2x_3 &= 3p + 1. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do druhého vztahu za $x_1x_2 = x_3^2$, dostaneme

$$2p = x_3^2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_3(x_1 + x_2 + x_3) = -px_3,$$

a protože $p = 0$ zřejmě nevyhovuje, je $x_3 = -2$.

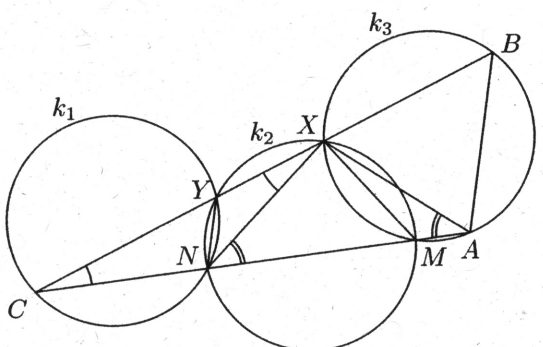
Dále platí

$$4 = x_3^2 = x_1x_2 = \frac{x_1x_2x_3}{x_3} = \frac{3p+1}{-2},$$

odkud $p = -3$. Jen pro toto p tedy může daná rovnice vyhovovat daným podmínkám. Dosadíme-li do Viètových vzorců za x_3 a za p, dopočteme zbývající řešení $x_1 = 4$, $x_2 = 1$ a přesvědčíme se, že je tomu opravdu tak.

B – I – 2

Úlohu vyřešíme pro obecný trojúhelník.



Obr. 8

Rozbor: Předpokládejme, že je úloha vyřešena (obr. 8). Protože NY je tětiva společná kružnicím k_1, k_2, které mají stejný poloměr, a body X,

C leží v opačných polorovinách určených přímkou NY, je $|\sphericalangle NXY| = |\sphericalangle NCY| = \gamma = |\sphericalangle ACB|$. Podobně $|\sphericalangle MAX| = |\sphericalangle MNX| = 2\gamma$ (je totiž $|\sphericalangle MNX| = |\sphericalangle NXC| + |\sphericalangle NCX|$).

Konstrukce: Nejprve sestrojíme na úsečce BC bod X tak, aby $|\sphericalangle CAX| = 2\gamma$. Dále sestrojíme na úsečce AC bod N tak, aby $|\sphericalangle CXN| = \gamma$. Body M, Y můžeme získat analogicky (vyjdeme z bodu B) nebo jako průsečíky kružnic určených trojicemi bodů A, B, X a X, M, N se stranami AC, BC.

Důkaz správnosti konstrukce plyne z toho, že kružnice procházející body A, B, X, M, resp. M, X, N, Y mají společnou tětivu MX a shodné obvodové úhly MAX, MNX. Mají tedy stejný poloměr. Analogicky pro kružnice k_2, k_1.

Diskuse: Bod X lze popsaným způsobem sestrojit, právě když $2\gamma < \alpha$, a bod M, právě když $2\gamma < \beta$. Body N, Y lze pak sestrojit vždy. Nutná a postačující podmínka řešitelnosti úlohy je současná platnost podmínek $2\gamma < \alpha, 2\gamma < \beta$. (Úloha může tedy mít řešení, jen když $\gamma < 36°$.) V našem případě $\alpha = 105°$, $\beta = 55°$, $\gamma = 20°$ jsou podmínky splněny.

Poznámka. Stejným způsobem můžeme řešit obecnější úlohu, která požaduje sestrojit k kružnic stejného poloměru umístěných analogicky jako v úloze pro $k = 3$. Obvodové úhly budou po sobě následovat v posloupnosti $\gamma, 2\gamma, 3\gamma, \ldots, (k-1)\gamma$.

B – I – 3

Dejme tomu, že dvě množiny čísel mají stejný počet prvků a dávají stejný součet. Vynecháme-li z nich všechny společné prvky, dostaneme množiny, které neztratily uvedené dvě vlastnosti a navíc ještě neobsahují žádný společný prvek.

Jedenáctiprvková množina obsahuje $\binom{11}{k}$ k-prvkových podmnožin a toto číslo je největší pro $k = 5$ a $k = 6$: $\binom{11}{5} = \binom{11}{6} = 462$. Přitom součty pěti různých dvojciferných čísel mohou nabývat jen 421 hodnot od $11 + 12 + \ldots + 15 = 65$ do $95 + 96 + \ldots + 99 = 485$. Dvě pětiprvkové podmnožiny se stejným součtem tedy existují pro každou jedenáctiprvkovou množinu dvojciferných čísel.

Poznámka. Kromě elementární kombinatoriky je v úloze využit tzv. Dirichletův princip: Nechť $K > k$. Ať rozdělíme K králíků do k králíkáren jakkoliv, vždy budou v některé králíkárně alespoň dva králíci. V našem případě jsou „králíci" pětiprvkové množiny a „králíkárny" čísla

65, ..., 485. Obecněji: Je-li $K > nk$, bude v některé králíkárně více než n králíků.

B – I – 4

Sestavíme tabulku zbytků při dělení čísel $A = 2n^4 + n^3 + 50$ šesti v závislosti na zbytku čísla n (zbytek při dělení čísla A šesti totiž závisí jen na zbytku při dělení čísla n šesti):

n	n^2	n^3	n^4	$2n^4$	$2n^4 + n^3$	$A = 2n^4 + n^3 + 50$
0	0	0	0	0	0	2
1	1	1	1	2	3	5
2	4	2	4	2	4	0
3	3	3	3	0	3	5
4	4	4	4	2	0	2
5	1	5	1	2	1	3

Z tabulky vidíme, že číslo A je násobkem šesti, právě když číslo n dává při dělení šesti zbytek rovný 2, tj. je rovno jednomu z čísel 2, 8, 14, 20, ...

Nyní sestavíme tabulku zbytků při dělení několika prvních čísel $B = 2 \cdot 4^n + 3^n + 50$ třinácti. (Na rozdíl od výrazu A, který je mnohočlenem, se ve výrazu B vyskytuje proměnná n i v exponentu. Nelze proto říci, že zbytek při dělení čísla B třinácti závisí na zbytku při dělení čísla n třinácti. Až při sestavování tabulky se ukáže, s jakou periodou se zbytky opakují.)

n	3^n	4^n	$2 \cdot 4^n$	$2 \cdot 4^n + 3^n$	$B = 2 \cdot 4^n + 3^n + 50$
0	1	1	2	3	1
1	3	4	8	11	9
2	9	3	6	2	0
3	1	12	11	12	10
4	3	9	5	8	6
5	9	10	7	3	1
6	1	1	2	3	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

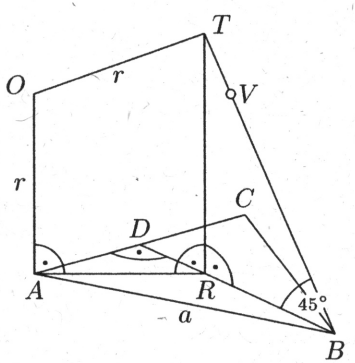
Další výpočty už nemusíme provádět. Vidíme totiž, že zbytky mocnin 3^n a 4^n se vzhledem k číslu n opakují se společnou periodou rovnou šesti (u mocnin 3^n existuje dokonce menší perioda rovna třem). Proto

i posloupnost zbytků čísel B má periodu 6. Navíc je z tabulky patrno, že B je násobkem třinácti, právě když číslo n dává při dělení šesti zbytek 2, tj. je rovno jednomu z čísel 2, 8, 14, 20, ...

Poznámka: Periodicitu v posloupnosti zbytků při dělení mocnin a^k číslem d přesněji postihují Fermatova a Eulerova věta. Podle Fermatovy věty je v případě, kdy d je prvočíslo, délka periody rovna některému děliteli čísla $d-1$.

B – I – 5

Situaci znázorňuje obr. 9, v němž T je bod dotyku tečny BV, O je střed koule, $|AB| = |BC| = |AC| = 2|AD| = a$, R kolmý průmět bodu T do roviny ABC, $|BT| = |BA| = a$ (tečny), $|TR| = |BR| = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Hledaný poloměr r vypočteme z pravoúhlého lichoběžníku $ARTO$, jehož stranu $|AR|$ vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku ADR, ve kterém známe $|AD| = \frac{1}{2}a$, $|DR| = |BD| - |BR| = \frac{1}{2}a\sqrt{3} - \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Vyjde $|AR|^2 = \frac{1}{2}a^2(3-\sqrt{6})$, $r = \frac{1}{2}a(2\sqrt{2}-\sqrt{3})$.



Obr. 9

B – I – 6

Budeme mluvit jen o umísťovaných bodech a přímkách. Ze 7 bodů lze utvořit 21 dvojic a ty leží na 7 přímkách. Mohou tedy nastat jen dva případy:

(1) Na každé přímce leží právě 3 dvojice bodů, tj. právě 3 body.

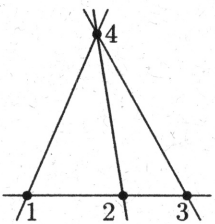
(2) Na některé z přímek leží více než 3 dvojice bodů, tj. více než 3 body.

Pokusme se nejprve vytvořit konfiguraci 7 bodů a 7 přímek typu (1): Zvolme přímku a na ní tři body 1, 2, 3. Dále zvolíme bod 4 — ten musí ležet mimo přímku 12 (obr. 10). Sestrojíme přímky 14, 24 a 34. Na přímce 24 leží ještě jeden bod 5. Můžeme ho zvolit

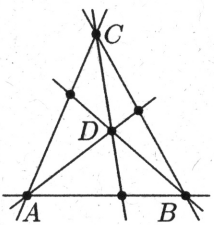
(a) uvnitř úsečky 24,

(b) uvnitř polopřímky opačné k 42,

(c) uvnitř polopřímky opačné k 24.

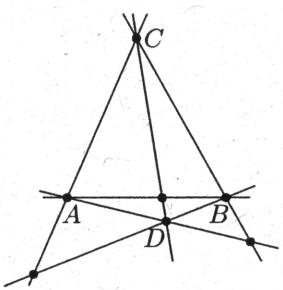


Obr. 10



Obr. 11

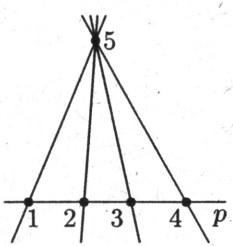
Doplníme přímky 15 a 35 a jejich průsečíky s přímkami 14, resp. 34. V případech (a), (b) dojdeme vždy ke konfiguraci jako na obr. 11. V případě (c) může ještě nastat několik různých situací podle toho, kam padne průsečík přímek 15, 34 a průsečík přímek 35, 14, vždy však vedou ke konfiguraci jako na obr. 12.



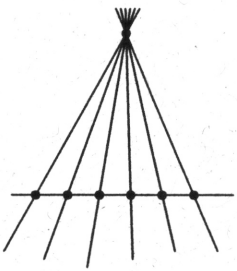
Obr. 12

Do každé z těchto dvou konfigurací obsahující 7 bodů a 6 přímek zbývá doplnit sedmou přímku tak, aby procházela právě třemi body. Každý z bodů A, B, C, D je již spojen s každým ze šesti ostatních bodů, sedmá přímka tedy musí procházet třemi body neoznačenými písmeny. Ty však neleží v přímce, takže žádná konfigurace typu (1) neexistuje.

Přistoupíme k vytvoření konfigurace typu (2). Vyjdeme od přímky p, na níž leží 4 body. Všech 7 bodů na ní ležet nemůže (to bychom neměli 7 různých přímek), zvolme tedy pátý bod mimo tuto přímku (obr. 13). Kdyby další bod ležel mimo přímku p, určoval by spolu s předchozími body 3 nebo 5 přímek, což není možné.



Obr. 13



Obr. 14

Zbývající dva body tedy leží také na přímce p. Úloze vyhovuje jedině konfigurace z obr. 14.

Poznámka. Celý důkaz můžeme provést i duálním způsobem: v textu všude vzájemně vyměníme přímky a body, průsečíky přímek a spojnice bodů.

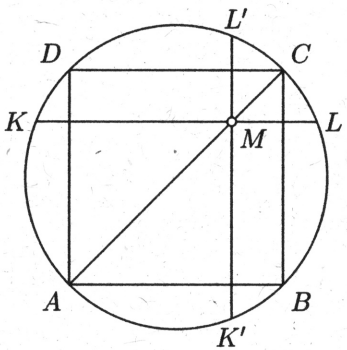
B – S – 1

Vzhledem k tomu, že $\underbrace{199\ldots96}_{n} = 2(10^{n+1} - 2)$, je toto číslo dělitelné třináct, právě když 10^{n+1} dává při dělení třináct zbytek 2. Při dělení čísel 1, 10, 100, ... třináct však dostáváme zbytky 1, 10, 9, 12, 3, 4, 1, ... (dále se zbytky periodicky opakují). Žádné z daných čísel tedy není dělitelné třináct.

Jiné řešení. Dělíme-li číslo 199...9 třináct obvyklým způsobem, sepisujeme postupně zbytky 6, 4, 10, 5, 7, 1, 6, ... (dále se zbytky periodicky opakují). Poslední krok při dělení čísla 1999...6 třináct spočívá tedy v tom, že třináct vydělíme některé z čísel 66, 46, 106, 56, 76 nebo 16. Žádné z nich však není dělitelné třináct beze zbytku.

B – S – 2

Bodem M veďme ještě tětivu $K'L' \parallel BC$ (obr. 15). Zřejmě je $|KD| =$



Obr. 15

$= |LC| = |L'C|$, takže $|KL'| = |DC|$ (úsečka DC je obraz úsečky KL' v otočení kolem středu kružnice). Je tedy

$$|AB|^2 = |CD|^2 = |KL'|^2 = |KM|^2 + |ML'|^2 = \\ = |KM|^2 + |ML|^2.$$

B – S – 3

Existuje právě $\frac{n(n-1)}{2}$ dvojic indexů i, k takových, že $1 \leqq i < k \leqq$ $\leqq n$. Pro žádných n čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ neexistuje tedy více než $\frac{n(n-1)}{2}$ různých součtů $a_i + a_k$. Na druhé straně, je-li $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, je $a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < \ldots < a_1 + a_n < a_2 + a_n < \ldots < a_{n-1} + a_n$, a tedy mezi součty $a_i + a_k$ je vždy alespoň $2n - 3$ různých součtů. Krajní možnosti nastávají např. pro následující n-tice čísel

a) $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n$,

b) $1, 2, 3, \ldots, n$.

V našem případě je $n = 1\,996$.

B – II – 1

Sestavíme tabulku zbytků při dělení čísel 3^n, 5^n, $5^n - 3^n + 2$ sedmi:

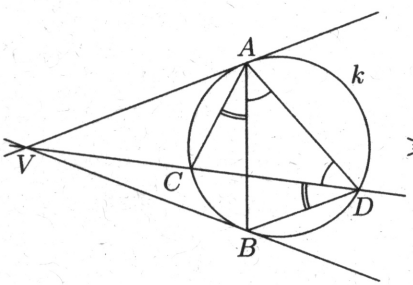
n	0	1	2	3	4	5	6	...
3^n	1	3	2	6	4	5	1	...
5^n	1	5	4	6	2	3	1	...
$5^n - 3^n + 2$	2	4	4	2	0	0	2	...

(Šestice zbytků ve všech třech řádcích se dále periodicky opakují.)

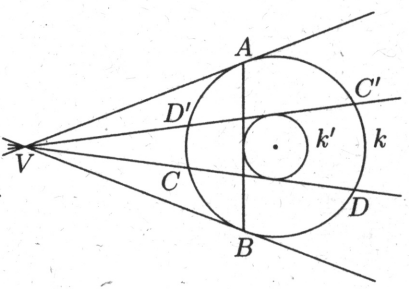
Vidíme, že hledaná přirozená čísla n jsou právě ta, která při dělení šesti dávají zbytek 4 nebo 5, tj. čísla tvaru $n = 6k + 4$ a $n = 6k + 5$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

B – II – 2

Rozbor (obr. 16): Je-li $|AC| = |BD|$, platí pro odpovídající obvodové úhly $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle ADC|$. Dále je $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CDB|$, takže $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle ADB|$ a pro příslušné tětivy je $|CD| = |AB|$.



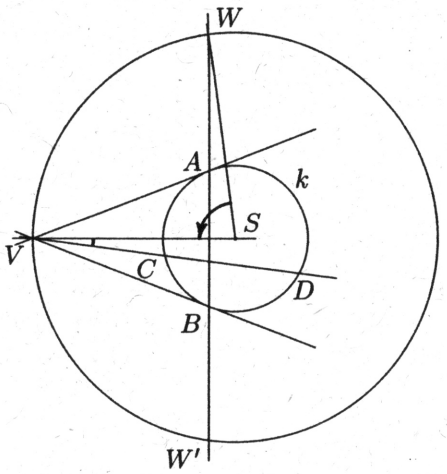
Obr. 16



Obr. 17

Konstrukce 1 (obr. 17): Sestrojíme kružnici k', která je soustředná s kružnicí k a dotýká se tětivy AB. Hledaná sečna kružnice k je tečnou kružnice k' vedenou z bodu V.

Konstrukce 2 (obr. 18): Hledanou sečnu procházející bodem V dostaneme jako obraz přímky AB ve vhodném otočení kolem středu S kružnice k: Sestrojíme kružnici se středem S a poloměrem $|SV|$, její průsečíky s přímkou AB označíme W, W'. Úhel otočení je pak $\sphericalangle WSV$, resp. $\sphericalangle W'SV$ a $|\sphericalangle SVC| = 90° - |\sphericalangle WSV|$.

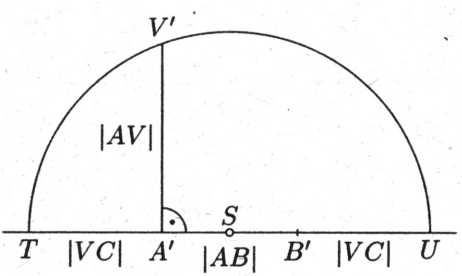


Obr. 18

Konstrukce 3: Využijeme mocnost bodu V ke kružnici k. Předpokládejme, že $|VC| \leqq |VD|$, potom je (obr. 19)

$$|VA|^2 = |VC| \cdot |VD| = |VC|(|VC| + |CD|) =$$
$$= |VC|(|VC| + |AB|).$$

Sestrojíme pravoúhlý trojúhelník $A'B'V'$ s odvěsnami $|A'B'| = |AB|$, $|A'V'| = |AV|$. Střed strany $A'B'$ označme S a průsečíky kružnice $(S, |SV'|)$ s přímkou $A'B'$ označme T, U tak, aby $|TA'| < |UA'|$. Pak je $|TA'| = |VC|$.



Obr. 19

DŮKAZ. Podle Eukleidovy věty o výšce je

$$|V'A'|^2 = |TA'| \cdot |A'U| = |TA'|(|A'B'| + |B'U|) =$$
$$= |TA'|(|A'B'| + |TA'|),$$

tj.

$$|VA|^2 = |TA'|(|TA'| + |AB|).$$

Pro $|VC| > |VD|$ postupujeme obdobně. Přitom zjistíme, že v tomto případě vyjde $|VC| = |UA'|$.

Konstrukce 4 (podle prof. *Málka* z gymnázia Kyjov): Úsečky AB a CD jsou souměrně sdružené podle některé přímky, jež prochází středem S kružnice k. Obraz W bodu V v příslušné osové souměrnosti najdeme jako průsečík přímky AB s kružnicí o středu S a poloměru $|SV|$. Body C a D pak sestrojíme jako obrazy bodu A a B v osové souměrnosti podle osy úsečky VW.

Úloha má vždy dvě řešení.

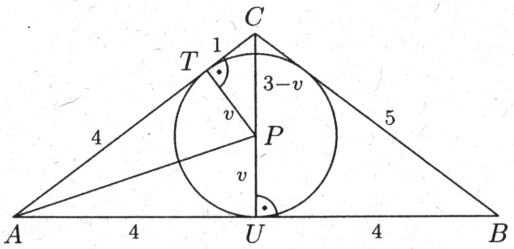
B – II – 3

Připusťme, že pro některé číslo r má daná rovnice dva celočíselné kořeny a, b. Dělení levé strany rovnice mnohočlenem $(x-a)(x-b)$ vyjde beze zbytku a výsledný podíl bude tvaru $x - c$ pro vhodné reálné číslo c. Číslo c musí být ovšem celé, neboť $a + b + c = 1\,996$. Všechna tři čísla a, b, c nemohou být lichá, když je jejich součet sudý. Jejich součin je však liché číslo 1 995, což není možné. Rovnice může mít tedy nanejvýš jeden celočíselný kořen.

B – II – 4

Označme U patu výšky z vrcholu V ve stěně ABV. Protože $VU \perp AB$ a $VP \perp AB$, je přímka AB kolmá na rovinu VUP, takže je také $PU \perp AB$. Je tedy $|\sphericalangle VUP| = 45°$ a trojúhelník VUP je pravoúhlý a rovnoramenný s rameny VU, VP, takže $v = |VP| = |PU|$. Zopakujeme-li stejnou úvahu i pro boční stěny BCV a CAV, zjistíme, že bod P je středem kružnice vepsané podstavě ABC a velikost v výšky VP její poloměr. Úlohu jsme tak převedli na výpočet poloměru kružnice vepsané trojúhelníku ABC (obr. 20). Z pravoúhlého trojúhelníku CUB dostaneme $|CU| = 3$ a v pravoúhlém trojúhelníku PTC pak máme $|CT| = 1$ (je

$|CT| = |CA| - |AT| = |CA| - |AU|$), $|PT| = v$ a $|CP| = 3 - v$, odkud $1 + v^2 = (3 - v)^2$, takže $v = \frac{4}{3}$.



Obr. 20

Kategorie A

Texty úloh

A – I – 1

Sloupce šachovnice 8×8 označme zleva doprava čísly $1, 2, \ldots, 8$, řádky označme stejnými čísly zdola nahoru. Do každého políčka zapíšeme součet čísel příslušného řádku a sloupce. Vybereme 8 polí tak, aby žádná dvě z nich nebyla ani ve stejném řádku, ani ve stejném sloupci. Jaký je

a) největší možný součet,

b) největší možný součin,

c) nejmenší možný součet druhých mocnin

čísel na vybraných polích? (*J. Zhouf*)

A – I – 2

Na stranách AB, BC a CA daného trojúhelníka ABC jsou zvoleny po řadě body K, L a M tak, že platí

$$0 < \frac{|AK|}{|AB|} = \frac{|BL|}{|BC|} = \frac{|CM|}{|CA|} < 1.$$

Dokažte, že pokud je trojúhelník KLM rovnostranný, pak je rovnostranný i trojúhelník ABC. (*J. Šimša*)

A – I – 3

Posloupnost přirozených čísel a_1, a_2, a_3, ... splňuje pro každé přirozené $n \geqq 1$ tři rovnosti:

$$a_n + a_{2n} = a_{3n},$$
$$a_n + a_{3n-1} = a_{2n} + a_{2n-1},$$
$$a_n + a_{3n+1} = a_{2n} + a_{2n+1}.$$

Přitom víme, že všechny čtyři členy a_1, a_{14}, a_{17} a a_{21} jsou prvočísla. Dokažte rovnost $a_{1995} = a_{2000}$. (*J. Šimša*)

A – I – 4

Dokažte, že pokud pro přirozená čísla a, b je i číslo

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$$

přirozené, pak pro největší společný dělitel D čísel a, b platí nerovnost $D \leqq \sqrt{a+b}$. Může nastat rovnost v případě, že $D < a < b$?

(*převzatá úloha*)

A – I – 5

Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ splňující pro každá $x, y \in \mathbb{N}$ rovnost

$$f(xy) = f(x) + f(y) - f\big(D(x,y)\big),$$

kde $D(x,y)$ značí největší společný dělitel čísel x, y, víte-li, že platí $f(p) = p$ pro každé prvočíslo p. (*P. Hliněný*)

A – I – 6

V prostoru je dán trojúhelník ABC se stranami $|AB| = |AC| = 10\,\text{cm}$ a $|BC| = 12\,\text{cm}$. Najděte množinu všech bodů D, pro které spojnice středu O koule opsané čtyřstěnu $ABCD$ s těžištěm T tohoto čtyřstěnu je přímka kolmá na rovinu ADT. (*P. Leischner*)

A – S – 1

Najděte všechny dvojice celých čísel a, b takových, že obě čísla

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}, \qquad \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}$$

jsou celá. (*R.Kollár*)

A – S – 2

Najděte největší reálné číslo q, pro které nerovnost $2^n \geqq 1 + nq^n$ platí pro každé přirozené číslo $n \geqq 2$. (*J.Šimša*)

A – S – 3

Popište konstrukci rovnoramenného trojúhelníku ABC se základnou AB, pro který platí $|OA| = 9\,\text{cm}$ a $|OB| = 3\,\text{cm}$, kde O je střed kružnice

připsané straně BC trojúhelníku ABC (tj. kružnice, která se vně dotýká strany BC a prodloužení stran AB a AC). (*A. Vrba*)

A – II – 1

Určete, pro která přirozená čísla n existuje liché n-ciferné číslo, které je dělitelné třinácti a má ciferný součet rovný čtyřem. (*J. Šimša*)

A – II – 2

Dané jsou dvě kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$, $r_1 < r_2$, které se vně dotýkají v bodě F. Nechť t je jejich společná vnější tečna, její body dotyku s kružnicemi k_1, k_2 označme po řadě A, B. Veďme teď jinou tečnu ke kružnici k_1 rovnoběžnou s přímkou t. Její dotykový bod s kružnicí k_1 označme C a průsečíky s kružnicí k_2 označme D, E. Dokažte, že bod F a středy kružnic opsaných trojúhelníkům ABC a ADE leží na jedné přímce. (*M. Niepel*)

A – II – 3

V rovině je dána úsečka AB. Najděte všechny body C této roviny takové, že pro střed O kružnice opsané trojúhelníku ABC a jeho těžiště T platí: $O \neq T$, $OT \perp CT$. (*M. Engliš*)

A – II – 4

Děti se v táboře dělily do družin následujícím způsobem: Vedoucí určil mezi dětmi několik náčelníků. Každý náčelník si pak do své družiny vzal všechny své kamarády z tábora (kamarádství je vzájemné). Kupodivu to vyšlo *dobře*, tedy tak, že se náčelníci nemuseli o žádné dítě hádat, žádné dítě nezbylo a žádní dva náčelníci nebyli kamarádi. Podruhé určil vedoucí jiný počet náčelníků. Mohlo rozdělení dětí popsaným způsobem opět dopadnout *dobře*? (*P. Hliněný*)

A – III – 1

Jestliže pro posloupnost $\big(G(n)\big)_{n=0}^{\infty}$ celých čísel platí

$$G(0) = 0,$$
$$G(n) = n - G\big(G(n-1)\big) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

potom

a) pro každé přirozené číslo k je $G(k) \geqq G(k-1)$;

b) neexistuje přirozené číslo k takové, že $G(k-1) = G(k) = G(k+1)$.

Dokažte. (*M. Engliš*)

A – III – 2

V prostoru je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s výškami AP, BQ a CR. Dokažte, že pro každý vnitřní bod V trojúhelníku PQR existuje čtyřstěn $ABCD$ takový, že bod V má ze všech bodů stěny ABC největší vzdálenost (po povrchu čtyřstěnu) od bodu D. (*P. Černek, J. Šimša*)

A – III – 3

Je dáno šest tříprvkových podmnožin konečné množiny X. Dokažte, že prvky množiny X je možno obarvit dvěma barvami tak, aby žádná ze šesti daných podmnožin nebyla jednobarevná, tj. neměla všechny tři prvky stejné barvy. (*P. Hliněný*)

A – III – 4

Je dán ostrý úhel XCY a na jeho ramenech CX, CY po řadě body A a B tak, že $|CX| < |CA| = |CB| < |CY|$. Popište konstrukci přímky, která protíná rameno CX a úsečky AB, BC po řadě v bodech K, L a M tak, že platí

$$|KA| \cdot |YB| = |XA| \cdot |MB| = |LA| \cdot |LB| \neq 0.$$

(*P. Černek*)

A – III – 5

Pro která celá čísla k existuje funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ splňující

(i) $f(1\,995) = 1\,996$,

(ii) $f(xy) = f(x) + f(y) + k \cdot f\big(D(x,y)\big)$ pro všechna přirozená čísla x, y?

$D(x,y)$ označuje největší společný dělitel čísel x, y. (*P. Hliněný*)

A – III – 6

Na stranách AB, BC a CA daného trojúhelníku ABC jsou dány po řadě body K, L a M tak, že platí

$$\frac{|AK|}{|AB|} = \frac{|BL|}{|BC|} = \frac{|CM|}{|CA|} = \frac{1}{3}.$$

Jsou-li kružnice opsané trojúhelníkům AKM, BLK a CML shodné, jsou shodné i kružnice těmto třem trojúhelníkům vepsané. Dokažte.

(*J. Šimša*)

A – I – 1

a) Ukážeme, že celkový součet vybraných čísel nezávisí na způsobu jejich výběru. Každé číslo v tabulce je součtem čísla řádku a sloupce, v němž je zapsáno, proto je celkový součet čísel roven součtu čísel sloupců plus součet čísel řádků, v nichž jsou zapsána. Protože z každého sloupce a z každého řádku vybíráme právě jedno číslo, bude celkový součet vždy roven součtu čísel všech sloupců plus součet čísel všech řádků. Oba součty jsou však rovny součtu přirozených čísel $1, 2, \ldots, 8$, proto je součet vybraných čísel roven

$$1 + 2 + \ldots + 8 + 1 + 2 + \ldots + 8 = 72,$$

a tento součet nezávisí na způsobu výběru čísel, je to tedy i součet maximální.

b) Označme a_1 číslo řádku, v němž je číslo vybrané z prvého sloupce. Podobně označme a_2 číslo řádku, v němž je číslo vybrané z druhého sloupce. Takto pro $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ označíme a_i číslo řádku, v němž je číslo vybrané z i-tého sloupce. Součin vybraných čísel je pak roven

$$(1 + a_1)(2 + a_2) \cdot \ldots \cdot (8 + a_8), \tag{1}$$

kde $a_1, \ldots, a_8$ je nějaká permutace čísel $1, 2, \ldots, 8$. Maximální hodnotu tohoto výrazu můžeme určit více způsoby.

Protože máme jen konečný počet možností výběru čísel $a_1, a_2, \ldots, a_8$, maximum uvažovaného výrazu zřejmě existuje. Ukážeme, že součin (1) je maximální, jestliže $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_8$, neboli $a_1 = 8$, $a_2 = 7$, …, $a_8 = 1$. Nechť například $a_i < a_j$ pro $i < j$. Součin ostatních výrazů $k + a_k$ se nezmění, vyměníme-li navzájem a_i a a_j. Dokážeme, že takovouto výměnou se zvětší hodnota $(i + a_i)(j + a_j)$, a tedy i celkový součin:

$$\begin{aligned}
(i + a_i)(j + a_j) &< (j + a_i)(i + a_j), \\
ij + ia_j + ja_i + a_i a_j &< ji + ja_j + ia_i + a_i a_j, \\
j(a_i - a_j) + i(a_j - a_i) &< 0, \\
(i - j)(a_j - a_i) &< 0.
\end{aligned}$$

Ale $i - j < 0$ a zároveň $a_j - a_i > 0$, tj. záměnou čísel a_i a a_j se hodnota výrazu zvětšila, proto vzrostl i celý součin. Daný výraz bude tudíž maximální pro $a_1 = 8$, $a_2 = 7$, …, $a_8 = 1$, kdy je roven 9^8.

Jiný postup. Protože čísla $i + a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ jsou nezáporná, můžeme použít nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem této osmice čísel:

$$\sqrt[8]{(a_1+1)(a_2+2)\cdot\ldots\cdot(a_8+8)} \leqq \\ \leqq \frac{(a_1+1)+(a_2+2)+\ldots+(a_8+8)}{8}.$$

Ale z části a) už víme, že součet $(a_1 + 1) + (a_2 + 2) + \ldots + (a_8 + 8)$ je roven 72 pro každý výběr čísel a_i. Proto platí:

$$(a_1+1)(a_2+2)\cdot\ldots\cdot(a_8+8) \leqq \left(\frac{72}{8}\right)^8 = 9^8.$$

Protože rovnost v této nerovnosti nastává, právě když je všech osm čísel stejných, bude součin největší pro $a_1 + 1 = a_2 + 2 = \ldots = a_8 + 8 = \frac{72}{8}$. To však nastane jen pro $a_1 = 8$, $a_2 = 7$, ..., $a_8 = 1$. Uvažovaný součin je pak roven 9^8. Maximální součin vybraných čísel dostaneme proto v případě, že vybereme čísla na úhlopříčce vedoucí z levého horního do pravého dolního rohu.

c) Použijeme stejné označení jako v části b). Minimalizujeme hodnotu výrazu

$$(a_1+1)^2 + (a_2+2)^2 + \ldots + (a_8+8)^2. \tag{2}$$

Po roznásobení (2) dostaneme

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_8^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + 8^2 + 2(a_1 + 2a_2 + \ldots + 8a_8).$$

Protože součet $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_8^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + 8^2$ nezávisí na pořadí $a_1, a_2, \ldots, a_8$, potřebujeme minimalizovat výraz $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + 8a_8$. O tom, že tento výraz je nejmenší právě pro $a_1 = 8$, $a_2 = 7$, ..., $a_8 = 1$, se můžeme přesvědčit více způsoby. Můžeme např. použít Čebyševovu nerovnost, anebo podobné úvahy jako v části b) 1. postupu:

Stačí uvážit, že pokud není $a_1 > a_2 > \ldots > a_8$, musí pro nějaké $i, j \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ platit $a_i > a_j$ a zároveň $i > j$. Výměnou hodnot a_i a a_j však dostaneme

$$ia_i + ja_j > ja_i + ia_j,$$
$$(j-i)(a_j - a_i) > 0,$$

neboli

$$1a_1 + \ldots + ja_j + \ldots + ia_i + \ldots + 8a_8 > \\ > 1a_1 + \ldots + ja_i + \ldots + ia_j + \ldots + 8a_8,$$

a proto takováto volba nemůže být nejlepší. Je tedy

$$(a_1 + 1)^2 + (a_2 + 2)^2 + \ldots + (a_8 + 8)^2 \geqq 648,$$

přičemž rovnost nastane jen pro $a_1 = 8$, $a_2 = 7$, $\ldots$, $a_8 = 1$.

Jiný postup. Z nerovnosti mezi kvadratickým a aritmetickým průměrem pro čísla $a_1 + 1, a_2 + 2, \ldots, a_8 + 8$ dostáváme, že

$$\frac{(a_1 + 1)^2 + (a_2 + 2)^2 + \ldots (a_8 + 8)^2}{8} \geqq \\ \geqq \left(\frac{(a_1 + 1) + (a_2 + 2) + \ldots + (a_8 + 8)}{8}\right)^2 = 81, \\ (a_1 + 1)^2 + (a_2 + 2)^2 + \ldots (a_8 + 8)^2 \geqq 648,$$

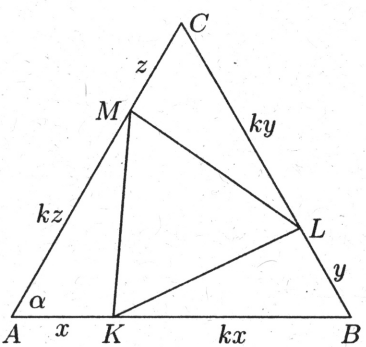
kde rovnost nastane, jen když se budou rovnat čísla $a_1 + 1$, $a_2 + 2$, $\ldots$, $a_8 + 8$, neboli pro $a_1 = 8$, $a_2 = 7$, $\ldots$, $a_8 = 1$ stejně jako v části b).

A – I – 2

Vzhledem k dané rovnosti poměrů

$$0 < \frac{|AK|}{|AB|} = \frac{|BL|}{|BC|} = \frac{|CM|}{|CA|} = \frac{1}{k+1} < 1$$

($k > 0$), můžeme zavést následující označení: $|AK| = x$, $|KB| = kx$, $|BL| = y$, $|LC| = ky$, $|CM| = z$, $|MA| = kz$ (obr. 21).



