

51. ročník matematické olympiády na středních školách

Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Tomáš Pitner (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor); Jaroslav Zhouf (editor): 51. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2001/2002. 43. mezinárodní matematická olympiáda. 14. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2003.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/405038>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

**51. ročník matematické olympiády
na středních školách**



PADESÁTÝ PRVNÍ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2001/2002

43. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA
ČTRNÁCTÁ MEZINÁRODNÍ OLYMPIÁDA V INFORMATICE

JEDNOTA ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYZIKŮ PRAHA

Za přispění spolupracovníků zpracovali
doc. RNDr. Leo Boček, CSc., RNDr. Karel Horák, CSc.,
RNDr. Tomáš Pitner, Dr., doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.,
RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc.
RNDr. Jaroslav Zhouf, PhD.

© Karel Horák, editor, 2003

ISBN 80-7015-924-3

Obsah

O průběhu 51. ročníku matematické olympiády	5
Nejúspěšnější řešitelé II. kola MO v kategoriích A, B, C a P	9
Výsledky celostátního kola 51. ročníku MO kategorie A	22
Výsledky celostátního kola 51. ročníku MO kategorie P	23
Kategorie C	24
Texty úloh	24
Řešení úloh	27
Kategorie B	39
Texty úloh	39
Řešení úloh	42
Kategorie A	61
Texty úloh	61
Řešení úloh	66
Kategorie P	96
Texty úloh	96
Řešení úloh	111
Přípravná soustředění před 43. MMO	138
Úlohy zadané na přípravném soustředění	139
Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské	142
Texty soutěžních úloh	143
Řešení úloh	144
43. mezinárodní matematická olympiáda	150
Texty soutěžních úloh	153
Řešení úloh	154
Devátý ročník Středoevropské olympiády v informatice	165
14. mezinárodní olympiáda v informatice	166
Texty soutěžních úloh	168

O průběhu 51. ročníku matematické olympiády

Padesátý první ročník matematické olympiády měl v podstatě stejný průběh jako ty bezprostředně předcházející ročníky s výjimkou jubilejního padesátého — padesátka se přeci jen neslaví každý rok.

Pořadateli soutěže Matematická olympiáda jsou Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR, Jednota českých matematiků a fyziků a Matematický ústav Akademie věd ČR. Soutěž řídí Ústřední výbor MO, který je jmenován na návrh JČMF Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy. Ve školním roce 2001–2002 začal výbor pracovat v novém složení včele s novým předsedou doc. dr. *Jaromírem Šimšou*, CSc., místopředsedy dr. *Jaroslavem Švrčkem*, CSc., doc. dr. *Pavlem Thustým*, CSc., a doc. dr. *Pavlem Töpferem*, CSc. Byli též jmenováni předsedové krajských výborů MO podle nového státoprávního uspořádání. Seznam všech členů výboru je připojen na závěr této informace.

ÚV MO se během tohoto ročníku MO sešel dvakrát: v Praze 6. prosince 2001 a pak u příležitosti celostátních kol 8. dubna 2002 v Litomyšli.

Padesátý první ročník začal už s předstihem výběrem všech úloh, který zajišťují tři úlohové komise, jedna pro kategorie A, B, C (střední školy), druhá pro kategorie Z5–Z9 (základní školy a nižší třídy víceletých gymnázií), třetí pro kategorii P (programování). Úlohy jsou i nadále připravovány společně se slovenskými kolegy (kupříkladu všechny úlohy kategorie P tohoto ročníku byly připraveny skupinou studentů a pracovníků Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Komenského v Bratislavě). Následuje příprava letáků s úlohami I. kola a komentářů k nim.

Celostátní kola kategorií A a P se konala ve východočeské Litomyšli za výrazné finanční podpory nově ustanoveného Pardubického kraje a města Litomyšle — nejdříve od 7. do 10. dubna III. kolo kategorie A a po něm od 10. do 13. dubna III. kolo kategorie P. Organizace závěrečné části soutěže se ochotně ujalo vedení Gymnázia Aloise Jiráska, v jehož prostorách se soutěž konala. Oficiální zahájení soutěže proběhlo v neděli 7. dubna 2002 večer v aule pořádající školy za přítomnosti členů ÚV MO, představitelů města Litomyšle a dalších významných hostů. Milým zpestřením tohoto setkání byla přednáška RNDr. *Jiřího Grygara*, CSc., na téma

Využití matematiky v astronomii, na niž navázalo pozorování hvězdné oblohy ve školní observatoři (v budově školy).

Pořadatelé zajistili pro soutěžící atraktivní doprovodný program. Žáci měli možnost absolvovat prohlídku litomyšlského zámku s přilehlým rodným domem B. Smetany v bývalém zámeckém pivovaru, který spolu s historickým centrem a nově otevřenými klášterními zahradami patří ke skvostům města (od roku 1999 je na seznamu památek UNESCO). Velkou zásluhu na úspěšném průběhu celostátních kol mají pracovníci zmíněného gymnázia, zejména pak jeho ředitel *Otakar Karlík* a jeho zástupkyně dr. *Ludmila Kynclová*.

Celostátními koly soutěž v příslušném roce ještě nekončí. Odměnou pro úspěšné řešitele kategorií B a C z nematuritních ročníků je týdenní soustředění, které už tradičně proběhlo na internátu při jevíčském gymnáziu od 28. května do 4. června. Družstva České republiky se pak zúčastnila mezinárodních soutěží v matematice i informatice. O jejich výsledcích se dočtete v dalších částech této brožury.

Příprava každého ročníku MO je úkolem ÚV MO a úlohových komisí. Matematická olympiáda by však nemohla existovat, kdyby se jí nevěnovali učitelky a učitelé, profesorky a profesori na základních a středních školách, kteří nad své pracovní povinnosti a bez nároku na odměnu vedou své žáky k účasti v MO, pomáhají jim překonat první potíže při řešení úloh I. kola, opravují úlohy. Ústřední výbor MO jim upřímně děkuje za jejich práci pro matematickou olympiádu.

Ústřední výbor Matematické olympiády

Předseda:

Doc. RNDr. *Jaromír Šimša*, CSc., Matematický ústav AV ČR Brno

Místopředsedové:

dr. *Jaroslav Švrček*, CSc., Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

doc. RNDr. *Pavel Thustý*, CSc., PedF Jihočeské univerzity České Budějovice

doc. dr. *Pavel Töpfer*, CSc., MFF UK Praha

Tajemník:

RNDr. *Karel Horák*, CSc., Matematický ústav AV ČR, Praha

Předsedové krajských výborů MO:

PhDr. *Ivan Bušek*, Pedagogické centrum Praha

RNDr. *Šárka Gergelitsová*, Gymnázium Benešov

doc. RNDr. *Pavel Thustý*, CSc., PedF Jihočeské univerzity České Budějovice

RNDr. *Jiří Potůček*, CSc., Pedagog. fakulta Západočeské univerzity Plzeň

Mgr. *Josef Hazi*, Gymnázium Cheb

Mgr. *Pavla Hofmanová*, Pedagogická fakulta UJEP Ústí n. L.

RNDr. *Věra Voršílková*, Gymnázium F. X. Šaldy, Liberec

RNDr. *Josef Kubát*, Gymnázium Pardubice

Mgr. *Petr Drahotský*, Gymnázium B. Němcové, Hradec Králové

Mgr. *Jan Beneš*, Gymnázium Jihlava

RNDr. *Jiří Herman*, PhD., Gymnázium Brno

RNDr. *Jan Chudárek*, Gymnázium Zlín

doc. RNDr. *Vladimír Vlček*, CSc., Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

doc. RNDr. *Jaroslav Hančl*, CSc., Přírodovědecká fakulta OU, Ostrava

Další členové:

Doc. RNDr. *Leo Boček*, CSc., MFF UK Praha

Prof. RNDr. *Miroslav Fiedler*, DrSc., Matematický ústav AV ČR Praha

PhDr. *Libuše Hozová*, Matematický ústav Slezské univerzity Opava

RNDr. *Dag Hrubý*, Gymnázium Jevíčko

Mgr. *Marie Krejčová*, Základní škola Jihlava

Mgr. *Pavel Leischner*, PedF Jihočeské univerzity České Budějovice

Doc. PhDr. *Marta Volfová*, CSc., Pedagogická fakulta Univerzity Hradec Králové

RNDr. *Jaroslav Zhouf*, PhD., Pedagogická fakulta UK Praha

Tabulka 1

Počty žáků středních škol soutěžících v I. kole 51. ročníku MO

Oblast	Kategorie								Celkem	
	A		B		C		P			
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	51	42	84	50	202	133	17	17	354	242
Středočeský kraj	97	42	105	44	114	71	17	15	333	172
Jihočeský kraj	80	35	40	25	110	55	20	4	250	119
Plzeňský kraj	37	20	34	22	47	30	3	3	121	75
Ústecký kraj	27	21	24	19	61	42	5	5	117	87
Liberecký kraj	35	15	40	26	62	47	8	8	145	96
Královéhradecký kraj	23	12	32	20	55	36	5	5	115	73
Pardubický kraj	31	24	30	20	49	37	11	8	121	89
kraj Vysočina	45	35	25	18	70	50	10	6	150	109
Jihomoravský kraj	146	103	115	74	162	123	13	13	436	313
Zlínský kraj	66	37	48	17	77	36	5	5	196	95
Olomoucký kraj	33	19	26	11	43	17	3	3	105	50
Moravskoslezský kraj	80	24	49	35	180	64	14	14	323	137
ČR	751	429	652	381	1 232	741	131	106	2 766	1 657

Tabulka 2

Počty žáků středních škol soutěžících v II. kole 51. ročníku MO

Oblast	Kategorie								Celkem	
	A		B		C		P			
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	42	14	48	11	126	64	17	7	233	96
Středočeský kraj	40	4	24	4	56	20	14	6	134	34
Jihočeský kraj	35	1	25	3	55	12	4	3	119	19
Plzeňský kraj	19	10	20	2	29	13	3	1	71	26
Ústecký kraj	21	1	19	0	42	11	5	0	87	12
Liberecký kraj	15	1	17	4	21	9	8	1	61	15
Královéhradecký kraj	12	5	20	9	36	12	5	0	73	26
Pardubický kraj	13	2	11	1	29	12	8	0	61	15
kraj Vysočina	33	4	14	1	44	19	4	1	95	25
Jihomoravský kraj	103	11	74	12	123	59	13	7	313	89
Zlínský kraj	36	1	16	2	36	15	5	1	93	19
Olomoucký kraj	19	3	10	3	17	8	3	0	49	14
Moravskoslezský kraj	24	6	35	6	114	33	14	3	187	48
ČR	412	63	333	58	728	287	103	30	1 576	438

S ... počet všech soutěžících

U ... počet úspěšných řešitelů

Nejúspěšnější řešitelé II. kola MO
v kategoriích A, B, C a P

Z každého kraje a z každé kategorie jsou dle dostupných výsledků uvedeni všichni úspěšní řešitelé, kteří skončili do desátého místa. Označení G znamená gymnázium, M, resp. MF zaměření studijního oboru 01 Matematika, resp. 02 Matematika a fyzika.

• • • • • **Kraj Praha** • • • • •

Kategorie A

1. *Martin Tancer*, 4.M, G Ch. Dopplera, Praha 5
2. *Ondřej Kurka*, 8.M, G Ch. Dopplera, Praha 5
3. *Ondřej Čertík*, 7.M, G Ch. Dopplera, Praha 5
- 4.–5. *Martin Káldy*, 3.M, G Ch. Dopplera, Praha 5
Martin Klimesh, 4.A, G Praha 2, Botičská
6. *Josef Cibulka*, 4.A, G Praha 1, Štěpánská
- 7.–8. *Martin Dörfler*, 8, G Praha 4, Budějovická
Michal Řezanka, 4.M, G Ch. Dopplera, Praha 5
- 9.–11. *Pavel Kocourek*, 1.M, SPŠST, Praha 1, Panská
Alice Mašková, 4.A, GJK, Parlérova, Praha 2
Jan Verfl, 6, G Praha 4, Postupická

Kategorie B

- 1.–2. *Alexandr Kazda*, 2.A, G Praha 6, Nad Aleji
Pavel Kocourek, 1.M, SPŠST, Praha 1, Panská
3. *Pavel Pokorný*, 2.A, GJK, Parlérova, Praha 6
4. *Václav Potoček*, 2.M, SPŠST, Praha 1, Panská
5. *Jan Škampa*, sexta, GJK, Praha 6
- 6.–11. *Pavel Daniel*, 2.C, G Ch. Dopplera, Praha 5
Tomáš Kachlík, 6.H, G Praha 4, Konstantinova

Jan Sochna, 2.L, SPŠST, Praha 1, Panská
Mariana Svobodová, sexta, ArcG, Praha 2, Korunní
Petra Šimáková, 6.A, G Praha 10, Omská
Jan Zachariáš, 6.H, G Praha 4, Konstantinova

Kategorie C

- 1.–2. *Jan Kropík*, 5.M G Ch. Dopplera, Praha 5
Ondřej Kvapilík, 5.M G Ch. Dopplera, Praha 5
3. *Petr Čermák*, 5.A GJH, Praha 5
- 4.–5. *Jan Lachnitt*, 1.C G Ch. Dopplera, Praha 5
Josef Stránský, 5.A GJH, Praha 5
- 6.–8. *Viktor Dekoj*, 5.A GJN, Praha 3
Martin Dobiáš, 1.A SPŠST, Praha 1, Panská
Miroslav Hlaváč, 1.C G Ch. Dopplera, Praha 5
- 9.–10. *Michal Preuss*, 5.B G Nad Štolou
Petr Sobotka, 5.A GJH, Praha 5

Kategorie P

1. *Josef Cibulka*, 4.B, Akademické G Praha 1, Štěpánská
2. *Jiří Svoboda*, 8.M, G Ch. Dopplera, Praha 5
3. *Petr Škoda*, 6.B, G Praha 8, Ústavní
4. *Jan Kadlec*, 3.C, G Ch. Dopplera, Praha 5
- 5.–6. *Alexandr Kazda*, sexta A, G Praha 6, Nad Alejí
Lukáš Turek, 3.C, G Ch. Dopplera, Praha 5
7. *Ondřej Zarevúcky*, 2.E, G Praha 6, Arabská

• • • • • **Středočeský kraj** • • • • •

Kategorie A

- 1.–2. *Pavel Čížek*, 7.G, G Kralupy nad Vltavou
Martin Doubek, 4.A, G Kladno
3. *Tomáš Hanzák*, 4.B, G Kladno
4. *Ondřej Chochola*, 4.A, G Kladno

Kategorie B

1. *Martina Říhová*, G Kutná Hora
- 2.–3. *Miroslav Frantes*, G Benešov
Jan Kotera, G Kralupy nad Vltavou
4. *Ondřej Kazík*, G dr. J. Pekaře, Mladá Boleslav

Kategorie C

1. *Zdeněk Kabát*, G Říčany
2. *Martina Fišerová*, G dr. J. Pekaře, Mladá Boleslav
3. *Petr Veselý*, G Poděbrady
4. *Aneta Jandurová*, G Čelákovice
- 5.–6. *Ondřej Haberle*, G Poděbrady
David Spousta, G Beroun
7. *Lenka Studničná*, G Mnichovo Hradiště
- 8.–12. *Šárka Hlušíčková*, G dr. J. Pekaře, Mladá Boleslav
Roman Rostás, G Čáslav
Michal Veselý, G Český Brod
Eva Vyhnařová, G Benešov
Ondřej Vykouk, G Vlašim

Kategorie P

1. *Pavel Čížek*, 7.G, Dvořákovo GaOA, Kralupy nad Vltavou
2. *Jiří Hyldebrant*, VII, G Vlašim
- 3.–4. *Martin Kruliš*, VII.A, G Kolín
Jan Matějek, 3.A, G Kladno, nám. E. Beneše
- 5.–6. *Jaroslav Havlín*, sexta, GOA Sedlčany
Jiří Paleček, 3.A, G Kladno, nám. E. Beneše

..... Jihočeský kraj

Kategorie A

1. *Ondřej Šedivý*, 7/7, G České Budějovice, Jírovcova
2. *David Pražák*, 4M, G České Budějovice, Jírovcova
3. *David Pospíšil*, 4M, G České Budějovice, Jírovcova

4. *Martin Sigmund*, 4M, G České Budějovice, Jírovcova

Kategorie B

1. *Zuzana Kožíšková*, G Tábor

2. *Martin Pilát*, G České Budějovice, Česká

Kategorie C

1. *Vojtěch Prokeš*, G České Budějovice, Jírovcova

2. *Karel Vácha*, G Český Krumlov

3.–4. *Vladimír Brablec*, G České Budějovice, Česká

Adam Lukáš, G České Budějovice, Jírovcova

5. *Jana Jelenová*, G Milevsko

6.–8. *Jakub Kozák*, G Jindřichův Hradec

Libor Maškovský, G České Budějovice, Jírovcova

Vladimír Sedlák, G Tábor

9.–15. *Michal Dobiáš*, G České Budějovice, Česká

Tomáš Ferdan, G Dašice

Štěpánka Králová, G Týn nad Vltavou

Hana Nůsková, G Strakonice

Ingrid Romancová, OAaG Kaplice

Lukáš Tóth, G České Budějovice, Jírovcova

Martin Vobruba, G Vodňany

Kategorie P

1. *Jiří Danihelka*, A2S, SPŠ Písek

2.–3. *Jan Kouba*, 3/4, G Český Krumlov

Milan Straka, 3/4, G Strakonice

• • • • • **Plzeňský kraj** • • • • •

Kategorie A

1. *Jiří Ajgl*, septima M, G Plzeň, Mikulášské nám.

2.–4. *Josef Mládek*, septima M, G Plzeň, Mikulášské nám.

Libor Pavlíček, oktáva, G L. Pika, Plzeň

- Klára Šteklová*, septima M, G Plzeň, Mikulášské nám.
 5.–9. *Michal Bareš*, septima M, G Plzeň, Mikulášské nám.
Šárka Kreuzová, septima M, G Plzeň, Mikulášské nám.
Michal Kvíz, septima M, G Plzeň, Mikulášské nám.
Jaroslav Svoboda, septima M, G Plzeň, Mikulášské nám.
Václav Varvařovský, septima M, G Plzeň, Mikulášské nám.
 10. *David Mareček*, septima M, G Plzeň, Mikulášské nám.

Kategorie B

- 1.–2. *Petr Havránek*, sexta M, G Plzeň, Mikulášské nám.
Jan Bartošek, sexta M, G Plzeň, Mikulášské nám.

Kategorie C

- 1.–2. *Pavel Hudák*, kvinta, Masarykovo G Plzeň
Alena Křečková, kvinta, G Plzeň, Mikulášské nám.
 3. *Jan Hostaša*, kvinta, G Plzeň, Mikulášské nám.
 4. *Jakub Bulín*, kvinta, G Plzeň, Mikulášské nám.
 5. *Ondřej Hort*, kvinta, G Plzeň, Mikulášské nám.
 6. *Jiří Pouska*, kvinta, G Plzeň, Mikulášské nám.
 7.–9. *Tomáš Ibehej*, kvinta, G Plzeň, Mikulášské nám.
Jan Navrátil, kvinta, G Plzeň, Mikulášské nám.
Jindřich Pragler, kvinta, G Klatovy
 10.–12. *Jiří Hysek*, kvinta, G Plzeň, Mikulášské nám.
Pavel Paták, kvinta, G Sušice
Vítězslav Pítr, kvinta, G Stříbro

Kategorie P

1. *Stanislav Haviar*, kvinta A, G Klatovy

• • • • • Ústecký kraj • • • • •

Kategorie C

1. *Daniel Petřík*, G Most
 2. *Jiří Dvořák*, G Roudnice nad Labem

3. *Jan Pospíšil*, G Roudnice nad Labem
4. *Tereza Kadová*, G Teplice
- 5.–10. *Tomáš Franc*, G Teplice
Vojtěch Mezera, G V. Hlavatého, Louny
Jan Patera, G Most
Jan Semerád, G Teplice
Jiří Wagner, G Teplice
Miroslav Zelič, G Teplice

• • • • • Liberecký kraj • • • • •

Kategorie A

1. *David Herčík*, 8/8, Podještědské G Liberec

Kategorie B

1. *Petr Piša*, sexta, G Liberec, Jeronýmova
2. *Michal Kollert*, sexta A, GFXŠ, Liberec
3. *Martina Pišová*, sexta, GFXŠ, Liberec
4. *Jiří Vít*, sexta, GFXŠ, Liberec

Kategorie C

1. *Martin Otava*, 1/4, GFXŠ, Liberec
- 2.–3. *Zuzana Pavlová*, 5/8, Gymnázium Frýdlant
Vítězslav Žabka, 5/8, GFXŠ, Liberec
- 4.–8. *Lukáš Ježek*, 5/8, GFXŠ, Liberec
Jan Pospíšil, 5/8, G Česká Lípa
Vojtěch Růžička, 5/8, GFXŠ, Liberec
Petr Schlindenbuch, 5/8, G dr. Randy, Jablonec n. N.
Jan Urban, 5/8, GFXŠ, Liberec
9. *Jan Sedláček*, 5/8, GFXŠ, Liberec

Kategorie P

1. *Matěj Skopový*, G Česká Lípa

Kategorie A

1. *Jan Moláček*, 2/4M, GJKT, Hradec Králové
2. *Jan Prachař*, 7/8, GFMP, Rychnov nad Kněžnou
3. *Miroslav Hejna*, 7/8, GFMP, Rychnov nad Kněžnou
- 4.–5. *Jiří Eliášek*, 4/4, G Trutnov
Vadim Omelčenko, 4/4M, GJKT, Hradec Králové

Kategorie B

1. *Jan Moláček*, 2/4M, GJKT, Hradec Králové
2. *Jan Ondruš*, 6/8, GFMP, Rychnov nad Kněžnou
3. *Zdeněk Váňa*, 2/4, GOP, Hronov
4. *Matouš Ringel*, 6/8, G Broumov
5. *Jiří Šebesta*, 2/4, G Náchod
- 6.–7. *Zuzana Rozlúvková*, 4/6, GJKT, Hradec Králové
Jan Schindler, 4/6, GJKT, Hradec Králové
- 8.–9. *Romana Kubátová*, 2/4M, GJKT, Hradec Králové
Ivo Machek, 2/4M, GJKT, Hradec Králové

Kategorie C

1. *Michal Kopecký*, 1/4M, GJKT, Hradec Králové
2. *Jan Dostál*, 1/4, G Náchod
3. *Pavel Lhoták*, 3/6, G Dvůr Králové
4. *Filip Studnička*, 3/6, G B. Němcové, Hradec Králové
- 5.–9. *Kateřina Fišerová*, 5/8, G Jičín
Radek Moravec, 3/6, G B. Němcové, Hradec Králové
Jakub Slanina, 1/4M, GJKT, Hradec Králové
Libor Šimůnek, 9, ZŠ M. Horákové, Hradec Králové
Lukáš Volák, 1/4, G Dvůr Králové
10. *Vojtěch Zelený*, 5/8, G Náchod

• • • • • Pardubický kraj • • • • •

Kategorie A

- 1.–2. *Ondřej Pokorný*, 4/4, G Chrudim
Petr Pošta, 5/6, G Pardubice, Dašická

Kategorie B

1. *Jindřich Flídr*, G Lanškroun

Kategorie C

1. *Barbora Scholleová*, G Pardubice, Dašická
2. *Kristýna Stodolová*, G Polička
3. *Veronika Kvasničková*, G Pardubice, Dašická
4. *Daniel Piši*, SPŠE Pardubice
5.–6. *Milena Benešová*, G Polička
Markéta Krmelová, G Ústí nad Orlicí
7.–8. *Kamil Daněk*, G Pardubice, Dašická
Jan Měkota, G Pardubice, Dašická
9.–12. *Ramunas Belkauskas*, G Pardubice, Dašická
Pavel Kučera, G Pardubice, Dašická
Vít Musil, G Jevíčko
Vojtěch Novotný, G Chrudim

• • • • • Kraj Vysočina • • • • •

Kategorie A

- 1.–2. *Hoang Dieu Hung*, 4.B, G Telč
Radek Mlada, sexta A, G Pelhřimov
3.–4. *Martin Hamrle*, 4.A, G Pelhřimov
Josef Kaláb, septima B, G Jihlava

Kategorie B

1. *Josef Janák*, V6A, G Velké Meziříčí

Kategorie C

1. *Jan Šedo*, kvarta A, G Jihlava
2. *Jaromír Štohanzl*, kvinta, G Havlíčkův Brod
3. *Jaroslav Kezňík*, kvinta, G Žďár nad Sáz.
- 4.–6. *Jan Fikar*, 6, G Humpolec
Jana Kodysová, kvinta, G Telč
Martin Tomec, 1.B, G Třebíč
- 7.–12. *Lenka Fridrichová*, kvinta, G Pelhřimov
Marcela Jonášová, 1.A, G Jihlava
Michaela Krpálková, 1.A, G Jihlava
Rostislav Kváš, 1.B, G Jihlava
Vojtěch Markvart, 1.A, G Pelhřimov
Dagmar Vencálková, kvinta, G Žďár nad Sáz.

Kategorie P

1. *Martin Hamrle*, 4.A, G Pelhřimov, Jirsíkova

• • • • • **Jihomoravský kraj** • • • • •

Kategorie A

1. *Tomáš Protivínský*, 4.A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
2. *Veronika Trnková*, 3.A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
3. *Jaroslav Urbánek*, 4.A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 4.–7. *Jana Fabriková*, 2.A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Jan Hladký, 3.A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Vítězslav Kala, 2.A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Jaromír Kuben, 4.ag M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 8.–11. *Miroslav Frost*, septima A/8, G Brno, Elgartova
Marek Krčál, 3.A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Michal Rychnovský, 1.A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Petr Sušil, septima A/8, G Brno, T. Novákové

Kategorie B

1. *Vítězslav Kala*, 2.A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

2. *Jan Novotný*, 2.A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
3. *Tomáš Hebelka*, sexta, G Brno, Vídeňská
- 4.-5. *Sven Dražan*, 2.A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Jiří Štěpánek, 2.A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 6.-8. *Jiří Krčál*, 2.A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Miroslava Plachá, 2.A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Tomáš Pospíchal, 2.A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 9.-12. *Jiří Kalina*, 2.A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Přemysl Oprchal, sexta, G Šlapanice
Alena Robotková, 2.A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Pavel Troubil, 2.A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

Kategorie C

1. *Martin Vejnar*, 1.A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
2. *Ondřej Hotový*, 1.A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
3. *Václav Zahradník*, 1.A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 4.-7. *Vojtěch Procházka*, 1.A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Michal Rychnovský, 1.A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Petr Slovák, 1.A M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Kateřina Trnková, 1.B M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
8. *Jaromír Kuben*, 4.ag M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 9.-12. *Martin Kočí*, 4.ag M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Jakub Macek, 1.C, G Hodonín
Jakub Opršal, 4.ag M, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Ondřej Zapletal, kvinta A, G Brno, Křenová

Kategorie P

1. *Jiří Štěpánek*, 2.A, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 2.-3. *Sven Dražan*, 2.A, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Martin Lopatář, 2.A, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
4. *Martin Vejnar*, 1.A, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 5.-7. *Václav Brožek*, septima C, Biskupské G, Brno
Jan Hladký, 3.A, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Pavel Troubil, 2.A, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

Kategorie A

1. *Libuše Fárková*, G Rožnov pod Radhoštěm
2. *Radek Krejčířík*, G Uherské Hradiště

Kategorie B

- 1.-2. *Martin Horáček*, G Zlín, Lesní čtvrť
Jan Olšina, G Kroměříž

Kategorie C

1. *František Konopecký*, G L. Jaroše, Holešov
2. *Marek Pechal*, G Zlín, Lesní čtvrť
- 3.-4. *Martin Čech*, GJAK, Uherský Brod
Jiří Jánoš, GJAK, Uherský Brod
- 5.-6. *Petr Gremlica*, G Kroměříž
Martin Komoň, GFP, Valašské Meziříčí
- 7.-9. *Stanislav Basovník*, G Kroměříž
Aleš Holub, G Uherské Hradiště
Václav Slimáček, GFP, Valašské Meziříčí
- 10.-13. *Tomáš Bartoň*, Masarykovo G, Vsetín
Marek Blahuš, G Uherské Hradiště
Miroslav Blažek, GFP, Valašské Meziříčí
Stanislav Solánský, GFP, Valašské Meziříčí
Jana Tomšů, SPŠ Zlín

Kategorie P

1. *Martin Cetkovský*, 3.A, G Zlín, Lesní čtvrť

Kategorie A

1. *Lucia Jarešová*, 4.A, GJŠ, Přerov
2. *Tomáš Ligurský*, 8.A, GJB, Přerov
3. *Jan Klesnil*, 4.A, GJŠ, Přerov

Kategorie B

- 1.-2. *Jana Hrudíková*, VI.C, GJŠ, Přerov
Radim Navrátil, 2.A, GJW, Prostějov
3. *Vladimír Veselý*, VI.A, G Šumperk

Kategorie C

1. *Jan Průša*, V.A, GJW, Prostějov
- 2.-5. *Zuzana Dřizgová*, V.G, G Lipník nad Bečvou
Jaroslav Fibichr, V.A, G Šternberk
Antonín Sadil, 5.A, G Zábřeh na Moravě
Jana Sedláčková, V.B, GJŠ, Přerov
- 6.-8. *Markéta Krpcová*, V.A, GJW, Prostějov
Kamil Šamaj, 1.A, G Šternberk
Karel Štěpka, 1.A, G Olomouc-Hejčín

Kategorie A

1. *Jaroslav Hájek*, 4.C, GMK, Bílovec
2. *Václav Cviček*, 5, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
3. *Pavel Ludvík*, 3, GMK, Bílovec
4. *Libor Olšák*, 4, GMK, Bílovec
- 5.-6. *Jakub Gemrot*, 3, GMK, Bílovec
Jan Kaluža, 6, G P. Bezruče, Frýdek-Místek

Kategorie B

1. *Tomáš Gavenčiak*, 2.C, GMK, Bílovec
2. *Marek Radecki*, G Karviná
- 3.–6. *Tereza Jadviščoková*, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
Ondřej Májek, GMK, Bílovec
Martin Stachoň, G Ostrava, Čs. exilu
Josef Toman, GMK, Bílovec

Kategorie C

1. *Zuzana Safernová*, 1.C, GMK, Bílovec
2. *Jakub Dvorský*, 1.C, GMK, Bílovec
- 3.–4. *Vojtěch Brtník*, 5.B, G Ostrava-Zábřeh
Lukáš Kuna, T1B, SPŠ Moravská Ostrava
- 5.–9. *Veronika Krauzovičová*, 1.C, GMK, Bílovec
Zuzana Kubeczková, V.A, G Karviná
Milada Lytková, 1.C, GMK, Bílovec
Libor Polčák, 5.A, G Rýmařov
Vít Schuster, IT1, SPŠ a SOU Opava

Kategorie P

1. *Tomáš Gavenčiak*, 2.C, GMK, Bílovec
2. *Vojtěch Skubanič*, 2.C, GMK, Bílovec
3. *Václav Cviček*, G P. Bezruče, Frýdek-Místek

Výsledky celostátního kola 51. ročníku MO
kategorie A

Vítězové

1. Jaroslav Hájek, 4/4, GMK, Bílovec	37 b.
2. Jan Moláček, 2/4, GJKT, Hradec Králové	35 b.
3. Martin Tancer, 4/4, G Ch. Dopplera, Praha 5	34 b.
4. Josef Cibulka, 4/4, G Praha 1, Štěpánská	33 b.
5. Tomáš Protivínský, 4/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	32 b.
6. Vítězslav Kala, 2/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	31 b.
7. Ondřej Kurka, 8/8, G Ch. Dopplera, Praha 5	23 b.
8.–9. Ondřej Čertík, 7/8, G Ch. Dopplera, Praha 5	20 b.
Marek Krčál, 3/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	20 b.
10.–11. Pavel Čížek, 7/8, GaOA Kralupy nad Vltavou	19 b.
Pavel Kocourek, 1/4, SPŠST, Praha 1, Panská	19 b.
12. Libor Olšák, 4/4, GMK, Bílovec	18 b.

Další úspěšní řešitelé

13. Miroslav Hejna, 7/8, G Rychnov n. Kněžnou	17 b.
14.–15. Jana Fabriková, 2/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	16 b.
Martin Klímeš, 4/4, G Praha 2, Botičská	16 b.
16.–18. Lucia Jarešová, 4/4, GJŠ, Přerov	15 b.
Martin Káldy, 3/4, G Ch. Dopplera, Praha 5	15 b.
Radek Mlada, 6/8, G Pelhřimov, Jirsíkova	15 b.
19.–22. Tomáš Hanzák, 4/4, G Kladno, nám. dr. E. Beneše	14 b.
Jaromír Kuben, 4/8, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	14 b.
Tomáš Ligurský, 8/8, GJB, Přerov	14 b.
Alice Mašková, 4/4, G Praha 6, Parlérova	14 b.
23.–26. Pavel Ludvík, 3/4, GMK, Bílovec	13 b.
Josef Mládek, 7/8, G Plzeň, Mikulášské nám.	13 b.
Petr Sušil, 7/8, G Brno, T. Novákové	13 b.
Ondřej Šedivý, 7/7, G České Budějovice, Jírovcova	13 b.

Výsledky celostátního kola 51. ročníku MO
kategorie P

Vítězové

1. <i>Josef Cibulka</i> , 4/4, Akademické G Praha 1, Štěpánská	42 b.
2. <i>Milan Straka</i> , 3/4, G Strakonice	39 b.
3. <i>Pavel Čížek</i> , 7/8, G a OA Kralupy nad Vltavou	36 b.
4. <i>Jiří Štěpánek</i> , 6/8, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	32 b.
5. <i>Tomáš Gavenčíak</i> , 2/4, GMK, Bílovec	27 b.
6.–7. <i>Jan Kadlec</i> , 3/4, G Ch. Dopplera, Praha 5	25 b.
6.–7. <i>Martin Vejnár</i> , 5/8, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	25 b.
8. <i>Martin Hamrle</i> , 4/4, G Pelhřimov, Jirsíkova	24 b.

Další úspěšní řešitelé

9. <i>Jiří Danihelka</i> , 3/4, SPŠ Písek	23 b.
10. <i>Václav Cviček</i> , 5/6, G P. Bezruče, Frýdek-Místek	21 b.
11. <i>Jiří Paleček</i> , 3/4, G Kladno, nám. E. Beneše	20 b.
12.–13. <i>Martin Kruliš</i> , 7/8, G Kolín	19 b.
12.–13. <i>Jiří Svoboda</i> , 8/8, G Ch. Dopplera, Praha 5	19 b.
14. <i>Lukáš Turek</i> , 3/4, G Ch. Dopplera, Praha 5	16 b.
15. <i>Petr Škoda</i> , 6/8, G Praha 8, Ústavní	15 b.

Kategorie C

Texty úloh

C – I – 1

Dokažte, že existuje jediná číslice c , pro kterou lze najít jediné přirozené číslo n končící číslicí c a mající tu vlastnost, že číslo $2n + 1$ je druhou mocninou prvočísla. (M. Koblížková)

C – I – 2

Ve čtyřúhelníku $ABCD$ se úhlopříčky protínají v bodě P , úhlopříčka AC je rozdělena body P , N a M na čtyři shodné úseky ($|AP| = |PN| = |NM| = |MC|$) a úhlopříčka BD je rozdělena body L , K a P na čtyři shodné úseky ($|BL| = |LK| = |KP| = |PD|$). Určete poměr obsahů čtyřúhelníků $KLMN$ a $ABCD$. (J. Zhouf)

C – I – 3

Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel, které jsou řešením nerovnice

$$\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{6}{y\sqrt{x}} < \frac{5\sqrt{y}}{y}.$$

(J. Zhouf)

C – I – 4

Josef se vracel z výletu. Nejdříve jel vlakem a pak pokračoval ze zastávky na kole. Celá cesta mu trvala přesně 1 hodinu 30 minut a urazil při ní vzdálenost 60 km. Vlak jel průměrnou rychlostí 50 km/h. Určete, jak dlouho jel Josef na kole, když jeho rychlost v km/h je vyjádřena přirozeným číslem stejně jako vzdálenost měřená v km, kterou na kole ujel. (E. Kováč)

C – I – 5

Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou BC dané délky a , je-li dán střed P strany AB a bod Q ($Q \neq P$), který je patou výšky z vrcholu B . (J. Švrček)

C – I – 6

Jistý panovník pozval na oslavu svých narozenin 28 rytířů. Každý z rytířů měl mezi ostatními právě tři nepřátele.

- a) Ukažte, že panovník může rytíře rozesadit ke dvěma stolům tak, aby každý rytíř seděl u stejného stolu s nejvýše jedním nepřítelem.
- b) Ukažte, že v případě libovolného takového rozesazení sedí u každého stolu nejvýše 16 rytířů.

(Nepřátelství je vzájemný vztah: Je-li A nepřítelem B , je i B nepřítelem A .) (J. Šimša)

C – S – 1

Do sportovního kroužku chodí 21 chlapců. Na posledních dvou schůzkách nikdo nechyběl, chlapci se pokaždé rozdělili do tří družstev po sedmi hráčích. Dokažte, že někteří tři chlapci byli obě schůzky spolu v jednom družstvu. (J. Šimša)

C – S – 2

V rovině je dán pravoúhlý trojúhelník ABC takový, že kružnice $k(A; |AC|)$ protíná přeponu AB v jejím středu S . Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku BCS je shodná s kružnicí k . (J. Švrček)

C – S – 3

Určete všechny dvojice prvočísel (p, q) takové, že $p > q$ a číslo $p^2 - q^2$ má nejvýše čtyři dělitele. (P. Calábek)

C – II – 1

Určete počet dvojic (a, b) přirozených čísel ($1 \leq a < b \leq 86$), pro které je součin ab dělitelný třemi. (J. Zhouf)

C – II – 2

Nechť kružnice sestrojené nad rameny lichoběžníku jako nad průměry mají vnější dotyk. Dokažte, že dotykový bod těchto kružnic leží na ose úhlu, který obě ramena lichoběžníku svírají. (J. Švrček)

C – II – 3

Najděte všechna celá čísla x , pro která jsou obě čísla $(x - 3)^2 - 2$, $(x - 7)^2 + 1$ prvočísla. (J. Šimša)

C – II – 4

V rovině jsou dány body C , V , U takové, že $|CV| = 3$ cm, $|VU| = 3,5$ cm a $|CU| = 4,5$ cm. Sestrojte ostroúhlý trojúhelník ABC tak, aby byl V průsečík jeho výšek a bod U byl souměrně sdružený s bodem A podle středu kružnice opsané trojúhelníku ABC . (P. Leischner)

C – I – 1

Nechť (liché) číslo $2n + 1$ je druhou mocninou prvočísla p , pak p je rovněž liché číslo. Ze vztahu $p^2 = 2n + 1$ vyplývá, že $n = \frac{1}{2}(p^2 - 1) = \frac{1}{2}(p - 1)(p + 1)$. Sestavme tabulku několika prvních lichých prvočísel p a jim odpovídajících čísel n :

p	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
n	4	12	24	60	84	144	180	264	420	480	684	840	924

Číslo n je zřejmě sudé, dokonce je (jak prozrazuje i tabulka pro několik hodnot p) dělitelné čtyřmi. To je vidět z toho, že součin $(p - 1)(p + 1)$ dvou po sobě jdoucích sudých čísel je vždy dělitelný osmi. Z tabulky navíc vidíme, že se mezi číslicemi, kterými n končí vícekrát, vyskytují číslice 0 a 4, jen jednou číslice 2, nevyskytují se 6 a 8.

Podívejme se, jakou číslici končí číslo n v závislosti na číslici a , kterou končí číslo p . Je-li $p = 10k + a$, kde k je celé nezáporné číslo a a lichá číslice, pak pro jednotlivá možná a dostaneme:

- Je-li $a = 1$, je $n = 10k(5k + 1)$, takže číslo n končí číslicí 0.
- Je-li $a = 3$, je $n = 10k(5k + 4) + 4$, takže číslo n končí číslicí 4.
- Je-li $a = 5$, je $n = 10(5k^2 + 5k + 1) + 2$, takže číslo n končí číslicí 2.
- Je-li $a = 7$, je $n = 10(5k^2 + 7k + 2) + 4$, takže číslo n končí číslicí 4.
- Je-li $a = 9$, je $n = 10(k + 1)(5k + 4)$, takže číslo n končí číslicí 0.

Je-li $2n + 1$ druhou mocninou lichého prvočísla (lichého čísla), může číslo n končit jedine číslíci 0, 2, 4. Jediným kandidátem na hledanou číslici tak zůstává 2.

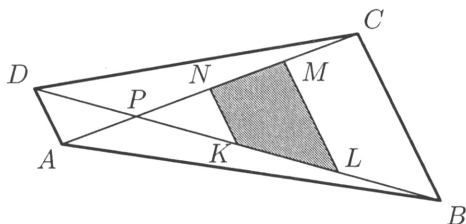
Pokud $2n + 1$ je druhou mocninou prvočísla a n končí číslicí 2, prvočísla p se dá vyjádřit ve tvaru $10k + 5 = 5(2k + 1)$, je tedy dělitelné pěti. Jediné prvočísla, které je dělitelné pěti, je číslo 5.

Hledanou číslici je tedy $c = 2$; pro ni existuje jediné přirozené číslo $n = 12$, které končí číslicí c , přičemž $2n + 1$ je druhou mocninou prvočísla.

C – I – 2

Trojúhelníky APD a NPK jsou souměrně sdružené podle středu P (obr. 1), AD a NK jsou tudíž rovnoběžné a $|AD| = |NK|$. Z rovnosti příslušných úseček dále plyne, že trojúhelníky KNP , LMP a BCP jsou podobné, proto $NK \parallel ML \parallel BC$ a navíc $|LM| = 2|KN|$ a $|BC| = 3|KN|$.

Označíme-li s obsah trojúhelníku APD , je obsah trojúhelníku NKP roven s a obsah trojúhelníku MLP je $4s$ (má dvakrát větší výšku z vrcholu P než trojúhelník NKP z téhož vrcholu a jeho strana ML je dvakrát větší než strana NK). Obsah lichoběžníku $KLMN$ je proto $3s$.



Obr. 1

Strana AP trojúhelníku APD je čtyřikrát menší než strana AC trojúhelníku ACD , výšky z vrcholu D jsou v obou trojúhelnících stejné, proto je obsah trojúhelníku ACD roven $4s$. Strana PN trojúhelníku PNK je čtyřikrát menší než strana AC trojúhelníku ACB , kdežto výška trojúhelníku PNK z vrcholu K je třikrát menší než výška trojúhelníku ABC z vrcholu B , proto je obsah trojúhelníku ACB roven $12s$. Obsah čtyřúhelníku $ABCD$ je roven součtu obsahů trojúhelníků ABC a ACD , tedy $16s$.

Poměr obsahů čtyřúhelníků $KLMN$ a $ABCD$ je roven $3 : 16$.

C – I – 3

Ze zadání plyne, že x a y jsou nutně přirozená čísla. Vynásobením obou stran nerovnice kladným číslem $y\sqrt{x}$ přejdeme k ekvivalentní nerovnici

$$xy + 6 < 5\sqrt{xy}.$$

Její úpravou dostaneme

$$(\sqrt{xy} - 3)(\sqrt{xy} - 2) < 0,$$

což platí, právě když $2 < \sqrt{xy} < 3$, neboli $4/x < y < 9/x$.

Protože x a y jsou přirozená čísla, z poslední nerovnosti plyne, že stačí uvažovat jen $x < 9$. Lehce pak určíme všechny dvojice (x, y) celých čísel, které jsou řešením poslední nerovnice, a tedy i dané nerovnice, která je s ní ekvivalentní: $(1, 5)$, $(1, 6)$, $(1, 7)$, $(1, 8)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 2)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$, $(6, 1)$, $(7, 1)$, a $(8, 1)$.

C – I – 4

Označme v vzdálenost v kilometrech, kterou Josef ujel na kole, a r jeho rychlost v km/h. Podle zadání jsou r a v přirozená čísla a $v < 60$. Na kole jel Josef po dobu v/r h. Vlakem ujel vzdálenost $(60 - v)$ km a tuto vzdálenost ujel za $(60 - v)/50$ h. Proto podle zadání platí

$$\frac{60 - v}{50} + \frac{v}{r} = \frac{3}{2}.$$

Tato rovnice je ekvivalentní s rovnicí

$$50v - 15r - rv = 0,$$

kterou ještě upravíme na tvar

$$(50 - r)(v + 15) = 15 \cdot 50 = 2 \cdot 3 \cdot 5^3.$$

Odtud plyne, že $50 - r$ je přirozené číslo menší než 50 a $v + 15$ přirozené číslo větší než 15, jež nepřevyšuje 75, a navíc, že součin $(50 - r)(v + 15)$ je dělitelný číslem 5^3 . Mohou nastat čtyři případy.

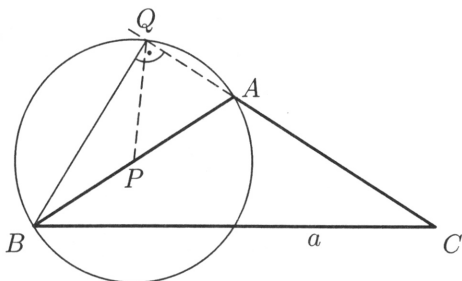
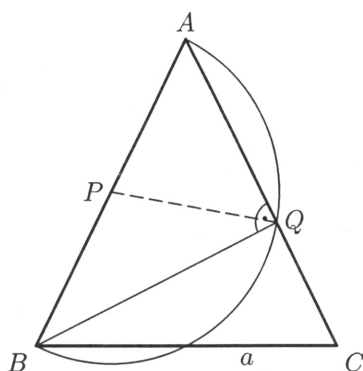
- $5^3 \mid 50 - r$. To není možné, protože $1 \leq 50 - r < 50$.
- $5^2 \mid 50 - r$ a $5 \mid v + 15$. Číslo $50 - r$ je proto rovno 25, odtud $r = 25$ a $v = 15$.
- $5 \mid 50 - r$ a $5^2 \mid v + 15$. Číslo $v + 15$ je tudíž prvkem množiny $\{25, 50\}$, odtud dopočítáme další dvě možnosti $r = 20, v = 10$ a $r = 35, v = 35$.
- $5^3 \mid v + 15$. To není možné, protože $15 < v + 15 < 75$.

Možné časy Josefovy jízdy na kole (v minutách) proto jsou $15 \cdot 60/25 = 36$, $10 \cdot 60/20 = 30$ a $35 \cdot 60/35 = 60$.

Výčtem všech možností jsme zjistili, že pokud Josef cestoval podle zadání úlohy, pak jel na kole buď 30, nebo 36, anebo 60 minut.

C – I – 5

Úhel BQA je buď pravý, nebo $Q = A$. Proto bod Q leží na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem BA . (Na obr. 2 je znázorněn případ ostroúhlého i tupoúhlého trojúhelníku ABC .) Protože P je střed úsečky AB , je $|PQ|$ velikost poloměru této kružnice, proto velikost průměru $|AB|$ této kružnice je rovna $2|PQ|$. Trojúhelník ABC má délku ramene $2|PQ|$, a protože známe velikost základny, je tím jednoznačně určen.



Obr. 2

Odtud již plyne *konstrukce*. Nejdříve sestrojíme trojúhelník $A'B'C'$ shodný s trojúhelníkem ABC o velikostech stran $|A'B'| = |A'C'| = 2|PQ|$ a $|B'C'| = a$, který potom přemístíme tak, aby se střed strany $A'B'$ zobrazil na bod P a pata výšky z vrcholu B' na bod Q . To lze provést jednoznačně až na osovou souměrnost podle přímky PQ . Pokud tedy trojúhelník $A'B'C'$ existuje, má úloha dvě řešení souměrně sdružená podle osy PQ .

Diskuse je zřejmá. Trojúhelník ABC lze sestavit právě tehdy, když lze sestavit rovnoramenný trojúhelník $A'B'C'$, tj. když $a < 4|PQ|$ (trojúhelníkové nerovnosti), v tomto případě má úloha právě dvě (shodná) řešení. Navíc pro $a < 2\sqrt{2}|PQ|$ bude trojúhelník ABC ostroúhlý, pro $a = 2\sqrt{2}|PQ|$ pravoúhlý a pro $2\sqrt{2}|PQ| < a < 4|PQ|$ tupoúhlý. *Důkaz* správnosti plyne z rozboru úlohy.

Jiné řešení. Označme R střed strany BC , ten je zároveň patou výšky z vrcholu A . Oba body Q a R tedy leží na Thaletově kružnici nad průměrem AB se středem P , proto $|PQ| = |PR| = \frac{1}{2}|AB|$. Jelikož úhel BQC je pravý, leží bod Q na Thaletově kružnici nad průměrem BC se středem R , takže $|RQ| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}a$. Trojúhelník PQR je proto podobný trojúhelníku ABC (koeficient podobnosti je $\frac{1}{2}$).

Při *konstrukci* nejdříve sestrojíme trojúhelník PQR . Na přímce rovnoběžné se střední příčkou PR procházející bodem Q najdeme bod $C \neq Q$ tak, aby $|RC| = \frac{1}{2}a$. Body A a B pak už sestrojíme snadno.

Pro dané body P , Q můžeme sestavit třetí vrchol R trojúhelníku PQR dvěma způsoby. *Diskuse* je tedy stejná jako v předcházejícím řešení. *Důkaz* správnosti plyne z rozboru úlohy.

a) Rozesadíme v prvním kole rytíře ke stolům libovolným způsobem. Označme n_1 počet nepřátel prvního rytíře u stolu, u kterého sedí, potom $n_1 \leq 3$. Podobně označme $n_2 \leq 3$ počet nepřátel druhého rytíře u stolu, u kterého sedí, atd. Potom pro „hladinu nepřátelství“

$$N_1 = n_1 + n_2 + \dots + n_{28}$$

v prvním kole platí $0 \leq N_1 \leq 3 \cdot 28 = 54$, přičemž N_1 je celé nezáporné číslo.

Předpokládejme, že existuje rytíř, který sedí u stolu s alespoň dvěma nepřáteli. Pak ho přesadíme ke druhému stolu. Tím vznikne nové rozesazení. Zkoumejme nyní hladinu nepřátelství N_2 po tomto druhém kole.

Pokud přesazený rytíř r seděl původně u jednoho stolu se všemi třemi nepřáteli a, b, c , po jeho přesazení se počet nepřátel rytíře r u stolu, u kterého teď sedí, snížil o 3 na nulu, a počet nepřátel rytířů a, b a c u téhož stolu se snížil o jednu. Počty nepřátel zbývajících rytířů u jejich stolů se nezměnily. Tedy $N_2 = N_1 - 6$.

Pokud přesazený rytíř r seděl původně u jednoho stolu se dvěma nepřáteli a a b a byl přesazen ke stolu s nepřítelem c , po jeho přesazení se počet nepřátel rytíře r u stolu, u kterého nyní sedí, snížil o 1 ze dvou na jednoho, počet nepřátel rytířů a a b u jejich stolu se o jedna snížil, a počet nepřátel rytíře c u stolu, u kterého sedí, se zvýšil o 1. Počty nepřátel zbývajících rytířů u jejich stolů se nezměnily. V tomto případě je tedy $N_2 = N_1 - 2$.

V obou případech vychází $N_2 < N_1$.

Pokud ještě po tomto kole existuje rytíř, který sedí u jednoho stolu s alespoň dvěma svými nepřáteli, opět ho požádáme, aby si přesedl k druhému stolu. Pro hladinu nepřátelství N_3 po třetím kole bude ze stejných důvodů jako výše platit $N_3 < N_2$.

Stejným způsobem vytvoříme hladiny nepřátelství $N_4 > N_5 > \dots$ po dalších kolech.