Obr. 21

Použijeme dvakrát kosinovou větu:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB||AC|\cos\alpha,$$
$$|KM|^2 = |AK|^2 + |AM|^2 - 2|AK||AM|\cos\alpha$$

a vyloučíme $\cos\alpha$. Použitím zavedeného označení dostaneme

$$|MK|^2 = x^2(1-k) + y^2k + z^2(k^2-k);$$

analogicky

$$|KL|^2 = y^2(1-k) + z^2k + x^2(k^2-k),$$
$$|LM|^2 = z^2(1-k) + x^2k + y^2(k^2-k).$$

Protože $|MK| = |KL|$, musí platit

$$x^2(1-k^2) + y^2(2k-1) + z^2(k^2-2k) = 0. \tag{1}$$

Podobně z rovností $|KL| = |LM|$, $|LM| = |MK|$ vyjde

$$y^2(1-k^2) + z^2(2k-1) + x^2(k^2-2k) = 0, \tag{2}$$
$$z^2(1-k^2) + x^2(2k-1) + y^2(k^2-2k) = 0. \tag{3}$$

Vyloučením z^2 z rovnic (1) a (2) dostaneme

$$(x^2-y^2)(k^2-k+1)^2 = 0.$$

Protože rovnice $k^2-k+1=0$ nemá žádný reálný kořen a $x, y > 0$, plyne odtud, že $x = y$. Analogicky z rovnic (2) a (3) dostaneme $y = z$. Je tedy $x = y = z$, a tudíž i $|AB| = |BC| = |CA|$.

Jiné řešení. Označme obsahy trojúhelníků MAK, KBL, LCM a ABC po řadě S_A, S_B, S_C a S. Potom

$$S_A = \frac{1}{2}\, x \cdot kz \cdot \sin\alpha =$$
$$= \frac{1}{2}\, \frac{k}{(k+1)^2} \cdot (k+1)x \cdot (k+1)z \cdot \sin\alpha = \frac{k}{(k+1)^2}\, S.$$

Analogicky je

$$S_B = \frac{k}{(k+1)^2} S \quad \text{a} \quad S_C = \frac{k}{(k+1)^2} S,$$

tj. $S_A = S_B = S_C$. Protože trojúhelníky MAK, KBL, LCM mají stejný obsah a $|MK| = |KL| = |LM|$, mají shodné výšky na strany MK, KL, LM.

Veďme body A, B, C po řadě rovnoběžky XY, YZ, ZX s přímkami MK, KL, LM. Především trojúhelník XYZ je rovnostranný (neboť trojúhelník KLM je rovnostranný). Z předcházejícího vyplývá, že body K, L, M jsou stejně vzdálené od příslušných stran trojúhelníku XYZ, a leží tedy na osách příslušných úhlů. Proto můžeme zavést následující označení (osa úhlu rozděluje protilehlou stranu trojúhelníku v poměru přilehlých stran):

$$|AY| = s,\ |YB| = ks,\ |BZ| = t,$$
$$|ZC| = kt,\ |CX| = u,\ |XA| = ku.$$

Z rovností $|XY| = |YZ| = |ZX|$ pak plyne, že $ku + s = ks + t = kt + u$. Řešením této soustavy dostaneme $s = t = u$. Trojúhelníky AYB, BZC, CXA jsou tedy shodné (podle věty sus) a $|AB| = |BC| = |CA|$.

Jiné řešení. Zvolme na stranách KL, LM, MK po řadě body D, E, F tak, aby platilo

$$\frac{|LD|}{|DK|} = \frac{|ME|}{|EL|} = \frac{|KF|}{|FM|} = \frac{|AK|}{|KB|} = m.$$

Protože trojúhelník KLM je rovnostranný, je rovnostranný i trojúhelník DEF. Nechť d_A, d_K, d_M, d_D, d_E jsou postupně vzdálenosti bodů A, K, M, D, E od přímky BC. Z daných poměrů pak vyplývá, že

$$d_K = \frac{1}{m+1}\,d_A, \quad d_M = \frac{m}{m+1}\,d_A,$$
$$d_D = \frac{m}{m+1}\,d_K, \quad d_E = \frac{1}{m+1}\,d_M.$$

Odtud plyne, že $d_D = d_E = \dfrac{m}{(m+1)^2}\,d_A$, takže ED a BC jsou rovnoběžné. Analogicky se dokáže, že i dvojice EF, CA a FD, AB jsou rovnoběžné. Trojúhelník ABC je tedy rovnostranný.

Přepíšeme-li dané rekurentní vztahy na tvar

$$a_{3n} = a_n + a_{2n},$$
$$a_{3n+1} = a_{2n} + a_{2n+1} - a_n,$$
$$a_{3n-1} = a_{2n} + a_{2n-1} - a_n,$$

vidíme, že daná posloupnost je jednoznačně určená svými prvními dvěma členy. Nechť $a_1 = r$, $a_2 = s$. Přímým výpočtem dostaneme

$$a_3 = r + s,\ a_5 = r + 2s,\ a_7 = r + 3s,\ \ldots,$$
$$a_{17} = r + 8s,\ \ldots,\ a_{21} = r + 10s,\ \ldots,$$
$$a_4 = 2s,\ a_6 = 3s,\ a_8 = 4s,\ \ldots,\ a_{14} = 7s,\ \ldots$$

Protože $a_{14} = 7s$ je prvočíslo, musí být $s = 1$, a protože čísla $a_1 = r$, $a_{17} = r + 8s$, $a_{21} = r + 10s$ jsou prvočísla, která dávají při dělení třemi různé zbytky, je jedno z nich dělitelné třemi, takže $r = 3$. Nyní můžeme (i když poněkud zdlouhavě) pokračovat v postupném používání rekurentních vztahů až do výpočtu $a_{1\,995}$, $a_{2\,000}$.

Lepší ovšem je všimnout si po výpočtu několika prvních členů dané posloupnosti, že patrně pro každé přirozené k platí

$$a_{2k+1} = r + ks,$$
$$a_{2k} = ks;$$

díky již zmíněné jednoznačnosti stačí ověřit, že každá takto definovaná posloupnost splňuje rekurentní vztahy ze zadání.

a) n je sudé tvaru $n = 2k$:

$$a_n + a_{2n} = a_{2k} + a_{4k} = ks + 2ks = 3ks,$$
$$a_{3n} = a_{6k} = 3ks,$$
$$a_n + a_{3n-1} = a_{2k} + a_{6k-1} = ks + r + (3k - 1)s =$$
$$= r + (4k - 1)s,$$
$$a_{2n} + a_{2n-1} = a_{4k} + a_{4k-1} = 2ks + r + (2k - 1)s =$$
$$= r + (4k - 1)s,$$
$$a_n + a_{3n+1} = a_{2k} + a_{6k+1} = ks + r + 3ks = r + 4ks,$$
$$a_{2n} + a_{2n+1} = a_{4k} + a_{4k+1} = 2ks + r + 2ks = r + 4ks.$$

b) n je liché tvaru $n = 2k + 1$:

$$\begin{aligned}
a_n + a_{2n} &= a_{2k+1} + a_{4k+2} = r + ks + (2k+1)s = \\
&= r + (3k+1)s, \\
a_{3n} &= a_{6k+3} = r + (3k+1)s, \\
a_n + a_{3n-1} &= a_{2k+1} + a_{6k+2} = r + ks + (3k+1)s = \\
&= r + (4k+1)s, \\
a_{2n} + a_{2n-1} &= a_{4k+2} + a_{4k+1} = (2k+1)s + r + 2ks = \\
&= r + (4k+1)s, \\
a_n + a_{3n+1} &= a_{2k+1} + a_{6k+4} = r + ks + (3k+2)s = \\
&= r + (4k+2)s, \\
a_{2n} + a_{2n+1} &= a_{4k+2} + a_{4k+3} = \\
&= (2k+1)s + r + (2k+1)s = r + (4k+2)s.
\end{aligned}$$

Potom pro $r = 3$ a $s = 1$ dostáváme $a_{1\,995} = 3 + 997 = 1\,000 = a_{2\,000}$.

A – I – 4

Po jednoduché úpravě dostaneme, že

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = \frac{a^2 + b^2 + a + b}{ab}. \tag{1}$$

Protože D je největší společný dělitel čísel a, b, můžeme psát $a = Da_1$ a $b = Db_1$, kde a_1, b_1 jsou nesoudělná přirozená čísla. Výraz (1) má po vykrácení tvar

$$\frac{Da_1^2 + Db_1^2 + a_1 + b_1}{Da_1 b_1}. \tag{2}$$

Aby výraz (2) byl přirozené číslo, musí být čitatel dělitelný jmenovatelem, a tedy i všemi jeho děliteli. Proto musí být čitatel dělitelný D,

$$D \mid Da_1^2 + Db_1^2 + a_1 + b_1.$$

Číslo D zřejmě dělí čísla Da_1^2 a Db_1^2, proto musí platit

$$D \mid a_1 + b_1. \tag{3}$$

Protože čísla a_1, b_1, D jsou přirozená a platí (3), musí zároveň být

$$D \leqq a_1 + b_1, \tag{4}$$

což po přenásobení D ($D > 0$) dává

$$D^2 \leqq a + b.$$

Po odmocnění (obě strany jsou kladné) vychází, že

$$D \leqq \sqrt{a+b}. \tag{5}$$

Ještě musíme zjistit, zda někdy nastane v (5) rovnost. Ta zřejmě nastane, právě když nastane rovnost v nerovnosti (4). Proto musí být $D = a_1 + b_1$. Aby byla zároveň splněna podmínka $D < a < b$, musí platit $1 < a_1 < b_1$. Volme proto $a_1 = 2$ a $b_1 = 5$. Potom musí být $D = 2+5 = 7$, neboli $a = Da_1 = 14$ a $b = Db_1 = 35$. Snadno se přesvědčíme, že v tomto případě rovnost (5) skutečně nastane.

Poznámka. Můžeme postupovat také tak, že na začátku zavedeme substituci $a = a_1 D$, $b = b_1 D$ a po obdobných úvahách dojdeme k tvrzení $D^2 \mid a + b$, což po odmocnění dává (5).

A – I – 5

Především si všimněme, že pro nesoudělná čísla x, y platí

$$f(xy) = f(x) + f(y) - f(1).$$

Proto pro prvočíselný rozklad $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$ čísla n ($p_1, p_2, \dots, p_m$ jsou různá prvočísla a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ jsou přirozená čísla) dostáváme, že $f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2}) + \dots + f(p_m^{\alpha_m}) - (m-1)f(1)$. Dále opakovaným použitím dané rovnosti zjistíme, že $f(p^\alpha) = f(p^{\alpha-1}) = \dots = f(p) = p$ pro prvočíslo p a libovolné přirozené číslo α. Odtud vyplývá, že platí

$$f(n) = p_1 + p_2 + \dots + p_m - (m-1)f(1), \quad n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}.$$

Dokažme ještě uvedené tvrzení podrobněji:

Nejdříve dokážeme matematickou indukcí podle α, že pro prvočíslo p platí $f(p^\alpha) = f(p) = p$.

První krok. Pro $\alpha = 1$ plyne tvrzení přímo ze zadání.

Druhý krok. Nechť tvrzení platí pro $\alpha \geqq 1$, potom

$$f(p^{\alpha+1}) = f(p^\alpha) + f(p) - f\big(D(p^\alpha, p)\big) = f(p^\alpha).$$

Odtud podle indukčního předpokladu plyne, že je také

$$f(p^{\alpha+1}) = f(p^{\alpha}) = f(p) = p.$$

Dále dokážeme, že pokud $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$ je prvočíselný rozklad čísla $n \geqq 2$, je

$$f(n) = f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}) = p_1 + p_2 + \dots + p_m - (m-1) f(1).$$

Tvrzení dokážeme opět indukcí, tentokrát podle počtu m prvočíselných dělitelů čísla n.

První krok. Pro $m = 1$ dostáváme předchozí tvrzení, které jsme právě dokázali.

Druhý krok. Nechť tvrzení platí pro $m \geqq 1$. Potom platí

$$\begin{aligned} f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_{m+1}^{\alpha_{m+1}}) = f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}) + f(p_{m+1}^{\alpha_{m+1}}) - \\ - f\left(D(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}, p_{m+1}^{\alpha_{m+1}})\right). \end{aligned}$$

Protože ale $D(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}, p_{m+1}^{\alpha_{m+1}}) = 1$, má dle indukčního předpokladu předcházející rovnost tvar

$$\begin{aligned} f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_{m+1}^{\alpha_{m+1}}) &= p_1 + p_2 + \dots + p_m - \\ &\quad - (m-1) f(1) + p_{m+1} - f(1) = \\ &= p_1 + \dots + p_{m+1} - m f(1). \end{aligned} \tag{1}$$

Ještě zbývá ukázat, že takto definovaná funkce f vyhovuje dané podmínce pro libovolnou hodnotu $f(1)$. Nechť a a b jsou přirozená čísla. Označme $c = D(a, b)$ a nechť $c = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$ je jeho prvočíselný rozklad. Prvočíselný rozklad čísla a má pak zřejmě tvar

$$a = p_1^{\beta_1} \dots p_m^{\beta_m} q_1^{\beta_{m+1}} \dots q_s^{\beta_{m+s}}$$

a podobně číslo b bude mít prvočíselný rozklad

$$b = p_1^{\gamma_1} \dots p_m^{\gamma_m} r_1^{\gamma_{m+1}} \dots r_s^{\gamma_{m+t}}.$$

Zároveň víme, že prvočísla $p_1, \dots, p_m$, $q_1, \dots, q_s$ a $r_1, \dots, r_t$ jsou navzájem různá. Proto rozklad čísla $a \cdot b$ na prvočinitele je

$$a \cdot b = p_1^{\beta_1+\gamma_1} \dots p_m^{\beta_m+\gamma_m} q_1^{\beta_{m+1}} \dots q_s^{\beta_{m+s}} r_1^{\gamma_{m+1}} \dots r_s^{\gamma_{m+t}}.$$

Podmínka ze zadání říká, že

$$f(a \cdot b) = f(a) + f(b) - f\big(D(a,b)\big). \tag{2}$$

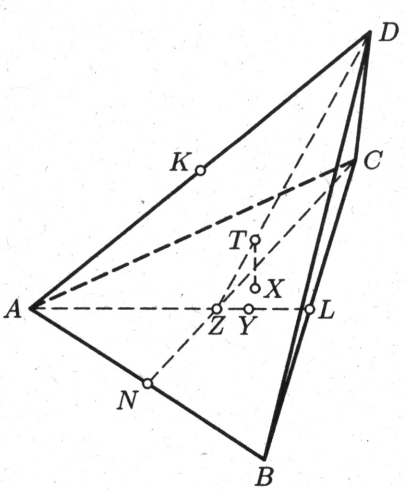
Spočítejme tyto hodnoty pro funkci definovanou pomocí (1):

$$\begin{aligned} f(a) &= p_1 + \ldots + p_m + q_1 + \ldots + q_s - (m+s-1)f(1), \\ f(b) &= p_1 + \ldots + p_m + r_1 + \ldots + r_t - (m+t-1)f(1), \\ f(a \cdot b) &= p_1 + \ldots + p_m + q_1 + \ldots + q_s + r_1 + \ldots + r_t - \\ &\quad - (m+s+t-1)f(1), \\ f(c) &= p_1 + \ldots + p_m - (m-1)f(1). \end{aligned}$$

Snadno nahlédneme, že po dosazení těchto hodnot do (2) dostaneme identitu (ještě je potřeba si uvědomit, že všechny tyto úvahy jsou korektní i v případě $m = 0$, $s = 0$, $t = 0$). Funkce f definovaná pomocí (1) je tedy jediným řešením dané úlohy pro libovolnou hodnotu $f(1)$.

A – I – 6

Označme L a K středy hran BC a AD, X a Y kolmé průměty bodů T a O do roviny ABC a Z těžiště trojúhelníka ABC (obr. 22).



Obr. 22

V dalším budeme využívat následující vlastnosti čtyřstěnu:

▷ body A, T, D, K, L leží v téže rovině, kterou označíme δ ($K = \frac{1}{2}(A+D)$, $L = \frac{1}{2}(B+C)$, T je střed KL, $T = \frac{1}{2}(K+L) = \frac{1}{4}(A+B+C+D)$),
▷ body O, T, X, Y leží v téže rovině, kterou označíme α,
▷ Y je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC,
▷ T leží ve čtvrtině úsečky ZD ($Z = \frac{1}{3}(A+B+C)$);

navíc platí, že přímka je kolmá na rovinu, právě když je kolmá na dvě její různoběžné přímky (a tato přímka je pak kolmá na všechny přímky roviny).

Především musíme vyloučit případ $O = T$, kdy OT neurčuje přímku.

a) Protože OT je kolmá na rovinu δ, je OT kolmá na KL, a tedy $|OL| = |OK|$. To znamená, že oba rovnoramenné trojúhelníky OBC a OAD jsou shodné, takže $|AD| = |BC| = 12\,\text{cm}$. Bod D proto leží na kulové ploše Γ se středem A a poloměrem 12 cm.

Naopak, leží-li bod D na Γ, je $|AD| = |BC| = 12\,\text{cm}$. Potom $|OL| = |OK|$, a tedy OT je kolmá na KL.

b) Protože TX je kolmá na AL (TX je kolmá na rovinu ABC) a OT je kolmá na AL (OT je kolmá na rovinu δ), je AL je kolmá na α. Rovina α je ale jednoznačně určená body A, B, C (prochází bodem Y a je kolmá na AL). Označme β rovinu, která vznikne z roviny α ve stejnolehlosti se středem Z a koeficientem 4. Ta je rovněž jednoznačně určená body A, B, C (je kolmá na AL a prochází bodem S, který vznikne z bodu Y zmíněnou stejnolehlostí) a leží v ní bod D. Naopak, leží-li bod D v rovině β, snadno nahlédneme, že body X, Y, T, O leží v rovině α, která je kolmá na AL. Proto TO je kolmá na AL.

Případ $O = T$ nastane, právě když je DS kolmá na rovinu ABC (DS odpovídá ve zmíněné stejnolehlosti úsečce $TY = OY$).

Množina bodů D je tedy kružnice (bez čtyř bodů tvořících vrcholy čtverce, dva z nich jsou body roviny ABC), která je průnikem kulové plochy Γ a roviny β.

Jiné řešení. Především $|AL| = 8\,\text{cm}$. Zaveďme souřadnicový systém s počátkem v bodě L tak, že BC je osa x ($B = (-6,0,0)$, $C = (6,0,0)$) a AL je osa y ($A = (0,8,0)$). Nechť $D = (x,y,z)$.

Z podobnosti trojúhelníků BLA a YNA (N je střed AB) dostaneme $|AY| = 6{,}25$. Potom $Y = (0;1{,}75;0)$ a $O = (0;1{,}75;a)$,

$$T = \frac{A+B+C+D}{4} = \left(\frac{x}{4}, 2+\frac{y}{4}, \frac{z}{4}\right).$$

Protože OT je kolmá na AL, je $OT \cdot AL = 0$. Odtud dostaneme $y = -1$. Protože OT je kolmá na LD, je $OT \cdot LD = 0$. Odtud vyjde

$x^2 + z^2 = 4az$ (využíváme toho, že $y = -1$). Dále z rovnosti $|OA| = |OD|$ dostaneme $2x^2 + 2z^2 - 4za = 63$. (Využili jsme toho, že $y = -1$.) Z posledních dvou rovností plyne $x^2 + z^2 = 63$. Souřadnice bodu D tedy splňují podmínky $y = -1$ a $x^2 + z^2 = 63$.

A – S – 1

Nejprve oba výrazy upravíme:

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = \frac{a^2 + a + b^2 + b}{ab}, \tag{1}$$

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} = \frac{a^3 + b^3}{ab}. \tag{2}$$

Protože obě čísla (1), (2) jsou celá, musí být $a^2 + a + b^2 + b$ i $a^3 + b^3$ dělitelné číslem b. To znamená, že musí být také

$$b \mid a^2 + a \quad \text{a} \quad b \mid a^3 \tag{3}$$

(označení $x \mid y$ znamená, že číslo x dělí číslo y). Nyní lze snadno ukázat, že odtud plyne i $b \mid a$. Uvedeme tři různé způsoby:

1) Z (3) plyne, že b dělí i číslo $a^3 - (a-1)(a^2 + a) = a$, takže $b \mid a$.
2) Z $b \mid a^3$ plyne, že každý prvočinitel čísla b je také prvočinitelem čísla a. Proto jsou čísla b a $(a+1)$ nesoudělná, takže z $b \mid a(a+1)$ plyne $b \mid a$.
3) Jestliže b dělí $a^2 + a$, dělí jistě i jeho a-násobek $a^3 + a^2$. Celé číslo b tedy dělí zároveň $a^3 + a^2$ i a^3. Dělí proto i jejich rozdíl a^2. My už ale víme, že b dělí i $a^2 + a$, proto dělí i číslo $a^2 + a - a^2 = a$, tedy $b \mid a$.

Protože oba uvažované výrazy jsou symetrické vzhledem k a a b, platí zároveň i $a \mid b$. Odtud plyne rovnost $|a| = |b|$. Nyní mohou nastat dvě možnosti:

1) Pro $a = b$ můžeme dané výrazy zřejmě upravit po řadě na tvar $\frac{2(a+1)}{a}$ a $2a$. Vzhledem k tomu, že čísla a a $a+1$ jsou nesoudělná, platí $a \mid 2$ (prvý výraz musí být celočíselný). Dostáváme čtyři řešení $a = b \in \{-2, -1, 1, 2\}$.
2) Pro $a = -b$ se dané výrazy rovnají po řadě -2 a 0. V tomto případě tedy dostáváme nekonečně mnoho řešení $a = -b = t$, kde t je libovolné nenulové celé číslo.

A – S – 2

Pro $n = 2$ má platit nerovnost $4 \geqq 1 + 2q^2$, odtud vyplývá horní odhad pro číslo q: $q \leqq \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Dokážeme matematickou indukcí, že číslo $q = \frac{\sqrt{6}}{2}$ má požadovanou vlastnost.

1. krok: Vzhledem k volbě čísla q v dané nerovnosti platí pro $n = 2$ rovnost.

2. krok: Nechť nerovnost platí pro $n = k \geqq 2$, neboli $2^k \geqq 1 + kq^k$. Potom

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geqq 2 + 2kq^k.$$

Zřejmě stačí dokázat, že platí

$$2 + 2kq^k \geqq 1 + (k+1)q^{k+1},$$

neboli $1 \geqq q^k[(k+1)q - 2k]$. Poslední nerovnost ale platí, protože pro $q = \frac{\sqrt{6}}{2}$ je $q < \frac{4}{3} < 2$, takže $q^k > 0$, zatímco výraz v hranaté závorce je záporný:

$$(k+1)q - 2k = k(q-2) + q \leqq 2(q-2) + q = 3q - 4 < 0.$$

Zkoumaná nerovnost tedy platí i pro $n = k + 1$. Tím je důkaz matematickou indukcí hotov.

Odpověď: Hledané největší q je rovno číslu $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

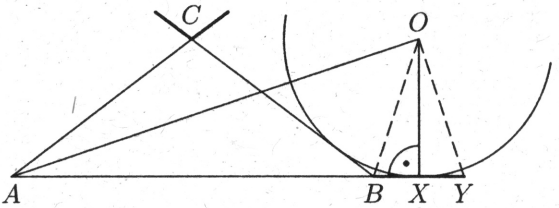
A – S – 3

Označme X bod dotyku kružnice připsané straně BC s přímkou AB (obr. 23). Protože AO je osa úhlu CAB a BO je osa úhlu CBX, je $|\sphericalangle OAB| = \frac{1}{2}\alpha$ ($|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ABC| = \alpha$), $|\sphericalangle OBX| = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{1}{2}\alpha$. Na polopřímce BX zvolme bod Y, $Y \neq B$, tak, aby $|BX| = |XY|$. Potom v trojúhelníku AYO platí:

$$|AO| = 9 \text{ cm}, \qquad |OY| = |OB| = 3 \text{ cm},$$

$$|\sphericalangle AOY| = 180° - |\sphericalangle OAB| - |\sphericalangle XYO| =$$

$$= 180° - \frac{\alpha}{2} - |\sphericalangle XBO| = 90°.$$



Obr. 23

Odtud vyplývá konstrukce:

1. $\triangle AYO$; podle věty *sus*: $|AO| = 9\,\text{cm}, |OY| = 3\,\text{cm}, |\sphericalangle AOY| = 90°$,
2. X; $X \in AY$, $OX \perp AY$,
3. B; $B \in AX$, $|XB| = |XY|$,
4. $\overrightarrow{AD}$; $|\sphericalangle BAD| = 2|\sphericalangle BAO|$, $D \in \overrightarrow{BO}$,
5. $\overrightarrow{BE}$; $|\sphericalangle ABE| = 2|\sphericalangle BAO|$, $E \in \overrightarrow{AO}$,
6. C; $C \in \overrightarrow{AD} \cap \overrightarrow{BE}$.

Poznámka. Můžeme postupovat i jinak. Nejprve vyjádříme všechny potřebné úhly pomocí úhlu α a dále lze pokračovat například takto:

a) použitím sinové věty v trojúhelníku ABO zjistíme, že $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{3}$,

b) z podobnosti trojúhelníků $AXO \sim OXB$ zjistíme, že

$$\frac{|BX|}{|OX|} = \frac{1}{3} \left(= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{|OX|}{|AX|} \right).$$

Potom může sestrojit trojúhelník BXO nebo AXO. Případně můžeme pomocí Pythagorovy věty vypočítat

$$|BX| = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \quad |OX| = \frac{9\sqrt{10}}{10},$$
$$|AX| = \frac{27\sqrt{10}}{10}, \quad |AB| = \frac{24\sqrt{10}}{10}$$

a pak sestrojit příslušné výrazy.

A – II – 1

Pro $n = 1$ takové číslo samozřejmě neexistuje, pro $n = 2$ je příkladem takového čísla číslo 13. Pro $n = 3$ a $n = 4$ taková čísla neexistují, protože žádné z čísel 301, 211, 121, 103 ani žádné z čísel 3 001, 2 101, 2 011, 1 201,

1 111, 1 021, 1 003 není násobkem třináct. (Vypsali jsme všechna lichá trojmístná a čtyřmístná čísla s ciferným součtem 4.) Pro větší n se takové číslo dá vždy najít. Stačí uvažovat číslo $1\,001 + 10^{n-4} \cdot 1\,001$. Toto číslo je dělitelné třináct (neboť 1 001 je dělitelné třináct), pro $n \geqq 5$ je zároveň liché (končí jednotkou) a jeho ciferný součet je zřejmě 4.

Jiné řešení. Nejdříve podobně jako v prvním řešení ukážeme, že pro $n = 2$ takové číslo existuje a pro $n = 1, 3, 4$ neexistuje. Všimněme si teď, jaké zbytky při dělení třináct dávají jednotlivé mocniny čísel 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, ... :

číslo:	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	...
jeho zbytek:	1	10	9	12	3	4	1	10	9	...

Vidíme, že zbytek čísla 10^n při dělení třináct závisí jen na tom, jaký je zbytek čísla n při dělení šesti:

n je tvaru:	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
zbytek čísla 10^n:	1	10	9	12	3	4

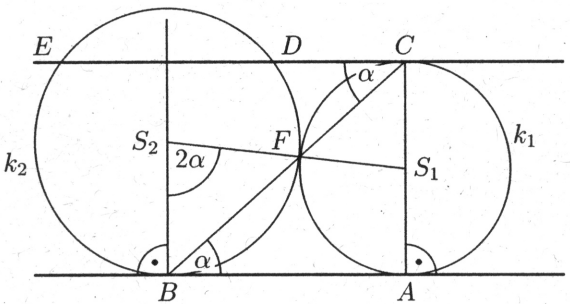
Pomocí této tabulky najdeme příklady n-ciferných čísel s potřebnou vlastností pro každé přirozené $n \geqq 5$:

počet číslic čísla n	číslo	rovné	dává stejný zbytek jako
$6k$ $(k \geqq 1)$	$1\underbrace{00\ldots0}_{6k-5}1\,101$	$10^{6k-1} + 1\,101$	$4 + 12 + 9 + 1 = 26$
$6k+1$ $(k \geqq 1)$	$2\underbrace{00\ldots0}_{6k-2}11$	$2 \cdot 10^{6k} + 11$	$2 \cdot 1 + 11 = 13$
$6k+2$ $(k \geqq 0)$	$1\underbrace{00\ldots0}_{6k}3$	$10^{6k+1} + 3$	$10 + 3 = 13$
$6k+3$ $(k \geqq 1)$	$1\underbrace{00\ldots0}_{6k-4}101\,001$	$10^{6k+2} + 101\,001$	$9 + 4 + 12 + 1 = 26$
$6k+4$ $(k \geqq 1)$	$1\underbrace{00\ldots0}_{6k-2}10\,011$	$10^{6k+3} + 10\,011$	$12 + 3 + 11 = 26$
$6k+5$ $(k \geqq 0)$	$1\underbrace{00\ldots0}_{6k}1\,011$	$10^{6k+4} + 1\,011$	$3 + 12 + 11 = 26$

Odpověď: Číslo s požadovanou vlastností existuje pro $n = 2$ a pro každé $n \geqq 5$.

A – II – 2

Ukažme, že F leží na přímce BC. Nechť $|\sphericalangle FBA| = \alpha$. Potom $|\sphericalangle FBS_2| = |\sphericalangle BFS_2| = 90° - \alpha$ (obr. 24). Z trojúhelníku FBS_2 potom



Obr. 24

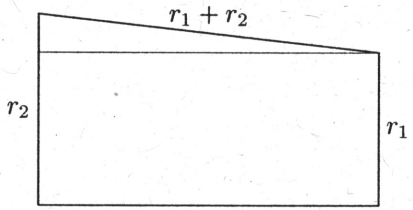
vyjde $|\sphericalangle BS_2F| = 2\alpha$ (jinými slovy, velikost tzv. úsekového úhlu tětivy BF je rovna polovině příslušného středového úhlu BS_2F). To znamená, že $|\sphericalangle AS_1F| = 180° - 2\alpha$. Z věty o obvodovém a středovém úhlu pak plyne, že $|\sphericalangle ACF| = 90° - \alpha$, takže $|\sphericalangle FCD| = \alpha$. Protože úhly FCD a FBA jsou shodné, leží F na přímce BC.

Dále víme, že trojúhelník BAC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu A. Střed jeho kružnice opsané tedy leží na přeponě BC. Pokud F není středem přepony BC a má-li platit dokazované tvrzení, musí i střed kružnice opsané trojúhelníku ADE ležet na přímce BC. Protože DE je jeho strana a přímka S_2B je osou této strany, potom vzhledem k tomu, že bod B je průsečíkem přímek BS_2 a BC, musí být právě on středem kružnice opsané trojúhelníku ADE. Proto stačí dokázat, že kromě rovnosti $|BE| = |BD|$ platí i $|BD| = |BA|$.

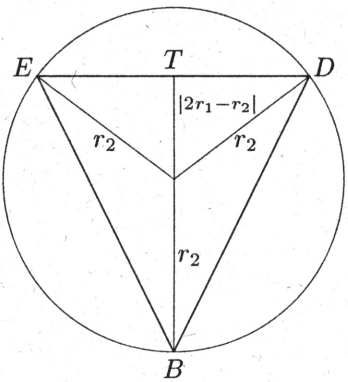
Spočtěme teď velikost $|BA|$ (obr. 25),

$$|BA| = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_2 - r_1)^2} = \sqrt{4r_1r_2} = 2\sqrt{r_1r_2}.$$

Spočtěme ještě velikost $|BD|$ (obr. 26, kde je znázorněna situace při $2r_1 > r_2$; situace v opačném případě vypadá analogicky a nemá vliv na



Obr. 25



Obr. 26

další výpočet):

$$|TD|^2 = r_2^2 - (2r_1 - r_2)^2,$$
$$|BD|^2 = |TD|^2 + |TB|^2 = r_2^2 - (2r_1 - r_2)^2 + (2r_1)^2 = 4r_1r_2,$$
$$|BD| = 2\sqrt{r_1r_2}.$$

Dostali jsme rovnost $|BD| = |BA|$, tedy B je středem kružnice opsané trojúhelníku ADE, a proto bod F i oba středy kružnic leží na přímce BC.

A – II – 3

Nechť ABC je trojúhelník s požadovanými vlastnostmi. Označme S střed úsečky AB, k kružnici opsanou trojúhelníku ABC, Z průsečík přímky CS s kružnicí k (různý od C) (obr. 27). Protože $OT \perp CZ$, je T středem tětivy CZ, navíc $|SC| = 3 \cdot |ST|$ (T je těžiště), takže $|SZ| = |ST|$. Dvojím vyjádřením mocnosti bodu S ke kružnici k (lze samozřejmě použít i podobnost trojúhelníků AZS a CBS) máme

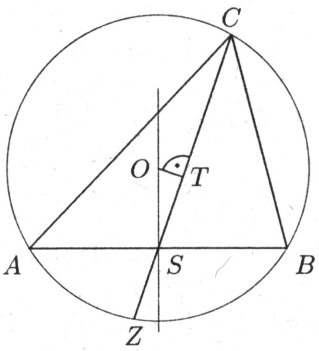
$$|SA| \cdot |SB| = |SZ| \cdot |SC|,$$

neboli $|SA|^2 = \frac{1}{3}|SC| \cdot |SC|$, takže

$$|SC| = \sqrt{3}\,|SA|.$$

Bod C leží tedy na kružnici $k_1(S; \sqrt{3}\,|SA|)$. Označíme-li A_0, B_0 průsečíky přímky AB s kružnicí k_1 a E, F průsečíky osy úsečky AB s kružnicí k_1,

musí být $C \neq A_0, B_0$ (jinak by ABC nebyl trojúhelník) a $C \neq E, F$ (jinak by trojúhelník ABC byl rovnostranný a bylo by $O = T$).



Obr. 27

Nechť naopak C je libovolný bod kružnice k_1 různý od A_0, B_0, E a F. Označme k kružnici opsanou trojúhelníku ABC a Z průsečík kružnice k s přímkou CS ($Z \neq C$). Z mocnosti bodu S ke kružnici k (opět lze použít i podobnost trojúhelníků) vyplývá

$$|SZ| = \frac{|SA|^2}{|SC|} = \frac{|SA|}{\sqrt{3}} = \frac{|SC|}{3} = |ST|,$$

tedy T je střed tětivy CZ, a proto je buď $O = T$, nebo $OT \perp CZ$. Případ $O = T$ může nastat jen pro T z osy úsečky AB, tj. $CS \perp AB$, neboli $C \in \{E, F\}$, což jsme však vyloučili. Vzniklý trojúhelník ABC tedy vyhovuje podmínkám úlohy.

Závěr: Hledaným geometrickým místem bodů je kružnice k_1 se středem S a poloměrem $\sqrt{3}\,|SA|$) bez bodů A_0, B_0, E, F.

A – II – 4

Ne. Označme počet náčelníků v prvním výběru k a v druhém l. Postupujme sporem. Předpokládejme, že $k \neq l$, a přitom obě rozdělení dopadla *dobře*. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $l > k$ (jinak výběry vyměníme, zřejmě na jejich pořadí nezáleží). Protože podruhé bylo družin víc, musí v tomto výběru (podle Dirichletova principu) existovat aspoň dva náčelníci, kteří byli v prvním výběru ve stejné družině (označme tuto družinu M). Ani jeden z nich nemohl být náčelníkem M, jinak by museli být kamarádi a druhé rozdělení by pak nemohlo vyjít *dobře*. Potom

ale mají oba společného kamaráda — náčelníka družiny M, proto druhé rozdělení nemohlo vyjít *dobře* ani v tomto případě. To je spor s předpokladem $k \neq l$.

A – III – 1

a) Po určení několika prvních členů dané posloupnosti si můžeme všimnout, že pro malé hodnoty n je rozdíl $G(n) - G(n-1)$ buď 0, nebo 1. Toto tvrzení (z kterého už plyne tvrzení a) úlohy) dokážeme matematickou indukcí.

První krok. Pro $n = 1$ je $G(0) = 0$, $G(1) = 1 - G\big(G(0)\big) = 1$, tedy $G(1) - G(0) = 1$, tj. uvedené tvrzení platí.

Druhý krok. Nechť $G(k) - G(k-1) \in \{0, 1\}$ pro každé přirozené $k \leqq n$. Odtud především plyne, že $0 \leqq G(k) \leqq k$ pro každé $k \leqq n$, protože $G(0) = 0$. Dále je

$$G(n+1) - G(n) = 1 + G\big(G(n-1)\big) - G\big(G(n)\big).$$

Je-li $G(n-1) = G(n)$, je $G\big(G(n-1)\big) = G\big(G(n)\big)$, a tedy $G(n+1) - G(n) = 1$.

V opačném případě je $G(n) = G(n-1) + 1$, čili $G\big(G(n-1)\big) - G\big(G(n)\big) = G(a) - G(a+1)$, kde $a = G(n-1)$ je nezáporné celé číslo nepřevyšující $n - 1$, proto podle indukčního předpokladu platí $G(a) - G(a+1) \in \{-1, 0\}$. To znamená, že $G(n+1) - G(n) = 1 + G(a) - G(a+1) \in \{0, 1\}$. Tím je důkaz indukcí uvedeného tvrzení a zároveň i důkaz tvrzení (a) úlohy hotov.

b) Postupujme sporem. Předpokládejme, že existuje přirozené číslo k, pro něž

$$G(k-1) = G(k) = G(k+1) = A.$$

Ze zadání ovšem plyne, že

$$A = G(k+1) = k + 1 - G\big(G(k)\big) = k + 1 - G(A),$$
$$A = G(k) = k - G\big(G(k-1)\big) = k - G(A),$$

takže

$$k + 1 = G(A) + A = k,$$

což je hledaný spor, protože $k + 1 \neq k$.