Protože v každém kole je hladina nepřátelství menší než v předešlém kole, je vyjádřena celým nezáporným číslem a hladina nepřátelství v prvním kole je nejvýše 54, může se taková situace opakovat nejvýše čtyřiapadesátkrát. Počet kol musí být tedy konečný a po posledním kole už neexistuje rytíř, který by seděl u jednoho stolu s alespoň dvěma nepřáteli. Tím jsme dokázali část a).

b) Předpokládejme, že rytíři jsou nyní rozesazeni u stolů A a B tak, že každý sedí u stejného stolu s nejvýše jedním nepřítelem. Označme r_A počet rytířů u stolu A a r_B počet rytířů u stolu B . Platí

$$r_A + r_B = 28. \quad (1)$$

Každý z rytířů u stolu A má u stolu B alespoň dva nepřátele a každý z rytířů stolu B je nepřítelem nejvýše tří rytířů od stolu A , proto pro počet p těch nepřátelských dvojic, jež sedí u různých stolů, platí

$$2r_A \leq p \text{ a } p \leq 3r_B, \text{ takže } 2r_A \leq 3r_B.$$

Dosadíme-li do této nerovnice z (1) $r_B = 28 - r_A$, dostaneme po úpravě $5r_A \leq 84$. Vzhledem k tomu, že r_A je celé nezáporné číslo, musí platit $r_A \leq 16$. S ohledem na symetrii situace platí analogicky $r_B \leq 16$. Tím jsme splnili část b).

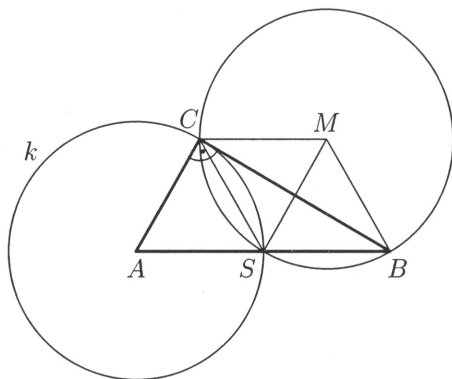
V části b) můžeme postupovat také sporem: Kdyby u stolu A sedělo aspoň 17 rytířů, měli by dohromady u stolu B aspoň $17 \cdot 2 = 34$ nepřátel, přitom každý rytíř-nepřítel je v tomto čísle započítán nejvýše třikrát. Protože $3 \cdot 11 < 34$, sedí u stolu B aspoň 12 rytířů, dohromady u obou stolů A a B je pak aspoň $17 + 12 = 29$ rytířů, což odporuje zadání.

C – S – 1

Uvažujme chlapce H . Šest jeho spoluhráčů z první schůzky je na druhé schůzce rozděleno do tří družstev. Pak jsou buď tři z nich v jednom družstvu, nebo jsou v těchto třech družstvech rozděleni po dvou. Chlapec H je však také členem některého z těchto družstev, a tedy v tomto družstvu se opět nachází trojice spoluhráčů z první schůzky.

Jiné řešení. Označme A, B, C družstva sestavená na první schůzce, D, E, F družstva sestavená na druhé schůzce. Podle zařazení do družstev jsou jednotliví chlapci nejvýše devíti různých typů $AD, AE, AF, BD, BE, BF, CD, CE, CF$. Kdyby každého typu byli nejvýše dva chlapci, bylo by na schůzkách nejvýše $2 \cdot 9 = 18$ chlapců, což je spor s tím, že jich do kroužku chodí 21. Proto alespoň jednoho typu jsou alespoň tři chlapci, a to je hledaná trojice chlapců.

Střed přepony S pravoúhlého trojúhelníku ABC je podle Thaletovy věty středem kružnice opsané tomuto trojúhelníku, platí tedy $|CS| = |AS| = |BS|$ (obr. 3). Jelikož body C a S leží na kružnici k , platí $|AS| = |AC|$, je proto trojúhelník ASC rovnostranný a velikost úhlu CSB je rovna 120° .



Obr. 3

Je-li M střed kružnice opsané trojúhelníku BCS , platí $|CM| = |SM| = |BM|$, a protože $|CS| = |BS|$, jsou CMS a SMB shodné rovnoramenné trojúhelníky se základnami CS a BS . Velikost úhlu CSB je součtem velikostí shodných úhlů CSM a MSB , je proto velikost úhlu MSB rovna $\frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$. Trojúhelník MSB je tedy rovnostranný a platí $|MS| = |BS|$.

Poloměr kružnice opsané trojúhelníku CSB je roven $|MS| = |BS| = |AS|$, což je poloměr kružnice k . Kružnice opsaná trojúhelníku BCS a kružnice k mají stejné poloměry, jsou tedy shodné. Tím je důkaz ukončen.

Poznámka: Po zjištění, že ASC je rovnostranný trojúhelník, je možno dokončit řešení i takto: je-li D bod souměrně sružený s bodem A podle středu C , je trojúhelník ABC „polovinou“ rovnostranného trojúhelníku ABD , takže střed M jeho strany BD má od bodů B, S, C stejnou vzdálenost rovnou $\frac{1}{2}|AB|$.

Číslo 1 má právě jednoho dělitele 1. Určeme dále všechna přirozená čísla $a \neq 1$, která mají nejvýše čtyři dělitele. Takové číslo a má dva triviální dělitele 1 a a , proto může mít nejvýše další dva netriviální dělitele, takže je dělitelné nejvýše dvěma prvočísly. Je-li číslo a dělitelné dvěma různými prvočísly p_1 a p_2 , je dělitelné i jejich součinem $p_1 p_2$, vzhledem k uspořádání dělitelů čísla a musí tehdy být $a = p_1 p_2$. Je-li číslo a dělitelné právě jedním prvočíslem p_1 , platí $a = p_1^k$, kde k je přirozené číslo. Jeho netriviálními děliteli jsou čísla $p_1, p_1^2, \dots, p_1^{k-1}$, proto $k \leq 3$.

Nejvýše čtyři dělitele tedy mají pouze číslo 1 a čísla tvaru p_1, p_1^2, p_1^3 a $p_1 p_2$, kde p_1 a p_2 jsou různá prvočísla.

Nechť $p > q$ jsou prvočísla a číslo $a = p^2 - q^2 = (p - q)(p + q)$ má nejvýše čtyři dělitele. Pak platí $1 \leq p - q < p + q \leq a$. Rozlišíme následující případy:

1. $p - q = 1$. Rozdíl prvočísel p, q je liché číslo, proto jedno z nich je sudé a druhé se liší o 1. Tedy $p = 3, q = 2$ a číslo $a = 3^2 - 2^2 = 5$ má dva dělitele 1 a 5.
2. $p - q > 1$. Číslo a má právě čtyři různé dělitele 1, $p - q, p + q, a$, proto vzhledem k úvodní úvaze mohou nastat dvě možnosti:
 - a) $p - q$ je prvočíslo p_1 a $p + q$ je p_1^2 . Pak ovšem p_1 dělí $p_1^2 + p_1 = p + q + (p - q) = 2p$, přitom p je prvočíslo, takže $p_1 = p$ nebo $p_1 = 2$. Rovností $p - q = p_1$ je však možnost $p_1 = p$ vyloučena, proto musí platit $p_1 = 2$. Ze soustavy $p - q = 2, p + q = 4$ ovšem plyne $q = 1$, což není prvočíslo.
 - b) $p - q$ je prvočíslo p_1 a $p + q$ je prvočíslo p_2 . Protože $p_2 > p_1$, je prvočíslo p_2 liché. Odtud plyne $q = 2$, jinak by číslo p_2 bylo součtem dvou lichých prvočísel p a q , tedy číslo sudé. Tři prvočísla $p_1 = p - 2, p$ a $p_2 = p + 2$ dávají různé zbytky při dělení třemi, takže jedno z nich je rovno 3. Z $p = 3$ ovšem plyne $p_1 = 1$, z $p_2 = 3$ zase $p = 1$, zbývá proto možnost $p_1 = 3$, tedy $p = 5$. Číslo $a = 5^2 - 2^2 = 21$ má právě čtyři dělitele 1, 3, 7, 21.

Všechny dvojice prvočísel (p, q) vyhovující zadání úlohy jsou dvojice (3, 2) a (5, 2).

Jiné řešení. Vysvětlíme nejdříve, proč $q = 2$. Pripusťme naopak, že $q > 2$. Pak obě prvočísla p a q jsou lichá, takže $(p - q)$ a $(p + q)$ jsou dvě různá sudá čísla, tudíž jejich součin $p^2 - q^2$ je číslo tvaru $4k$, kde $k \geq 2$. Takové číslo ale má čtyři dělitele 1, 2, 4 a $4k$, proto se jeho dělitel $2k$ musí

rovnat číslu 4. Platí tedy $(p - q)(p + q) = 8$, odkud $p - q = 2$ a $p + q = 4$, takže $q = 1$, a to je spor. Rovnost $q = 2$ je dokázána.

Hledáme tedy všechna prvočísla $p > 2$, pro která má číslo $p^2 - 4$ nejvýše čtyři dělitele. Snadno se přesvědčíme, že vyhovuje $p = 3$ i $p = 5$. V případě $p \geq 7$ je ovšem jedno z čísel $p + 2$, $p - 2$ dělitelné třemi (podle toho, zda prvočíslo p dává při dělení třemi zbytek 1 nebo 2), takže číslo $p^2 - 4$ má pět různých dělitelů 1, 3, $p - 2$, $p + 2$ a $p^2 - 4$.

Úloze tedy vyhovují dvě dvojice prvočísel (p, q) : $(3, 2)$ a $(5, 2)$.

C – II – 1

Nejprve spočteme, kolik je všech dvojic čísel takových, že $1 \leq a < b \leq 86$, a pak od tohoto počtu odečteme počet těch dvojic, pro něž součin ab není třemi dělitelný.

Označme C množinu všech přirozených čísel nejvýše rovných 86,

$$C = \{1, 2, \dots, 86\}.$$

Množina C má celkem 86 prvků. Číslo a z ní můžeme vybrat 86 způsoby a ke každému takto vybranému číslu a existuje 85 čísel $b \in C$ různých od a . Proto počet všech uspořádaných dvojic (a, b) přirozených čísel ($1 \leq a \neq b \leq 86$) je roven $86 \cdot 85$. Tuto množinu můžeme rozdělit na páry uspořádaných dvojic (a, b) a (b, a) , proto právě pro polovinu dvojic platí $a < b$ (druhou polovinu tvoří dvojice, v nichž $a > b$). Počet všech dvojic (a, b) přirozených čísel takových, že $1 \leq a < b \leq 86$, je tedy roven $\frac{1}{2} \cdot 86 \cdot 85 = 3655$. (Je to zároveň počet všech *neuspořádaných* dvojic přirozených čísel z množiny C , což je kombinační číslo $\binom{86}{2} = 3655$.)

Součin ab je dělitelný třemi, právě když je aspoň jeden z činitelů a , b dělitelný třemi. Protože mezi čísla z množiny C je právě 28 čísel dělitelných třemi, je v C právě $86 - 28 = 58$ čísel, jež nejsou dělitelná třemi. Celkem tedy můžeme sestavit $\frac{1}{2} \cdot 58 \cdot 57 = 1653$ dvojic různých přirozených čísel (a, b) takových, že $1 \leq a < b \leq 86$, a přitom součin ab není dělitelný třemi.

Počet všech dvojic (a, b) přirozených čísel ($1 \leq a < b \leq 86$), pro které je součin ab dělitelný třemi, je roven $3655 - 1653 = 2002$.

Jiné řešení. Označme A , resp. B množinu všech těch dvojic (a, b) ($1 \leq a < b \leq 86$), ve kterých je číslo a , resp. b dělitelné třemi. Mezi čísla v množině $C = \{1, 2, \dots, 86\}$ existuje 28 čísel dělitelných třemi (jsou to čísla 3, 6, 9, ..., 84). Ke každému číslu $a \in C$ existuje $86 - a$ čísel $b \in C$

takových, že $a < b$. Proto počet všech prvků množiny A je roven

$$\begin{aligned}
 (86 - 3) + (86 - 6) + (86 - 9) + \dots + (86 - 84) &= \\
 &= 28 \cdot 86 - 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 28) = \\
 &= 28 \cdot 86 - 3 \cdot \frac{1}{2}((1 + 28) + (2 + 27) + (3 + 26) + \dots + (28 + 1)) = \\
 &= 28 \cdot 86 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 29 \cdot 28 = 2408 - 1218 = 1190.
 \end{aligned}$$

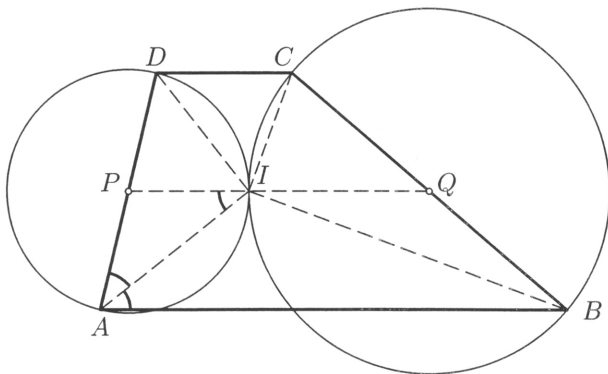
Ke každému číslu $b \in C$ existuje $b - 1$ čísel $a \in C$ takových, že $a < b$. Proto počet všech prvků množiny B je roven

$$\begin{aligned}
 (3 - 1) + (6 - 1) + (9 - 1) + \dots + (84 - 1) &= \\
 &= 3 \cdot (1 + 2 + \dots + 28) - 28 = 1218 - 28 = 1190.
 \end{aligned}$$

Průnik množin A a B obsahuje takové dvojice čísel (a, b) , v nichž jsou obě složky a i b dělitelné třemi, přičemž $a < b$. Těchto dvojic je podle úvahy z úvodního řešení $\frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 27 = 378$. Počet prvků sjednocení množin A a B, tj. počet všech dvojic (a, b) přirozených čísel ($1 \leq a < b \leq 86$), pro které je součin ab dělitelný třemi, je roven součtu prvků množin A a B zmenšený o počet prvků jejich průniku, tj. $1190 + 1190 - 378 = 2002$.

C – II – 2

Nechť $ABCD$ je takový lichoběžník se základnami AB a CD (obr. 4). Označme P střed ramene AD , Q střed ramene BC a I dotykový bod



Obr. 4

kružnic sestrojených nad rameny jako průměry. Bod P je středem kružnice sestrojené nad ramenem AD , proto jsou úsečky PA a PI shodné a API je rovnoramenný trojúhelník se základnou AI . Odtud plyne, že úhly PAI a AIP jsou shodné. Protože bod dotyku dvou kružnic leží na středné těchto kružnic, je I bodem střední příčky PQ lichoběžníku $ABCD$, která je rovnoběžná s jeho základnami. Úhly PIA a IAB jsou střídavé a mají proto stejnou velikost. Tedy úhly PAI a IAB jsou shodné a AI je osou úhlu DAB . Bod I leží na ose tohoto úhlu, proto má stejnou vzdálenost od jeho ramen AD a AB . Podobně se ukáže, že IB je osou úhlu ABC a bod I má stejnou vzdálenost od přímk AB a BC . Odtud již plyne, že bod I má stejnou vzdálenost od ramen AD a BC , a leží proto na ose úhlu, který tato ramena svírají.

C – II – 3

Obě čísla 3 a 7 jsou lichá, proto pro libovolné celé číslo x mají čísla $x - 3$ a $x - 7$ (a tedy i čísla $(x - 3)^2$ a $(x - 7)^2$) stejnou paritu. Čísla -2 a 1 mají různou paritu, proto čísla $(x - 3)^2 - 2$, $(x - 7)^2 + 1$ mají různou paritu, jedno z nich je tedy sudé. Protože jediné sudé prvočíslo je číslo 2, je jedno z čísel $(x - 3)^2 - 2$, $(x - 7)^2 + 1$ rovno 2.

a) Nechť $(x - 3)^2 - 2 = 2$. Potom $(x - 3)^2 = 4$, tj. $x = 5$ nebo $x = 1$.

Pro $x = 5$ je hodnota výrazu $(x - 7)^2 + 1$ rovna 5, což je prvočíslo, pro $x = 1$ je hodnota tohoto výrazu rovna 37, což je také prvočíslo.

b) Nechť $(x - 7)^2 + 1 = 2$. Potom $(x - 7)^2 = 1$, tj. $x = 8$ nebo $x = 6$.

Pro $x = 8$ je hodnota výrazu $(x - 3)^2 - 2$ rovna 23, což je prvočíslo, pro $x = 6$ je hodnota tohoto výrazu rovna 7, což je také prvočíslo.

Hledanými celými čísly x jsou všechny prvky množiny $\{1, 5, 6, 8\}$.

C – II – 4

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, S střed kružnice k jemu opsané a V průsečík jeho výšek (obr. 5). Nechť U je bod souměrně sdružený s bodem A podle S . Bod U leží na kružnici k uvnitř toho oblouku BC , který neobsahuje bod A . Úsečka AU je průměrem kružnice k , proto podle Thaletovy věty jsou úhly UCA a UBA pravé. Jelikož výška BV je kolmá na stranu AC trojúhelníku ABC , jsou úsečky BV a UC rovnoběžné. Z podobného důvodu jsou rovnoběžné i úsečky CV a UB , takže $BUCV$ je rovnoběžník. Úsečky BC a UV mají tudíž společný střed.

Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

Do tabulky 4×4 jsou vepsána kladná reálná čísla tak, že součin v každé pětiici tvaru $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$ je rovný 1. Zjistěte maximální počet různých čísel zapsaných v tabulce.

(P. Černek)

B – I – 2

Určete, kolik čísel můžeme vybrat z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 75\,599, 75\,600\}$ tak, aby mezi nimi bylo číslo 75 600 a aby pro libovolná dvě vybraná čísla a, b platilo, že a je dělitelem b nebo b dělitelem a . (Uveďte všechny možnosti.)

(J. Földes)

B – I – 3

Nechť k je polokružnice sestrojená nad průměrem AB , která leží ve čtverci $ABCD$. Uvažujme její tečnu t_1 z bodu C (různou od BC) a označme P její průsečík se stranou AD . Nechť t_2 je společná vnější tečna polokružnice k a kružnice vepsané trojúhelníku CDP (různá od AD). Dokažte, že přímky t_1 a t_2 jsou navzájem kolmé.

(J. Švrček)

B – I – 4

Pokud máme n ($n \geq 2$) přirozených čísel, můžeme s nimi provést následující operaci: vybereme několik z nich, ale ne všechna a každé z vybraných čísel nahradíme jejich aritmetickým průměrem. Zjistěte, zda je možno pro libovolnou počáteční n -tici dostat po konečném počtu kroků všechna čísla stejná, jestliže se n rovná

a) 2 000, b) 35, c) 3, d) 17.

(J. Földes)

B – I – 5

Zjistěte, pro která reálná čísla p má soustava

$$\begin{aligned}x^2y - 2x &= p, \\ y^2x - 2y &= 2p - p^2\end{aligned}$$

právě tři řešení v oboru reálných čísel.

(P. Černek)

B – I – 6

Je dán rovnostranný trojúhelník MPQ . Najděte množinu vrcholů C všech trojúhelníků ABC takových, že body P , Q jsou paty výšek z vrcholů A , B a bod M je střed strany AB .

(J. Šimša)

B – S – 1

Určete reálné číslo p tak, aby rovnice

$$x^2 + 4px + 5p^2 + 6p - 16 = 0$$

měla dva různé kořeny x_1 , x_2 a aby součet $x_1^2 + x_2^2$ byl co nejmenší.

(J. Šimša)

B – S – 2

Uvnitř stran BC , CA , AB daného ostroúhlého trojúhelníku ABC jsou po řadě vybrány body X , Y a Z tak, že každému ze čtyřúhelníků $ABXY$, $BCYZ$ a $CAZX$ lze opsat kružnici. Dokažte, že body X , Y , Z jsou paty výšek trojúhelníku ABC .

(E. Kováč)

B – S – 3

Na tabuli jsou napsána čísla $1, 2, \dots, 17$. Čísla postupně mažeme, a to tak, že z dosud nesmazaných čísel zvolíme libovolné číslo k a smažeme všechna ta čísla na tabuli, která dělí $k + 17$. Dokažte, že opakováním této procedury se nám nepodaří všechna čísla smazat.

(J. Földes)

B – II – 1

Najděte všechna přirozená čísla n , která jsou menší než 100 a mají tu vlastnost, že druhé mocniny čísel $7n + 5$ a $4n + 3$ končí stejným dvojčíslem.

(J. Šimša)

B – II – 2

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 24xy &= 0 \\ \frac{12x}{x^2 + 1} + \frac{12y}{y^2 + 1} + 1 &= 0.\end{aligned}$$

(J. Šimša)

B – II – 3

Uvnitř stran AB , BC , CD a DA konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ jsou po řadě zvoleny body K , L , M a N . Označme S průsečík přímek KM a LN . Je-li možno vepsat kružnice čtyřúhelníkům $AKSN$, $BLSK$, $CMSL$ a $DNSM$, je možno vepsat kružnici i čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte.

(J. Zhouf)

B – II – 4

Je dáno n nezáporných čísel. Můžeme vybrat libovolná dvě z nich, řekněme a a b , $a \leq b$, a zaměnit je čísly 0 a $b - a$. Dokažte, že opakováním této operace lze všechna daná čísla změnit na nuly, právě když původní čísla lze rozdělit do dvou skupin tak, že součty čísel v obou skupinách jsou stejné.

(J. Földes)

B – I – 1

Označme $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ čísla vepsaná do levého horního čtverce 3×3 tabulky (obr. 6). Porovnáme-li součiny pro pětilice tvaru $\begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}$ a $\begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}$ umístěné v této části tabulky, musí platit $abcde = bdefg$, neboli $ac = fg$. Analogicky pro pětilice $\begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}$ a $\begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}$ nám vyjde $ahfdi = cigdh$, neboli $af = cg$. Protože jde vesměs o kladná čísla, plyne z obou rovností $f = c$ a $g = a$. Zároveň si uvědomme, že tuto vlastnost (tj. rovnost čísel v protějších rozích čtverce 3×3) musí mít každý ze čtyř takových čtverců, které v tabulce existují. To využijeme při dalším doplňování dané tabulky.

a	b	c	
h	d	i	
f	e	g	

Obr. 6

a	b	c	e
	d		
c	e	a	b
			d

Obr. 7

Uvažujme opět umístění $\begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}$ v levém horním rohu dané tabulky s vepsanými čísly a, b, c, d, e , doplníme další čísla podle právě dokázané vlastnosti a označme x chybějící číslo v pětilice $\begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}$ (obr. 7). Porovnáním obou shodných součinů dostáváme $abcde = abdex$, neboli $x = c$. Kdybychom stejnou úvahu udělali pro pětilice polí $\begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}$ a $\begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}$, jež dostaneme z uvažovaných pětic překlopením podle svislé osy dané tabulky, vyjde nám analogická rovnost i pro další dvě dvojice polí tabulky (obr. 8).

	b	c	
b			c
c			b
	c	b	

Obr. 8

a	b	c	e
b	d	y	c
c	e	a	b
y	c	b	d

Obr. 9

Teď už máme tabulku vyplněnou celou až na dvě políčka, do kterých vepíšeme číslo y (obr. 9). Porovnáním součinů v obou vyznačených pětilicích dostáváme $abcde = abcdy$, neboli $y = e$. Analogická rovnost musí ovšem platit i pro druhá dvě centrální pole tabulky ležící na druhé úhlopříčce, tj. $d = a$. Stačí, abychom celou úvahu zopakovali pro pětilice

polí, jež vzniknou z uvažovaných pětic překlopením podle svislé osy dané tabulky.

Všimněme si teď ve vyplněné tabulce pětic polí vyznačených na obr. 10. Zřejmě musí platit $a^2bce = abce^2$, neboli $a = e$. Vidíme, že tabulka obsahuje nejvýše tři různá čísla a, b, c (obr. 11), přičemž $a^3bc = 1$. Nyní zbývá ověřit, že stejný součin a^3bc má každá pětice polí tvaru $\begin{smallmatrix} a & b \\ c & e \end{smallmatrix}$, kterou lze do tabulky umístit. Protože vyplněná tabulka je osově souměrná podle obou úhlopříček, a tedy i středově souměrná, stačí to ověřit jen pro čtyři možné polohy stejně orientovaných pětic (např. $\begin{smallmatrix} a & b \\ c & e \end{smallmatrix}$ v obvyklé poloze písmene T).

a	b	c	e
b	a	e	c
c	e	a	b
e	c	b	a

Obr. 10

a	b	c	e
b	a	e	c
c	e	a	b
e	c	b	a

a	b	c	a
b	a	a	c
c	a	a	b
a	c	b	a

Obr. 11

Odpověď. V tabulce jsou zapsána nejvýše tři různá kladná čísla a, b, c , přičemž $a^3bc = 1$.

B – I – 2

Uvažujme množinu M , která splňuje podmínky ze zadání. Protože M obsahuje číslo 75 600, musí být aspoň jednoprvková. Dále si všimněme, že pokud z množiny M odstraníme nějaké číslo $a \neq 75\,600$, dostaneme množinu $M' \subset M$, která rovněž splňuje dané podmínky. Ověřme to. Množina M' i nadále obsahuje číslo 75 600. Jsou-li x, y libovolná dvě čísla z množiny M' , platí pro ně automaticky, že $x \mid y$ nebo $y \mid x$, protože to pro ně platí jako pro prvky množiny M .

Tím jsme vlastně dokázali, že pokud najdeme množinu, která má m prvků a splňuje podmínky zadání, pak existuje k -prvková množina požadovaných vlastností pro libovolné k , $1 \leq k \leq m$. Stačí tedy najít vyhovující množinu, která má maximální možný počet prvků.

Je-li a libovolný prvek množiny M , je především $a \leq 75\,600$. Pokud $a < 75\,600$, musí podle zadání platit, že $a \mid 75\,600$. Množina M tedy obsahuje jen dělitele čísla 75 600.

Prvočíselný rozklad čísla 75 600 je $75\,600 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$. Každý dělitel čísla 75 600 má tedy tvar $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \cdot 7^\delta$, kde $0 \leq \alpha \leq 4$, $0 \leq \beta \leq 3$, $0 \leq \gamma \leq 2$, $0 \leq \delta \leq 1$. Každý prvek M je proto charakterizován uspořádanou

čtveřicí $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ odpovídajících exponentů v uvedeném rozkladu na prvočinitele. Jsou-li p a p' dva různé prvky M a platí-li například $p < p'$, pak podle zadání musí současně platit $\alpha \leq \alpha', \beta \leq \beta', \gamma \leq \gamma', \delta \leq \delta'$, přičemž aspoň jedna nerovnost musí být ostrá (jinak by platilo $p = p'$), odkud plyne nerovnost $\alpha + \beta + \gamma + \delta < \alpha' + \beta' + \gamma' + \delta'$. Protože v našem případě je $0 \leq \alpha + \beta + \gamma + \delta \leq 10$, může množina M obsahovat nejvýše 11 prvků. Takovou je např. množina

$$D = \{1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^4 \cdot 3, 2^4 \cdot 3^2, 2^4 \cdot 3^3, 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5, 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2, 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7\}.$$

Tím jsme dokázali, že z dané množiny můžeme (včetně čísla 75 600) vybrat požadovaným způsobem 1, 2, ..., 11 prvků.

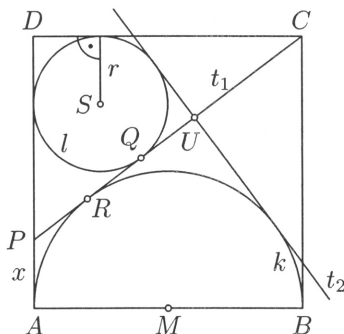
B – I – 3

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že délka strany čtverce $ABCD$ je 1. Označme M střed strany AB a U průsečík přímek t_1, t_2 (obr. 12). Dále označme l kružnici vepsanou trojúhelníku CDP , S její střed a r poloměr. Dále necht' Q a R jsou postupně dotykové body přímky t_1 s kružnicí l a polokružnicí k . Položme $x = |AP|$. V řešení využijeme známý fakt, že vzdálenosti obou dotykových bodů od průsečíku tečen jsou stejné. Takto například dostáváme

$$|CP| = |CR| + |RP| = |CB| + |AP| = 1 + x. \quad (1)$$

Řešení provedeme ve třech krocích, přitom každý z nich vyplníme více způsoby:

1. *krok.* Výpočet délky x .
2. *krok.* Výpočet poloměru r .
3. *krok.* Důkaz kolmosti přímek t_1 a t_2 .



Obr. 12

1. krok, 1. způsob.

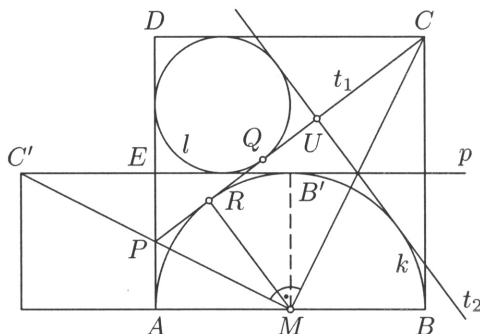
Uvažujme pravoúhlý trojúhelník CDP . Délka jeho přepony se podle (1) rovná $1 + x$ a délky odvěsen jsou 1 a $1 - x$. Z *Pythagorovy věty* tedy dostáváme

$$(1+x)^2 = 1^2 + (1-x)^2.$$

Řešením této (po úpravě lineární) rovnice je $x = \frac{1}{4}$.

1. krok, 2. způsob.

Označme C' bod, který vznikne otočením bodu C okolo středu M o 90° v kladném směru. Potom bod C' leží na přímkce p , která je obrazem přímky BC v uvedeném otočení (obr. 13), přičemž rovnoběžné úsečky



Obr. 13

$C'E$ a AM mají tutěž délku $\frac{1}{2}$. Protože přímka MP je osou úhlu AMR a přímka MC osou úhlu $BM\bar{R}$, jsou přímky MP a MC navzájem kolmé, takže bod C' leží na přímce MP . Trojúhelníky PAM' a PEC' jsou tedy souměrně sdružené podle středu P , a proto $x = |AP| = \frac{1}{2}|AE| = \frac{1}{4}$.

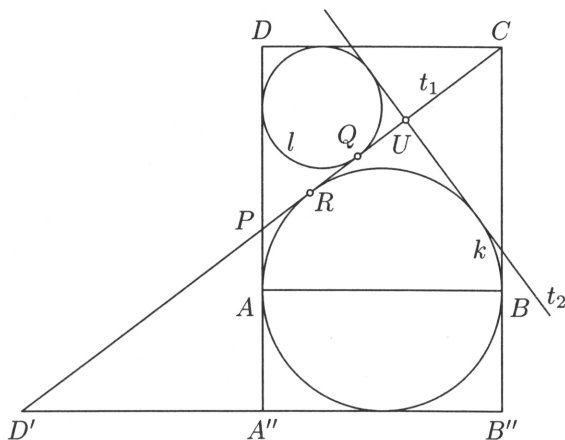
2. krok, 1. způsob.

Je-li ϱ poloměr kružnice vepsané trojúhelníku se stranami a, b, c , je jeho obsah roven $\frac{1}{2}(a+b+c)\varrho$. Pro pravoúhlý trojúhelník CDP , v němž známe délky všech stran, tak dostáváme (připomeňme, že $|PC| = 1 + x = \frac{5}{4}$)

$$r = \frac{\frac{1}{2}|CD| \cdot |DP|}{\frac{1}{2}(|CD| + |DP| + |PC|)} = \frac{1}{4}.$$

2. krok, 2. způsob.

Nechť $A''B''$ je obraz úsečky AB v posunutí ve směru polopřímky CB o délku $\frac{1}{2}$ (obr. 14). Označme D' průsečík přímk $A''B''$ a t_1 . Potom kružnice, jejíž částí je polokružnice k , je vepsána trojúhelníku $D'B''C$ a navíc jsou trojúhelníky $D'B''C$ a CDP podobné. Poměr poloměrů jejich vepsaných kružnic je tedy roven poměru jejich kratších odvěsen. To znamená, že $\frac{1}{2} : r = \frac{3}{2} : \frac{3}{4}$, neboli $r = \frac{1}{4}$.



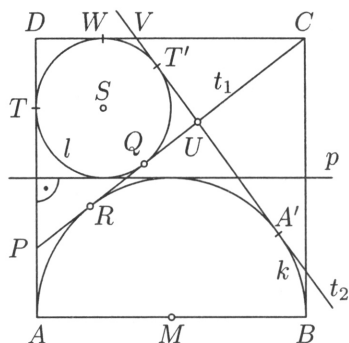
Obr. 14

3. krok, 1. způsob.

Podle 2. kroku víme, že průměr kružnice l je roven poloměru polokružnice k . Proto přímka p (osa úsečky AD) je společnou vnitřní tečnou polokružnice k a kružnice l (obr. 15). Přitom přímka p je kolmá na přímk AD , která je jejich vnější společnou tečnou. V osově souměrnosti podle středné SM obou kružnic je obrazem vnější tečny AD vnější tečna t_2 a obrazem vnitřní tečny p vnitřní tečna t_1 . Jsou tedy navzájem kolmé i tečny t_1 a t_2 .

3. krok, 2. způsob.

Označme V průsečík přímky t_2 se stranou CD . Protože délky obou společných vnějších tečen (pokud je bereme jako úsečky, jejichž krajními body jsou dotykové body) polokružnice k a kružnice l jsou stejné, tj. $|AT| = |A'T'|$, dostáváme na základě shodnosti délek tečen z bodu P



Obr. 15

ke kružnici l a shodnosti délek tečen z bodu U k polokružnici k

$$\begin{aligned}|AT| &= |AP| + |PT| = |AP| + |PQ| = 2|AP| + |RQ|, \\ |A'T'| &= |A'U| + |UT'| = |RU| + |UQ| = |RQ| + 2|UQ|,\end{aligned}$$

což znamená, že $|UQ| = |AP| = \frac{1}{4}$. Dále z rovnosti délek tečen z bodu C k polokružnici k a kružnici l dostáváme $|RQ| = |CR| - |CQ| = |CB| - |CW| = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. To znamená, že $|PU| = \frac{3}{4} = |PD|$, takže čtyřúhelník $PUV D$ je deltoid, a tedy $|\sphericalangle PUV| = |\sphericalangle PDV| = 90^\circ$, tj. přímky t_1 a t_2 jsou navzájem kolmé.

Tím je důkaz hotový.

B – I – 4

Rozeberme nejprve případ a), tedy $n = 2000$. Vyberme tisíc čísel a provedme s nimi danou operaci. Potom vezměme zbylých tisíc čísel a rovněž s nimi provedme danou operaci. Dostaneme tisíc čísel rovných a a tisíc čísel rovných b . Pokud $a = b$, je úloha vyřešena. Pokud $a \neq b$, tak postupně vybírejme číslo rovné a a číslo rovné b a nahraďme je průměrem $\frac{1}{2}(a + b)$. Takto můžeme vybrat 1000 dvojic a všechna čísla nahradit číslem $\frac{1}{2}(a + b)$. Tedy pro $n = 2000$ existuje posloupnost kroků, která převede libovolných 2000 čísel na stejná čísla.

Případ $n = 35$ budeme řešit podobně. Vyberme 7 disjunktních pětic a v každé z nich provedme operaci popsanou výše, přičemž v každé dostaneme stejná čísla. Z každé nově vytvořené pětičky vyberme teď jedno číslo. Dostaneme 7 čísel, s kterými opět provedeme danou operaci. Podobným způsobem vyberme další sedmice a vytvořme odpovídající průměry.

Všechny sedmice budou stejné, neboť v každé pětici máme stejná čísla. Všechna čísla budou tedy stejná. I v tomto případě existuje posloupnost kroků, která převede libovolných 35 čísel na stejná čísla.

Uvažujme $n = 3$. Uvažujme trojici čísel $(1, 1, 2)$. Provádět danou operaci s dvěma jednotkami nemá smysl, takže po prvním kroku, který změní naši trojici, dostaneme čísla $(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Znovu jsme dostali dvě čísla stejná, která se nevyplatí „průměrovat“. Tedy další krok, který změní naši trojici, ji nechá v tvaru $(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2})$. Všimněme si, že po každém kroku je součet čísel stejný. Dokážeme to i v obecném případě: Označme $a_1, a_2, \dots, a_n$ daná čísla. Bez újmy na obecnosti provedme krok s prvními m ($m < n$) čísly. Dostaneme čísla

$$\underbrace{\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m}, \dots, \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m}}_{m\text{-krát}}, a_{m+1}, \dots, a_n.$$

Jejich součet je $m \cdot \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m} + a_{m+1} + \dots + a_n = a_1 + \dots + a_n$.

Tím je uvedené tvrzení dokázáno.

Máme-li tedy dostat z čísel $(1, 1, 2)$ všechna čísla stejná, tak na konci úprav musíme dostat všechna čísla rovná $\frac{2+1+1}{3} = \frac{4}{3}$. Všimněme si, že při postupných krocích se ve jmenovateli čísel objevují jen mocniny čísla 2. Dokážeme to matematickou indukcí.

V prvním kroku to zřejmě platí. Po k krocích máme tři čísla, která mají ve jmenovateli jen mocniny čísla 2. V dalším kroku můžeme vybrat buď jedno číslo, které nám trojici nezmění, anebo dvě čísla. Nahradíme-li je jejich průměrem, budeme zřejmě dělit číslem 2. A znovu dostaneme ve jmenovateli jen mocninu dvojky. V každém kroku dostaneme tedy do jmenovatele jen mocniny dvojky, ale na konci úprav tam máme mít číslo 3, což je spor. Zjistili jsme, že pro $n = 3$ neexistuje pro každou trojici čísel posloupnost kroků, která změní všechna čísla na stejná.

Případ $n = 17$ dokážeme podobně jako případ $n = 3$. Ukázali jsme dříve (pro obecné n), že v každém kroku zůstává zachován součet čísel. Vezměme tedy nějakou 17-tici přirozených čísel, jejíž součet není dělitelný 17. Na konci máme dostat 17-tici stejných čísel rovných $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{17}}{17}$, přičemž tento zlomek je v základním tvaru. V žád-

ném kroku však nedostaneme do jmenovatele číslo 17. Toto tvrzení znovu dokážeme indukcí. První krok je zřejmý. Po k krocích dostaneme 17-tici čísel, v jejichž jmenovateli není číslo 17. Z těchto čísel vezměme $m < 17$

a sečtíme je. Podle indukčního předpokladu dostaneme ve jmenovateli nejmenší společný násobek jmenovatelů vybraných čísel. Ten podle indukčního předpokladu nebude dělitelný 17. Pokud teď tento součet vydělíme číslem $m < 17$, nedostaneme ve jmenovateli číslo dělitelné 17. Tudíž ani po $k + 1$ krocích nedostaneme ve jmenovateli číslo dělitelné 17. Protože na konci musíme dostat čísla, která mají ve jmenovateli 17, dostáváme spor. Pro některé 17-tice přirozených čísel tedy nedokážeme najít posloupnost kroků, která z nich vytvoří stejná čísla.

B – I – 5

Pokud vynásobíme první rovnici neznámou y a druhou neznámou x , dostaneme na levé straně obou rovnic $x^2y^2 - 2xy$. Porovnáním pravých stran máme

$$py = p(2 - p)x. \quad (1)$$

Pokud $p = 0$, vypadá daná soustava takto:

$$\begin{aligned} x^2y - 2x &= 0, \\ y^2x - 2y &= 0, \end{aligned}$$

příčemž po jednoduché úpravě je

$$\begin{aligned} x(xy - 2) &= 0, \\ y(xy - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Vidíme, že soustava má nekonečně mnoho řešení: je jím každá dvojice (x, y) reálných čísel taková, že $xy = 2$. (Kromě těchto dvojic je řešením pouze dvojice $x = y = 0$.)

Pokud $p = 2$, dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} x(xy - 2) &= 2, \\ y(xy - 2) &= 0, \end{aligned}$$

která má jediné řešení $y = 0$, $x = -1$.

Vraťme se teď k rovnici (1), příčemž budeme dále předpokládat, že $p \notin \{0, 2\}$. Rovnici vydělíme číslem p :

$$y = (2 - p)x. \quad (2)$$

Dosazením tohoto vztahu do první z daných rovnic dostáváme ($p \neq 2$) kubickou rovnici

$$(2-p)x^3 - 2x - p = 0. \quad (3)$$

Řešení kubické rovnice obecně není tak jednoduché jako řešení kvadratické rovnice. V našem případě však můžeme uhodnout jeden její kořen $x = -1$. Potom můžeme polynom $(2-p)x^3 - 2x - p$ beze zbytku vydělit kořenovým činitelem $x + 1$. Vydělením dostáváme

$$(2-p)x^3 - 2x - p = (x+1)((2-p)x^2 + (p-2)x - p).$$

Stačí tedy vyřešit kvadratickou rovnici

$$(2-p)x^2 + (p-2)x - p = 0. \quad (4)$$

Uvědomme si, že neznámá y je jednoznačně určena neznámou x pomocí vztahu (2). Má-li tedy mít daná soustava právě tři řešení, musí mít rovnice (3) tři navzájem různá řešení. To znamená, že rovnice (4) musí mít dvě různá řešení, která se navíc nerovnají -1 . Budeme zkoumat, kdy je diskriminant D rovnice (4) kladný. Jednoduchým výpočtem dostáváme

$$D = (p-2)^2 - 4(2-p)(-p) = (2-p)(3p+2).$$

Odtud vidíme, že $D > 0$, právě když $p \in (-\frac{2}{3}, 2)$. Dosazením $x = -1$ snadno vidíme, že rovnice (4) má kořen -1 jen pro $p = \frac{4}{3}$. Rovnice (3) má proto tři různá řešení, právě když $p \in (-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{4}{3}) \cup (\frac{4}{3}, 2)$.

Obráceně, má-li rovnice (3) tři různá řešení, má tři různá řešení i soustava (2), (3), která je však pro $p \neq 0$ a $p \neq 2$ ekvivalentní s danou soustavou.

Odpověď. Daná soustava má v oboru reálných čísel právě tři řešení, právě když $p \in (-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{4}{3}) \cup (\frac{4}{3}, 2)$.

Poznámka. Úlohu je možno řešit více způsoby — například z první rovnice vyjádřit neznámou y pomocí x a to dosadit do druhé rovnice, anebo první rovnici vydělit x a druhou y a získané rovnice odečíst. Oba tyto způsoby opět vedou na kubickou rovnici (3).

B – I – 6

Uvažujme trochu obecnější úlohu. Předpokládejme jen, že trojúhelník MPQ je rovnoramenný se základnou PQ , přičemž $|\sphericalangle PMQ| = \varphi$.

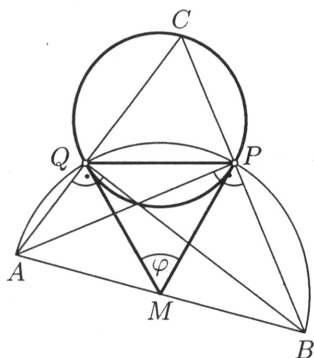
Označme standardně α, β, γ vnitřní úhly trojúhelníku ABC . Body P, Q jsou paty výšek z bodů A, B , takže body A, B, P, Q leží na kružnici se středem M (jde o *Thaletovu kružnici* nad průměrem AB). To znamená, že $|MA| = |MB| = |MP| = |MQ|$, a tedy trojúhelník AMQ (pokud $A \neq Q$) je rovnoramenný; analogicky trojúhelník BMP . Potom platí

$$\begin{aligned} |\sphericalangle AMQ| &= 180^\circ - 2|\sphericalangle MAQ|, \\ |\sphericalangle BMP| &= 180^\circ - 2|\sphericalangle MBP|, \quad |\sphericalangle PCQ| = \gamma. \end{aligned} \quad (1)$$

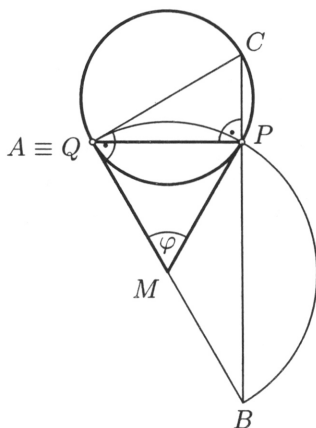
Dále rozeberme několik případů podle toho, zda má být trojúhelník ABC ostroúhlý, pravoúhlý, anebo tupouhlý.

Případ 1. Trojúhelník ABC je ostroúhlý (obr. 16). Zřejmě body M a C leží v opačných polorovinách určených přímkou PQ . Navíc platí $|\sphericalangle MAQ| = \alpha$, $|\sphericalangle MBP| = \beta$ a $|\sphericalangle AMQ| + \varphi + |\sphericalangle BMP| = 180^\circ$, odkud po dosazení (1) dostáváme $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$.

Případ 2. Trojúhelník ABC má při vrcholu A pravý úhel (obr. 17). Zřejmě body M a C leží v opačných polorovinách určených přímkou PQ . Dále $A \equiv Q$ a $|\sphericalangle BMP| = 180^\circ - \varphi$. Z (1) potom vyplývá $\beta = |\sphericalangle MBP| = \frac{1}{2}\varphi$, a tedy $\gamma = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$. Pokud je pravý úhel při vrcholu B , analogicky dostaneme $\gamma = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$.



Obr. 16

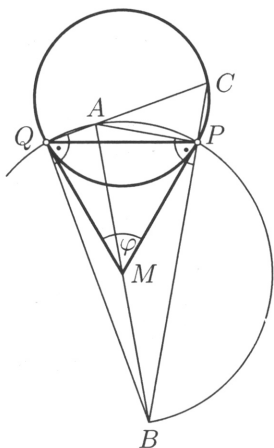


Obr. 17

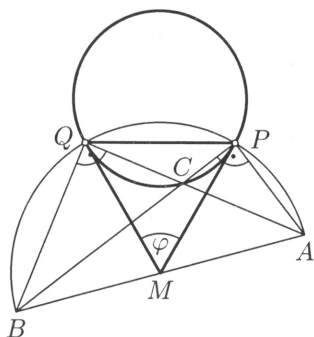
Případ 3. Trojúhelník ABC má při vrcholu A tupý úhel (obr. 18). Zřejmě body M a C leží v opačných polorovinách určených přímkou PQ . Přitom $|\sphericalangle MAQ| = 180^\circ - \alpha$, $|\sphericalangle MBP| = \beta$ a $\varphi - |\sphericalangle AMQ| +$

$+ |\sphericalangle B M P| = 180^\circ$, odkud po dosažení (1) dostáváme $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$. Pokud je tupý úhel při vrcholu B , analogicky dostaneme $\gamma = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$.

Případ 4. Trojúhelník ABC má při vrcholu C tupý úhel (obr. 19). Zřejmě body M a C leží ve stejné polorovině určené přímkou PQ . Dále z pravoúhlých trojúhelníků ABQ a ABP dostáváme $|\sphericalangle MAQ| = \alpha$, $|\sphericalangle MBP| = \beta$ a $|\sphericalangle AMQ| + |\sphericalangle BMP| = 180^\circ + \varphi$. Z (1) potom vyplývá $\gamma = 90^\circ + \frac{1}{2}\varphi$.



Obr. 18



Obr. 19

Zřejmě trojúhelník ABC nemůže mít při vrcholu C pravý úhel, jinak by body C , P , Q splynuly. Celkově jsme tedy dostali, že pokud bod C leží v polorovině opačné k polorovině PQM , je $|\sphericalangle PCQ| = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$, a pokud bod C leží v polorovině PQM , je $|\sphericalangle PCQ| = 90^\circ + \frac{1}{2}\varphi$. Množinou všech takových bodů C je tedy kružnice, označme ji k , nad tětivou PQ s výjimkou bodů P , Q (kde větší oblouk kružnice k je částí množiny všech bodů X takových, že $|\sphericalangle PXQ| = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$).

Obráceně nechť $C \in k \setminus \{P, Q\}$ a MPQ je rovnoramenný trojúhelník se základnou PQ . Potom si snadno uvědomíme, jako bychom sestrojili body A , B . Bod A leží na přímce CQ a na přímce, která je kolmá na CP a prochází bodem P . Analogicky dostaneme bod B . V takovémto trojúhelníku ABC budou body P , Q patami výšek z vrcholů A , B . Stačí tedy dokázat, že M je střed AB . Označme N střed strany AB . Dokážeme, že $M \equiv N$. Označme $\psi = |\sphericalangle PNQ|$. Zřejmě bod N leží v polorovině PQM a je středem kružnice, na které leží body A , B , P , Q , takže trojúhelník

NPQ je rovnoramenný se základnou PQ . Přitom z výše uvedených úvah vyplývá, že pokud bod C leží v polorovině opačné k polorovině PQM , je $\gamma = 90^\circ - \frac{1}{2}\psi$, a pokud bod C leží v polorovině PQM , je $\gamma = 90^\circ + \frac{1}{2}\psi$. To znamená, že $\psi = \varphi$. Navíc oba body M a N leží na ose úsečky PQ . Takže nutně $M \equiv N$, a tedy M je opravdu střed strany AB .

Odpověď. Hledanou množinou všech vrcholů C je kružnice k s výjimkou bodů P , Q . Speciálně pro $\varphi = 60^\circ$ je k kružnice souměrně sdružená s kružnicí opsanou trojúhelníku MPQ podle přímky PQ .

Jiné řešení. Uvažujme znovu obecnější úlohu jako v předcházejícím řešení. Opět si uvědomme, že body A , B , P , Q leží na kružnici se středem M . Vzhledem k tomu, že M je střed úsečky AB , leží aspoň jeden z bodů A , B nutně v polorovině PQM . Bez újmy na obecnosti nechť je to bod B . Potom z věty o obvodových úhlech vyplývá, že $|\sphericalangle QBP| = \frac{1}{2}\varphi$. Dále

$$|\sphericalangle BCQ| = 90^\circ - |\sphericalangle QBC| = 90^\circ - |\sphericalangle QBP| = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}.$$

Pokud $\gamma < 90^\circ$, leží bod C v polorovině opačné k polorovině PQM a platí $\gamma = |\sphericalangle BCQ| = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$. Pokud $\gamma > 90^\circ$, leží bod C v polorovině PQM a platí $\gamma = 180^\circ - |\sphericalangle BCQ| = 90^\circ + \frac{1}{2}\varphi$.

Další postup je už analogický jako v prvním řešení.

Diskusi případů v obou řešeních můžeme částečně obejít. Stačí si uvědomit několik faktů. Pokud V je průsečíkem výšek v trojúhelníku ABC , je bod C průsečíkem výšek v trojúhelníku ABV . Proto trojúhelník ABC má vlastnost ze zadání úlohy, právě když ji má trojúhelník ABC' , kde $C' = V$. Znamená to, že množina vrcholů C všech vyhovujících trojúhelníků je totožná s množinou jejich průsečíků výšek V . Protože body C , V leží vždy v opačných polorovinách určených přímkou PQ a platí $|\sphericalangle PVQ| + |\sphericalangle PCQ| = 180^\circ$, stačí najít množinu vrcholů C jen v jedné ze zmíněných polorovin (jak už víme, je jí kružnicový oblouk), v druhé polorovině touto množinou pak musí být doplněk toho oblouku do celé kružnice.

B – S – 1

Pro kořeny x_1 , x_2 dané kvadratické rovnice (pokud existují) platí podle Viètových vztahů rovnosti

$$x_1 + x_2 = -4p \quad \text{a} \quad x_1 x_2 = 5p^2 + 6p - 16,$$

ze kterých vypočteme zkoumaný součet

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-4p)^2 - 2(5p^2 + 6p - 16) = \\ &= 6p^2 - 12p + 32 = 6(p-1)^2 + 26. \end{aligned}$$

Odtud plyne nerovnost $x_1^2 + x_2^2 \geq 26$, přitom rovnost může nastat, jen když $p = 1$. Zjistíme proto, zda pro $p = 1$ má daná rovnice skutečně dvě různá řešení: jde o rovnici $x^2 + 4x - 5 = 0$ s kořeny $x_1 = -5$ a $x_2 = 1$. Tím je úloha vyřešena.