Dokázali jsme, že přirozené číslo k, pro které by platilo $G(k-1) = G(k) = G(k+1)$, neexistuje.

Jiné řešení. (Podle *Petra Kaňovského*, Brno.) Označme

$$w = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Pro toto číslo platí $\frac{1}{2} < w < 1$ a $w^2 + w - 1 = 0$. Ukážeme, že platí $G(n) = [nw]$ (celá část čísla nw). Tvrzení a) i b) je pak již snadným důsledkem toho, že $w > 0$ resp. $w > \frac{1}{2}$.

Uvažujme libovolné přirozené číslo n a označme pro stručnost

$$x = nw - [nw]$$

necelou část čísla nw. Z definice celé části je vidět, že

$$[(n+1)w] = [nw + w] = [nw] + [x + w].$$

Nyní postupně platí

$$\begin{aligned} w[nw] - n + [(n+1)w] &= w[nw] - n + [nw] + [x + w] = \\ &= (w+1)[nw] - n + [x + w] = \\ &= (w+1)(nw - x) - n + [x + w] = \\ &= (w^2 + w - 1)n - (w+1)x + [x + w] = \\ &= -(w+1)x + [x + w]. \end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že

$$[(n+1)w] = n - (w[nw] + w) + \big(-(w+1)x + w + [x + w]\big). \qquad (1)$$

Nyní dokážeme, že platí

$$\big[-(w+1)x + w + [x + w]\big] = 0. \qquad (2)$$

Rozlišme tři případy:

1) Je-li $0 \leqq x < 1 - w$, tak $[x + w] = 0$ a zároveň

$$\begin{aligned} -(w+1)x + w &\leqq w < 1, \\ -(w+1)x + w &> -(w+1)(1-w) + w = \\ &= w^2 + w - 1 = 0, \end{aligned}$$

odkud ihned plyne dokazované tvrzení.

2) Podobně, je-li $1 - w < x < 1$, tak $[x + w] = 1$ a zároveň

$$-(w+1)x + w + 1 \geqq -(w+1) + w + 1 = 0,$$
$$-(w+1)x + w + 1 < -(w+1)(1-w) + w + 1 =$$
$$= w^2 + w = 1.$$

3) Kdyby bylo $x = 1 - w$, pak by číslo $(n+1)w = x + [nw] + w = 1 + [nw]$ bylo celé, a tedy w by muselo být racionální, což není pravda. Tento případ tedy nemůže nastat.

Tím je důkaz rovnosti (2) proveden.

Ze vztahů (1) a (2) plyne

$$[(n+1)w] = n - \big[([nw] + 1)w\big].$$

Definujeme-li tedy posloupnost $G_1(n)$ vztahem

$$G_1(n) = [(n+1)w],$$

pak vidíme, že posloupnost G_1 splňuje rekurentní vztah

$$G_1(n) = n - G_1(G_1(n-1)),$$

tj. stejný rekurentní vztah jako $G(n)$. Navíc platí

$$G_1(0) = [(0+1)w] = 0,$$

tedy vidíme že i $G(0) = G_1(0)$.

Dokažme nyní, že libovolná funkce $G(n)$, splňující podmínky v zadání úlohy, je identicky rovna $G_1(n)$. Důkaz provedeme matematickou indukcí.

1) $G(0) = 0 = G_1(0)$.

2) Nechť n_0 je libovolné přirozené číslo a nechť pro všechna $n < n_0$ platí $G(n) = G_1(n) = [(n+1)w]$. Pak $G(n_0 - 1) = [nw_0]$ a protože dále $0 \leqq [nw_0] < n_0$ (první nerovnost je zřejmá, druhá plyne pro $n_0 < 3$ přímým dosazením a pro $n_0 \geqq 3$ z $n_0 - nw_0 = (1-w)n_0 > 1$), je také $G(G(n_0 - 1)) = G_1(G_1(n_0 - 1))$ a tedy $G(n_0) = n_0 - G(G(n_0 - 1)) =$ $= n_0 - G_1(G_1(n_0 - 1)) = G_1(n_0)$.

Vidíme tedy, že funkce G je zadáním jednoznačně určena a musí být $G(n) = [(n+1)w]$, kde $w = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, pro všechna přirozená čísla n.

A – III – 2

Nechť V je pevný vnitřní bod trojúhelníku PQR a předpokládejme, že hledaný čtyřstěn $ABCD$ existuje. Stěny ABD, BCD a CAD (prozatím neznámého) čtyřstěnu $ABCD$ sklopíme do roviny ABC. Dostaneme tak síť tohoto čtyřstěnu, ohraničenou lomenou čarou $AD_1BD_2CD_3A$. Naším cílem bude vybrat bod D tak, aby trojúhelník $D_1D_2D_3$ byl ostroúhlý, obsahoval trojúhelník ABC a aby bod V byl středem kružnice mu opsané. Platí totiž tvrzení: *Je-li S střed kružnice opsané ostroúhlému trojúhelníku KLM, pak pro každý jeho bod $X \neq S$ platí*

$$\min\{|XK|, |XL|, |XM|\} < |SK| = |SL| = |SM|.$$

(Toto tvrzení plyne z toho, že celý trojúhelník KLM je pokryt třemi kruhovými výsečemi o středech K, L, M a poloměru $|SK|$, přitom každý vnitřní bod $X \neq S$ trojúhelníku KLM leží uvnitř jedné z nich.)

Potřebujeme tedy, aby přímka AV byla osou úsečky D_3D_1, přímka BV osou D_1D_2 a přímka CV osou D_2D_3. Musí proto platit

$$|\sphericalangle D_1D_2D_3| = \pi - |\sphericalangle BVC|, \ |\sphericalangle D_2D_3D_1| = \pi - |\sphericalangle CVA|,$$
$$|\sphericalangle D_3D_1D_2| = \pi - |\sphericalangle AVB|.$$

Díky tomu, že $V \in \triangle PQR$, jsou úhly BVC, CVA a AVB tupé (stačí uvážit Thaletovy kružnice s průměry BC, CA a AB), takže vnitřní úhly hledaného trojúhelníku $D_1D_2D_3$ jsou známé a ostré. Můžeme tedy sestrojit libovolný trojúhelník $D_1'D_2'D_3'$ podobný neznámému trojúhelníku $D_1D_2D_3$, označit V' střed jeho opsané kružnice a na třech polopřímkách s počátkem V', které procházejí středy stran $D_3'D_1'$, $D_1'D_2'$ a $D_2'D_3'$, sestrojit (dostatečně blízko od bodu V') po řadě body A', B' a C' tak, aby $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ (známe velikosti úhlů $V'A'B'$ a $V'A'C'$). Pak lomená čára $A'D_1'B'D_2'C'D_3'A'$ ohraničuje síť některého čtyřstěnu $A'B'C'D'$, který je podobný hledanému čtyřstěnu $ABCD$.

A – III – 3

Označme dané podmnožiny $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_6$. Tvrzení dokážeme indukcí podle počtu n prvků množiny X. Začneme s případem $n = 6$. (Pokud má množina X méně než 6 prvků, doplníme ji na šestiprvkovou přidáním nových prvků, které nezmění množiny A_i.) Protože $\binom{6}{3} = 20 > 2 \cdot 6$, existuje tříprvková množina $\mathsf{Y} \subset \mathsf{X}$, která se nerovná ani žádné z množin

A_i, ani žádnému doplňku $X - A_i$. Obarvíme-li prvky Y jednou barvou a prvky $X - Y$ barvou druhou, dostaneme „správné“ obarvení.

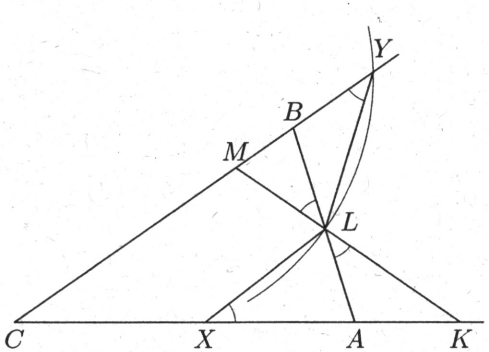
Nyní předpokládejme, že množina X má aspoň 7 prvků. Pak existuje dvojice různých prvků $u, v \in X$, které spolu neleží v žádné z množin A_i. (Opravdu, existuje totiž nejvýše $6 \cdot \binom{3}{2} = 18$ dvojic prvků, které patří do některé z množin A_i, zatímco všech dvojic prvků z X je aspoň $\binom{7}{2} = 21$.) Tuto dvojici prvků u, v „slepíme“ do jednoho nového prvku w. Jinými slovy, pokud množina A_i obsahuje prvek u nebo v, nahradíme ho prvkem w. Dostaneme opět šest tříprvkových podmnožin množiny X', která má o 1 prvek méně než původní množina X. Prvky množiny X' můžeme podle indukčního předpokladu „správně“ obarvit; dáme-li prvkům u, v barvu prvku w a barvy ostatních prvků v X' zachováme, dostaneme „správné“ obarvení množiny X. Tím je dokázán indukční krok, a tedy i tvrzení úlohy.

A – III – 4

Trojúhelníky ALK a BYL jsou podobné, protože (obr. 28) $|\sphericalangle LAK| = |\sphericalangle YBL|$ ($|CA| = |CB|$) a (ze zadání)

$$\frac{|KA|}{|LA|} = \frac{|LB|}{|YB|}.$$

Odtud $|\sphericalangle ALK| = |\sphericalangle BYL|$. Analogicky z podobnosti trojúhelníků



Obr. 28

ALX a BML vyjde $|\sphericalangle AXL| = |\sphericalangle MLB|$. Protože však body M, L

a K leží v přímce, je také $|\sphericalangle MLB| = |\sphericalangle ALK|$. Potom $|\sphericalangle LYB| = |\sphericalangle ALK| = |\sphericalangle BLM| = |\sphericalangle AXL|$. Z rovnosti $|\sphericalangle LYB| = |\sphericalangle AXL|$ plyne $|\sphericalangle LYC| + |\sphericalangle LXC| = 180°$, takže body C, X, L, Y leží na jedné kružnici k. Odtud už vyplývá konstrukce hledané přímky:

1. kružnice k opsaná trojúhelníku CXY, kde $|\sphericalangle XDY| = 2|\sphericalangle ABC|$,
2. L; $L \in k \cap AB$,
3. $\sphericalangle BLM$; $M \in BC$, $|\sphericalangle BLM| = |\sphericalangle AXL|$,
4. K; $K \in LM \cap \overrightarrow{CA}$.

Správnost konstrukce vyplývá z rozboru. Úloha má vždy právě jedno řešení.

A – III – 5

Ze vztahu (ii) pro $x = y$ vyplývá $f(x^2) = f(x \cdot x) = (k+2)f(x)$. Dvojnásobnou aplikací předchozího vztahu dostaneme

$$f(x^4) = f(x^2 \cdot x^2) = (k+2)f(x^2) = (k+2)^2 f(x).$$

Jiným postupem ale dostaneme

$$\begin{aligned} f(x^4) = f(x \cdot x^3) &= f(x) + f(x^3) + kf(x) = \\ &= (k+1)f(x) + f(x \cdot x^2) = \\ &= (k+1)f(x) + f(x) + f(x^2) + kf(x) = \\ &= (2k+2)f(x) + f(x^2) = (3k+4)f(x). \end{aligned}$$

Nyní stačí najít libovolné x, pro které je $f(x) \neq 0$, tedy například podle (i) $x = 1\,995$. Porovnáním předchozích dvou vztahů dostaneme podmínku

$$\begin{gathered} (k+2)^2 f(1\,995) = f(1\,995^4) = (3k+4)f(1\,995), \\ (k+2)^2 = 3k+4, \\ k \in \{0, -1\}. \end{gathered}$$

Pro $k = -1$ dostáváme funkcionální rovnici z domácího kola. Víme, že jejím obecným řešením je pro $x = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ funkce

$$f(x) = f(p_1) + \dots + f(p_n) - (n-1)f(1).$$

Podmínku (i) úlohy můžeme splnit například volbou $f(5) = 1\,996$, $f(p) = 0$ pro všechna prvočísla $p \neq 5$ a $f(1) = 0$.

Pro $k = 0$ dostáváme funkcionální rovnici

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Odtud především pro $x = y = 1$ plyne $f(1) = 0$. Obecným řešením této rovnice pak je pro $x = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ funkce

$$f(x) = \alpha_1 f(p_1) + \dots + \alpha_n f(p_n),$$

kde $f(p_i)$ jsou libovolná celá čísla. Opět stačí zvolit $f(5) = 1\,996$ a $f(p) = 0$ pro všechna prvočísla $p \neq 5$ jako výše.

A – III – 6

Dokážeme, že za uvedených předpokladů je trojúhelník ABC rovnostranný. Označme strany a úhly trojúhelníku ABC obvyklým způsobem. Z rovností

$$|KL| = 2R\sin\beta, \quad |LM| = 2R\sin\gamma, \quad |MK| = 2R\sin\alpha,$$

kde R je společný poloměr tří opsaných kružnic, vychází

$$|KL| : |LM| : |MK| = \sin\beta : \sin\gamma : \sin\alpha,$$

takže $\triangle ABC \sim \triangle LMK$. Proto platí

$$|KL| = \lambda b, \quad |LM| = \lambda c, \quad |MK| = \lambda a,$$

přičemž koeficient podobnosti λ určíme úvahou o obsazích trojúhelníků: Z rovností

$$S_{AKM} = S_{BLK} = S_{CML} = \frac{2}{9} S_{ABC}$$

plyne, že $S_{KLM} = \frac{1}{3} S_{ABC}$, takže $\lambda^2 = \frac{1}{3}$. Napišme kosinové věty pro trojúhelníky ABC a AKM:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$\frac{1}{3}a^2 = \left(\frac{2b}{3}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2b}{3} \cdot \frac{c}{3} \cdot \cos\alpha.$$

Odečteme-li od devítinásobku druhé rovnosti dvojnásobek první, dostaneme rovnost $a^2 = 2b^2 - c^2$. Z dalších dvojic kosinových vět odvodíme analogicky rovnosti $b^2 = 2c^2 - a^2$ a $c^2 = 2a^2 - b^2$, takže $a = b = c$.

Trojúhelníky AKM, BLK a CMA jsou tedy shodné a mají shodné i vepsané kružnice.

P – I – 1

Trojúhelníková síť se skládá z rovnostranných trojúhelníků jednotkové velikosti. Soustavu souřadnic si nyní trochu pozměníme: x-ová osa bude orientována stejně, jako jsme zvyklí z kartézské soustavy souřadnic, y-ová osa svírá s x-ovou 60stupňový úhel. Například vrcholy jednoho z jednotkových trojúhelníků mají souřadnice $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

V této síti zadáme N-úhelník — jeho vrcholy leží ve vrcholech sítě, jsou navzájem různé, přičemž každé dva sousední vrcholy v N-úhelníku mají **jednotkovou vzdálenost**. N-úhelník je zadán na vstupu tak, že první řádek vstupu obsahuje číslo N a dalších N řádků obsahuje souřadnice vrcholů, přičemž tyto vrcholy jsou zadány postupně po obvodu.

Úloha. Napište a odlaďte program, který

a) vykreslí tento N-úhelník na obrazovku,

b) vypíše zprávu o tom, zda je konvexní nebo ne (N-úhelník je konvexní, jestliže úsečky spojující libovolné dva vrcholy leží celé uvnitř, resp. na hranici N-úhelníku.).

Poznámka: Minimalizujte paměťovou a časovou složitost algoritmu. Můžete předpokládat, že vstupní data jsou zadána korektně.

P – I – 2

Pro danou konstantu N (N je prvočíslo, např. 991) máme vyhrazeno N-prvkové celočíselné pole P s indexy 0 až $N-1$. Prvky pole jsou na začátku inicializovány na nulu. Do tohoto pole budeme postupně zařazovat L celočíselných hodnot (navzájem různých a různých od nuly), kde $2 < L < N$, pomocí procedury *Zarad*:

```
procedure Zarad(X:integer);
var i:integer;
begin
```

```
    i := (x div 10 + x mod 10) mod N;
    while P[i] <> 0 do
      i := (i+7) mod N;
    P[i] := x;
  end;
```

Tato procedura nejprve ze zařazované hodnoty X vypočítá předpokládanou hodnotu indexu v poli P, a pokud je tento prvek pole již obsazen (je tam nenulová hodnota), postupně hledá nejbližší volnou pozici v poli (pole je přitom „zacyklené" — za posledním $(N-1)$-tým prvkem následuje nultý). Jestliže je při hledání volného místa nutné postupně prohlížet následující prvky, budeme tuto situaci nazývat **kolize** a budeme počítat počet vzniklých kolizí. Počet kolizí při zařazování j-té hodnoty budeme označovat $K[j]$ ($K[j]$ bude tedy rovno počtu průchodů cyklem **while** při zařazování j-té hodnoty), celkový počet kolizí označíme C_K.

Úloha. Navrhněte algoritmus, který pro daná tři čísla L, G a C_K najde takovou vstupní posloupnost hodnot H (délky L), aby celkový počet kolizí pro tuto posloupnost byl C_K a poslední hodnota byla $H[L] = G$, případně zjistí, že taková posloupnost neexistuje.

P – I – 3

Máme kreslicí zařízení schopné kreslit různé obrázky. Jejich popis však musí být zadán ve speciálním tvaru (jako znakový řetězec):

- je to posloupnost parametrů uzavřená v ‚[' a ‚]' závorkách;
- parametrem je buď číslo nebo opět posloupnost parametrů;
- posloupnost parametrů je vždy sudé délky, přičemž na lichých pozicích je vždy číslo.

Tuto posloupnost bude kreslicí zařízení interpretovat následovně:

- je-li posloupnost prázdná, nekreslí se nic;
- je-li neprázdná, zřejmě první parametr (P_1) je číslo a druhý (P_2) je buď číslo, nebo opět posloupnost parametrů:
  - pokud je P_2 číslo, kreslicí pero přejde (se spuštěným perem) v momentálním směru natočení vzdálenost P_1 a potom se otočí o úhel P_2 vpravo (úhel je zadán ve stupních);
  - pokud je P_2 posloupnost, kreslicí zařízení P_1-krát zopakuje posloupnost P_2.

Kreslicí pero je stále natočeno nějakým směrem (na začátku algoritmu na sever) a podle parametrů posloupnosti buď mění toto natočení, nebo

se v aktuálním směru pohybuje dopředu nebo dozadu (kreslí čáru) podle toho, zda je tato vzdálenost kladná nebo záporná.

Například posloupnost `'[4[100 90]]'` nakreslí čtverec se stranou 100. (Všimněte si, že číselné parametry jsou oddělené mezerou.)

Úloha. Napište a odlaďte program, který přečte vstupní posloupnost zadanou ve tvaru znakového řetězce a zinterpretuje ji na grafické ploše obrazovky. Můžete předpokládat, že vstupní posloupnost je zadána korektně, obsahuje jen celočíselné hodnoty a že řetězec není delší než 255 znaků.

P – I – 4

D0L systémy

Abecedou nazýváme libovolnou konečnou neprázdnou množinu. Prvky této množiny nazýváme **znaky**. Konečnou posloupnost znaků z nějaké abecedy nazýváme **slovo**. Znaky označujeme zpravidla písmeny ze začátku abecedy $(a, b, c, \ldots)$, slova písmeny z konce abecedy $(u, v, w, \ldots)$ a abecedy velkými řeckými písmeny $(\Sigma, \Gamma, \ldots)$.

Délkou slova w rozumíme počet znaků, z nichž se slovo skládá, označujeme ji $|w|$. **Zřetězením slov** $v = a_1 a_2 \ldots a_n$ a $u = b_1 b_2 \ldots b_m$ rozumíme slovo $v * u = a_1 a_2 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots b_m$. Množinu všech slov, která se dají vytvořit ze znaků abecedy Σ, označujeme Σ^*. Tato množina obsahuje také **prázdné slovo**, tj. slovo nulové délky, které označujeme ε.

Pravidlem nad abecedou Σ nazýváme uspořádanou dvojici (a, v), kde $a \in \Sigma$ a $v \in \Sigma^*$. Pravidlo zapisujeme ve tvaru $a \to v$.

Deterministický Lindermayerův systém bez interakce (**D0L systém**) je uspořádaná trojice (Σ, P, w), kde

- Σ je abeceda,
- P je množina pravidel, která pro každý znak $a \in \Sigma$ obsahuje právě jedno pravidlo nad abecedou Σ tvaru $a \to u$,
- w je slovo ze Σ, které nazýváme **axiom**.

Takovýto D0L systém produkuje posloupnost slov $w_1, w_2, w_3, \ldots$, která začíná axiomem a pokračuje vždy slovem, jenž dostaneme z předcházejícího slova současným nahrazením všech znaků za slova podle pravidel. Tedy

1. $w_1 = w$,
2. jestliže $w_i = a_1 a_2 \ldots a_n$, potom $w_{i+1} = u_1 * u_2 * \ldots * u_n$, kde $a_j \to u_j \in P$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$.

Uvědomte si, že pro každý znak máme právě jedno pravidlo, a tedy právě jedno slovo, kterým budeme tento znak nahrazovat. Posloupnost produkovaná D0L systémem je proto jednoznačně určena.

Růstovou funkcí D0L systému nazýváme takovou funkci $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$), která pro pořadí slova v posloupnosti produkované D0L systémem udává délku tohoto slova. Přesněji $f(i) = |w_i|$.

Příklad:

- $\{a, b\}$ je abeceda obsahující dva znaky: a a b.
- Délka slova $aabab$ je 5.
- Zřetězením slov ab a aab je slovo $ab * aab = abaab$.
- Nad touto abecedou můžeme vytvořit nekonečně mnoho slov: ε, a, b, aa, ab, bb, aaa, ...
- Pravidlem je například $a \to aa$.
- D0L systémem je například $(\{a, b\}, \{a \to aa, b \to ab\}, ab)$.
- Posloupnost produkovaná tímto systémem je

$$ab, aaab, aaaaaaab, aaaaaaaaaaaaaaab, \ldots$$

(Když slovo obsahuje více stejných písmen za sebou, můžeme nahradit tato písmena jedním písmenem, u kterého uvedeme počet písmen, která zastupuje. Zkráceně můžeme tedy psát posloupnost tohoto D0L systému: ab, a^3b, a^7b, $a^{15}b$, ...).

- Růstová funkce tohoto D0L systému je $f(n) = 2^n$.

Poznámka: Při konstrukci D0L systému dáváme přednost takovým systémům, které mají co nejmenší počet pravidel.

Úloha. Vytvořte D0L systém, jehož růstová funkce je

a) $f(n) = 4$,
b) $f(n) = n$,
c) $f(n) = 3n + 2$,
d) $f(n) = n^2$,
e) $f(n) = kn^3$, kde k je libovolné přirozené číslo.

P – II – 1

Učební text čtěte v úloze P–I–1.

Úloha. Napište program, který spočítá obsah zadaného N-úhelníku a vyjádří ho počtem jednotkových trojúhelníků.

Poznámka: Minimalizujte paměťovou a časovou složitost algoritmu. Můžete předpokládat, že vstupní data jsou zadána korektně.

P – II – 2

Pro danou konstantu N (N je prvočíslo, např. 991) máme vyhrazeno N-prvkové celočíselné pole P s indexy 0 až $N-1$. V tomto poli máme uloženo M různých kladných čísel ($M < N$). Neobsazené prvky pole jsou inicializovány na nulu.

Prvky jsou v poli P uloženy tak, aby bylo možné použít funkci *Vyhledej* na zjištění, kde se v poli P nachází prvek X (funkce vrátí polohu prvku X v poli P, pokud se X v poli nachází, v opačném případě vrátí hodnotu -1):

```
function Vyhledej(X:integer):integer;
var i:integer;
begin
  i:=(X div 10 + X mod 10) mod N;
  while P[i]>X do
    i:=(i+7) mod N;
  if P[i]=X then Vyhledej:=i
           else Vyhledej:=-1;
end;
```

```
int vyhledej(int X) {
  int i;
  i=(X/10 + X  while(P[i]>X) i=(i+7) if(P[i]==X) return(i);
  else return(-1);  }
```

Úloha.

a) Napište, jak musí být prvky uloženy v poli P, aby bylo možné k jejich vyhledávání použít funkci *Vyhledej*.

b) Napište co nejefektivnější proceduru *Zarad*, pomocí níž bude možné zařadit prvek X do pole P tak, aby mohla být k vyhledávání použita funkce *Vyhledej*. Předpokládejte, že před použitím procedury *Zarad* byly prvky v poli P takto uspořádány a že prvek X se v poli P dosud nenachází.

P – II – 3

Mějme kreslicí zařízení popsané v úloze P–I–3.

Úloha. Nalezněte a dokažte algoritmus, který pro danou vstupní posloupnost (ve tvaru znakového řetězce) určí, jak nejdále může pero star-

šího kreslicího zařízení skončit od místa, kde mělo skončit podle zadané posloupnosti.

P – II – 4

Vytvořte D0L systém (nebo dokažte, že to není možné), jehož růstová funkce je

a) $f(n) = n^n$,

b) $f(n) = n^2 \cdot 2^n$.

Studijní text o D0L systémech najdete u zadání úlohy P–I–4.

P – III – 1

Učební text čtěte v úloze P–I–1.

Úloha. Na vstupu je zadán N-úhelník a M-úhelník. Napište program, který spočítá obsah jejich průniku a vyjádří ho počtem jednotkových trojúhelníků.

Poznámka: Minimalizujte paměťovou a časovou složitost algoritmu. Můžete předpokládat, že vstupní data jsou zadána korektně.

P – III – 2

Pro danou konstantu N (N je prvočíslo větší než 10, např. 991) máme vyhrazeno N-prvkové celočíselné pole P s indexy 0 až $N-1$. Prvky pole jsou na začátku výpočtu inicializovány na nulu. Do tohoto pole budeme postupně zařazovat různá kladná celá čísla pomocí procedury *Zarad*:

```
procedure Zarad(x:integer);
var i:integer;
begin
  i := x mod N;
  while P[i] <> 0 do
    if P[i]>x then
      i := (i+7) mod N
    else
      i := (i+3) mod N;
  P[i] := x;
end;
void Zarad(int x) {
  int i;
```

```
    i = x
      while (P[i]!=0)
      if (P[i]>x) i = (i+7)
      else i = (i+3)
    P[i] = x;
}
```

Úloha.

a) Napište co nejefektivnější funkci *Vyhledej* s jedním celočíselným parametrem x, která zjistí, zda se prvek x nachází v poli P. Pokud ano, funkce vrátí hodnotu indexu prvku x v poli P. Jestliže číslo x v poli P není, funkce vrátí hodnotu -1.

b) Rozhodněte, zda je výpočet procedury *Zarad* v případě, že je v poli P alespoň jedno volné místo (tj. aspoň jeden prvek pole P má hodnotu 0), vždy konečný. Odpověď dokažte.

P – III – 3

a) Sestrojte D0L systém s nejvýše dvěma pravidly, jehož růstová funkce je $f(n) = n^2$, nebo dokažte, že takový systém neexistuje.

b) Sestrojte D0L systém s růstovou funkcí $f(n) = \lfloor \log_{k+1}(n+1) \rfloor + +1$, kde k je počet symbolů abecedy, nebo dokažte, že takový systém neexistuje.

Poznámka: Zápisem $\lfloor X \rfloor$ rozumíme dolní celou část z hodnoty výrazu X, tzn. hodnotu výrazu X zaokrouhlenou dolů na nejbližší celé číslo. Například $\lfloor 4{,}789 \rfloor = 4$, $\lfloor 5 \rfloor = 5$.

Studijní text o D0L systémech najdete u zadání úlohy P–I–4.

P – III – 4

Program: `LAMPY.PAS / LAMPY.CPP`
Vstup: `LAMPY.IN`
Výstup: `LAMPY.OUT`

Veřejná prostranství ve městě jsou osvětlena N pouličními lampami. Každá z lamp má jednoznačně přiřazeno číslo od 1 do N. K zapínání a vypínání veřejného osvětlení slouží v řídicím středisku M přepínačů. Každý z přepínačů přepne najednou několik lamp. Přepnout lampu znamená zapnout ji, pokud zrovna nesvítí, a vypnout ji, jestliže momentálně svítí. Přepínač číslo i přepíná všechny lampy s čísly od a_i do b_i,

tzn. lampy s čísly ležícími v uvedeném intervalu. Můžete předpokládat, že $0 < M < 100$, $0 < N < 100$.

Úloha. Napište program, který zjistí, zda je možné zapnout pomocí přepínačů v řídicím středisku všechny lampy, jsou-li na začátku všechny lampy vypnuté.

Vstupní soubor: Vstupní soubor obsahuje několik zadání. První řádek vstupního souboru je tvořen jediným číslem, které udává počet zadání v souboru. Pro každé zadání obsahuje vstupní soubor blok údajů v tomto tvaru: Na prvním řádku bloku jsou uvedeňa čísla N a M, kde N je počet lamp ve městě a M je počet přepínačů v řídicím středisku. Dalších M řádků obsahuje pro jednotlivé přepínače vždy dvojici čísel a_i, b_i (pro každý přepínač interval čísel lamp, které se pomocí něho přepnou). Jednotlivé bloky údajů jsou ve vstupním souboru odděleny vždy jedním prázdným řádkem.

Výstupní soubor: Pro každé zadání obsažené ve vstupním souboru obsahuje výstupní soubor jeden řádek s jednou z následujících zpráv:

„Lze“ — pokud je možné rozsvítit všechny lampy pomocí přepínačů v řídicím středisku,

„Nelze“ — jestliže to není možné.

Příklad:

Soubor `LAMPY.IN`
2
5 3
1 3
2 5
2 3
10 5
1 9
2 10
3 10
4 10
5 10

Soubor `LAMPY.OUT`
Lze
Nelze

P – III – 5

Program: `MANHATAN.PAS / MANHATAN.CPP`
Vstup: `MANHATAN.IN`
Výstup: `MANHATAN.OUT`

Ve městě Manhatan vedou všechny ulice buď ze severu na jih, nebo ze západu na východ. Předpokládejte, že se ulice táhnou oběma směry dostatečně daleko. V průsečíku každých dvou ulic různých směrů je křižovatka.

Křižovatku označíme dvojicí čísel (i, j), jestliže se jedná o křižovatku v pořadí i-té západovýchodní ulice počítáno ze severu a j-té severojižní ulice počítáno od západu. Křižovatky jsou tedy očíslovány od $(1, 1)$ do (M, N), kde M je počet západovýchodních ulic a N je počet severojižních ulic. Můžete předpokládat, že $0 < M < 100$, $0 < N < 100$.

Na některých křižovatkách se pracuje na opravě vozovky, a proto přes ně není možné přejet. Na křižovatkách $(1, 1)$ a (M, N) se nepracuje.

Arpád vyjíždí každé ráno z křižovatky $(1, 1)$ a potřebuje se dostat do firmy, která sídlí na opačném konci města, tzn. na křižovatce (M, N).

Úloha. Napište program, který zjistí, kolika různými cestami se může Arpád dostat do své firmy, jestliže pojede vždy jen ve směru na jih nebo na východ. Program dále vypíše nejmenší počet křižovatek, přes které se může takovouto cestou do firmy dostat (včetně křižovatek $(1, 1)$ a (M, N)).

Vstupní soubor: Vstupní soubor obsahuje několik zadání. První řádek vstupního souboru je tvořen jediným číslem, které udává počet zadání v souboru. Pro každé zadání obsahuje vstupní soubor blok dat. Na prvním řádku každého bloku jsou uvedena čísla M a N, kde M je počet východozápadních ulic a N je počet severojižních ulic. Na dalším řádku se nachází číslo K — počet křižovatek ve městě, na nichž se opravuje vozovka. Na každém z následujících K řádků jsou uvedena vždy dvě čísla určující polohu křižovatky, kde se pracuje. Jednotlivé bloky vstupních údajů jsou odděleny vždy jedním prázdným řádkem.

Výstupní soubor: Pro každé zadání ve vstupním souboru obsahuje výstupní soubor jeden řádek. Na něm jsou

- buď dvě čísla A a B, kde A je počet možných různých cest a B je počet křižovatek na nejkratší z nich (včetně křižovatek $(1, 1)$ a (M, N)), a to v případě, že existuje aspoň jedna cesta požadovaného typu,
- nebo zpráva „Cesta neexistuje“, jestliže cesta požadovaného typu neexistuje.

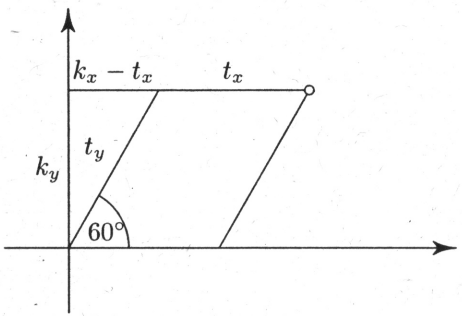
Příklad:

Soubor MANHATAN.IN
2 4 3 2 2 2 3 2 2 4 2 1 2 2 3

Soubor MANHATAN.OUT
2 6 Cesta neexistuje

P – I – 1

a) Nejprve si ukážeme, jak lze přepočítat zadané souřadnice do pravoúhlé souřadnicové soustavy. Označme (t_x, t_y) souřadnice v naší trojúhelníkové soustavě a (k_x, k_y) souřadnice v pravoúhlé souřadnicové soustavě.



Obr. 29

Z vlastností pravoúhlého trojúhelníku na obr. 29 vyplývá

$$\frac{k_y}{t_y} = \cos 30°, \quad \frac{k_x - t_x}{t_y} = \sin 30°,$$

a tedy pro souřadnice (k_x, k_y) platí:

$$k_y = \frac{1}{2}\sqrt{3}t_y, \quad k_x = \frac{1}{2}t_y + t_x$$

Pro účely přepočítání na souřadnice na obrazovce zavedeme následující proměnné:

- zvětšení k (počet pixelů na obrazovce na jednotku délky)
- souřadnice počátku souřadnicové soustavy na obrazovce (o_x, o_y)

Ve vzorovém řešení je k konstanta a o_x, o_y se počítají tak, aby bod $(0, 0)$ ležel ve středu obrazovky.

Shrneme výsledky předcházejících úvah. Bod zadaný v pravoúhlé soustavě souřadnicemi (k_x, k_y) se zobrazí na obrazovce na souřadnice $(o_x + k \cdot k_x, o_y - k \cdot k_y)$. Je-li bod zadán v trojúhelníkové soustavě souřadnicemi (t_x, t_y), potom jeho souřadnice v pravoúhlé soustavě jsou $k_y = \frac{1}{2}\sqrt{3}t_y$, $k_x = \frac{1}{2}t_y + t_x$ a na obrazovce se tedy zobrazí na souřadnice $\left(o_x + k \cdot t_x + k\frac{1}{2}t_y, o_y - k\frac{1}{2}\sqrt{3}t_y\right)$. Jestliže nyní označíme $j_{xx} := k$,

$j_{yx} := \frac{1}{2}k$, $j_{yy} := -\frac{1}{2}\sqrt{3}k$ dostáváme, že se bod se souřadnicemi (t_x, t_y) v trojúhelníkové soustavě zobrazí na obrazovce do bodu

$$(o_x + j_{xx}t_x + j_{yx}t_y, o_y + j_{yy}t_y).$$

b) Jelikož všechny vrcholy našeho N-úhelníku musí ležet v mřížových bodech a vzdálenost následujícího vrcholu musí být vždy 1 od předcházejícího, přicházejí pro vrchol se souřadnicemi (t_x, t_y) v úvahu tyto vrcholy jako následující (odpovídající směry, v nichž vrcholy leží vzhledem k (t_x, t_y) označme od 0 po 5 v pořadí, v jakém jsou zde vypsány): (t_x, t_y+1), (t_x+1, t_y), (t_x+1, t_y-1), (t_x, t_y-1), (t_x-1, t_y), (t_x-1, t_y+1).

Nechť jsme nyní do vrcholu (t_x, t_y) přišli ze směru s_s a odcházíme z něho ve směru s_n. Vidíme, že pokud $s_n = s_s$, potom jsme se v bodě neotočili, pokud $s_n = (s_s + 1) \bmod 6$ nebo $s_n = (s_s + 2) \bmod 6$ potom jsme se otočili doprava, jinak doleva (případ $s_n = (s_s + 3) \bmod 6$ nemůže nastat).

Budeme obcházet náš N-úhelník po obvodu (tzn. v pořadí, v jakém byly zadány jeho vrcholy — připomeňme si, že pořadí bodů může být zadáno buď ve směru, nebo proti směru hodinových ručiček) a budeme sledovat, v jakém směru se otáčíme v jednotlivých vrcholech (směr otáčení je dán menším z dvou úhlů u vrcholu). Je-li náš N-úhelník konvexní, potom se zřejmě musíme otáčet stále stejným směrem a naopak, jestliže konvexní není, musíme se během obcházení otočit aspoň jednou doprava a aspoň jednou doleva.

Tato jednoduchá úvaha bude základem našeho algoritmu. Obcházíme postupně N-úhelník, přičemž když se otočíme doprava, nastavíme proměnnou *doprava*, když se otočíme doleva, nastavíme proměnnou *doleva*. Jestliže jsou na konci obě proměnné nastavené, N-úhelník není konvexní, v opačném případě je konvexní.

Časová i paměťová složitost tohoto algoritmu je lineární ($O(N)$), správnost vyplývá z výše uvedené úvahy.

P – I – 2

Má-li existovat posloupnost hodnot $H[1], \ldots, H[L]$, musí především platit, že $L < N$. Dále platí, že když do pole zařazujeme i-tou hodnotu, počet kolizí $K[i]$ je nejvýše $i - 1$. ($K[i] = i - 1$ tehdy, pokud dojde ke kolizi se všemi už zařazenými prvky). Z toho ale vyplývá, že jestliže $C_K > 0 + 1 + \cdots + (L - 1) = \frac{1}{2}L(L - 1)$, posloupnost opět neexistuje.

Označme $a \oplus b := (a + 7b) \bmod N$. Vezmeme nyní libovolný index nějakého prvku v našem poli j. Potom jestliže procházíme prvky $j \oplus 1, j \oplus 2, \ldots, j \oplus N$, přejdeme každým prvkem našeho pole právě jednou (protože N je prvočíslo).

Máme-li v poli obsazeno k prvků s indexy j_0, $j_0 \oplus 1$, $j_0 \oplus 2$, ..., $j_0 \oplus (k-1)$, pak pro libovolné $K[k+1]$, kde $K[k+1] \in \{0, 1, \ldots, k\}$, umíme nalézt vhodný prvek $H[k+1]$ takový, že se zařadí do pole na index $j_0 \oplus k$. Označme[1] $i_{k+1} := (H[k+1] \operatorname{div} 10 + H[k+1] \bmod 10) \bmod N$ první index vypočítaný pro prvek $H[k+1]$ v proceduře *Zarad*. Potom když vezmeme

$$i_{k+1} = j_0 \oplus (k - K[k+1]),$$

tak se nám prvek $H[k+1]$ zařadí na pozici $j_0 \oplus k$.

Pro libovolný počáteční index j_0 a posloupnost K ($K[i] \leqq i-1$ pro $i = 1, 2, \ldots, L$) tedy umíme tímto způsobem nalézt příslušnou posloupnost prvních indexů $j_0 = i_1, i_2, \ldots, i_L$.

Posloupnost K však není zadána, známe jen její součet C_K. Proto si ji můžeme zvolit libovolně, pokud možno co nejjednodušším způsobem. Položme například $K[i] := i - 1$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$ a jestliže $m \neq L$ $K[m+1] := C_K - \frac{1}{2}m(m-1)$ a $K[i] := 0$ pro $i = m+2, \ldots, L$, přičemž m vezmeme největší takové, že $\frac{1}{2}m(m-1) \leqq C_K$. Řešením kvadratické rovnice lehce zjistíme, že $m = \left\lfloor \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 8C_K}\right) \right\rfloor$.

Dále je třeba vyřešit problém, jak zvolit j_0 tak, aby se při výše popsané volbě posloupnosti K první index posledního prvku posloupnosti H nalezený pomocí vztahu $i_L = j_0 \oplus (L - 1 - K[L])$ skutečně rovnal hodnotě vypočítané v proceduře *Zarad* $((H[L] \operatorname{div} 10 + H[L] \bmod 10) \bmod N)$. Pro operaci $\oplus$ platí $a \bmod N = (a \oplus b) \oplus (-b)$, a tedy pokud $i_L = j_0 \oplus (L - 1 - K[L])$, potom

$$j_0 = i_0 \oplus (-(L - 1 - K[L])).$$

Zbývá určit, jak z hodnoty prvního indexu i_j vypočítat hodnotu prvku posloupnosti $H[j]$. Je zřejmé, že bude-li mít prvek hodnotu $10i_j$, určitě bude jeho index i_j. Prvky posloupnosti H však mají být nenulové a navzájem různé. Proto k j-tému prvku ještě připočítáme číslo jN. Kdyby se takto vypočítaná hodnota náhodou rovnala číslu G, odečteme od něj

[1] Viz proceduru *Zarad*.

číslo 9 (tím bude $H[j] \bmod 10 = 1$, ale hodnota $H[j] \operatorname{div} 10$ klesne o 1, takže součet se zachová).

Shrňme předcházející úvahy do funkce *Prvek* (i, j), která pro daný první index i a pořadové číslo j určí hodnotu $H[j]$

Funkce *Prvek* (i, j)
- Jestliže $j = L$ vrať G, jinak
- jestliže $10i + jN = G$ vrať $10i + jN - 9$
- jinak vrať $10i + jN$

Na závěr uveďme přehledný zápis celého algoritmu tak, jak byl popsán výše:

1. Jestliže $L > N$ nebo $C_K > \frac{1}{2}L(L-1)$, posloupnost neexistuje, jinak pokračuj bodem 2.
2. $m := \lfloor \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 8C_K}) \rfloor$, podle hodnoty m urči $K[L]$:
   - pokud $m = L, K[L] := L - 1$
   - pokud $m + 1 = L, K[L] := C_K - \frac{1}{2}m(m-1)$
   - pokud $m + 1 < L, K[L] := 0$

   a $j_0 := i_0 \oplus (-(L - 1 - K[L]))$.
3. $K[i] :=$ *Prvek* $(0, i)$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$
4. jestliže $m + 1 < L$, potom $K[m+1] :=$ *Prvek* $(m - C_K + \frac{1}{2}m(m-1), m+1)$
5. $K[i] :=$ *Prvek* $(j_0 \oplus (i-1), i)$ pro $i = m+2, \ldots, L$

Časová složitost algoritmu je lineární ($O(N)$), paměťová konstantní ($O(1)$), neboť hodnoty $K[i]$ můžeme přímo vypisovat.

P – I – 3

Řešení nepředstavuje prakticky žádné vážnější problémy.

P – I – 4

a) Řešením je D0L systém $(\{a\}, \{a \to a\}, a^4)$.

Tvrzení: V n-tém kroku je tvar slova a^4, a tedy $f(n) = 4$.

Důkaz: Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí.

Nechť dále $w_n = a^4$. Potom se uplatněním pravidla změní každé písmeno a na a, a tedy $w_{n+1} = a^4$, čímž je tvrzení dokázáno.

b) Řešením je D0L systém $(\{a, b\}, \{a \to a, b \to ab\}, b)$.

Tvrzení: V n-tém kroku je tvar slova $a^{n-1}b$, a tedy $f(n) = n$

Důkaz: Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí.

Nechť dále $w_n = a^{n-1}b$. Potom se uplatněním pravidel změní každé písmeno a na a a písmeno b na ab, a tedy $w_{n+1} = a^{n-1}ab = a^nb$, čímž je tvrzení dokázáno.

c) Řešením je D0L systém $(\{a,b\}, \{a \to a, b \to a^3b\}, a^4b)$.

Tvrzení: V n-tém kroku je tvar slova $a^{3n+1}b$, a tedy $f(n) = 3n + 2$.

DŮKAZ: Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí.

Nechť dále $w_n = a^{3n+1}b$. Potom se uplatněním pravidel změní každé písmeno a na a a písmeno b na a^3b, a tedy $w_{n+1} = a^{3n+1}a^3b = a^{3(n+1)+1}b$, čímž je tvrzení dokázáno.

d) Řešením je D0L systém $(\{b,c,d\}, \{b \to b, c \to bc, d \to bc^2d\}, d)$.

Tvrzení: V n-tém kroku je tvar slova $b^{(n-1)^2}c^{2(n-1)}d$, a tedy $f(n) = $ $= (n-1)^2 + 2(n-1) + 1 = n^2$.

DŮKAZ: Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí.

Nechť dále $w_n = b^{(n-1)^2}c^{2(n-1)}d$. Potom po uplatnění pravidel bude $w_{n+1} = b^{(n-1)^2}b^{2(n-1)}c^{2(n-1)}bc^2d = b^{n^2}c^{2n}d$, čímž je tvrzení dokázáno.

Poznámka. Ukážeme ještě postup, jak je možné tento D0L systém sestrojit. Platí:

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1.$$

To znamená, že při přechodu od n-tého k $(n+1)$-mu slovu musí „přibýt" $2n+1$ písmenek. Kdybychom tedy našli systém, který má růstovou funkci $f(n) = 2n + 1$, potom by stačilo, aby každé jeho písmenko v každém kroku vygenerovalo nějaké „neutrální" písmenko (tj. písmenko, které se v dalších krocích mění už jen samo na sebe). Takový stroj ale lehce sestrojíme: $(\{c,d\}, \{c \to c, d \to c^2d\}, d)$ — důkaz tu nebudeme dělat, neboť je naprosto analogický s důkazy předcházejících tvrzení. Potom náš stroj bude vypadat takto: $(\{b,c,d\}, \{b \to b, c \to bc, d \to bc^2d\}, d)$.

Tento postup je možné rovněž použít jako důkaz správnosti, v mnoha případech je však jednodušší vzniklý D0L systém dokázat indukcí (viz výše). Ve skutečnosti ke konstrukci D0L systému v případě e) byl použit obdobný postup.

e) Řešením je D0L systém $(\{b,c,d,e,f\}, \{b \to b, c \to bde^5f, d \to$ $\to bd, e \to bde, f \to bde^6f\}, c^k)$.

Tvrzení: Pro $n \geqq 2$ je tvar slova $b^{k(n-1)^3}d^{k(3n^2-9n+7)}e^{k(6n-7)}f^k$. Jelikož $f(1) = k$, je $f(n) = kn^3$ $(k((n-1)^3 + 3n^2 - 9n + 7 + 6n - 7 + 1) = kn^3$ pro $n \geqq 2)$.

DŮKAZ: Pro $n = 1$ a $n = 2$ tvrzení zřejmě platí.

Nechť tvrzení platí pro nějaké $n \geqq 2$. Potom

$$w_n = b^{k(n-1)^3}d^{k(3n^2-9n+7)}e^{k(6n-7)}f^k$$

a po uplatnění pravidel

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= b^{k(n-1)^3} b^{k(3n^2-9n+7)} d^{k(3n^2-9n+7)} b^{k(6n-7)} \\ &\quad d^{k(6n-7)} e^{k(6n-7)} b^k d^k e^{6k} f^k = \\ &= b^{kn^3} d^{k(3n^2-3n+1)} e^{k(6n-1)} f^k = \\ &= b^{kn^3} d^{k(3(n+1)^2-9(n+1)+7)} e^{k(6(n+1)-7)} f^k, \end{aligned}$$

čímž je tvrzení dokázáno.

P – II – 1

Uvažujme v naší soustavě souřadnic pás trojúhelníků, který je vymezen x-ovými souřadnicemi x a $x+1$. Vezmeme průnik tohoto pásu s hranicí našeho n-úhelníku. Každé hraně n-úhelníku uvnitř pásu přiřadíme směr podle toho, v jakém pořadí byly zadány její krajní body. Dostaneme tak soustavu hran jednotkové délky, přičemž

- Počet hran je sudý (pokud projdeme přes tento pás doprava, potom abychom n-úhelník uzavřeli, musíme přes tento pás přejít také doleva a naopak).
- Je-li směr některé hrany doleva, směr nejbližší nižší a vyšší hrany je doprava a naopak.
- Nejvyšší a nejnižší hrana vede ve všech pásech (tzn. pro všechna x) stejným směrem, přičemž nejvyšší hrana vede opačným směrem než nejnižší hrana.

Plocha průniku pásu a našeho n-úhelníku je zřejmě rovna součtu ploch ohraničených nejvyšší hranou a druhou nejvyšší hranou, třetí a čtvrtou nejvyšší hranou, ..., druhou a první nejnižší hranou. Předpokládejme nyní, že nejnižší hrana vede doleva. Potom plochu průniku n-úhelníku a našeho pásu spočítáme tak, že plochu v pásu „pod" hranou vedoucí doprava vždy přičítáme a plochu „pod" hranou vedoucí doleva odčítáme.

Toto však nemusíme provádět po jednotlivých pásech. Nejprve položíme *plocha* := 0. Nechť y je výška aktuálního bodu n-úhelníku. Jestliže další bod leží napravo dole (relativní souřadnice $(1,-1)$), připočítáme k ploše $2y-1$, pokud je napravo (relativní souřadnice (1,0)), přičteme $2y$. Jestliže je další bod nalevo nahoru (relativní souřadnice $(-1,1)$), odečteme od plochy $2y+1$, pokud je nalevo (relativní souřadnice $(-1,0)$), odečteme $2y$. V ostatních případech (relativní souřadnice (0,1) a $(0,-1)$) nepřipočítáváme nic, neboť tyto hrany neprotínají žádný pás.

Co se stane, jestliže byla orientace hran opačná, než jsme předpokládali? Potom dostaneme záporné číslo a jeho absolutní hodnota je rovna ploše n-úhelníku.

Poznámka: V předcházející úvaze jsme předpokládali, že se celý n-úhelník nachází jen nad osou x. Je však jasné, že algoritmus zůstává beze změny, i když bude n-úhelník ležet celý nebo částečně pod osou x.

Správnost algoritmu je zřejmá z předcházejících úvah. Časová složitost algoritmu je $O(n)$, paměťová $O(1)$.

P – II – 2

a) Označme $h(x) := (x \bmod 10 + x \operatorname{div} 10) \bmod N$. Funkce *Vyhledej* při hledání prvku x postupně prohlíží prvky pole P s indexy $h(x), (h(x)+7) \bmod N, (h(x)+14) \bmod N, \ldots, (h(x)+7l) \bmod N$. Skončí, když nastane jedna z těchto tří možností:

- najde hledaný prvek x
- najde prvek menší než x
- najde prázdné políčko (prvek s hodnotou 0).

Pokud nastala první možnost, prvek se v poli nachází, jinak v poli není. N a 7 jsou nesoudělná čísla. Z toho vyplývá, že pro každé $i \in \{0,1,\ldots,N-1\}$ existuje $j \in \{0,1,\ldots,N-1\}$ takové, že $i = (h(x)+7j) \bmod N$. V poli je aspoň jedno prázdné políčko ($M < N$), a proto l bude vždy menší než N.

Nechť se v poli P prvek x nachází na místě s indexem i. Nechť $j \in \{0,1,\ldots,N-1\}$ je takové číslo, že $i = (h(x)+7j) \bmod N$. Aby funkce *Vyhledej* prvek x našla, musí platit, že prvky s indexy $h(x), (h(x)+7) \bmod N, (h(x)+14) \bmod N, \ldots, (h(x)+7(j-1)) \bmod N$ budou větší než x.

b) Pokud do tabulky chceme uložit prvek x, postupujeme opět po posloupnosti indexů $h(x), (h(x)+7) \bmod N, (h(x)+14) \bmod N, \ldots, (h(x)+7l) \bmod N$ tak dlouho, až najdeme prvek menší než x nebo prázdné políčko. Jestliže jsme našli prázdné políčko, prvek x tam můžeme uložit a funkce *Vyhledej* ho jistě najde, neboť před ním bude prohledávat jen větší prvky. Pokud však je na tomto místě prvek s hodnotou y_1 ($y_1 < x$), uložíme sem prvek x. Při hledání prvku y_1 se předtím funkce *Vyhledej* zastavila na indexu $(h(x)+7l) \bmod N$, ale tam je nyní prvek x větší než y_1, takže funkce bude pokračovat dále po indexech $(h(x)+7(l+1)) \bmod N, \ldots, (h(x)+7l_1) \bmod N$. Prvek y_1 uložíme na místo $(h(x)+7l_1) \bmod N$. Jestliže tam předtím bylo prázdné políčko,

skončíme, jestliže tam byl prvek y_2 ($y_2 < y_1$), opět postupujeme dále po indexech $(h(x) + 7(l_1 + 1)) \bmod N, \ldots, (h(x) + 7l_2) \bmod N$. Toto opakujeme, dokud nenajdeme prvok y_k, který se již uloží na prázdné políčko. Na základě tohoto postupu můžeme sestavit proceduru *Zarad*:

```
procedure Zarad(X:integer);
var i:integer;
begin
  i:=(X mod 10 + X div 10) mod N;       {i:=h(X)}
  while P[i]<>0 do begin
    if P[i]<X then      {našli jsme menší prvek}
      swap(P[i],X);     {vymění hodnoty P[i] a X}
    i:=(i+7) mod N;     {posuneme se dále}
  end;
  P[i]:=X;              {na volné políčko uložíme X}
end;
```

Procedura *Zarad* vždy skončí, neboť $M < N$, a tedy v poli je nějaké políčko $P[i]$, které je prázdné, a pro i existuje j tak, že $(h(x) + 7j) \bmod N = i$. Proto nejpozději po j průchodech cyklus while skončí. Po provedení procedury všechny prvky, které v poli P byli, v něm zůstanou (i když možná na jiných místech) a přibude pouze prvek x. Současně pro každý index i ($0 \leqq i < N$) platí, že hodnota $P[i]$ před provedením procedury $Zarad(x)$ je menší nebo stejná jako hodnota $P[i]$ po provedení procedury. Nechť tedy po provedení procedury $Zarad(x)$ spustíme funkci $Vyhledej(y)$. Mohou nastat tyto možnosti:

- Prvek y se v poli P nenachází. Funkce $Vyhledej(y)$ nemůže nalézt něco, co v poli P není, a proto vrátí správný výsledek.
- $y = x$. V tomto případě už z popisu algoritmu vyplývá, že funkce $Vyhledej$ prvek x najde.
- $y \neq x$, y se nachází v poli P a jeho poloha se během výpočtu procedury $Zarad(x)$ nezměnila. Předtím funkce $Vyhledej$ prohledávala indexy $h(y), (h(y) + 7) \bmod N, \ldots, (h(y) + 7l) \bmod N$. To znamená, že pro každé i, $0 \leqq i < l$, platilo $P[(h(y) + 7i) \bmod N] > y$. Protože se hodnota žádného prvku z P během provádění $Zarad(x)$ nesnížila, platí to i nadále a proto $Vyhledej(y)$ bude prohledávat stejné indexy a úspěšně y najde.
- $y \neq x$, y se nachází v poli P a jeho poloha se během výpočtu procedury $Zarad(x)$ změnila, tj. je to jeden z prvků $y_1, y_2, \ldots, y_k$.

Nechť předtím *Vyhledej* prohledávala indexy $h(y), (h(y)+7) \bmod N, \ldots, (h(y)+7l) \bmod N$. Ze stejných důvodů jako v předcházejícím případě ani nyní neskončí dříve, ale na místě s indexem $(h(y)+7l) \bmod N$ je nyní prvek větší než y, a proto funkce bude pokračovat dále. Z popisu algoritmu však vyplývá, že prvek, na kterém se prohledávání zastaví, je právě hledaný prvek y.

P – II – 3

Celkový posun pera je součtem jednotlivých vektorů určených vstupní posloupností. Když starší kreslicí zařízení udělá pohyb o jednotku delší nebo kratší, je to to totéž, jako kdyby se kromě určeného vektoru posunulo ještě o jednotkový vektor ve směru nebo proti směru svého natočení. Protože sčítání vektorů je komutativní, představme si, že se tyto posuny o jednotkové vektory provedou všechny až nakonec. Nechť množina A je množina obsahující ke každému vektoru ze vstupní posloupnosti dva navzájem opačné jednotkové vektory (ve směru a proti směru tohoto vektoru). Naší úlohou tedy je vybrat z množiny A podmnožinu, jejíž součet je co nejdelší. Vybraná podmnožina může být libovolná (zařízení se sice vždy posune nejvýše o jeden z dvojice navzájem opačných vektorů, ale pokud bychom vybrali oba, je to totéž, jako kdybychom nevybrali ani jeden z nich).

Podmnožina s největším součtem jistě obsahuje z každé dvojice opačných vektorů právě jeden. To lehce dokážeme sporem: nechť vektor (x, y) je součtem podmnožiny s největším součtem, která neobsahuje ani jeden z jednotkových vektorů (x_1, y_1) a $(-x_1, -y_1)$. Potom ale jeden z vektorů $(x+x_1, y+y_1)$, $(x-x_1, y-y_1)$ je určitě delší než vektor (x, y). Platí, že $x_1^2+y_1^2 = 1$ a jedno z čísel $1+2(xx_1+yy_1)$, $1-2(xx_1+yy_1)$ je určitě kladné. Délka vektoru $(x+x_1, y+y_1)$ je $\sqrt{x^2+y^2+x_1^2+y_1^2+2(xx_1+yy_1)}$ a délka vektoru $(x-x_1, y-y_1)$ je $\sqrt{x^2+y^2+x_1^2+y_1^2-2(xx_1+yy_1)}$. Jedna z těchto délek je tedy jistě větší než délka vektoru (x, y), která je rovna $\sqrt{x^2+y^2}$. Proto vektor (x, y) není vektor s největší možnou délkou. Podobně se dá zdůvodnit, že pokud A obsahuje více stejných dvojic vektorů, do podmnožiny s největším součtem se vybere z každé dvojice stejný vektor.

Nyní dokážeme následující větu: Hledané řešení obsahuje všechny vektory z A ležící v jedné polorovině určené některou přímkou vedoucí bodem (0,0). Jsou-li některé dvojice vektorů rovnoběžné s přímkou, vyberou se vektory v jednom směru.

DŮKAZ: Nechť (x, y) je součet podmnožiny s nejdelším součtem, nechť přímka p je kolmá na (x, y) a prochází bodem $(0, 0)$. Nechť (x_1, y_1) je libovolný vektor z poloroviny, v níž se nachází (x, y). Potom úhel vektorů (x_1, y_1) a (x, y) je nejvýše 90 stupňů. Proto délka vektoru $(x + x_1, y + y_1)$ je větší než délka (x, y) (podle kosinové věty). Pokud by naše podmnožina neobsahovala některý z vektorů z této poloroviny, její součet se přidáním tohoto vektoru tudíž prodlouží, takže by nemohla být hledaným řešením. Jestliže by naopak obsahovala některý vektor z opačné poloroviny, jeho ubrání je totéž jako přidání vektoru k němu opačného (který je už z naší poloroviny), a to opět prodlouží součet.

Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ jsou jednotkové vektory z množiny A uspořádané podle směru (vektor a_{i+n} je opačný k vektoru a_i pro $1 \leqq i \leqq n$). Vezměme dva sousední vektory z takto setříděné posloupnosti. Poloroviny určené všemi přímkami procházejícími „mezi" těmito dvěma vektory obsahují stejnou podmnožinu vektorů z A, a proto stačí uvažovat jen přímky se směry vektorů z A. Polorovina určená přímkou ve směru vektoru a_i obsahuje vektory $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+n-1}$, $1 \leqq i \leqq n$. Stačí tedy určit všechny takovéto součty a vybrat z nich největší. To lze provést pro již setříděnou posloupnost vektorů v čase $O(n)$.

Vzhledem k tomu, že směry vektorů určených vstupní posloupností jsou celé čísla od 0 do 359, můžeme je uspořádat v čase $O(n)$ přihrádkovým tříděním, tj. pro každý ze směrů spočítáme, kolik vektorů je v tomto směru. Máme-li l jednotkových vektorů téhož směru, můžeme je považovat za jeden vektor délky l. Stačí dokonce použít jen pole od 0 do 179, neboť vektor se směrem j a vektor k němu opačný se směrem $j + 180°$ mají stejnou délku.

P – II – 4

a) Dokážeme sporem, že není možné sestrojit požadovaný D0L systém. Nechť existuje D0L systém s růstovou funkcí n^n. Vezmeme k rovné maximální hodnotě z délek pravých stran pravidel. Z toho vyplývá, že máme-li v i-tém kroku slovo délky i^i, v $i + 1$-ním kroku může náš D0L systém vygenerovat slovo délky nejvýše ki^i. Uvažujme nyní slovo w_k. Jeho délka je k^k. Pro délku slova w_{k+1} potom musí platit

$$|w_{k+1}| < k|w_k| = kk^k = k^{k+1} < (k+1)^{k+1},$$

což je spor, neboť délka slova w_{k+1} má být $(k + 1)^{k+1}$.

b) řešením je D0L systém $(\{b,c,d\},\{b \to b^2, c \to b^2c^2, d \to \to b^2c^4d^2\}, dd)$.

Tvrzení: V n-tém kroku je tvar slova $(b^{(n-1)^2}c^{2(n-1)}d)^{2^n}$, a tedy $f(n) = 2^n((n-1)^2 + 2(n-1) + 1) = 2^n n^2$.

DŮKAZ: Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí.

Nechť dále $w_n = b^{2^n(n-1)^2}c^{2^n 2(n-1)}d^{2^n}$. Potom po uplatnění pravidel bude $w_{n+1} = (b^{(n-1)^2}b^{2(n+1)}c^{2(n-1)}bc^2d = b^{n^2}c^{2n}d)^{2^{n+1}}$, čímž je tvrzení dokázáno.

P ≥ III – 1

Uvažujme v naší souřadnicové soustavě vodorovný pás trojúhelníků, který je vymezen y-ovými souřadnicemi y a $y+1$. Jestliže vezmeme stranu mnohoúhelníku s procházející tímto pásem s koncovými body $[x_1, y]$, $[x_2, y+1]$, jistě platí, že $x_1 = x_2$ nebo $x_1 + 1 = x_2$. Pokud známe součet $x_1 + x_2$, dokážeme určit x_1 a x_2: $x_1 = \lfloor \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \rfloor$, $x_2 = \lceil \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \rceil$. Proto můžeme každou stranu, která není vodorovná, jednoznačně popsat uspořádanou dvojicí čísel (i, j), kde $i = x_1 + x_2$ a $j = y$. Dvojici (i, j) budeme nazývat souřadnicemi strany. Mějme stranu s se souřadnicemi konců $[x_1, y]$, $[x_2, y+1]$ a stranu s' se souřadnicemi konců $[x_1', y]$, $[x_2', y+1]$, přičemž strana s je nalevo od strany s'. Potom část pásu ohraničená stranami s a s' je lichoběžník nebo v krajním případě trojúhelník a jeho obsah $S = (x_1' - x_1) + (x_2' - x_2)$ (první sčítanec určuje počet jednotkových trojúhelníků, které mají jednu ze svých stran na spodní přímce pásu, druhý počet těch, které mají jednu ze stran na horní přímce pásu). Po úpravě dostaneme vztah $S = (x_1' + x_2') - (x_1 + x_2)$, což už je vyjádření přímo pomocí souřadnic stran.

Mějme nyní dva mnohoúhelníky A a B a zkoumejme průnik A, B a našeho vodorovného pásu. Tento průnik se bude zřejmě skládat z lichoběžníků (příp. trojúhelníků) ohraničených stranami mnohoúhelníků. Bod pásu patří do průniku, je-li nalevo od něj lichý počet stran A a zároveň lichý počet stran B. Tedy začátkem nějakého takovéhoto lichoběžníku bude strana, od níž vlevo je sudý počet stran jejího vlastního mnohoúhelníku a lichý počet stran druhého mnohoúhelníku. Naopak koncem takového lichoběžníku bude strana, od níž vlevo je lichý počet stran její vlastního a lichý počet stran druhého mnohoúhelníku. Strany mnohoúhelníků, které procházejí jedním pásem, můžeme setřídit zleva doprava, tj. podle jejich první souřadnice. Potom jediným průchodem přes utříděnou posloupnost stran jednoduše spočítáme plochu průniku.

Algoritmus je tedy následující: setřídíme strany obou mnohoúhelníků podle pásu, ve kterém se nacházejí (podle jejich druhé souřadnice), přičemž vodorovné strany můžeme vynechat. Strany téhož pásu setřídíme zleva doprava (podle první souřadnice). Potom procházíme zároveň oběma seznamy setříděných stran a hledáme strany, které jsou začátky nebo konci lichoběžníků, a jejich první souřadnice odpočítáváme nebo připočítáváme k celkovému součtu.

Zbývá ještě popsat realizaci třídění. Je třeba si uvědomit, že má-li mnohoúhelník nějaké dva vrcholy s x-ovými souřadnicemi i a j $(i < j)$, má také vrcholy s x-ovými souřadnicemi $i+1, i+2, \ldots, j-1$, neboť délka každé strany je 1. Rozdíl maximální a minimální x-ové souřadnice mnohoúhelníku je tedy nejvýše N. Totéž samozřejmě platí i pro y-ovou souřadnici. Proto na třídění stran použijeme algoritmus Radixsort. Strany setřídíme nejprve podle první souřadnice a potom podle druhé, přičemž v obou případech použijeme stabilní a lineární třídění. První souřadnice stran jsou ale součtem dvou souřadnic vrcholů, takže rozdíl dvou souřadnic stran může být i dvojnásobkem rozdílu souřadnic vrcholů.

Díky lineárnímu třídění je paměťová i časová složitost algoritmu $O(N+M)$, kde N a M jsou počty stran mnohoúhelníků.

P – III – 2

b) Protože 7 a N jsou nesoudělná čísla, existuje l takové, že $7l \bmod N = N-3$ a $0 \leqq l < N$. Platí, že $l < N-1$, neboť kdyby se rovnaly, muselo by platit $(7N-7) \bmod N = N-3$, což pro žádné $N > 10$ zjevně neplatí.

Vkládejme do prázdného pole P procedurou *Zarad* postupně prvky $(l+2)N, (l+1)N, \ldots, 4N, 3N, N$. Uloží se postupně v tomto pořadí na místa $0, 7, 14, \ldots, N-3$. V poli je nyní obsazeno $l+1$ míst, a tedy aspoň jedno místo je volné. Když nyní zavoláme proceduru *Zarad* s parametrem $2N$, bude proměnná i postupně nabývat hodnot $0, 7, 14, \ldots, N-3$, neboť na pozicích $0, 7, 14, \ldots, N-10$ jsou uložena čísla větší než $2N$. Ale $P[i] = N$, a proto další hodnota indexu bude opět 0. Procedura bude proto cyklicky nabývat stále tyto hodnoty a tudíž není konečná pro každý vstup.

a) Mějme funkci *Posun*, která nám vrátí další hodnotu, jakou by získal index i v proceduře *Zarad* (tato hodnota závisí na původní hodnotě i, na prvku x a prvku $P[i]$):

```
function Posun(i:integer; x:integer):integer;
begin
  if P[i]>x then
    posun:=(i+7) mod N
  else
    posun:=(i+3) mod N;
end;
```

V určitém stavu pole P chceme vyhledat prvek x. Definujme (nekonečnou) posloupnost indexů $h_0, h_1, h_2, \ldots$, kde $h_0 = x \bmod N$ a $h_{i+1} = Posun(h_i, x)$.

Mohou nastat tři případy:

1. Prvek x se v poli P nachází. Všimněte si, že procedura *Zarad* mění jen hodnoty nulových prvků pole P. Hodnoty na indexech, přes které přecházela procedura *Zarad*(x), se tedy nezměnily. Jsou to indexy $h_0, h_1, \ldots, h_k$, kde k je nejmenší číslo takové, že $P[h_k] = x$.
2. Prvek x se v poli nenachází a procedura *Zarad* by ho zařadila na volné místo $P[i]$. Při tomto zařazení by procedura prohlédla prvky P s indexy $h_0, h_1, \ldots, h_k$, kde k je nejmenší číslo takové, že $P[h_k] = 0$ (resp. že $i = h_k$).
3. Prvek x se v poli P nenachází a procedura *Zarad* pro vstup x neskončí. Také v tomto případě by procedura prohlédla indexy $h_0, h_1, \ldots$. Nechť k je nejmenší číslo takové, že existuje $l < k$ takové, že $h_l = h_k$. Potom posloupnost $\{h_n\}$ začíná indexy $h_0, h_1, \ldots, h_{l-1}$ a potom se už stále periodicky opakují indexy $h_l, h_{l+1}, \ldots, h_{k-1}$.

Funkce *Vyhledej* tedy rozpoznává tyto tři případy, v prvním případě vrátí h_k a ve druhých dvou -1. V prvních dvou případech stačí postupně vypočítávat indexy h_n, dokud nenajdeme 0 nebo x. Jestliže ale chceme zjistit, zda nenastal třetí případ, potřebujeme ověřit, jestli se právě vypočítaný index h_n už předtím v posloupnosti nevyskytoval. Budeme se po poli posunovat se dvěma indexy i a j, každý bude postupně nabývat hodnot posloupnosti h_n. Index i ale budeme posouvat „rychleji". Když i nabyde hodnoty h_n, tak hodnota j bude $h_{\lfloor n/2 \rfloor}$. V případě, že se indexy v posloupnosti periodicky opakují, po jistém čase bude platit $i = j$. V okamžiku, kdy j nabyde poprvé hodnoty h_l, i se nachází také někde v cyklu. Po každém posunu j se vzdálenost i a j zmenší o 1, neboť index i se mezitím posunul dvakrát, a tak vlastně „dobíhá" index j. Proto se index j posune nejvýše k-krát, a jelikož i se posouvá dvakrát tak často, celkový počet posunů je nejvýše $3k$.

```
function Vyhledej(x:integer);
var i,j,vysledek:integer;
    menit_j:boolean;
begin
  vysledek:=0;                {výsledek ještě neznáme}
  i:=x mod N;                 {první index}
  j:=i;
  menit_j:=false;
  while vysledek=0 do         {dokud neznáme výsledek}
    if P[i]=x then            {našli jsme x}
      vysledek:=i
    else if P[i]=0 then       {x v poli není}
      vysledek:=-1
    else begin
      i:=posun(i,x);          {posuneme i}
      if menit_j then begin {je-li třeba, posuneme j}
        j:=posun(j,x);
        if j=i then vysledek:=-1;
                              {i a j se setkaly - cyklus}
      end;
      menit_j:=not menit_j;
    end;
  Vyhledej:=vysledek;
end;
```

P – III – 3

a) Dokážeme sporem, že není možné sestrojit požadovaný D0L systém. Nechť tedy existuje D0L systém s růstovou funkcí n^2. Nechť má tento D0L systém pouze jedno pravidlo. Potom toto pravidlo musí mít tvar $a \to a^i$ a $w_1 = a$, neboť $|w_1| = f(1) = 1$. Pro w_2 platí $w_2 = a^i$ a $|w_2| = f(2) = 4$. Z toho vyplývá, že $i = 4$. Ale pak pro w_3 platí $w_3 = a^{i^2}$ a $|w_3| = f(3) = 9$. Dostáváme tedy, že $9 = i^2 = 4^2 = 16$, což je spor.

Náš D0L systém musí tedy mít alespoň dvě pravidla. Nechť jsou to pravidla $a \to u$, $b \to v$, kde u, v jsou z $\{a, b\}^*$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $w_1 = a$. Potom $w_2 = u$, a tudíž $|u| = f(2) = 4$. Nechť slovo u obsahuje k znaků a. Potom $w_3 = u^k v^{4-k}$ a platí, že

$|w_3| = f(3) = 9$. Ale současně platí $|w_3| = k|u| + (4-k)|v|$ a $|u| = 4$. Dostáváme tedy rovnici $4k + 4|v| - k|v| = 9$. Jestliže za k postupně dosadíme všechny možné hodnoty $(0, 1, 2, 3, 4)$, dostáváme pro $|v|$ následující rovnosti: $4|v| = 9$, $4+4|v|-|v| = 9$, $8+4|v|-2|v| = 9$, $12+4|v|-3|v| = 9$ a $16 + 4|v| - 4|v| = 9$. Ani jedna z těchto rovností však nemá nezáporné celočíselné řešení, a proto D0L systém s požadovanými vlastnostmi neexistuje.

b) D0L systém s požadovanými vlastnostmi neexistuje. Dokážeme to opět sporem. Nechť tedy existuje D0L systém s k-prvkovou abecedou a růstovou funkcí $f(n) = \lfloor \log_{k+1}(n+1) \rfloor + 1$.