Dodejme, že většina řešitelů patrně nejprve zjistí, pro která p má daná rovnice dva různé kořeny. Protože pro její diskriminant D platí

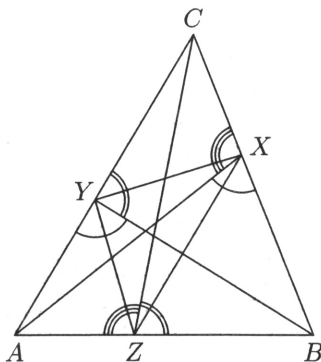
$$D = (4p)^2 - 4(5p^2 + 6p - 16) = -4p^2 - 24p + 64 = -4(p+8)(p-2),$$

jsou taková p právě čísla z intervalu $(-8, 2)$.

Odpověď: Maximální hodnota součtu $x_1^2 + x_2^2$ (rovná 26) odpovídá jedinému číslu $p = 1$.

B – S – 2

V tětiovém čtyřúhelníku $ABXY$ označme $\varphi = |\sphericalangle AXB| = |\sphericalangle AYB|$ velikost obou shodných obvodových úhlů nad společnou tětivou AB (obr. 20). Podobně označme $\psi = |\sphericalangle BZC| = |\sphericalangle BYC|$ a $\omega = |\sphericalangle CXA| =$



Obr. 20

$= |\sphericalangle CZA|$ velikosti shodných obvodových úhlů nad tětivami BC a CA v tětiových čtyřúhelnících $BCYZ$ a $CAZX$. Zapišeme-li postupně rovnosti pro každou ze tří dvojic vyznačených sousedních úhlů ve vrcholech

X, Y a Z , dostaneme pro neznámé velikosti φ, ψ a ω soustavu tří lineárních rovnic

$$\varphi + \psi = \pi,$$

$$\psi + \omega = \pi,$$

$$\omega + \varphi = \pi,$$

která má jediné řešení $\varphi = \psi = \omega = \frac{1}{2}\pi$, jak snadno zjistíme např. odečtením libovolných dvou rovnic a dosazením. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Poznámka. Jsou-li naopak body X, Y a Z paty výšek trojúhelníku ABC , jsou čtyřúhelníky $ABXY, BCYZ$ a $CAZX$ tětiové podle Thaletovy věty.

B – S – 3

Protože pro zvolené číslo k vždy platí $18 \leq k + 17 \leq 34$ a mezi čísly $18, 19, \dots, 34$ má každé z čísel $12, 13, \dots, 17$ pouze jeden násobek (totiž dvojnásobek), libovolné číslo $m \in \{12, 13, \dots, 17\}$ smažeme pouze při volbě jediného čísla k (při kterém $k + 17 = 2m$). Například číslo 15 smažeme pouze volbou $k = 13$, číslo 13 pouze volbou $k = 9$. Ke smazání obou čísel 15 a 13 tedy musíme někdy vybrat $k = 13$ a někdy později $k = 9$. Pak ale v okamžiku výběru čísla $k = 9$ je už smazáno jak číslo 10 (smazali jsme ho nejpozději při výběru $k = 13$), tak číslo 1 (to jsme smazali hned při prvním výběru). Při žádném dalším výběru už proto nesmažeme číslo 9, protože číslo $k + 17$ je dělitelné devíti pouze při výběrech $k = 1$ a $k = 10$. Dokázali jsme, že opakováním dané procedury nelze smazat všechna tři čísla 15, 13 a 9, tím spíše nelze smazat všechna čísla od 1 do 17.

Jiné řešení. Pripusťme, že všechna čísla lze smazat po n výběrech čísla k (spojených s mazáním všech dělitelů čísla $k + 17$) a že každým výběrem se něco umaže (jinak je takový výběr zbytečný). Poslední mj. znamená, že každé číslo je vybráno nejvýše jednou. Zřejmě $n > 1$ a pro poslední vybrané číslo k_n musí platit $k_n | (k_n + 17)$, tj. $k_n = 17$ (možnost $k_n = 1$ je vyloučena tím, že číslo 1 je smazáno hned při prvním výběru). Před posledním výběrem jsou na tabuli jen dělitelé čísla 34, tedy kromě čísla 17 případně číslo 2. Kdyby tam číslo 2 nebylo, muselo by opět platit $k_{n-1} | (k_{n-1} + 17)$, což už možné není. Proto nutně $k_{n-1} = 2$. Taková volba je ale zbytečná, protože číslo 2 + 17 je prvočíslo.

Protože číslo $4n + 3$ je liché, musí být liché i číslo $7n + 5$, takže číslo n musí být sudé: $n = 2k$ pro vhodné celé k .

Požadovanou vlastnost lze vyjádřit takto: rozdíl $D = (7n + 5)^2 - (4n + 3)^2$ je dělitelný číslem 100. S využitím rozkladu

$$D = ((7n + 5) - (4n + 3))((7n + 5) + (4n + 3)) = (3n + 2)(11n + 8)$$

po dosazení $n = 2k$ dostaneme vyjádření $D = 4(3k + 1)(11k + 4)$. Zajímá nás tedy, kdy je součin $(3k + 1)(11k + 4)$ dělitelný číslem 25. Oba činitele $3k + 1$ a $11k + 4$ nemohou být násobky pěti zároveň, protože pro jejich největší společný dělitel vychází

$$\text{nsd}(11k + 4, 3k + 1) = \text{nsd}(3k + 1, 2k + 1) = \text{nsd}(2k + 1, k) = \text{nsd}(k, 1) = 1.$$

Zjistíme proto, kdy platí $25 \mid 3k + 1$ a kdy platí $25 \mid 11k + 4$. Z vyjádření

$$3k + 1 = 3(k - 8) + 25 \quad \text{a} \quad 11k + 4 = 11(k - 11) + 125$$

vidíme, že $25 \mid 3k + 1$, právě když $k = 25t + 8$, zatímco $25 \mid 11k + 4$, právě když $k = 25t + 11$ (písmeno t značí v obou případech celé číslo). Hledaná čísla $n = 2k$ jsou proto čísla tvarů $n = 50t + 16$ a $n = 50t + 22$, v rozmezí od 1 do 99 jsou to tudíž právě čísla 16, 22, 66 a 72.

Jiné řešení. Nejprve zjistíme poslední číslice čísel $(7n + 5)^2$ a $(4n + 3)^2$ v závislosti na poslední číslici čísla n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$7n + 5$	5	2	9	6	3	0	7	4	1	8
$(7n + 5)^2$	5	4	1	6	9	0	9	6	1	4
$4n + 3$	3	7	1	5	9	3	7	1	5	9
$(4n + 3)^2$	9	9	1	5	1	9	9	1	5	1

(Výpočet celé tabulky se zkrátí na polovinu, když si předem jako v předchozím řešení uvědomíme, že n musí být sudé.) Vidíme, že čísla $(7n + 5)^2$ a $(4n + 3)^2$ končí stejnou číslicí, právě když číslo n končí číslicí 2 nebo 6. Každé hledané $n < 100$ je tedy buď tvaru $n = 10a + 2$, nebo tvaru $n = 10a + 6$, kde a je neznámá číslice. I když by stačilo otestovat všech $2 \cdot 10 = 20$ takových čísel n , zvolíme jiný postup.

(i) Pro $n = 10a + 2$ platí

$$\begin{aligned}(7n + 5)^2 &= (70a + 19)^2 = 4\,900a^2 + 2\,660a + 361, \\ (4n + 3)^2 &= (40a + 11)^2 = 1\,600a^2 + 880a + 121.\end{aligned}$$

Vidíme, že číslo $(7n + 5)^2$ má na místě desítek stejnou číslici, jakou má číslo $6a + 6$ na místě jednotek; číslo $(4n + 3)^2$ zase má na místě desítek stejnou číslici, jakou má číslo $8a + 2$ na místě jednotek. Hledáme tedy číslice a , pro které rozdíl $(8a + 2) - (6a + 6) = 2(a - 2)$ končí číslicí nula; zřejmě to platí pouze pro $a = 2$ a $a = 7$, kterým odpovídají řešení $n = 22$ a $n = 72$.

(ii) Pro $n = 10a + 6$ platí

$$\begin{aligned}(7n + 5)^2 &= (70a + 47)^2 = 4\,900a^2 + 6\,580a + 2\,209 \\ (4n + 3)^2 &= (40a + 27)^2 = 1\,600a^2 + 2\,160a + 729.\end{aligned}$$

Tentokrát jsou počty desítek v těchto číslech stejné jako počty jednotek v číslech $8a$ a $6a + 2$. Rozdíl $8a - (6a + 2) = 2(a - 1)$ končí číslicí nula jedině pro $a = 1$ a $a = 6$. Odpovídající řešení jsou $n = 16$ a $n = 66$.

B – II – 2

Protože pro libovolná reálná čísla x , y jsou obě čísla $(x^2 + 1)$ a $(y^2 + 1)$ nenulová (totiž kladná), můžeme přejít k novým neznámým

$$u = \frac{x}{x^2 + 1} \quad \text{a} \quad v = \frac{y}{y^2 + 1},$$

ve kterých má zřejmě původní soustava rovnic tvar

$$1 + 24uv = 0 \quad \text{a} \quad 12u + 12v + 1 = 0.$$

Odtud například pro neznámou u snadno dostaneme kvadratickou rovnici

$$24u^2 + 2u - 1 = 0$$

s kořeny $u_1 = \frac{1}{6}$ a $u_2 = -\frac{1}{4}$, kterým „symetricky“ odpovídají hodnoty $v_1 = -\frac{1}{4}$ a $v_2 = \frac{1}{6}$. Protože (kvadratické) rovnice

$$\frac{s}{s^2 + 1} = \frac{1}{6} \quad \text{a} \quad \frac{t}{t^2 + 1} = -\frac{1}{4}$$

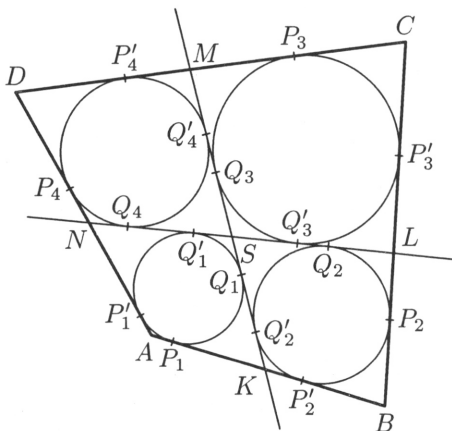
mají řešení

$$s_{1,2} = 3 \pm \sqrt{8} \quad \text{a} \quad t_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3},$$

má původní soustava právě osm řešení, a to dvojice tvaru $(x, y) = (3 \pm \sqrt{8}, -2 \pm \sqrt{3})$ a $(x, y) = (-2 \pm \sqrt{3}, 3 \pm \sqrt{8})$, kde znaménka jsou kombinována libovolně.

B – II – 3

Předpokládejme, že zmíněným čtyřem čtyřúhelníkům lze vepsat kružnice. Body dotyků těchto kružnic s příslušnými stranami čtyřúhelníků označme



Obr. 21

jako na obr. 21. Ze souměrnosti tečen sestrojených z jednoho bodu k téže kružnici plynou rovnosti

$$|AP_1| = |AP'_1|, |BP_2| = |BP'_2|, |CP_3| = |CP'_3|, |DP_4| = |DP'_4| \quad (1)$$

a

$$|SQ_1| = |SQ'_1|, |SQ_2| = |SQ'_2|, |SQ_3| = |SQ'_3|, |SQ_4| = |SQ'_4|. \quad (2)$$

Ze souměrnosti společných vnějších tečen dvou kružnic zase plynou rovnosti

$$\begin{aligned} |P_1P'_2| &= |Q'_1Q_2|, |P_2P'_3| = |Q'_2Q_3|, \\ |P_3P'_4| &= |Q'_3Q_4|, |P_4P'_1| = |Q'_4Q_1|. \end{aligned} \quad (3)$$

Podle známé poučky lze konvexnímu čtyřúhelníku $ABCD$ vepsat kružnici, právě když délky jeho stran splňují podmínku

$$|AB| + |CD| = |BC| + |DA|,$$

kterou lze s ohledem na (1) upravit do tvaru

$$|P_1P'_2| + |P_3P'_4| = |P_2P'_3| + |P_4P'_1|. \quad (4)$$

Všimněme si, že podle (2) a (3) platí rovnosti

$$|P_1P'_2| = |Q'_1Q_2| = |Q'_1S| + |SQ_2| = |SQ_1| + |SQ_2|,$$

$$|P_2P'_3| = |Q'_2Q_3| = |Q'_2S| + |SQ_3| = |SQ_2| + |SQ_3|,$$

$$|P_3P'_4| = |Q'_3Q_4| = |Q'_3S| + |SQ_4| = |SQ_3| + |SQ_4|,$$

$$|P_4P'_1| = |Q'_4Q_1| = |Q'_4S| + |SQ_1| = |SQ_4| + |SQ_1|.$$

Obě strany (4) se tudíž rovnají součtu $|SQ_1| + |SQ_2| + |SQ_3| + |SQ_4|$ a důkaz je hotov.

B – II – 4

Poznamenejme nejdříve, že popsanou operaci nemá smysl provádět s dvojicí čísel (a, b) obsahující číslo nulu, neboť taková dvojice se operací nemění.

(i) Předpokládejme nejdříve, že danou skupinu n nezáporných čísel lze rozdělit na dvě podskupiny A a B se stejným součtem čísel. Ukažme, že v tomto případě lze opakováním operace změnit všechna čísla obou skupin A a B na nuly. Obsahuje-li některá ze skupin A , B aspoň jedno kladné číslo (jinak jsme hotovi), plyne z rovnosti součtů čísel v obou skupinách, že kladné číslo existuje v obou z nich. Vyberme tedy kladné číslo $a \in A$ a kladné číslo $b \in B$ a provedme operaci právě s těmito dvěma čísly. Je-li například $a \leq b$ (v případě $a \geq b$ je úvaha obdobná), změní se číslo a ve skupině A na nulu a číslo b ve skupině B na číslo $b - a$, takže se celkový součet čísel ve skupině A zmenší o a , stejně jako celkový součet čísel ve skupině B . Proto budou po provedené operaci součty čísel ve skupinách A a B opět stejné, přitom se celkový počet nul v $A \cup B$ zvětší o 1 (pokud bylo $a \neq b$) nebo o 2 (pokud bylo $a = b$). Opakováním popsané operace s kladnými čísly $a \in A$ a $b \in B$ se proto po konečném počtu kroků dostaneme do situace, kdy v žádné ze skupin A , B již nebude kladné číslo.

(ii) Předpokládejme nyní, že z dané n -tice nezáporných čísel jsme dostali vhodným opakováním operace n -tici složenou ze samých nul. Dokažme indukcí, že před provedením každé jednotlivé operace bylo možné aktuální n -tici čísel rozdělit na dvě podskupiny A a B se stejným součtem. Před provedením *poslední* operace musela mít aktuální n -tice čísel tvar $\{a, a, 0, 0, \dots, 0\}$, takže vhodné rozdělení bylo $A = \{a\}$ a $B = \{a, 0, 0, \dots, 0\}$. Předpokládejme nyní, že *po provedení* některé operace s čísly (a, b) , $a \leq b$, existovalo rozdělení čísel do podskupin A a B se stejným součtem, a ukažme, že i *před provedením* této operace takové rozdělení existovalo. Jistě můžeme předpokládat, že nová čísla 0 a $b - a$ nepatří do stejné z obou podskupin A a B (jinak přehodíme číslo 0 do druhé podskupiny, což nezmění součty čísel v podskupinách), nechť tedy například $0 \in A$ a $b - a \in B$. Potom číslo 0 v A zaměníme číslem a a číslo $b - a$ v B zaměníme číslem b ; dostaneme tak vhodné rozdělení aktuálních čísel před uvažovanou operací.

Kategorie A

Texty úloh

A – I – 1

Je-li S obsah trojúhelníku o stranách a, b, c a T obsah trojúhelníku o stranách $a + b, b + c, c + a$, pak platí $T \geq 4S$. Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost. (P. Kaňovský)

A – I – 2

V oboru celých čísel x, y řešte rovnici

$$(x_5)^2 + (y^4)_5 = 2xy^2 + 51,$$

kde n_5 značí násobek pěti nejblíží k číslu n , například $(-9)_5 = -10$. (P. Černek)

A – I – 3

V daném trojúhelníku ABC protíná osa úhlu ACB stranu AB v bodě K a kružnici opsanou v bodě L ($L \neq C$). Označme V střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC , S střed kružnice opsané trojúhelníku KBV a Z průsečík přímek AB a SL . Dokažte, že přímka SK je tečnou kružnice opsané trojúhelníku KLZ . (J. Földes)

A – I – 4

Nechť $n \geq 2$ je dané přirozené číslo. Pro které hodnoty reálného parametru p má soustava rovnic

$$\begin{aligned}x_1^4 + \frac{2}{x_1^2} &= px_2, \\x_2^4 + \frac{2}{x_2^2} &= px_3, \\&\dots\dots\dots \\x_{n-1}^4 + \frac{2}{x_{n-1}^2} &= px_n, \\x_n^4 + \frac{2}{x_n^2} &= px_1\end{aligned}$$

alespoň dvě řešení v oboru reálných čísel? (J. Švrček)

A – I – 5

Najděte všechny mnohočleny $P(x)$ s reálnými koeficienty, které pro každé reálné číslo x splňují rovnost

$$(x+1)P(x-1) + (x-1)P(x+1) = 2xP(x).$$

(E. Kováč)

A – I – 6

Najděte všechny čtyřstěny, které mají síť tvaru deltoidu a právě čtyři hrany dané délky a . (Deltoidem rozumíme konvexní čtyřúhelník souměrný podle *jediné* ze svých úhlopříček; nepatří k nim tedy ani čtverec, ani kosočtverec.) (P. Leischner)

A – S – 1

V oboru celých čísel x řešte rovnici

$$3(x^2)_5 + (3x)_5 = (3x-2)(x+2),$$

kde n_5 značí násobek pěti nejblíže číslu n , např. $(-3)_5 = -5$.

(J. Šimša)

A – S – 2

Označme S střed kružnice vepsané danému trojúhelníku ABC a P, Q paty kolmic z vrcholu C k přímkám, na kterých leží osy vnitřních úhlů BAC a ABC . Dokažte, že přímký AB a PQ jsou rovnoběžné.

(J. Švrček)

A – S – 3

Zjistěte, pro která reálná čísla p má soustava rovnic

$$x^2 + 1 = (p + 1)x + py - z,$$

$$y^2 + 1 = (p + 1)y + pz - x,$$

$$z^2 + 1 = (p + 1)z + px - y$$

s neznámými x, y, z právě jedno řešení v oboru reálných čísel.

(E. Kováč)

A – II – 1

Dokažte, že pro libovolná čísla $\alpha, \beta \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$ platí nerovnost

$$\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \beta} \geq 2\sqrt{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}.$$

Zjistěte rovněž, kdy nastane rovnost.

(E. Kováč)

A – II – 2

Najděte všechny dvojice přirozených čísel x a y , pro které platí

$$x^2 = 4y + 3 \cdot n(x, y),$$

kde $n(x, y)$ značí nejmenší společný násobek čísel x a y . (P. Černek)

A – II – 3

Do kružnice k je vepsán čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčka BD není průměrem. Dokažte, že průsečík přímek, jež se kružnice k dotýkají v bodech B a D , leží na přímce AC , právě když platí $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$.

(E. Kováč)

A – II – 4

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 - 1 = p(y + z),$$

$$y^2 - 1 = p(z + x),$$

$$z^2 - 1 = p(x + y)$$

s neznámými x, y, z a parametrem p . Proveďte diskusi počtu řešení.

(E. Kováč)

A – III – 1

V oboru celých čísel řešte soustavu rovnic

$$(4x)_5 + 7y = 14,$$

$$(2y)_5 - (3x)_7 = 74,$$

kde $(n)_k$ značí násobek čísla k nejbližší číslu n .

(P. Černek)

A – III – 2

Uvažujme libovolný rovnostranný trojúhelník KLM , jehož vrcholy K, L a M leží po řadě na stranách AB, BC a CD daného čtverce $ABCD$. Najděte množinu středů stran KL všech takových trojúhelníků KLM .

(J. Zhouf)

A – III – 3

Dokažte, že přirozené číslo A je druhou mocninou některého přirozeného čísla, právě když pro každé přirozené n je aspoň jeden z rozdílů

$$(A + 1)^2 - A, (A + 2)^2 - A, (A + 3)^2 - A, \dots, (A + n)^2 - A$$

dělitelný číslem n .

(P. Kaňovský)

A – III – 4

Najděte všechny dvojice reálných čísel a, b , pro které má rovnice

$$\frac{ax^2 - 24x + b}{x^2 - 1} = x$$

v oboru reálných čísel právě dvě řešení, přičemž jejich součet je 12.

(P. Černek)

A – III – 5

V rovině je dán trojúhelník KLM a bod A ležící na polopřímce opačné k polopřímce KL . Sestrojte pravoúhelník $ABCD$, jehož vrcholy B , C a D leží po řadě na přímkách KM , KL a LM . (P. Calábek)

A – III – 6

Nechť $\mathbb{R}^+$ značí množinu všech kladných reálných čísel. Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ splňující pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$ rovnost

$$f(xf(y)) = f(xy) + x.$$

(P. Kaňovský)

Řešení úloh

A – I – 1

Vyjádření obsahu S obecného trojúhelníku z délek jeho stran a, b, c je dáno Heronovým vzorcem

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \text{kde} \quad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Bez označení s pro poloviční obvod je zápis Heronova vzorce poněkud delší:

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}. \quad (1)$$

Udělejme malou odbočku a všimněme si, jak Heronův vzorec nepřímo „testuje“ známé nerovnosti, které zaručují existenci trojúhelníku: Čísla a, b, c jsou délkami stran některého trojúhelníku, právě když všichni činitelé pod odmocninou ve vzorci (1) jsou kladní.

Podle vzorce (1) je obsah T trojúhelníku o stranách $a+b, b+c, c+a$ roven

$$T = \frac{1}{4} \sqrt{(2a+2b+2c)(2c)(2a)(2c)} = \sqrt{abc(a+b+c)}.$$

Dokazovanou nerovnost $T \geq 4S$ tudíž rozepíšeme jako

$$\sqrt{abc(a+b+c)} \geq \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)};$$

v ekvivalentní nerovnosti mezi odmocňovanými výrazy zkrátíme činitel $(a+b+c)$ a dostaneme tak nerovnost

$$abc \geq (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c), \quad (2)$$

kterou nyní (pro strany a, b, c obecného trojúhelníku) několika způsoby dokážeme.

Při prvním z nich využijeme zřejmých nerovností

$$\begin{aligned} a^2 &\geq a^2 - (b-c)^2 = (a-b+c)(a+b-c), \\ b^2 &\geq b^2 - (c-a)^2 = (b-c+a)(b+c-a), \\ c^2 &\geq c^2 - (a-b)^2 = (c-a+b)(c+a-b). \end{aligned} \quad (3)$$

Protože jde o tři nerovnosti mezi kladnými výrazy, součin jejich levých stran není menší než součin jejich pravých stran:

$$a^2b^2c^2 \geq (b+c-a)^2(a+c-b)^2(a+b-c)^2,$$

odkud po odmocnění dostaneme nerovnost (2). Tím je nerovnost $T \geq 4S$ dokázána. Z našeho postupu rovněž plyne, že rovnost $T = 4S$ nastane, právě když budou splněny současně tři rovnosti

$$a^2 = a^2 - (b-c)^2, \quad b^2 = b^2 - (c-a)^2, \quad c^2 = c^2 - (a-b)^2,$$

tj. právě když bude platit $a = b = c$ (případ rovnostranného trojúhelníku).

Poznamenejme, že důkazu (2) jsme dosáhli vynásobením tří analogických nerovností (3). První z nich po odmocnění obou stran získá tvar nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (kladných) čísel $u = a + b - c$ a $v = a - b + c$:

$$a = \frac{(a+b-c) + (a-b+c)}{2} \geq \sqrt{(a+b-c)(a-b+c)},$$

Využít takovou AG-nerovnost vás možná napadne, když dokazovanou nerovnost (2) přepíšete z původních proměnných a, b, c do nových proměnných

$$u = a + b - c > 0, \quad v = a - b + c > 0, \quad w = -a + b + c > 0.$$

Protože $a = \frac{1}{2}(u+v)$, $b = \frac{1}{2}(u+w)$ a $z = \frac{1}{2}(v+w)$, přejde nerovnost (2) v nerovnost

$$(u+v)(u+w)(v+w) \geq 8uvw \quad (2')$$

a souvislost s AG-nerovnostmi

$$\frac{u+v}{2} \geq \sqrt{uv}, \quad \frac{u+w}{2} \geq \sqrt{uw}, \quad \frac{v+w}{2} \geq \sqrt{vw}$$

je nasnadě. Dokázat transformovanou nerovnost (2') můžeme ovšem i užitím jediné AG-nerovnosti: po roznásobení levé strany (2') a zřejmé úpravě dostaneme

$$\frac{u^2v + u^2w + v^2u + v^2w + w^2u + w^2v}{6} \geq uvw,$$

což je AG -nerovnost pro skupinu šesti členů

$$u^2v, u^2w, v^2u, v^2w, w^2u, w^2v,$$

neboť jejich geometrický průměr je roven

$$\sqrt[6]{u^2v \cdot u^2w \cdot v^2u \cdot v^2w \cdot w^2u \cdot w^2v} = uvw.$$

Na závěr uvedme ještě jeden algebraický důkaz nerovnosti (2). S ohledem na symetrii předpokládejme, že $a \leq \min\{b, c\}$, položíme $x = b - a \geq 0$, $y = c - a \geq 0$ a přepíšme nerovnost (2) jako nerovnost pro mnohočlen proměnné a s koeficienty závislými na x a y :

$$\begin{aligned} abc - (b + c - a)(a + c - b)(a + b - c) &= \\ &= a(a + x)(a + y) - (a + x + y)(a + y - x)(a + x - y) = \\ &= a[a^2 + a(x + y) + xy] - [a + (x + y)][a^2 - (x - y)^2] = \\ &= [a^3 + a^2(x + y) + axy] - \\ &\quad - [a^3 + a^2(x + y) - a(x - y)^2 - (x + y)(x - y)^2] = \\ &= a[xy + (x - y)^2] + (x + y)(x - y)^2. \end{aligned}$$

Poslední výraz je (vzhledem k tomu, že $a > 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$) zřejmě nezáporný, přičemž nule se rovná, právě když platí $xy = 0$ a $x - y = 0$, neboli $x = y = 0$.

A - I - 2

Nechť dvojice celých čísel x, y vyhovuje dané rovnici. Protože součet $(x_5)^2 + (y^4)_5$ je dělitelný pěti, dává číslo $2xy^2$ při dělení pěti zbytek 4, tj. $5 \mid (2xy^2 - 4)$. Číslo y proto není dělitelné pěti, takže platí buď $y = 5k \pm 1$, nebo $y = 5k \pm 2$, kde $5k = y_5$. Obě možnosti teď posoudíme odděleně.

Případ $y = 5k \pm 1$. Protože $y^2 = 25k^2 \pm 10k + 1$, platí $5 \mid (y^2 - 1)$, a proto z podmínky $5 \mid (2xy^2 - 4)$ plyne $5 \mid (2x - 4) = 2(x - 2)$, tedy $x = 5n + 2$, kde $5n = x_5$. Z podmínky $5 \mid (y^2 - 1)$ plyne rovněž $5 \mid (y^4 - 1)$, neboli $(y^4)_5 = y^4 - 1$, tudíž daná rovnice získává tvar

$$(5n)^2 + (y^4 - 1) = 2 \cdot (5n + 2) \cdot y^2 + 51.$$

Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}(y^4 - 10ny^2 + 25n^2) - 4y^2 &= 52, \\ (y^2 - 5n)^2 - 4y^2 &= 52, \\ (y^2 - 5n - 2y)(y^2 - 5n + 2y) &= 52.\end{aligned}\tag{1}$$

Na levé straně poslední rovnice je součin dvou celých čísel lišících se o $4y$, tedy o násobek čtyř; protože $52 = 2^2 \cdot 13$, stojí na levé straně (1) součin čísel 2 a 26, nebo součin čísel -2 a -26 . Tak či onak platí $|4y| = 26 - 2 = 24$, odkud $y = \pm 6$, takže *menší* z obou činitelů v (1) je roven $6^2 - 5n - 12 = 24 - 5n$. Zatímco rovnice $24 - 5n = 2$ žádné celočíselné řešení n nemá, rovnice $24 - 5n = -26$ má řešení $n = 10$, kterému odpovídá $x = 5 \cdot 10 + 2 = 52$. Podmínku $y = 5k \pm 1$ tedy splňují právě dvě řešení dané rovnice: $(x, y) = (52, 6)$ a $(x, y) = (52, -6)$.

Případ $y = 5k \pm 2$. Protože $y^2 = 25k^2 \pm 20k + 4$, platí $5 \mid (y^2 + 1)$, a proto z podmínky $5 \mid (2xy^2 - 4)$ plyne $5 \mid (-2x - 4) = -2(x + 2)$, tedy $x = 5n - 2$, kde $5n = x_5$. Z podmínky $5 \mid (y^2 + 1)$ plyne rovněž $5 \mid (y^4 - 1)$, neboli $(y^4)_5 = y^4 - 1$, tudíž daná rovnice získává tvar

$$(5n)^2 + (y^4 - 1) = 2 \cdot (5n - 2) \cdot y^2 + 51.$$

Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}(y^4 - 10ny^2 + 25n^2) + 4y^2 &= 52, \\ (y^2 - 5n)^2 + 4y^2 &= 52.\end{aligned}\tag{2}$$

Oba sčítanci v levé straně poslední rovnice jsou nezáporní, takže nepřevyšují číslo 52 z pravé strany. Z nerovnosti $4y^2 \leq 52$ plyne $y^2 \leq 13$, což s ohledem na podmínku $y = 5k \pm 2$ znamená, že buď $y = \pm 2$, nebo $y = \pm 3$. Je-li $y = \pm 2$, je rovnice (2) splněna, právě když $(4 - 5n)^2 = 36$, což nastane pro jediné celé číslo $n = 2$, kterému odpovídá $x = 5 \cdot 2 - 2 = 8$. Je-li $y = \pm 3$, přejde (2) v rovnici $(9 - 5n)^2 = 16$ s jediným celočíselným kořenem $n = 1$, kterému odpovídá $x = 5 \cdot 1 - 2 = 3$. Podmínku $y = 5k \pm 2$ tedy splňují právě čtyři řešení (x, y) dané rovnice: dvojice $(8, 2)$, $(8, -2)$, $(3, 3)$ a $(3, -3)$.

Odpověď. Daná rovnice má v oboru celých čísel celkem šest řešení (x, y) : dvojice $(52, 6)$, $(52, -6)$, $(8, 2)$, $(8, -2)$, $(3, 3)$ a $(3, -3)$.¹

¹ Doporučujeme provést zkoušku, i když není nutnou součástí takto podaného řešení.

Poznámka. Pro každé celé z je číslo z_5 rovno jednomu z čísel $z - 2$, $z - 1$, z , $z + 1$ nebo $z + 2$ (tomu z nich, které je násobkem pěti). Danou úlohu by bylo možné proto řešit tak, že bychom danou rovnici posoudili v jednotlivých případech $x = 5n + r$ a $y = 5k + q$, kde čísla r a q probíhají (navzájem nezávisle) množinu $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Taková diskuse by ovšem byla zdlouhavá, výše podané řešení je jejím promyšleným zkrácením.

Uvědomme si, že při našem postupu jsme nejdříve vyloučili případ $q = 0$ a poté jsme již rozlišili pouze případy $q = \pm 1$ a $q = \pm 2$. Bylo to umožněno tím, že číslo y^2 má při dělení pěti zbytek nezávislý na znaménku čísla q a že podle tohoto zbytku lze z dané rovnice jednoznačně určit obdobný zbytek čísla x , tedy hodnotu r .

Poslední „trik“, který jsme při řešení uplatnili, spočíval v tom, že jsme do dané rovnice nedosazovali vyjádření $y = 5k \pm 1$ resp. $y = 5k \pm 2$, čímž se nám poněkud zjednodušil zápis příslušných rovnic (1) a (2). Dodejme ještě, že algebraické úpravy dané rovnice vedoucí k rovnicím (1) a (2) patří při řešení rovnic v oboru celých čísel k těm nejobvyklejším postupům.

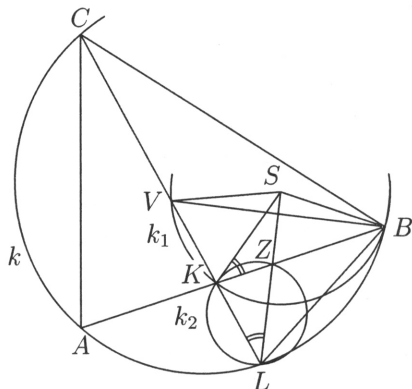
A – I – 3

Kružnice opsané trojúhelníkům ABC , KBV a KLZ označme po řadě k , k_1 a k_2 (obr. 22). Naší úlohou je dokázat, že přímka SK je tečnou kružnice k_2 ; k tomu stačí vysvětlit, proč jsou shodné úhly SKZ a KLZ , vyznačené na obr. 22 obloučky. Kromě toho ovšem musíme zdůvodnit, proč body L a S vždy leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou AB (jak je tomu v případě našeho obrázku).

Střed V kružnice vepsané je vždy vnitřním bodem trojúhelníku ABC , neboť je průsečíkem os jeho vnitřních úhlů. Proto je bod V vnitřním bodem úsečky CK , zatímco bod L leží na jejím prodloužení za bod K . Body V a L proto leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou AB . Označíme-li jako obvykle α , β , γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC , má trojúhelník BCV u vrcholů B a C vnitřní úhly velikostí $\frac{1}{2}\beta$ a $\frac{1}{2}\gamma$, takže pro jeho vnější úhel při vrcholu V platí

$$|\sphericalangle BVK| = \frac{\beta + \gamma}{2} < 90^\circ.$$

Úhel BVK je tudíž ostrý, a proto střed S kružnice k_1 leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou BK jako bod V , což spolu s předchozím tvrzením o poloze bodů V a L znamená, že body L a S skutečně leží



Obr. 22

v opačných polorovinách s hraniční přímkou AB , jak jsme potřebovali ověřit. Podle věty o obvodových a středových úhlech v kružnici k_1 platí

$$|\sphericalangle BSK| = 2|\sphericalangle BVK| = \beta + \gamma,$$

z rovnoramenného trojúhelníku BKS tudíž plyne

$$|\sphericalangle SKZ| = |\sphericalangle SKB| = \frac{1}{2}(180^\circ - |\sphericalangle BSK|) = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta - \gamma) = \frac{1}{2}\alpha.$$

Zbývá nám proto dokázat, že také úhel KLZ má velikost $\frac{1}{2}\alpha$. Provedeme to dvěma nezávislými postupy.

Při prvním z nich nejprve určíme velikost úhlu LBV . Protože $|\sphericalangle LBA| = |\sphericalangle LCA| = \frac{1}{2}\gamma$ (obvodové úhly v kružnici k) a $|\sphericalangle ABV| = \frac{1}{2}\beta$, vzhledem k vzájemné poloze úseček LV a AB můžeme psát

$$|\sphericalangle LBV| = |\sphericalangle LBA| + |\sphericalangle ABV| = \frac{1}{2}(\beta + \gamma).$$

Již dříve jsme zjistili, že takovou velikost má i úhel BVK (neboli úhel BVL), a tak je trojúhelník BVL rovnoramenný: $|BL| = |VL|$. Zároveň ovšem platí $|BS| = |VS|$, takže oba body L a S leží na ose úsečky BV (čtyřúhelník $BLVS$ je tedy deltoid, případně kosočtverec nebo čtverec). Odtud plyne, že úsečky BV a SL jsou navzájem kolmé, úhel KLZ je proto doplňkový k úhlu BVK :

$$|\sphericalangle KLZ| = 90^\circ - |\sphericalangle BVK| = 90^\circ - \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = \frac{1}{2}\alpha.$$

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Při druhém způsobu určení velikosti úhlu KLZ si nejdříve všimneme, že platí $|\sphericalangle BLK| = |\sphericalangle BLC| = |\sphericalangle BAC| = \alpha$ (obvodové úhly v kružnici k), což spolu s dříve odvozenou rovností $|\sphericalangle BSK| = \beta + \gamma$ znamená, že ve čtyřúhelníku $BLKS$ je součet vnitřních úhlů u protějších vrcholů L a S roven 180° , jedná se proto o čtyřúhelník, kterému lze opsat kružnici. V ní jsou KBS a KLS shodné obvodové úhly nad tětivou KS , a proto platí

$$|\sphericalangle KLZ| = |\sphericalangle KLS| = |\sphericalangle KBS| = \frac{1}{2}\alpha$$

(připomínáme, že BKS je rovnoramenný trojúhelník s úhly $\frac{1}{2}\alpha$ při základně BK).

A – I – 4

Protože daná soustava je velmi složitá a patrně neexistuje postup, jak v konečném algebraickém tvaru vyjádřit všechna její řešení, budeme jednak přemýšlet o podmínkách řešitelnosti této soustavy, jednak hledat některá její speciální řešení.

Všimněme si nejdříve, že daná soustava nemá žádné řešení pro hodnotu $p = 0$, protože hodnoty levých stran rovnic jsou kladná čísla. Také druhé zjištění, které nyní uvedeme, je zřejmé: n -tice čísel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je řešením dané soustavy s hodnotou parametru p , právě když n -tice opačných čísel $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ je řešením dané soustavy s opačnou hodnotou parametru $-p$. Hodnoty levých i pravých stran všech rovnic soustavy se totiž při změně všech hodnot $x_i \mapsto -x_i$ a $p \mapsto -p$ nezmění, protože pro libovolná $x \neq 0$ a p platí

$$(-x)^4 + \frac{2}{(-x)^2} = x^4 + \frac{2}{x^2} \quad \text{a} \quad (-p)(-x) = px.$$

Daná soustava s hodnotou parametru p má tedy právě tolik řešení, kolik jich má daná soustava s hodnotou parametru $-p$. Budeme proto hledat pouze všechna *kladná* čísla p , pro která má daná soustava aspoň dvě řešení (a v odpovědi k nim připojíme všechna opačná čísla $-p$).

Až do závěru řešení budeme tedy uvažovat jen kladné hodnoty parametru p dané soustavy. Z kladnosti jejích levých stran plyne, že také všechny pravé strany px_i musí být kladné, a proto (s ohledem na předpoklad $p > 0$) musí platit $x_i > 0$ pro každé i . Libovolné řešení $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dané soustavy je tedy sestaveno z n kladných čísel.

Předpokládejme nyní, že pro dané $p > 0$ nějaké řešení $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dané soustavy existuje, a všech n rovnic mezi sebou vynásobme. Pro

kladná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ tak dostaneme rovnost

$$\left(x_1^4 + \frac{2}{x_1^2}\right) \left(x_2^4 + \frac{2}{x_2^2}\right) \dots \left(x_n^4 + \frac{2}{x_n^2}\right) = p^n x_1 x_2 \dots x_n. \quad (1)$$

Každý činitel na levé straně odhadneme zdola podle známé nerovnosti

$$u + v \geq 2\sqrt{uv},$$

která platí pro libovolná kladná čísla u a v , přičemž rovnost nastane, právě když $u = v$ (je to v podstatě nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem čísel u a v , plynoucí snadno ze zřejmé nerovnosti $(\sqrt{u} - \sqrt{v})^2 \geq 0$). Proto pro každý index i platí

$$x_i^4 + \frac{2}{x_i^2} \geq 2\sqrt{x_i^4 \cdot \frac{2}{x_i^2}} = |x_i| \cdot 2\sqrt{2} = x_i \cdot 2\sqrt{2}. \quad (2)$$

Důsledkem rovnosti (1) je tudíž nerovnost

$$(x_1 2\sqrt{2})(x_2 2\sqrt{2}) \dots (x_n 2\sqrt{2}) \leq p^n x_1 x_2 \dots x_n, \quad (3)$$

ze které po krácení (kladným) součinem $x_1 x_2 \dots x_n$ dostaneme podmínku na číslo p ve tvaru

$$p^n \geq (2\sqrt{2})^n, \quad \text{neboli} \quad p \geq 2\sqrt{2}.$$

Zformulujme, co jsme právě zjistili: *má-li daná soustava pro pevné $p > 0$ alespoň jedno řešení, pak pro toto číslo p platí odhad $p \geq 2\sqrt{2}$.*

Pro „krajní“ hodnotu $p = 2\sqrt{2}$ nyní danou soustavu úplně vyřešíme, tj. najdeme *všechna* její řešení. Je-li $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ libovolné řešení dané soustavy s hodnotou $p = 2\sqrt{2}$, pak podle úvah z předchozího odstavce nastane v nerovnosti (3) rovnost, což je možné jedině tak, že rovnosti nastanou ve všech násobených nerovnostech (2). Proto tehdy pro každý index i platí

$$x_i^4 = \frac{2}{x_i^2}, \quad \text{neboli} \quad x_i^6 = 2, \quad \text{tj.} \quad x_i = \sqrt[6]{2}.$$

Pro hodnotu $p = 2\sqrt{2}$ má tedy daná soustava *jediné* (!) řešení

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\sqrt[6]{2}, \sqrt[6]{2}, \dots, \sqrt[6]{2}).$$

Z výsledků předchozích dvou odstavců plyne: *má-li daná soustava pro pevné $p > 0$ alespoň dvě řešení, pak pro toto číslo p platí ostrá nerovnost $p > 2\sqrt{2}$.* Najdeme-li proto dvě řešení dané soustavy s libovolnou hodnotou parametru $p > 2\sqrt{2}$, budeme znát odpověď na otázku ze zadání úlohy. Zmíněná dvě řešení budeme hledat mezi n -ticemi $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ složenými z n stejných čísel; taková n -tice $(x, x, \dots, x)$ je zřejmě řešením dané soustavy, právě když je číslo x řešením (jediné) rovnice

$$x^4 + \frac{2}{x^2} = px, \quad \text{neboli} \quad x^6 - px^3 + 2 = 0.$$

Poslední rovnice je kvadratická vzhledem k neznámé $y = x^3$ a má v oboru reálných čísel y dvě různá řešení

$$y_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 8}}{2}$$

pro každou z námi uvažovaných hodnot $p > 2\sqrt{2}$, neboť pro ně platí $p^2 - 8 > 0$. Pro každé takové p má tedy původní soustava dvě řešení

$$(x_1, \dots, x_n) = (\sqrt[3]{y_1}, \dots, \sqrt[3]{y_1}) \quad \text{a} \quad (x_1, \dots, x_n) = (\sqrt[3]{y_2}, \dots, \sqrt[3]{y_2}).$$

(Nevylučujeme, že kromě těchto řešení tehdy existují i řešení jiná, totiž taková, že $x_i \neq x_j$ pro některá $i \neq j$.)

Odpověď. Všechny hledané hodnoty p tvoří množinu $(-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; \infty)$.

A – I – 5

Dvěma odlišnými postupy ukážeme, že vyhovující mnohočleny jsou právě mnohočleny tvaru $P(x) = ax^3 - ax + d$, kde a a d jsou libovolná reálná čísla. Při prvním postupu uplatníme metodu, která je užitečná i při řešení mnoha jiných úloh o mnohočlenech; říká se jí *metoda neurčitých koeficientů*. Jako obvykle budeme členy mnohočlenů zapisovat v sestupném pořadí podle mocnin proměnné x ; pomocí prvních koeficientů hledaného mnohočlenu

$$P(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + dx^{n-3} + \dots \quad (1)$$

vyjádříme první koeficienty obou stran dané rovnice a pak je porovnáme. Zápisem (1) jsme naznačili, že budeme skutečně počítat s prvními

čtyřmi koeficienty mnohočlenu $P(x)$. Ukáže se totiž, že výpočty s *menším počtem* koeficientů k vyřešení úlohy nestačí. Abychom pro mnohočleny stupně nejvýše 3 nemuseli provádět další samostatné výpočty, nebudeme prozatím předpokládat, že koeficient a u mocniny x^n v zápisu (1) je různý od nuly.

Najdeme nejdříve první členy mnohočlenu $P(x-1)$:

$$\begin{aligned} P(x-1) &= a(x-1)^n + b(x-1)^{n-1} + c(x-1)^{n-2} + d(x-1)^{n-3} + \dots = \\ &= a\left(x^n - \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} - \binom{n}{3}x^{n-3} + \dots\right) + \\ &\quad + b\left(x^{n-1} - \binom{n-1}{1}x^{n-2} + \binom{n-1}{2}x^{n-3} - \dots\right) + \\ &\quad + c\left(x^{n-2} - \binom{n-2}{1}x^{n-3} + \dots\right) + d\left(x^{n-3} - \dots\right) + \dots = \\ &= ax^n + \left[-\binom{n}{1}a + b\right]x^{n-1} + \left[\binom{n}{2}a - \binom{n-1}{1}b + c\right]x^{n-2} + \\ &\quad + \left[-\binom{n}{3}a + \binom{n-1}{2}b - \binom{n-2}{1}c + d\right]x^{n-3} + \dots \end{aligned}$$

Obdobným výpočtem zjistíme, že

$$\begin{aligned} P(x+1) &= ax^n + \left[\binom{n}{1}a + b\right]x^{n-1} + \left[\binom{n}{2}a + \binom{n-1}{1}b + c\right]x^{n-2} + \\ &\quad + \left[\binom{n}{3}a + \binom{n-1}{2}b + \binom{n-2}{1}c + d\right]x^{n-3} + \dots \end{aligned}$$

Nyní můžeme určit první členy mnohočlenu $(x+1)P(x-1) + (x-1)P(x+1)$, totiž členy s mocninami x^{n+1} , x^n , x^{n-1} a x^{n-2} (vypsali jsme je předem, abychom při následujícím výpočtu zbytečně nevypisovali členy s nižšími mocninami x):

$$\begin{aligned} (x+1)P(x-1) + (x-1)P(x+1) &= \\ &= xP(x-1) + P(x-1) + xP(x+1) - P(x+1) = \\ &= ax^{n+1} + \left[-\binom{n}{1}a + b\right]x^n + \left[\binom{n}{2}a - \binom{n-1}{1}b + c\right]x^{n-1} + \\ &\quad + \left[-\binom{n}{3}a + \binom{n-1}{2}b - \binom{n-2}{1}c + d\right]x^{n-2} + \dots + \\ &\quad + ax^n + \left[-\binom{n}{1}a + b\right]x^{n-1} + \left[\binom{n}{2}a - \binom{n-1}{1}b + c\right]x^{n-2} + \dots + \\ &\quad + ax^{n+1} + \left[\binom{n}{1}a + b\right]x^n + \left[\binom{n}{2}a + \binom{n-1}{1}b + c\right]x^{n-1} + \\ &\quad + \left[\binom{n}{3}a + \binom{n-1}{2}b + \binom{n-2}{1}c + d\right]x^{n-2} + \dots - \\ &\quad - ax^n - \left[\binom{n}{1}a + b\right]x^{n-1} - \left[\binom{n}{2}a + \binom{n-1}{1}b + c\right]x^{n-2} - \dots = \\ &= 2ax^{n+1} + 2bx^n + \left[2\binom{n}{2}a - 2\binom{n}{1}a + 2c\right]x^{n-1} + \\ &\quad + \left[2\binom{n-1}{2}b - 2\binom{n-1}{1}b + 2d\right]x^{n-2} + \dots \end{aligned}$$

Našli jsme první členy levé strany dané rovnice. Vypsat první členy její pravé strany je snadné:

$$2xP(x) = 2ax^{n+1} + 2bx^n + 2cx^{n-1} + 2dx^{n-2} + \dots$$

Vidíme, že první dva členové levé strany se shodují s prvními dvěma členy pravé strany, ať je mnohočlen $P(x)$ vybrán jakkoliv. Třetí a čtvrté členy se již obecně neshodují a jejich rovnosti jsou vyjádřeny podmínkami

$$2\binom{n}{2}a - 2\binom{n}{1}a + 2c = 2c \quad \text{a} \quad 2\binom{n-1}{2}b - 2\binom{n-1}{1}b + 2d = 2d,$$

ze kterých po rozeepsání kombinačních čísel dostaneme rovnice tvaru $n(n-3)a = 0$ a $(n-1)(n-4)b = 0$.² V případě $n > 3$ tedy musí platit $a = 0$, což znamená, že se můžeme omezit pouze na případ $n = 3$. Tehdy je první rovnice splněna pro každé $a \in \mathbb{R}$, zatímco z druhé rovnice pak plyne $b = 0$. Hledaný mnohočlen $P(x)$ je proto nutně tvaru

$$P(x) = ax^3 + cx + d \tag{2}$$

a po dosazení libovolného takového mnohočlenu do obou stran dané rovnice dostaneme dva mnohočleny, které se shodují v prvních členech s mocninami x^4 , x^3 , x^2 a x^1 . Zbývá tedy porovnat poslední (absolutní) členy obou mnohočlenů

$$(x+1)P(x-1) + (x-1)P(x+1) \quad \text{a} \quad 2xP(x).$$

Místo algebraického výpočtu využijeme obvyklý obrat, který je založen na tomto zřejmém tvrzení: *absolutní člen mnohočlenu p je jeho hodnota $p(0)$ v bodě 0.* V našem případě proto zjistíme, kdy platí rovnost $P(-1) - P(1) = 0 \cdot P(0)$, tedy podle (2)

$$(-a - c + d) - (a + c + d) = 0.$$

Je to zřejmě právě tehdy, když $c = -a$. Proto jsou řešeními úlohy právě mnohočleny tvaru $P(x) = ax^3 - ax + d$, kde a, d jsou libovolná reálná čísla.

Jiné řešení. Využijeme postup, který se používá při řešení funkcionálních rovnic. Získáváme při něm významné informace o neznámých funkcích tak, že do rovnic, které hledané funkce splňují, opakovaně *dosazujeme vhodně vybrané hodnoty* proměnných.³ Nechť je tedy P libovolný

² Všimněte si, že rovnice pro koeficient b se liší od rovnice pro koeficient a pouze tím, že je v ní číslo n zaměněno číslem $n-1$. Koeficient b totiž převezme roli „vedoucího“ koeficientu a , když v zápise (1) vynecháme první člen součtu (čímž snížíme stupeň n o jedničku).

³ To jsme ostatně učinili již v závěru „algebraického“ řešení, kdy k určení absolutního členu jsme do mnohočlenu dosadili hodnotu $x = 0$.

mnohočlen splňující v proměnné $x \in \mathbb{R}$ danou rovnici. Dosadíme-li do ní nejprve hodnotu $x = 1$ a pak hodnotu $x = -1$, dostaneme rovnosti

$$2 \cdot P(0) + 0 \cdot P(2) = 2 \cdot P(1) \quad \text{a} \quad 0 \cdot P(-2) - 2 \cdot P(0) = -2 \cdot P(-1),$$

ze kterých plyne, že $P(1) = P(0) = P(-1)$. Označíme-li proto $P(0) = d$, má rovnice $P(x) = d$ kořeny $x = 0$, $x = 1$ a $x = -1$. Existuje tudíž mnohočlen $Q(x)$ takový, že $P(x) = x(x-1)(x+1)Q(x) + d$. Toto vyjádření dosadíme do dané rovnice, abychom zjistili, jaké podmínky musí splňovat mnohočlen $Q(x)$ a koeficient d :

$$\begin{aligned} (x+1)x(x-1)(x-2)Q(x-1) + d(x+1) + \\ + (x-1)(x+1)x(x+2)Q(x+1) + d(x-1) = \\ = 2x^2(x-1)(x+1)Q(x) + 2dx. \end{aligned}$$

Členy s koeficientem d se v poslední rovnici navzájem zruší a zbylé členy je možné zkrátit společným činitelem $x(x-1)(x+1)$. Získáme tak rovnici

$$(x-2)Q(x-1) + (x+2)Q(x+1) = 2xQ(x) \quad (3)$$

pro neznámý mnohočlen $Q(x)$. Ze způsobu odvození plyne, že rovnice (3) platí pro každé $x \in \mathbb{R}$, které je různé od 0, 1 a -1 ; protože však obě strany (3) jsou mnohočleny proměnné x , které mají stejnou hodnotu pro nekonečně mnoho čísel x , musí jít o mnohočleny totožné, a proto rovnost (3) platí i pro $x \in \{0, 1, -1\}$.