Nechť $m > 1$. Označme n_1 nejmenší takové číslo n, pro které $f(n) = m$, a n_2 největší takovéto číslo. Potom $n_1 = (k+1)^{m-1} - 1$ a $n_2 = (k+1)^m - 2$. Tedy všechna slova w s indexem n_1, w s indexem $n_1 + 1, \ldots, w$ s indexem n_2 mají délku m. Jejich počet je $n_2 - n_1 + 1 = k(k+1)^{m-1}$. Ale různých slov délky m je k^m a $k^m < k(k+1)^{m-1}$. Proto určitě existují čísla $i, l > 0$ taková, že $w_i = w_{i+l}$. Když ale ze slova w_i vznikne po l krocích opět w_i, úsek $w_i, w_{i+1}, \ldots, w_{l-1}$ se bude i dále stále periodicky opakovat. Tedy D0L systém vyprodukuje nekonečně mnoho slov délky m, což je spor, neboť takových slov má být $n_2 - n_1 + 1$.

P – III – 4

Budeme nejprve řešit trochu obecnější úlohu: předpokládejme, že na začátku nemusí být všechny lampy vypnuté. Stav lamp si budeme pamatovat v poli l, kde $l[i] =$ true, pokud je i-tá lampa zapnutá a $l[i] =$ false, jestliže je vypnutá. Řešením této úlohy budeme rozumět takovou podmnožinu přepínačů, že pokud je všechny přepneme, všechny lampy budou zapnuté. Pokud $N = 0$, řešením úlohy je zřejmě prázdná množina. Nechť tedy $N > 0$. Mohou nastat dva případy:

1. $l[1] =$ false.

Jestliže žádný interval nezačíná lampou 1, úloha zjevně nemá řešení. V opačném případě najdeme nejkratší interval, který začíná lampou 1 (nechť jeho konec je b). Změníme všechna $l[i]$ z tohoto intervalu na opačná a všem intervalům, které začínají lampou 1, změníme začátek na $b + 1$ (intervaly, které se tím stanou prázdnými, už dále neuvažujeme). Dostáváme tak novou úlohu pro lampy $2, 3, \ldots, N$, která má řešení právě tehdy, má-li řešení původní úloha.

DŮKAZ: Nechť pozměněná úloha má řešení R. Potom když přepneme lampy z původní úlohy přepínači z R, budou svítit jen lampy s čísly

většími než b. Nechť R obsahuje k intervalů, kterým jsme začátek změnili z 1 na $b+1$. Nechť R' vznikne z R tak, že těmto intervalům změníme začátek zpět na 1. Jestliže je k liché, každou lampu z intervalu $\langle 1, b\rangle$ jsme oproti řešení R přepnuli ještě lichý počet krát, tedy zůstane zapnutá. V tomto případě je tedy R' řešením naší původní úlohy. Pokud je k sudé, lampy z intervalu $\langle 1, b\rangle$ zůstanou vypnuté a proto k R' je třeba ještě přidat interval $\langle 1, b\rangle$. Naopak, nechť naše původní úloha má řešení R. Počet intervalů z R, které obsahují lampu 1, je jistě lichý. Když všem těmto intervalům změníme začátek na $b+1$ a vyhodíme intervaly nulové délky, dostaneme řešení změněné úlohy.

2. $l[1] = \text{true}$

Protože lampa 1 už svítí, není třeba, aby se dala nějakým přepínačem přepnout. Jestliže neexistuje interval, který začíná lampou 1, úloha má řešení právě tehdy, má-li řešení úloha pro lampy $2, 3, \ldots, N$ a stejnou množinu intervalů. Pokud existuje interval, který začíná lampou 1, opět z nich vezmeme nejkratší, změníme začátky intervalů stejně jako v předchozím případě, ale neměníme hodnoty pole l. Takováto pozměněná úloha má opět řešení právě tehdy, když má řešení původní úloha.

Důkaz je obdobný jako v případě, kdy $l[1] = \text{true}$ (uvědomte si však, že počet intervalů, které obsahují lampu 1, musí být tentokrát samozřejmě sudý).

Naším úkolem však není nalézt řešení, ale pouze zjistit, zda nějaké řešení existuje. Je proto třeba na začátku nastavit všechny prvky pole l na false a podle uvedených úvah postupovat od první lampy až do poslední, přičemž modifikujeme pole l a začátky příslušných intervalů. Dostáváme tak algoritmus s časovou složitostí $O(NM)$ a paměťovou $O(N+M)$.

P – III – 5

Je důležité uvědomit si, že můžeme jít jen směrem na východ nebo na jih. Abychom se dostali z křižovatky $(1,1)$ na křižovatku (M,N), musíme přejít o $M-1$ ulic na jih a o $N-1$ ulic na východ. Je jedno, v jakém pořadí střídáme směry, počet křižovatek, kterými projdeme, je vždy $M+N-1$.

Počet různých cest také spočítáme jednoduše. Označme $a[i,j]$ počet různých cest z $(1,1)$ do (i,j). Pokud se křižovatka (i,j) opravuje, položíme $a[i,j] = 0$. Na libovolnou křižovatku ležící na východozápadní ulici číslo 1 (tj. na nejsevernější ulici) se můžeme dostat nejvýše jedním způsobem, a to tak, že půjdeme stále na východ. Jestliže se však opravuje

vozovka někde mezi touto křižovatkou a křižovatkou $(1,1)$, nemůžeme se tam dostat vůbec. Totéž platí i pro severojižní ulici číslo 1.

Uvažujme nyní křižovatku (i,j), kde $i,j > 1$ a tato křižovatka se neopravuje. Na tuto křižovatku můžeme přijít buď z křižovatky $(i-1,j)$, nebo z křižovatky $(i,j-1)$. Jestliže tedy známe hodnoty $a[i-1,j]$ a $a[i,j-1]$, pak $a[i,j] = a[i-1,j]+a[i,j-1]$. Na základě této úvahy můžeme sestrojit algoritmus, který bude postupně po řádcích vyplňovat pole a. Nakonec budeme mít v $a[M,N]$ počet různých cest z $(1,1)$ do (M,N). Je-li tento počet roven 0, žádná taková cesta neexistuje.

Vzhledem k tomu, že musíme vyplnit celou tabulku velikosti $M \times N$ a pro výpočet hodnoty každého políčka vykonáme konstantní počet operací, časová složitost algoritmu je $O(MN)$.

Korespondenční seminář ÚV MO 1995/96

Ani v tomto ročníku matematické olympiády se nepodařilo rozběhnout korespondenční seminář ÚV MO způsobem obvyklým v dřívějších letech. Po roce 1990 bohužel ubylo času i ochotných spolupracovníků, a tak se podařilo rozeslat jen dvě sedmice úloh, které uvádíme dále.

Korespondenční seminář by měl i nadále zůstat součástí péče o talentované studenty a zejména pak přípravy těch nejlepších na mezinárodní matematickou olympiádu. Je to jedna z mála možností, jak naše úspěšné řešitele zásobovat originálními a obtížnými úlohami z materiálů jury MMO a z jiných národních olympiád, a zkvalitnit tak jejich individuální přípravu.

Úlohy korespondenčního semináře

1.1 Pro libovolná dvě nezáporná celá čísla a, b a celé číslo c takové, že $ab \geqq c^2$, existuje přirozené n a celá čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ tak, že platí

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = a, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = b, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = c.$$

Dokažte.

1.2 Označme $\mathbb{R}_0$ množinu všech nenulových reálných čísel. Zjistěte, zda existuje funkce $f\colon \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_0$, která současně splňuje následující tři podmínky:

a) existuje kladné číslo M takové, že $-M \leqq f(x) \leqq M$ pro každé $x \in \mathbb{R}_0$;

b) $f(1) = 1$;

c) pro každé $x \neq 0$ platí

$$f\Big(x + \frac{1}{x^2}\Big) = f(x) + \Big(f\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big)^2.$$

1.3 V rovině je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Zvolme na straně BC body A_1, A_2 (A_2 mezi A_1 a C), na straně AC body B_1, B_2 (B_2 mezi B_1

a A) a na straně AB body C_1, C_2 (C_2 mezi C_1 a B) tak, aby

$$|\sphericalangle AA_1A_2| = |\sphericalangle AA_2A_1| = |\sphericalangle BB_1B_2| = |\sphericalangle BB_2B_1| = \\ = |\sphericalangle CC_1C_2| = |\sphericalangle CC_2C_1|.$$

Přímky AA_1, BB_1 a CC_1 ohraničují jeden trojúhelník, přímky AA_2, BB_2 a CC_2 ohraničují druhý trojúhelník. Dokažte, že šest vrcholů uvedených trojúhelníků leží na jedné kružnici.

1.4 Nechť k je kladné celé číslo. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho druhých mocnin přirozených čísel, jež jsou tvaru $2^k n - 7$, kde n je přirozené.

1.5 Nechť $\mathbb{N}$ označuje množinu všech přirozených čísel. Dokažte, že existuje jediná funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že

$$f\big(m + f(n)\big) = n + f(m + 95)$$

pro všechna m a n z $\mathbb{N}$. Jaká je hodnota součtu $\sum_{k=1}^{19} f(k)$?

1.6 Označme G těžiště daného čtyřstěnu $A_1A_2A_3A_4$ a A_1', A_2', A_3', A_4' průsečíky polopřímek A_1G, A_2G, A_3G a A_4G s opsanou mu kulovou plochou. Dokažte, že

$$|GA_1| \cdot |GA_2| \cdot |GA_3| \cdot |GA_4| \leqq |GA_1'| \cdot |GA_2'| \cdot |GA_3'| \cdot |GA_4'|$$

a

$$\frac{1}{|GA_1'|} + \frac{1}{|GA_2'|} + \frac{1}{|GA_3'|} + \frac{1}{|GA_4'|} \leqq \frac{1}{|GA_1|} + \frac{1}{|GA_2|} + \frac{1}{|GA_3|} + \frac{1}{|GA_4|}.$$

1.7 Najděte všechna přirozená čísla x a y taková, že $x + y^2 + z^3 = xyz$, kde z je největší společný dělitel čísel x a y.

2.1 Nechť $\mathbb{Z}$ označuje množinu všech celých čísel. Dokažte, že pro libovolná celá čísla A a B existuje celé číslo C, pro něž je průnik množin $\mathsf{M}_1 = \{x^2 + Ax + B\colon x \in \mathbb{Z}\}$ a $\mathsf{M}_2 = \{2x^2 + 2x + C\colon x \in \mathbb{Z}\}$ prázdný.

2.2 Během kongresu, kterého se účastní $12k$ vědců, se každý z účastníků pozdraví právě s $3k+6$ kolegy. Přitom pro libovolné dva ze zúčastněných je počet lidí, kteří se pozdravili s oběma, týž. Kolik lidí se zúčastnilo kongresu?

2.3 Dokažte, že pro libovolné celé $n \geqq 3$ a libovolná reálná čísla x_1, $x_2, \ldots, x_n$ taková, že $x_i < x_{i+1}$ pro $1 \leqq i \leqq n-1$, platí

$$\frac{n(n-1)}{2} \sum_{i<j} x_i x_j > \left(\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) x_i \right) \left(\sum_{j=2}^{n} (j-1) x_j \right).$$

2.4 Nechť a, b a c jsou daná kladná reálná čísla. Najděte všechna kladná reálná čísla x, y a z taková, že

$$x + y + z = a + b + c$$

a

$$4xyz - (a^2 x + b^2 y + c^2 z) = abc.$$

2.5 Nechť p je liché prvočíslo. Určete všechna přirozená čísla x a y, pro něž $x \leqq y$, a přitom číslo $\sqrt{2p} - \sqrt{x} - \sqrt{y}$ je nezáporné a minimální.

2.6 Zjistěte, zda existuje posloupnost $F(1), F(2), F(3), \ldots$ nezáporných celých čísel, která současně splňuje následující tři podmínky:

a) v posloupnosti se vyskytuje každé z celých čísel 0, 1, 2, ... ;

b) každé kladné celé číslo se v posloupnosti vyskytuje nekonečněkrát;

c) pro každé $n \geqq 2$ platí

$$F\big(F(n^{163})\big) = F\big(F(n)\big) + F\big(F(361)\big).$$

2.7 Je dán bod O uvnitř konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ s obsahem S. Dále předpokládejme, že K, L, M a N jsou po řadě vnitřní body stran AB, BC, CD a DA. Jestliže $OKBL$ a $OMDN$ jsou rovnoběžníky, platí pro obsahy S_1 a S_2 čtyřúhelníků $AKON$ a $OLCM$ nerovnost

$$\sqrt{S} \geqq \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}.$$

Dokažte.

Řešení úloh korespondenčního semináře

1.1 Pokud tvrzení úlohy platí pro čísla a, b a c, pak platí i pro čísla a, b a $-c$. Můžeme tedy předpokládat, že $c \geqq 0$. Protože tvrzení je symetrické vzhledem k číslům a a b, můžeme dále předpokládat, že $a \geqq b$.

Protože z nerovnosti $ab \geqq c^2$ plyne $\frac{1}{2}(a+b) \geqq \sqrt{ab} \geqq c$, je zároveň zřejmé, že musí být $a \geqq c$. Tvrzení úlohy dokážeme matematickou indukcí podle $a + b$.

Pokud $a+b=0$, tvrzení triviálně platí. Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny trojice (a,b,c), v nichž $a+b \leqq m$, a uvažujme trojici (a,b,c), v níž $a+b=m+1$. Pokud je nyní $a \geqq b \geqq c$, stačí zvolit $n=a+b-c$ a vektory $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ tak, že

$$\boldsymbol{x}=(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{a-c},\underbrace{1,1,\ldots,1}_{c},\underbrace{0,0,\ldots,0}_{b-c}),$$
$$\boldsymbol{y}=(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{a-c},\underbrace{1,1,\ldots,1}_{c},\underbrace{1,1,\ldots,1}_{b-c}).$$

Nechť nyní $c>b$, což znamená, že musí být $a>c$. Pro trojici $(a+b-2c,b,c-b)$ platí $(a+b-2c)b=ab+b^2-2bc \geqq c^2+b^2-2bc=(c-b)^2$ a zároveň $(a+b-2c)+b<a<a+b=m+1$, takže podle indukčního předpokladu pro trojici $(a+b-2c,b,c-b)$ existují hledané vektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ a snadno nahlédneme, že vektory $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}$ vyhovují pro trojici (a,b,c). Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

1.2 Předpokládejme, že taková omezená funkce existuje, a označme $S=\sup_{x\in\mathbb{R}_0} f(x)$. Zřejmě $f(2)=f(1+1)=2$, tedy $S \geqq 2$. Z vlastností suprema plyne, že existuje $x_0 \in \mathbb{R}_0$, pro něž $f(x_0) \geqq \frac{5}{6}S$. Pro takové x_0 pak je

$$f\Big(x_0+\frac{1}{x_0^2}\Big)=f(x_0)+f\Big(\frac{1}{x_0}\Big)^2 \geqq \frac{5}{6}S+f\Big(\frac{1}{x_0}\Big)^2, \tag{1}$$

$$f\Big(\frac{1}{x_0}+x_0^2\Big)=f\Big(\frac{1}{x_0}\Big)+f(x_0)^2 \geqq$$
$$\geqq f\Big(\frac{1}{x_0}\Big)+\frac{25}{36}S^2 \geqq f\Big(\frac{1}{x_0}\Big)+\frac{25}{18}S. \tag{2}$$

Z nerovnosti (2) tak plyne $f\Big(\frac{1}{x_0}\Big) \leqq -\frac{7}{18}S$, čili $f\Big(\frac{1}{x_0}\Big)^2 \geqq \frac{7^2}{18^2}S^2$, a podle (1) je

$$S \geqq S\Big(\frac{5}{6}+\frac{7^2}{18^2}S\Big) \geqq S\Big(\frac{5}{6}+\frac{2\cdot 7^2}{18^2}\Big)=\frac{184}{162}S>S.$$

To je spor, proto požadovaná funkce f neexistuje.

Jiné řešení. Předpokládejme, že taková omezená funkce existuje, a označme n *nejmenší* celé číslo takové, že $f(x) \leqq \frac{1}{4}n$ pro každé $x \in \mathbb{R}_0$. Protože $f(2)=2$, musí být $n \geqq 8$.

Zvolme $x \in \mathbb{R}_0$ takové, že $f(x) > \frac{1}{4}(n-1)$. Potom

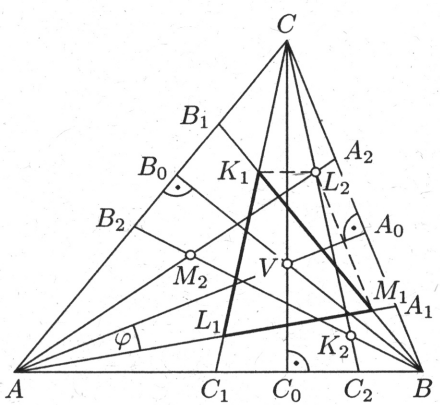
$$f\Big(\frac{1}{x}\Big)^2 = f\Big(x + \frac{1}{x^2}\Big) - f(x) < \frac{1}{4}, \quad \text{tj.} \quad f\Big(\frac{1}{x}\Big) > -\frac{1}{2}$$

a zároveň

$$\Big(\frac{n-1}{4}\Big)^2 < f(x)^2 = f\Big(x^2 + \frac{1}{x}\Big) - f\Big(\frac{1}{x}\Big) < \frac{n}{4} + \frac{1}{2}.$$

Poslední nerovnost je ekvivalentní s nerovností $n^2 - 6n - 7 < 0$, která je splněna jen pro $n \in (-1, 7)$, což odporuje tomu, že $n \geqq 8$. Hledaná funkce f tedy neexistuje.

1.3 (Podle *Michala Beneše.*) Označme po řadě A_0, B_0, C_0 paty výšek trojúhelníku ABC a V jeho ortocentrum. Dále označme $\varphi = |\sphericalangle A_1AA_0|$, K_1, L_1, M_1 vrcholy trojúhelníku vymezeného přímkami AA_1, BB_1, CC_1 a K_2, L_2, M_2 vrcholy trojúhelníku vymezeného přímkami AA_2, BB_2, CC_2 (obr. 30).



Obr. 30

Z podobností trojúhelníků

$$ACA_0 \sim BCB_0, \quad ACA_2 \sim BCB_1$$

plyne

$$\frac{|CB_1|}{|CA_2|} = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}. \tag{1}$$

Navíc pro úhly trojúhelníku $K_1L_1M_1$ platí

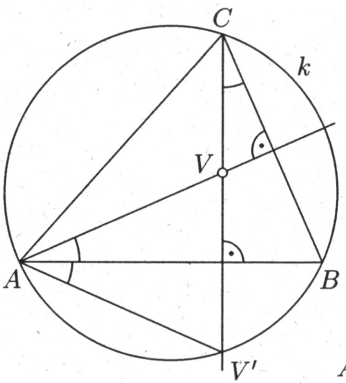
$$\begin{aligned}|\sphericalangle BK_1C_1| &= \pi - (|\sphericalangle BC_1K_1| + |\sphericalangle C_1BK_1|) = \\ &= \pi - (|\sphericalangle BC_1K_1| + |\sphericalangle ABB_0| + |\sphericalangle B_0BB_1|) = \\ &= \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi + \frac{\pi}{2} - \alpha + \varphi\right) = \alpha,\end{aligned}$$

tj. $|\sphericalangle M_1K_1L_1| = \alpha$ a analogicky $|\sphericalangle K_1L_1M_1| = \beta$, $|\sphericalangle L_1M_1K_1| = \gamma$, takže ze sinové věty v trojúhelníku B_1K_1C dostaneme $|CK_1| = |CB_1|\dfrac{\sin|\sphericalangle CB_1K_1|}{\sin\alpha}$ a podobně $|CL_2| = |CA_2|\dfrac{\sin|\sphericalangle CA_2L_2|}{\sin\beta}$. Protože $|\sphericalangle CB_1K_1| = |\sphericalangle CA_2L_2|$, je podle (1) $|CK_1| = |CL_2|$. Protože ortocentrum V leží na ose rovnoramenného trojúhelníku C_1C_2C, je také $|VK_1| = |VL_2|$. Cyklickou záměnou dostaneme další rovnosti $|VL_1| = |VM_2|$ a $|VM_1| = |VK_2|$. Teď si buď všimneme toho, že přímky AA_2, BB_2, CC_2 jsou obrazem odpovídajících přímek AA_1, BB_1, CC_1 v otočení se středem V o úhel $\pi + 2\varphi$, takže trojúhelník $K_2L_2M_2$ je v témže otočení obrazem trojúhelníku $K_1L_1M_1$ a je $|VK_1| = |VK_2|$, a tudíž také

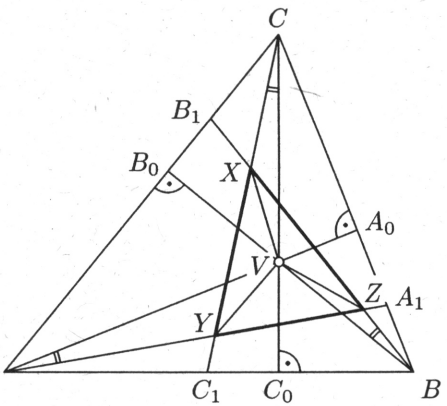
$$|VK_1| = |VL_1| = |VM_1| = |VK_2| = |VL_2| = |VM_2|;$$

anebo si uvědomíme, že $K_1L_2 \parallel AB$ a $M_1L_2 \parallel BC$, což znamená, že $|\sphericalangle C_2L_2K_2| = \pi - \beta$, takže body K_1, L_1, M_1 a L_2 leží na kružnici.

Jiné řešení. Označme V průsečík výšek trojúhelníku ABC. Využijeme známou vlastnost ortocentra: obraz bodu V v osové souměrnosti podle libovolné strany trojúhelníku ABC leží na kružnici trojúhelníku ABC opsané. (Označme V' druhý průsečík výšky CV s kružnicí k opsanou trojúhelníku ABC (obr. 31). Protože $|\sphericalangle BAV| = |\sphericalangle BCV| = \frac{1}{2}\pi - \beta$ a zároveň $|\sphericalangle BCV'| = |\sphericalangle BAV'|$, jsou body V a V' souměrně sdružené podle osy AB.) To znamená, že kružnice opsané trojúhelníkům ABV, BCV a CAV mají stejný poloměr jako kružnice opsaná danému trojúhelníku ABC. Označme nyní postupně X, Y, Z vrcholy trojúhelníku vymezeného přímkami AA_1, BB_1, CC_1 (obr. 32). Protože $|\sphericalangle VBX| = |\sphericalangle B_0BB_1| = |\sphericalangle C_0CC_1| = |\sphericalangle VCX|$, leží bod X na kružnici opsané trojúhelníku BCV. Podobně leží bod Y na kružnici opsané trojúhelníku CAV a bod Z na kružnici opsané trojúhelníku ABV. Protože každé z tětiv VX, VY, VZ přísluší v odpovídající kružnici stejně velký obvodový úhel $|\sphericalangle C_0CC_1| = |\sphericalangle A_0AA_1| = |\sphericalangle B_0BB_1|$, je



Obr. 31



Obr. 32

$|VX| = |VY| = |VZ|$ a bod V je středem kružnice opsané trojúhelníku XYZ. Analogicky platí, že bod V je středem kružnice opsané trojúhelníku vymezenému přímkami AA_2, BB_2, CC_2. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

1.4 (Podle *Michala Beneše.*) Předpokládejme, že nějakou druhou mocninu lze zapsat ve tvaru $2^k n - 7$, kde n je liché a $k \geqq 3$. Nyní i číslo $(2^{k-1}+1)^2(2^k n - 7)$ je druhou mocninou celého čísla a platí pro ně

$$\begin{aligned}(2^{k-1}+1)^2(2^k n - 7) &\equiv (2\cdot 2^{k-1}+1)(2^k n - 7) \equiv \\ &\equiv -7\cdot 2^k + 2^k n - 7 \equiv -7 \pmod{2^{k+1}}.\end{aligned}$$

Odtud je vidět, že číslo $(2^{k-1}+1)^2(2^k n - 7)$ lze zapsat ve tvaru $2^l m - 7$, kde $l \in \mathbb{N}$, $l > k$ a m je liché přirozené číslo. Všimněme si, že $1^2 = 1\cdot 2^3 - 7$. To znamená, že požadovanou vlastnost mají i čísla $k \in \{1,2,3\}$, tj. pro každé $k \in \mathbb{N}$ existují čísla $l, m \in \mathbb{N}$, $l \geqq k$, taková, že $2^l m - 7 = 2^k(2^{l-k}m) - 7$ je druhá mocnina přirozeného čísla.

Pokud je ale m^2 tvaru $2^k n - 7$, pak pro každé $a \in \mathbb{N}$ je také

$$\begin{aligned}(2^k a + m)^2 &= 2^k(2^k a^2 + 2am) + m^2 = \\ &= 2^k(2^k a^2 + 2am + n) - 7.\end{aligned}$$

Tedy ke každému kladnému celému číslu k existuje nekonečně mnoho čísel, jež jsou druhou mocninou přirozeného čísla a jsou tvaru $2^k n - 7$ pro n přirozené.

Jiné řešení. (Podle *Tomáše Bárty.*) Máme vlastně dokázat, že pro každé přirozené k existuje nekonečně mnoho přirozených x, pro něž platí $x^2 \equiv -7 \pmod{2^k}$. Stačí dokázat, že pro každé k existuje jedno takové x_k, kongruence bude stejná pro celou zbytkovou třídu, tj. pokud $y^2 \equiv -7 \pmod{2^k}$, pak zároveň

$$(y + 2^k n)^2 = y^2 + 2 \cdot 2^k ny + 2^k \cdot 2^k n^2 \equiv y^2 \equiv -7 \pmod{2^k}.$$

Ukážeme to matematickou indukcí.

Pro $k \in \{1, 2, 3\}$ čísla $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ splňují požadavek úlohy. Nechť pro $k \geqq 3$ je $x_k^2 = 2^k n - 7$.

a) Je-li n sudé, pak $x_k^2 = 2^k n - 7 = 2^{k+1} \cdot \frac{1}{2} n - 7$, takže stačí volit $x_{k+1} = x_k$.

b) Je-li n liché, pak $(x_k + 2^{k-1})^2 = x_k^2 + 2 \cdot 2^{k-1} x_k + 2^{2(k-1)} = 2^k n - 7 + 2^k x_k + 2^{k-2} 2^k = 2^k (n + x_k + 2^{k-2}) - 7$. Jistě x_k je liché, $k \geqq 3$, tedy $n + x_k + 2^{k-2}$ je sudé a $x_{k+1} = x_k + 2^{k-1}$ splňuje požadavek úlohy. Tím je důkaz hotov.

1.5 Jestliže f je funkce, která splňuje danou funkcionální rovnici, a je $f(m) = f(n)$ pro nějaká $m, n \in \mathbb{N}$, je také

$$m + f(1 + 95) = f\big(1 + f(m)\big) = f\big(1 + f(n)\big) = n + f(1 + 95),$$

takže $m = n$. Funkce f je tedy prostá.

Z dané rovnice dále pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$ plyne

$$\begin{aligned} f\big(f(m) + f(n)\big) &= n + f\big(f(m) + 95\big) = \\ &= n + m + f(95 + 95) = f\big(95 + f(m + n)\big). \end{aligned}$$

Protože funkce f je prostá, dostáváme odtud rovnost

$$f(m) + f(n) = f(m + n) + 95$$

a speciálně pro $m = 1$ a libovolné n přirozené

$$f(n) + f(1) = f(n + 1) + 95. \tag{1}$$

Z této rovnosti plyne, že posloupnost hodnot $f(1), f(2), f(3), \ldots$ je aritmetická s diferencí $a = f(1) - 95$, takže $f(n) = an + 95$, pričemž zřejmě $a > 0$ (jinak by f nebyla prostou funkcí z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$). Dosazením do

původní rovnice vyjde $a^2 = 1$, takže dané funkcionální rovnici vyhovuje jedině funkce $f(n) = n + 95$, o čemž se snadno přesvědčíme dosazením.

Požadovaný součet je

$$\sum_{k=1}^{19} f(k) = \frac{19(19+1)}{2} + 19 \cdot 95 = 1\,995.$$

1.6 Střed koule opsané čtyřstěnu $A_1A_2A_3A_4$ označme S a její poloměr r. Protože podle věty o mocnosti bodu pro $1 \leqq i \leqq 4$ platí $|GA_i| \cdot |GA_i'| = r^2 - |GS|^2$, je první nerovnost ekvivalentní nerovnosti

$$\sqrt[4]{|GA_1|^2 \cdot |GA_2|^2 \cdot |GA_3|^2 \cdot |GA_4|^2} \leqq r^2 - |GS|^2.$$

Ale podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem je

$$\sqrt[4]{|GA_1|^2 \cdot |GA_2|^2 \cdot |GA_3|^2 \cdot |GA_4|^2} \leqq$$
$$\leqq \frac{1}{4}(|GA_1|^2 + |GA_2|^2 + |GA_3|^2 + |GA_4|^2) = r^2 - |GS|^2.$$

Poslední rovnost (která fyzikům jistě připomene Steinerovu větu) dostaneme z následující vlastnosti těžiště G čtyřstěnu $A_1A_2A_3A_4$: pro příslušné polohové vektory platí

$$\boldsymbol{SG} = \frac{1}{4}(\boldsymbol{SA}_1 + \boldsymbol{SA}_2 + \boldsymbol{SA}_3 + \boldsymbol{SA}_4).$$

Je tedy

$$\sum_{i=1}^{4} |GA_i|^2 = \sum_{i=1}^{4} |\boldsymbol{GS} + \boldsymbol{SA}_i|^2 =$$
$$= 4|GS|^2 + \sum_{i=1}^{4} |SA_i|^2 + 2\boldsymbol{GS} \cdot \sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{SA}_i =$$
$$= 4|GS|^2 + 4r^2 + 8\boldsymbol{GS} \cdot \boldsymbol{SG} =$$
$$= 4r^2 - 4|GS|^2 = 4(r^2 - |GS|^2).$$

Druhá nerovnost úlohy je ekvivalentní nerovnosti

$$|GA_1| + |GA_2| + |GA_3| + |GA_4| \leqq$$
$$\leqq (r^2 - |GS|^2)\Big(\frac{1}{|GA_1|} + \frac{1}{|GA_2|} + \frac{1}{|GA_3|} + \frac{1}{|GA_4|}\Big). \qquad (1)$$

Podle Cauchyovy nerovnosti je

$$\left(\sum_{i=1}^{4} |GA_i| \cdot 1\right)^2 \leqq 4 \sum_{i=1}^{4} |GA_i|^2 = 16(r^2 - |GS|^2)$$

a zároveň

$$16 = \left(\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{\sqrt{|GA_i|}} \sqrt{|GA_i|}\right)^2 \leqq \sum_{i=1}^{4} |GA_i| \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{|GA_i|}.$$

Spojením posledních dvou nerovností dostáváme (1).

1.7 Položme $y = bz$ $(b \in \mathbb{N})$. Rovnice pak má tvar

$$x + b^2 z^2 + z^3 = xbz^2,$$

a proto je x dělitelné dokonce číslem z^2. Nechť tedy $x = az^2$ $(a \in \mathbb{N})$. Dostáváme rovnici

$$a + b^2 + z = abz^2,$$

kterou budeme řešit jako kvadratickou rovnici s neznámou b. Pro její kořeny vychází

$$b = \frac{az^2 \pm \sqrt{a^2 z^4 - 4a - 4z}}{2}. \tag{1}$$

Vidíme, že pod odmocninou odečítáme od druhé mocniny celého čísla číslo řádově mnohem menší, což znamená, že pro dostatečně velké z bude výraz pod odmocninou vždy mezi dvěma po sobě jdoucími druhými mocninami celých čísel, takže nezískáme celočíselné řešení b. Ukážeme, že už pro $z \geqq 3$ platí

$$(az^2)^2 > a^2 z^4 - 4(a + z) > (az^2 - 1)^2.$$

První nerovnost je zřejmá. Druhá nerovnost je ekvivalentní kvadratické nerovnosti $2az^2 - 4z - (4a + 1) > 0$, která je splněna pro všechna $z \geqq z_2$, kde z_2 je větší z obou kořenů příslušné kvadratické rovnice, pro jejíž diskriminant D platí $D = 16 + 8a(4a + 1) \leqq 16a^2 + 8a \cdot 5a = 56a^2 < 64a^2$. Pro kořen z_2 tak vychází

$$z_2 = \frac{4}{4a} + \frac{\sqrt{D}}{4a} < 1 + 2 = 3.$$

Z předchozích úvah vyplývá, že musí být $z \leqq 2$. Pro $z = 2$ je podle (1)

$$b = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 - 4a - 8}}{2} = 2a \pm \sqrt{4a^2 - a - 2}.$$

Zřejmě $(2a)^2 > 4a^2 - a - 2 > (2a-1)^2$ pro každé $a > 1$. Může být tedy jedině $a = 1$, $b \in \{1, 3\}$, a tak dostáváme první dvě řešení.

Pro $z = 1$ dostaneme dosazením do původní rovnice

$$x + y^2 + 1 = xy,$$

neboli

$$(y-1)x = y^2 + 1 = (y-1)(y+1) + 2,$$

tedy číslo $y - 1$ dělí číslo 2, neboli $y \in \{2, 3\}$. Tak dostáváme další dvě řešení. Úloze vyhovují trojice

$$(x, y, z) \in \{(4, 2, 2), (4, 6, 2), (5, 2, 1), (5, 3, 1)\}.$$

2.1 Je-li A liché, je jedno z čísel x, $x + A$ sudé, takže množina M_1 obsahuje jen čísla tvaru $x(x + A) + B \equiv B \pmod 2$, zatímco množina M_2 obsahuje čísla $2x(x + 1) + C \equiv C \pmod 2$. Aby byl průnik $\mathsf{M}_1 \cap \mathsf{M}_2$ prázdný, stačí volit $C = B + 1$.

Je-li A sudé, obsahuje množina M_1 čísla tvaru

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + B - \frac{A^2}{4} \equiv q + B - \frac{A^2}{4} \pmod 4,$$

kde $q \in \{0, 1\}$ jsou jediné kvadratické zbytky modulo 4. Množina M_2 naproti tomu obsahuje jen čísla kongruentní s $C \pmod 4$, takže stačí volit $C = B - \frac{1}{4}A^2 + 2$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

2.2 Nějakého „význačného" vědce pojmenujme A. Ostatní účastníky kongresu rozdělíme do množin B a C podle toho, zda se s A pozdravili, anebo ne. V množině B je tedy $3k + 6$ lidí, zatímco v množině C je zbývajících $9k - 7$ vědců.

Podle zadání jsou počty lidí, se kterými se libovolní dva účastníci pozdravili zároveň, rovny témuž číslu — označme ho n. Každý z účastníků vyjma A se tedy musel pozdravit právě s n účastníky z množiny B. To znamená, že se každý z účastníků patřících do B pozdravil právě s $3k+5-n$ kolegy z C. Dohromady si vědci z B vyměnili právě $(3k+6)(3k+5-n)$ pozdravů s vědci z C. Protože i každý z vědců v C se pozdravil právě

s n kolegy v B, vyměnili si vědci z C právě $n(9k-7)$ pozdravů s vědci z B. Pro celkový počet pozdravů mezi B a C tak dostáváme rovnici

$$(3k+6)(3k+5-n) = n(9k-7),$$

neboli

$$(3k+6)(3k+5) = n(12k-1).$$

Levá strana bude dělitelná číslem $12k-1$, právě když tímto číslem bude dělitelný výraz

$$\begin{aligned} 16(3k+6)(3k+5) &= 144k^2 + 528k + 480 = \\ &= (12k-1)^2 + 46(12k-1) + 525, \end{aligned}$$

tj. právě když $12k-1 \mid 525 = 3 \cdot 7 \cdot 25$. Protože 3 je s číslem $12k-1$ nesoudělné, musí $12k-1$ dělit 175. Množina všech dělitelů čísla 175 je $\{1, 5, 7, 25, 35, 175\}$ a z nich pouze 35 je tvaru $12k-1$.

Pokud se takový kongres skutečně sešel, muselo se jej účastnit 36 vědců. Zbývá ukázat, že taková skupina skutečně může existovat. Uspořádejme 36 osob do čtverce 6×6 a rozdělme je ještě na šestice rozlišené písmeny A, B, C, D, E, F podle následující tabulky:

A	B	C	D	E	F
F	A	B	C	D	E
E	F	A	B	C	D
D	E	F	A	B	C
C	D	E	F	A	B
B	C	D	E	F	A

Podmínkám úlohy bude vyhovovat, jestliže se pozdraví právě všichni stojící v témže sloupci, všichni stojící v téže řádce a všichni označení stejným písmenem.

2.3 Označme $(1 \leqq i \leqq n-1)$

$$y_i = \sum_{j=i+1}^{n} x_j \quad \text{a} \quad z_i = \binom{n}{2} y_i - (n-i)y,$$

kde

$$y = \sum_{i=1}^{n-1} y_i = \sum_{j=2}^{n} (j-1)x_j.$$

Rozdíl levé a pravé strany dokazované nerovnosti pak můžeme vyjádřit jako

$$\binom{n}{2}\sum_{i<j} x_i x_j - \left(\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)x_i\right)\left(\sum_{j=2}^{n}(j-1)x_j\right) =$$

$$= \binom{n}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j - \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)x_i y =$$

$$= \binom{n}{2}\sum_{i=1}^{n-1} y_i - \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)x_i y = \sum_{i=1}^{n-1} x_i z_i.$$

Je tedy potřeba ukázat, že $\sum_{i=1}^{n-1} x_i z_i > 0$.

Protože $\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \binom{n}{2}$, je $\sum_{i=1}^{n-1} z_i = 0$. Přitom $z_{n-1} =$ $= \binom{n}{2} y_{n-1} - y = \binom{n}{2} x_n - \sum_{j=2}^{n}(j-1)x_j > \binom{n}{2} x_n - \sum_{j=2}^{n}(j-1)x_n = 0$, takže mezi čísly z_i musí být i záporná. Dále pro $1 \leqq i \leqq n-2$ máme

$$\frac{z_{i+1}}{n-(i+1)} - \frac{z_i}{n-i} = \binom{n}{2}\frac{y_{i+1}}{n-(i+1)} - \binom{n}{2}\frac{y_i}{n-i} =$$

$$= \binom{n}{2}\left(\frac{x_{i+2}+\ldots+x_n}{n-i-1} - \frac{x_{i+1}+\ldots+x_n}{n-i}\right) =$$

$$= \binom{n}{2}\frac{x_{i+2}+\ldots+x_n-(n-i-1)x_{i+1}}{(n-i-1)(n-i)} > 0,$$

takže

$$\frac{z_1}{n-1} < \frac{z_2}{n-2} < \ldots < \frac{z_{n-2}}{2} < z_{n-1}.$$

Existuje tedy index k, $1 < k < n-1$, takový, že $z_i < 0$ pro $1 \leqq i < k$, $z_k \leqq 0$ a $z_i > 0$ pro $k < i \leqq n-1$. Je tudíž $x_i z_i > x_k z_i$ pro každé $i \neq k$, takže

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i z_i > x_k \sum_{i=1}^{n-1} z_i = 0,$$

což jsme potřebovali dokázat.

2.4 Nechť x, y, z jsou kladná reálná čísla. Druhou rovnici můžeme zapsat ve tvaru

$$4 = \frac{a^2}{yz} + \frac{b^2}{zx} + \frac{c^2}{xy} + \frac{abc}{xyz}.$$

Položíme-li $x_1 = \dfrac{a}{\sqrt{yz}} > 0$, $y_1 = \dfrac{b}{\sqrt{zx}} > 0$, $z_1 = \dfrac{c}{\sqrt{xy}} > 0$, dostaneme symetrickou rovnici

$$4 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_1 y_1 z_1,$$

ze které plyne, že každé z kladných čísel x_1, y_1, z_1 je menší než 2. Tato rovnice jako kvadratická vzhledem k z_1 má diskriminant $D = (4 - x_1^2) \times \times (4 - y_1^2)$, který vybízí k substituci $x_1 = 2\sin u$, $0 < u < \frac{1}{2}\pi$, $y_1 = 2\sin v$, $0 < v < \frac{1}{2}\pi$. To nám umožňuje předchozí rovnici zapsat jako

$$4 = 4\sin^2 u + 4\sin^2 v + z_1^2 + 4\sin u \sin v \cdot z_1,$$

neboli

$$(z_1 + 2\sin u \sin v)^2 = 4(1 - \sin^2 u)(1 - \sin^2 v),$$
$$|z_1 + 2\sin u \sin v| = |2\cos u \cos v|.$$

Protože $\sin u$, $\sin v$, $\cos u$, $\cos v$ a z_1 jsou vesměs kladná čísla, můžeme odstranit absolutní hodnoty a získat tak vyjádření

$$z_1 = 2(\cos u \cos v - \sin u \sin v).$$

Nyní můžeme vyjádřit čísla a, b, c jako

$$a = 2\sin u \cdot \sqrt{yz}, \quad b = 2\sin v \cdot \sqrt{zx},$$
$$c = 2(\cos u \cos v - \sin u \sin v)\sqrt{xy},$$

takže z dané rovnice $x + y + z = a + b + c$ dostáváme

$$x + y - 2\cos u \cos v \cdot \sqrt{xy} + \\ + z + 2\sin u \sin v \cdot \sqrt{xy} - 2\sin u \cdot \sqrt{yz} - 2\sin v \cdot \sqrt{zx} = 0,$$

neboli

$$x\cos^2 v + y\cos^2 u - 2\cos u \cos v\sqrt{xy} + \\ + z + x\sin^2 v + y\sin^2 u + 2\sin u \sin v \cdot \sqrt{xy} - \\ - 2\sin u \cdot \sqrt{yz} - 2\sin v \cdot \sqrt{zx} = \\ = \left(\sqrt{x}\cos v - \sqrt{y}\cos u\right)^2 + \left(\sqrt{x}\sin v + \sqrt{y}\sin u - \sqrt{z}\right)^2 = 0.$$

Odtud vychází

$$\sqrt{z} = \sqrt{x}\sin v + \sqrt{y}\sin u = \sqrt{x}\,\frac{y_1}{2} + \sqrt{y}\,\frac{x_1}{2} = \\ = \frac{1}{2}\frac{b}{\sqrt{z}} + \frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{z}},$$

neboli $z = \frac{1}{2}(a + b)$. Podobně $y = \frac{1}{2}(c + a)$ a $x = \frac{1}{2}(b + c)$. Trojice $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}(b + c), \frac{1}{2}(c + a), \frac{1}{2}(a + b)\right)$ skutečně dané soustavě rovnic vyhovuje. Lze se o tom přesvědčit dosazením a rutinním výpočtem.

2.5 Položme

$$u = \sqrt{2p} - \sqrt{x} - \sqrt{y},$$
$$v = \left(\sqrt{2p} - \sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{2p} + \sqrt{x} + \sqrt{y}\right) = 2p - x - y - 2\sqrt{xy}.$$

Je jasné, že $u \geqq 0$, právě když $v \geqq 0$, a protože

$$v = u\left(2\sqrt{2p} - u\right) = 2p - \left(\sqrt{2p} - u\right)^2,$$

nabývají oba výrazy nejmenší kladnou hodnotu pro stejná přirozená čísla x a y. Navíc nemůže být $u = 0$ (a tedy ani $v = 0$) pro žádná dvě přirozená čísla x a y, neboť jinak bychom z rovnosti $\sqrt{y} = \sqrt{2p} - \sqrt{x}$ umocněním dostali $y = 2p + x - 2\sqrt{2px}$, což znamená, že $2px$ je druhou mocninou přirozeného čísla, a protože p je liché prvočíslo, musí být x dělitelné $2p$, tedy $x \geqq 2p$, což předpokládané rovnosti odporuje.

Nechť tedy pro nějaká dvě přirozená čísla x, y, $x \leqq y$, je $v = 2p - x - y - 2\sqrt{xy} > 0$, neboli $2\sqrt{xy} < 2p - x - y$. Označme z nejmenší přirozené číslo větší než $2\sqrt{xy}$ (tedy $z = \lfloor 2\sqrt{xy} \rfloor + 1$). Pro takové z zřejmě bude platit

$$2\sqrt{xy} < z \leqq 2p - x - y.$$

Protože zároveň $u > 0$, tedy $\sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{2p}$, je také

$$2\sqrt[4]{xy} \leqq \sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{2p},$$
$$2\sqrt{xy} < z \leqq p.$$

Navíc je $z^2 > 4xy$, neboli $4xy \leqq z^2 - 1$. Celkem tedy platí

$$v = (2p - x - y) - 2\sqrt{xy} \geqq z - \sqrt{z^2 - 1} = \frac{1}{z + \sqrt{z^2 - 1}} \geqq$$
$$\geqq \frac{1}{p + \sqrt{p^2 - 1}} = p - \sqrt{p^2 - 1}.$$

Rovnost zřejmě nastane, právě když bude $z = p$, $z = 2p - x - y$ a $4xy = z^2 - 1$, tedy právě když

$$x = \frac{p-1}{2} \quad \text{a} \quad y = \frac{p+1}{2}.$$

Jiné řešení. (Podle *Tamáse Vargy*, Slovensko.) Dokážeme, že řešením je vždy dvojice $\left(\frac{1}{2}(p-1), \frac{1}{2}(p+1)\right)$. K tomu stačí ukázat, že pro libovolnou jinou dvojici čísel je výraz $D = \sqrt{2p} - \sqrt{x} - \sqrt{y}$ větší. To dokážeme sporem.

Předpokládejme, že existuje dvojice přirozených čísel (x, y) taková, že

$$\sqrt{2p} \geqq \sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{\frac{p+1}{2}} + \sqrt{\frac{p-1}{2}},$$

$$2p \geqq x + y + 2\sqrt{xy} > p + \sqrt{p^2 - 1},$$

$$2p - x - y \geqq 2\sqrt{xy} > p + \sqrt{p^2 - 1} - x - y.$$

Zřejmě je $p + \sqrt{p^2 - 1} > 2p - 1 > 0$ a zároveň $2p - x - y \geqq 2\sqrt{xy} > 0$, takže $2p - 1 - x - y \geqq 0$. Dalším umocněním dostaneme po jednoduchých úpravách nerovnost

$$4p(x + y - p) \leqq (x - y)^2 < 2\big(p + \sqrt{p^2 - 1}\big)(x + y - p) + 1.$$

Položíme-li $q = x + y - p$, je z předchozích nerovností jasné, že $q < p$ a zároveň $q = x + y - p > 2p - 1 - 2\sqrt{xy} \geqq 2p - 1 - x - y \geqq 0$, takže q je přirozené číslo. Dosazením dostáváme

$$4pq \leqq (x - y)^2 < 2\big(p + \sqrt{p^2 - 1}\big)q + 1 < 4pq + 1,$$

odkud plyne $4pq = (x - y)^2$. To však není možné, protože p je liché prvočíslo a $q < p$.

2.6 Zaveďme posloupnost $F(1), F(2), \ldots$ tak, že $F(n)$ udává počet prvočísel (i s jejich násobností), která dělí n. Je-li tedy

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{s_i},$$

kde $p_1, \ldots, p_k$ jsou různá prvočísla a $s_1, \ldots, s_k$ nezáporná celá čísla, je

$$F(n) = \sum_{i=1}^{k} s_i.$$

Podmínka a) je splněna, protože pro každé nezáporné celé k je $F(2^k) = k$. Je splněna i podmínka b), protože $k = F(p^k)$ pro každé prvočíslo p. Rovnost

$$F\big(F(n^{163})\big) = F\big(F(n)\big) + F\big(F(361)\big)$$

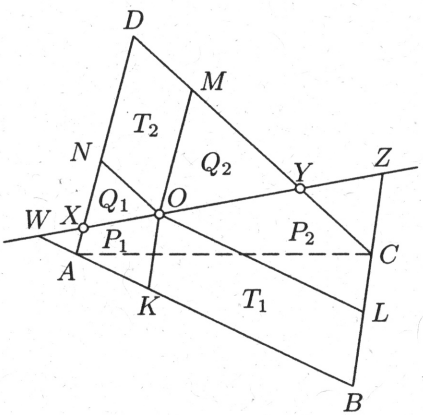
z podmínky c) platí, protože pro $n \geqq 2$ je

$$\begin{aligned} F\big(F(n^{163})\big) &= F\big(163F(n)\big) = 1 + F\big(F(n)\big) = \\ &= F\big(F(n)\big) + F(2) = F\big(F(n)\big) + F\big(F(361)\big), \end{aligned}$$

neboť 163 je prvočíslo a $361 = 19^2$. Uvedená posloupnost tedy splňuje všechny podmínky úlohy.

2.7 Jestliže bod O leží na úhlopříčce AC, jsou čtyřúhelníky $ABCD$, $AKON$ a $OLCM$ podobné. V tomto případě platí rovnost $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$, neboť $S_1 : S = |AO|^2 : |AC|^2$ a $S_2 : S = |OC|^2 : |AC|^2$.

Pokud bod O na úhlopříčce AC neleží, můžeme předpokládat, že leží například v trojúhelníku ACD. Veďme bodem O libovolnou přímku a označme po řadě X, Y její průsečíky s přímkami AD, CD a W, Z průsečíky s přímkami AB, BC (obr. 33). Prochází-li zmíněná přímka vrcholem A, je $W = X = A$ a přitom $\frac{|OW|}{|OX|} = 1$, $\frac{|OZ|}{|OY|} > 1$. Bude-li



Obr. 33

naopak přímka procházet vrcholem C, bude $Y = Z = C$ a my dostaneme $\frac{|OW|}{|OX|} > 1$, $\frac{|OZ|}{|OY|} = 1$. Otáčíme-li tedy touto přímkou kolem středu O, najdeme mezi oběma těmito polohami takovou, v níž platí $\frac{|OW|}{|OX|} = \frac{|OZ|}{|OY|} > 1$. V této poloze přímku zafixujeme a označíme po řadě T_1, T_2, P_1, P_2 a Q_1, Q_2 obsahy rovnoběžníků $KBLO$, $NOMD$, trojúhelníků WKO, OLZ a XON, OYM.

Z podobnosti trojúhelníků WBZ, WKO a OLZ plyne, že

$$\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} = \sqrt{P_1 + T_1 + P_2}\left(\frac{|WO|}{|WZ|} + \frac{|OZ|}{|WZ|}\right) =$$

$$= \sqrt{P_1 + T_1 + P_2},$$

neboli $T_1 = 2\sqrt{P_1 P_2}$. Podobně dostaneme, že $T_2 = 2\sqrt{Q_1 Q_2}$. Z rovnosti

$\frac{|OW|}{|OZ|} = \frac{|OX|}{|OY|}$ navíc plyne, že $\frac{P_1}{P_2} = \frac{|OW|^2}{|OZ|^2} = \frac{|OX|^2}{|OY|^2} = \frac{Q_1}{Q_2}$. Je tedy $Q_1 = kP_1$ a $Q_2 = kP_2$ pro vhodné k, takže můžeme psát

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 &= 2\sqrt{P_1P_2} + 2\sqrt{Q_1Q_2} = 2\sqrt{P_1P_2}(1+k) = \\ &= 2\sqrt{(1+k)P_1(1+k)P_2} = 2\sqrt{(P_1+Q_1)(P_2+Q_2)} \geqq \\ &\geqq \sqrt{S_1S_2}, \end{aligned}$$

což je ekvivalentní nerovnosti

$$S = S_1 + S_2 + T_1 + T_2 \geqq \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2.$$

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Přípravná soustředění před 37. MMO

V průběhu 45. ročníku byla uspořádána dvě výběrová soustředění pro přípravu na mezinárodní matematickou olympiádu. První soustředění, které se konalo v dobře známém internátu při gymnáziu v Jevíčku od 24. do 29. března 1996, bylo zaměřeno na přípravu těch úspěšných řešitelů II. kola kategorie A, kteří se dle dosavadních výsledků jevili jako perspektivní reprezentanti nejen v tomto, ale i v příštím roce (proto při výběru byla dána přednost mladším ročníkům). Z 12 pozvaných studentů se bohužel tři omluvili.

Soustředění bylo zaměřeno na řešení obtížných úloh v omezeném čase (v soutěžních podmínkách). Po odpolední relaxaci byl proveden detailní rozbor opravených řešení. Úspěšnost jednotlivých studentů ukazuje následující tabulka:

Tomáš Brauner	3B G Smetanova 168, Moravský Krumlov	14,5
Jana Flašková	3 Svobodná chebská škola, Cheb	15,5
Jiří Franta	4 G Komenského 402, Příbram	16
David Opěla	4C GMK 17. listopadu 526, Bílovec	41,5
Zbyněk Pawlas	4C GMK 17. listopadu 526, Bílovec	20,5
Jan Spěvák	3A G Hellichova, Praha 1	15,5
Oldřich Stražovský	3A G Tř. kpt. Jaroše 14, Brno	11
Jan Štola	3D G Zborovská 45, Praha 5	28
Petr Vodstrčil	4A G nábř. Svobody 306, Polička	27,5

Jednotlivé semináře vedli a úlohy připravili:
dr. *Karel Horák* (25.3.),
doc. *Jaromír Šimša* (26. a 28.3.),
dr. *Miroslav Engliš* (27.3.),
dr. *Jaroslav Švrček* (29.3.).

Druhé soustředění bylo už určeno pouze vybraným reprezentantům České republiky na 37. MMO v Bombaji včetně náhradníka a konalo se

opět v Jevíčku od 9. do 14. června 1996. Výsledky jednotlivých studentů ukazuje následující tabulka:

Tomáš Bárta	4D G Zborovská 45, Praha 5	93
Michal Beneš	4D G Zborovská 45, Praha 5	100
Daniel Kráľ	4 G Lesní čtvrť 1364, Zlín	89
David Opěla	4C GMK 17. listopadu 526, Bílovec	100
Jan Spěvák	3A G Hellichova, Praha 1	76
Robert Špalek	4A G tř. kpt. Jaroše 14, Brno	88
Jan Vybíral	3C GMK 17. listopadu 526, Bílovec	81

Jednotlivé semináře vedli a úlohy připravili:
dr. *Karel Horák* (10.6.),
dr. *Jaroslav Švrček* (11.6. a 12.6.),
Michal Kubeček (student MFF UK, 13.6. a 14.6.).

Úlohy zadané na přípravných soustředěních

1. Je dán trojúhelník ABC, pro jehož těžnice AM a BN platí, že $|\sphericalangle MAC| = |\sphericalangle NBC| = 30°$. Dokažte, že trojúhelník ABC je rovnostranný.

2. Základnou pravidelného jehlanu je mnohoúhelník s lichým počtem stran. Dokážete hranám daného jehlanu (každé hraně jeden) přiřadit orientaci tak, aby součet odpovídajících vektorů o velikosti délek hran byl nulový?

3. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Body P, Q a R mají tu vlastnost, že paty kolmic z nich spuštěných na strany trojúhelníku ABC leží vesměs uvnitř těchto stran. Dokažte, že obsah trojúhelníku PQR není větší než obsah trojúhelníku ABC.

4. Je dán čtverec rozdělený čtvercovou sítí na čtverečky 1×1. V uvedeném čtverci je dáno několik obdélníků, jejichž každá strana leží v přímkách dané sítě (uvnitř nebo na hranici daného čtverce). Může se stát, že každou stranou jednotkového čtverce dané čtvercové sítě prochází lichý počet stran daných obdélníků?

5. Je dán čtyřúhelník $ABCD$, ve kterém platí $|AB| = |AD|$ a $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADC| = 90°$. Na stranách BC a CD jsou dány body F, resp. E tak, že $DF \perp AE$. Dokažte, že je $AF \perp BE$.

6. Je dán čtyřstěn, jehož tělesové výšky se protínají v jednom bodě. Dokažte, že tento průsečík výšek, pata jedné z výšek a tři body dělící zbývající tři výšky v poměru 2 : 1 od vrcholu leží na jedné kulové ploše.

7. Uvažujme konvexní mnohoúhelník, který má všechny vnitřní úhly shodné. Potom alespoň pro dvě jeho strany platí, že jejich délka není větší než délky sousedních stran. Dokažte.

8. Osa úhlu BAC protne stranu BC trojúhelníku ABC v bodě K. Přímka jdoucí bodem K rovnoběžně se stranou AC protne těžnici z vrcholu A v bodě L. Dokažte, že $AK \perp CL$.

9. Dokažte, že v každé společnosti S třiceti lidí se najdou dva lidé, kteří mají v S sudý počet (všech) společných známých. (Vztah „být známý" je symetrický, mezi sudá čísla patří i nula.)

10. Nechť $S(n) = 1^1 + 2^2 + \ldots + n^n$. Dokažte, že nerovnost

$$\frac{1}{n^n} > \frac{1}{S(n)} + \frac{1}{S(n+1)} + \ldots + \frac{1}{S(n+k)}$$

platí pro libovolná celá čísla $n > 1$ a $k \geqq 0$. (Můžete bez dokazování využít poznatek, že posloupnost čísel $(1 + \frac{1}{n})^n$, kde $n = 1, 2, \ldots$, je rostoucí.)

11. Z malé Fermatovy věty plyne, že pro každé prvočíslo $p > 3$ je rozdíl $3^{p-1} - 2^{p-1}$ dělitelný číslem p. Dokažte, že číslo n dělí rozdíl $3^{n-1} - 2^{n-1}$ i pro nekonečně mnoho složených čísel n.

12. Do kružnice se středem O a poloměrem 1 je vepsán trojúhelník ABC. Označme r_1, r_2, r_3 vzdálenosti bodu O od přímek AB, BC, CA. Zjistěte, jaké největší hodnoty může nabýt součin $r_1 r_2 r_3$.

13. Dokažte, že na kružnici se středem v počátku a poloměrem $10^{10^{10}}$ leží aspoň 10^{10} bodů s celočíselnými souřadnicemi.

14. Dokažte, že existuje takové reálné číslo A, pro něž lze do grafu funkce $y = A \sin x$ vepsat alespoň 1 988 navzájem neshodných čtverců. (Vepsaný čtverec je takový, jehož všechny vrcholy leží na grafu.)

15. V rovině je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Zjistěte, ve kterých bodech X dosahuje funkce

$$f(X) = |XA| + |XB| - |XC|$$

svého minima.

16. Dokažte, že každé celé nezáporné číslo lze jediným způsobem vyjádřit ve tvaru

$$\frac{(x+y)^2+3x+y}{2},$$

kde x, y jsou celá nezáporná čísla.

17. Dokažte, že čísla $1\,996^n$ a $1\,996^n + 2^n$ $(n \geqq 1)$ začínají vždy stejným dvojčíslím.

18. Je dán mnohočlen $P(x)$ s celočíselnými koeficienty. Dokažte, že pro žádná navzájem různá celá čísla a, b, c nemůže současně platit $P(a) = b$, $P(b) = c$ a $P(c) = a$.

19. V rovině je dáno n bodů A_i $(1 \leqq i \leqq n)$, z nichž žádné tři neleží na jedné přímce. Vybarveno je n různých úseček A_iA_j, jež jsou označeny u_1, u_2, ..., u_n. Přitom pro libovolné dva indexy $i \neq j$ platí: úsečka A_iA_j je vybarvena, právě když úsečky u_i a u_j mají společný krajní bod. Dokažte, že z každého bodu A_i vycházejí právě dvě obarvené úsečky.

20. Nechť $F(x) = x^2 + x + 1$. Dokažte, že součin $F(1)F(2) \cdot \ldots \cdot F(n)$ není celým násobkem čísla $F(n+1)$ pro nekonečně mnoho přirozených čísel n.

21. Pro libovolná nezáporná reálná čísla a, b, c dokažte nerovnost

$$a^4 + b^4 + c^4 + a^2bc + b^2ac + c^2ab \geqq 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2).$$

22. Do kružnice se středem O je vepsán tětivový čtyřúhelník $ABCD$ tak, že průsečík M jeho úhlopříček s bodem O nesplývá. Přímka vedená bodem M kolmo k úsečce OM protíná úsečku AB v bodě P a úsečku CD v bodě Q. Dokažte, že úsečky AB a CD jsou shodné, právě když jsou shodné úsečky BP a CQ.

23. Dva rovnostranné trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ mají společný střed stran BC a $B'C'$. Určete poměr $|AA'| : |BB'|$.

24. Jsou dána reálná čísla a, b, c $(a^2+b^2+c^2 \neq 0)$. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro libovolnou trojici reálných čísel x, y, z platí

$$af(xy + z^2) + bf(yz + x^2) + cf(zx + y^2) = 0.$$

25. Z pravidelného desetiúhelníku $ABCDEFGHIJ$ o straně délky 1 je přímkou p oddělen trojúhelník APQ tak, že platí $|PA|+|AQ| = 1$. Určete součet velikostí úhlů, pod kterými vidíme úsečku PQ z bodů B, C, D, E, F, G, H, I a J.

26. Nechť $Q(x) = x^3 + 19x^2 + 96x + a$, kde a je přirozené číslo, a p je dané prvočíslo. Dokažte, že mezi přirozenými čísly $Q(0), Q(1), \ldots, Q(p-1)$ existují nejvýše tři, která jsou dělitelná p.

27. V rovině jsou dány tři různé body A, B a C. Bodem C prochází přímka q tak, že součin vzdáleností bodů A a B od přímky q je co největší. Rozhodněte, zda je přímka q pro libovolnou trojici bodů A, B a C jednoznačně určena. Proveďte konstrukci přímky q.

28. Dokažte, že aritmetický průměr čísel $n \sin n°$ $(n = 2, 4, 6, \ldots, 180)$ je $\operatorname{cotg} 1°$.

29. Pro každou neprázdnou množinu S reálných čísel označme $\sigma(\mathsf{S})$ součet jejích prvků. Pro danou množinu A obsahující n kladných čísel uvažujme všechny možné součty $\sigma(\mathsf{S})$, kde S probíhá neprázdné podmnožiny množiny A. Dokažte, že tyto součty mohou být rozděleny do n tříd tak, že v každé z nich je podíl největšího a nejmenšího součtu nejvýše 2.

30. Je dán trojúhelník ABC. Dokažte, že (v rovině trojúhelníku ABC) existuje přímka ℓ, pro niž má průnik vnitřku trojúhelníku ABC a vnitřku jeho obrazu $A'B'C'$ v osové souměrnosti podle přímky ℓ obsah rovný aspoň $2/3$ obsahu daného trojúhelníku ABC.

31. Konečnou posloupnost $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o n prvcích, jejímiž členy jsou jen 0 nebo 1, nazveme *binární posloupnost délky* n. Označme a_n počet binárních posloupností délky n, jež neobsahují trojici za sebou jdoucích čísel 0, 1, 0, a b_n označme počet binárních posloupností délky n, jež neobsahují čtveřici za sebou jdoucích čísel 0, 0, 1, 1 nebo 1, 1, 0, 0. Dokažte, že $b_{n+1} = 2a_n$ pro všechna přirozená n.

32. Je dán trojúhelník ABC, uvnitř kterého existuje takový bod P, že $|\sphericalangle PAB| = 10°$, $|\sphericalangle PBA| = 20°$, $|\sphericalangle PCA| = 30°$ a $|\sphericalangle PAC| = 40°$. Dokažte, že trojúhelník ABC je rovnoramenný.

33. Zjistěte, zda existuje podmnožina X množiny přirozených čísel taková, že pro každé celé číslo n má rovnice $a + 2b = n$ právě jedno řešení $a, b \in \mathsf{X}$.

34. Nechť x, y, z jsou kladná čísla vyhovující podmínkám

$$\frac{1}{3} \leqq xy + yz + zx \leqq 3.$$

Určete, jakých hodnot nabývá výraz a) xyz, b) $x + y + z$.

35. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník. Středy kružnic vepsaných trojúhelníkům ABC, BCD, CDA, DAB jsou vrcholy pravoúhelníku. Dokažte.

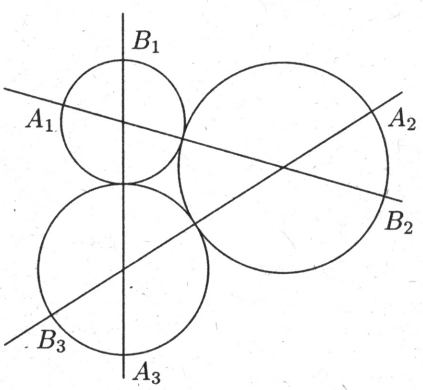
36. Dokažte, že rovnice

$$x^x = y^3 + z^3$$

má nekonečně mnoho řešení v oboru přirozených čísel.

37. V rovině jsou dány tři kružnice, které se navzájem vně dotýkají. Přímky, které procházejí vždy dvěma středy uvažovaných kružnic, protínají tyto kružnice v bodech A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 (obr. 34). Dokažte, že pro libovolný bod X roviny platí

$$|A_1X|^2 + |A_2X|^2 + |A_3X|^2 = |B_1X|^2 + |B_2X|^2 + |B_3X|^2.$$



Obr. 34

38. Jestliže nezáporná čísla a, b, c, p, q, r splňují podmínky

$$a + b + c = p + q + r, \qquad p, q, r \leqq \frac{1}{2},$$

dokažte, že platí $8abc \leqq pa + qb + rc$, a rozhodněte, kdy nastane rovnost.

39. Dokažte, že existuje trojúhelník o stranách a, b, c, právě když platí

$$pa^2 + qb^2 > pqc^2,$$

kde p, q jsou libovolná reálná čísla taková, že $p + q = 1$.

40. Kružnice k_1 a k_2 mají vnější dotyk v bodě T a obě se zevnitř dotýkají třetí kružnice k. Jedna ze společných vnějších tečen kružnic k_1 a k_2 protíná kružnici k v bodech B a C. Jejich společná tečna procházející bodem T protíná v polorovině BCT kružnici k v bodě A. Dokažte, že bod T je středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC.

41. Určete všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \alpha x &= |y - z| + y, \\ \alpha y &= |z - x| + z, \\ \alpha z &= |x - y| + x, \end{aligned}$$

kde α je reálný parametr.

42. Dokažte, že součet velikostí šesti úhlů, pod kterými jsou vidět jednotlivé hrany daného čtyřstěnu z jeho libovolného vnitřního bodu, je větší než 540°.

43. Dokažte, že ke každé dvojici přirozených čísel n, k existuje $R(n,k)$ tak, že máme-li úplný graf stupně $R(n,k)$ obarvený k barvami, lze v něm najít úplný jednobarevný podgraf stupně n.

44. Množina M v rovině má tu vlastnost, že každé její tři body lze pokrýt (uzavřeným) kruhem o průměru 1. Dokažte, že celou M lze pokrýt kruhem o průměru 1.

45. Sestrojte trojúhelník, jsou-li dány délky jeho těžnic.

46. Nalezněte řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} ax + by &= -7, \\ ax^2 + by^2 &= 7, \\ ax^3 + by^3 &= -37, \\ ax^4 + by^4 &= 83. \end{aligned}$$

47. Dokažte, že pro nekonečně mnoho různých n je součet

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$$

složené číslo.

48. Dokažte, že číslo $\left[(\sqrt{2}+1)^n\right]$ je sudé, právě když n je liché ($[x]$ označuje celou část čísla x).

49. Mějme konečný systém $\mathscr{A}$ konečných množin. Dokažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) existuje prostá funkce $f\colon \mathscr{A} \to \bigcup \mathscr{A}$;

(ii) pro každý podsystém $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ platí $|\mathscr{B}| \leqq \left|\bigcup \mathscr{B}\right|$.

50. Zjistěte, jaké největší hodnoty může nabývat výraz

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\alpha) + \operatorname{tg}(\frac{1}{2}\beta) + \operatorname{tg}(\frac{1}{2}\gamma)},$$

jsou-li α, β, γ úhly v trojúhelníku.

51. Nalezněte neprohrávající strategii pro následující variantu piškvorek: vyhrává pět značek v řadě nebo sloupci (ne na diagonále).

2. československé střetnutí

ŽILINA, 2.–5. JÚNA 1996

Po minuloročnej premiére v Jevíčku v Českej republike sa v tomto ročníku MO konala medzištátna súťaž medzi družstvami mladých matematikov po prvýkrát na Slovensku. Celé stretnutie prebiehalo v priestoroch SOU chemického v Žiline. Organizáciu zabezpečoval doc. RNDr. *Vojtech Bálint*, CSc., z VŠDS v Žiline.

Úlohou tejto súťaže nie je len porovnanie síl zúčastnených družstiev, prípadne príprava na MMO, jej cieľom je najmä spoznanie sa najlepších riešiteľov olympiád z dvoch tradíciami spriaznených krajín. Nakoľko medzi súťažiacimi nie je žiadna jazyková bariéra, celá organizácia podujatia je oproti iným medzinárodným súťažiam značne zjednodušená. Preto nie je potrebné prekladať zadania či riešenia do iných jazykov. Po rozdelení bývalého spoločného štátu Čechov a Slovákov sa mnoho kontaktov prerušilo. Môže nás tešiť, že matematickú olympiádu tento vývoj nepostihol a okrem spoločných úloh a spolupráce pri zabezpečovaní MO pretrvávajú kontakty nielen medzi vedeniami olympiád (predovšetkým Úlohová komisia MO), ale aj medzi riešiteľmi.

Por.	Meno	Ročník, škola	body	Súčet
1.–2.	Michal Beneš	4 G Zborovská, Praha	747777	39
	Ivan Cimrák	4 G V. Okružná, Žilina	747777	39
3.–5.	Miroslav Dudík	3 G Trebišov	747777	38
	Vladimír Marko	3 GJH, Bratislava	377776	38
	David Opěla	4 GMK, Bílovec	557777	38
6.	Tomáš Bárta	4 G Zborovská, Praha	747747	36
7.	Daniel Kráľ	4 G Zlín	747737	35
8.–10.	Eugen Kováč	4 G Stropkov	757717	34
	Tamás Varga	4 G Komárno maď.	747727	34
	Robert Špalek	4 G tř. Kpt. Jaroše, Brno	676717	34
11.	Jan Spěvák	3 G Hellichova, Praha	707717	29
12.	Viera Růžičková	2 G V. Okružná, Žilina	427026	21

Opravovanie riešení vždy zabezpečuje domáca strana a na koordinácii hodnotenia sa podieľajú vedúci jednotlivých družstiev. Tento rok nimi boli doc. RNDr. *Vojtech Bálint*, CSc., a *Richard Kollár* zo Slovenska a doc. RNDr. *Jaromír Šimša*, CSc., z Českej republiky. Potešujúcou skutočnosťou môže byť, že Úlohová komisia MO sa venuje aj tejto súťaži, a tak boli všetky predložené úlohy pôvodné. Boli to najmä úlohy, ktorých náročnosť, alebo tematické zameranie prekračuje možnosti kategórie A. Zoznam súťažiacich aj s výsledkami súťaže je v tabuľke. Rovnako ako v minulom ročníku lepšie obstál tím Českej republiky. Budúci ročník súťaže sa uskutoční v Českej republike.

Texty soutěžních úloh

1. Nechť $\mathbb{Z}^*$ označuje množinu všech celých čísel různých od nuly. Dokažte, že celé číslo $p > 3$ je prvočíslo, právě když pro každou dvojici čísel $a, b \in \mathbb{Z}^*$ právě jedno z čísel

$$N_1 = a + b - 6ab + \frac{p-1}{6}, \qquad N_2 = a + b + 6ab + \frac{p+1}{6}$$

leží v množině $\mathbb{Z}^*$. (*J. Šimša*)

2. Na neprázdné množině M je dána operace $*$, která každé uspořádané dvojici prvků $(a, b) \in \mathsf{M} \times \mathsf{M}$ přiřadí nějaký prvek $c \in \mathsf{M}$, který označujeme $c = a * b$. Uvažujme operace $*$ s vlastností, že vztahy

$$(a * b) * b = a \qquad \text{a} \qquad a * (a * b) = b$$

platí pro libovolné prvky $a, b \in \mathsf{M}$.

a) Dokažte, že každá takováto operace je komutativní, tj. pro všechna $a, b \in \mathsf{M}$ platí rovnost $a * b = b * a$.

b) Na kterých konečných množinách M takováto operace existuje?

(*J. Šimša, T. Werner*)

3. Pravidelný čtyřboký jehlan má délku hrany podstavy $2a$ a délku boční hrany $a\sqrt{17}$. Uvnitř jehlanu je zvolen bod M. Uvažujme pět jehlanů podobných danému, které mají hlavní vrchol v bodě M a jejichž podstavy leží v rovinách stěn daného jehlanu. Dokažte, že součet povrchů těchto jehlanů je větší nebo rovný jedné pětině povrchu daného jehlanu. Kde je potřeba zvolit bod M, aby nastala rovnost? (*P. Leischner*)

4. Nechť $\mathbb{Z}$ označuje množinu všech celých čísel. Rozhodněte, zda existuje funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ taková, že pro každé $k = 0, 1, 2, \ldots, 1\,996$ a pro každé $m \in \mathbb{Z}$ má rovnice $f(x) + k \cdot x = m$ aspoň jedno řešení x v oboru celých čísel. (*J. Šimša*)

5. Na přímce jsou dány dvě množiny intervalů A a B. Množina A obsahuje $2m - 1$ intervalů, kde $m \in \mathbb{N}$, přičemž žádné dva intervaly z A nejsou disjunktní, nemají společný jen krajní bod, a každý interval z A obsahuje aspoň dva disjunktní intervaly z B. Dokažte, že v B lze najít interval, který patří aspoň m intervalům z A. (*P. Hliněný*)

6. Uvnitř stran AC a BC trojúhelníku ABC jsou po řadě zvoleny body E a D. Označme F průsečík přímek AD a BE. Dokažte, že podíl obsahů trojúhelníků ABC a ABF splňuje vztah

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABF}} = \frac{|AC|}{|AE|} + \frac{|BC|}{|BD|} - 1.$$

(*P. Leischner*)

Řešení úloh

1. Keď je výraz N_1 nulový, dostaneme zo zadania rovnosť $p = (6a - 1)(6b - 1)$. Podobne, ak je nulový výraz N_2, dostaneme rovnosť $p = -(6a + 1)(6b + 1)$.