Protože $a(x-2) + a(x+2) = 2ax$, rovnici (3) splňuje každý konstantní mnohočlen $Q(x) = a$. Původní rovnici proto vyhovuje každý mnohočlen

$$P(x) = x(x-1)(x+1)a + d = ax^3 - ax + d \quad (a, d \in \mathbb{R}).$$

Jiné vyhovující mnohočleny $P(x)$ neexistují, pokud ukážeme, že *každý mnohočlen $Q(x)$ splňující rovnici (3) je konstantní*. Nechť je tedy $Q(x)$ libovolný takový mnohočlen; označme $Q(2) = a$ a dosadíme do rovnice (3) hodnotu $x = 2$. Dostaneme

$$0 \cdot Q(1) + 4Q(3) = 4Q(2), \quad \text{odkud} \quad Q(3) = Q(2) = a.$$

Nyní volbou $x = 3$ v rovnici (3) získáme rovnost

$$Q(2) + 5Q(4) = 6Q(3), \quad \text{odkud} \quad Q(4) = \frac{6Q(3) - Q(2)}{5} = \frac{6a - a}{5} = a.$$

Dále volbou $x = 4$ zjistíme, že $Q(5) = a$, atd. Dokažme proto indukcí, že $Q(n) = a$ pro každé celé $n \geq 2$. Platí-li pro nějaké n rovnosti $Q(n) = Q(n+1) = a$ (jak je tomu pro $n = 2$), pak volbou $x = n+1$ v rovnici (3) dostaneme

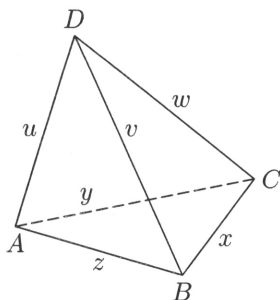
$$\begin{aligned} Q(n+2) &= \frac{2(n+1)Q(n+1) - (n-1)Q(n)}{n+3} = \\ &= \frac{2(n+1)a - (n-1)a}{n+3} = a. \end{aligned}$$

Důkaz indukcí je hotov. Zjistili jsme, že rovnost $Q(x) = a$ platí pro nekonečně mnoho čísel x , což je možné, jedině když $Q(x) = a$ pro každé x (kdyby byl Q mnohočlen některého stupně $N > 0$, měla by rovnice $Q(x) = a$ nejvýše N kořenů). Celé řešení je tím ukončeno.

A – I – 6

V první (podstatnější) části řešení najdeme všechny čtyřstěny, které mají síť tvaru deltoidu; poté již poměrně snadno zjistíme, které z nalezených čtyřstěnů mají právě čtyři shodné hrany.

Uvažujme proto libovolný čtyřstěn $ABCD$ a popišme délky jeho hran písmeny x, y, z, u, v, w podle obr. 23. Všechny síť čtyřstěnu $ABCD$ rozdělíme do dvou skupin. Do první z nich zařadíme ty síť, v nichž některá stěna čtyřstěnu sousedí s třemi ostatními stěnami; do druhé skupiny budou patřit ostatní síť, v nichž každá stěna sousedí s nejvýše dvěma stěnami. Protože jsme označení vrcholů čtyřstěnu předem nijak neupřesnili, budeme dále uvažovat jen po jedné síti z každé z obou skupin, totiž síť znázorněné na obr. 24 a 25. Zabývejme se každou z nich samostatně.

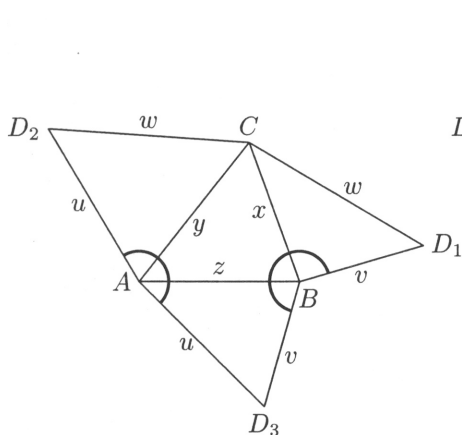


Obr. 23

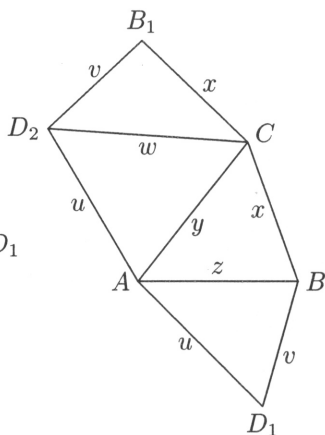
Síť na obr. 24 je (obecně vzato) šestiúhelníkem $AD_3BD_1CD_2$, o čtyřúhelník půjde jedině tehdy, když dva z jeho úhlů u vrcholů A, B, C budou přímé (tj. budou mít velikost 180°). Je totiž jasné, že přímý úhel nemůže být u žádného z vrcholů D_1, D_2, D_3 . S ohledem na již zmíněnou libovůli značení předpokládejme, že přímé jsou úhly D_2AD_3 a D_3BD_1 (vyznačené na obr. 24). Naše síť je tehdy čtyřúhelníkem $D_2D_3D_1C$, jehož strany mají (v pořadí, v jakém za sebou cyklicky následují) délky $2u, 2v,$

w a w . Je-li tento čtyřúhelník deltoid (a ne kosočtverec), musí zřejmě platit $u = v$ a $2u \neq w$ (obr. 26a). Z osově souměrnosti podle přímky D_3C pak zjišťujeme, že platí $y = x$; čtyřstěn s „deltoidní“ sítí z obr. 26a vidíte na obr. 26b. Je to čtyřstěn souměrný podle roviny souměrnosti hrany AB . Dodejme, že kromě nerovnosti $2u \neq w$ musí platit rovněž nerovnost $z < w$, která plyne z vlastnosti střední příčky AB trojúhelníku $D_1D_2D_3$ a trojúhelníkové nerovnosti pro rovnoramenný trojúhelník CD_1D_2 :

$$2z = 2|AB| = |D_1D_2| < |D_1C| + |D_2C| = 2w.$$



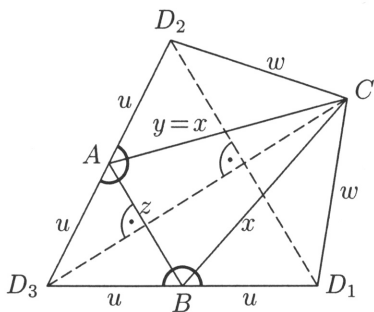
Obr. 24



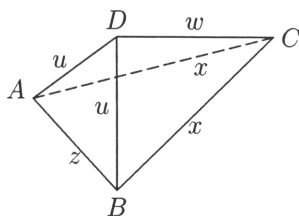
Obr. 25

Síť z obr. 25 je (obecně vzato) šestiúhelníkem $AD_1BCB_1D_2$, o čtyřúhelník půjde jen v těch případech, kdy právě dva z jeho úhlů při vrcholech A, B, C, D_2 budou přímé (takové totiž nemohou být úhly při vrcholech D_1 a B_1). S ohledem na libovůli značení stačí uvažovat jen tři následující případy.

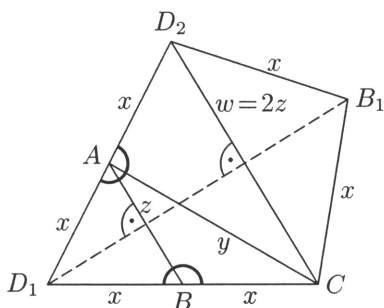
- Přímé úhly u vrcholů A a D_2 .* Síť je čtyřúhelník B_1D_1BC , jehož strany mají v pořadí délky $2u + v, v, x, x$. Zřejmě nejde o deltoid, neboť $2u + v \neq v$.
- Přímé úhly u vrcholů A a C .* Síť je čtyřúhelník $D_2D_1BB_1$, jehož strany mají v pořadí délky $2u, v, 2x, v$. Protože dvojice protějších stran má tutéž délku v , nejde o deltoid.
- Přímé úhly u vrcholů A a B .* Síť je čtyřúhelník $D_2D_1CB_1$, jehož strany mají v pořadí délky $2u, x + v, x, v$. Jde-li o deltoid, pak s ohledem na



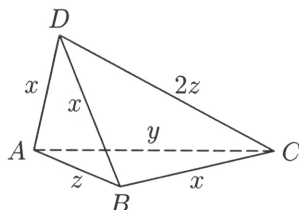
Obr. 26a



Obr. 26b



Obr. 27a

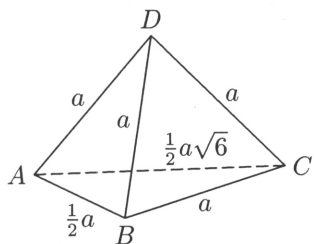


Obr. 27b

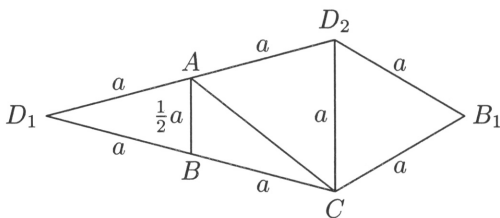
nerovnost $x + v > x$ musí platit $2u = x + v$ a $x = v$, tedy $x = u = v$. V trojúhelníku D_2D_1C je úsečka AB střední příčkou (obr. 27a), takže platí $w = |D_2C| = 2|AB| = 2z$. Příslušný čtyřstěn vidíte na obr. 27b.

Shrňme výsledky našich dosavadních úvah: Pouze dva typy čtyřstěnů (obr. 26b a 27b) mají síť tvaru deltoidu. Naším úkolem je nyní zjistit, kdy tyto čtyřstěny mají právě čtyři shodné hrany (dané délky a). Zabývejme se nejdříve čtyřstěnem z obr. 26b, jehož hrany mají délky x, x, z, u, u, w . Předpokládejme tedy, že právě čtyři z nich jsou rovny a , které to jsou? Předně musí platit $x = a$, jinak by muselo platit $a = z = u = w$, což je ale ve sporu s nerovností $z < w$, odvozenou výše. Protože jsou vyloučeny i rovnosti $z = u$ a $u = w$ (v obou případech by délku a mělo pět hran čtyřstěnu $ABCD$), musí platit $u = a$. V případě $x = u$ je ovšem čtyřúhelník AD_3BC kosočtverec; z rovnoběžnosti přímek AC a D_3B plyne rovnost souhlasných úhlů CAD_2 a BD_3A . Rovnoramenné trojúhelníky CAD_2 a BD_3A jsou tehdy shodné podle věty *sus*, takže $|D_2C| = |AB|$,

neboli $z = w$, což je opět spor.⁴ Žádný čtyřstěn z obr. 26b proto není řešením naší úlohy. Přejdeme nyní k druhému typu čtyřstěnu a předpokládejme, že právě čtyři z hran některého čtyřstěnu $ABCD$ z obr. 27b mají délku a . Protože tři jeho hrany mají délku x , musí platit $x = a$; která (jediná) z ostatních délek $y, z, 2z$ je rovna a ? V síti na obr. 27a z trojúhelníku B_1CD_2 plyne $x + x > 2z$, tedy $x > z$. V téže síti má trojúhelník ABC tupý vnitřní úhel u vrcholu B , neboť jeho vnější úhel ABD_1 je vnitřním úhlem při základně AB rovnoramenného trojúhelníku ABD_1 , takže je nutně ostrý. Proto je nejdelší stranou trojúhelníku ABC strana AC , což zapíšeme takto: $y > \max\{x, z\}$. Dohromady dostáváme $y > x > z$, s ohledem na rovnost $x = a$ proto nezbyvá, než aby platilo $2z = a$. Nalezenými podmínkami je již čtyřstěn $ABCD$ jednoznačně (až na shodnost) určen. Délku y poslední hrany AC vypočteme jako těžnici ke straně D_1D_2 trojúhelníku CD_1D_2 o stranách $2a, 2a, a$. Vyjde nám $y = \frac{1}{2}a\sqrt{6}$. Řešením naší úlohy je jediný čtyřstěn z obr. 28a, jeho síť tvaru deltoidu je na obr. 28b.



Obr. 28a



Obr. 28b

Odpověď. Hledaný čtyřstěn je jediný: jeho tři hrany délky a vycházejí z jednoho vrcholu, hrany protilehlé stěny mají délku $a, \frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a\sqrt{6}$. Jedna ze sítí tohoto čtyřstěnu má tvar deltoidu o stranách $a, a, 2a, 2a$.⁵

A – S – 1

Podle zbytku při dělení čísla x číslem 5 můžeme rozlišit pět případů:

(i) $x = 5k$, (ii) $x = 5k + 1$, (iii) $x = 5k + 2$, (iv) $x = 5k + 3$ a (v) $x = 5k + 4$

⁴ V případě $w = z$ má „deltoidní“ síť z obr. 26a přímý úhel u vrcholu C , takže nejde o deltoid, ale o trojúhelník.

⁵ Doporučujeme řešitelům, aby takový deltoid vystřihli z papíru a pak model čtyřstěnu složili.

(k značí libovolné celé číslo). Protože ale levá strana rovnice je zřejmě násobkem pěti pro každé celé x , musí být násobkem pěti aspoň jeden z činitelů $3x - 2$, $x + 2$ pravé strany. Číslo $3x - 2$ je dělitelné pěti pouze pro $x = 5k + 4$, číslo $x + 2$ pouze pro $x = 5k + 3$. Proto stačí rozebrat případy (iv) a (v) (L značí levou a P pravou stranu dané rovnice):

(iv) Pro $x = 5k + 3$ platí $x^2 = 25k^2 + 30k + 9$, $(x^2)_5 = 25k^2 + 30k + 10$, $3x = 15k + 9$, $(3x)_5 = 15k + 10$, $L = 75k^2 + 105k + 40$ a $P = 75k^2 + 110k + 35$, takže z $L = P$ vychází $k = 1$, čemuž odpovídá $x = 5 + 3 = 8$.

(v) Pro $x = 5k + 4$ platí $x^2 = 25k^2 + 40k + 16$, $(x^2)_5 = 25k^2 + 40k + 15$, $3x = 15k + 12$, $(3x)_5 = 15k + 10$, $L = 75k^2 + 135k + 55$ a $P = 75k^2 + 140k + 60$, takže z $L = P$ vychází $k = -1$, čemuž odpovídá $x = -5 + 4 = -1$.

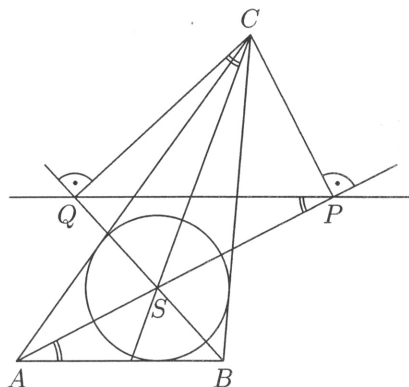
Odpověď: Daná rovnice má právě dvě celočíselná řešení, a to $x = -1$ a $x = 8$.

A – S – 2

Označme jako obvykle α , β , γ vnitřní úhly trojúhelníku ABC . Protože platí (obr. 29)

$$|\sphericalangle ASC| = 180^\circ - |\sphericalangle SAC| - |\sphericalangle SCA| = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\beta}{2},$$

je úhel ASC tupý, takže bod P leží na polopřímce opačné k polopřímce SA . Obdobně zdůvodníme, že bod Q leží na polopřímce opačné k polopřímce SB . Přímky AB a PQ jsou rovnoběžné, právě když střídavé



Obr. 29

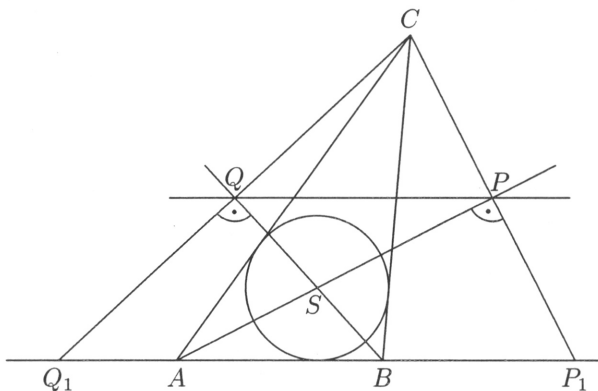
úhly BAP a APQ jsou shodné. Vzhledem k tomu, že $|\sphericalangle BAP| = \frac{\alpha}{2}$

a $|\sphericalangle APQ| = |\sphericalangle SPQ|$, stačí ukázat, že $|\sphericalangle SPQ| = \frac{\alpha}{2}$. Protože body P a Q leží na Thaletově kružnici nad průměrem CS , je úhel SPQ shodný s úhlem SCQ (obvodové úhly nad tětivou SQ zmíněné kružnice). Velikost úhlu SCQ snadno vyjádříme z trojúhelníků BCS a BCQ :

$$|\sphericalangle SCQ| = |\sphericalangle BCQ| - |\sphericalangle BCS| = \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2},$$

což jsme potřebovali ukázat.

Jiné řešení. Označme P_1 , Q_1 odpovídající průsečíky polopřímek CP a CQ s přímkou AB (obr. 30, pořadí bodů A , S , P a bodů B , S , Q na obou osách bylo vysvětleno v prvním řešení). Výška AP trojúhelníku P_1CA leží na ose AS jeho vnitřního úhlu P_1AC , takže jde o rovnoramenný trojúhelník, který má základnu P_1C se středem P . Obdobně pomocí rovnoramenného trojúhelníku Q_1CB zdůvodníme, že bod Q je středem úsečky Q_1C . Úsečka PQ je tedy střední příčkou trojúhelníku P_1Q_1C , takže je rovnoběžná s přímkou AB .



Obr. 30

A – S – 3

Všimněme si, že rovnice dané soustavy se mezi sebou liší jen cyklickou záměnou neznámých x , y a z . Má-li proto soustava za řešení

trojici čísel $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$, jsou jejími řešeními rovněž trojice $(x, y, z) = (y_0, z_0, x_0)$ a trojice $(x, y, z) = (z_0, x_0, y_0)$. Je-li řešení soustavy (při pevném p) jediné, musí být uvedené trojice shodné, musí tedy platit $x_0 = y_0 = z_0$. Trojice (x_0, x_0, x_0) je zřejmě řešení dané soustavy, právě když je číslo $x = x_0$ řešením rovnice $x^2 + 1 = 2px$. Pro každé hledané p proto musí mít poslední rovnice jediné řešení, takže její diskriminant $D = 4p^2 - 4$ musí být nulový. Odtud vychází, že nutně $p = \pm 1$.

Nyní ukážeme, že pro $p = 1$ je $x = y = z = 1$ skutečně jediné řešení původní soustavy tří rovnic a že totéž platí i v případě $p = -1$ o jejím řešení $x = y = z = -1$. Porovnáme-li součet levých stran se součtem pravých stran soustavy, zjistíme, že její libovolné řešení (x, y, z) splňuje též rovnici

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 = 2p(x + y + z),$$

ze které úpravou dostaneme

$$(x - p)^2 + (y - p)^2 + (z - p)^2 = 3(p^2 - 1). \quad (1)$$

Pro obě hodnoty $p = \pm 1$ platí ovšem $p^2 - 1 = 0$, takže tehdy se součet nezáporných čísel $(x - p)^2$, $(y - p)^2$ a $(z - p)^2$ rovná nule. To je možné, jediné když $x = y = z = p$.

Odpověď: Hledané hodnoty p jsou dvě: $p = 1$ a $p = -1$.

Jiné řešení. Stejně jako v prvním řešení získáme sečtením tří daných rovnic rovnici (1). Z ní vyplývá tento závěr: má-li soustava při daném p aspoň jedno řešení (x, y, z) v oboru reálných čísel, pak platí nerovnost $p^2 \geq 1$, neboli $|p| \geq 1$. Je-li ovšem $|p| > 1$, můžeme snadno vypsát dvě různá řešení zkoumané soustavy, totiž trojice (x_1, x_1, x_1) a (x_2, x_2, x_2) , kde $x_{1,2}$ jsou kořeny rovnice $x^2 + 1 = 2px$ (jejíž diskriminant je díky předpokladu $|p| > 1$ kladný). Proto nám zbývá posoudit pouze hodnoty $p = \pm 1$, pro které však z rovnice (1) okamžitě plyne: má-li původní soustava vůbec nějaké řešení, je jím trojice $(x, y, z) = (p, p, p)$. Triviální zkouška dosazením ukazuje, že jde skutečně o řešení (pro $p = 1$ jakož i pro $p = -1$).

A – II – 1

Protože pro libovolná $\alpha, \beta \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$ platí

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \leq \frac{1}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad (1)$$

stačí místo nerovnosti ze zadání úlohy dokázat nerovnost

$$\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \beta} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\cos \alpha \cos \beta}}. \quad (2)$$

To je ale snadné, neboť po převedení odmocniny z pravé strany na levou dostaneme po úpravě „na čtverec“ zřejmou nerovnost

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\cos \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \beta}} \right)^2 \geq 0. \quad (2')$$

Tím je celý důkaz hotov. Dodejme, že nerovnost (2) též plyne z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (kladných) čísel

$$\frac{1}{\cos \alpha} \text{ a } \frac{1}{\cos \beta}.$$

Rovnost v dokázané nerovnosti nastane, právě když nastanou rovnosti v obou nerovnostech (1) a (2'). To lze zřejmě vyjádřit podmínkami

$$\sin(\alpha + \beta) = 1 \quad \text{a} \quad \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \beta},$$

které jsou pro nějaká $\alpha, \beta \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$ splněny, právě když $\alpha + \beta = \frac{1}{2}\pi$ a $\alpha = \beta$, neboli $\alpha = \beta = \frac{1}{4}\pi$.

A – II – 2

Protože číslo x je dělitelem obou čísel $n(x, y)$ a x^2 , plyne z dané rovnice, že číslo x také dělí číslo $4y$. Číslo $4y$ je tedy společný násobek čísel x a y , takže jejich *nejmenší* společný násobek $n(x, y)$ je dělitelem čísla $4y$ (a zároveň násobkem čísla y). Číslo $n(x, y)$ je tudíž rovno jednomu z čísel $y, 2y$ nebo $4y$. Tyto tři případy, jež se pro přirozené y navzájem vylučují, nyní posoudíme odděleně.

(i) $n(x, y) = y$. Platí $y = kx$ pro vhodné přirozené k . Dosazením do rovnice dostaneme $x^2 = 4kx + 3kx$, odkud $x = 7k$, a proto $y = 7k^2$. Protože $n(7k, 7k^2) = 7k^2$ pro každé k , je odpovídající dvojice $(x, y) = (7k, 7k^2)$ skutečně řešení.

(ii) $n(x, y) = 2y$. Platí $2y = kx$ pro vhodné liché k (pro k sudé dostaneme, že x dělí y , což je případ (i)). Dosazením do rovnice dostaneme $x^2 = 2kx + 3kx$, odkud $x = 5k$, a proto $2y = 5k^2$. To je spor s tím, že k je liché.

(iii) $n(x, y) = 4y$. Platí $4y = kx$ pro vhodné liché k (pro k sudé dostaneme, že x dělí y nebo $2y$, což vede na případ (i) nebo (ii)). Dosazením do rovnice dostaneme $x^2 = kx + 3kx$, odkud $x = 4k$, a proto $y = k^2$. Protože $n(4k, k^2) = 4k^2$ pro každé liché k , je odpovídající dvojice $(x, y) = (4k, k^2)$ skutečně řešení.

Odpověď: Hledaných dvojic (x, y) je nekonečně mnoho; jsou to jednak dvojice $(7k, 7k^2)$, kde k je libovolné přirozené číslo, jednak dvojice $(4k, k^2)$, kde k je libovolné liché přirozené číslo.

Jiné řešení. Označme d největší společný dělitel hledaných čísel x a y . Potom $x = dx_1$ a $y = dy_1$, kde x_1 a y_1 jsou nesoudělná přirozená čísla, a $n(x, y) = dx_1y_1$. Po dosazení do dané rovnice dostaneme $d^2x_1^2 = 4dy_1 + 3dx_1y_1$, což po krácení číslem d přepíšeme do tvaru

$$x_1(dx_1 - 3y_1) = 4y_1. \quad (1)$$

Přirozené číslo $4y_1$ je tedy násobkem čísla x_1 . Čísla x_1 a y_1 jsou ale nesoudělná, tudíž číslo x_1 je dělitelem čísla 4, a proto $x_1 \in \{1, 2, 4\}$.

Je-li $x_1 = 1$, pak z (1) vychází $d = 7y_1$, takže $x = dx_1 = 7y_1$ a $y = dy_1 = 7y_1^2$. Dvojice čísel $x = 7k$ a $y = 7k^2$ je řešením původní rovnice pro každé k .

Je-li $x_1 = 2$, pak podle (1) platí $2d = 5y_1$, takže číslo y_1 je sudé stejně jako číslo x_1 , což odporuje jejich předpokládané nesoudělnosti.

Je-li $x_1 = 4$, pak z (1) vychází $d = y_1$, takže $x = dx_1 = 4d$ a $y = dy_1 = d^2$. Čísla $x_1 = 4$ a $y_1 = d$ jsou ovšem nesoudělná, jenom když je d liché číslo. Pro každé takové d je dvojice $x = 4d$ a $y = d^2$ řešením původní rovnice.

A – II – 3

Protože úsečka BD není průměrem kružnice k , její tečny v bodech B a D nejsou rovnoběžné, takže se protínají v bodě, který označíme G .

(i) Předpokládejme, že bod G leží na přímkce AC , například na polopřímce opačné k CA (obr. 31). (Leží-li bod G na polopřímce opačné k AC , vyměníme označení vrcholů A a C , které nic nemění na rovnosti, kterou máme dokázat.) Trojúhelníky ABG a BCG se shodují jak ve vnitřních úhlech u společného vrcholu G , tak ve vnitřních úhlech BAG a CBG (podle věty o obvodovém a úsekovém úhlu pro tětivu BC kružnice k). Proto jsou tyto trojúhelníky podobné, tudíž platí $|AB| : |BC| = |GB| : |GC|$. Analogická úměra $|AD| : |CD| = |GD| : |GC|$ plyne z podobných

stejně polorovinně s hraniční přímkou BD), tudíž body A a A' splývají. Bod G proto leží na přímce AC .

A – II – 4

Odečtením prvních dvou rovnic soustavy dostaneme

$$x^2 - y^2 = p(y - x), \quad \text{neboli} \quad (x - y)(x + y + p) = 0.$$

Odtud plyne, že aspoň jeden z činitelů $(x - y)$ a $(x + y + p)$ je roven nule, takže číslo y je rovno x nebo $-p - x$. Obdobně odečtením první a třetí rovnice soustavy zjistíme, že rovněž $z \in \{x, -p - x\}$. Dohromady to znamená, že každé řešení (x, y, z) dané soustavy je (až na pořadí) trojice tvaru (u, u, u) nebo $(u, u, -p - u)$.

(i) Trojice (u, u, u) je řešením, právě když číslo u splňuje rovnici $u^2 - 1 = 2pu$. Její úpravou dostaneme $(u - p)^2 = p^2 + 1$, odkud je vidět, že pro každé reálné p existují dvě různá čísla u a jsou rovna $p \pm \sqrt{p^2 + 1}$. Jim odpovídají první dvě řešení původní soustavy

$$x_1 = y_1 = z_1 = p + \sqrt{p^2 + 1} \quad \text{a} \quad x_2 = y_2 = z_2 = p - \sqrt{p^2 + 1}. \quad (1)$$

(ii) Hledejme nyní všechna řešení soustavy tvaru $(u, u, -p - u)$. Snadno si uvědomíme, že trojice čísel $(u, u, -p - u)$ (v jakémkoliv pořadí) je řešením původní soustavy, právě když číslo u současně vyhovuje dvěma rovnicím

$$u^2 - 1 = p(u - p - u) \quad \text{a} \quad (-p - u)^2 - 1 = p(u + u).$$

Je zřejmé, že každá z těchto rovnic je ekvivalentní s rovnicí $u^2 = 1 - p^2$. Vidíme, že v případě $|p| > 1$ číslo u neexistuje, v případě $|p| = 1$ platí $u = 0$, konečně v případě $|p| < 1$ existují dvě čísla u a jsou rovna $\pm\sqrt{1 - p^2}$. Odpovídající řešení původní soustavy jsou dvě trojice čísel

$$\begin{aligned} x_3 = y_3 = \sqrt{1 - p^2} \quad \text{a} \quad z_3 = -p - \sqrt{1 - p^2}, \\ x_4 = y_4 = -\sqrt{1 - p^2} \quad \text{a} \quad z_4 = -p + \sqrt{1 - p^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

a dále všechny jejich permutace

$$\begin{aligned} (x_5, y_5, z_5) = (x_3, z_3, x_3), \quad (x_6, y_6, z_6) = (x_4, z_4, x_4), \\ (x_7, y_7, z_7) = (z_3, x_3, x_3), \quad (x_8, y_8, z_8) = (z_4, x_4, x_4). \end{aligned} \quad (3)$$

(Vzorce (2) a (3) můžeme použít i v případě $|p| = 1$, musíme však mít na paměti, že poskytují jen tři různá řešení, neboť třetí řešení splývá se čtvrtým, páté s šestým a sedmé s osmým.) Nyní ještě posoudíme, kdy některá řešení uvedená v (2) a (3) splývají s řešeními uvedenými v (1). Taková situace nastane, pokud platí $|p| \leq 1$ a je splněna některá z rovnic

$$\sqrt{1-p^2} = -p - \sqrt{1-p^2} \quad \text{respektive} \quad -\sqrt{1-p^2} = -p + \sqrt{1-p^2}.$$

Snadným výpočtem zjistíme, že první rovnice má jediné řešení $p = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ (pro takové p třetí, páté a sedmé řešení splývají s prvním řešením) a že druhá rovnice má jediné řešení $p = \frac{2}{\sqrt{5}}$ (pro takové p čtvrté, šesté a osmé řešení splývají s druhým řešením).

Odpověď: Všechna řešení (x_i, y_i, z_i) dané soustavy rovnic jsou popsána vzorci (1), (2) a (3). Je-li $|p| > 1$, existují právě dvě různá řešení (s indexy $i = 1, 2$). Je-li $|p| < 1$ a $|p| \neq \frac{2}{\sqrt{5}}$, existuje právě osm různých řešení (s indexy $i = 1, 2, \dots, 8$). Je-li $|p| = 1$ nebo $|p| = \frac{2}{\sqrt{5}}$, existuje právě pět různých řešení (s indexy $i = 1, 2, 3, 5, 7$ pro hodnoty $p = 1$, $p = -1$, $p = \frac{2}{\sqrt{5}}$ a s indexy $i = 1, 2, 4, 6, 8$ pro $p = -\frac{2}{\sqrt{5}}$).

A – III – 1

Z první rovnice dané soustavy plyne, že číslo $7y - 14 = 7(y - 2)$ je dělitelné pěti, takže $y = 5s + 2$ pro vhodné celé s . Potom platí $2y = 10s + 4$, a proto $(2y)_5 = 10s + 5$. Po dosazení do soustavy dostaneme dvojici rovnic $(4x)_5 + 35s = 0$ a $10s - (3x)_7 = 69$. Odečteme-li od dvojnásobku první rovnice sedminásobek druhé rovnice, vyloučíme neznámou s a pro neznámou x tak dostaneme rovnici $2(4x)_5 + 7(3x)_7 = -483$. Protože funkce $F(t) = 2(4t)_5 + 7(3t)_7$ je v celočíselné proměnné t neklesající a platí $F(-18) = -532$, $F(-17) = -483$ a $F(-16) = -473$, má naše rovnice $F(x) = -483$ jediné řešení $x = -17$. Z rovnice $(4x)_5 + 35s = 0$ pak plyne $s = 2$, takže $y = 12$. Zkoušku pro dvojici $(x, y) = (-17, 12)$ provedeme snadno dosazením.

Daná soustava má jediné řešení $(x, y) = (-17, 12)$.

Jiné řešení. Pro každé celé číslo t zřejmě platí nerovnosti $t - 2 \leq (t)_5 \leq t + 2$ a $t - 3 \leq (t)_7 \leq t + 3$. Podle nich dostaneme z dané

$$12 \leq 4x + 7y \leq 16,$$

$$69 \leq 2y - 3x \leq 79.$$

Z této soustavy vyloučíme například neznámou x : pro výraz $3(4x + 7y) + 4(2y - 3x)$, který se rovná $29y$, tak dostaneme odhady

$$29y \leq 3 \cdot 16 + 4 \cdot 79 = 364 \quad \text{a} \quad 29y \geq 3 \cdot 12 + 4 \cdot 69 = 312.$$

Z nerovností $312 \leq 29y \leq 364$ ovšem plyne $y \in \{11, 12\}$. Z první rovnice původní soustavy pro $y = 11$ vychází $(4x)_5 = -63$, což není násobek pěti, zatímco pro $y = 12$ vychází $(4x)_5 = -70$, odkud $-72 \leq 4x \leq -68$, takže $x \in \{-18, -17\}$. Nutně tedy platí $y = 12$; po dosazení do druhé rovnice soustavy zjistíme, že tato rovnice je splněna pro $x = -17$, ne však pro $x = -18$. Jediným řešením je tedy dvojice $(x, y) = (-17, 12)$.

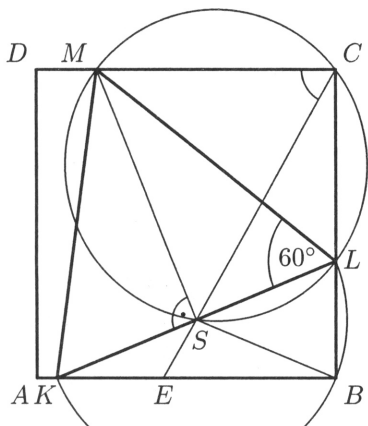
A – III – 2

Označme S střed strany KL libovolného z uvažovaných trojúhelníků KLM (obr. 33). Protože oba úhly LCM a LSM jsou pravé, je čtyřúhelník $CMSL$ tětíkový, a proto platí $|\sphericalangle MCS| = |\sphericalangle MLS| = 60^\circ$. Bod S tudíž leží na fixní úsečce CE , jejíž krajní bod $E \in AB$ je dán rovností $|\sphericalangle ECD| = 60^\circ$. Ukážeme, že hledanou množinou všech středů S je jistá úsečka mezi body C a E , která je určena podmínkami $S \in CE$,

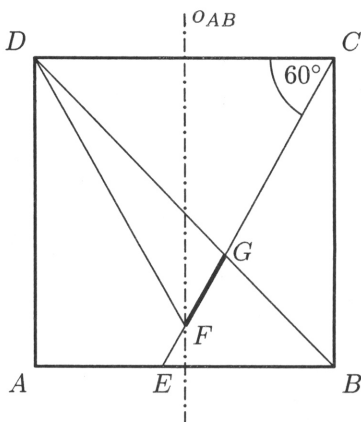
$$(i) \quad |AS| \geq |BS| \quad \text{a} \quad (ii) \quad |\sphericalangle CBS| \geq 45^\circ.$$

Z těchto podmínek zřejmě plyne, že se jedná o úsečku FG , kde F je vrchol rovnostranného trojúhelníku CDF a G je ten bod strany CF , který leží na úhlopříčce BD , obr. 34. Z bodů úsečky CE totiž podmínku (i) splňují právě body úsečky CF , podmínku (ii) právě body úsečky EG .

Zmíněné tvrzení dokážeme tak, že uvnitř úsečky CE zvolíme libovolný bod S a pokusíme se rekonstruovat vyhovující trojúhelník KLM , jehož strana KL má střed ve zvoleném bodě S . Zjistíme, že takový trojúhelník KLM existuje, právě když bod S splňuje obě podmínky (i) a (ii). Vraťme se znovu k obr. 33. Protože úhel KBL je pravý, jsou podle Thaletovy věty všechny tři úsečky SK , SB a SL shodné. Proto podle bodu S lze body K , L určit jako průsečíky úseček AB resp. BC s kružnicí o středu S a poloměru $|SB|$. Takový průsečík K ($K \neq B$) existuje,



Obr. 33



Obr. 34

právě když platí podmínka (i), průsečík L ($L \neq B$) existuje, právě když platí nerovnost $|BS| \leq |CS|$, neboli $|\sphericalangle BCS| \leq |\sphericalangle CBS|$. Protože však $|\sphericalangle BCS| = 30^\circ$, je poslední nerovnost zaručena silnější podmínkou (ii), jejíž nutnost se vyjeví za chvíli. Známe-li již body K a L , můžeme určit bod M jako průsečík strany CD s osou úsečky KL . Předpokládejme, že takový průsečík M existuje; sestrojený rovnoramenný trojúhelník KLM je pak skutečně rovnoramenný, neboť čtyřúhelník $CMSL$ je tětíkový (úhly u vrcholů C a S jsou pravé), a proto platí $|\sphericalangle MLS| = |\sphericalangle MCS| = 60^\circ$. Zbývá proto posoudit, kdy existuje průsečík úsečky CD s osou úsečky KL , tedy kdy body C, D leží v opačných polorovinách určených zmíněnou osou, jež jsou popsány nerovnicemi $|KX| \leq |LX|$ a $|KX| \geq |LX|$. Protože platí $|KC| \geq |BC|$ a $|BC| \geq |LC|$, tedy $|KC| \geq |LC|$, je našim úkolem zjistit, kdy je splněna nerovnost $|KD| \leq |LD|$. Z pravoúhlých trojúhelníků KDA a LDC usoudíme, že poslední nerovnost platí, právě když $|AK| \leq |LC|$, neboli $|KB| \geq |LB|$, neboli $|\sphericalangle BLK| \geq 45^\circ$. Úhel BLK je ale shodný s úhlem CBS (víme totiž, že $|SB| = |SL|$), a tak dostáváme podmínku (ii). Důkaz je hotov.

A – III – 3

(i) Předpokládejme nejprve, že $A = d^2$ pro některé přirozené d . Pak pro každé $j = 1, 2, \dots, n$ platí

$$(A + j)^2 - A = (d^2 + j)^2 - d^2 = (d^2 - d + j)(d^2 + d + j);$$

protože jedno z n po sobě jdoucích čísel $(d^2 - d + j)$, kde $j = 1, 2, \dots, n$, je dělitelné číslem n , je číslem n dělitelné i příslušné číslo $(A + j)^2 - A$.

(ii) Předpokládejme nyní, že číslo A není druhou mocninou žádného přirozeného čísla. V rozkladu čísla A na prvočinitele se pak některé prvočíslo p vyskytuje v lichém počtu exemplářů, tedy $p^{2k-1} \mid A$ a $p^{2k} \nmid A$ pro vhodné přirozené k . Ukažme, že například číslo $n = p^{2k}$ nemá vlastnost z textu úlohy. Pripusťme naopak, že pro některé $j = 1, 2, \dots, p^{2k}$ je rozdíl $(A + j)^2 - A$ dělitelný číslem p^{2k} . Čísla $(A + j)^2$ a A pak dávají stejné zbytky při dělení číslem p^{2k} , a tedy i při dělení číslem p^{2k-1} . Protože číslo A je dělitelné číslem p^{2k-1} , ne však číslem p^{2k} , platí totéž i o číslu $(A + j)^2$. To je ale spor, neboť $(A + j)^2$ je druhá mocnina přirozeného čísla.

A – III – 4

Po vynásobení obou stran rovnice výrazem $x^2 - 1$ (který je roven nule, právě když $x \in \{-1, 1\}$) a po převedení všech členů na jednu stranu dostaneme kubickou rovnici

$$x^3 - ax^2 + 23x - b = 0. \quad (1)$$

Jak dobře víme, každá kubická rovnice s reálnými koeficienty má v oboru reálných čísel buď *jeden*, nebo *tři* kořeny (počítáme-li je s přihlédnutím k jejich násobnosti). Protože obě řešení původní rovnice jsou kořeny rovnice (1), musí mít tato rovnice *tři* reálné kořeny. Pro tato čísla x_1, x_2, x_3 a pro koeficienty rovnice (1) platí známé Viětovy vzorce

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= 23, \\ x_1x_2x_3 &= b. \end{aligned} \quad (2)$$

Abychom se dále vyhnuli některým zkouškám, připomeňme známý fakt, že *každé* řešení soustavy rovnic (2) je tvořeno trojicí kořenů rovnice (1), všechna řešení (2) jsou tedy permutace téže trojice čísel.

Předpoklad o dvou řešeních původní rovnice znamená, že buď právě jeden z kořenů x_1, x_2, x_3 patří do množiny $\{-1, 1\}$ a ostatní dva kořeny jsou různé, nebo je jeden z kořenů x_1, x_2, x_3 dvojnásobný a žádný z nich do množiny $\{-1, 1\}$ nepatří. Řešení původní rovnice lze proto označit

s a $12 - s$ tak, že nastane jedna z následujících možností: $(x_1, x_2, x_3) = (-1, s, 12 - s)$, $(x_1, x_2, x_3) = (1, s, 12 - s)$, nebo $(x_1, x_2, x_3) = (s, s, 12 - s)$; vždy přitom platí $s \notin \{-1, 1, 6, 11, 13\}$. Vyjmenované možnosti teď jednotlivě posoudíme.

(i) $(x_1, x_2, x_3) = (-1, s, 12 - s)$. Soustava (2) má po dosazení a úpravě tvar

$$a = 11, \quad s^2 - 12s - 35 = 0, \quad b = -s(12 - s).$$

Druhá rovnice má dva kořeny $s = 5$ a $s = 7$, kterým podle třetí rovnice odpovídá stejná hodnota $b = -35$. Dvojice $(a, b) = (11, -35)$ je řešením úlohy.

(ii) $(x_1, x_2, x_3) = (1, s, 12 - s)$. Soustava (2) má po dosazení a úpravě tvar

$$a = 13, \quad s^2 - 12s + 11 = 0, \quad b = s(12 - s).$$

Druhá rovnice má kořeny $s = 1$ a $s = 11$, které však patří k nepřipustným hodnotám s (viz výše).

(iii) $(x_1, x_2, x_3) = (s, s, 12 - s)$. Soustava (2) má po dosazení a úpravě tvar

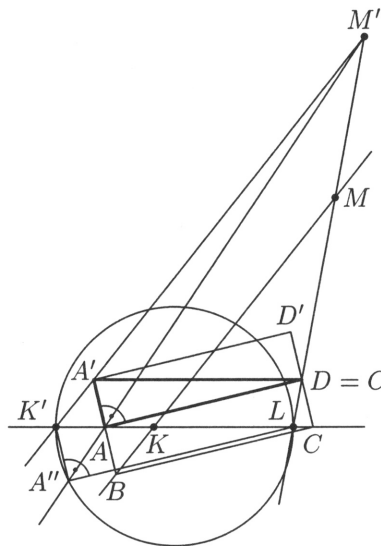
$$a = s + 12, \quad s^2 - 24s + 23 = 0, \quad b = s^2(12 - s).$$

Druhá rovnice má kořeny $s = 1$ a $s = 23$. Hodnota $s = 1$ je nepřipustná, hodnotě $s = 23$ podle první a třetí rovnice odpovídají hodnoty $a = 35$ a $b = -11 \cdot 23^2 = -5819$. Dvojice $(a, b) = (35, -5819)$ je řešením úlohy.

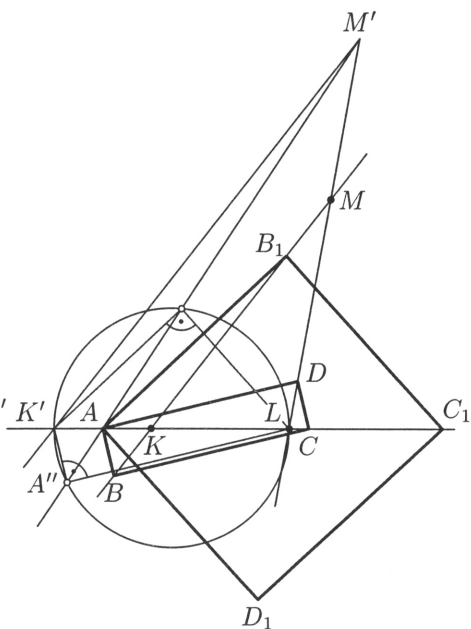
Hledané dvojice (a, b) jsou dvojice $(11, -35)$ a $(35, -5819)$.

A – III – 5

Předpokládejme, že $ABCD$ je hledaný pravoúhelník, a označme $A'B'C'D'$ jeho obraz v posunutí o vektor $\mathbf{BA}$ (obr. 35, $B' = A$). Bod A' leží na přímce souměrně sdružené s přímkou KM podle středu A — odpovídající průsečíky této přímky s přímkami LK a LM označme K' a M' . Protože úhlopříčka AC hledaného pravoúhelníku leží na přímce KL , je úhlopříčka $A'C'$ posunutého obdélníku $A'B'C'D'$ s KL rovnoběžná. Ve stejnolehlosti se středem M' , která převádí bod A' do bodu K' (a bod $C' = D$ do bodu L) odpovídá pravoúhlému trojúhelníku $A'AC'$ trojúhelník $K'A''L$. Bod A'' už dovedeme sestavit, protože leží na Thaletově kružnici nad průměrem $K'L$ a na přímce $M'A$. Nyní již snadno sestavíme hledaný pravoúhelník $ABCD$: nejprve určíme body A' a $C' = D$, které jsou obrazy bodů K' a L ve stejnolehlosti se středem M' , jež převádí bod A''



Obr. 35



Obr. 36

do bodu A , a k nim doplníme vrcholy B a C jako obrazy bodů $B' = A$, $C' = D$ v posunutí o vektor $\mathbf{A'A} = \mathbf{AB}$.

Protože bod A leží uvnitř úsečky $K'L$ a $M' \neq A$, protíná přímka $M'A$ Thaletovu kružnici nad průměrem $K'L$ vždy ve dvou bodech. Je-li A'' jeden z průsečíků uvedené Thaletovy kružnice s přímkou $M'A$ a $M' \neq A''$, určují body A, A'' hledanou stejnolehlost se středem M' . Pokud tedy bod M'' neleží na kružnici s průměrem $K'L$, má úloha dvě různá řešení $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ (obr. 36). V opačném případě má úloha pouze jedno řešení.

A – III – 6

Dosadíme-li do dané rovnice za x hodnotu $f(x)$, dostaneme rovnici

$$f(f(x)f(y)) = f(f(x)y) + f(x),$$

ze které vyjádříme $f(f(x)y) = f(f(x)f(y)) - f(x)$. Jiné vyjádření téhož výrazu $f(f(x)y)$ dostaneme, když v původní rovnici vyměníme navzájem

hodnoty x a y ; vyjde nám $f(f(x)y) = f(yx) + y$. Porovnáním obou vyjádření tak dostaneme rovnici

$$f(f(x)f(y)) = f(yx) + y + f(x),$$

jejíž levá strana se nezmění, vyměníme-li navzájem hodnoty x a y . Stejnou vlastnost musí proto mít i pravá strana této rovnice, takže musí platit

$$f(yx) + y + f(x) = f(xy) + x + f(y), \quad \text{neboli} \quad y + f(x) = x + f(y).$$

Další zřejmou úpravou dostáváme rovnici $f(x) - x = f(y) - y$, která musí být splněna pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$. Znamená to, že funkce $x \mapsto f(x) - x$ je na množině $\mathbb{R}^+$ konstantní, tedy hledaná funkce f musí být tvaru $f(x) = x + c$ pro vhodné číslo c . Po dosazení tohoto předpisu do obou stran původní rovnice

$$\begin{aligned} f(xf(y)) &= xf(y) + c = x(y + c) + c = xy + cx + c \\ f(xy) + x &= (xy + c) + x = xy + x + c \end{aligned}$$

zjišťujeme, že vyhovuje jedině $c = 1$. Hledaná funkce f je tudíž jediná a je určena vzorcem $f(x) = x + 1$.

Kategorie P

Texty úloh

P – I – 1

Matice

Je dána čtvercová matice A o rozměrech $n \times n$, jejíž prvky jsou nuly a jedničky. Pojmem *řádková* resp. *sloupcová výměna* budeme označovat vzájemnou záměnu libovolných dvou řádků, resp. libovolných dvou sloupců matice. Bude nás zajímat, zda je možné posloupností řádkových a sloupcových výměn převést danou matici A na takovou matici, která má na hlavní diagonále pouze jedničky (hlavní diagonálu tvoří prvky $A[1, 1], A[2, 2], \dots, A[n, n]$).

V mnoha aplikacích (např. při řešení soustav lineárních rovnic) je výhodné danou matici transformovat na ekvivalentní matici tak, aby hlavní diagonála obsahovala „velké“ prvky. V této úloze vlastně nuly reprezentují „malé“ a jedničky „velké“ prvky matice.

Soutěžní úloha. Navrhněte co nejefektivnější algoritmus, který převede zadanou čtvercovou matici pomocí řádkových a sloupcových výměn na matici, která má na hlavní diagonále samé jedničky, příp. zjistí, že to není možné.

Příklad 1: Matice A :

0	1	0	1
1	1	0	1
1	1	0	0
0	0	1	0

Výsledek:

1	1	0	0
1	1	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1

Matici je možné transformovat — stačí vyměnit třetí a čtvrtý řádek a potom první a čtvrtý sloupec.

Příklad 2: Matice A :

0	1	0
1	1	0
1	1	0

Výsledek:

Matici není možné transformovat
do požadovaného tvaru.

Robot

Ve výzkumném ústavu potrubí a rour vyvinuli nový druh robota určeného na čištění teplovodních potrubí. Robot se soustavou potrubí pohybuje podle předem stanoveného plánu. Technologie čištění vyžaduje, aby robot prošel každou trubkou v soustavě dvakrát (nezáleží na tom, jakým směrem) — při prvním průchodu provádí chemické čištění a při druhém mechanické dočišťování. Robot může vlézt do trubky z kteréhokoli konce, ale jakmile do ní vstoupí, musí ji už celou projít.

Soustava potrubí se skládá z n uzlů očíslovaných od 1 do n , mezi nimiž vede m teplovodních trubek očíslovaných od 1 do m . Každá trubka vede mezi dvojicí uzlů a nemá žádné odbočky ani větvení. Mezi každou dvojicí uzlů vede nejvýše jedna trubka. Soustava potrubí je souvislá, tj. robot se trubkami může dostat na libovolné místo soustavy. Robot začíná svou práci v uzlu číslo 1 a po skončení čištění se musí opět do tohoto uzlu vrátit.

Soutěžní úloha. Napište program, který umožní plánovat trasu čističího robota. Program přečte ze vstupního souboru popis soustavy potrubí a zjistí, zda existuje trasa robota, která začíná i končí v uzlu číslo 1 a prochází každou trubkou právě dvakrát. Pokud taková trasa existuje, program ji vypíše.

Formát vstupu: První řádek vstupního souboru `robot.in` obsahuje dvě kladná celá čísla n a m ($n \leq 100$), oddělená jednou mezerou. Každý z následujících m řádků popisuje jednu trubku. Obsahuje vždy dvě kladná celá čísla oddělená mezerou — čísla koncových uzlů této trubky.

<i>Příklad:</i>	<code>robot.in</code>	<code>robot.out</code>
	5 6	1 3 5 4 1 5 4 2 4 1 5 3 1
	1 3	
	1 4	
	1 5	
	2 4	
	3 5	
	4 5	

Formát výstupu: Výstupní soubor `robot.out` je tvořen jediným řádkem, který obsahuje $2m + 1$ čísel uzlů oddělených mezerami. Jsou to čísla uzlů v pořadí, v jakém je má robot navštívit během svého čištění. První a poslední číslo na řádku musí být 1. V případě, že neexistuje trasa, která prochází každou trubkou právě dvakrát, výstupní soubor bude obsahovat

vat jediný řádek se slovem NE. Pokud existuje více vhodných tras, vypište jednu libovolnou z nich.

P – I – 3

Přímka

V rovině je dáno $2n$ bodů, z toho n je bílých a n černých. *Spravedlivá přímka* je taková přímka, která

- ▷ prochází bodem $[0, 0]$,
- ▷ neprochází žádným černým ani bílým bodem,
- ▷ rozděluje rovinu na dvě poloroviny, přičemž v jedné z těchto polorovin je stejný počet bílých bodů jako ve druhé polorovině černých, a naopak.

Soutěžní úloha. Napište program, který ze vstupního souboru `primka.in` přečte souřadnice bílých a černých bodů a do souboru `primka.out` vypíše jednu spravedlivou přímku.

Můžete předpokládat, že žádné tři zadané body neleží na jedné přímce a že bod $[0, 0]$ neleží na žádné přímce určené dvěma zadanými body. Všechny zadané body mají celočíselné souřadnice.

Formát vstupu: První řádek vstupního souboru `primka.in` obsahuje jediné číslo n . Každý z následujících $2n$ řádků obsahuje souřadnice jednoho zadaného bodu oddělené mezerou. Prvních n bodů je bílých, dalších n bodů je černých.

Formát výstupu: Výstupní soubor `primka.out` je tvořen jediným řádkem, který obsahuje souřadnice jednoho libovolného bodu různého od $[0, 0]$, jímž nalezená spravedlivá přímka prochází. Souřadnice jsou od sebe odděleny jednou mezerou. Pokud spravedlivá přímka pro zadanou množinu bodů neexistuje, výstupní soubor bude obsahovat jediný řádek se slovem NE.

Příklad: `primka.in`

2

0 1

2 -1

-1 -1

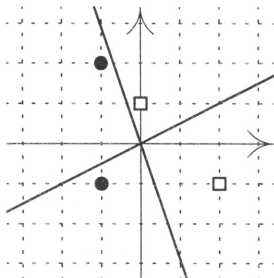
-1 2

`primka.out`

2 1

Jiné správné řešení:

-1.0 2.9



Návod. Necht' $A_1 = [x_1, y_1]$, $A_2 = [x_2, y_2]$ a $A_3 = [x_3, y_3]$ jsou body v rovině. Jestliže je hodnota výrazu $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$ kladná, bod A_3 leží nalevo od polopřímky $A_1 A_2$. Jestliže je tato hodnota záporná, potom leží napravo, a pokud je tato hodnota nulová, bod A_3 leží na přímce $A_1 A_2$.

P – I – 4

Komparátorové sítě

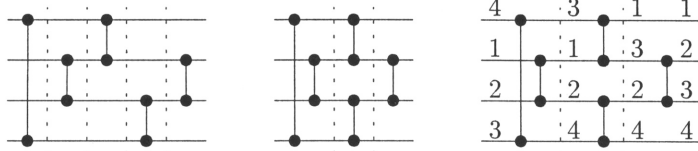
Komparátorové sítě se využívají při návrhu paralelních algoritmů. Mohou se také snadno realizovat pomocí elektronických obvodů. *Komparátor* je jednoduché zařízení, které obdrží na vstupu dvě čísla, porovná je, na vrchním ze svých výstupů vrátí menší z těchto dvou čísel a na spodním větší z nich. Z komparátorů lze sestavovat složitější obvody, kterým budeme říkat komparátorové sítě.

Komparátorová síť je tvořena n vodorovně uspořádanými *vodiči*, které jsou na několika místech propojeny pomocí komparátorů. Komparátory jsou uspořádány do *vrstev*, které odpovídají jednotlivým krokům výpočtu. Na začátku výpočtu (v kroku 0) síť dostane na vstupu n čísel. Po skončení kroku $k - 1$ se výstupy z kroku $k - 1$ přenesou vodiči na komparátory ve vrstvě k . Komparátor ve vrstvě k spojuje vždy dva vodiče (nemusí to ovšem být sousední vodiče). Jestliže je na spodním z nich menší hodnota než na vrchním, vymění tyto hodnoty, v opačném případě je nechá beze změny. V jedné vrstvě může být umístěno i více komparátorů (jejich výpočet probíhá najednou, paralelně), ale v jedné vrstvě může jeden vodič vstupovat nejvýše do jednoho komparátoru. Po skončení celého výpočtu jsou na výstupech sítě tatáž čísla jako na jejich vstupech, pouze může být zaměněno jejich pořadí.

Graficky se vodiče zobrazují jako vodorovné čáry, komparátory jako svislé spojnice svých vstupních vodičů. Komparátory umístěné v jedné vrstvě se kreslí svisle nad sebe, případně do několika sousedních sloupců. Jednotlivé vrstvy sítě oddělujeme svislou čárkovanou čarou. Výpočet komparátorové sítě probíhá zleva doprava.

Při návrhu sítí se snažíme sestavit je tak, aby doba výpočtu byla co nejmenší, tj. aby síť měla co nejméně vrstev. Druhým kritériem hodnocení kvality sítě je počet použitých komparátorů (na tomto počtu může záviset například výrobní cena sítě).

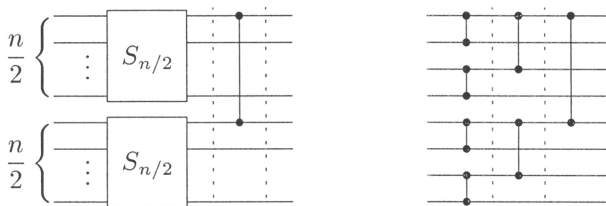
Příklad 1:



Uvažujme nejlevější síť na obrázku. Tato síť dostane čtyři vstupy a vrátí je uspořádané od nejmenšího k největšímu. Po prvních dvou krocích výpočtu bude nejmenší vstup buď na prvním, nebo na druhém vodiči a největší vstup na třetím nebo na čtvrtém. Další dva kroky umístí nejmenší a největší hodnotu na své místo a v posledním kroku se správně uspořádají hodnoty na druhém a třetím vodiči. Všimněte si, že první a druhý komparátor (stejně jako třetí a čtvrtý) je možné sloučit do jedné vrstvy, aniž by se tím změnil výsledek výpočtu. Výsledná rychlejší síť je na prostředním obrázku. Pravý obrázek ukazuje průběh výpočtu pro vstup 4, 1, 2, 3.

Příklad 2: Sestrojte komparátorovou síť, která na vstupu obdrží n čísel a na výstupu umístí nejmenší z těchto čísel na první vodič. Na pořadí ostatních čísel nezáleží. Můžete předpokládat, že n je mocnina dvou.

Řešení. Síť sestrojíme rekurzivně. Označme S_n síť, která úlohu řeší pro n vstupů. Jestliže $n = 1$, S_n nebude obsahovat žádný komparátor, neboť máme jen jediný vstup. Předpokládejme tedy, že $n > 1$. Vstupy rozdělíme na dvě poloviny — horní a dolní. Na každou polovinu vstupů aplikujeme síť $S_{n/2}$. Tyto dvě sítě poloviční velikosti mohou pracovat paralelně. Po skončení jejich výpočtu budeme mít na vodiči číslo 1 nejmenší hodnotu z horní poloviny vstupů a na vodiči číslo $\frac{1}{2}n + 1$ nejmenší hodnotu z dolní poloviny. Nyní proto stačí přidat jeden komparátor mezi vodiče 1 a $\frac{1}{2}n + 1$ a dostaneme celkové minimum na prvním vodiči. Síť S_n se tedy skládá ze dvou sítí $S_{n/2}$ a z jednoho dalšího komparátoru. Konstrukce sítě S_n je znázorněna na následujícím obrázku vlevo, vpravo je příklad výsledné sítě pro $n = 8$.



Všimněte si, že hloubka rekurze je $\log_2 n$, neboť velikost vstupu se v každém rekurzivním kroku sníží na polovinu. Každá úroveň rekurze přidá do výsledné sítě jednu vrstvu, takže síť S_n má $\log_2 n$ vrstev. Počet použitých komparátorů je v poslední vrstvě 1, v každé další vrstvě odzadu se vždy zdvojnásobí. Nechť počet vstupů je $n = 2^k$. Potom počet použitých komparátorů je $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1 = n - 1$ (součet geometrické posloupnosti). Získali jsme tedy síť, která má $O(\log n)$ vrstev a používá $O(n)$ komparátorů.

Soutěžní úlohy. a) Napište program, který bude simulovat výpočet komparátorové sítě. Program dostane ve vstupním souboru popis zkoumané komparátorové sítě a hodnoty jejích vstupů. Přesný tvar popisu komparátorové sítě si sami navrhnete a popište ho. Program by měl spočítat výsledky výpočtu komparátorové sítě a také by měl umožňovat graficky nebo semigraficky zobrazovat průběh výpočtu sítě. V řešení uveďte také příklady vstupu a výstupu svého programu.

b) Na vstupu je dáno $n - 1$ čísel seřazených od nejmenšího po největší (prvních $n - 1$ vstupů). Poslední vstup obsahuje libovolné číslo. Navrhnete komparátorovou síť, která zařadí poslední číslo do této posloupnosti na správné místo podle velikosti (tj. na výstupu bude všech n čísel uspořádáno od nejmenšího k největšímu). Můžete předpokládat, že n je mocnina dvou. Pokuste se navrhnout co nejrychlejší síť.

P – II – 1

Maticе

Uvažujme matici A o rozměrech $m \times n$, která obsahuje pouze nuly a jedničky. *Orámovaným obdélníkem* budeme nazývat takovou podmatici, která má aspoň dva řádky, aspoň dva sloupce a jejíž první a poslední řádek, stejně jako první a poslední sloupec, obsahují samé jedničky. Uvnitř obdélníka mohou být libovolné prvky.

Soutěžní úloha. Navrhnete algoritmus, který v dané matici A najde největší orámovaný obdélník. Velikost orámovaného obdélníka s i řádky a j sloupci je rovna $i \cdot j$ (tj. hledáme orámovaný obdélník, pro který bude součin $i \cdot j$ největší možný). Pokud existuje více takových obdélníků, stačí nalézt jeden libovolný z nich. Můžete předpokládat, že aspoň jeden orámovaný obdélník se v matici A nachází.

Příklad: Vstup:

$m = 11, n = 24$

```
00000000000000000000000000000000
00111110000000000011000000
0011001111111111111111111110
0010111111111111111111111110
001010100000100011100000
001111100100100011100000
000010001100100111111000
000010000000100100101000
010011111111100100001000
001000000000000111111000
0000000000000000000000000000
```

Výstup:

Největší orámovaný ob-
délník má rozměry 6×9
a jeho levý horní roh je
ve 4. řádce a 5. sloupci.

P – II – 2

Robot

Výzkumný ústav potrubí a rour má nový problém, tentokrát se soustavou orientovaných trubek. Pro vyčištění této soustavy je zapotřebí, aby čistící robot prošel každou trubkou právě jednou. Soustava je orientovaná, což znamená, že pro každou trubku je předepsán směr, kterým musí robot trubkou projít. S vynaložením velkého úsilí se programátorům výzkumného ústavu podařilo napsat program, který pro danou soustavu trubek najde jednu možnou trasu čistícího robota, nebo zjistí, že taková trasa neexistuje. Někdy je ovšem užitečné vědět, zda existuje více různých tras čištění (střídáním čistících tras je totiž možné snížit opotřebení robota v zatáčkách).

Soustava potrubí je složena z n uzlů očíslovaných $1, \dots, n$, mezi nimiž vede m jednosměrných trubek očíslovaných $1, \dots, m$. Každá trubka vede mezi dvojicí navzájem různých uzlů a nemá žádné odbočky nebo větvení. Z každého uzlu vede do každého jiného uzlu nejvýše jedna trubka. Pro tuto soustavu je zaručeno, že existuje trasa robota, která začíná i končí v uzlu 1 a projde každou trubkou právě jednou (v souladu se stanovenou orientací trubky). Pracovníci výzkumného ústavu navíc pomocí svého programu jednu takovouto trasu našli a tato trasa je vám k dispozici. Vaším úkolem je zjistit, zda existuje ještě jiná trasa začínající i končící ve vrcholu 1, která projde každou trubkou právě jednou. Tuto trasu nemusíte vypisovat, stačí, když váš program odpoví ano/ne.

Příklad. Vstup:

$$n = 5, m = 7$$

trubky:

1 2

1 5

2 3

3 1

3 4

4 1

5 3

trasa: 1 2 3 4 1 5 3 1

Výstup:

Existuje jiná trasa.

Poznámka. 1 2 3 1 5 3 4 1 je příklad jiné trasy.

Vstup:

$$n = 5, m = 6$$

trubky:

1 2

2 3

3 1

3 4

4 5

5 3

trasa: 1 2 3 4 5 3 1

Výstup:

Neexistuje jiná trasa.

P – II – 3

Učitel

Ve třídě sedí učitel a dává pozor na n žáků, kteří píšou písemku. Učitel se po většinu času dívá jedním směrem. Tento směr budeme nazývat *základní směr*. Jakmile však učitel zaslechne odněkud podezřelé zvuky, rychle se otočí, aby viděl, co se děje. Úkolem je zvolit základní směr tak, aby úhel, o který se musí otočit, byl co nejmenší. Jelikož k různým žákům je třeba natočení o různý úhel, chceme minimalizovat průměrný úhel.

Soutěžní úloha. Na vstupu je dáno číslo n a souřadnice n bodů v rovině $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_n, y_n]$. Každý bod určuje polohu jednoho žáka ve třídě. Učitel sedí v bodě $[0, 0]$. Můžete předpokládat, že bod $[0, 0]$ neleží na žádné přímce určené dvěma zadanými body.

V základním směru je učitel otočen směrem k nějakému bodu $[x, y]$. Když zaslechne vyrušovat žáka i , otočí se směrem k bodu $[x_i, y_i]$. Otáčí se buď po směru hodinových ručiček, nebo proti směru hodinových ručiček, podle toho, kterým směrem je úhel otočení menší (tj. pro každého žáka je úhel otočení nejvýše 180°).

Průměrný úhel otočení je aritmetický průměr úhlů otočení pro všech n bodů. Úkolem je zvolit takový bod $[x, y]$ určující základní směr, aby průměrný úhel otočení byl nejmenší možný.

Pomůcka: Můžete předpokládat, že máte k dispozici funkci $uhel(x, y)$, která vrátí úhel otočení učitele mezi bodem $[1, 0]$ a bodem $[x, y]$ měřeno proti směru pohybu hodinových ručiček (tj. úhel mezi 0° a 360°).

Příklad:

Vstup:

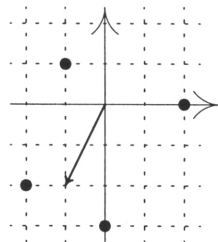
$n = 4$, body: $[-1, 1]$, $[0, -3]$, $[-2, -2]$, $[2, 0]$

Výstup:

Základní směr je směrem k bodu $[-1, -2]$.

Poznámka. Průměrný úhel otočení je $67,5^\circ$.

Správných řešení existuje více, například také bod $[-2, -2]$ (žák 3).

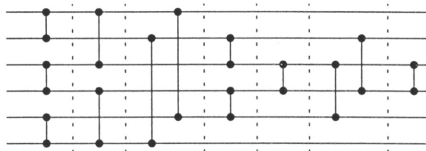


P – II – 4

Komparátorové sítě

(Definice komparátorové sítě je obsažena v textu úlohy P–I–4.)

Soutěžní úlohy. a) Na následujícím obrázku je nakreslena komparátorová síť se šesti vstupy. Nalezněte vstupní data (tj. šestici čísel), která tato síť neseřadí (neuspořádá je podle velikosti). Zobrazte také průběh výpočtu sítě pro tato vstupní data.



b) V komparátorové síti uvedené v části a) se nachází komparátor, po jehož odstranění bude síť správně třídít libovolnou vstupní posloupnost šesti čísel. Určete tento komparátor a vysvětlete, proč po jeho odstranění síť správně třídí.

c) Na vstupu komparátorové sítě je $2n$ navzájem různých čísel. Čísla na prvních n vstupech jsou seřazena od nejmenšího po největší a čísla na druhých n vstupech jsou také seřazena od nejmenšího po největší. Navrhněte komparátorovou síť, která na prvních n výstupech vrátí n nejmenších čísel (v libovolném pořadí) a na druhých n výstupech vrátí n největších čísel (v libovolném pořadí). Snažte se, aby vaše síť byla co nejrychlejší.

Příklad. $n = 3$, vstupy 1, 4, 5, 2, 3, 6. Na výstupu první tři vodiče obsahují čísla 1, 2, 3 v libovolném pořadí a druhé tři vodiče obsahují čísla 4, 5, 6 v libovolném pořadí. Například 2, 3, 1, 6, 5, 4 je správný výstup.

P – III – 1

Je dána matice A s m řádky a n sloupci. Každý její prvek $a_{i,j}$ (první souřadnice indexu je číslo řádku a druhá je číslo sloupce) je buď celé kladné číslo, nebo takzvaný *žolík*. Žolík budeme označovat znakem $*$. Chceme přerovnat prvky matice tak, aby každý řádek matice tvořil neklesající posloupnost, tj. aby pro každé i , $1 \leq i \leq m$, platilo:

$$a_{i,1} \leq a_{i,2} \leq \dots \leq a_{i,n-1} \leq a_{i,n}$$

Za žolíky lze do matice dosadit libovolná celá čísla. Tedy například řádek $(1, *, 4, *)$ je neklesající, neboť za žolíky je možné dosadit třeba čísla 2 a 5. Naopak řádek $(5, *, *, 4)$ není neklesající, protože neexistují žádná celá čísla x a y , která by splňovala podmínky $5 \leq x \leq y \leq 4$. Při vyměňování prvků matice jsme omezeni tím, že můžeme mezi sebou zaměnit vždy pouze takové prvky, které jsou umístěny ve stejném sloupci.

Soutěžní úloha. Navrhněte program, který pro zadanou matici A rozhodne, zda je možné přerovnat její prvky v rámci každého sloupce tak, aby všechny řádky výsledné matice byly neklesající. V kladném případě program jednu z možných výsledných matic vypíše.

Příklad:

Vstup:

$m = 4$, $n = 4$

```
1 10 8 12
* 9 10 *
8 * 11 10
12 * * 10
```

Výstup:

Ano. Jedno možné přeuspořádání prvků je:

```
1 * 8 10
12 * * *
* 10 11 12
8 9 10 10
```

Vstup:

$m = 3$, $n = 4$

```
* * * *
* * * *
4 3 2 1
```

Výstup:

Prvky nelze přeuspořádat.

V jednom lyžařském středisku pořádají závody ve sjezdu. Organizátoři závodů se snaží, aby trasa při každém závodu byla trochu jiná. Na svahu je trvale vyznačeno N orientačních bodů, jejichž polohu není možné měnit. Trasa pak prochází některými z uvedených orientačních bodů a splňuje následující podmínky:

- ▷ Trasa začíná v nejvýše položeném orientačním bodě a končí v nejnižše položeném orientačním bodě.
 - ▷ Trasa mezi každými dvěma po sobě následujícími orientačními body vede po přímce.
 - ▷ Nadmořská výška orientačních bodů trasy na svahu ostře klesá.
 - ▷ V žádném orientačním bodě nemění trasa svůj směr o více než o 45° .
- Vášim úkolem je určit počet vyhovujících tras pro závody.

Soutěžní úloha. Na vstupu je dán počet orientačních bodů N a dvojice čísel $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$, které popisují polohu jednotlivých orientačních bodů na svahu. Svah si představujeme jako obdélník, který se svažuje shora dolů. Číslo x_i je vzdálenost i -tého orientačního bodu od levého okraje svahu a y_i je jeho vzdálenost od dolního okraje, tj. čím větší je y -ová souřadnice bodu, tím větší má tento bod nadmořskou výšku.

Navrhněte program, který zjistí počet vyhovujících tras na zadaném lyžařském svahu. Můžete předpokládat, že žádné dva orientační body nemají stejnou y -ovou souřadnici a že žádné tři orientační body neleží na jedné přímce.

Pomůcka: Ve svém programu můžete používat funkci $uhel(x, y)$, která vrátí velikost úhlu mezi bodem (x, y) a x -ovou osou, tj. určí úhel, o který je třeba otočit kolem bodu $(0, 0)$ proti směru hodinových ručiček polopřímku vycházející z bodu $(0, 0)$ a procházející bodem $(1, 0)$ tak, aby tato polopřímka po otočení procházela bodem (x, y) . Funkce vrací výsledný úhel ve stupních, tj. jako číslo z intervalu $\langle 0, 360 \rangle$.

Příklad. Vstup: $N = 6$, orientační body:

$(2, 5), (2, 2), (5, 4), (0, 3), (0, 1), (1, 0)$

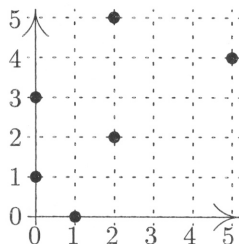
Výstup: Existují 3 vyhovující trasy.

Poznámka. Vyhovující trasy jsou:

$(2, 5), (0, 3), (0, 1), (1, 0)$

$(2, 5), (2, 2), (1, 0)$

$(2, 5), (1, 0)$



P – III – 3

(Definice komparátorové sítě je obsažena v textu úlohy P–I–4.)

Soutěžní úloha. Je dána jedna konkrétní permutace čísel $1, 2, \dots, n$, tj. taková posloupnost čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$, ve které se každé z čísel $1, 2, \dots, n$ vyskytuje právě jednou. Máme zaručeno, že naše komparátorová síť bude mít n vodičů a na vstupu bude i -tý vodič obsahovat číslo a_i . Úlohou je navrhnout takovou komparátorovou síť, která tento konkrétní vstup utřídí (navržená síť tedy nemusí třídít žádný jiný vstup).

Protože navržená komparátorová síť bude obecně různá pro různé permutace, je vaším úkolem vytvořit algoritmus, který navrhne konkrétní komparátorovou síť pro zadané číslo n a zadanou posloupnost čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$. Navrženou síť vypište jako posloupnost komparátorů podle jejich výskytu v jednotlivých vrstvách zleva doprava; jednotlivé komparátory udávejte jako dvojici vodičů, které do nich vstupují.

Vámi vytvořený algoritmus musí pracovat v čase, který je polynomiální v n . Snažte se, aby síť, kterou váš algoritmus navrhne, měla co nejméně vrstev (a pokud možno i malý počet komparátorů). Existuje efektivní algoritmus, který pro zadanou permutaci nalezne síť s $O(n)$ komparátory a s $O(\log n)$ vrstvami.

Příklad:

Vstup:

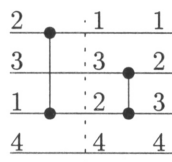
$n = 4, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 1, a_4 = 4.$

Výstup:

Vstup je možné utřídít například pomocí sítě:

První vrstva: komparátor (1, 3)

Druhá vrstva: komparátor (2, 3)



P – III – 4

Program: roury.pas / roury.c / roury.cpp

Vstupní soubor: roury.in

Výstupní soubor: roury.out

Ve výzkumném ústavu potrubí a rour mají opět nový problém. Došli zakázku od Vodáren a kanalizací města Bratislavy, kde je potřeba pročistit městskou kanalizaci od nánosů bláta. Postup při čištění trubek od bláta je jednoduchý: Čistící robot musí projít každou trubkou právě jednou; kdyby robot prošel již vyčištěnou trubkou, hrozilo by nebezpečí, že jeho silné čistící prostředky tuto trubku poškodí. Robot může do

trubky vstoupit z jejího libovolného konce; pokud však již do trubky vstoupí, musí ji celou projít.

Pracovníci výzkumného ústavu si rychle uvědomili, že za těchto podmínek se může stát, že jeden robot na vyčištění celé městské kanalizace nebude stačit. Doporučili tedy do kanalizace poslat více robotů najednou a naprogramovat je tak, aby dohromady pročistili celou kanalizaci.

Nový typ čistícího robota ale není zrovna levný, a proto je potřeba navrhnout takový postup, aby celá kanalizace byla vyčištěna pomocí co nejmenšího počtu robotů. A to je už úkol pro vás.

Kanalizační síť je tvořena n uzly očíslovanými od 1 do n , mezi kterými vede m trubek. Každá trubka spojuje dvojici uzlů a nemá žádné odbočky, ani se nikde nevětví. Mezi každou dvojicí uzlů vede nejvýše jedna trubka.

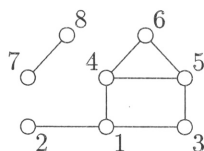
Soutěžní úloha. Vytvořte program, který pomůže naplánovat trasy pro čistící roboty. Program načte popis kanalizační sítě, určí minimální počet robotů postačující pro vyčištění celé sítě a navrhne jejich trasy tak, aby každou trubkou prošel právě jeden z nich právě jednou.

Formát vstupu: První řádek vstupního souboru `roury.in` obsahuje dvě kladná celá čísla: počet uzlů n ($1 \leq n \leq 500$) a počet trubek m , oddělená mezerou. Každý z následujících m řádků popisuje jednu trubku; obsahuje vždy dvě čísla oddělená mezerou, což jsou čísla koncových uzlů trubky.

Formát výstupu: Na prvním řádku výstupního souboru `roury.out` bude zapsáno jediné celé číslo R — nejmenší počet robotů, který postačuje k vyčištění kanalizační sítě. Následuje R řádků, z nichž i -tý popisuje trasu i -tého robota. Pokud i -tý robot začíná čistící proces v uzlu a_1 , odtud pokračuje trubkou do uzlu a_2 , pak do a_3 , atd. až skončí v uzlu a_k , potom příslušný řádek výstupního souboru obsahuje k čísel $a_1, a_2, \dots, a_k$ (v tomto pořadí) oddělená od sebe vždy jednou mezerou.

Příklad. Soubor `roury.in`: Soubor `roury.out`:

8 8	3
1 2	2 1 3 5 4 1
1 3	4 6 5
1 4	8 7
3 5	
4 5	
4 6	
5 6	
7 8	



Jestliže existuje více optimálních řešení, váš program má za úkol nalézt a vypsat právě jedno z nich.

P – III – 5

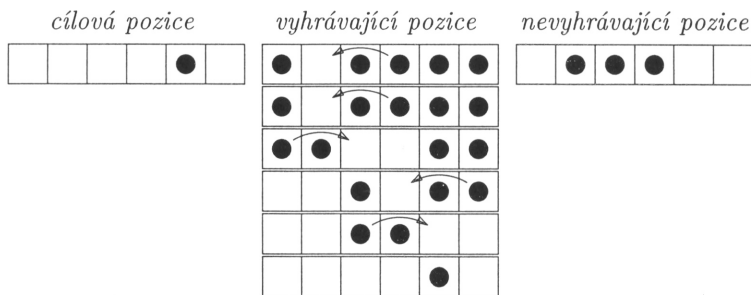
Program: kameny.pas / kameny.c / kameny.cpp

Vstupní soubor: kameny.in

Výstupní soubor: kameny.out

Uvažujme následující hru pro jednoho hráče. Hrací plán je tvořen K políčky uspořádanými do jedné řady. Na začátku hry je na tomto plánu umístěno několik hracích kamenů (na každém políčku leží nejvýše jeden kámen). Je zadána tzv. *cílová pozice*, tj. rozestavení kamenů, kterého je třeba dosáhnout. V jednom tahu můžeme táhnout kamenem z políčka p tak, že jím přeskočíme kámen ležící na sousedním políčku. Přesněji: Pokud je na sousedním políčku napravo (nalevo) od políčka p kámen a následující políčko tímto směrem je volné, lze kámen z políčka p přesunout na volné políčko a přeskočený kámen odstranit z hracího plánu. Jak již bylo řečeno, úkolem je dosáhnout pomocí těchto tahů cílové pozice. Pokud ze zadané pozice lze cílové pozice dosáhnout, říkáme, že zadaná pozice je *vyhrávající*.

Například, pokud pozice vlevo na následujícím obrázku je cílová, pak v prostředním sloupci je jedna z vyhrávajících pozic vzhledem k této cílové pozici (s uvedením příslušné posloupnosti tahů, kterými lze cílové pozice dosáhnout). Naopak pozice v pravé části obrázku není vyhrávající, neboť v ní lze na začátku táhnout jen prostředním ze tří kamenů a tím se dostaneme do pozice se dvěma kameny oddělenými dvěma prázdnými políčky, ze které již nelze dál pokračovat ve hře.



Soutěžní úloha. Vytvořte program, který přečte dvě celá čísla K a N a cílovou pozici a vypíše počet různých vyhrávajících pozic tvořených nejvýše N kameny.

Formát vstupu: Vstupní soubor `kameny.in` bude obsahovat na prvním řádku dvě celá čísla K a N oddělená jednou mezerou. Na druhém řádku souboru bude zadána cílová pozice jako posloupnost K nul a jedniček oddělených mezerami, kde jednička představuje políčko obsazené kamenem a nula prázdné políčko. Můžete předpokládat, že platí $1 \leq N \leq K \leq 100$.

Formát výstupu: Výstupní soubor `kameny.out` bude obsahovat jedno celé číslo, které udává počet vyhrávajících pozic tvořených nejvýše N kameny. Můžete předpokládat, že toto číslo nepřesáhne 10 000.

Příklad. Soubor `kameny.in`:

6 3

0 0 1 1 0 0

Soubor `kameny.in`:

8 5

1 0 0 0 0 0 1

Soubor `kameny.out`:

3

Soubor `kameny.out`:

10

Úlohu nejprve převedeme do terminologie teorie grafů. *Bipartitní graf* je takový graf, ve kterém můžeme vrcholy rozdělit do dvou disjunktních množin R a S tak, aby každá hrana grafu spojovala některý vrchol z množiny R s některým vrcholem z množiny S . Čtvercovou matici A nul a jedniček rozměrů $n \times n$ můžeme chápat jako reprezentaci bipartitního grafu G s $2n$ vrcholy, kde vrcholy $r_1, r_2, \dots, r_n$ odpovídají řádkům a vrcholy $s_1, s_2, \dots, s_n$ sloupcům matice. Vrcholy r_i a s_j jsou spojeny hranou právě tehdy, když prvek $A[i, j] = 1$. Hranu mezi r_i a s_j budeme značit (r_i, s_j) .

Řekneme, že bipartitní graf má *perfektní párování*, jestliže se jeho vrcholy dají uspořádat do dvojic tak, že v každé dvojici je jeden vrchol z množiny R a jeden vrchol z množiny S a tyto dva vrcholy jsou spojeny hranou. Každý vrchol grafu se přitom musí nacházet právě v jedné takovéto dvojici.

Ukážeme, že jestliže bipartitní graf G má perfektní párování, potom v naší matici A lze přerovnat řádky a sloupce takovým způsobem, aby na hlavní diagonále byly samé jedničky. Pokud párování obsahuje dvojice $(r_{i_1}, s_{j_1}), (r_{i_2}, s_{j_2}), \dots, (r_{i_n}, s_{j_n})$, pak stačí řádky uspořádat v pořadí $i_1, i_2, \dots, i_n$ a sloupce v pořadí $j_1, j_2, \dots, j_n$. Označme takto přerovnanou matici A' . Platí $A'[k, k] = A[i_k, j_k]$. Jelikož mezi vrcholy r_{i_k} a s_{j_k} v grafu G vede hrana, platí $A[i_k, j_k] = 1$, a proto matice A' má na hlavní diagonále samé jedničky.

Naopak, pokud lze matici A přerovnat tak, aby měla na hlavní diagonále samé jedničky, pak v grafu G existuje perfektní párování. Necht' v přerovnané matici A' jsou řádky v pořadí $i_1, i_2, \dots, i_n$ a sloupce v pořadí $j_1, j_2, \dots, j_n$. Víme, že pro všechna k platí $A'[k, k] = 1$, a proto také $A[i_k, j_k] = 1$. Proto v grafu G dvojice $(r_{i_1}, s_{j_1}), (r_{i_2}, s_{j_2}), \dots, (r_{i_n}, s_{j_n})$ tvoří perfektní párování. Dokázali jsme tedy následující tvrzení:

Matici A je možné transformovat na tvar se samými jedničkami na hlavní diagonále právě tehdy, když existuje perfektní párování v grafu G .

Jestliže tedy chceme zjistit, jak zadanou matici A přetransformovat na tvar se samými jedničkami na hlavní diagonále, nalezneme nejprve perfektní párování v bipartitním grafu G . Pokud perfektní párování existuje, přerovnáme řádky a sloupce matice podle postupu uvedeného výše. Pokud takové párování neexistuje, matici nelze transformovat do požá-

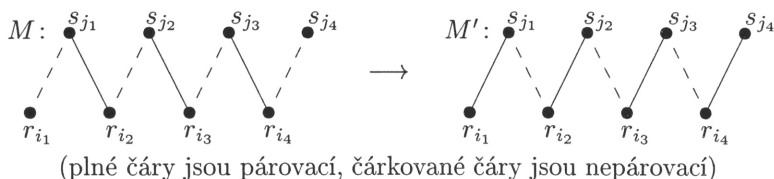
dovaného tvaru. Jediným problémem v tuto chvíli zůstává, jak nalézt perfektní párování bipartitního grafu.

Připomeňme si, že v perfektním párování jsou v každé dvojici vrcholy spojeny hranou. Proto můžeme perfektní párování chápat také jako množinu hran M takovou, že každý vrchol grafu je koncovým vrcholem právě jedné hrany z M . Podobně můžeme definovat *párování* jako množinu hran M takovou, že každý vrchol grafu je koncovým vrcholem nejvýše jedné hrany z M . To znamená, že v párování, které není perfektní, nemusí být každý vrchol zařazen do některé dvojice. Ukážeme si nyní algoritmus, jak nalézt v bipartitním grafu *maximální párování*, tj. párování s nejvyšším možným počtem hran.

Maximální párování budeme hledat postupně. Začneme s prázdným párováním $M = \emptyset$ a v každém kroku zvýšíme počet párovacích hran o jedna. Když se nám v některém kroku nepodaří zvýšit počet hran v párování, prohlásíme aktuální nalezené párování za maximální a výpočet ukončíme.

Počet hran v párování budeme zvyšovat pomocí takzvaných zlepšujících cest. Uvažujme libovolně pevně zvolené párování M . *Alternující cesta* pro párování M je posloupnost vrcholů $r_{i_1}, s_{j_1}, r_{i_2}, s_{j_2}, \dots, r_{i_k}, s_{j_k}$, která začíná řádkovým vrcholem, končí sloupcovým vrcholem, každá dvojice po sobě jdoucích vrcholů je spojena hranou a střídají se párovací a nepárovací hrany, přičemž první hrana (r_{i_1}, s_{j_1}) je nepárovací. *Zlepšující cesta* je alternující cesta, která začíná i končí nespárovaným vrcholem.

Všimněte si, že zlepšující cesta $P = r_{i_1}, s_{j_1}, r_{i_2}, s_{j_2}, \dots, r_{i_k}, s_{j_k}$ se skládá z $k - 1$ párovacích a k nepárovacích hran. Mějme tedy párování M a zlepšující cestu P . Jestliže všechny párovací hrany v P změním na nepárovací a naopak, dostaneme nové párování M' , které má o jednu hranu více (uvědomte si, že M' skutečně splňuje podmínky párování).



Dokážeme nyní, že naším postupem vždy dostaneme maximální párování, tzn. že vždy existuje zlepšující cesta pro párování, které není maximální.

Tvrzení. *Jestliže párování M není maximální, existuje pro něj zlepšující cesta v G .*

DŮKAZ TVRZENÍ. Necht M je párování, které není maximální. Jelikož M není maximální, musí existovat nějaké párování M' , které obsahuje více hran než M . Hraný patřící do M , ale nepatřící do M' , nazveme *modré*, zatímco hrany patřící do M' a ne do M nazveme *červené*. Protože $|M'| > |M|$, červených hran je více než modrých.

Uvažujme graf G' tvořený všemi modrými a červenými hranami. Každý vrchol v G' sousedí s nejvýše jednou modrou a jednou červenou hranou. Každá komponenta souvislosti grafu G' proto musí být buď kružnice, nebo cesta, přičemž na každé kružnici i cestě se střídají červené a modré hrany. To znamená, že každá kružnice obsahuje stejný počet modrých a červených hran, počty červených a modrých hran na každé cestě se liší nejvýše o 1. Protože červených hran je více než modrých, musí existovat komponenta P , která obsahuje více červených hran než modrých. Tato komponenta musí být cestou, která začíná i končí červenou hranou. Cesta P tedy obsahuje lichý počet hran. Z toho vyplývá, že jeden z jejích konců musí být řádkovým vrcholem (nazveme ho r_i) a druhý sloupcovým vrcholem (nazveme ho s_j). Jelikož r_i resp. s_j je nespárovaný řádkový resp. sloupcový vrchol a každá druhá hrana patří do párování M , musí být P zlepšující cesta pro M .

Implementace algoritmu. Graf G reprezentujeme samotnou maticí, tj. dvojrozměrným polem A . Pro každý vrchol r_i (s_j) si budeme v poli `par_r` (`par_s`) pamatovat, zda je spárovaný s nějakým vrcholem a pokud ano, číslo tohoto vrcholu. Začneme se všemi vrcholy nespárovanými. Funkce `Zlepsi` hledá zlepšující cestu a když ji najde, použije ji na zlepšení stávajícího párování. Hledání zlepšující cesty budeme realizovat prohledáváním do šířky ze všech vrcholů r_i , které ještě nejsou spárované. Jakmile najdeme nějakou alternující cestu do nespárovaného vrcholu s_j , prohledávání ukončíme. V tomto okamžiku je třeba projít po nalezené cestě z s_j zpět do r_i a změnit párovací hrany na nepárovací a naopak, což znamená aktualizování záznamů v polích `par_r` (`par_s`) pro všechny vrcholy na nalezené cestě. Funkce `Zlepsi` bude volána opakovaně v cyklu tak dlouho, dokud bude možné zvyšovat počet hran v párování. Podaří-li se vylepšit párování n krát, máme nalezeno perfektní párování, které použijeme na přerovnění matice do požadovaného tvaru. V opačném případě program podá zprávu o tom, že se zadaná matice uspořádat nedá.

Efektivita. Každé volání funkce `Zlepsi` potřebuje čas $O(n^2)$, celkově se provede nejvýše n volání této funkce, což dává celkovou časovou složitost $O(n^3)$. Na uložení matice A potřebujeme paměť $O(n^2)$.

Úlohu nejprve převedeme do terminologie teorie grafů. Uzly nacházející se v naší soustavě potrubí budeme nazývat *vrcholy*, trubky nazveme *hranami* a celou soustavu potrubí nazveme *grafem*. Posloupnost vrcholů a hran grafu $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$ označíme jako *sled*, jestliže každá hrana e_i spojuje vrcholy v_{i-1} a v_i . Pokud navíc $v_0 = v_k$, tento sled nazveme *uzavřeným*. V řeči teorie grafů je naším úkolem v daném souvislém grafu G nalézt uzavřený sled, který projde každou hranou grafu právě dvakrát.

Ukážeme si algoritmus, který v libovolném souvislém grafu najde sled požadovaných vlastností. Tento algoritmus tedy bude zároveň důkazem, že trasa pro robota vždy existuje. Řešení je založeno na prohledávání grafu do hloubky. O každém vrcholu si budeme pamatovat, zda jsme ho již během prohledávání někdy navštívili. Pro každý navštívený vrchol v nechť $\text{rodic}[v]$ označuje vrchol, z něhož robot do v poprvé přišel. Vrchol $\text{rodic}[v]$ je *rodičem* vrcholu v , naopak vrchol v nazveme *potomkem* vrcholu $\text{rodic}[v]$. Pro vrchol 1 není $\text{rodic}[1]$ definován.

Prohledávání do hloubky začíná ve vrcholu 1 a probíhá takto:

1. Označ aktuální vrchol v jako navštívený.
2. Postupně kontroluj všechny hrany vedoucí z v a vždy, když najdeš hranu, která vede do dosud nenavštíveného vrcholu u , projdi robotem do vrcholu u a pokračuj rekurzivně v prohledávání z u (v se stane rodičem vrcholu u).
3. Když jsou všechny hrany vedoucí z v zkontrolovány a $v \neq 1$, vrať se do vrcholu $\text{rodic}[v]$ (a pokračuj v kontrolování jeho hran). Jestliže $v = 1$, skonči.

Uvažujme množinu hran, po nichž robot poprvé přišel do nějakého vrcholu. Jsou to právě hrany $(\text{rodic}[v], v)$ pro ty vrcholy v , pro které je $\text{rodic}[v]$ definováno. Tyto hrany nazveme *stromové* (nazývají se tak proto, že tvoří souvislý acyklický graf, tzv. strom). Každou stromovou hranou (u, v) , kde u je rodičem v , projde robot při prohledávání právě dvakrát — nejprve z vrcholu u poprvé navštíví vrchol v a podruhé při návratu z vrcholu v do vrcholu u . Při prohledávání robot nikdy neprojde po žádné nestromové hraně. Jelikož náš graf G je souvislý, robot při prohledávání navštíví všechny vrcholy. Kdyby totiž existoval nenavštívený vrchol, musel by existovat takový navštívený vrchol u a nenavštívený vrchol v , že u a v jsou spojeny hranou. To však není možné, neboť al-

goritmus prohledávání se z vrcholu u do $\text{rodic}[u]$ nevrátí, dokud nejsou všechny sousední vrcholy vrcholu u navštíveny.

Podle dosud popsaného prohledávání do hloubky tedy robot navštíví každý vrchol a projde každou stromovou hranou právě dvakrát. Zbývá rozhodnout, kdy a jak bude robot procházet nestromové hrany. Během prohledávání lze snadno detekovat všechny nestromové hrany. Jestliže se robot nachází ve vrcholu u a kontroluje hranu (u, v) , tato hrana je nestromová tehdy, pokud vrchol v již byl navštíven a u není rodičem v ani v není rodičem u . Když robot nacházející se ve vrcholu u narazí na nestromovou hranu (u, v) , může příslušnou trubku vyčistit tak, že jí projde z vrcholu u do v a zpět.

Implementace algoritmu. Prohledávání do hloubky můžeme snadno implementovat rekurzivní procedurou. Jelikož rekurze si pro aktuální vrchol automaticky pamatuje svého rodiče, není třeba explicitně udržovat záznamy $\text{rodic}[v]$. Graf lze v programu reprezentovat maticí velikosti $n \times n$, z čehož vyplývá časová i paměťová složitost programu $O(n^2)$. Při použití efektivnější reprezentace hran spojovým seznamem je možné dosáhnout časové i paměťové složitosti $O(m + n)$, kde m je počet hran grafu, ovšem za cenu o něco komplikovanějšího programu.

P – I – 3

Dokážeme nejprve, že spravedlivá přímka vždy existuje. Uvažujme libovolnou orientovanou přímku vedoucí bodem $[0, 0]$. Nechť x je rozdíl počtu bílých bodů nalevo a černých bodů napravo od ní. Jestliže je x rovno nule, přímka je spravedlivá. Pokud ne, budeme přímkou otáčet kolem bodu $[0, 0]$. Vždy, když přímka projde přes bílý nebo černý bod, hodnota x se sníží nebo zvýší o jedna. Když přímku otočíme přesně o 180° , naše sledovaná hodnota se změnila z počátečního x na $-x$ (neboť všechny body, které byly původně nalevo, jsou nyní napravo od přímky a naopak). To znamená, že hodnota musela být aspoň při jedné poloze přímky nulová. V této poloze byla přímka spravedlivá.

Řekneme, že bod B leží nalevo od bodu A , jestliže je nalevo od orientované přímky vedoucí z bodu $[0, 0]$ do A . Základem algoritmu je následující pozorování. Uvažujme nějakou spravedlivou přímku p . Nechť A je první bod, na který narazíme, pokud budeme přímkou p otáčet ve směru hodinových ručiček kolem bodu $[0, 0]$. Bod A a všechny body, které leží od něj napravo, se nacházejí v jedné polorovině určené přímkou p . Body, které jsou od A nalevo, leží ve druhé polorovině. Vidíme, že nezáleží na

konkrétní poloze přímky p , rozdělení bodů je určeno polohou „hraničního“ bodu A .

Stačí tedy uvažovat každý ze zadaných bodů jako kandidáta na bod A , spočítat počet bílých a počet černých bodů nalevo a napravo od něj a zkontrolovat, zda tyto počty splňují podmínky spravedlivé přímky. Když najdeme úspěšného kandidáta, spravedlivou přímku sestrojíme tak, že přímku vedoucí z $[0, 0]$ tímto bodem trochu pootočíme kolem bodu $[0, 0]$ proti směru hodinových ručiček tak, abychom s ní při tomto otáčení nepřešli přes žádný jiný bod. To lze provést například tak, že určíme první bod X , přes který bychom při takovémto otáčení přímkou přešli, a výslednou přímku vedeme středem mezi kandidátem A a bodem X . Popsaný algoritmus má časovou složitost $O(n^2)$, neboť pro každého kandidáta zjišťujeme polohu každého bodu vzhledem k tomuto kandidátovi.

Algoritmus lze ještě zefektivnit tím, že si všechny bílé a černé body nejprve setřídíme podle jejich pořadí ve směru hodinových ručiček kolem bodu $[0, 0]$. Kandidáty na hraniční bod A pak budeme zkoušet v tomto utříděném pořadí. Kdykoliv budeme přecházet od kandidáta $i - 1$ ke kandidátovi i , nemusíme již pro každý bod znovu zjišťovat, zda leží od bodu i nalevo nebo napravo, neboť mnoho bodů zůstane v původní polovině. Budeme si proto v každém kroku udržovat informaci o počtu bílých a černých bodů ležících v pravé polovině a index j , který ukazuje na poslední bod v pravé polovině ve směru hodinových ručiček. Když se přesuneme na kandidáta i , stačí bod $i - 1$ přemístit do levé poloviny (tj. odebrat ho z počtu bodů příslušné barvy, které jsou v pravé polovině) a potom posouvat index j ve směru hodinových ručiček, dokud nenajdeme první bod, který leží nalevo od bodu i . Všechny body, přes které jsme s indexem j přešli, se přesunou z levé poloviny do pravé a je proto třeba připočítat je k zaznamenanému počtu bodů příslušné barvy. Pokud při posouvání bodu j dojdeme na konec pole, budeme pokračovat cyklicky opět od začátku. Nesmíme zapomenout ošetřit okrajové případy, když například všechny body leží od bodu j nalevo nebo napravo.

Utrždit body ve směru hodinových ručiček můžeme v čase $O(n \log n)$ některým ze standardních třídících algoritmů, pouze namísto běžného porovnávání hodnot si musíme napsat funkci, jež pro dva body určí, který z nich má větší úhel. Pro první bod musíme projít všechny ostatní body a zjistit, které leží vlevo a které vpravo (v čase $O(n)$). Pro každý další bod už jen budeme posouvat indexy i a j a sledovat pouze body, přes které

přecházíme. Přes každý bod přejdeme každým indexem nejvýše jednou, takže celkový čas posouvání pro všechny kandidátské body dohromady bude $O(n)$. Výsledná časová složitost algoritmu bude proto $O(n \log n)$ a paměťová složitost $O(n)$.

P – I – 4

Část a. Vstupní soubor může mít například následující formát (váš program samozřejmě může používat jiný formát vstupních dat). Na prvním řádku souboru je zadán počet vodičů a počet komparátorů v síti, na druhém řádku jsou uvedeny jednotlivé vstupy sítě v pořadí od vrchního vodiče po spodní a zbývající řádky obsahují popis sítě. Každý komparátor je určen dvěma čísly zapsanými na jednom řádku. Tato čísla udávají vrchní a spodní vodič, které jsou spojené příslušným komparátorem. Vodiče v síti jsou očíslovány shora dolů počínaje jedničkou. Komparátory jsou uvedeny v pořadí zleva doprava, jednotlivé vrstvy sítě se oddělují řádkem obsahujícím dvě nuly.

Program může pro jednoduchost zobrazovat výpočet sítě semigraficky. Nejprve přečte vstupní údaje, přičemž informace o všech komparátorech a oddělovačích vrstev uloží do jednoho pole. Potom bude vykreslovat síť postupně zleva doprava. Pokaždé, když program nakreslí komparátor, odsimuluje jeho činnost na aktuálním stavu vodičů. To znamená, že porovná příslušné dvě hodnoty v poli a pokud jsou v opačném pořadí, vymění je. Po ukončení každé vrstvy (tj. vždy, když v seznamu komparátorů narazíme na oddělovač vrstev) program vypíše aktuální stav hodnot na všech vodičích.

Jediný problém, který je třeba vyřešit, spočívá v umístění jednotlivých komparátorů téže vrstvy do sloupců pod sebe tak, aby se žádné dva komparátory v jednom sloupci nepřekrývaly. Program si proto bude pamatovat, které z vodičů jsou v aktuálním sloupci už obsazeny komparátorem. Jestliže se další komparátor překrývá s některým komparátorem zakresleným v aktuálním sloupci, založíme nový sloupec a komparátor umístíme do nového sloupce.

Celková časová složitost takto navrženého programu je úměrná velikosti nakresleného obrázku, tj. $O(nk)$, kde n je počet vodičů a k je počet sloupců, v nichž jsou komparátory zobrazeny.

Na závěr uvedeme pro ilustraci příklad vstupu a výstupu programu napsaného podle výše uvedeného popisu (jedná se o komparátorovou síť ze studijního textu):

Vstup:

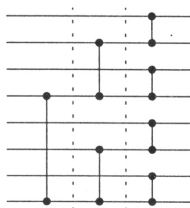
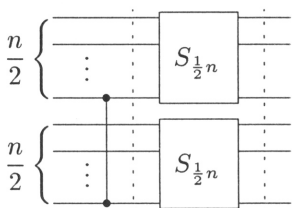
4 5	1 2
4 1 2 3	3 4
1 4	0 0
2 3	2 3
0 0	0 0

Výstup:

4--*-----3-----1-----1
1-- -----1-----3-----2
2-- -----2-----2-----3
3--*-----4-----4-----4

Část b. Komparátorovou síť sestavíme rekurzivně. Označme S_n síť, která úlohu řeší pro n vstupů. Síť S_1 neobsahuje žádný komparátor, neboť máme jen jeden vstup a ten je jistě setříděn. Předpokládejme, že $n > 1$. První vrstva sítě obsahuje pouze jediný komparátor umístěný mezi vodiči n a $\frac{1}{2}n$. Potom rozdělíme n vodičů na dvě poloviny — horní a dolní — a na každou polovinu vodičů použijeme síť $S_{\frac{1}{2}n}$. Tyto dvě podsítě budou pracovat paralelně.

Konstrukce sítě S_n je zobrazena na následujícím obrázku vlevo, vpravo je příklad výsledné sítě pro $n = 8$.



Ukážeme si, proč takto sestavená síť řeší zadanou úlohu. Postupujeme indukcí podle počtu vodičů. Označme vstupní hodnoty sítě $x_1, x_2, \dots, x_n$ (umístěny na vodičích v pořadí shora dolů). Mohou nastat dva případy podle toho, zda je x_n menší nebo větší než $x_{\frac{1}{2}n}$. Předpokládejme nejprve, že $x_n \geq x_{\frac{1}{2}n}$. V takovém případě komparátor v první vrstvě nevymění vstupní hodnoty. Protože $x_n \geq x_{\frac{1}{2}n}$, prvek x_n patří v uspořádaném pořadí na některý z dolní poloviny vodičů. („Dolní“ polovinou vodičů budeme rozumět vodiče se vstupními hodnotami $x_{\frac{1}{2}n+1}$ až x_n , tj. vodiče, které na schématu komparátorové sítě kreslíme v dolní polovině obrázku.)