Najprv dokážeme prvú časť ekvivalencie. Nech je $p > 3$ prvočíslo. Rozlíšime dva prípady $p \equiv 1 \pmod 6$ a $p \equiv -1 \pmod 6$ (iný prípad zrejme nemôže nastať). V prvom z nich zrejme $N_2 \notin \mathbb{Z}^*$. Predpokladajme, že pre niektorú dvojicu $a, b \in \mathbb{Z}^*$ platí aj $N_1 \notin \mathbb{Z}^*$, čiže $N_1 = 0$. To je však zrejme možné, len ak je jedno z čísel $|6a - 1|$ alebo $|6b - 1|$ rovné 1 (inak by p nebolo prvočíslom). Preto by muselo byť jedno z čísel a, b rovné nule, čo však nie je možné. Obdobne dostaneme spor aj v prípade $p \equiv -1 \pmod 6$.

Teraz predpokladajme, že $p > 3$ nie je prvočíslo. Okrem prípadov $p \equiv \pm 1 \pmod 6$ nemôžeme dostať ani N_1, ani N_2 celé. Potom však majú všetky delitele čísla p tvar $6k \pm 1$. Číslo p má teda aspoň jeden z možných rozkladov:

$$p = (6c + 1)(6d + 1), \quad p = (6c - 1)(6d - 1), \quad p = (6c + 1)(6d - 1),$$

kde c a d sú prirodzené čísla. V prvom prípade N_2 nie je celé a pre $a = -c$ a $b = -d$ dostávame $N_1 = 0$, v druhom prípade opäť N_2 nie je

celé a $N_1 = 0$ pre $a = c$ a $b = d$. Napokon v treťom prípade N_1 nie je celé a pre $a = c$ a $b = -d$ dostávame $N_2 = 0$.

V každom prípade sme našli dvojicu čísel $a, b \in \mathbb{Z}^*$, pre ktorú nie je žiadne z čísel N_1, N_2 z množiny $\mathbb{Z}^*$.

2. a) Podľa prvej identity v zadaní platí $[a*(a*b)]*(a*b) = a$. Výraz v hranatej zátvorke je ale podľa druhej identity v zadaní rovný prvku b, čiže platí $b*(a*b) = a$, a teda $b*a = b*[b*(a*b)]$. Pretože posledný výraz je podľa druhej identity v zadaní rovný $a*b$, platí $b*a = a*b$ a dôkaz komutativity je hotový.

b) Prvky ľubovoľnej n-prvkovej množiny označíme číslami $1, 2, \ldots, n$ a definujeme $a*b = c$, práve keď $n \mid (a+b+c)$. Táto definícia je korektná (t.j. pre každú dvojicu (a, b) existuje práve jeden taký prvok c) a má okamžitý dôsledok: ak platí $a*b = c$, potom $c*b = a$ a $a*c = b$. Preto operácia $*$ s požadovanou vlastnosťou existuje na každej konečnej množine.

3. Všimnime si, že obsah podstavy aj bočnej steny daného ihlana je rovnaký $S_1 = 4a^2$. Spojnice bodu M s vrcholmi ihlana rozdelia ihlan na štyri štvorsteny a jeden štvorboký ihlan. Všetky tieto telesá majú spoločný vrchol M. Súčet ich objemov je objem daného ihlana. Ak označíme v_i $(i = 1, \ldots, 5)$ výšky týchto telies z bodu M, potom

$$\frac{1}{3}S_1 \sum_{i=1}^{5} v_i = \frac{1}{3}S_1 v,$$

z čoho vyplýva, že $\sum_{i=1}^{5} v_i = v$, kde v je výška daného ihlana. Teraz si uvedomme, že tieto výšky sú zároveň aj výškami piatich ihlanov podobných danému zo zadania. Je teda

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{v_i}{v} = 1 = \sum_{i=1}^{5} k_i = \sum_{i=1}^{5} \sqrt{\frac{S_i}{S}},$$

pričom S je povrch daného ihlana, S_i sú povrchy piatich vzniknutých ihlanov a k_i sú ich koeficienty podobnosti s daným ihlanom. Z toho ďalej vyplýva, že $\sum_{i=1}^{5} \sqrt{S_i} = \sqrt{S}$, čo po umocnení dáva

$$S = \sum_{i=1}^{5} S_i + \sum_{1 \leqq i < j \leqq 5} 2\sqrt{S_i S_j}.$$

Ak ďalej použijeme AG-nerovnosť, čiže $2\sqrt{S_iS_j} \leqq S_i + S_j$, dostaneme

$$S \leqq \sum_{i=1}^{5} S_i + 4\sum_{i=1}^{5} S_i = 5\sum_{i=1}^{5} S_i.$$

Teda $\sum_{i=1}^{5} S_i \geqq \frac{1}{5}S$. Rovnosť nastáva, len keď sú všetky ihlany zhodné. Potom je však M stredom gule vpísanej danému ihlanu.

4. Dokážeme, že hľadaná funkcia existuje. Po krátkej úvahe možno nahliadnuť, že stačí nájsť jednoznačné (injektívne) priradenie $(k, m) \mapsto x$ a potom definovať $f(x) = m - kx$. Zrejme potom už bude funkcia f spĺňať zadané podmienky.

Položme $d = 1\,996 + 1 = 1\,997$. Podľa vety o delení celých čísel možno každé číslo $x \in \mathbb{Z}$ zapísať jediným spôsobom v tvare $x = md + k$, kde $m \in \mathbb{Z}$ a $k \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$. Na základe tohoto vyjadrenia (s pevným d) položme $f(x) = m - kx$, t.j. $f(md+k) = m - k(md+k)$. Potom každá rovnica $f(x) + kx = m$ má riešenie (nie nutne jediné) $x = md + k$.

5. Označme intervaly v množine A ako $\alpha_i = \langle a_i, b_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, 2m-1$; indexy môžeme zrejme voliť tak, aby platilo

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_{2m-1}. \tag{1}$$

Nech ďalej b_k, $k \in \{m, m+1, \ldots, 2m-1\}$, je najmenšie z čísel b_m, b_{m+1}, …, b_{2m-1}. Podľa zadania obsahuje interval $\alpha_k \in$ A dva disjunktné intervaly z množiny B. Označme ich $\beta_1 = \langle c_1, d_1\rangle$ a $\beta_2 = \langle c_2, d_2\rangle$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že

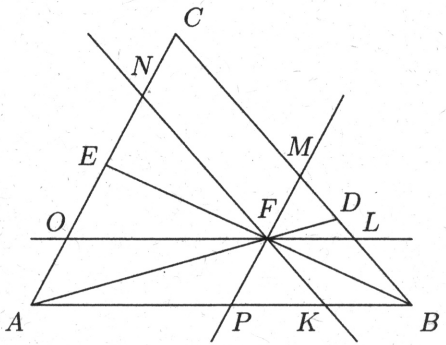
$$a_k \leqq c_1 < d_1 < c_2 < d_2 \leqq b_k. \tag{2}$$

Teraz rozlíšime nasledujúce prípady:

1) $d_1 \leqq b_i$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, m$. Potom ale z (1) aj $\beta_1 \subset \alpha_i$ pre každé $i = 1, 2, \ldots, m$, a teda β_1 má požadovanú vlastnosť.
2) $d_1 > b_s$ pre nejaké $s \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Vďaka (2) aj $c_2 > b_s$. Pretože podľa zadania majú každé dva intervaly z A spoločný bod, platí zároveň $b_s \geqq a_i$ pre všetky i, a teda $c_2 > a_i$ pre všetky i. Napokon z definície b_k je $b_k \leqq b_i$ pre $i \in \{m, m+1, \ldots, 2m-1\}$. Celkom teda platí $a_i < c_2 < d_2 \leqq b_k \leqq b_i$, pre každé $i \in \{m, m+1, \ldots, 2m-1\}$, čiže $\beta_2 \subset \alpha_i$ pre všetky $i \in \{m, m+1, \ldots, 2m-1\}$. Interval β_2 má potom požadovanú vlastnosť.

Tým je dôkaz ukončený.

6. Veďme bodom F rovnobežky so stranami trojuholníka ABC a ich priesečníky s týmito stranami označme K, L, M, N, O, P (obr. 35).



Obr. 35

Ak ďalej označíme v_C, v_F vzdialenosti bodov C, F od priamky AB, potom

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABF}} = \frac{v_C}{v_F} = \frac{|BC|}{|FK|}. \tag{3}$$

Keď teraz použijeme podobnosť trojuholníkov FLM, PKF a rovnoľahlosť úsečiek PM a AC so stredom v B (bod F sa v tejto rovnoľahlosti zobrazí na bod E), dostaneme (rovnoľahlosť zachováva pomery dĺžok úsečiek)

$$\frac{|LM|}{|FK|} = \frac{|FM|}{|FP|} = \frac{|EC|}{|AE|} = \frac{|AC|}{|AE|} - 1. \tag{4}$$

Ďalej platí obdobne

$$\frac{|MC|}{|FK|} = \frac{|FN|}{|FK|} = \frac{|DC|}{|BD|} = \frac{|BC|}{|BD|} - 1 \tag{5}$$

a podľa (3)

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABF}} = \frac{|BC|}{|FK|} = \frac{|BL| + |LM| + |MC|}{|FK|}.$$

Do poslednej rovnosti dosadíme $|BL| = |FK|$ a dĺžky $|LM|$, $|CM|$ vyjadrené zo (4) a (5). Tak dostaneme zadaný vzťah.

37. mezinárodní matematická olympiáda

Symbol olympiády, která se konala v indické Bombaji od 5. do 17. července 1996, představuje zajímavou matematickou úlohu z Bháskarova spisku *Lílávátí* (12. stol.), kterou uvádíme ve volném českém překladu: *Páv stojí na vrcholu devět loktů vysokého podstavce, při jehož úpatí je díra. Ve vzdálenosti trojnásobku výšky podstavce vidí hada pohybujícího se směrem k díře a šikmo se naň vrhne. Řekni mi rychle, v jaké vzdálenosti od díry se oba srazí, pohybují-li se oba stejnou rychlostí.* K jejímu řešení vystačíte s Pythagorovou větou, jejíž geometrický důkaz naleznete na obrázku zmíněného podstavce.

Tato mezinárodní matematická olympiáda překonala opět několik rekordů. Přitom tentokrát nešlo ani tolik o rekordy v počtu zúčastněných zemí, který se v posledních letech ustálil kolem sedmdesátky (letošní MMO se zúčastnilo 426 studentů ze 75 zemí), ale spíš v obtížnosti: jak vybraných úloh, tak celkových podmínek. Tropická vedra s občasnými prudkými lijáky počínajícího monzunového období, problémy s dietou (jeden z našich studentů po celou dobu pobytu v Bombaji téměř nejedl, dva soutěžící — nikoli naši, i když podle výsledků by to tak mohlo vypadat — vinou žaludečních obtíží soutěž nedokončili) a nekonečné přesuny autobusy v přecpaném velkoměstě. A posledním smutným rekordem je výsledné umístění českého družstva v neoficiálním pořadí jednotlivých zemí.

Z našich nejlépe dopadli *Tomáš Bárta* spolu s *Michalem Benešem* z pražského gymnázia ve Zborovské ulici, kteří získali shodně 21 bodů, což tentokrát stačilo na II. cenu. S nimi ještě držel krok *David Opěla* z bíloveckého Gymnázia Mikuláše Koperníka, který za 18 bodů dostal cenu III. Zbylí naši tři reprezentanti se už bohužel zařadili do druhé poloviny účastníků MMO a zůstali tedy bez ceny, i když letos na III. cenu bylo potřeba pouhých 12 bodů (bylo i hůře: v roce 1971 na 13. MMO v Žilině stačilo na III. cenu dokonce jen 11 bodů).

Vlastní soutěž proběhla 10. a 11. července v prostorách Střediska pro atomový výzkum Bhabha. Organizace soutěže, jakož i podmínky pro práci jury a koordinaci byly vesměs výborné. Sympatické např. bylo i to, že se na koordinaci podíleli i bývalí úspěšní indičtí olympionici.

Výsledky našich žáků:

Umístění		Body za úlohu 1	2	3	4	5	6	Body	Cena
81.–93.	Tomáš Bárta, 4. roč. gymnázia Praha 5, Zborovská	7	1	6	0	0	7	21	II.
81.–93.	Michal Beneš, 4. roč. gymnázia Praha 5, Zborovská	7	1	6	0	0	7	21	II.
111.–120.	David Opěla, 4. roč. GMK Bílovec	4	1	7	0	0	6	18	III.
216.–226.	Robert Špalek, 4. roč. gymnázia Brno, tř. Kpt. Jaroše	1	0	5	3	0	1	10	
236.–247.	Daniel Kráľ, 4. roč. gymnázia Zlín	4	2	1	0	0	1	8	
290.–324.	Jan Spěvák, 3. roč. gymnázia Praha 1, Hellichova	2	1	1	1	0	0	5	
	Celkem	25	6	26	4	0	22	83	

O náročnosti úloh dává obvykle dobrou informaci počet bodů nutných pro získání příslušné medaile: První cena se udělovala za 28–42 bodů, II. za 20–27 a III. za 12–19 bodů. Porovnáte-li uvedené bodové hranice s předešlo 36. MMO v Torontu, zjistíte posun zhruba o 10 bodů dolů. Na této mezinárodní olympiádě získal plný počet 42 bodů jediný student Ciprian Manolescu z Rumunska, který se tak stal absolutním vítězem.

Extrémně obtížná byla pátá úloha. Její záludnost spočívala už v tom, že první slibně vypadající nápad k řešení nevedl... Koneckonců o její

obtížnosti nejlépe svědčí celkový bodový zisk: 209 bodů, to při 424 soutěžících dává průměrný bodový zisk 0,49 — méně než půl bodu!

Trochu nás může mrzet slabý výsledek na hezké druhé úloze. Čtvrtá úloha snad nebyla tak obtížná, nicméně byla (bez znalosti techniky kvadratických zbytků) početně náročnější, což ve spojení s „nedobytnou" pátou úlohou přispělo k hubenému bodovému zisku. A tak jsme nakonec druhý den sbírali body jen za šestou úlohu, kde se nakonec i naši dva nejlepší blýskli velmi pěkným řešením (každý jiným).

Neoficiální pořadí všech zúčastněných zemí s počtem získaných cen a celkovým bodovým ziskem:

	I	II	III	body
Rumunsko	4	2	–	187
USA	4	2	–	185
Maďarsko	3	2	1	167
Rusko	2	3	1	162
Velká Británie	2	4	–	161
ČLR	3	2	1	160
Vietnam	3	1	1	155
Korea	2	3	–	151
Írán	1	4	1	143
Německo	3	1	1	137
Japonsko	1	3	1	136
Bulharsko	1	4	1	136
Polsko	–	3	3	122
Indie	1	3	1	118
Izrael	1	2	2	114
Kanada	–	3	3	111
Slovensko	–	2	4	108
Ukrajina	1	–	5	105
Turecko	–	2	3	104
Tchaj-wan	–	2	3	100
Bělorusko	1	1	2	99
Řecko	–	1	5	95
Austrálie	–	2	3	93
Jugoslávie	–	1	3	87
Itálie	–	2	2	86
Singapur	1	–	3	86
Hongkong	–	1	4	84
Česká republika	–	2	2	83
Argentina	–	1	3	80
Gruzie	1	–	2	78
Belgie	–	–	–	75
Litevsko	–	–	–	68
Lotyšsko	–	–	–	66
Chorvatsko	–	–	–	63
Arménie	–	–	–	63
Francie	–	–	–	61
Nový Zéland	–	–	–	60
Norsko	–	–	–	60

	I	II	III	body
Finsko	–	–	–	58
Švédsko	–	–	–	57
Moldavsko	–	–	–	55
Rakousko	–	–	–	54
JAR	–	–	–	50
Mongolsko	–	–	–	49
Slovinsko	–	–	–	49
Kolumbie	–	–	–	48
Thajsko	–	–	–	47
Makedonie	–	–	–	44
Španělsko	–	–	–	44
Macao	–	–	–	44
Dánsko	–	–	–	44
Brazílie	–	–	–	36
Srí Lanka	–	–	–	34
Mexiko	–	–	–	34
Estonsko	–	–	–	33
Island	–	–	–	31
Bosna a Hercegovina	–	–	–	30
Ázerbajdžán	–	–	–	27
Nizozemsko	–	–	–	26
Trinidad a Tobago	–	–	–	25
Irsko	–	–	–	24
Švýcarsko	–	–	–	23
Portugalsko	–	–	–	21
Kazachstán	–	–	–	20
Maroko	–	–	–	19
Kuba	–	–	–	16
Kirgizie	–	–	–	15
Albánie	–	–	–	15
Kypr	–	–	–	14
Indonézie	–	–	–	11
Chile	–	–	–	10
Malajsie	–	–	–	9
Turkménie	–	–	–	9
Filipíny	–	–	–	8
Kuvajt	–	–	–	1

Vedoucím naší výpravy byl dr. *Karel Horák* z Matematického ústavu AV ČR, pedagogickým vedoucím družstva byl doc. *Jaromír Šimša* z brněnské pobočky téhož ústavu.

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Nechť $ABCD$ je obdélníková deska o rozměrech $|AB| = 20, |BC| = 12$. Deska je rozdělena na 20×12 jednotkových čtverců. Nechť r je dané kladné celé číslo. Mincí lze táhnout z jednoho čtverce na druhý, právě když vzdálenost středů obou čtverců je $\sqrt{r}$. Úkolem je najít posloupnost tahů mincí vedoucí ze čtverce s vrcholem A do čtverce při vrcholu B.

a) Ukažte, že úkol nelze splnit, je-li r dělitelné 2 nebo 3.

b) Dokažte, že je to možné pro $r = 73$.

c) Lze úkol splnit pro $r = 97$? (*Finsko*)

2. Nechť P je bod uvnitř trojúhelníku ABC, pro který platí

$$|\sphericalangle APB| - |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle APC| - |\sphericalangle ABC|.$$

Označme D, E středy kružnic vepsaných trojúhelníkům APB a APC. Ukažte, že přímky AP, BD a CE procházejí jedním bodem. (*Kanada*)

3. Nechť $\mathsf{S} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ označuje množinu všech nezáporných celých čísel. Najděte všechny funkce f definované na S, jejichž hodnoty jsou v S, a takové, že

$$f\big(m + f(n)\big) = f\big(f(m)\big) + f(n) \quad \text{pro všechna } m, n \in \mathsf{S}.$$

(*Rumunsko*)

4. Jsou dána kladná celá čísla a, b taková, že obě čísla $15a+16b$ a $16a-15b$ jsou druhými mocninami kladných celých čísel. Najděte nejmenší možnou hodnotu, kterou může nabýt minimum z obou druhých mocnin.

(*Rusko*)

5. Nechť $ABCDEF$ je konvexní šestiúhelník takový, že AB je rovnoběžné s ED, BC je rovnoběžné s FE a CD je rovnoběžné s AF. Označme R_A, R_C a R_E poloměry kružnic opsaných trojúhelníkům FAB, BCD a DEF a p obvod daného šestiúhelníku. Dokažte, že

$$R_A + R_C + R_E \geqq \frac{p}{2}.$$

(*Arménie*)

6. Nechť n, p, q jsou kladná celá čísla, pro něž $n > p + q$. Nechť $x_0, x_1, \ldots, x_n$ jsou celá čísla, jež splňují následující podmínky:
a) $x_0 = x_n = 0$;
b) pro každé celé číslo i, $1 \leqq i \leqq n$, je

$$\text{buď } x_i - x_{i-1} = p, \quad \text{nebo } x_i - x_{i-1} = -q.$$

Ukažte, že existuje dvojice indexů (i, j) taková, že $i < j$, $(i, j) \neq (0, n)$ a $x_i = x_j$. (*Francie*)

Řešení úloh

1. Je-li $r = m^2 + n^2$ rozklad čísla r na součet dvou druhých mocnin nezáporných celých čísel, můžeme táhnout mincí o m sloupců vodorovně a o n řádků svisle (pokud přitom zůstaneme na desce). Zvolme soustavu souřadnic tak, aby střed čtverce s vrcholem A ležel v počátku a střed čtverce s vrcholem B měl souřadnice $[19, 0]$. (Střed čtverce s vrcholem D pak bude mít souřadnice $[0, 11]$.)

a) Je-li $r = m^2 + n^2$ dělitelné dvěma, je jasné, že obě čísla m, n musí mít stejnou paritu (stejný zbytek mod 2), tj. součet $m+n$ je sudý. Protože obě souřadnice počátku jsou sudé, není možno se dostat do bodu $[19, 0]$, který má součet souřadnic lichý.

Je-li $r = m^2 + n^2$ dělitelné třemi, snadno zjistíme (vzhledem k tomu, že -1 není kvadratický zbytek mod 3), že musí být $m \equiv n \equiv 0 \pmod 3$. Proto ani v tomto případě nelze přejít z počátku, jehož obě souřadnice jsou dělitelné třemi, do bodu $[19, 0]$, jehož první souřadnice 19 násobkem tří není.

b) Protože jediný rozklad čísla $r = 73$ na součet druhých mocnin je $r = 3^2 + 8^2$, máme možnost kombinovat tahy charakterizované vektory $(\pm 3, \pm 8)$ a $(\pm 8, \pm 3)$. Dostaneme tak např. tuto možnou posloupnost polí: $[0, 0] \to [3, 8] \to [11, 5] \to [3, 2] \to [0, 10] \to [8, 7] \to [0, 4] \to [8, 1] \to$ $\to [11, 9] \to [3, 6] \to [11, 3] \to [19, 0]$.

Poznámka. K cestě z bodu $[0, 0]$ do bodu $[19, 0]$ se lze dopracovat i řešením neurčitých rovnic. Označme a, b, c, d postupně počet tahů typu $\pm(8, 3)$, $\pm(8, -3)$, $\pm(3, 8)$ a $\pm(3, -8)$ (tj. a označuje počet tahů daných vektorem $(8, 3)$ minus počet tahů odpovídajících vektoru $(-8, -3)$). Dostaneme tak dvě neurčité rovnice

$$8(a + b) + 3(c + d) = 19, \quad 3(a - b) + 8(c - d) = 0, \tag{1}$$

kterým vyhovíme např. tak, že položíme $a+b=2$, $c+d=1$, $a-b=$ $=-8$, $c-d=3$, což dohromady dává $a=-3$, $b=5$, $c=2$, $d=-1$. Tak dostaneme počet tahů odpovídajícího typu, nesmíme však přitom zapomenout, že nelze opustit desku. Těmto hodnotám vyhovuje shora uvedená cesta, ale i cesta $[0,0]\to[3,8]\to[11,5]\to[19,2]\to[16,10]\to$ $\to[8,7]\to[0,4]\to[8,1]\to[11,9]\to[3,6]\to[11,3]\to[19,0]$. Rovnici (1) ovšem vyhovují i $a=5$, $b=3$, $c=1$ a $d=2$ s dalšími možnými cestami.

c) Protože jediný možný rozklad čísla $r=97$ na součet dvou druhých mocnin přirozených čísel je $97=4^2+9^2$, musí každý tah odpovídat jednomu z vektorů $(\pm9,\pm4)$, $(\pm4,\pm9)$. Rozdělme množinu A všech možných pozic na desce,

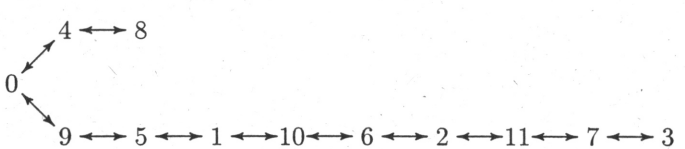
$$\mathsf{A}=\{[i,j]\in\mathbb{Z}^2\colon 0\leqq i\leqq 19, 0\leqq j\leqq 11\},$$

na dvě disjunktní podmnožiny B a C, kde

$$\mathsf{B}=\{[i,j]\in\mathbb{Z}^2\colon 0\leqq i\leqq 19, 4\leqq j\leqq 7\},\quad \mathsf{C}=\mathsf{A}\setminus\mathsf{B}.$$

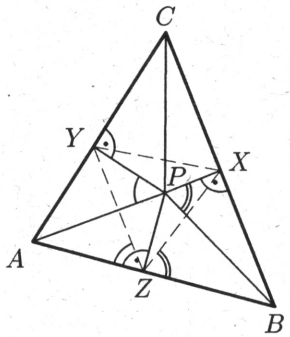
Snadno ověříme, že každý tah typu $(\pm9,\pm4)$ vede z bodu množiny B do bodu množiny C a obráceně, zatímco tahy typu $(\pm4,\pm9)$ jsou možné jen pro body z množiny C a vedou zpět do C. Každý z tahů typu $(\pm9,\pm4)$ mění paritu první souřadnice, takže na cestu z bodu $[0,0]$ do bodu $[19,0]$ potřebujeme *lichý* počet takových tahů. Každý z nich ale vede střídavě z množiny B do C a zpět; my však máme začít i skončit v množině C, k čemuž vede jen sudý počet zmíněných tahů. Odtud plyne, že požadovaná posloupnost tahů pro $r=97$ neexistuje.

Jiné řešení části c) (podle *Michala Beneše*). Jediný možný rozklad čísla $r=97$ je $97=4^2+9^2$. Uvažujme orientovaný graf, který spojuje všechny možné y-ové souřadnice, jež dostaneme při vertikální změně o 4 nebo o 9:



Protože se máme dostat z vrcholu $[0,0]$ do vrcholu $[19,0]$, je vidět, že v uvedeném grafu musíme vykonat cestu z uzlu 0 zpět do uzlu 0, tj. musíme provést sudý počet vertikálních změn o 4 i sudý počet vertikálních změn o 9. Protože ale 19 je liché číslo, nelze je dostat jako kombinaci sudého počtu devítek a sudého počtu čtyřek.

2. Sestrojme postupně paty X, Y a Z kolmic z bodu P na strany BC,



Obr. 36

CA a AB (obr. 36). Protože čtyřúhelníky $PXCY$, $PYAZ$ a $PZBX$ jsou tětivové, je

$$\begin{aligned}|\sphericalangle APB| - |\sphericalangle ACB| &= |\sphericalangle APB| - (\pi - |\sphericalangle XPY|) = \\ &= 2\pi - (|\sphericalangle APY| + |\sphericalangle BPX|) - \pi = \\ &= \pi - (|\sphericalangle AZY| + |\sphericalangle BZX|) = |\sphericalangle XZY|\end{aligned}$$

a analogicky

$$|\sphericalangle APC| - |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle XYZ|.$$

Z předpokladů úlohy tedy plyne, že je $|\sphericalangle XZY| = |\sphericalangle XYZ|$, a tedy $|XZ| = |XY|$.

Označme dále Q, resp. R průsečíky přímky AP s osou úhlu ABP, resp. ACP. Z vlastností osy úhlu dostáváme rovnosti

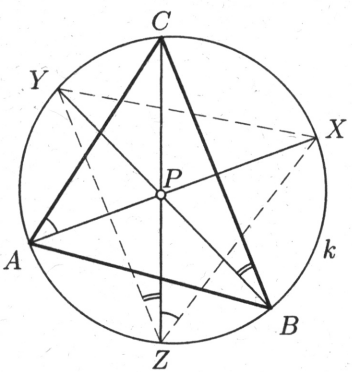
$$\frac{|AQ|}{|QP|} = \frac{|AB|}{|BP|} \quad \text{a} \quad \frac{|AR|}{|RP|} = \frac{|AC|}{|CP|}.$$

Abychom ukázali, že body Q a R splývají, stačí ukázat, že $\dfrac{|AB|}{|BP|} = \dfrac{|AC|}{|CP|}$. Pro průměry CP a BP kružnic opsaných tětivovým čtyřúhelníkům $PXCY$ a $PZBX$ platí $|CP| = \dfrac{|XY|}{\sin\gamma}$ a $|BP| = \dfrac{|XZ|}{\sin\beta}$. Rovnost $Q = R$ je tudíž ekvivalentní s rovností

$$\frac{|AB| \cdot |XY|}{\sin\gamma} = \frac{|AC| \cdot |XZ|}{\sin\beta},$$

která díky rovnosti $|XZ| = |XY|$ plyne ze sinové věty pro trojúhelník ABC.

Jiné řešení. Označme X, Y a Z druhé průsečíky polopřímek AP, BP a CP s kružnicí k opsanou trojúhelníku ABC. Zřejmě $|\sphericalangle APB| - |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle APZ| - |\sphericalangle ACP| + |\sphericalangle ZPB| - |\sphericalangle PCB| = |\sphericalangle PAC| + |\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle PZX| + |\sphericalangle PZY| = |\sphericalangle XZY|$ (obr. 37). Analogicky $|\sphericalangle APC| - |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle XYZ|$. Odtud plyne, že předpokládaná rovnost $|\sphericalangle APB| - |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle APC| - |\sphericalangle ABC|$ je ekvivalentní s rovností $|\sphericalangle XZY| = |\sphericalangle XYZ|$, a tedy i s rovností $|XZ| = |XY|$.



Obr. 37

Protože trojúhelníky APC a ZPX jsou podobné, je

$$\frac{|AC|}{|ZX|} = \frac{|AP|}{|ZP|} = \frac{|PC|}{|PX|} = \frac{|AP| \cdot |PC|}{|AP| \cdot |PX|} = \frac{|AP| \cdot |PC|}{m},$$

kde $m = |AP| \cdot |PX| = |BP| \cdot |PY| = |CP| \cdot |PZ|$ je až na znaménko velikost mocnosti bodu P ke kružnici k. Je tedy

$$|XZ| = m \frac{|AC|}{|AP| \cdot |PC|}$$

a obdobně

$$|XY| = m \frac{|AB|}{|AP| \cdot |PB|}.$$

Protože $|XZ| = |XY|$, plyne odtud rovnost

$$\frac{|AB|}{|BP|} = \frac{|AC|}{|CP|}.$$

To znamená, že osy úhlů ABP a ACP dělí úsečku AP ve stejném poměru. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Poznámka. Bod P, který vyhovuje předpokladu úlohy, leží na oblouku Apolloniovy kružnice všech bodů U takových, že $\dfrac{|UB|}{|UC|} = \dfrac{c}{b}$. Plyne to ze závěru druhého z uvedených řešení.

3. Předpokládejme, že funkce f je řešením úlohy. Dosazením $m = n = 0$ do dané rovnice dostaneme $f(0) = 0$ a pro $m = 0$ dostaneme rovnost $f\big(f(n)\big) = f(n)$ pro všechna $n \in \mathsf{S}$. Pokud funkce f není identicky rovna nule, má tedy vždy nenulový pevný bod (tj. bod, který se zobrazí sám na sebe). Označme a nejmenší *kladný* pevný bod funkce f. Pokud $a = 1$, dostaneme pro $m = 1$ rovnost $f\big(1 + f(n)\big) = 1 + f(n)$, odkud indukcí snadno plyne, že je $f(n) = n$ pro každé $n \in \mathsf{S}$.

Předpokládejme dále, že $a > 1$. Potom zřejmě platí $f(2a) = f\big(f(a) + a\big) = a + f(a) = 2a$ a dále opět indukcí $f(ka) = ka$ pro každé $k \geqq 1$. Ukážeme, že všechny pevné body zobrazení f (a tedy i všechny funkční hodnoty) jsou tvaru ka pro vhodné celé $k \geqq 0$: Je-li b libovolný pevný bod funkce f, dostaneme pro jeho podíl q při dělení číslem a a příslušný zbytek r $(0 \leqq r < a)$ rovnost

$$\begin{aligned} aq + r = b = f(b) = f(aq + r) = f\big(r + f(aq)\big) = \\ = f(r) + f(aq) = f(r) + aq. \end{aligned}$$

To znamená, že také $f(r) = r$ je pevný bod zobrazení f, a protože $r < a$, musí být $r = 0$. Protože množina $\{f(n)\colon n \in \mathsf{S}\}$ je množinou pevných bodů funkce f, plyne odtud speciálně, že $f(i) = n_i a$ pro každé $i < a$, přičemž $n_0 = 0$ a $n_i \in \mathsf{S}$. Pro libovolné $n \in \mathsf{S}$, které vyjádříme jako $n = ka + i$, $0 \leqq i < a$, pak z dané funkcionální rovnice plyne

$$f(n) = f(i + ka) = f(i) + ka = n_i a + ka = (n_i + k)a.$$

Zbývá ověřit, že funkce f definovaná právě uvedeným předpisem splňuje danou funkcionální rovnici, ať už jsou čísla n_i $(1 \leqq i < a)$ v případě $a > 1$ zvolena jakkoliv: nechť $m = ka + i$, $n = la + j$, $0 \leqq i, j < a$. Potom

$$\begin{aligned} f\big(m + f(n)\big) = f\big(ka + i + f(la + j)\big) = f\big(k + l + n_j)a + i\big) = \\ = (k + l + n_j + n_i)a = f(m) + f(n) = f\big(f(m)\big) + f(n). \end{aligned}$$

Odpověď: Dané funkcionální rovnici vyhovují nulová funkce, dále identická funkce f, pro kterou je $f(n) = n$ pro všechna $n \in \mathsf{S}$, a konečně každá funkce f určená předpisem

$$f(n) = \left(\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor + n_i\right)a,$$

kde $a > 1$ a $n_1, n_2, \ldots, n_{a-1} \in \mathsf{S}$ jsou libovolné konstanty.

4. Označme $15a + 16b = r^2$ a $16a - 15b = s^2$, kde $r, s \in \mathbb{N}$. Odtud dostáváme

$$r^4 + s^4 = (15^2 + 16^2)(a^2 + b^2) = 481(a^2 + b^2).$$

Číslo 481 má prvočíselný rozklad $481 = 13 \cdot 37$, musí tedy platit $r^4 + s^4 \equiv 0 \pmod{p}$ pro $p \in \{13, 37\}$. Nyní využijeme skutečnost, že čtvrtá mocnina celého čísla nikdy nedává zbytek -1 ani modulo 13, ani modulo 37. To plyne z *malé věty Fermatovy*, podle níž pro libovolné prvočíslo p a pro každé celé x je buď $x^{p-1} \equiv 0$, nebo $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Kdyby tedy pro nějaké celé x bylo $x^4 \equiv -1 \pmod{13}$, bylo by též $x^{12} \equiv (-1)^3 = -1 \pmod{13}$, a to nemůže nastat; podobně z kongruence $x^4 \equiv -1 \pmod{37}$ pro nějaké celé x plyne $x^{36} \equiv (-1)^9 \pmod{37}$, což rovněž neplatí.

Rovnice $r^4 + s^4 \equiv 0 \pmod{p}$ tedy nemůže mít řešení $r \not\equiv 0 \pmod{p}$, $s \not\equiv 0 \pmod{p}$ ($p \in \{13, 37\}$), protože pak by pro r' takové, že $rr' \equiv 1 \pmod{p}$ (podle zmíněné malé věty Fermatovy stačí volit $r' = r^{p-2}$) platilo $-1 \equiv -r^4 r'^4 \equiv s^4 r'^4 = (sr')^4 \pmod{p}$. Proto musí být $r \equiv s \equiv 0 \pmod{p}$, neboli $p \mid r$, $p \mid s$, tedy $481 \mid r$, $481 \mid s$, což znamená, že $r \geqq 481$, $s \geqq 481$. Protože pro $r = s = 481$ najdeme dvojici $a = 481 \cdot 31$, $b = 481$, je hledané minimum rovno 481^2.

Jiné řešení. Stejně jako v předchozím řešení zavedeme čísla r a s, pro něž dostaneme dvě kongruence $r^4 + s^4 \equiv 0 \pmod{p}$, neboli $r^4 \equiv -s^4 \pmod{p}$, kde $p \in \{13, 37\}$. Kdyby některá z těchto kongruencí měla řešení $r \not\equiv 0 \pmod{p}$, dostali bychom umocněním na liché číslo $\frac{1}{4}(p-1)$ podle malé věty Fermatovy

$$1 \equiv r^{p-1} = \left(r^4\right)^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv \left(-s^4\right)^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv -s^{p-1} \equiv -1 \pmod{p},$$

což není možné. Je tedy $r \equiv s \equiv 0 \pmod{p}$ a dále postupujeme stejně jako v předchozím řešení.