Po prvním kroku výpočtu tedy platí, že horní polovina je celá utříděna a obsahuje $\frac{1}{2}n$ nejmenších prvků ze vstupu. Dolní polovina je utříděna s případnou výjimkou posledního prvku a obsahuje $\frac{1}{2}n$ největších prvků. Vstupy obou podsítí $S_{\frac{1}{2}n}$ tudíž splňují podmínku ze zadání, že všechny hodnoty kromě poslední mají být na vstupu utříděny (to nevylučuje případ, že také poslední hodnota bude utříděna). Na výstupu proto budou

podle indukčního předpokladu obě poloviny v setříděném pořadí. Jeli-
kož už po prvním kroku každá polovina obsahovala správné prvky, bude
správně uspořádána i celá posloupnost.

Druhý případ nastane, jestliže $x_n < x_{\frac{1}{2}n}$. V této situaci kompará-
tor v první vrstvě vymění hodnoty obou těchto vodičů. Víme, že x_n
patří někam do horní poloviny prvků a dostane se na nejspodnější vodič
horní poloviny. Naopak, poslední prvek z horní poloviny, tj. $x_{\frac{1}{2}n}$, patří
ve skutečnosti do dolní poloviny (při třídění je „vytlačen“ prvkem x_n).
Prvek $x_{\frac{1}{2}n}$ se však prvním komparátorem dostane na nejspodnější vo-
dič, tj. do dolní poloviny. Podobně jako v předchozím případě i nyní tedy
máme po prvním kroku v každé polovině ty prvky, které tam v setříděném
pořadí patří. Obě poloviny jsou navíc setříděny s případnou výjimkou
svého nejspodnějšího prvku. Po aplikování podsítí $S_{\frac{1}{2}n}$ proto opět podle
indukčního předpokladu dostaneme dvě utříděné poloviny, které společně
vytvoří celou správně uspořádanou posloupnost.

Hloubka rekurze je v naší konstrukci $\log_2 n$, neboť každá úroveň re-
kurze sníží počet vodičů na polovinu. V každé úrovni rekurze přidáme do
sítě jednu vrstvu, celkový počet vrstev je tedy také roven $\log_2 n$.

První vrstva obsahuje jeden komparátor, v každé další vrstvě se počet
komparátorů zdvojnásobí. Nechť počet vstupů je $n = 2^k$. Potom počet
použitých komparátorů je roven $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1 = n - 1$
(součet geometrické řady). Naše síť má tedy $O(\log n)$ vrstev a používá
 $O(n)$ komparátorů.

P – II – 1

Každého asi napadne triviální řešení — vyzkoušet všechny možné ob-
délníky. Obdélník je určen dvojicí protilehlých vrcholů, polohu každého
vrcholu můžeme zvolit mn způsoby. V každém zvoleném obdélníku pro-
jdeme po jeho obvodě a ověříme, zda všechny jeho obvodové prvky jsou
jedničky. Tento jednoduchý algoritmus pracuje v čase $O((mn)^2(m+n))$.

Popsaný algoritmus můžeme vylepšit tím, že zrychlíme ověřování, zda
je zvolený obdélník orámovaný. Nechť $h[i, j]$ označuje délku maximál-
ního souvislého úseku jedniček ve sloupci *nad* prvkem (i, j) , počítáno
včetně tohoto prvku. Přesněji řečeno, $h[i, j] = d$ je takové číslo, že platí
 $A[i, j] = A[i - 1, j] = \dots = A[i - d + 1, j] = 1$ a zároveň buď $d = i$,
nebo $A[i - d, j] = 0$. Všimněte si, že když $A[i, j] = 0$, podle této definice
je také $h[i, j] = 0$. Podobně nechť $l[i, j]$ označuje délku maximálního
souvislého úseku jedniček v řádku *nalevo* od prvku (i, j) , včetně prvku

(i, j) . Hodnoty $h[i, j]$ a $l[i, j]$ si můžeme vypočítat napřed pro všechny prvky matice. Pro každý prvek zvlášť dokážeme zjistit délku úseku jedniček nalevo a nahoru od něho v čase $O(m + n)$. Celkem máme mn prvků, takže tento předvýpočet polí h a l snadno implementujeme v čase $O(mn(m + n))$. Můžeme ho však ještě urychlit. Jestliže totiž $A[i, j] = 0$, víme, že také $h[i, j] = 0$. Jestliže $A[i, j] = 1$, počet jedniček v souvislém úseku nad prvkem (i, j) je o 1 větší než počet jedniček v úseku nad prvkem $(i - 1, j)$, tj. $h[i, j] = h[i - 1, j] + 1$. Stačí nám tedy počítat hodnoty h po sloupcích shora dolů a při jednom průchodu maticí A v čase $O(mn)$ získáme všech mn hodnot $h[i, j]$.

Předpokládejme nyní, že chceme zjistit, zda je obdélník s levým horním rohem (i_1, j_1) a pravým dolním rohem (i_2, j_2) orámovaný. Obdélník má dolní hranu ze samých jedniček právě tehdy, když úsek jedniček nalevo od prvku (i_2, j_2) má délku aspoň $j_2 - j_1 + 1$. Podobně ověříme, zda úsek nalevo od prvku (i_1, j_2) (horní hrana) má délku aspoň $j_2 - j_1 + 1$ a zda úseky nahoru od prvků i_2, j_1 a i_2, j_2 (levá a pravá hrana) mají délku aspoň $i_2 - i_1 + 1$. Pomocí polí l a h tedy dokážeme v konstantním čase zjistit, zda je daný obdélník orámovaný. Opět vyzkoušíme všechny možnosti umístění levého horního a pravého dolního rohu, pro každý obdélník zjistíme, jestli je orámovaný, a z orámovaných vybereme ten s největší plochou. Tento algoritmus potřebuje $O(mn)$ času na přípravu pomocných polí a $O((mn)^2)$ času na průchod všemi obdélníky. Celkový čas výpočtu je tedy $O((mn)^2)$.

Existuje ale ještě rychlejší řešení úlohy. Pro každou dvojici řádků $i_1 < i_2$ určíme největší orámovaný obdélník, jehož horní hrana leží v řádku i_1 a dolní hrana v řádku i_2 . Uvažujme dvojici pevně zvolených řádků i_1 a i_2 . Sloupec j nazveme *okrajovým*, jestliže v úseku mezi řádky i_1 a i_2 (včetně) obsahuje samé jedničky. Všimněte si, že sloupec j je okrajový právě tehdy, když $h[i_2, j] \geq i_2 - i_1 + 1$. Sloupec j nazveme *jedničkovým*, pokud v řádcích i_1 a i_2 obsahuje jedničku. Sloupec, který obsahuje nulu alespoň v jednom z těchto dvou řádků, nazveme *nulovým*.

Každý orámovaný obdélník s vodorovnými hranami ležícími v řádcích i_1 a i_2 odpovídá úseku od sloupce j_1 do sloupce j_2 pro nějaká $j_1 < j_2$ taková, že j_1 a j_2 jsou okrajové sloupce a sloupce $j_1 + 1, \dots, j_2 - 1$ jsou jedničkové. Uvažujme maximální úsek po sobě jdoucích jedničkových sloupců (pojmem maximální rozumíme, že se nedá rozšířit, tj. na obou koncích sousedí buď s nulovým sloupcem, nebo s okrajem matice). Jestliže tento úsek neobsahuje aspoň dva okrajové sloupce, zjevně nemůže obsahovat ani žádný orámovaný obdélník. Jestliže obsahuje aspoň

dva okrajové sloupce, potom největší orámovaný obdélník v daném úseku je určen nejlevějším a nejpravějším okrajovým sloupcem daného úseku. K nalezení největšího orámovaného obdélníka v pásu mezi řádky i_1 a i_2 nám tedy stačí v každém maximálním jedničkovém úseku určit nejlevější a nejpravější okrajový sloupec. Toho lze snadno dosáhnout v čase $O(n)$. Musíme vyzkoušet všechny dvojice řádků, celková časová složitost je proto $O(m^2n)$.

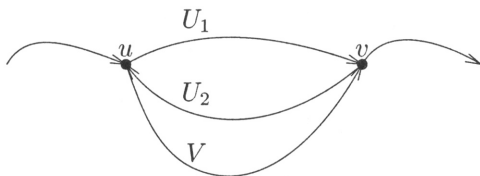
P – II – 2

Úlohu převedeme do řeči teorie grafů. Soustava potrubí tvoří jednoduchý orientovaný graf bez násobných hran a smyček. Uzly představují vrcholy tohoto grafu a trubky jsou jeho orientované hrany. Počet hran vstupujících do vrcholu grafu nazýváme vstupním stupněm tohoto vrcholu a počet vycházejících hran jeho výstupním stupněm. V našem grafu se vstupní a výstupní stupeň každého vrcholu sobě rovnají. Číslo, jemuž se rovnají, budeme také označovat jako počet průchodů vrcholem.

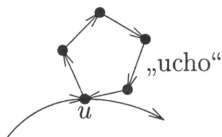
Uvažujme nejprve, co by se stalo, kdyby některý vrchol v měl počet průchodů větší než 2. Trasa robota zadaná na vstupu by takovým vrcholem v procházela alespoň třikrát. Nechť X je úsek trasy mezi prvním a druhým příchodem do v a Y úsek mezi druhým a třetím příchodem. Snadno nyní sestrojíme novou trasu robota. Až do prvního příchodu do v se jde podle původní trasy zadané na vstupu. Po příchodu do v půjde robot nejprve úsek Y (čímž se vrátí do v), potom úsek X (čímž se opět vrátí do v) a dále dokončí svoji cestu podle původní zadané trasy. Jinými slovy, oproti trase zadané na vstupu jsme jen vyměnili pořadí úseků X a Y . Tím jsme ale sestrojili odlišnou trasu. Nemá-li tedy žádná jiná trasa existovat, musí mít nutně každý vrchol počet průchodů 1 nebo 2.

Mějme nyní takový graf a v něm vyznačenou trasu, která začíná i končí ve vrcholu 1 a prochází každou hranou právě jednou. Pokud tento graf neobsahuje žádné hrany, trasa je zjevně jediná (prázdná trasa). Jestliže náš graf nějaké hrany má, půjdeme po vyznačené trase, dokud se na ní poprvé nějaký vrchol u nezopakuje. To určitě dříve či později nastane. Všimněte si úseku cesty mezi prvním a druhým příchodem do u — označme tento úsek U . Má-li některý vrchol úseku U (jiný než u) počet průchodů 2, znamená to, že se tento vrchol ještě někdy na trase vyskytne. Označme si symbolem v první takový vrchol. Tento vrchol rozdělí U na dvě části — část od u do v označme U_1 a část od v do u označme U_2 . Část trasy od druhého příchodu robota do vrcholu u do jeho druhého příchodu

do v označme V . Naše trasa tedy vypadá následovně: Robot přijde do u , projde po řadě úseky U_1 , U_2 , V a poté zbytek trasy. V takovém případě však existuje i jiná trasa: Robot stejně jako předtím přijde do u , projde postupně úseky V , U_2 , U_1 a zbytek trasy pak projde stejně jako v původní trase.



Z provedené úvahy vyplývá, že nemá-li existovat žádná jiná trasa, musí mít všechny vrcholy úseku U (kromě u) počet průchodů 1. Úsek U bude tedy tvořit *ucho* nad vrcholem u .



Jestliže hrany tvořící *ucho* z grafu odstraníme, nezměníme tím počet tras existujících v grafu. (Každá trasa v grafu totiž vypadá následovně: Robot nějakým způsobem přijde do vrcholu u , potom projde *ucho* a nakonec nějak projde zbytek grafu. Když hrany tvořící *ucho* odstraníme, ke každé trase v původním grafu najdeme odpovídající trasu v novém grafu tak, že z ní odstraníme hrany *ucha*.) Tím ale dostaneme graf s méně hranami, na němž můžeme tento postup zopakovat. Jestliže se nám takto podaří postupně odstranit všechny hrany z grafu, znamená to, že i původní graf měl jen jednu možnou trasu. Naopak, pokud v některém kroku zjistíme, že v právě zpracovávaném grafu existuje více tras, znamená to, že také náš původní graf obsahoval více tras.

Předchozí rozbor je již návodem, jak sestavit algoritmus řešící tuto úlohu. Pro každý vrchol si budeme pamatovat počet průchodů. Má-li některý vrchol počet průchodů větší než 2, ohlásíme, že existuje jiná trasa a výpočet ihned ukončíme. V opačném případě začneme postupně číst ze vstupu zadanou trasu robota a budeme si pamatovat, přes které vrcholy jsme již prošli. Když se nám některý vrchol v zopakuje, podíváme se, zda některý vrchol mezi oběma příchody do v nemá počet průchodů 2. Pokud takový vrchol najdeme, ohlásíme, že existuje jiná trasa a ukončíme

výpočet. Pokud ne, odstraníme tyto vrcholy z trasy a pokračujeme dále. (Všimněte si, že si vůbec nepotřebujeme pamatovat graf a měnit ho.) Když výpočet ukončíme s prázdnou trasou, ohlásíme, že žádná jiná trasa neexistuje.

Správnost tohoto algoritmu vyplývá z výše uvedeného popisu. Zbývá odvodit jeho časovou složitost. Nechť má náš graf N vrcholů a M hran. Jestliže z některého vrcholu vycházejí alespoň tři hrany, jakmile první takový vrchol najdeme, můžeme výpočet ukončit. V tomto případě je časová složitost algoritmu $O(N)$. (Pokud bychom dočetli ze vstupu celý graf a až potom kontrolovali počty průchodů přes vrcholy, zhoršila by se časová složitost na $O(M + N)$.) V opačném případě z každého vrcholu vycházejí nejvýše dvě hrany, proto $M = O(N)$. (Tedy náš graf má jen lineárně mnoho hran v závislosti na počtu vrcholů.) Proto také počet hran trasy je $O(N)$, neboť v trase je každá hrana obsažena právě jednou. Každý vrchol na trase nejvýše jednou načteme, nejvýše jednou se během výpočtu algoritmu podíváme na počet průchodů přes něj a nejvýše jednou ho z trasy vyřadíme. To znamená, že (při vhodné implementaci) bude také v tomto případě časová složitost popsaného algoritmu $O(N)$.

P – II – 3

Jestliže se učitel otáčí ze svého základního směru k nějakému žákovi proti směru hodinových ručiček, řekneme, že tento žák je nalevo. Jestliže se otáčí po směru hodinových ručiček, žák je napravo.

Nejprve dokážeme, že vždy existuje řešení, v němž je učitel otočen směrem k nějakému žákovi. Představme si přímku, která prochází bodem $[0, 0]$ a určuje základní směr. Otočme nyní tuto přímku kolem bodu $[0, 0]$ doleva o malý úhel α tak, aby žádný žák, který byl nalevo, nepřešel na pravou stranu, a naopak. Takovýmto natočením přímky úhly otočení všech žáků nalevo klesnou o α a úhly otočení všech žáků napravo vzrostou o α . Pokud je tedy nalevo více žáků, průměrný úhel otočení se zmenší, pokud je nalevo méně žáků, průměrný úhel se zvětší a pokud je na obou stranách stejně žáků, průměrný úhel se nezmění. Jestliže přímka určující nejlepší základní směr neprochází žádným bodem, alespoň jedním směrem ji můžeme trochu natočit, aniž by průměrný úhel vzrostl. S otáčením přímky přestaneme, jakmile přímka narazí na první bod.

Zbývá vyřešit případ, že přímka sice prochází některým bodem, ale učitel se dívá opačným směrem, tj. je otočen zády k tomuto žákovi. Taková situace ale nikdy není optimálním řešením. Předpokládejme, že

napravo je alespoň tolik žáků jako nalevo. Když otočíme přímku kousek doprava, všem napravo a žákovi za zády učitele klesne úhel otočení, takže celkově se průměrný úhel otočení zlepší. Když je naopak nalevo více žáků, průměrný úhel se zlepší natočením přímky doleva.

Tím jsme dokázali, že stačí zkoumat jen n základních směrů, v nichž je učitel otočen směrem k některému žákovi. Pro každou z těchto n možností spočítáme průměrný úhel otočení a vybereme nejlepší. Jestliže budeme počítat průměrný úhel otočení pro každý směr zvlášť, dostaneme algoritmus s časovou složitostí $O(n^2)$. My si však ukážeme lepší algoritmus s časovou složitostí $O(n \log n)$.

Nechť α_i je úhel, který s osou x svírá polopřímka vedoucí z bodu $[0, 0]$ k žákovi i (tj. úhel, který vypočítáme funkcí $\text{uhel}(x_i, y_i)$). Uvědomte si, jaký je vlastně úhel otočení mezi učitelem obráceným čelem k žákovi u a mezi žákem i . Musíme uvažovat čtyři případy:

- ▷ Žák i je nalevo a $\alpha_i > \alpha_U$. Úhel otočení je $\alpha_i - \alpha_U$.
- ▷ Žák i je nalevo a $\alpha_i < \alpha_U$. Úhel otočení je $\alpha_i - \alpha_U + 360^\circ$.
- ▷ Žák i je napravo a $\alpha_i < \alpha_U$. Úhel otočení je $\alpha_U - \alpha_i$.
- ▷ Žák i je napravo a $\alpha_i > \alpha_U$. Úhel otočení je $\alpha_U - \alpha_i + 360^\circ$.

Chceme-li určit průměrný úhel otočení, potřebujeme sečíst úhly otočení všech žáků. Sečítáním dostaneme následující výraz:

$$\sum_{\substack{\text{žák } i \\ \text{je nalevo}}} \alpha_i - \sum_{\substack{\text{žák } i \\ \text{je napravo}}} \alpha_i - L \cdot \alpha_U + P \cdot \alpha_U + X \cdot 360^\circ,$$

kde L je počet žáků nalevo, P je počet žáků napravo a X je počet žáků, kteří jsou nalevo s úhlem menším než α_U nebo napravo s úhlem větším než α_U .

Součet úhlů otočení tedy umíme spočítat v konstantním čase, jestliže známe součet hodnot α_i pro žáky nalevo a napravo a jestliže známe počty L, P, X .

Náš algoritmus si nejprve utřídí body podle úhlu α_i (tj. proti směru hodinových ručiček). Potom si pro každé i spočítá součet úhlů α_j pro prvních i bodů v utříděném pořadí a tato čísla uloží do pole β (tj. $\beta_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i$). Všimněte si, že $\beta_i = \alpha_i + \beta_{i-1}$, takže při průchodu setříděným polem s hodnotami úhlů α_i zleva doprava dokážeme spočítat všechny hodnoty β_i v lineárním čase. Když nyní budeme chtít určit součet úhlů v úseku od i -tého po j -tého žáka, stačí spočítat $\beta_j - \beta_{i-1}$.

Po této inicializaci budeme postupně zkoumat všechny možné základní směry v tom pořadí, v jakém se nacházejí v setříděném poli. Nechť

U je žák, který určuje základní směr. Pro každé U si najdeme posledního žáka l , který je nalevo. Všichni žáci mezi U a l (včetně l) jsou nalevo, ostatní žáci jsou napravo. Někdy máme $l < U$, v takovém případě jsou nalevo žáci $U+1, \dots, n$ a $1, \dots, l$. Podobně žáci napravo buď tvoří jeden, nebo dva souvislé úseky v utříděném poli. Známe-li U a l , můžeme použít pole β k tomu, abychom v konstantním čase zjistili součet úhlů α_i pro žáky nalevo a napravo, neboť to jsou součty jednoho nebo dvou souvislých úseků v poli α . Počty žáků nalevo a napravo (L a P) také lehce spočítáme. Určení hodnoty X se zdá trochu těžší, ale není — žák i má α_i menší než α_U tehdy, když je i menší než U (neboť pole je setříděné podle α). Pokud tedy známe indexy U a l , dokážeme snadno spočítat součet (a průměr) úhlů otočení v konstantním čase.

Zbývá už jen vyřešit problém, jak efektivně nalézt hodnotu l , tj. index posledního prvku ležícího vlevo od U . Pro $U = 1$ jednoduše začneme s $l = 1$ a budeme zvyšovat l , dokud nenajdeme poslední prvek, který je nalevo. Pro každou další hodnotu U využijeme fakt, že l z předcházejícího kroku je nyní určitě nalevo. Začneme proto od předcházející hodnoty l a budeme l zvyšovat, dokud nenajdeme první bod vpravo (když přijdeme na konec pole, pokračujeme v něm cyklicky zase od začátku). Index l tímto způsobem během celého výpočtu oběhne pole pouze dvakrát, takže celková složitost hledání posledního prvku vlevo je $O(n)$.

Výsledná časová složitost algoritmu je $O(n \log n)$, neboť třídění pracuje v čase $O(n \log n)$, hodnoty pole β dokážeme spočítat v čase $O(n)$, celkový čas otáčení indexu l je $O(n)$ a výpočet součtu úhlů otočení je konstantní pro jeden směr, tj. $O(n)$ pro všechny směry.

V ukázkovém programu jsme kvůli úspoře místa nahradili $O(n \log n)$ třídění kvadratickým. Použili jsme také pole délky $2n$, v němž se každý bod nachází dvakrát, což zjednodušuje výpočty (není třeba uvažovat, že poslední bod vlevo bude mít index menší než U — v případě potřeby jednoduše pokračujeme s hledáním indexu l dále za n a využíváme druhé kopie bodů v poli). Při implementaci je nutné dbát na to, aby program správně ošetřil různé okrajové případy, například, když všechny body leží nalevo nebo napravo od U .

P – II – 4

a) Správnou odpovědí je například vstup 6, 5, 4, 3, 2, 1 (ale také mnoho jiných vstupů). Pro vstup 6, 5, 4, 3, 2, 1 výpočet komparátorové sítě probíhá následovně:

6	5	3		1	1	1		1	1
5	6	6		4	4	4		4	4
4	3	5		5	5	2		2	2
3	4	2		2	2	5		5	5
2	1	1		3	3	3		3	3
1	2	4		6	6	6		6	6

b) Je třeba odstranit komparátor vyznačený šipkou na předcházejícím obrázku (jediné správné řešení). Dokážeme, že po odstranění tohoto komparátoru síť třídí. V prvních třech vrstvách se minimum dostane na první vodič a maximum na poslední vodič. To můžeme dokázat následujícím způsobem. Po první vrstvě je minimum na některém z vodičů 1, 3 nebo 5. Po druhé vrstvě je na vodiči 1 nebo 5 a po třetí vrstvě je určité na vodiči 1. Podobně maximum je po první vrstvě na vodiči 2, 4 nebo 6, po druhé vrstvě na vodiči 2 nebo 6 a po třetí vrstvě musí být na vodiči 6.

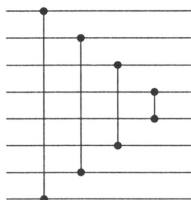
První a poslední vodič tedy po třetí vrstvě obsahují správné hodnoty. Další tři vrstvy setřídí prostřední čtyři vodiče. Čtvrtá vrstva umístí minimum z druhého a třetího vodiče na druhý vodič. Podobně pátý vodič obsahuje maximum ze čtvrtého a pátého vodiče. Pátá vrstva původní sítě se vynechává. V šesté vrstvě porovnáme mezi sebou maxima a minima z předcházejícího kroku, tj. po této vrstvě už druhý vodič obsahuje minimum a pátý vodič maximum ze zbývajících čtyř prvků. Zbývá dotřídit prostřední dva vodiče, což provede komparátor v poslední vrstvě.

c) Označme x_i číslo na vstupu i . Dokážeme nejprve následující pozorování: pro každé $i \leq n$ jedno z čísel x_i a x_{2n-i+1} patří mezi n nejmenších čísel a druhé mezi n největších. Předpokládejme, že obě čísla x_i a x_{2n-i+1} patří mezi n nejmenších čísel. Potom čísla $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ patří také mezi n nejmenších čísel, neboť jsou menší než x_i . Podobně také čísla $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n-i}$ patří mezi n nejmenších čísel, neboť jsou menší než x_{2n-i+1} . To znamená, že jsme celkově našli $i + (2n - i + 1 - n) = n + 1$ čísel, která patří mezi n nejmenších, což je spor. Alespoň jedno z čísel x_i a x_{2n-i+1} musí tedy patřit mezi n největších čísel.

Předpokládejme nyní, že obě čísla x_i a x_{2n-i+1} patří mezi n největších čísel. Potom ale také čísla $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$ a $x_{2n-i+2}, x_{2n-i+3}, \dots, x_{2n}$ patří mezi n největších čísel, neboť jsou větší než x_i nebo x_{2n-i+1} . Celkem jsme tedy našli $(n - i + 1) + (2n - 2n + i) = n + 1$ čísel, která patří

mezi n největších, což je spor. Proto obě čísla nemohou zároveň patřit ani mezi n největších.

Dokázali jsme, že jedno z čísel x_i a x_{2n-i+1} patří do horní poloviny výstupů a druhé do dolní. Do horní patří to z nich, které je menší. Stačí je tedy porovnat jedním komparátorem a každé z nich se tím dostane do správné poloviny výstupů. Toto provedeme pro každou dvojici x_i a x_{2n-i+1} pro $i = 1, 2, \dots, n$. Výsledná síť bude mít $n/2$ komparátorů v jediné vrstvě. Příklad takové sítě pro 8 vstupů ($n = 4$) ukazuje obrázek.



P – III – 1

Nejdříve si zavedeme několik pojmů, které nám usnadní vyjadřování při řešení této úlohy. Jestliže A je matice, pak A_i bude označovat její i -tý sloupec. *Signatura* prvku $a_{i,j}$ matice A je rovna hodnotě prvku $a_{i,j}$, pokud $a_{i,j}$ je číslo. Když $a_{i,j}$ je žolík, pak jeho signaturou rozumíme nejmenší číslo, které lze za žolík na pozici $a_{i,j}$ dosadit tak, aby i -tý řádek matice A tvořil neklesající posloupnost. Pokud tedy $a_{i,j}$ je žolík, pak jeho signatura je rovna největšímu z čísel mezi prvky $a_{i,1}, \dots, a_{i,j-1}$; když mezi těmito prvky není žádné číslo, je signatura $a_{i,j}$ rovna nule. Signatura sloupce matice je *utříděná*, jestliže posloupnost signatur jeho prvků od prvního po poslední řádek je neklesající.

Po zbytek řešení je A pevně zadaná matice z naší úlohy. Předpokládejme na chvíli, že máme dány sloupce $A'_1, \dots, A'_k$, které jsou přerovnáním prvků ve sloupcích $A_1, \dots, A_k$ matice A . Matici A^* budeme nazývat *rozšířením* sloupců $A'_1, \dots, A'_k$, pokud jsou splněny následující podmínky:

- ▷ matice A^* má stejné rozměry jako matice A ,
- ▷ i -tý sloupec matice A^* je přerovnáním i -tého sloupce matice A ,
- ▷ do matice A^* lze za žolíky doplnit celá čísla tak, aby každý její řádek tvořil neklesající posloupnost a
- ▷ prvních k sloupců matice A^* jsou sloupce $A'_1, \dots, A'_k$.

Navrhne algoritmus, o kterém později ukážeme, že řeší naši úlohu. Algoritmus bude postupně přerovnávat sloupce matice A od prvního po poslední. Předpokládejme, že už jsme přerovnali prvních k sloupců

a že jsme tedy již našli $A'_1, \dots, A'_k$; navíc předpokládejme, že signatura každého ze sloupců $A'_1, \dots, A'_k$ je utříděná. Popíšeme, jak přerovnáme další sloupec, tj. jak nalezneme A'_{k+1} . Prvky sloupce A'_{k+1} budeme volit v pořadí zdola nahoru: Za prvek $a'_{i,k+1}$ zvolíme největší dosud nepoužité číslo ze sloupce A_{k+1} , které je alespoň tak velké jako signatura prvku $a'_{i,k}$. Pokud takové číslo neexistuje, zvolíme jako prvek $a'_{i,k+1}$ žolík. Pokud již sloupec A_{k+1} neobsahuje žádné nepoužité žolíky, prohlásíme, že sloupce matice A nelze přerovnat. Povšimněte si, že když jsme úspěšně vytvořili sloupec A'_{k+1} , pak jeho signatura je utříděná.

DŮKAZ SPRÁVNOSTI. Je jasné, že pokud se našemu algoritmu podařilo přerovnat všechny sloupce matice A , potom výsledná matice je řešením úlohy. Zbývá ukázat, že když náš algoritmus nenalezl přerovnání sloupců matice A , pak žádné přerovnání sloupců matice A úlohu neřeší. K tomu si nejprve dokážeme dvě pomocná tvrzení:

Tvrzení 1. *Nechť $A'_1, \dots, A'_k$ jsou přerovnání prvních k sloupců matice A , jejichž signatury jsou utříděné. Nechť A'_{k+1} je přerovnání $(k+1)$ -ního sloupce matice A , které našel náš algoritmus. Pokud existuje rozšíření sloupců $A'_1, \dots, A'_k$, pak existuje i rozšíření sloupců $A'_1, \dots, A'_k, A'_{k+1}$.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že existuje rozšíření A^* sloupců $A'_1, \dots, A'_k$. Pokud se $(k+1)$ -ní sloupec A^* shoduje s A'_{k+1} , pak tvrzení platí z triviálních důvodů. Předpokládejme tedy, že sloupce A^*_{k+1} a A'_{k+1} jsou různé.

Nechť j je číslo nejspodnějšího řádku, kde se tyto sloupce liší. Můžeme předpokládat, že A^* je mezi všemi rozšířeními sloupců $A'_1, \dots, A'_k$ to, pro které je j nejmenší, tj. A^*_{k+1} se liší od A'_{k+1} co nejvýše. Mohou nastat dva případy:

- ▷ $a'_{j,k+1} = *$ ($a^*_{j,k+1}$ je tedy číslo). Potom ale náš algoritmus měl jako $a'_{j,k+1}$ zvolit některé číslo ze sloupce A_{k+1} : Číslo $a^*_{j,k+1}$ je totiž z triviálních důvodů větší nebo rovno signatuře prvku $a_{j,k}$ a tedy, když algoritmus volil prvek $a'_{j,k+1}$, existovalo ve sloupci A_{k+1} nepoužité číslo, které bylo větší nebo rovno signatuře prvku $a'_{j,k}$.
- ▷ $a'_{j,k+1}$ je číslo ($a^*_{j,k+1}$ je buď jiné číslo, nebo žolík). Sloupec A^*_{k+1} obsahuje číslo $a'_{j,k+1}$ na jiném než j -tém řádku; buď i číslo tohoto řádku. Platí tedy $a^*_{i,k+1} = a'_{j,k+1}$ a $i < j$.

Vyměňme nyní řádky i a j ve sloupcích $k+1$ až n v matici A^* ; označme A^{**} výslednou matici. Dokážeme, že A^{**} je také rozšíření $A'_1, \dots, A'_k$. Toto je ale ve sporu s volbou A^* jako rozšíření sloupců $A'_1, \dots, A'_k$ takového, že se sloupce A^*_{k+1} a A'_{k+1} shodovaly na co nejvíce pozicích zdola.

Když dosadíme za prvky matice A^* jejich signatury, budou všechny řádky neklesající. Dosadíme ty samé hodnoty za odpovídající žolíky v matici A^{**} (tj. hodnoty z i -tého řádku do j -tého a naopak). Jediné dvě dvojice prvků, kde by podmínka monotonie mohla být po výměně porušena, jsou prvky v k -tém a $(k+1)$ -ním sloupci v i -tém nebo v j -tém řádku. Protože ale sloupec A'_k je utříděný, je signatura prvku $a'_{i,k}$ menší nebo rovna signatuře prvku $a'_{j,k}$ a tedy i -tý řádek je neklesající. Prvek $a_{i,k+1}^* = a'_{j,k+1}$ je číslo a signatura $a_{j,k}^* = a_{j,k}^{**}$ je menší nebo rovna číslu $a_{i,k+1}^* = a_{j,k+1}^{**}$. Tedy i j -tý řádek je neklesající.

Tvrzení 2. *Nechť jsou dána přerovnání $A'_1, A'_2, \dots, A'_k$ prvních k sloupců matice A a necht' je signatura sloupce A'_k utříděná. Pokud se našemu algoritmu nepodaří vytvořit sloupec A'_{k+1} , pak neexistuje rozšíření sloupců $A'_1, A'_2, \dots, A'_k$.*

DŮKAZ. Označme j řádek, na kterém se náš algoritmus zastavil. Mezi dosud nepoužitými prvky sloupce A_{k+1} tedy nejsou již žádné žolíky a všechna jeho čísla jsou menší než signatura $a'_{j,k}$. To ale znamená, že sloupec A_{k+1} obsahuje pouze $m-j$ (m je počet řádků matice A) žolíků a čísel, jež jsou větší nebo rovna signatuře prvku $a'_{j,k}$. Pokud ale existuje rozšíření A^* sloupců $A'_1, A'_2, \dots, A'_k$, pak všechny prvky $a_{j,k+1}^*, \dots, a_{m,k+1}^*$ jsou buď žolík, nebo čísla větší nebo rovna signatuře prvku $a'_{j,k}$ (číslo $a_{i,k+1}^*$ v i -tém řádku je větší nebo rovno signatuře $a'_{i,k}$ a sloupec A'_k je utříděný). Potom ale sloupec A_k obsahuje alespoň $m-j+1$ žolíků a čísel, která jsou větší nebo rovna signatuře prvku $a'_{j,k}$, což jak víme není pravda.

Pomocí těchto dvou tvrzení již snadno dokážeme správnost našeho algoritmu. Pokud pro 0 sloupců existuje rozšíření, pak podle Tvrzení 2 nalezneme náš algoritmus sloupec A'_1 a pro něj též existuje rozšíření tentokrát podle Tvrzení 1. Nyní podle Tvrzení 2 nalezneme náš algoritmus sloupec A'_2 a pro sloupce A'_1, A'_2 existuje rozšíření podle Tvrzení 1, atd. Pokud tedy existuje řešení, náš algoritmus ho nalezneme.

Odhad časové a paměťové složitosti: Necht' vstupní matice A má n sloupců a m řádků. Na setřídění čísel v každém z n sloupců potřebujeme čas $O(m \log m)$. Zbylé operace již můžeme vykonat v čase $O(m)$ (pro jeden sloupec). Celková časová složitost algoritmu je tedy $O(nm \log m)$. Paměťová složitost je $O(mn)$.

Úlohu budeme řešit pomocí dynamického programování. Trasu, která splňuje všechny podmínky kladené na vyhovující trasy s výjimkou podmínky, že musí končit v nejnižše položeném orientačním bodě, budeme nazývat *částečná trasa*. Náš program bude počítat počet částečných tras, které končí v jednotlivých orientačních bodech.

Nejdříve si popíšeme algoritmus, který pracuje v čase $O(N^3)$, kde N je počet orientačních bodů. Utřídíme orientační body sestupně podle jejich nadmořské výšky a očíslovme je v získaném pořadí od 1 do N . Pro i, j ($1 \leq i < j \leq N$) bude hodnota $a[i, j]$ určovat počet částečných tras, které mají i jako předposlední orientační bod a končí v bodě j . Pro $i = 1$ bude $a[i, j] = 1$, protože trasa z orientačního bodu 1 do orientačního bodu j je právě jedna. Předpokládejme, že jsme již spočítali hodnoty $a[i', j']$ pro $j' < j$ a chceme spočítat hodnoty $a[i, j]$ pro $1 \leq i \leq N$. Pokud má uvažovaná částečná trasa končit úsekem i, j , musí do bodu i přijít z bodu k (s nadmořskou výškou větší než je výška bodu i) takového, že úhel otočení ze směru $\vec{k}i$ do směru $\vec{i}j$ je nejvýše 45° . Označme $S(i, j)$ množinu všech takových bodů k . Potom hodnota $a[i, j]$ je určena následujícím vzorečkem:

$$a[i, j] = \sum_{k \in S(i, j)} a[k, i].$$

Algoritmus pracující v kubickém čase lze nyní již snadno sestrojít. Úvodní setřídění orientačních bodů dle nadmořských výšek lze provést v čase $O(N \log N)$. Hodnoty $a[i, j]$ budeme počítat podle rostoucí hodnoty indexu i . Pro každou z $O(N^2)$ dvojic i a j existuje pouze $O(N)$ čísel k — otestování, zda $k \in S(i, j)$ provedeme pomocí funkce `uhel` ze zadání úlohy. Počet hledaných tras pak určíme jako součet hodnot $a[j, N]$ přes všechna j , $1 \leq j < N$. Náš algoritmus zjevně pracuje v čase $O(N^3)$ a v prostoru $O(N^2)$.

Právě sestrojený algoritmus ještě dále zrychlíme pomocí podobného triku, jaký jsme použili již v minulých kolech. Pro bod i setřídíme body k , $k < i$, podle směrů $\vec{k}i$ ve směru hodinových ručiček, a též body j , $j > i$, podle směrů $\vec{i}j$. Pro každé $j > i$, je množina $S(i, j)$ tvořena souvislým úsekem bodů k , $k < i$, v právě zavedeném uspořádání — necht' $l(i, j)$ a $p(i, j)$ jsou krajní body tohoto souvislého úseku (předpokládejme, že je neprázdný). Pro pevný bod i budeme k $a[i, j]$ přičítat součet hodnot od $a[l(i, j), i]$ do $a[p(i, j), i]$, kde j ($j > i$) budeme procházet v pořadí podle

výše uvedeného uspořádání. Jak se směr $\vec{ij}$ postupně natáčí, hodnoty $l(i, j)$ a $p(i, j)$ se postupně mění (ale stále stejným směrem). Hodnotu součtu prvků mezi $a[l(i, j), i]$ a $a[p(i, j), i]$ si můžeme pamatovat v pomocné proměnné a při změně $l(i, j)$ nebo $p(i, j)$ ji patřičně upravit. Na výpočet v pevném bodě i takto budeme potřebovat kromě úvodního třídění čas $O(N)$.

Třídění podle směrů (úhlů) spotřebuje v každém z N bodů čas $O(N \log N)$. Výsledná časová složitost našeho algoritmu tedy bude $O(N^2 \log N)$ a paměťová bude $O(N^2)$. Při implementaci algoritmu je třeba dávat pozor na několik okrajových případů, zejména na již výše zmiňovaný případ, že množina $S(i, j)$ je prázdná. Kvůli úspoře místa bylo ve vzorovém programu použito kvadratického třídícího algoritmu namísto optimálního algoritmu pracujícího v čase $O(N \log N)$.

P – III – 3

Nejdříve si předvedeme jednodušší řešení, které pro každou permutaci vytvoří síť s $O(\log n)$ vrstvami a $O(n \log n)$ komparátory. Později toto řešení vylepšíme, aby používalo pouze $O(n)$ komparátorů. Časová složitost obou algoritmů bude $O(n \log n)$.

Nechť permutace na vstupu je $A = a_1, a_2, \dots, a_n$ a zvolme $k := \lfloor n/2 \rfloor$ ($\lfloor x \rfloor$ je dolní celá část čísla x). Po průchodu první vrstvou budou na prvních k vodičích čísla $1, 2, \dots, k$ (ne nutně setříděná) a na zbylých $n - k$ vodičích čísla $k + 1, k + 2, \dots, n$ (opět ne nutně setříděná). První vrstva bude vypadat následovně: Nechť S_1 je množina vodičů z horní poloviny, na kterých jsou čísla z dolní poloviny, tj. $S_1 = \{i : i \leq k \text{ a } a_i > k\}$. Podobně S_2 bude množina vodičů patřících do dolní poloviny, na kterých jsou čísla z horní poloviny, tj. $S_2 = \{i : i > k \text{ a } a_i \leq k\}$. Zřejmě $|S_1| = |S_2|$. Pomocí komparátorů spojíme dvojice vodičů, z nichž vždy jeden je z množiny S_1 a druhý S_2 . Takto vytvoříme první vrstvu sítě a je zřejmé, že tato vrstva má požadovanou vlastnost.

Nyní rozdělíme n vodičů na dvě skupiny: horních k vodičů a dolních $n - k$ vodičů. Právě popsáný postup zopakujeme na každé z těchto dvou skupin zvlášť a takto vytvoříme druhou vrstvu. Na vodičích z každé čtvrtiny budou čísla z této čtvrtiny. Takto budeme pokračovat, dokud v každé části, na které máme vodiče rozděleny, nezbude jediný vodič. Počet vrstev takto vytvořené sítě bude $O(\log n)$ (velikosti částí se zmenší v každé vrstvě na polovinu) a počet komparátorů této sítě bude $O(n \log n)$.

Dále si popíšeme konstrukci s $O(n)$ komparátory. Ta funguje podobně, ale dvojice vodičů z množin S_1 a S_2 vybereme šikovnějším způsobem. Permutaci si můžeme představit jako orientovaný graf na vrcholech $1, \dots, n$, kde z vrcholu i vede právě jedna hrana, a to do vrcholu a_i . Zjevně z každého vrcholu vychází právě jedna hrana a právě jedna hrana do něj vchází. Cykly v takto vytvořeném grafu budeme nazývat *cykly* permutace. Např. permutace $(7, 5, 4, 1, 2, 6, 8, 3)$ má 3 cykly: $(1 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1)$, $(2 \rightarrow 5 \rightarrow 2)$, $(6 \rightarrow 6)$.

V naší komparátorové síti bychom chtěli přesunout číslo z vodiče i na vodič a_i . Protože čísla i a a_i jsou ve stejném cyklu, je zbytečné pomocí komparátorů spojovat vodiče z různých cyklů permutace A . Na začátku v lineárním čase proto rozdělíme permutaci na její cykly a v každém z nich budeme řešit úlohu samostatně. Může se ale samozřejmě stát, že permutace je tvořena jen jedním cyklem a tímto dělením na menší úlohy si tedy nepomůžeme.

Zvolme jeden pevný cyklus $(x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_l \rightarrow x_1)$ permutace A a necht' $k := \lfloor l/2 \rfloor$ (k bude mít opět roli „poloviny“ délky cyklu). Nejmenších k čísel tohoto cyklu budeme nadále nazývat *malá* čísla a zbylých $n - k$ čísel budeme nazývat *velká* čísla. Např. pro cyklus $(1 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1)$ je $k = 2$, čísla 1 a 3 jsou malá a čísla 4, 7 a 8 jsou velká.

Podívejme se na souvislé úseky velkých a malých čísel v našem cyklu; souvislý úsek může pokračovat i z x_l do x_1 . Necht' x_i je poslední číslo v některém z úseků velkých čísel; za x_i tedy následuje úsek malých čísel a necht' x_j je poslední číslo v tomto úseku.

Vodič x_i obsahuje číslo a_{x_i} , které je malé, a naopak vodič x_j obsahuje číslo a_{x_j} , které je velké. Kdybychom spojili x_i -tý a x_j -tý vodič komparátorem, dojde k výměně, protože vodič s malým číslem x_i obsahuje velké číslo a_{x_i} a naopak vodič s velkým číslem x_j obsahuje malé číslo a_{x_j} .

Pro každý souvislý úsek velkých čísel takto vytvoříme komparátor, který spojí vodič odpovídající poslednímu číslu tohoto úseku s vodičem, který odpovídá poslednímu číslu následujícího úseku malých čísel. V našem příkladu $(1 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1)$ čísla 7 a 8 tvoří první souvislý úsek velkých čísel a 3 následující úsek malých čísel. Do sítě tedy přidáme komparátor mezi vodiče 8 a 3. Další souvislý úsek velkých čísel je tvořen číslem 4 a úsek malých čísel pouze číslem 1. Do naší sítě tedy přidáme komparátor mezi vodiče 1 a 4.

Takto vytvoříme komparátory první vrstvy. Po průchodu první vrstvou se původní velký cyklus rozpadne na několik menších. Každý souvislý

úsek malých čísel bude tvořit samostatný cyklus, naopak všechna velká čísla budou obsažena v jednom cyklu (nakreslete si obrázek!). Pokud jsme použili p komparátorů, vytvoříme z původního jednoho cyklu $p + 1$ nových cyklů. Nyní obdobným postupem nalezneme cykly permutace po průchodu prvním cyklem a vytvoříme druhou vrstvu. Skončíme, když všechny cykly jsou jednoprvkové. Protože každý komparátor „přidá“ jeden cyklus, bude mít výsledná síť nejvýše $n - 1$ komparátorů. Každá vrstva zmenší velikost největšího cyklu zhruba na polovinu, počet vrstev je proto logaritmický v n .

Výše popsáný algoritmus může každou z $O(\log n)$ vrstev vytvořit v čase $O(n)$: Nejdříve v čase $O(n)$ rozložíme permutaci na cykly. To lze udělat tak, že si vytvoříme pomocné pole velikosti n , které na začátku vynulujeme. Vezmeme nejmenší číslo i takové, že i -tý prvek tohoto pole je stále nulový, a nalezneme jeho cyklus, tj. procházíme posloupnost i, a_i, a_{a_i} atd., dokud se nevrátíme zpět do i . Všem číslům této posloupnosti uložíme do pomocného pole číslo i . Na konci bude pomocné pole obsahovat pro každý prvek číslo nejmenšího prvku v jeho cyklu. Když jsme našly všechny cykly, spočítáme si jejich velikosti a rozdělíme čísla v nich na velká a malá. Tu je třeba postupovat opatrně — musíme totiž (rychle) určit hranici, která oddělí velká a malá čísla v jednom cyklu. Jednou z možností je použít lineární algoritmus na hledání mediánu. Jednodušší řešení je následující: Budeme procházet naše pomocné pole od nejmenšího indexu k největšímu — u každého cyklu budeme jeho čísla označovat jako malá, dokud nenavštívíme polovinu jeho prvků (pro každý cyklus máme zvláštní čítač, kolik jeho prvků jsme již navštívili) a pak prvky tohoto cyklu budeme označovat jako velká. Tento průchod, na který spotřebujeme čas $O(n)$, nám naráz rozdělí čísla ve všech cyklech na velká a malá. Po vytvoření nové vrstvy nesmíme zapomenout spočítat, jak se nám změnila naše permutace po průchodu touto vrstvou.

P – III – 4

Úlohu si nejdříve přeformulujeme do řeči teorie grafů. Uzly kanalizační sítě budeme nazývat *vrcholy*, potrubí vedoucí mezi nimi *hrany* a celá kanalizační síť pak pro nás bude *graf*. *Sledem* budeme rozumět posloupnost ne nutně různých vrcholů a hran $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{k-1}e_k, v_k$ takovou, že hrana e_i spojuje vrcholy v_{i-1} a v_i . Sled nazveme *tahem*, pokud se v něm žádná hrana nevyskytuje dvakrát.

Naše úloha tedy požaduje nalézt v zadaném grafu G nejmenší množinu tahů takovou, že každá hrana je obsažena v právě jednom z nich. Pokud si představíme náš graf G jako obrázek, chceme ho nakreslit co nejmenším počtem tahů.

Nejdříve si uvědomíme několik jednoduchých skutečností. Pokud je graf nesouvislý, můžeme úlohu řešit pro každou jeho komponentu souvislosti zvlášť. Připomeňme si, že komponenta souvislosti grafu je maximální množina vrcholů taková, že mezi každými dvěma z nich vede sled. Graf je souvislý, pokud je tvořen jedinou komponentou souvislosti. Nadále tedy stačí řešit případ, že zadaný graf je souvislý. Stupeň vrcholu grafu je počet hran, které z něho vycházejí. Součet stupňů všech vrcholů grafu je sudý, neboť každá hrana tento součet zvýší o dva (u každého ze svých dvou konců o jedna). Protože součet stupňů všech vrcholů je sudý, má každý graf sudý počet vrcholů lichého stupně. Necht' tedy náš graf má $2k$ vrcholů lichého stupně.

V každém z těchto $2k$ vrcholů alespoň jeden z hledaných tahů končí nebo začíná. Necht' w je vrchol lichého stupně, kde žádný tah ani nezačíná, ani nekončí. Každý tah musí obsahovat sudý (třeba i nulový) počet hran vycházejících z vrcholu w a protože všechny tahy dohromady obsahují každou hranu grafu právě jednou, musí být stupeň vrcholu w sudý, což není. Potom ale libovolné řešení musí obsahovat alespoň k tahů (pro $k = 0$ alespoň jeden tah).

Nejprve vyřešíme případ, že všechny vrcholy grafu mají sudé stupně, tj. $k = 0$. Obecný případ s nenulovým k vyřešíme později. Pro $k = 0$ dokážeme, že existuje uzavřený tah obsahující všechny hrany. Připomeňme si, že tah je uzavřený, pokud začíná a končí ve stejném vrcholu. Vezměme nejdelší tah v našem grafu, tj. ten, co obsahuje co nejvíce hran. Takový tah je zřejmě uzavřený: Kdyby nebyl, pak by z jeho posledního vrcholu, označme ho w , vycházel lichý počet hran obsažených v našem tahu, ale protože stupeň w je sudý, existovala by i nepoužitá hrana vycházející z vrcholu w a náš tah by šel prodloužit. Tedy nejdelší tah je nutně uzavřený. Pokud tento tah neobsahuje všechny hrany, pak existuje vrchol w , ze kterého vychází jak hrana, která je obsažena v našem tahu, tak i hrana, která není v našem tahu (uvědomme si, že graf je souvislý). Protože náš tah je uzavřený, můžeme předpokládat, že w je jeho první a zároveň poslední vrchol a tento tah lze potom prodloužit přidáním, nepoužitých hran, která vede z vrcholu w . Právě jsme tedy ukázali, že nejdelší tah v souvislém grafu, jehož všechny stupně jsou sudé, obsahuje každou hranu právě jednou (jinak by šel prodloužit).

Zpět k našemu problému: Jak nakreslit souvislý graf s $2k$ vrcholy lichého stupně pomocí k tahů? Přidejme do našeho grafu k hran, které budou spojovat dvojice vrcholů lichého stupně. Takto vytvořený graf je souvislý a všechny jeho vrcholy mají sudé stupně. Existuje v něm tedy tah, který obsahuje každou hranu právě jednou. Pokud z tohoto tahu vynecháme k přidaných hran, pak se nám rozpadne na k tahů — sestrojili jsme tedy hledaných k tahů.

Zbývá vyřešit jediný úkol — efektivně nalézt uzavřený tah v grafu jehož všechny stupně jsou sudé. Zbývající operace, tj. rozložit graf na komponenty souvislosti a přidat hrany mezi vrcholy lichého stupně, jistě zvládneme v lineárním čase v počtu vrcholů a hran. Algoritmus bude postupně přidávat hrany do vytvářeného tahu v grafu; jeho jádrem bude rekurzivní procedura `vytvor_tah`. Začneme vytvářet tah ve vrcholu v , dokud nepříjdeme do vrcholu, z něhož už nevede žádná nepoužitá hrana. Protože stupně všech vrcholů jsou sudé, musí být tímto vrcholem opět vrchol v . Máme tedy nějaký uzavřený tah. Pokud existuje vrchol u , jehož všechny hrany jsme ještě nepoužili, zavoláme pro něj proceduru `vytvor_tah`. Takto nalezneme tah, který prochází vrcholem u a obsahuje pouze dosud nepoužité hrany. Vrchol u nyní nemá žádné nepoužité hrany a nově nalezený tah spojíme s původním tahem. Takto pokračujeme, dokud existuje vrchol u , jehož některá hrana je nepoužitá.

Nyní k samotné implementaci výše popsaného algoritmu. V programu budeme mít pro každý vrchol uložen seznam jeho hran a ukazatel do tohoto seznamu na takovou hranu, že všechny hrany před ní jsou již použité. Pokud budeme potřebovat najít dosud nepoužitou hranu, budeme tento ukazatel posunovat v seznamu, dokud takovou hranu nenalezneme. Pokud jsou všechny hrany použité, ukazatel se posune až na konec seznamu. Takto u každého vrcholu spotřebujeme dohromady čas úměrný jeho stupni, a tedy celkově čas $O(m)$ pro všechny vrcholy dohromady. Samotné tahy budeme reprezentovat jako seznamy hran — to nám umožní tahy nejen rychle vytvářet, ale i spojovat. Náš algoritmus tedy nejdříve nalezne počáteční tah, např. z prvního vrcholu. Potom budeme procházet vrcholy na tomto tahu, dokud nenarazíme na první vrchol s nějakou dosud nepoužitou hranou. Zavoláme na tento vrchol proceduru `vytvor_tah` a spojíme tah, který tato procedura nalezne, s původním tahem. Všimněte si, že při vhodné implementaci procedury `vytvor_tah` nebude již třeba pro vrcholy na přidávaném tahu kontrolovat, zda jsou všechny jejich hrany použity (pokud to zkontroluje sama volaná procedura `vytvor_tah`). Cel-

ková časová a paměťová složitost našeho algoritmu tedy bude $O(m)$, kde m je počet hran.