Jiné řešení. Označme $15a + 16b = r^2$ a $16a - 15b = s^2$, kde $r, s \in \mathbb{N}$. Sečtením vhodných násobků uvedených dvou rovností dostaneme

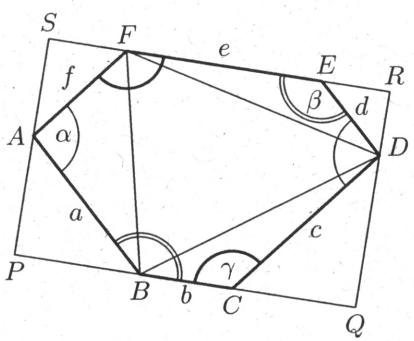
$481a = 15r^2 + 16s^2$. Uvažujeme-li tuto rovnici modulo 13, dostaneme $2r^2+3s^2 \equiv 0 \pmod{13}$. Pokud prozkoumáme všechny kvadratické zbytky modulo 13, zjistíme, že tato možnost může nastat, jen když $13 \mid r$ a $13 \mid s$. Obdobně probráním všech kvadratických zbytků modulo 37 zjistíme, že rovnici $481a = 15r^2 + 16s^2$ modulo 37 vyhovují pouze ta r, s, pro něž $37 \mid r$, $37 \mid s$. Závěr je stejný jako v prvém řešení.

5. Označme obvyklým způsobem a, b, c, d, e a f délky stran daného šestiúhelníku $ABCDEF$. Je zřejmé, že šestiúhelník má shodné protější úhly, $\alpha = |\sphericalangle BAF| = |\sphericalangle CDE|$, $\beta = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$ a $\gamma = |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle EFA|$. Opišme šestiúhelníku obdélník $PQRS$ tak, aby dvě jeho protější strany obsahovaly dvě protější rovnoběžné strany šestiúhelníku, např. tak, že $AP \perp BC$, $AS \perp EF$, $DQ \perp BC$, $DR \perp EF$ (obr. 38). V takovém případě je $|FB| \geqq |PS|$ a zároveň $|FB| \geqq |QR|$, přičemž $|PS| = a \sin\beta + f \sin\gamma$, $|QR| = c \sin\gamma + d \sin\beta$. Je tedy také

$$2|FB| \geqq (d + a) \sin\beta + (c + f) \sin\gamma.$$

Analogicky dostaneme (opíšeme-li obdélník dalšími dvěma způsoby)

$$2|BD| \geqq (b + e) \sin\beta + (c + f) \sin\alpha,$$
$$2|DF| \geqq (d + a) \sin\alpha + (b + e) \sin\gamma.$$



Obr. 38

Ze sinové věty pro trojúhelníky FAB, BCD a DEF vycházejí rovnosti

$$R_A = \frac{|FB|}{2\sin\alpha}, \quad R_C = \frac{|BD|}{2\sin\gamma}, \quad R_E = \frac{|DF|}{2\sin\beta},$$

takže

$$4R_A \geqq (c+f)\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} + (d+a)\frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$
$$4R_C \geqq (b+e)\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + (c+f)\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma},$$
$$4R_E \geqq (d+a)\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + (b+e)\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}.$$

Sečtením posledních tří nerovností dostaneme

$$4R_A + 4R_C + R_E \geqq (c+f)\Big(\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\Big) + (d+a)\Big(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\Big) +$$
$$+ (b+e)\Big(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\Big) \geqq$$
$$\geqq 2(c+f+d+a+b+e) = 2p,$$

což jsme chtěli dokázat. Rovnost zřejmě platí, právě když $\alpha = \beta = \gamma$ a $FB \perp BC$, $BD \perp AB$ a $DF \perp CD$, tj. právě když $ABCDEF$ je pravidelný (stačí si uvědomit, že trojúhelníky FAB, BCD a DEF jsou rovnoramenné s úhly 30° při základně, takže trojúhelník BDF má nutně všechny úhly šedesátistupňové).

6. (Podle *Michala Beneše.*) Předpokládejme, že čísla p a q jsou nesoudělná (je-li totiž d jejich největší společný dělitel, lze v úloze čísla p, q, x_i zaměnit po řadě čísly p/d, q/d, x_i/d; protože dle zadání platí nerovnost $n > p+q$, platí samozřejmě i nerovnost $n > p/d + q/d$).

Každý člen x_i lze psát ve tvaru $x_i = s_i p - t_i q$, kde celá nezáporná čísla s_i a t_i udávají, kolik z čísel $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_i - x_{i-1}$ je rovno p resp. $-q$ (takže $s_i + t_i = i$), pro $i = 0$ položme $s_0 = t_0 = 0$. Dvojice (s_i, t_i) budeme interpretovat jako mřížové body v rovině se souřadnicovými osami s a t (budeme předpokládat, že osa s je vodorovná, orientovaná doprava a osa t svislá, orientovaná vzhůru). Pro každé i jsou mřížové body (s_{i-1}, t_{i-1}) a (s_i, t_i) sousední, tj. lze je spojit šipkou délky 1 ve směru některé ze souřadných os. Těchto n šipek vytvoří cestu

$$\Gamma_0 = \{(s_0, t_0) \to (s_1, t_1) \to (s_2, t_2) \to \ldots \to (s_n, t_n)\}.$$

(Šipky směřují pouze doprava a nahoru.)

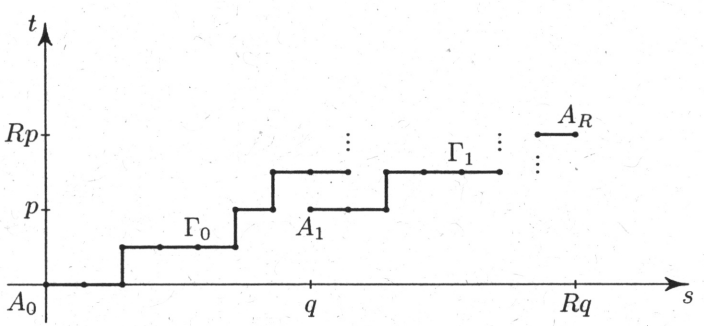
Rovnost $x_i = x_j$ nastane právě pro ta $i < j$, pro která $(t_j - t_i)q = (s_j - s_i)p$, neboli (vzhledem k předpokládané nesoudělnosti p a q)

$t_j = t_i + rp$ a $s_j = s_i + rq$ pro vhodné přirozené r. Tak pro $i = 0$ a $j = n$ dostáváme, že $s_n = Rq$ a $t_n = Rp$ pro vhodné přirozené R. Podle zadání je $n > p + q$, takže z rovností $n = s_n + t_n = R(p + q)$ plyne odhad $R \geqq 2$. Proto bude úloha vyřešena, prokážeme-li existenci indexů $i < j$ takových, že $s_j = s_i + q$ a $t_j = t_i + p$.

Připusťme, že takové indexy neexistují. Geometricky to znamená, že cesta Γ_0 nemá společný bod se svým „posunutím"

$$\Gamma_1 = \{(s_0 + q, t_0 + p) \to (s_1 + q, t_1 + p) \to (s_2 + q, t_2 + p) \to \ldots \to \\ \to (s_n + q, t_n + p)\}.$$

Uvažujme dále mřížové body $A_r = (rq, rp)$ pro $r \geqq 0$. Z našeho předpokladu o vzájemné poloze cest Γ_0 a Γ_1 především plyne, že na cestě Γ_0, jež spojuje body A_0 a A_R, neleží bod A_1, počátek cesty Γ_1. Nechť tedy cesta Γ_0 prochází například „nad" bodem A_1 (kdyby procházela „pod" tímto bodem, stačilo by v následující úvaze všude vyměnit „nad" za „pod"). Pak ovšem (díky vzájemné poloze obou cest) leží Γ_0 „nad" Γ_1 v celém společném úseku $q \leqq s \leqq Rq$. Z toho, že cesta Γ_0 prochází „nad" bodem A_r pro některé $r = 1, 2, \ldots, R - 1$ (jak je tomu pro $r = 1$), okamžitě plyne, že „posunutá" cesta Γ_1 prochází „nad" bodem A_{r+1} (obr. 39), takže (díky upřesněné vzájemné poloze v úseku $q \leqq s \leqq Rq$)



Obr. 39

„nad" bodem A_{r+1} prochází i cesta Γ_0. Indukcí zjišťujeme, že Γ_0 dochází „nad" bod A_R, což odporuje tomu, že v tomto bodě cesta Γ_0 končí.

Jiné řešení. (Podle *Tomáše Bárty.*) Můžeme předpokládat, že p a q jsou nesoudělná čísla, protože jinak vezmeme $p' = \dfrac{p}{(p,q)}$, $q' = \dfrac{q}{(p,q)}$, kde

(p, q) označuje největší společný dělitel čísel p a q; zřejmě $n > p + q > p' + q'$.

Bez újmy na obecnosti můžeme dále předpokládat (díky symetrii), že $p > q$. Abychom dostali $x_n = 0$, musíme zřejmě kq krát přičíst p a kp krát odečíst q, takže $n = k(p + q) \geqq 2(p + q)$.

Budeme dále počítat modulo p. Pokud $x_i - x_{i-1} = p$, je $x_i \equiv x_{i-1} \pmod{p}$, a pokud $x_i - x_{i-1} = -q$, je $x_i \not\equiv x_{i-1} \pmod{p}$. V dané posloupnosti $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nyní označme z_j všechny ty indexy, pro které dojde k odečtení q, tj. dojde ke změně zbytkové třídy modulo p,

$$\begin{aligned} 0 = x_0 \equiv x_1 \equiv \ldots \equiv x_{z_1 - 1} \not\equiv x_{z_1} \pmod{p}, \\ x_{z_1} \equiv \ldots \equiv x_{z_2 - 1} \not\equiv x_{z_2} \ (\equiv -q) \pmod{p}, \\ \vdots \end{aligned} \tag{1}$$

(počet indexů $z_1, z_2, \ldots$ je právě kp). Zřejmě bude $x_{z_p} \equiv -pq \equiv x_0 \pmod{p}$. Předpokládejme dále, že v dané posloupnosti neexistují dvě čísla splňující podmínky úlohy. V tom případě nemůže být $x_0 \leqq x_{z_p} \leqq x_{z_1 - 1}$, protože jinak by bylo x_{z_p} rovno některému z čísel (1), která dle předpokladu tvoří po sobě jdoucí násobky čísla p, a $x_{z_p} \equiv 0 \pmod{p}$. Je tedy buď $x_{z_p} > x_{z_1 - 1}$, nebo $x_{z_p} < x_0$.

a) Nechť $x_{z_p} > x_{z_1 - 1}$. Odtud plyne $x_{z_{p+1}} > x_{z_2 - 1}$. Je totiž

$$x_{z_{p+1}} \geqq x_{z_p} - q > x_{z_1 - 1} - q = x_{z_1}$$

a nemůže být

$$x_{z_1} < x_{z_{p+1}} \leqq x_{z_2 - 1},$$

protože $x_{z_{p+1}} \equiv -q \pmod{p}$ a všechna čísla s touto vlastností mezi x_{z_1} a $x_{z_2 - 1}$ patří do dané posloupnosti. Snadno ukážeme matematickou indukcí, že je také

$$x_{z_{p+j}} > x_{z_{j+1} - 1}, \quad j \geqq 0,$$

speciálně

$$x_{z_{2p}} > x_{z_{p+1} - 1} \geqq x_{z_p} > x_{z_1 - 1} > x_0.$$

Matematickou indukcí vyjde $x_{z_{jp}} > x_0$ pro každé přípustné $j > 0$, a to odporuje tomu, že $x_n = 0$.

b) Nechť $x_{z_p} < x_0$. Podobně jako v a) odvodíme, že je $x_{z_{p+1}} < x_{z_1}$ (je totiž

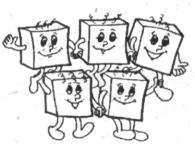
$$x_{z_{p+1}} = x_{z_{p+1} - 1} - q < x_0 - q \leqq x_{z_1 - 1} - q = x_{z_1},$$

protože všechna čísla $x_{z_p}, x_{z_p+1}, \ldots, x_{z_{p+1}-1} \equiv 0 \pmod{p}$ jsou různá od nuly, tedy nutně menší než x_0).

Indukcí dále dostaneme, že $x_{z_{p+j}} < x_{z_j}$ pro každé $j \geqq 0$ a speciálně $x_{z_{2p}} < x_{z_p} < x_0$, $x_{z_{jp}} < x_0$ pro každé přípustné $j > 0$, což opět odporuje tomu, že $x_0 = 0$.

Třetí ročník Středoevropské olympiády v informatice

Třetí ročník Středoevropské olympiády v informatice (CEOI) se konal ve dnech 9.–13. října 1996 na Slovensku. Účastnilo se ho 27 soutěžících ze sedmi zemí Střední Evropy: Chorvatska, Maďarska, Polska, Rumunska, Slovenska, Slovinska a České republiky. Soutěž proběhla v prostorách matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Komenského.



Soutěžící z České republiky byli na tuto soutěž vybráni na základě svých výsledků z celostátního kola 45. ročníku matematické olympiády v kategorii programování. Nejlepší soutěžící z celostátního kola byli nominováni pro 8. ročník Mezinárodní olympiády v informatice (IOI), která se konala v Maďarsku. O výsledcích tohoto našeho reprezentačního družstva se můžete dočíst na jiném místě této ročenky. Pro Středoevropskou olympiádu byli do družstva nominováni studenti, kteří ve školním roce 1996/97 navštěvují poslední ročníky střední školy a jsou považováni za perspektivní účastníky Mezinárodní olympiády v informatice. Vedoucím družstva byl jmenován doc. RNDr. *Václav Sedláček*, CSc., z fakulty informatiky Masarykovy univerzity.

Vlastní soutěž CEOI se svým charakterem maximálním možným způsobem přibližuje k IOI a i v letošním roce se přikročilo k automatickému hodnocení předložených řešení. Na soutěži řeší každý z účastníků na počítači ve dvou soutěžních dnech vždy po třech soutěžních úlohách. Maximální bodový zisk tak může činit 200 bodů. Letošní ročník byl charakteristický tím, že organizátoři stanovili například ve srovnání s IOI pro běh soutěžních úloh na počítači nad testovacími daty nezvykle ostré časové limity, které v maximální možné míře prověřily efektivitu vypracovaných řešení.

Na základě počtu dosažených bodů, udělených na základě výsledků testů softwarových produktů na počítači, udělila mezinárodní jury 2 zlaté medaile (za 182–180 dosažených bodů), 4 stříbrné medaile (za 173–127 bodů) a 7 bronzových medailí (za 122–105 bodů).

Výsledky soutěžících z České republiky:

17. *Věroslav Kaplan*, 90 bodů, gymnázium na tř. kpt. Jaroše, Brno,

20. *Mikuláš Patočka*, 78 bodů, gymnázium na tř. kpt. Jaroše, Brno,

21. *Jan Kratochvíl*, 64 bodů, gymnázium U libeňského zámku, Praha 8,

25. *Martin Dráb*, 41 bodů, gymnázium U libeňského zámku, Praha 8.

Družstvo České republiky nezískalo žádnou medaili. Neoficiální pořadí zúčastněných zemí ukazuje následující tabulka.

1.	Polsko	621	5.	Česká republika	273
2.	Slovensko	589	6.	Maďarsko	259
3.	Rumunsko	405	7.	Slovinsko (3 soutěžící)	177
4.	Chorvatsko	362			

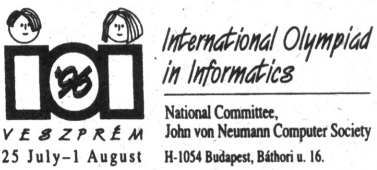
Přesto se však ukazuje, že CEOI je velice užitečným střetnutím mladých programátorů pro jejich odborný růst a družstvo České republiky by na ní v příštích ročnících nemělo chybět.

Soutěž byla slovenskými organizátory velmi doře připravena. Slavnostní zahájení 3. CEOI se konalo v Primaciálním paláci za účasti čelných představitelů města, Univerzity Komenského a funkcionářů Slovenskej informatickej spoločnosti, slavnostní vyhlášení výsledků se konalo za účasti slovenské televize v prostorách konzervatoře.

Příští 4. ročník CEOI se bude konat v červenci 1997 v Polsku. Organizátoři hodlají na tuto soutěž pozvat dále družstva z Ukrajiny a Běloruska a jako hosty i družstva ze Švédska a USA, která o tuto účast projevila zájem.

8. mezinárodní olympiáda v informatice

Na konci července se sjeli nejlepší mladí programátoři z celého světa do maďarského města Veszprém. Konal se tam již osmý ročník mezinárodní olympiády v informatice (IOI — International Olympiad in Informatics). Soutěže se zúčastnilo celkem 215 studentů středních škol z 56 zemí. Mezi nimi nechybělo ani české reprezentační družstvo. Naši zemi zastupovali nejúspěšnější řešitelé celostátního kola 45. ročníku matematické olympiády — kategorie P, a sice Daniel Kráľ (gymnázium Zlín, Lesní čtvrť), Stanislav Mikeš (gymnázium České Budějovice, Jírovcova), Robert Špalek (gymnázium Brno, tř. kpt. Jaroše) a Tomáš Tichý (gymnázium Pardubice, Dašická ul.). Vedoucími české delegace byli doc. RNDr. *Václav Sedláček*, CSc., z Fakulty informatiky Masarykovy univerzity v Brně a RNDr. *Pavel Töpfer*, CSc., z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.



Maďarští organizátoři zvolili pro uspořádání olympiády hezké a poklidné město Veszprém ležící nedaleko Balatonu. Všichni účastníci byli ubytováni v internátech místních škol, vlastní soutěž probíhala v prostorách krásného moderního gymnázia. Stačilo jen rozmístit do tříd několik stovek nových osobních počítačů — některé přímo pro soutěž, jiné pro samostatnou práci soutěžících ve volném čase a další pro vedoucí všech delegací.

Tým odborných pracovníků z maďarských univerzit připravil velmi pěkné a zajímavé soutěžní úlohy. V každém ze dvou soutěžních dní řešili účastníci olympiády po třech příkladech. Na svou práci měli vždy pět hodin času. Požadovaným výsledkem každé úlohy byl odladěný program. Soutěžící nesměli používat žádné vlastní pomůcky ani písemné materiály, k dispozici měli pouze přidělené osobní počítače. Při své práci mohli používat programovací jazyky Pascal, C/C++ a Basic. Odevzdané programy byly plně automaticky testovány pomocí předem připravených tajných sad testovacích dat. Při testování se sledovala nejen správnost výsledků,

ale také doba výpočtu. Za správný a dostatečně rychlý výpočet programu s každými testovacími vstupními daty získal řešitel několikabodové ocenění. Každý den bylo možné dosáhnout maximálně sta bodů. To se však v prvním soutěžním dnu nepodařilo nikomu, zatímco ve druhém dnu soutěže bylo „stobodových řešitelů" více.

Účastníci s nejvyššími bodovými zisky obdrželi na závěr soutěže medaile a hodnotné věcné ceny. Krásné medaile vyrobila zvlášť pro tuto olympiádu světoznámá porcelánka Herend ležící nedaleko Veszprému. Celkem bylo uděleno 20 zlatých, 36 stříbrných a 52 bronzových medailí. Čeští reprezentanti zakončili své vystoupení na olympiádě tradičně výborně, všichni čtyři se umístili na medailových místech. Vynikajícím úspěchem je pak absolutní vítězství *Daniela Kráľa* v celé soutěži. Zlatou medaili a 1. místo získal za plných 196 bodů z 200 možných. Ostatní tři soutěžící z České republiky obdrželi bronzové medaile s následujícím umístěním: *Tomáš Tichý* 71.–72. místo (133 bodů), *Stanislav Mikeš* 84.–89. místo (116 bodů) a *Robert Špalek* 95.–98. místo (111 bodů).

1.	Čína	736	11.	Thajsko	558
2.	Rusko	709	12.	Česká republika	556
3.	Slovensko	684	13.	Bělorusko	535
4.	Polsko	682	14.	Chorvatsko	531
5.	Rumunsko	652	15.	Vietnam	515
6.	Tchajwan	647	16.	Bulharsko	507
7.	Litva	611	17.–18.	Estonsko	497
8.	Írán	607		Maďarsko	497
9.	Jugoslávie	575	19.	Německo	469
10.	Korea	565	20.	Turecko	458

Texty soutěžních úloh

1. Hra (30 bodů)

Dva hráči hrají následující hru. Hrací plán je tvořen řadou kladných celých čísel. Hráči se pravidelně střídají na tahu. Hráč, který je na tahu, si vezme číslo buď z levého, nebo z pravého konce řady. Toto číslo je odstraněno z hracího plánu. Hra končí ve chvíli, když jsou odebrána z hracího plánu všechna čísla. První hráč vyhrává, pokud součet jím odebraných čísel je alespoň roven součtu čísel odebraných druhým hráčem. Druhý hráč hraje nejlepším možným způsobem. První hráč začíná hru. Pokud

hrací plán obsahuje na začátku hry sudý počet čísel, potom existuje vyhrávající strategie pro prvního hráče.

Napište program, který implementuje vyhrávající strategii prvního hráče. Odpovědi druhého hráče jsou poskytovány daným počítačovým programem. Oba hráči spolu komunikují pomocí tří procedur z modulu `Play`, který je vám k dispozici. Jsou to procedury `StartGame`, `MyMove` a `YourMove`. První hráč začíná hru voláním procedury bez parametrů `StartGame`. Pokud první hráč svým tahem odebírá číslo z levého konce dané řady čísel, provede proceduru `MyMove('L')`. Podobně provedení procedury `MyMove('R')` oznamuje druhému hráči, že si první hráč vybral číslo z pravého konce řady. Druhý hráč, tj. počítačový program, provádí svůj tah okamžitě. První hráč se dozví jeho tah zavoláním procedury `YourMove(C)`, kde C je znaková proměnná (v jazyce C/C++ volání procedury zapíšete ve tvaru `YourMove(&C)`). Hodnotou C je `'L'` nebo `'R'` podle toho, zda druhý hráč odebral číslo z levého nebo pravého konce řady.

Vstupní data. První řádek vstupního souboru `INPUT.TXT` obsahuje počáteční velikost N hracího plánu (počet čísel v řadě). Číslo N je sudé a $2 \leqq N \leqq 100$. Zbývajících N řádků vstupního souboru popisuje hrací plán zleva doprava. Každý z těchto N řádků obsahuje jedno číslo zadané řady. Každé číslo je rovno nejvýše 200.

Výstupní data. Po skončení hry zapíše váš program výsledek do výstupního souboru `OUTPUT.TXT`. Soubor obsahuje jediný řádek se dvěma celými čísly. Prvním číslem je součet čísel odebraných prvním hráčem, druhé číslo je součtem čísel odebraných druhým hráčem. Váš program musí hru skutečně hrát a výsledek musí odpovídat průběhu hry.

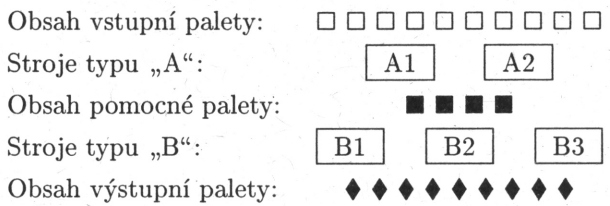
Příklad vstupu a výstupu. Následující obrázek ukazuje vstupní soubor obsahující počáteční hrací plán a možný výstupní soubor.

INPUT.TXT
6
4
7
2
9
5
2

OUTPUT.TXT
15 14

2. Opracovávání výrobků (30 bodů)

V továrně pracuje výrobní linka. S každým výrobkem je nutno provést dvě operace: nejprve operaci „A", potom operaci „B". Pro každou z těchto operací je k dispozici několik strojů. Obrázek 40 znázorňuje uspořádání výrobní linky, která pracuje následujícím způsobem. Stroj provádějící operaci „A" vezme výrobek ze vstupní palety, provede s ním operaci „A" a umístí výrobek do pomocné palety. Stroj typu „B" bere výrobky z pomocné palety, provádí s nimi operaci „B" a pak je ukládá do výstupní palety. Všechny stroje mohou pracovat zároveň nezávisle jeden na druhém, velikost palet není omezena. Stroje mají různé parametry, pro každý stroj známe jeho dobu opracovávání výrobku.



Obr. 40

Určete nejkratší čas, ve kterém mohou být dokončeny operace „A" pro všech N výrobků, je-li opracovávání výrobků zahájeno v čase 0 (podúloha A). Dále vypočtěte minimální čas, který je potřebný pro dokončení obou operací se všemi N výrobky (podúloha B).

Vstupní data. Soubor `INPUT.TXT` je tvořen pěti řádky s kladnými celými čísly. První řádek obsahuje číslo N, které představuje celkový počet výrobků ($1 \leqq N \leqq 1\,000$). Na druhém řádku je uveden počet M_1 strojů typu „A" ($1 \leqq M_1 \leqq 30$). Na třetím řádku je M_1 kladných celých čísel, která udávají dobu opracovávání pro jednotlivé stroje typu „A". Čtvrtý a pátý řádek obsahují podobně počet M_2 strojů typu „B" ($1 \leqq M_2 \leqq 30$) a dobu opracovávání pro jednotlivé stroje typu „B". Dobu opracovávání výrobku měříme v jednotkách času. Tato doba zahrnuje i čas nezbytný pro přenos výrobku z palety před opracováním a čas na uložení opracovaného výrobku na paletu. Každý z časových údajů je nejméně 1 a nejvýše 20.

Výstupní data. Výstupní soubor `OUTPUT.TXT` je tvořen dvěma řádky. První řádek obsahuje jedno kladné celé číslo představující řešení podúlohy A. Druhý řádek obsahuje jedno kladné celé číslo — řešení podúlohy B.

Příklad vstupu a výstupu. Následující obrázek ukazuje možný vstupní soubor a jemu odpovídající výstupní soubor.

INPUT.TXT
5
2
1 1
3
3 1 4

OUTPUT.TXT
3
5

3. Síť škol (40 bodů)

Určitý počet škol je zapojen do počítačové sítě. Školy mají mezi sebou uzavřeny dohody, podle kterých si zasílají software. Každá škola má seznam škol, kterým zasílá software („zásobované školy"). Pokud je škola B na seznamu škol zásobovaných ze školy A, pak škola A nemusí být nutně na seznamu škol zásobovaných školou B.

Napište program, který spočítá minimální počet škol, kterým musí být zaslána kopie nového softwaru, aby byl tento software postupným předáváním mezi školami na základě uzavřených dohod nakonec rozeslán na všechny školy v síti (podúloha A).

Dalším úkolem je navrhnout modifikaci dosavadních smluv mezi školami tak, aby stačilo zaslat nový software na jednu libovolnou školu a přitom bylo jisté, že se v síti rozšíří na všechny školy. Vypočtěte minimální počet nových smluv, které je třeba uzavřít, aby po zaslání nového softwaru na jednu libovolnou školu obdržely tento software nakonec postupným šířením v síti všechny školy (podúloha B). Jedna nová smlouva znamená přidání jedné školy do seznamu zásobovaných škol jedné jiné školy.

Vstupní data. První řádek vstupního souboru `INPUT.TXT` obsahuje jedno celé číslo N, kterým je celkový počet škol v síti ($2 \leqq N \leqq 100$). Tyto školy jsou označeny celými kladnými čísly od 1 do N. Každý z následujících N řádků obsahuje seznam zásobovaných škol. Řádek číslo $i+1$ obsahuje čísla škol zásobovaných školou číslo i. Každý seznam je ukončen nulou. Pokud škola nezásobuje žádné jiné školy (její seznam zásobovaných škol je prázdný), pak na příslušném řádku vstupního souboru je pouze nula.

Výstupní data. Výstupní soubor `OUTPUT.TXT` je tvořen dvěma řádky. První řádek obsahuje jedno celé kladné číslo představující řešení podúlohy A. Druhý řádek obsahuje řešení podúlohy B.

Příklad vstupu a výstupu. Obrázek ukazuje možný vstupní soubor a jemu odpovídající výstupní soubor.

INPUT.TXT
5
2 4 3 0
4 5 0
0
0
1 0

OUTPUT.TXT
1
2

4. Magické čtverce (40 bodů)

Poté, co pan Rubik vynalezl úspěšnou magickou kostku, navrhl také její rovinnou verzi a nazval ji magické čtverce. Je to obdélník složený z osmi čtverců stejné velikosti (obr. 41).

1	2	3	4
8	7	6	5

Obr. 41. — Počáteční konfigurace.

V této úloze budeme uvažovat verzi, v níž jsou čtverce obarveny různými barvami. Barvy jsou označeny celými čísly od 1 do 8 (obr. 41). Konfigurace obdélníku je popsána posloupností osmi čísel. Jsou to čísla barev v tom pořadí, jaké získáme při procházení jednotlivých čtverců ve směru pohybu hodinových ručiček počínaje v levém horním rohu obdélníku. Například konfigurace na obr. 41 je popsána posloupností čísel $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$. Tato konfigurace je zároveň počáteční konfigurací.

Mezi konfiguracemi lze přecházet pomocí tří základních operací označených písmeny 'A', 'B' a 'C':

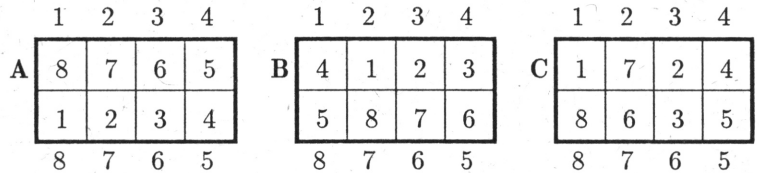
'A': výměna horního a dolního řádku,

'B': jednoduchý cyklický posuv celého obdélníku směrem vpravo,

'C': jednoduchá rotace prostředních čtyř čtverců ve směru pohybu hodinových ručiček.

Všechny konfigurace jsou dosažitelné z počáteční konfigurace prováděním těchto tří základních operací. Význam základních operací ukazuje obr. 42. Čísla vně obdélníku označují pozice jednotlivých čtverců. Jestliže

čtverec na pozici p obsahuje číslo i, znamená to, že provedením příslušné operace se čtverec z pozice i přesunul na pozici p.



Obr. 42. — Základní operace.

Napište program určující posloupnost základních operací, pomocí níž je počáteční konfigurace z obr. 41 převedena na určenou cílovou konfiguraci (podúloha A). Pokud délka nalezené posloupnosti nepřesáhne 300, získáte další dva body (podúloha B).

Vstupní data. Vstupní soubor `INPUT.TXT` obsahuje jediný řádek. Na něm je zapsáno 8 celých kladných čísel popisujících cílovou konfiguraci.

Výstupní data. Na prvním řádku výstupního souboru `OUTPUT.TXT` je zapsána délka L nalezené posloupnosti operací. Dalších L řádků popisuje nalezenou posloupnost operací. Každý z nich obsahuje na první pozici vždy jedno z písmen 'A', 'B', 'C' — označení příslušné základní operace.

Pomůcka. V pracovním adresáři úlohy máte k dispozici program `MTOOL.EXE`, který vám umožní hrát si s magickými čtverci. Zavoláním programu „`mtool input.txt output.txt`“ můžete experimentovat s cílovou konfigurací a s posloupností operací.

Příklad vstupu a výstupu. Následující obrázek ukazuje příklad vstupního a jemu odpovídajícího výstupního souboru.

INPUT.TXT
2 6 8 4 5 7 3 1

OUTPUT.TXT
7
B
C
A
B
C
C
B

5. Nejdelší prefix (40 bodů)

Strukturu některých biologických objektů lze reprezentovat posloupností jejich základních prvků. Tyto prvky budeme označovat velkými písmeny. Biology zajímá možnost rozkládat dlouhé posloupnosti prvků na menší. Takové krátké úseky budeme nazývat komponenty. Řekneme, že posloupnost S může být vytvořena z dané množiny komponent P, jestliže v množině P existuje takových n komponent $p_1, \ldots, p_n$, jejichž zřetězením získáme posloupnost S. Zřetězením komponent $p_1, \ldots, p_n$ rozumíme jejich spojení v daném pořadí, a to bezprostředně za sebou bez mezer. Některé komponenty se v tomto zřetězení mohou vyskytnout vícekrát. Všechny komponenty obsažené v uvažované množině P nemusí být ve zřetězení použity. Například posloupnost $ABABACABAAB$ může být vytvořena z množiny komponent $\{A, AB, BA, CA, BBC\}$.

Prvních K znaků posloupnosti S tvoří prefix posloupnosti S délky K. Napište program, který přečte ze vstupu množinu komponent P a posloupnost prvků T. Program spočítá délku nejdelšího prefixu posloupnosti T, který může být vytvořen z komponent obsažených v P.

Vstupní data. Vstupní data jsou uložena ve dvou souborech. Soubor `INPUT.TXT` popisuje množinu komponent P, soubor `DATA.TXT` obsahuje zkoumanou posloupnost T. První řádek souboru `INPUT.TXT` obsahuje číslo N, které představuje počet komponent v množině P ($1 \leqq N \leqq 100$). Každá komponenta je pak popsána na dvou po sobě jdoucích řádcích. První z nich udává délku L komponenty ($1 \leqq L \leqq 20$), druhý obsahuje řetězec velkých písmen (z rozmezí od 'A' do 'Z') délky L. Všechny zadané komponenty jsou navzájem různé.

První pozice každého řádku v souboru `DATA.TXT` obsahuje jedno velké písmeno. Na posledním řádku tohoto souboru je na první pozici znak tečka ('.'). Délka posloupnosti T je alespoň 1 a nejvýše 500 000.

Výstupní data. Výstupní soubor `OUTPUT.TXT` obsahuje jediné číslo — délku nejdelšího prefixu posloupnosti T, kterou lze vytvořit z množiny komponent P.

Příklad vstupu a výstupu. Následující obrázek ukazuje dva vstupní soubory a jim odpovídající výstupní soubor.

6. Třídění posloupnosti tří hodnot (20 bodů)

Třídění je jedním z nejčastějších úkolů prováděných při výpočtech. Uvažujme zvláštní problém třídění, kdy klíčové položky ve tříděných záznamech mohou nabývat nejvýše tří různých hodnot. Tato situace nastane například při třídění držitelů medailí podle druhu získané medaile

INPUT.TXT
5
1
A
2
A B
3
B B C
2
C A
2
B A

DATA.TXT
A
B
A
B
A
C
A
B
A
A
B
C
B

OUTPUT.TXT
11

tak, aby držitelé zlatých medailí byli první, po nich následovali držitelé stříbrných medailí a nakonec držitelé bronzových medailí.

V této úloze budou přípustnými hodnotami klíčů celá čísla 1, 2 a 3. Požaduje se setřídit záznamy podle hodnot klíčů v neklesajícím pořadí. Třídění musí být provedeno posloupností operací výměn. Pro každou operaci výměny jsou dána dvě čísla p, q určující pozici ve tříděné posloupnosti. Operace výměny spočívá ve vzájemné záměně prvků uložených v posloupnosti na pozicích p, q.

Je dána posloupnost hodnot klíčů. Napište program, který určuje minimální počet operací výměny, pomocí nichž lze zadanou posloupnost setřídit (podúloha A). Dále program nalezne odpovídající posloupnost operací výměny pro toto třídění (podúloha B).

Vstupní data. První řádek vstupního souboru `INPUT.TXT` obsahuje počet záznamů N ($1 \leqq N \leqq 1\,000$). Každý z následujících N řádků obsahuje jednu hodnotu klíče.

Výstupní data. První řádek výstupního souboru `OUTPUT.TXT` obsahuje minimální počet operací výměny L, které zajistí setřídění zadané posloupnosti (výsledek podúlohy A). Následujících L řádků výstupního souboru popisuje posloupnost výměn v tom pořadí, v jakém budou prováděny. Na každém z těchto řádků jsou zapsána dvě čísla p, q udávající pozice vyměňovaných prvků (výsledek podúlohy B). Pozice v posloupnosti jsou očíslovány celými čísly od 1 do N.

Příklad vstupu a výstupu. Následující obrázek ukazuje příklad vstup-

ního a jemu odpovídajícího výstupního souboru.

INPUT.TXT
9
2
2
1
3
3
3
2
3
1

OUTPUT.TXT
4
1 3
4 7
9 2
5 9

doc. RNDr. Leo Boček, CSc. — RNDr. Karel Horák, CSc.
Richard Kollár — doc. RNDr. Václav Sedláček,
doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc. — RNDr. Pavel Töpfer, CSc.

ČTYŘICÁTÝ PÁTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

Vydala Jednota českých matematiků a fyziků,
Žitná 25, 117 10 Praha 1
jako svou publikaci č. 57-557-97
Sazbu programem TEX připravil Karel Horák
Vytiskla Olympia, a.s.,
Klimentská 1, Praha 1
1. vydání
Praha 1997

ISBN 80-7015-576-0

matematická olympiáda

MO

ISBN 80-7015-576-0