Kvůli zjednodušení vzorového programu náš program nespojuje vrcholy lichého stupně jen v rámci jedné komponenty — to ale zřejmě nebude mít vliv na počet nalezených tahů.

P – III – 5

Myšlenka řešení této úlohy je velmi jednoduchá. Vygenerujeme postupně všechny pozice s nejvýše N kameny, ze kterých se dá cílová pozice dosáhnout. Budeme si pamatovat všechny již vygenerované pozice a kdykoliv vygenerujeme nějakou další, nejdříve si zkontrolujeme, zda již mezi dříve vytvořenými pozicemi náhodou není. Není-li tomu tak, zapamatujeme si ji a zvýšíme počítadlo vyhrávajících pozic s nejvýše N kameny o jedničku.

Pozice budeme generovat v pořadí od cílové pozice. Pokud posledním tahem byl skok doprava z políčka i na políčko $i+2$, pak jsou nyní políčka i a $i+1$ prázdná a naopak políčko $i+2$ obsahuje hrací kámen. Pozice, ze kterých se dá dostat do pozice p skokem doprava, jsou právě ty, které vzniknou záměnou řetězce 001 v popisu pozice p řetězcem 110 (představujeme si, že pozice je popsána posloupností nul a jedniček, kde nula reprezentuje prázdné políčko a jednička reprezentuje obsazené políčko). Podobně ty pozice, ze kterých se dá dostat do p skokem doleva, jsou právě ty, které vzniknou záměnou řetězce 100 řetězcem 011.

Výše popsaným postupem můžeme tedy pro pozici p vygenerovat všechny pozice, ze kterých se lze do p dostat jedním tahem. Popíšeme si proceduru `generuj`, která pro zadanou pozici p vygeneruje všechny pozice, ze kterých se dá do pozice p dostat. Výše uvedeným postupem tato procedura bude vytvářet pozice q , z nichž se dá přejít do p jedním tahem. Pokud q ještě nebyla nalezena, označíme q jako nalezenou a rekurzivně na ni zavoláme proceduru `generuj`. Potřebujeme umět rychle ověřovat, zda již pozice q byla někdy dříve vygenerována. Vhodných datových struktur je několik, např. hašovací tabulky, různé varianty vyhledávacích stromů atd. My použijeme datovou strukturu nazývanou trie.

Trie je datová struktura na uchovávání řetězců nad konečnou abecedou, v našem případě to budou řetězce nul a jedniček. Trie je tvořena stromem, kde každý vrchol má nejvýše tolik synů, jaká je velikost abecedy, tj. v našem případě nejvýše dva syny. Cesty od kořene stromu odpovídají řetězcům nad abecedou. V našem případě to bude tak, že

pokud i -tá hrana cesty vede do levého syna, je i -tý znak řetězce 0, a pokud vede do pravého syna je tento znak 1. Každý vrchol w ve stromě obsahuje ukazatele na své syny (pokud nějaké má) a jeden bit udávající, zda řetězec, kterému tento vrchol odpovídá, byl do trie vložen či nikoliv. Na začátku je trie tvořena pouze kořenem, jehož bit je nastaven na nulu. Slovo do trie vložíme tak, že jdeme po hranách odpovídajících znakům vkládaného slova a pokud už nemůžeme z nějakého vrcholu dále pokračovat, jednoduše vytvoříme nový vrchol, připojíme ho jako syna tohoto vrcholu a pokračujeme do něj. Až nalezneme vrchol odpovídající celému vkládanému slovu, nastavíme jeho bit na jedničku. Vyhledávání řetězce je stejně jednoduché: Z kořene se opět necháme navigovat pomocí znaků hledaného řetězce. Pokud už dále nemůžeme pokračovat, pak hledaný řetězec ve stromě není. Jinak jsme našli vrchol, který odpovídá vyhledávanému řetězci, a podle jeho bitu poznáme, zda je řetězec ve stromě obsažen nebo není. Poznamenejme, že existují i chytřejší implementace této datové struktury než ta, kterou jsme si zde právě popsali.

Časová a paměťová složitost našeho programu závisí na počtu P hledaných pozic. Pro každou z nich vytvoříme v našem stromě nejvýše K uzlů — prostorová složitost algoritmu je tedy nejvýše $O(PK)$. Navíc pro každou z nich musíme vygenerovat všech nejvýše $2k-4$ jejich přímých předchůdců a pro každého z těchto předchůdců otestovat v čase $O(K)$, zda je v trie již obsažen. Celková časová složitost algoritmu tedy bude $O(PK^2)$.

Přípravná soustředění před 43. MMO

V průběhu 51. ročníku se konalo výběrové soustředění pro přípravu na mezinárodní matematickou olympiádu bezprostředně po skončeném celostátním kole kategorie A, a to od 22. do 26. dubna 2002 v Kostelci nad Černými lesy nedaleko Prahy. Na základě výsledků II. a III. kola na ně bylo pozváno 9 kandidátů na reprezentaci.

Soustředění bylo zaměřeno na řešení obtížných úloh v omezeném čase (v soutěžních podmínkách). Po odpolední relaxaci byl proveden detailní rozbor opravených řešení. Úspěšnost jednotlivých studentů ukazuje následující tabulka:

Jaroslav Hájek	4/4, GMK, Bílovec	88,5
Tomáš Protivínský	4/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	84,5
Martin Tancer	4/4, G Ch. Dopplera, Praha 5	81
Jan Moláček	2/4, GJKT, Hradec Králové	75
Josef Cibulka	4/4, G Praha 1, Štěpánská	69
Vítězslav Kala	2/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	61
Ondřej Kurka	8/8, G Ch. Dopplera, Praha 5	54
Marek Krčál	3/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	46,5
Pavel Kocourek	1/4, SPŠST, Praha 1, Panská	43,5

Na základě uvedených výsledků, v nichž jsou započítány i výsledky oblastního a celostátního kola, bylo vybráno šest reprezentantů a jeden náhradník. Stejně družstvo nás reprezentovalo i na již tradičním střetnutí s družstvem Slovenska, k němuž se od loňska přidalo i družstvo Polska.

Jednotlivé semináře vedli a úlohy připravili:

dr. *Jaroslav Zhouf* (22. 4.),

dr. *Pavel Calábek* (23. 4.),

dr. *Karel Horák* (24. 4.),

dr. *Jaroslav Švrček* (25. 4.),

a doc. *Jaromír Šimša* (26. 4.).

Úlohy zadané na přípravném soustředění

1. Najděte všechny funkce $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takové, že

$$f(f(n)) = n \quad \text{a} \quad f(f(n+2)+2) = n$$

pro všechny hodnoty celočíselné proměnné n a $f(0) = 1$.

2. Rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB má úhel 80° při vrcholu C . Bod D leží uvnitř tohoto trojúhelníku tak, že velikost úhlu DAB je 10° a velikost úhlu DBA je 20° . Určete velikost úhlu ACD .

3. Nechť n je počet uspořádaných petic $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ přirozených čísel, která splňují rovnost

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} = 1.$$

Je n číslo sudé, nebo liché?

4. Je dána tabulka se 7×7 čtvercovými poli. Dokažte, že lze v tabulce umístit jedno monomino I tak, že ostatních 48 polí nelze pokrýt jedním trominem II a 15 trominy III.



monomino I



tromino II



tromino III

5. Nechť $p(x)$ je polynom s celočíselnými koeficienty. Posloupnost $x_0, x_1, x_2, \dots$ je definována následovně:

- (i) $x_0 = 0$,
- (ii) $x_n = p(x_{n-1})$ pro všechna přirozená n .

Jestliže existuje přirozené číslo n tak, že $x_n = 0$, pak buď $x_1 = 0$, nebo $x_2 = 0$. Dokažte.

6. Pro přirozené číslo x_0 definujme posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ následujícím předpisem:

- (i) $y_0 = 4$ a $z_0 = 1$.
- (ii) Jestliže x_n je sudé pro $n \geq 0$, pak $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n$, $y_{n+1} = 2y_n$ a $z_{n+1} = z_n$.
- (iii) Jestliže x_n je liché pro $n \geq 0$, pak $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}y_n - z_n$, $y_{n+1} = y_n$ a $z_{n+1} = z_n + y_n$.

7. Přirozené číslo x_0 nazveme dobré právě tehdy, když existuje $n \geq 1$ tak, že $ax_n = 0$. Kolik existuje dobrých čísel menších nebo rovných číslu 2002?

8. Nechť X je konečná množina. Označme $E(X)$ množinu všech podmnožin množiny X , které obsahují sudý počet prvků. Nechť reálná funkce f definovaná na $E(X)$ má následující vlastnosti:

- (i) existuje $D \in E(X)$ tak, že $f(D) > 2002$,
- (ii) pro každé dvě disjunktní množiny $A, B \in E(X)$ platí $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - 2002$.

Dokažte, že X můžeme rozdělit na dvě disjunktní podmnožiny P a Q takové, že $f(S) > 2002$ pro každou neprázdnou množinu $S \in E(P)$ a $f(T) \leq 2002$ pro každou $T \in E(Q)$.

9. Nechť $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce a necht existují čísla a a b ($0 < a, b < \frac{1}{2}$) tak, že $f(f(x)) = af(x) + bx$ pro všechna reálná čísla x . Dokažte, že existuje reálná konstanta k taková, že $f(x) = kx$ pro všechna reálná čísla x .

10. Je dán čtyřstěn $ABCD$, označme E kolmý průmět vrcholu D do roviny ABC . Dokažte, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) $C = E$ nebo $CE \parallel AB$;
- (ii) pro každý bod M hrany CD platí rovnost

$$S^2(ABM) = \frac{|CM|^2}{|CD|^2} \cdot S^2(ABD) + \left(1 - \frac{|CM|^2}{|CD|^2}\right) S^2(ABC).$$

(Zde $S(XYZ)$ označuje obsah trojúhelníku XYZ .)

11. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho čtveřic (x, y, z, t) přirozených čísel, jejichž největší společný dělitel je 1 a pro něž zároveň platí

$$x^3 + y^3 + z^2 = t^4.$$

12. Nechť $P_1 P_2 \dots P_n$ je konvexní mnohoúhelník v rovině takový, že ke každé dvojici jeho vrcholů P_i, P_j existuje jiný jeho vrchol, ze kterého je úsečku $P_i P_j$ vidět pod úhlem 60° . Dokažte, že $n = 3$.

13. Určete všechny dvojice (x, y) , resp. (u, v) celých čísel, které vyhovují rovnicím

- a) $(x+1)^2 + (x+2)^2 + \dots + (x+2001)^2 = y^2$,
- b) $u^3 + (u+1)^3 + (u+2)^3 + \dots + (u+7)^3 = v^3$.

14. Stranám AC a BC ostroúhlého trojúhelníku ABC jsou vně připsány pravoúhelníky $ACPQ$ a $BKLC$ o stejném obsahu. Dokažte, že střed úsečky PL , bod C a střed kružnice opsané trojúhelníku ABC leží na téže přímce.

15. Necht' k je kružnice opsaná trojúhelníku ABC . Body M , N necht' jsou po řadě středy oblouků BC , CA a X je daným bodem oblouku AB kružnice k . Kružnice opsaná trojúhelníku XS_1S_2 , kde S_1 , S_2 jsou po řadě středy kružnic vepsaných trojúhelníkům XAC , XBC , se protíná s kružnicí k (kromě bodu X) ještě v dalším bodě P .

a) Dokažte, že trojúhelníky PNS_1 a $PM S_2$ jsou podobné.

b) Najděte množinu všech bodů P .

16. Určete, kolik pořadí $a_1, a_2, \dots, a_n$ čísel $1, 2, \dots, n$ má tu vlastnost, že pro každý index i ($1 \leq i \leq n$) platí buď $a_i = 1$, nebo $a_i > \min\{a_{i-1}, a_{i+1}\}$, kde a_0 a a_{n+1} značí libovolná čísla větší než (dané) číslo n .

17. Najděte největší reálné číslo p , pro které platí následující tvrzení: Má-li mnohočlen $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tři nezáporné kořeny (počítané s ohledem na jejich násobnost), pak pro každé nezáporné číslo x platí $f(x) \geq p \cdot (x - a)^3$.

18. Určete největší přirozené číslo N , pro které platí: Je-li na kružnici zvoleno 21 různých bodů, pak alespoň N úseček spojujících zvolené body jsou tětivy se středovým úhlem nejvýše 120° .

19. Určete nejmenší počet polí, které je nutné označit na čtvercové šachovnici 10×10 , aby žádná čtyři z neoznačených polí nebyla rohovými poli některé podšachovnice $p \times q$, kde $1 < p \leq 10$ a $1 < q \leq 10$.

Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské

ZWARDOŇ, 17.–18. ČERVNA 2002

V rámci závěrečné přípravy před MMO se uskutečnilo již podruhé přípravné střetnutí mezi týmy České republiky, Polska a Slovenska. Jednotlivé země reprezentovala vždy šestice účastníků, kteří si vybojovali ve svých zemích letenky na 43. MMO do skotského Glasgowa.

Soutěž se uskutečnila v termínu 17.–18. 6. 2002 v krásném prostředí polských Beskyd, a to v příhraničním horském středisku Zwardoň. Všechna tři reprezentační družstva přicestovala na místo konání již v neděli 16. 6. 2002. Organizace a průběh soutěže zůstal zachován z předešlých ročníků — je přizpůsoben stylu III. kola naší MO a podmínkám na MMO. Soutěžícím byly ve dvou dnech předloženy dvě trojice soutěžních úloh, přitom za každou z úloh mohli získat nejvýše 7 bodů, tj. celkově (stejně jako na MMO) 42 body. Na každou trojici úloh měli soutěžící vyhrazeno 4,5 hodiny.

Pořadí	Jméno	Země	body	Součet
1.	Katarína Quitnerová	SVK	7 6 7 7 7 7	41
2.	Wojciech Czerwiński	POL	6 7 5 7 7 6	38
3.	Marcin Pilipczuk	POL	6 7 7 7 7 1	35
4.	<i>Josef Cibulka</i>	CZE	6 4 5 7 7 2	31
5.	Peter Bella	SVK	7 6 6 7 3 0	29
6.	<i>Jaroslav Hájek</i>	CZE	6 7 5 7 3 0	28
7.–8.	Jarosław Wrona	POL	6 7 7 7 0 0	27
	Radovan Bauer	SVK	5 7 5 7 3 0	27
9.	Paweł Parys	POL	6 7 6 7 0 0	26
10.	Marek Tesař	SVK	6 7 5 6 1 0	25
11.	<i>Martin Tancer</i>	CZE	6 7 6 3 0 1	23
12.–13.	<i>Tomáš Protivínský</i>	CZE	6 0 7 7 1 0	21
	Roman Łomowski	POL	2 0 5 7 7 0	21
14.–15.	<i>Jan Moláček</i>	CZE	2 0 7 7 0 2	18
	Michal Burger	SVK	3 0 7 7 0 1	18
16.	Michał Józwickowski	POL	6 0 2 7 0 0	15
17.	<i>Vítězslav Kala</i>	CZE	5 0 5 1 0 1	12
18.	Andrej Osuský	SVK	6 0 0 0 0 0	6

Úlohy pro letošní soutěž vybrali polští organizátoři, a to především z vlastních zdrojů, jejich koordinaci prováděla mezinárodní jury, kterou tvořili dr. *Marcin Kuczma* a mgr. *Andrzej Mąkowski* z Polska, doc. *Oliver Ralík* a *Vladimír Marko* ze Slovenska a dr. *Jaroslav Švrček* a dr. *Jaroslav Zhouf* za Českou republiku. Na zdárném průběhu celé soutěže se dále významně podíleli polští kolegové dr. *Józef Kalinowski* a dr. *Jerzy Bednarczuk*.

Texty soutěžních úloh

1. Nechtě a, b jsou různá reálná čísla a k, m přirozená čísla, pro něž platí $k + m = n \geq 3$, $k \leq 2m$ a $m \leq 2k$. Uvažujme posloupnosti $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, které vyhovují následujícím podmínkám:

k členů posloupnosti se rovná a ; přitom $x_1 = a$;

m členů posloupnosti se rovná b ; přitom $x_n = b$;

žádné tři po sobě jdoucí členy nejsou stejné.

Určete všechny možné hodnoty součtu

$$x_n x_1 x_2 + x_1 x_2 x_3 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n + x_{n-1} x_n x_1.$$

2. Je dán trojúhelník ABC , jehož obsah je S a pro jehož délky stran $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$ platí $a \leq b \leq c$. Určete největší reálné číslo u a nejmenší reálné číslo v tak, aby pro každý vnitřní bod P trojúhelníku ABC byla splněna nerovnost

$$u \leq |PD| + |PE| + |PF| \leq v,$$

kde D, E, F jsou po řadě průsečíky přímk AP, BP, CP s protějšími stranami daného trojúhelníku.

(Hodnoty u, v vyjádřete pomocí daných veličin a, b, c a S .)

3. Nechtě $S = \{1, 2, \dots, n\}$, kde n je dané přirozené číslo. Určete počet všech funkcí $f: S \rightarrow S$ takových, že pro každé $x \in S$ platí $x + f^4(x) = n + 1$.

Poznámka. Symbol f^4 značí čtvrtou iteraci, tj. $f^4(x) = f(f(f(f(x))))$.

4. Nechtě $n > 1$ je přirozené číslo a p prvočíslo takové, že n je dělitelem čísla $p - 1$ a současně p je dělitelem čísla $n^3 - 1$. Dokažte, že $4p - 3$ je druhou mocninou přirozeného čísla.

5. Nechtě O značí střed kružnice opsané ostroúhlému trojúhelníku ABC . Body P, Q nechtě jsou po řadě takovými body jeho stran AC, BC , pro

něž současně platí

$$\frac{|AP|}{|PQ|} = \frac{|BC|}{|AB|} \quad \text{a} \quad \frac{|BQ|}{|PQ|} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

Dokažte, že body O , P , Q a C leží na téže kružnici.

6. Necht' $n \geq 2$ je sudé přirozené číslo. Uvažujme polynomy tvaru

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + 1$$

s reálnými koeficienty, které mají aspoň jeden reálný kořen. Určete nejmenší možnou hodnotu součtu $a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2$.

Řešení úloh

1. Uvažujme posloupnost $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$, která vyhovuje podmínkám úlohy. Pro libovolné její tři po sobě jdoucí členy x , y , z existuje taková jejich permutace (x, y, z) , pro kterou platí buď $(x, y, z) = (a, a, b)$, nebo $(x, y, z) = (a, b, b)$. V obou těchto případech je $xyz = ab(x + y + z - a - b)$. Položme ještě $x_0 = x_n$ a $x_{n+1} = x_1$. Potom pro hledaný součet platí

$$\sum_{i=1}^n x_{i-1}x_i x_{i+1} = ab \left(3 \sum_{i=1}^n x_i - n(a+b) \right) = ((2k-m)a + (2m-k)b)ab.$$

Nyní ukážeme, že pro libovolná dvě přirozená čísla k , m , jež vyhovují daným podmínkám, existuje aspoň jedna posloupnost $(x_1, \dots, x_n)$ splňující požadované podmínky. Necht' např. $2m \geq k \geq m$ (v případě $2k \geq m \geq k$ budeme postupovat analogicky) a uvažujme posloupnost $3m$ trojic (a, a, b) napsaných v řadě za sebou, tj. posloupnost

$$(a, a, b, a, a, b, \dots, a, a, b).$$

Tato posloupnost obsahuje $2m$ čísel a a m čísel b . Jestliže vyškrtneme např. v prvních $2m - k$ trojicích (a, a, b) vždy jedno a , dostaneme posloupnost o $n = k + m$ prvcích, která zřejmě vyhovuje podmínkám úlohy.

Závěr: Pro všechny posloupnosti, které vyhovují podmínkám úlohy, je hodnota uvažovaného součtu vždy $((2k - m)a + (2m - k)b)ab$.

2. Uvažujme libovolný vnitřní bod P trojúhelníku ABC a body D , E , F podle zadání. Označme obsahy trojúhelníků PBC , PCA , PAB po řadě S_a , S_b , S_c . Z podmínek úlohy plyne $2S_a \leq a \cdot |PD| \leq c \cdot |PD|$,

$2S_b \leq b \cdot |PE| \leq c \cdot |PE|$ a $2S_c \leq c \cdot |PF|$. Platí tedy následující dolní odhad

$$|PD| + |PE| + |PF| \geq \frac{2(S_a + S_b + S_c)}{c} = \frac{2S}{c} = v_c,$$

kde v_c značí velikost výšky z vrcholu C v trojúhelníku ABC .

Uvažujeme-li nyní bod P této výšky libovolně blízko vrcholu C , vidíme, že i hodnota součtu $|PD| + |PE| + |PF|$ se libovolně přibližovat délce výšky v_c . Největší hodnota u , která vyhovuje podmínkám úlohy, je tudíž $u = v_c = 2S/c$.

Nyní stanovíme horní odhad uvažovaného součtu. Předně si uvědomme, že úsečka AB (délky c) je nejdelší (jedna z nejdelších) mezi všemi úsečkami, jejímiž krajními body jsou některé dva body trojúhelníku ABC (speciálně pak má větší velikost než každá z úseček AD , BE , CF). Platí proto

$$\frac{S_a}{S} = \frac{|PD|}{|AD|} \geq \frac{|PD|}{c}, \quad \text{tj.} \quad |PD| \leq c \frac{S_a}{S}.$$

Analogicky pak

$$|PE| \leq c \frac{S_b}{S} \quad \text{a} \quad |PF| \leq c \frac{S_c}{S}.$$

Součtem všech tří nerovností obdržíme

$$|PD| + |PE| + |PF| \leq c \left(\frac{S_a}{S} + \frac{S_b}{S} + \frac{S_c}{S} \right) = c.$$

Zvolíme-li nyní bod P (uvnitř trojúhelníku ABC) libovolně blízko vrcholu A tak, aby velikost úhlu PAB byla libovolně malá, snadno nahlédneme, že i hodnota uvažovaného součtu se bude libovolně blížit délce c strany AB . S ohledem na získaný horní odhad pro součet $|PD| + |PE| + |PF|$ je tedy nejmenší hodnota v vyhovující podmínkám úlohy $v = c$.

3. Pro každé $x \in S$ označme $x^* = n + 1 - x$, kde pro zobrazení $x \mapsto x^*$ platí $x^{**} = x$. Nechť $f: S \rightarrow S$ je funkce vyhovující podmínkám úlohy. Protože $f^4(x) = x^*$, je $f^8(x) = x$. Z podmínek úlohy plyne, že funkce f je prostá, a tudíž bijektivní (jedná se tedy o permutaci na množině S). Množinu S lze proto rozložit na *cykly*, jejichž délky jsou dělitelé čísla 8. Jestliže x_0 náleží cyklu délky 4, 2 nebo 1, pak $x_0 = f^4(x_0) = x_0^*$, je tudíž

$x_0 = \frac{1}{2}(n+1)$. To je možné pouze pro lichá n , pak ale všechny prvky uvažovaného cyklu musí být rovny x_0 . Odtud plyne, že S je sjednocením několika disjunktních cyklů délky 8, eventuálně navíc obsahuje izolovaný prvek x_0 . Platí tedy $n = 8m$ nebo $n = 8m + 1$, kde m je přirozené číslo.

Uvažujme nejprve $n = 8m$. Označme $A = \{1, \dots, 4m\}$ a $B = \{4m+1, \dots, 8m\}$. Uvažujme nyní určitý cyklus délky 8, a označme C množinu jeho prvků. Pak $A \cap C$ je čtyřprvková množina a $B \cap C$ je její $*$ -obraz. Naopak, pro každou čtveřici $1 \leq a < b < c < d \leq 4m$ lze vytvořit množinu $C = \{a, b, c, d, d^*, c^*, b^*, a^*\}$, jejíž prvky tvoří cyklus délky 8. Dále určíme, kolika způsoby lze vytvořit takový cyklus délky 8 na množině C . Nechť $f(a) = w$, pak w může být libovolný prvek množiny C s výjimkou prvků a a a^* (šest možností); dále nechť $f(w) = z$, pak z může být libovolný prvek C s výjimkou prvků a, a^*, w, w^* (čtyři možnosti); konečně $f(z)$ může být libovolný prvek C s výjimkou prvků a, a^*, w, w^*, z a z^* (dvě možnosti). Zbytek cyklu je pak již určen. Celkově tak máme $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ možností.

Každé funkci f daných vlastností tak lze jednoznačně přiřadit rozklad $4m$ -prvkové množiny A na m čtveřic. Spočítáme, kolik takových rozkladů existuje. Množina A má $\binom{4m}{4}$ různých čtyřprvkových podmnožin, první čtveřici rozkladu můžeme tedy vybrat $\binom{4m}{4}$ způsoby, druhou $\binom{4m-4}{4}$ způsoby atd., celkem tak máme

$$\binom{4m}{4} \binom{4m-4}{4} \dots \binom{12}{4} \binom{8}{4} = \frac{(4m)!}{4!^m}$$

možností. Protože nezáleží na pořadí, v jakém m čtveřic rozkladu vybíráme, je vždy $m!$ rozkladů stejných. Celkem tedy existuje

$$\frac{(4m)!}{(4!)^m m!}$$

různých rozkladů množiny A na m (neuspořádaných) čtveřic. Každou takovou čtveřici prvků množiny A doplníme odpovídajícími $*$ -obrazy z množiny B . Získáme tak jeden z možných cyklů délky 8. Na každém takovém cyklu můžeme funkci f definovat 48 způsoby, pro daný rozklad tak existuje celkem $48^m = (2 \cdot 4!)^m$ možností, jak definovat funkci f . Celkový počet funkcí f vyhovujících podmínkám úlohy je tedy

$$(2 \cdot 4!)^m \cdot \frac{(4m)!}{(4!)^m m!} = \frac{2^m (4m)!}{m!}.$$

V případě $n = 8m + 1$ je nutno uvažovat izolovaně prvek $x_0 = \frac{1}{2}(n+1)$ a na množině $S \setminus \{x_0\}$ můžeme postupovat analogicky jako v případě $n = 8m$ (se stejným výsledkem).

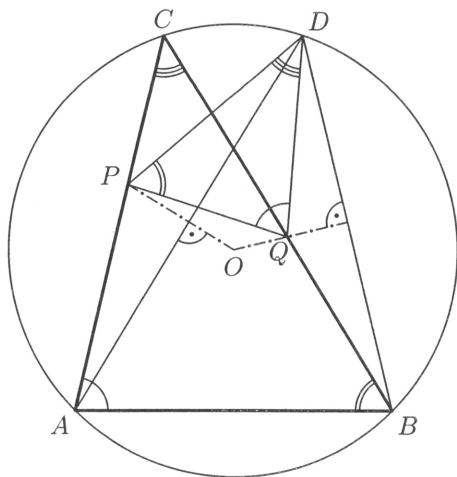
Pokud $n \not\equiv 0, 1 \pmod{8}$, žádná funkce f vyhovující podmínkám úlohy neexistuje.

4. Podle zadání je $p - 1 \geq n$, neboli $p \geq n + 1$. Protože p je dělitelem čísla $n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1)$, je nutně dělitelem $n^2 + n + 1$, tj. $n^2 + n + 1 = mp$, kde m je přirozené číslo. Proto je $mp \equiv 1 \pmod{n}$ a podle předpokladu úlohy i $p \equiv 1 \pmod{n}$. Z obou předchozích kongruencí plyne $m \equiv 1 \pmod{n}$. Platí tedy $m = kn + 1$ a $p = ln + 1$, kde k a $l \geq 1$ jsou nezáporná celá čísla, takže $n^2 + n + 1 = mp = (kn + 1)(ln + 1)$ a po úpravě $n(1 - kl) = k + l - 1 \geq 0$. Poslední rovnosti a nerovnosti vyhovuje pouze $k = 0$. Odtud plyne $m = 1$, $p = n^2 + n + 1$, a tudíž $4p - 3 = (2n + 1)^2$.

Tím je důkaz ukončen.

5. Uvažujme obvyklé označení úhlů v trojúhelníku ABC . Nechť platí např. $\alpha \geq \beta$. Uvažujme trojúhelník QPD , který je vně připsán straně QP čtyřúhelníku $ABQP$ a je podobný trojúhelníku ABC . Pak platí (obr. 37)

$$\frac{|PD|}{|PQ|} = \frac{|BC|}{|AB|} \quad \text{a} \quad \frac{|QD|}{|PQ|} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$



Obr. 37

Z daných podmínek plyne $|PD| = |PA|$ a $|QB| = |QD|$. Na základě předpokladu $\alpha \geq \beta$ dále máme

$$\frac{|AP|}{|BQ|} = \frac{|PD|}{|QD|} = \frac{|BC|}{|AC|} \geq 1, \quad \text{tj.} \quad |AP| \geq |BQ|.$$

V trojúhelníku CPQ tedy platí $|CP| \leq |CQ|$ a také

$$\begin{aligned} |\sphericalangle CQP| &\leq \frac{180^\circ - \gamma}{2} \leq \alpha = |\sphericalangle DQP|, \\ |\sphericalangle CPQ| &\geq \frac{180^\circ - \gamma}{2} \geq \beta = |\sphericalangle DPQ|. \end{aligned}$$

Z obou posledních nerovností je patrné, že D je vnitřním bodem konvexního úhlu BCX , kde X leží na polopřímce AC za bodem C .

Označme nyní velikosti vnitřních úhlů při základnách rovnoramenných trojúhelníků ADP a BDQ po řadě φ a ψ . Velikosti vnitřních úhlů ve čtyřúhelníku $ABDP$ mají pak po řadě velikosti $\alpha, \beta + \psi, \gamma + \psi$ a $180^\circ - 2\varphi$. Protože jejich součet je 360° , platí $\varphi = \psi$, a tedy $|\sphericalangle ADB| = \gamma$. Bod D leží tudíž na oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC . Vzhledem k tomu, že oba trojúhelníky ADP a BDQ jsou rovnoramenné (se základnami AD a BD), jsou přímky OP a OQ osami stran AD a BD trojúhelníku ABD . Protože střed O kružnice opsané trojúhelníku ABC je jeho vnitřním bodem, plyne odtud bezprostředně

$$|\sphericalangle POQ| = 180^\circ - |\sphericalangle ADB| = 180^\circ - |\sphericalangle PDQ| = 180^\circ - \gamma.$$

Platí proto $|\sphericalangle PCQ| + |\sphericalangle POQ| = 180^\circ$, což znamená, že body O, P, C a Q tedy leží na téže kružnici.

Zcela analogicky lze provést důkaz v případě, kdy $\alpha \leq \beta$.

Tím je úloha vyřešena.

6. Necht' u je reálný kořen rovnice $P(x) = 0$. Její úpravou a dále pak využitím Cauchyho nerovnosti obdržíme

$$(u^n + 1)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i u^i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} u^{2i}. \quad (1)$$

Položíme-li $n = 2m$ a $u^2 = w$, je

$$\sum_{i=1}^{n-1} u^{2i} = \sum_{i=1}^{2m-1} w^i = w^m + (w^m + 1) \sum_{i=1}^{m-1} w^i. \quad (2)$$

Vzhledem k tomu, že pro libovolné $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ platí nerovnost $(w^i - 1)(w^{m-i} - 1) \geq 0$, plyne odtud po snadné úpravě

$$w^i + w^{m-i} \leq w^m + 1.$$

Součtem všech těchto nerovností pro $1 \leq i \leq m-1$ dostaneme

$$2 \sum_{i=1}^{m-1} w^i \leq (m-1)(w^m + 1).$$

Z nerovnosti $(w^m - 1)^2 \geq 0$ dále plyne $w^m \leq \frac{1}{4}(w^m + 1)^2$. Dosazením získaných nerovností do (2) obdržíme odhad

$$\sum_{i=1}^{n-1} u^{2i} \leq \frac{(w^m + 1)^2}{4} + (w^m + 1) \cdot \frac{m-1}{2}(w^m + 1) = \frac{n-1}{4}(u^n + 1)^2,$$

který využijeme v (1). Po úpravě pak ihned vyjde

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \geq \frac{4}{n-1}.$$

S ohledem na použité nerovnosti zde nastává rovnost, právě když $u = 1$ a $a_1 = \dots = a_{n-1}$, tj. právě když $a_i = \frac{-2}{n-1}$ pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

43. mezinárodní matematická olympiáda

V pořadí již 43. ročník této prestižní mezinárodní soutěže uspořádal United Kingdom Mathematics Trust ve Skotsku v městě Glasgow na University of Strathclyde v době od 19. do 30. července 2002.

V posledních ročnících MMO byl téměř vždy vytvořen nový rekord v počtu zúčastněných zemí. Nejinak tomu bylo i letos, kdy se soutěže zúčastnilo 84 zemí, což je o jednu více než loni. Každou zemi reprezentuje vždy nejvýše šest soutěžících; letos jich bylo celkem 485.



Výběr soutěžících za Českou republiku byl proveden v Kostelci nad Černými lesy na závěrečném soutěžním soustředění prvních devíti vítězů celostátního kola. Vybraní soutěžící se pak ještě zúčastnili trojutkání v polském Zwardoni mezi Českou republikou, Slovenskem a Polskem, kde soutěžili reprezentanti zúčastněných zemí za podmínek podobných jako při soutěži na MMO. Po této přípravě odjela do Skotska tato šestice soutěžících: *Josef Cibulka* z Gymnázia Štěpánská v Praze, *Jaroslav Hájek* z Gymnázia M. Koperníka v Bílovci, *Vítězslav Kala* z Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, *Jan Moláček* z Gymnázia J. K. Tyla v Hradci Králové, *Tomáš Protivínský* z Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně a *Martin Tancer* z Gymnázia Ch. Dopplera v Praze. Vedoucím české delegace byl doc. RNDr. *Jaromír Šimša*, CSc., z Masarykovy Univerzity v Brně, zástupcem vedoucího byl RNDr. *Jaroslav Zhouf*, Ph.D., z Pedagogické fakulty UK v Praze. Vedoucí delegace přicestoval do Skotska kvůli výběru úloh již 19. července, ostatní čeští účastníci pak o tři dny později.

Druhý den po příletu soutěžících do Glasgowu se konalo v Barony Hall (v katedrále přebudované na univerzitní aulu) slavnostní zahájení. Další dva dny, tj. 24. a 25. 7., proběhla vlastní soutěž ve výstavním komplexu nedaleko Glasgow Science Centre. Každý z těchto dnů řešili soutěžící trojici úloh po dobu 4,5 hodiny. Za každou úlohu mohli získat maximálně 7 bodů.

O náročnosti soutěžních úloh svědčí i nízké hranice pro získání medailí: na bronzovou medaili stačilo 14 bodů, na stříbrnou 23 a na zlatou 29 z možného počtu 42 bodů. Všichni tři naši loňští olympionici si zřetelně v celkovém pořadí polepšili. V neoficiálním pořadí zemí podle celkového počtu bodů družstva jsme spolu se Slovenskem dokonce poskočili o rovných dvacet míst — až na to, že tentokrát vyššího součtu dosáhli naši středoevropští rivalové. Výsledky našich jsou uvedeny v následující tabulce:

Umístění		Body za úlohu						Body	Cena
		1	2	3	4	5	6		
99.–116.	Josef Cibulka, 4. roč. gymnázia Štěpánská 22, Praha 1	6	6	0	3	7	1	23	II.
86.–98.	Jaroslav Hájek, 4. roč. GMK Bílovec	7	7	1	7	2	0	24	II.
233.–248.	Vítězslav Kala, 2. roč. gymnázia Brno, tř. Kpt. Jaroše	6	0	0	6	1	0	13	
145.–159.	Jan Moláček, 2. roč. GJKT Hradec Králové	7	7	0	4	2	0	20	III.
191.–200.	Tomáš Protivínský, 4. roč. gymnázia Brno, tř. Kpt. Jaroše	7	0	0	7	2	0	16	III.
160.–167.	Martin Tancer, 4. roč. G. Ch. Dopplera Praha 5	3	7	1	7	1	0	19	III.
Celkem		36	27	2	34	15	1	115	

Žádný bod neztratili jen tři soutěžící: *Yunhao Fu* s *Botongem Wangem* z Číny a *Andrej Chaliavin* z Ruska.

Jak je patrné z tabulky zúčastněných států, v neoficiálním hodnocení jednotlivých zemí podle celkového bodového zisku dopadly nejlépe (jak už je pomalu tradicí) Čína, Rusko a Spojené státy.

	I	II	III	body		I	II	III	body
ČLR	6	0	0	212	Makedonie	0	1	1	73
Rusko	6	0	0	204	Norsko	1	0	1	72
USA	4	1	0	171	Chorvatsko	0	0	2	70
Bulharsko	3	2	1	167	Mexiko	0	0	3	67
Vietnam	3	1	2	166	Řecko	0	0	2	62
Korea	1	5	0	163	Moldavsko	0	0	2	60
Tchaj-wan	1	4	1	161	Švédsko	0	0	2	60
Rumunsko	2	3	1	157	Uzbekistán	0	0	0	60
Indie	1	3	2	156	Peru	0	0	2	59
Německo	2	1	2	144	Belgie	0	0	1	58
Írán	0	4	2	143	Venezuela	0	1	1	58
Kanada	1	3	1	142	Nizozemsko	0	0	1	55
Maďarsko	1	2	3	142	Dánsko	0	0	0	53
Bělorusko	1	2	3	135	Macao	0	0	3	50
Turecko	1	1	4	135	Rakousko	0	0	1	50
Japonsko	1	3	1	133	Slovinsko	0	0	1	46
Kazachstán	0	3	3	133	Turkmenistán	0	0	1	45
Izrael	0	3	3	130	Španělsko	0	0	1	44
Francie	0	2	3	127	Švýcarsko	0	0	1	44
Ukrajina	1	3	0	124	Bosna a Hercegovina	0	0	1	42
Brazílie	0	1	5	123	Maroko	0	0	1	39
Polsko	0	4	1	123	Indonézie	0	0	1	38
Thajsko	0	2	2	123	Ázerbájdžán	0	0	1	37
Hongkong	1	2	2	120	Island	0	0	0	36
<i>Slovensko</i>	0	2	4	119	Arménie	0	0	0	33
Austrálie	1	2	1	117	Kypr	0	0	0	29
Velká Británie	0	2	2	116	Malajsie	0	0	0	26
<i>Česká republika</i>	0	2	3	115	Albánie	0	0	1	25
Jugoslávie	0	1	5	114	Irsko	0	0	0	25
Singapur	0	2	2	112	Trinidad a Tobago	0	0	0	22
Argentina	0	0	5	96	Tunisko	0	0	0	22
JAR	0	1	3	90	Filipíny	0	0	0	18
Itálie	0	0	5	88	Kirgizie	0	0	0	17
Gruzie	0	0	2	84	Portoriko	0	0	0	17
Mongolsko	0	0	3	82	Srí Lanka	0	0	0	16
Nový Zéland	1	0	0	82	Portugalsko	0	0	0	15
Kolumbie	0	0	3	81	Lucembursko	0	0	0	12
Finsko	0	0	3	79	Paraguay	0	0	0	11
Kuba	0	0	2	78	Guatemala	0	0	0	4
Estonsko	0	2	0	75	Ekvádor	0	0	0	3
Lotyšsko	0	1	2	75	Kuvajt	0	0	0	2
Litva	0	1	2	74	Uruguay	0	0	0	1

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhl)

1. Necht' n je přirozené číslo a necht' T je množina všech bodů (x, y) v rovině, kde x a y jsou celá nezáporná čísla a $x + y < n$. Každý bod z množiny T je obarven buď červeně, nebo modře. Je-li bod (x, y) červený, jsou červené i všechny body $(x', y') \in T$, pro které platí $x' \leq x$ a $y' \leq y$. Definujme X -množinu jako množinu n modrých bodů majících různé x -ové souřadnice a Y -množinu jako množinu n modrých bodů majících různé y -ové souřadnice. Dokažte, že počet X -množin je roven počtu Y -množin. (Kolumbie)

2. Necht' BC je průměr kružnice Γ se středem O . Bod A leží na kružnici Γ tak, že $0^\circ < |\sphericalangle AOB| < 120^\circ$. Necht' D je střed toho oblouku AB , na kterém neleží bod C . Přímka vedená bodem O rovnoběžně s DA protne přímku AC v bodě J . Osa úsečky OA protne kružnici Γ v bodech E a F . Dokažte, že bod J je střed kružnice vepsané trojúhelníku CEF . (Korea)

3. Najděte všechny dvojice přirozených čísel $m, n \geq 3$ takové, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel a , pro která je

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

celé číslo.

(Rumunsko)

4. Necht' n je přirozené číslo větší než 1. Všechny kladné dělitele čísla n označíme $d_1, d_2, \dots, d_k$, kde

$$1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n.$$

Položme $D = d_1 d_2 + d_2 d_3 + \dots + d_{k-1} d_k$.

(a) Dokažte, že $D < n^2$.

(b) Určete všechna n , pro která je číslo D dělitelem čísla n^2 .

(Rumunsko)

5. Necht' $\mathbb{R}$ značí množinu všech reálných čísel. Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

pro libovolná $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

(Indie)

6. V rovině jsou dány kružnice $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ o poloměru 1, kde $n \geq 3$. Jejich středy označme po řadě $O_1, O_2, \dots, O_n$. Předpokládejme, že každá přímka protíná nejvýše dvě z daných kružnic. Dokažte, že

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{|O_i O_j|} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

(Ukrajina)

Řešení úloh

1. Pro každé $i = 0, 1, \dots, n$ označme jako a_i (resp. b_i) počet modrých bodů s x -ovou (resp. y -ovou) souřadnicí rovnou číslu i . Protože X -množina je každá množina modrých bodů, jejichž x -ové souřadnice jsou čísla $0, 1, \dots, n-1$ (každé právě jednou), je počet všech X -množin roven součinu $a_0 a_1 \dots a_{n-1}$; podobně počet všech Y -množin je roven součinu $b_0 b_1 \dots b_{n-1}$. Naší úlohou je dokázat rovnost

$$a_0 a_1 \dots a_{n-1} = b_0 b_1 \dots b_{n-1}. \quad (1)$$

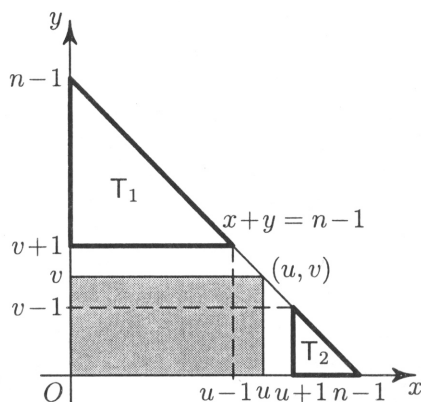
Ukážeme, že na obou stranách (1) stojí dva stejné soubory činitelů, které se mohou lišit jen pořadím, což budeme zapisovat jako rovnost neuspořádaných n -tic

$$[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}] = [b_0, b_1, \dots, b_{n-1}]. \quad (2)$$

Rovnost (2) dokážeme matematickou indukcí podle čísla n .

Představme si, že body z T jsou rozděleny do skupin na jednotlivých přímkách $x + y = k$ ($0 \leq k \leq n-1$). Je-li $n = 1$, je vše jasné: tehdy totiž platí buď $a_0 = b_0 = 1$, nebo $a_0 = b_0 = 0$ (podle toho, zda je bod $(0, 0)$ modrý, nebo červený). Předpokládejme nyní, že $n > 1$. Je-li červený některý bod (u, v) na „krajní“ přímce $x + y = n-1$, můžeme použít indukční předpoklad pro množiny mřížových bodů ležících v trojúhelnících T_1 a T_2 z obr. 38 (ostatní body z T leží ve vybarveném obdélníku⁶ a jsou všechny jako bod (u, v) červené): pro množinu T_1 platí rovnost u -tic $[a_0, a_1, \dots, a_{u-1}] = [b_{v+1}, b_{v+2}, \dots, b_{n-1}]$, pro množinu T_2

⁶ Rovná-li se některé z čísel u, v nule, je jeden z trojúhelníků T_1, T_2 prázdná množina a vybarvený obdélník degeneruje v úsečku.



Obr. 38

zase rovnost v -tic $[a_{u+1}, a_{u+2}, \dots, a_{n-1}] = [b_0, b_1, \dots, b_{v-1}]$; protože navíc $a_u = b_v = 0$, je rovnost (2) dokázána.

Jsou-li naopak na přímce $x+y = n-1$ pouze modré body, odstraníme je z množiny T a pro redukovanou množinu $T' = \{(x, y) \in T : x+y < n-1\}$ využijeme indukční předpoklad: přiřadíme-li množině T' čísla a'_i, b'_i ($0 \leq i \leq n-2$) stejně, jako jsme dříve přiřadili čísla a_i, b_i množině T , jsou $(n-1)$ -tice $[a'_0, a'_1, \dots, a'_{n-2}]$ a $[b'_0, b'_1, \dots, b'_{n-2}]$ shodné; s ohledem na modré body na přímce $x+y = n-1$ ovšem máme $a_i = a'_i + 1$ a $b_i = b'_i + 1$ ($0 \leq i \leq n-2$) a k tomu ještě $a_{n-1} = b_{n-1} = 1$, takže rovnost (2) platí i v tomto případě. Důkaz indukcí je ukončen a úloha je vyřešena.

Popišme nyní elegantní způsob, jakým rovnost (2) dokázal náš sou-
těžící *J. Hájek*.

Jiné řešení. Protože všechna čísla a_i a b_j leží v množině $\{0, 1, \dots, n\}$, stačí dokázat, že pro každý její prvek k je počet indexů i s vlastností $a_i = k$ roven počtu indexů j s vlastností $b_j = k$. Z podmínky úlohy zřejmě plyne, že libovolný bod $(i, j) \in T$ je modrý, právě když spolu s ním jsou modré i všechny body z T nad ním a vpravo od něj. Proto počet indexů i s vlastností $a_i = k$ dostaneme, když od počtu p_k modrých bodů na přímce $x+y = n-k$ odečteme počet p_{k+1} modrých bodů na přímce $x+y = n-(k+1)$; přitom klademe $p_0 = n$ a $p_{n+1} = 0$, abychom „ošetřili“ i krajní hodnoty $k = 0$ a $k = n$. Témuz rozdílu $p_k - p_{k+1}$ je ovšem roven i počet indexů j s vlastností $b_j = k$. Tím jsme dokázali rovnost (2), a tedy i tvrzení úlohy.

Jako **třetí řešení** uvedeme postup, kterým soutěžící *T. Protivínský* dokázal rovnost součinů (1), aniž využil rovnost (2). Všechny červené body z *T* (pokud vůbec existují, jinak je (1) triviálně splněna) zřejmě vyplní sjednocení několika (řekněme *q*) obdélníků $0 \leq x \leq u_i, 0 \leq y \leq v_i$, jejichž (červené!) pravé horní vrcholy (u_i, v_i) ($1 \leq i \leq q$) očíslovujeme tak, aby platilo $0 \leq u_1 < u_2 < \dots < u_q \leq n-1$ a $n-1 \geq v_1 > v_2 > \dots > v_q \geq 1$ (obr. 39). Pokud některý bod (u_i, v_i) leží na přímce $x + y = n-1$, platí $a_{u_i} = b_{v_i} = 0$, takže součiny na obou stranách (1) jsou nulové. Proto dále předpokládejme, že $u_i + v_i < n-1$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ (odtud mj. plyne, že $u_q < n-1$ a $v_1 < n-1$). Nyní snadno vyjádříme (kladně!) počty a_i v jednotlivých intervalech $0 \leq i \leq u_1, u_1 < i \leq u_2, \dots, u_q < i \leq n-1$ jako počty bodů z *T*, které leží nad horní stranou příslušného „červeného“ obdélníku:

$$\begin{aligned} a_i &= n-1-i-v_1 & (0 \leq i \leq u_1), \\ a_i &= n-1-i-v_2 & (u_1 < i \leq u_2), \\ &\vdots \\ a_i &= n-1-i-v_q & (u_{q-1} < i \leq u_q), \\ a_i &= n-1-i+1 & (u_q < i \leq n-1). \end{aligned}$$

neboli

$$a_i = n-1-i-v_{s+1} \quad (u_s < i \leq u_{s+1}, \quad 0 \leq s \leq q),$$

kde navíc klademe $u_0 = v_{q+1} = -1, v_0 = u_{q+1} = n-1$. Dostáváme tak

$$\prod_{i=0}^{n-1} a_i = \prod_{s=0}^q \prod_{i=u_s+1}^{u_{s+1}} (n-1-i-v_{s+1}) = \prod_{s=0}^q \frac{(n-2-u_s-v_{s+1})!}{(n-2-u_{s+1}-v_{s+1})!},$$

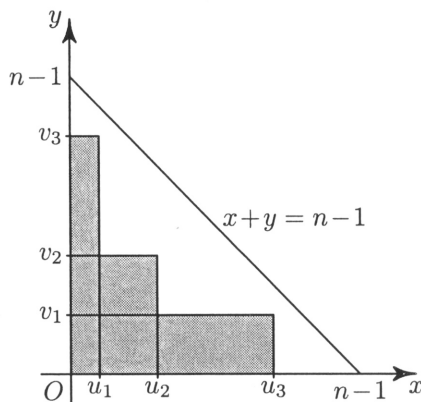
kde jsme využili toho, že každý součin $c(c+1)(c+2) \dots (c+d)$ několika po sobě jdoucích přirozených čísel je roven podílu faktoriálů $(c+d)!/(c-1)!$, přičemž $0! = 1$. Promyslete sami podle obr. 39, jaký geometrický význam mají hodnoty $c = n-1-u_{s+1}-v_{s+1}$ a $c+d = n-2-u_s-v_{s+1}$.

Podobně pro čísla b_j platí analogické vyjádření

$$b_j = n-1-j-u_s \quad (v_{s+1} < j \leq v_s, \quad 0 \leq s \leq q),$$

takže jejich součin je roven

$$\prod_{j=0}^{n-1} b_j = \prod_{s=0}^q \prod_{j=v_{s+1}+1}^{v_s} (n-1-j-u_s) = \prod_{s=0}^q \frac{(n-2-u_s-v_{s+1})!}{(n-2-u_s-v_s)!}.$$

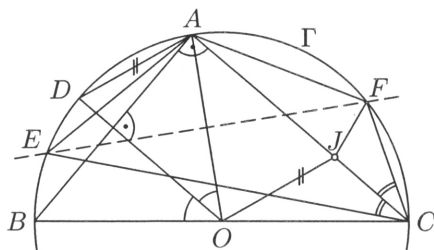


Obr. 39

Vidíme, že nalezená „faktoriálová“ vyjádření obou součinů z (1) se liší pouze ve jmenovateli, a to o činitele $(n - 2 - u_s - v_s)!$ pro $s = 0$ a $s = q + 1$, které jsou však oba rovny $0! = 1$. Důkaz rovnosti (1) je tak dokončen.

2. Důkaz bude proveden, když ukážeme, že bod J leží jednak na ose úhlu ECF , jednak na ose úhlu EFC .

Úsečky AE a AF mají délku rovnou poloměru r kružnice Γ , neboť jsou souměrně sdružené s jejími průměry OE a OF (obr. 40). Ze shodnosti tětiv AE a AF plyne shodnost obvodových úhlů ECA a FCA , proto bod A , a tedy i bod J , leží na ose úhlu ECF .



Obr. 40

Podle Thaletovy věty je úhel BAC nad průměrem BC pravý, a protože OD je osa úsečky AD , je $OD \parallel AJ$, což spolu s $OJ \parallel DA$ znamená, že $OJAD$ je rovnoběžník. Proto $|AJ| = |OD| = r$, což spolu s rovností

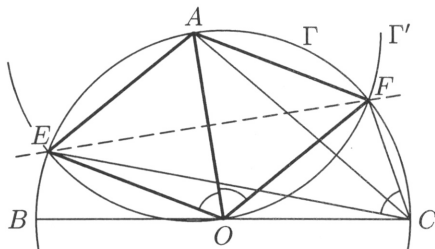
$|AE| = |AF| = r$ znamená, že trojúhelník JFA je rovnoramenný. Ze shodnosti úhlů JFA a AJF pak plyne

$$\begin{aligned} |\sphericalangle JFE| &= |\sphericalangle JFA| - |\sphericalangle EFA| = |\sphericalangle AJF| - |\sphericalangle ECA| = \\ &= |\sphericalangle AJF| - |\sphericalangle JCF| = |\sphericalangle JFC|. \end{aligned}$$

To znamená, že bod J leží na ose úhlu EFC .

V první rovnosti právě provedeného odvození jsme využili toho, že bod J je vnitřním bodem trojúhelníku CEF . To zaručuje podmínka $|\sphericalangle AOB| < 120^\circ$, neboť pak leží bod D uvnitř oblouku EA (trojúhelník EOA je rovnostranný), tedy „nad“ osou EF úhlopříčky OA rovnoběžníku $OJAD$, takže jeho protější vrchol J leží v polovině $EFO = EFC$. (Jak snadno zjistíme, pro bod A takový, že $|\sphericalangle AOB| = 120^\circ$, vyjde $J = C$ a pro $|\sphericalangle AOB| > 120^\circ$ padne už bod J dokonce vně kruhu omezeného kružnicí Γ .)

Jiné řešení. Stejně jako v předchozím řešení zjistíme, že bod J leží na ose úhlu ECF a že $OJAD$ je rovnoběžník. Ze souměrnosti podle EF navíc plyne $|AE| = |OE| = |OA|$, takže AEO a AFO jsou shodné rovnostranné trojúhelníky, tj. $|\sphericalangle EOF| = 120^\circ$. Odtud jednak plyne, že úhel ECF má velikost 60° , jednak vidíme, že body O a J leží na kružnici $\Gamma' = (A; |AO|)$ (obr. 41), jejíž tětivě EF přísluší obvodový úhel 120° .



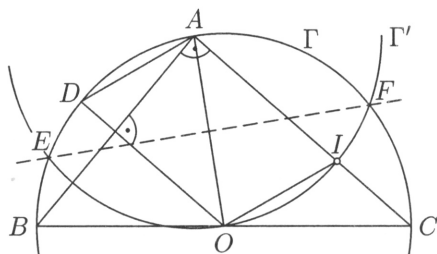
Obr. 41

Je-li I střed kružnice vepsané trojúhelníku CEF , leží, jak už víme, na polopřímce CA . Pro velikost úhlu EIF pak máme

$$|\sphericalangle EIF| = 180^\circ - \frac{1}{2}|\sphericalangle CEF| - \frac{1}{2}|\sphericalangle CFE| = 90^\circ + \frac{1}{2}|\sphericalangle ECF| = 120^\circ,$$

což znamená, že i bod I leží na kružnici Γ' . Ta však protíná úsečku AC v jediném bodě, proto $J = I$.

Zajímavou obměnu uvedeného řešení podal náš soutěžící *J. Hájek*, který využil pomocnou kružnici Γ' se středem v bodě A a poloměrem shodným s poloměrem r kružnice Γ (obr. 42) a následující planimetrické



Obr. 42

tvrzení: Je-li Γ kružnice opsaná trojúhelníku bod CEF a bod A střed toho jejího oblouku EF , na kterém neleží vrchol C , pak vrcholy E, F , střed kružnice vepsané a střed kružnice připsané straně EF trojúhelníku CEF leží na téže kružnici se středem v bodě A .

V naší úloze z podmínky $|\sphericalangle AOB| < 120^\circ$ plyne, že $|AC| > r$, takže kružnice Γ' protne úsečku AC v některém vnitřním bodě, který označíme I . Protože kružnice Γ' prochází body E, F a polopřímka CA je osou úhlu ECF , je podle zmíněného tvrzení bod I středem kružnice vepsané trojúhelníku CEF . Stačí tedy ukázat, že bod I splývá s bodem J ze zadání úlohy. K tomu si všimneme, úsečky AI a DO mají stejnou délku r a jsou obě kolmé k přímce AB (úhel BAC je obvodový úhel nad průměrem BC kružnice Γ , přímka OD je osou souměrnosti úsečky AB). To znamená, že $ADOI$ je rovnoběžník, tudíž I je ten bod přímky AC , pro který platí $DA \parallel OI$, a proto $I = J$.

3. Předpokládejme, že dvojice přirozených čísel (m, n) má požadovanou vlastnost. Zřejmě platí $m > n$, v případě $m \leq n$ by totiž pro každé $a > 1$ platilo

$$0 < \frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1} < 1.$$

Při dělení mnohočlenu $F(x) = x^m + x - 1$ mnohočlenem $G(x) = x^n + x^2 - 1$ najdeme mnohočleny Q, R s celočíselnými koeficienty splňující rovnost $F(x) = Q(x)G(x) + R(x)$, přičemž stupeň mnohočlenu R je menší

než stupeň G — to znamená, že

$$\frac{R(x)}{G(x)} \rightarrow 0 \quad \text{pro } x \rightarrow \infty, \quad (1)$$

zároveň však z rovnosti

$$\frac{F(a)}{G(a)} = Q(a) + \frac{R(a)}{G(a)}$$

podle podmínky úlohy plyne, že podíl $R(a)/G(a)$ je celé číslo pro nekonečně mnoho přirozených čísel a . To vzhledem k (1) znamená, že jen pro konečný počet z nich je $R(a)/G(a) \neq 0$, takže mnohočlen R má nekonečně mnoho kořenů, je tudíž nulový: $R(x) = 0$ pro každé x . Označíme-li nyní $k = m - n > 0$, pak z vyjádření

$$Q(x) = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{x^{n+k} + x - 1}{x^n + x^2 - 1} = x^k + \frac{-x^{k+2} + x^k + x - 1}{x^n + x^2 - 1} \quad (2)$$

vyplývá, že mnohočlen $G(x) = x^n + x^2 - 1$ dělí mnohočlen $-x^{k+2} + x^k + x - 1$, který lze rozložit na součin $(1-x)(x^{k+1} + x^k - 1)$. Protože $G(1) = 1 \neq 0$, mnohočlen $G(x)$ dělí dokonce mnohočlen $H(x) = x^{k+1} + x^k - 1$, mezi jejich stupni tudíž platí vztah $n \leq k+1$. Z nerovností $G(0) = -1 < 0$ a $G(1) = 1 > 0$ usoudíme, že $G(s) = 0$ pro některé reálné číslo $s \in (0, 1)$. Potom ovšem rovněž $H(s) = 0$, takže $s^n + s^2 - 1 = s^{k+1} + s^k - 1$, neboli $s^n - s^{k+1} = s^k - s^2$. Levá strana poslední rovnosti je nezáporná (platí totiž $0 < s < 1$ a $n \leq k+1$), takže podle pravé strany musí být $k \leq 2$. Podle zadání úlohy však platí $n \geq 3$, tudíž z nerovností $n \leq k+1$ a $k \leq 2$ vychází $n = 3$ a $k = 2$, odkud $m = n + k = 5$. Dvojice $(m, n) = (5, 3)$ má skutečně požadovanou vlastnost:

$$\frac{x^5 + x - 1}{x^3 + x^2 - 1} = x^2 - x + 1.$$

Poznámka. Podané řešení vypadá zdánlivě jednoduše. Rozhodujícím obratem je „částečné“ vydělení (2), bez něhož bychom následným postupem došli k rovnosti $s^{n+k} + s = s^n + s^2$, jejíž rozbor (původní autorské řešení) je velmi náročný.⁷

⁷ Úpravu (2) a její účinnost objevil ještě před vlastní soutěží vedoucí bulharské delegace *Sava Grozdev*. Nezměnilo to však nic na názoru poroty, že úloha je nejobtížnější z celé vybrané šestice. Výsledky soutěžících (nejen našich) to pak potvrdily.

4. a) Patří-li číslo d k dělitelům čísla n , patří k nim i číslo n/d . Proto je rostoucí k -tice dělitelů $n/d_k, n/d_{k-1}, \dots, n/d_1$ shodná s původní rostoucí k -ticí (všech!) dělitelů $d_1, d_2, \dots, d_k$. S ohledem na zřejmé nerovnosti $k \leq \leq n$ a $d_j \geq j$ tudíž platí

$$\begin{aligned} D &= d_1 d_2 + d_2 d_3 + \dots + d_{k-1} d_k = \\ &= \frac{n}{d_k} \cdot \frac{n}{d_{k-1}} + \frac{n}{d_{k-1}} \cdot \frac{n}{d_{k-2}} + \dots + \frac{n}{d_2} \cdot \frac{n}{d_1} = \\ &= n^2 \left(\frac{1}{d_1 d_2} + \frac{1}{d_2 d_3} + \dots + \frac{1}{d_{k-1} d_k} \right) \leq \\ &\leq n^2 \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} \right) = \\ &= n^2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \\ &= n^2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) < n^2. \end{aligned}$$

b) Ukážeme, že číslo D dělí číslo n , právě když n je prvočíslo. Je-li n prvočíslo, pak $k = 2$, $d_1 = 1$, $d_2 = n$ a $D = 1 \cdot n = n$, což je skutečně dělitel čísla n^2 .

Předpokládejme dále, že číslo n je složené, a označme p jeho nejmenší prvočíselný dělitel. Potom platí $k > 2$ a $d_{k-1} = n/p$, odkud dostáváme

$$D = d_1 d_2 + d_2 d_3 + \dots + d_{k-1} d_k > d_{k-1} d_k = \frac{n}{p} \cdot n = \frac{n^2}{p},$$

což dohromady s dokázanou částí a) vede k odhadu $n^2/p < D < n^2$. Odtud již plyne, že D nedělí n^2 , neboť číslo n^2/p je po číslu n^2 druhý největší dělitel čísla n^2 .

5. Snadno ověříme, že mezi funkce splňující danou funkcionální rovnici patří funkce určené vzorci $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = \frac{1}{2}$ a $f_3(x) = x^2$. Ukážeme, že žádná jiná funkce f požadovanou vlastnost nemá.

Dosažením $x = y = z = 0$ do dané rovnice dostaneme $2f(0)(f(0) + f(t)) = 2f(0)$ pro každé t . Speciálně pro $t = 0$ vychází $4f(0)^2 = 2f(0)$, takže buď $f(0) = 0$, nebo $f(0) = \frac{1}{2}$. V případě $f(0) = \frac{1}{2}$ podle předchozího platí $\frac{1}{2} + f(t) = 1$, a tedy $f(t) = \frac{1}{2}$ pro každé t .

Předpokládejme nyní, že $f(0) = 0$. Volbou $z = t = 0$ v dané rovnici dostaneme $f(xy) = f(x)f(y)$ pro libovolná x, y . Takovou funkci f nazýváme multiplikativní. Speciálně platí $f(1) = f(1)^2$, takže buď $f(1) = 0$,

nebo $f(1) = 1$. V případě $f(1) = 0$ ovšem $f(x) = f(x \cdot 1) = f(x) \cdot f(1) = 0$, tj. $f(x) = 0$ pro každé x .

Zbývá tedy prozkoumat případ, kdy $f(0) = 0$ a $f(1) = 1$. Dosadíme-li $x = 0$ a $y = t = 1$ do (1), dostaneme $2f(z) = f(-z) + f(z)$, tedy $f(z) = f(-z)$ pro každé z , to znamená, že f je sudá funkce. Ukážeme-li proto dále, že $f(x) = x^2$ pro každé $x > 0$, bude stejný vzorec platit pro každé reálné číslo x . Položíme-li v dané rovnici $y = z = t = 1$, dostaneme pro každé x rovnost

$$2(f(x) + 1) = f(x - 1) + f(x + 1),$$

ze které lze vypočítat hodnotu $f(x+1)$, známe-li hodnoty $f(x)$ a $f(x-1)$. Tímto postupem lze rutinní indukcí ověřit, že $f(n) = n^2$ pro každé *přirozené* číslo n (jak je tomu pro $n = 0$ a $n = 1$). Odtud už s ohledem na to, že f je multiplikativní, poměrně snadno vyplývá, že rovnost $f(x) = x^2$ platí pro každé kladné *racionální* číslo x . Skutečně, ke každému takovému x existuje přirozené n takové, že číslo nx je přirozené; jak už víme, rovnosti $f(n) = n^2$ a $f(nx) = (nx)^2$ platí, v jejich důsledku dostáváme

$$n^2 x^2 = (nx)^2 = f(nx) = f(n)f(x) = n^2 f(x),$$

odkud $f(x) = x^2$. Poslední rovnost bude platit i pro kladná *iracionální* čísla x , když ukážeme, že funkce f je na intervalu $(0, \infty)$ neklesající. Všimněme si předně, že pro každé reálné x platí $f(x) = f(\sqrt{|x|})^2 \geq 0$; proto má funkce f pouze nezáporné hodnoty. Je-li $0 < v < u$, pak

$$f(v) = f(\sqrt{v})^2 = (f(\sqrt{v}) + 0)^2 \leq (f(\sqrt{v}) + f(\sqrt{u-v}))^2 = f(u),$$

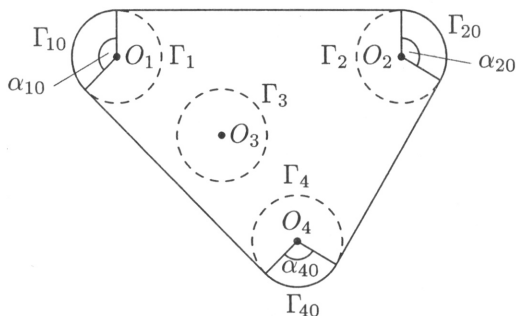
kde poslední rovnost plyne z dané rovnice volbou $x = t = \sqrt{v}$ a $y = z = \sqrt{u-v}$. Ukázali jsme, že f je skutečně na intervalu $(0, \infty)$ neklesající a celý důkaz je hotov.

6. Důkaz, který uvedeme, patří vedoucímu kolumbijské delegace *F. Ardilovi* a je podstatně jednodušší než původní autorské řešení.

Poznamenejme nejprve, že žádné dvě z daných kružnic nemají společný bod, neboť společným bodem dvou kružnic Γ_i, Γ_j by bylo možno vést přímkou, která protíná libovolnou třetí kružnici Γ_k .

Uvažujme nyní konvexní obal rovinné množiny, která je sjednocením dané n -tice kružnic. Hranice tohoto obalu se skládá z několika úseků

společných vnějších tečen dvojic daných kružnic a několika jejich oblouků (obr. 43). Příslušný oblouk kružnice Γ_i označíme Γ_{i0} a jeho velikost



Obr. 43

v radiánech α_{i0} .⁸ Protože zkoumaná hranice je hladká uzavřená křivka, zřejmě platí rovnost

$$\alpha_{10} + \alpha_{20} + \dots + \alpha_{n0} = 2\pi. \quad (1)$$

Dále budeme potřebovat tuto vlastnost každého oblouku Γ_{i0} : je-li T libovolný vnitřní bod oblouku Γ_{i0} , pak tečna ke kružnici Γ_i s bodem dotyku T nemá společný bod s žádnou další kružnicí Γ_j , $j \neq i$.

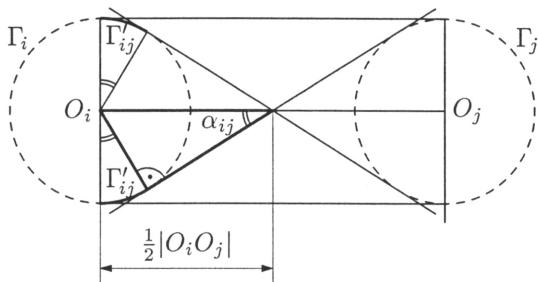
Vyberme nyní libovolné dvě dané kružnice Γ_i , Γ_j a na první z nich, kružnici Γ_i , uvažujme body T s touto vlastností: tečna ke kružnici Γ_i s bodem dotyku T má aspoň jeden společný bod s kružnicí Γ_j . Všechny takové body T vyplní na kružnici Γ_i dva shodné oblouky Γ_{ij} a Γ'_{ij} , jejichž krajní body jsou body dotyku společných tečen dané dvojice kružnic (obr. 44). Pro velikost α_{ij} těchto oblouků podle obrázku platí

$$\sin \alpha_{ij} = \frac{1}{\frac{1}{2}|O_i O_j|}, \quad \text{odkud} \quad \frac{1}{|O_i O_j|} = \frac{\sin \alpha_{ij}}{2} < \frac{\alpha_{ij}}{2}, \quad (2)$$

neboť $\sin \alpha < \alpha$ pro každé $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$.

Podle předchozího popisu jsme na každé kružnici Γ_i vyčlenili $2n - 1$ oblouků: oblouk Γ_{i0} a $(n - 1)$ párů oblouků Γ_{ij} a Γ'_{ij} , kde $j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\}$. Podle zadání úlohy žádné dva z těchto $(2n - 1)$

⁸ Má-li kružnice Γ_i s hranicí obalu společný nejvýše jeden bod, položíme $\Gamma_{i0} = \emptyset$ a $\alpha_{i0} = 0$.



Obr. 44

oblouků nemají společný vnitřní bod, takže pro součet jejich velikostí platí odhad

$$\alpha_{i0} + 2 \sum_{\substack{1 \leq j \leq n, \\ j \neq i}} \alpha_{ij} \leq 2\pi,$$

který spolu s (2) vede k nerovnosti

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq n, \\ j \neq i}} \frac{1}{|O_i O_j|} < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \alpha_{i0}$$

pro každé $i = 1, 2, \dots, n$. Sečteme-li těchto n nerovností, pak s ohledem na vztah (1) a zřejmé rovnosti $|O_i O_j| = |O_j O_i|$ dostaneme

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{|O_i O_j|} < n \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \alpha_{i0} = \frac{(n-1)\pi}{2},$$

odkud po dělení dvěma vychází kýžená nerovnost.

Devátý ročník Středoevropské olympiády v informatice

Ve dnech 30. června až 6. července 2002 proběhla ve slovenských Košicích Středoevropská olympiáda v informatice (Central European Olympiad in Informatics, CEOI 2002). Vedoucím české reprezentace byl RNDr. *Tomáš Pitner*, Dr., z Masarykovy univerzity v Brně, Fakulty informatiky. Úloha zástupce vedoucího týmu byla svěřena Mgr. *Danielu Královi* z Univerzity Karlovy v Praze, Matematicko-fyzikální fakulty.

Soutěž probíhala regulérně podle pravidel CEOI za maximální podpory především slovenského ministerstva školství, ale též složek místní a regionální veřejné správy (město Košice, Košický kraj), vysokých škol (zejména UPJŠ Košice a UK Bratislava) a odborných sdružení — zejména *Slovenská informatická spoločnosť*. Vlastní soutěž se konala na půdě *Ústavu informatiky PřF UPJŠ Košice*. Hmotné i personální zabezpečení akce bylo na velmi vysoké úrovni.

Stejně jako v minulém roce bylo při vlastní soutěži (po vzoru IOI) používáno modernizované vývojové a testovací prostředí. Soutěžící pracovali v prostředích Windows 98 nebo Linux s překladací GNU C++ (gcc) a Free Pascal s vývojovým prostředím RHIDE. Novinkou letošní CEOI bylo použití webového systému pro zasílání řešení k vyhodnocení. Vyhodnocení se provádělo plně automaticky „testovačem“ běžícím v OS Debian Linux pomocí předem připravených sad testovacích dat.

Reprezentační tým ČR tvořili (v abecedním pořadí): *Jiří Danihelka* ze SPŠ Čapkova v Písku; *Tomáš Gavenčiak* z Gymnázia Mikuláše Koperníka v Bílovci; *Jan Kadlec* z Gymnázia Ch. Dopplera v Praze a *Milan Straka* z Gymnázia Strakonice.

Milan Straka obsadil v celkovém pořadí 9. místo (270 bodů z 600 možných) a získal stříbrnou medaili, Jan Kadlec získal s 250 body bronzovou medaili (13. místo). Tomáš Gavenčiak skončil na prvním nemedailovém (21.) místě s 200 body. Celkově soutěžili 42 studenti, mezi něž se rozdělilo 18 medailí (3 zlaté, 6 stříbrných a 9 bronzových). Celkově lze konstatovat, že výsledky na CEOI 2002 byly pro ČR příznivější než v roce minulém. Rozhodnutím mezinárodního výboru CEOI bylo pořadatelem CEOI v roce 2003 určeno Německo, olympiáda se uskuteční v Münsteru.

14. mezinárodní olympiáda v informatice

Ve dnech 18.–25. 8. 2002 se v Korejské republice konal 14. ročník mezinárodní olympiády v informatice IOI 2002 (International Olympiad in Informatics). Soutěž IOI je pořádána pod záštitou UNESCO a patří mezi mezinárodní předmětové olympiády středoškoláků. Její ohlas ve světě v posledních letech stále roste a každoročně se zvyšuje počet zúčastněných zemí. Letošního ročníku se zúčastnilo 276 soutěžících ze 72 zemí celého světa, z dalších pěti zemí přijeli pozorovatelé seznámit se s průběhem olympiády a s úmyslem zúčastnit se dalšího ročníku soutěže.



Mezinárodní olympiády v informatice se pravidelně účastní i reprezentační družstvo České republiky tvořené nejlepšími řešiteli celostátního kola Matematické olympiády — kategorie P (programování). Letošní reprezentační družstvo pro IOI 2002 bylo vybráno na základě výsledků celostátního kola kategorie P 51. ročníku MO. Družstvo mělo následující složení: *Josef Cibulka* (absolvent Gymnázia v Praze 1, Štěpánská), *Pavel Čížek* (student Gymnázia v Kralupech nad Vltavou), *Milan Straka* (student Gymnázia ve Strakoniciích) a *Jiří Štěpánek* (student Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně). Vedením družstva byli pověřeni doc. *Pavel Töpper* a *Jan Kára*, oba z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Naše šestičlenná delegace odlétala z Prahy v sobotu 17. 8. 2002 v odpoledních hodinách přes Amsterdam do Soulu, kde jsme přistáli v neděli 18. 8. krátce před polednem na mezinárodním letišti Incheon. Tam nás již očekávali místní pořadatelé a pomocí autobusů nás přepravili na místo konání olympiády — do areálu Kyung Hee University ve městě Yong-In. Tamní areál univerzity je poměrně rozsáhlý a bylo v něm zajištěno vše potřebné pro průběh soutěže. Byli jsme ubytováni na studentských kolejkách, stravování zajišťovala místní studentská jídelna, v sálech univerzitní knihovny byly připraveny prostory pro vlastní soutěž i pro práci jury a organizátorů. Součástí univerzitního celku byla celá řada sportovišť, která byla ve volném čase k dispozici i účastníkům informatické olympiády.

Místní multimediální centrum zase všem účastníkům nabízelo nepřetržitý bezplatný přístup k počítačům a k Internetu.

Stejně jako v minulých letech byla vlastní soutěž rozdělena do dvou soutěžních dnů, v každém z nich řešili soutěžící na počítačích tři úlohy. Úlohy zadané v letošním ročníku byly algoritmicky velmi obtížné, v soutěži se objevily také některé netradiční formy úloh (interaktivní úloha, úloha s otevřeným vstupem). Podle loni přijatého modelu měli studenti pro svou práci k dispozici alternativně operační systémy Windows a Linux, takže každý mohl pracovat v takovém prostředí, které lépe zná a na které je zvyklý. Výsledné programy bylo možné psát v programovacích jazycích Pascal, C nebo C++, používaly se překladače Free Pascal a GNU C/C++, vývojové prostředí RHIDE. Svá řešení úloh soutěžící odevzdávali k vyhodnocení prostřednictvím nově vyvinutého webového rozhraní. Vyhodnocení se provádělo plně automaticky pomocí předem připravených sad testovacích dat. Různá kvalita navržených algoritmů byla bodově odlišena na základě zvolených časových limitů.

Za řešení každé úlohy bylo možné získat maximálně 100 bodů, skutečně dosažený průměrný bodový zisk z jedné úlohy byl však mnohem nižší a pohyboval se jenom kolem 20 bodů. I to svědčí o mimořádné náročnosti letošní soutěže. Mezi 276 účastníků bylo rozděleno celkem 23 zlatých medailí (mají obdobný význam jako I. cena v MMO a jsou určeny pro nejlepší přibližně 1/12 účastníků), 47 stříbrných medailí (obdoba II. ceny v MMO, určeny pro další 1/6 účastníků) a 68 bronzových medailí (odpovídají III. ceně na MMO, získá ji přibližně 1/4 účastníků). Některou z medailí má podle regulí IOI dostat nejvýše polovina soutěžících. Letos bylo uděleno celkem 138 medailí, tzn. medaili obdržela přesně polovina ze studentů soutěžících v IOI.

Výsledky našich studentů:

20.	Josef Cibulka	307 bodů	zlatá medaile
119.	Pavel Čížek	160 bodů	bronzová medaile
	Milan Straka	120 bodů	
	Jiří Štěpánek	84 bodů	

Výkony našich studentů v soutěži byly poměrně dobré a jejich výsledky nás řadí kolem 20. místa v celkovém pořadí. Olympiáda IOI je ovšem výhradně soutěží jednotlivců a oficiální výsledky družstev se zde vůbec nevyhlašují (neexistuje ani žádná metodika, jak je určovat — zda

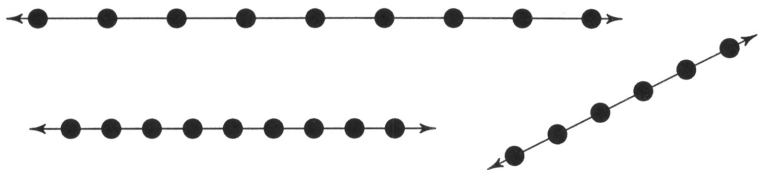
podle počtu získaných bodů, medailí nebo třeba pořadí). Velkým úspěchem našeho družstva je zejména zisk zlaté medaile *Josefa Cibulky*, druhým českým úspěšným řešitelem byl *Pavel Čížek* s bronzovou medailí. Zbývající dva naši studenti zůstali tentokrát bez medailového ocenění, pořadatelé nevydali ani kompletní výsledkovou listinu s pořadím neúspěšných řešitelů.

Příští, jubilejní 15. ročník mezinárodní olympiády v informatice IOI 2003 se bude konat ve dnech 16.–23. 8. 2003 v USA na univerzitě Wisconsin-Parkside. Američtí pořadatelé příštího ročníku olympiády během jednání probíhajících v Koreji pozvali všechny zúčastněné země k účasti na IOI 2003. Mezinárodní výbor IOI na svém jednání také potvrdil, že další budoucí ročníky IOI budou hostit po řadě Řecko (2004), Polsko (2005) a Mexiko (2006).

Texty soutěžních úloh

1. Zlobivá žába

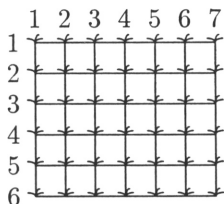
V Koreji je žába *cheonggaeguri* pověstná svou zlobivostí. Svou pověst si zcela zaslouží, protože v noci skáče přes rýžová políčka a ušlapává rostlinky. Když ráno uvidíte, které rostlinky jsou pošlapané, rádi byste zjistili, která žába vám způsobila nejvíce škody. Žába vždy skáče přes rýžové políčko po přímce a všechny její skoky jsou stejně dlouhé (obr. 45). Různé žáby mohou skákat různě dlouhými skoky a v různých směrech.



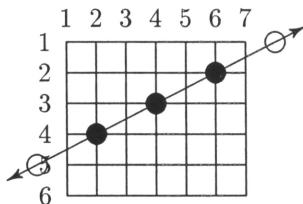
Obr. 45

Na vašem rýžovém políčku jsou rostliny vysázeny na průsečících čtvercové sítě, jak ukazuje obr. 46. Každá žába skáče přes celé políčko, tj. začíná i končí vně políčka, jak ukazuje obr. 47.

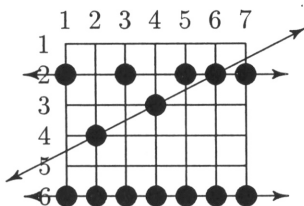
Přes políčko může skákat hodně žab. Každá žába při každém svém skoku dopadne na nějakou rostlinku, kterou tím ušlápne (obr. 48). Uvědomte si, že na jednu rostlinku může během noci doskočit několik žab. Čáry představující cestu žáby, které vidíte na obr. 48, samozřejmě na políčku nejsou vidět. Situaci, kterou ráno uvidíte, ukazují obr. 49.



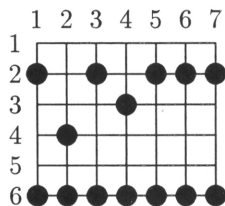
Obr. 46



Obr. 47



Obr. 48



Obr. 49

Z obr. 49 pak můžete zrekonstruovat všechny možné cesty, po kterých mohly žáby skákat přes vaše políčko. Zajímají vás pouze cesty těch žab, které vám pošlapaly alespoň tři rostlinky. Takové cesty nazveme *žabí*. V našem příkladě na obr. 48 jsou žabí všechny vyznačené cesty a také některé další cesty. Svislá cesta prvním sloupcem by mohla být cestou nějaké žáby se skokem délky čtyři, ale obsahuje pouze dvě ušlápnuté rostlinky, a proto se o ni nezajímáme. Diagonální cesta obsahující rostlinky v řadě 2 sloupci 3, řadě 3 sloupci 4 a řadě 6 sloupci 7 má sice tři rostlinky, ale ne v pravidelných vzdálenostech od sebe, a proto to nemůže být žabí cesta. Uvědomte si, že na přímce určené žabí cestou mohou ležet i nějaké další ušlápnuté rostlinky (například rostlinka na souřadnicích (2, 6) na vodorovné cestě po řádce 2 v obrázku 4). Navíc ne každá ušlápnutá rostlinka musí být součástí nějaké žabí cesty.

Napište program, který ze všech možných žabích cest vybere tu, na níž žába ušlápla nejvíce rostlinek (tj. způsobila největší škodu na úrodě rýže). Na obr. 49 by to byla cesta po řadě 6 a výsledkem by bylo číslo 7.

Vstup. Váš program musí číst data ze standardního vstupu. První řádek obsahuje dvě celá čísla R a C určující počet řádků a sloupců na vašem rýžovém políčku, $1 \leq R, C \leq 5\,000$. Druhý řádek obsahuje jediné celé číslo N — počet ušlápnutých rostlinek, $3 \leq N \leq 5\,000$. Každý ze zbývajících N řádků obsahuje dvě celá čísla oddělená jednou mezerou, která představují číslo řádku a číslo sloupce ušlápnuté rostlinky (obě

čísla jsou alespoň 1 a nejvýše R , resp. C). Každá ušlápnutá rostlinka je uvedena na vstupu právě jednou.

Výstup. Váš program musí vypisovat výsledek na standardní výstup. Výstup obsahuje jeden řádek s jediným celým číslem. Toto číslo určuje počet ušlápnutých rostlinek na té žabí cestě, která způsobila největší škody. Pokud neexistuje žádná žabí cesta, výstupem bude číslo 0.

Příklady vstupů a výstupů.

Příklad 1: Vstup

(příklad z obr. 49):

6 7

14

2 1

6 6

4 2

2 5

2 6

2 7

3 4

6 1

6 2

2 3

6 3

6 4

6 5

6 7

Výstup: 7

Příklad 2: Vstup

(příklad z obr. 50):

6 7

18

1 1

6 2

3 5

1 5

4 7

1 2

1 4

1 6

1 7

2 1

2 3

2 6

4 2

4 4

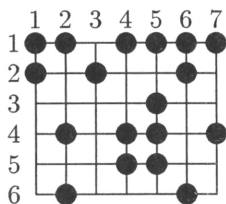
4 5

5 4

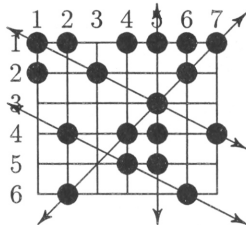
5 5

6 6

Výstup: 4



Obr. 50



Obr. 51

Hodnocení. Pokud váš program odpoví správně v časovém limitu, získáte za daný testovací vstup plný počet bodů, jinak za tento vstup získáte 0 bodů.

2. Rozdělená Utopie

Nádherná země Utopie byla kdysi zasažena válkou. Po válce byla země rozdělena na čtyři oblasti podle poledníku (severo-jížně) a podle rovnoběžky (východo-západně). Průsečík těchto hraničních čar byl označen souřadnicemi $(0,0)$. Všechny čtyři oblasti se pojmenovaly Utopie, ale časem se zavedlo označení Utopie 1 (severovýchodní oblast), 2 (severozápadní), 3 (jihozápadní), 4 (jihovýchodní). Bod v každé z oblastí má jednoznačné souřadnice, jimiž jsou vzdálenost na východ a na sever od bodu $(0,0)$. Tyto souřadnice mohou být záporné. Body v Utopii 2 se tedy označují dvojicí souřadnic (*záporná, kladná*), v Utopii 3 dvojicí souřadnic (*záporná, záporná*), v Utopii 4 (*kladná, záporná*) a v Utopii 1 dvojicí kladných čísel (obr. 51).

Utopia 2 (-,+)	Utopia 1 (+,+)
(0,0)	
Utopia 3 (-,-)	Utopia 4 (+,-)

Velkým problémem bylo, že obyvatelé nesměli přejíždět hranice. Naštěstí Pat a Mat (bývalí účastníci IOI) sestrojili teleport. Stroj se spouští zadáním kódových čísel, přičemž každé z nich může být použito pouze jednou. Vaším úkolem je řídit teleport z výchozí pozice $(0,0)$ po oblastech Utopie v daném pořadí. Nezáleží na tom, v kterém místě dané oblasti přistanete.

Máte tedy dáno N čísel oblastí, v nichž musíte postupně přistát. Může být požadováno, abyste přistáli vícekrát za sebou v téže oblasti. Po opuštění výchozího bodu $(0,0)$ nesmíte nikdy přistát na hranici.

Dále máte dáno $2N$ kódových čísel, která můžete použít pro řízení teleportu. Úkolem je vytvořit z nich N párů a před každé číslo umístit znaménko $+$ nebo $-$. Nacházíte-li se v bodě o souřadnicích (x,y) a použijete kódový pár $(+u, -v)$, budete teleportováni do bodu o souřadnicích $(x+u, y-v)$. Zadaných $2N$ čísel můžete použít v libovolném pořadí a každé z nich buď se znaménkem $+$, nebo $-$.

Máte-li například dána kódová čísla 7, 5, 6, 1, 3, 2, 4, 8 a máte řídit teleport postupně do oblastí číslo 4, 1, 2, 1, výsledná posloupnost kódových párů může obsahovat $(+7, -1)$, $(-5, +2)$, $(-4, +3)$, $(+8, +6)$. Tato posloupnost vás postupně přenese do bodů $(7, -1)$, $(2, 1)$, $(-2, 4)$ a $(6, 10)$. Tyto body se nacházejí po řadě v oblastech Utopie 4, Utopie 1, Utopie 2 a Utopie 1.

Úkol. Je dáno $2N$ navzájem různých kódových čísel a posloupnost N čísel oblastí, ve kterých máte přistát. Sestrojte z daných čísel takovou posloupnost kódových dvojic, která řídí teleport po oblastech dle zadaného pořadí.

Vstup. Váš program musí číst vstupní data ze standardního vstupu. První řádek obsahuje kladné celé číslo N , $1 \leq N \leq 10\,000$. Druhý řádek obsahuje $2N$ různých celých kódových čísel ($1 \leq \text{kódové číslo} \leq 100\,000$) oddělených jednou mezerou. Poslední řádek obsahuje posloupnost N čísel oblastí, z nichž každé je 1, 2, 3 nebo 4.

Výstup. Váš program musí vypsát výsledek na standardní výstup. Výstup se skládá z N řádků. Každý z nich obsahuje dvojici kódových čísel, každé kódové číslo je opatřeno znaménkem. Mezi znaménkem a číslem nesmí být mezera, ale čísla na řádku musí být oddělena jednou mezerou.

Pokud existuje více řešení, váš program může vypsát jedno libovolné z nich. Jestliže žádné řešení neexistuje, program vypíše jediné číslo 0.

Příklady vstupů a výstupů.

Příklad 1: Vstup:

```
4
7 5 6 1 3 2 4 8
4 1 2 1
```

Výstup:

```
+7 -1
-5 +2
-4 +3
+8 +6
```

Příklad 2:

Vstup:

```
4
2 5 4 1 7 8 6 3
4 2 2 1
```

Výstup:

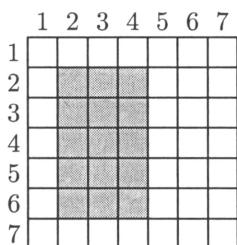
```
+3 -2
-4 +5
-6 +1
+8 +7
```

3. XOR-ová komprese

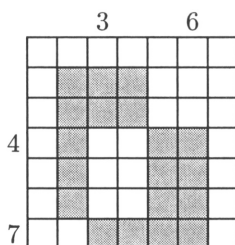
Vytváříte aplikaci pro mobilní telefon s černobílou obrazovkou. Na obrazovce se x -ové souřadnice bodů číslují od 1 zleva doprava a y -ové

souřadnice od 1 shora dolů, jak ukazuje obr. 52. Ve vaší aplikaci potřebujete na obrazovku kreslit různé obrazce různých velikostí. Abyste obrazce nemuseli ukládat, chcete je vytvářet pomocí grafické knihovny v telefonu. Můžete předpokládat, že na počátku kreslení jsou všechny body na obrazovce bílé. Jediná operace, kterou grafická knihovna podporuje, je $XOR(L, R, T, B)$. Tato operace invertuje všechny body v obdélníku s levým horním rohem na souřadnicích (L, T) a pravým dolním rohem (R, B) . L zde znamená levý okraj, R pravý, T horní a B dolní.

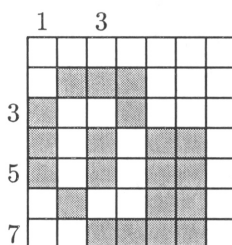
Například aplikováním operace $XOR(2, 4, 2, 6)$ na prázdnou obrazovku získáme obrazec z obr. 53. Aplikováním $XOR(3, 6, 4, 7)$ na obrazec z obr 1 dostaneme obrazec z obr. 54 a aplikováním $XOR(1, 3, 3, 5)$ na obrazec z obr 2 získáme obrazec z obr. 54.



Obr. 52



Obr. 53



Obr. 54

Máte danou sadu černobílých obrazců, které chceme vykreslovat na obrazovce telefonu. Vaším úkolem je vytvořit každý z těchto obrazců z počáteční bílé obrazovky pomocí co nejméně operací XOR . Obrazce dostanete popsány ve vstupních souborech. Odevzdat máte příslušné výstupní soubory s parametry pro operace XOR , nikoliv program!

Vstup. Dostanete deset vstupních textových souborů nazvaných `xor1.in` až `xor10.in`. Každý vstupní soubor má následující tvar. První řádek vstupního souboru obsahuje jedno celé číslo N , $5 \leq N \leq 2000$. Číslo N určuje počet řádků a sloupců obrazce. Zbývající řádky vstupního souboru reprezentují jednotlivé řady obrazce shora dolů. Řádek obsahuje vždy N celých čísel určujících zleva doprava body na obrazovce. Každé z těchto čísel je buď 0, nebo 1, přičemž 0 představuje bílý bod a 1 černý bod.

Výstup. Odevzdejte deset výstupních souborů odpovídajících daným vstupním souborům. Velikost každého výstupního souboru musí být menší než 1 megabyte.

První řádek výstupního souboru obsahuje text

`#FILE xor I`

kde I je číslo odpovídajícího vstupního souboru. Druhý řádek obsahuje celé číslo K — počet volání operace XOR. Následuje přesně K řádků popisujících jednotlivá volání operace XOR od prvního po poslední. Každý z těchto K řádků je tvořen čtyřmi celými čísly — parametry operace XOR v pořadí L, R, T, B .

Příklad vstupu a výstupu:

xor0.in	xor0.out
7	#FILE xor 0
0 0 0 0 0 0 0	3
0 1 1 1 0 0 0	2 4 2 6
1 0 0 1 0 0 0	3 6 4 7
1 0 1 0 1 1 0	1 3 3 5
1 0 1 0 1 1 0	
0 1 0 0 1 1 0	
0 0 1 1 1 1 0	

Hodnocení. Jestliže

- ▷ volání XOR uvedená ve výstupním souboru nevytvářejí požadovaný obrazec, nebo
 - ▷ počet volání XOR ve výstupním souboru není roven K , nebo
 - ▷ počet volání XOR K je větší než 40 000, nebo
 - ▷ výstupní soubor obsahuje volání XOR s parametry $L > R$ nebo $T > B$, nebo
 - ▷ výstupní soubor obsahuje volání XOR s nekladným parametrem, nebo
 - ▷ výstupní soubor obsahuje volání XOR s parametrem větším než N ,
- pak dostanete za tento vstup 0 bodů. Jinak bude vaše hodnocení určeno vzorcem

$$1 + 9 \cdot \frac{\text{NejmenšíDosaženýPočetVoláníZeVšechSoutěžících}}{\text{VášPočetVolání}}.$$

Počet bodů za jeden vstup je zaokrouhlen na jedno desetinné místo. Celkové hodnocení úlohy je zaokrouhleno na celé číslo.

Pokud například odešlete řešení se 121 voláními operace XOR a vaše řešení pro tato vstupní data je nejlepší v soutěži, získáte za něj 10 bodů. Pokud by nejlepší odeslané řešení používalo pouze 98 volání XOR, za vaše řešení se 121 voláními dostanete $1 + 9 \cdot 98/121$ ($= 8,289 \dots$), což bude zaokrouhleno na 8,3 bodů.

4. Plánování dávek

Na počítači je třeba zpracovat posloupnost N úloh. Úlohy jsou očíslovány v pořadí od 1 do N . Úlohy je třeba rozdělit do jedné nebo více dávek, přičemž každá dávka se skládá z po sobě jdoucích úloh dané posloupnosti. Zpracování dávek začíná v čase 0. Dávky jsou zpracovávány po sobě v následujícím pořadí: Pokud dávka b obsahuje úlohy s menšími čísly než dávka c , je zpracována dříve. Úlohy jedné dávky jsou zpracovávány postupně, ale výstup úloh je zobrazen až po zpracování všech úloh v dávce. To znamená, že výstup úlohy j je zobrazen až v okamžiku ukončení zpracovávání dávky obsahující úlohu j .

Na začátku zpracování každé dávky potřebuje počítač čas S . Pro každou úlohu i je zadán cenový koeficient F_i a čas T_i potřebný ke zpracování úlohy. Pokud tedy dávka obsahuje úlohy $x, x+1, \dots, y-1, y$ a její zpracování začíná v čase t , potom čas vypsání výstupu každé úlohy v dávce je $t + S + (T_x + T_{x+1} + \dots + T_{y-1} + T_y)$. Nezapomeňte, že počítač vypisuje výsledky až v okamžiku zpracování všech úloh v dávce. Pokud čas vypsání výstupu úlohy i je O_i , pak cena zpracování této úlohy je $O_i \cdot F_i$. Předpokládejme, že máme 5 úloh, $S = 1$, $(T_1, T_2, T_3, T_4, T_5) = (1, 3, 4, 2, 1)$ a $(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5) = (3, 2, 3, 3, 4)$. Pokud úlohy rozdělíme do tří dávek $\{1, 2\}$, $\{3\}$, $\{4, 5\}$, potom časy jejich výstupů budou $(O_1, O_2, O_3, O_4, O_5) = (5, 5, 10, 14, 14)$ a ceny zpracování jednotlivých úloh budou po řadě $(15, 10, 30, 42, 56)$. Celková cena je rovna součtu cen zpracování všech úloh. V našem příkladě při zvoleném rozdělení úloh do dávek je to 153.

Napište program, který pro daný čas S a posloupnost úloh s jejich dobami zpracování a cenovými koeficienty nalezne rozdělení úloh do dávek s minimální celkovou cenou.

Vstup. Váš program musí číst vstupní data ze standardního vstupu. První řádek obsahuje počet úloh N , $1 \leq N \leq 10\,000$. Druhý řádek obsahuje čas S (celé číslo, $0 \leq S \leq 50$). Následujících N řádků obsahuje informace o úlohách $1, 2, \dots, N$ v daném pořadí. Na každém z těchto řádků je uvedeno celé číslo T_i , $1 \leq T_i \leq 100$ (doba zpracování úlohy) a za ním celé číslo F_i , $1 \leq F_i \leq 100$ (cenový koeficient úlohy).

Výstup. Váš program musí vypsát výsledek na standardní výstup. Výstup je tvořen jediným řádkem obsahujícím jedno celé číslo: minimální možnou celkovou cenu zpracování.

Příklady vstupů a výstupů.

Příklad 1: Vstup:

2
50
100 100
100 100

Výstup:
45000

Příklad 2: Vstup:

5
1
1 3
3 2
4 3
2 3
1 4

Výstup:
153

Příklad 2 je příkladem ze zadání úlohy.

Poznámka. Pro žádný testovací vstup celková cena pro libovolné rozdělení úloh do dávek nepřekročí $2^{31} - 1$.

Hodnocení. Pokud váš program vypíše správnou odpověď ve stanoveném časovém limitu, získáte za daná vstupní data plný počet bodů, jinak za tato vstupní data získáte 0 bodů.

5. Autobusové zastávky

Ve městě Yong-In se chystají vytvořit autobusovou síť s N zastávkami. Yong-In je moderní město, a tak jeho mapa vypadá jako čtvercová síť, v níž všechny čtverce mají stejnou velikost. Každá autobusová zastávka je umístěna v průsečíku dvou ulic. Dvě zastávky budou zvoleny jako přestupní (označme je H_1 a H_2). Přestupní zastávky budou navzájem propojeny expresní autobusovou linkou. Každá ze zbývajících $N - 2$ zastávek bude přímo spojena s právě jednou z přestupních zastávek, nebude ale propojena s žádnou nepřestupní zastávkou.

Vzdálenost mezi dvěma zastávkami je rovna délce nejkratší možné cesty po ulicích města. To znamená, že pokud souřadnice zastávky označíme (x, y) , kde x je x -ová souřadnice a y je y -ová souřadnice, pak vzdálenost mezi dvěma zastávkami (x_1, y_1) a (x_2, y_2) je rovna $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Jsou-li zastávky A a B spojeny se stejnou přestupní zastávkou H_1 , pak vzdálenost zastávek A a B je rovna součtu vzdáleností z A do H_1 a z H_1 do B . Jestliže jsou zastávky A a B spojeny s různými přestupními zastávkami, např. A je spojena s H_1 a B je spojena s H_2 , potom vzdálenost zastávek A a B je rovna součtu vzdáleností z A do H_1 , z H_1 do H_2 a z H_2 do B .

Plánovací oddělení Yong-Inské radnice chce zajistit, aby se každý občan města dostal do libovolného bodu ve městě co nejrychleji. Proto plánovači chtějí zvolit dvě přestupní zastávky a napojení ostatních zastávek na ně takovým způsobem, aby vzdálenost dvou nejvzdálenějších zastávek ve vzniklé autobusové síti byla co možná nejmenší.

Napište program, který spočte nejmenší možnou vzdálenost dvou nejvzdálenějších zastávek v Yong-Inu přes všechny možné volby dvou přestupních zastávek a napojení ostatních zastávek na ně.

Vstup. Váš program musí číst vstupní data ze standardního vstupu. První řádek obsahuje jedno kladné celé číslo N , $2 \leq N \leq 500$, což je počet všech autobusových zastávek. Každý ze zbylých N řádků vstupu obsahuje souřadnice jedné ze zastávek, nejprve x -ovou a poté y -ovou. Obě souřadnice jsou kladná celá čísla $\leq 5\,000$. Žádné dvě autobusové zastávky neleží na stejné křižovatce.

Výstup. Váš program musí vypsát výsledek na standardní výstup. Výstup je tvořen jedním řádkem s jedním kladným celým číslem — minimální možnou vzdáleností dvou nejvzdálenějších zastávek.

Příklady vstupů a výstupů.

Příklad 1: Vstup:

6
1 7
16 6
12 4
4 4
1 1
11 1

Výstup:

20

Příklad 2: Vstup:

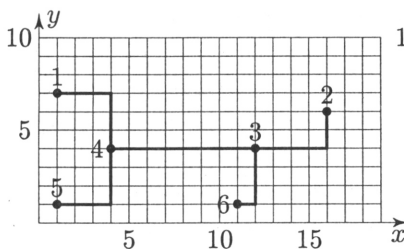
7
7 9
10 9
5 3
1 1
7 2
15 6
17 7

Výstup:

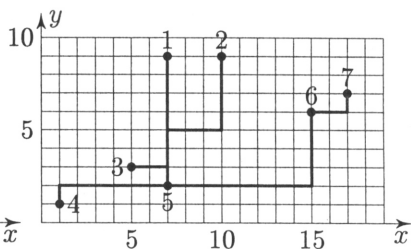
25

Obrázek 55 ukazuje autobusovou síť pro vstupní data z příkladu 1. Jsou-li v příkladu 1 zastávky 3 a 4 zvoleny jako přestupní, pak největší vzdálenost je buď mezi zastávkami 2 a 5, nebo mezi zastávkami 2 a 1. Lepší volba přestupních zastávek není možná, takže správná odpověď je 20.

Obrázek 56 ukazuje situaci pro data z příkladu 2. Jsou-li zastávky 5 a 6 zvoleny jako přestupní, potom jsou nejvzdálenějšími zastávkami



Obr. 55



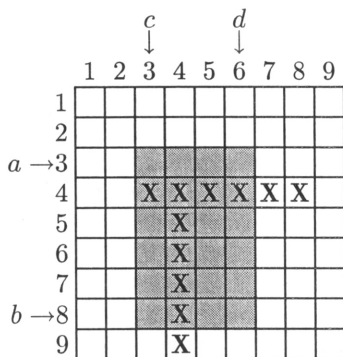
Obr. 56

zastávky 2 a 7. Neexistuje lepší volba přestupních stanic, a proto 25 je výsledkem úlohy.

Hodnocení. Pokud váš program vypíše správnou odpověď ve stanoveném časovém limitu, získáte za daná vstupní data plný počet bodů, jinak za tato vstupní data získáte 0 bodů.

6. Dvě tyče

Tyčí nazveme buď vodorovnou, nebo svislou řadu alespoň dvou políček čtvercové sítě. Dvě tyče (jedna vodorovná a jedna svislá) jsou umístěny v síti $N \times N$. Na obr. 57 jsou tyto tyče vyznačeny znaky **X**. Tyče mohou ale nemusí mít stejnou délku, mohou také mít společné políčko. Pokud nějaké políčko může ležet v jedné nebo obou tyčích (jako je tomu na obr. 57 u políčka (4, 4)), tak situaci chápeme vždy tak, že leží v obou tyčích. Svislá tyč na obr. 57 tedy končí na políčku (4, 4), a ne na políčku (5, 4). Políčko (4, 4) je koncem svislé tyče a zároveň vnitřním bodem vodorovné tyče.



Obr. 57

Na počátku nevíte, kde tyče jsou, a tak máte napsat program, který je nalezne. Vodorovnou tyč označme ROD1 a svislou ROD2. Každé políčko je reprezentováno dvojicí řádek/sloupec (r, c) . Políčko v horním levém rohu čtvercové sítě má souřadnice $(1, 1)$. Každá tyč je popsána dvojicí svých koncových políček $\langle (r_1, c_1), (r_2, c_2) \rangle$. Na obr. 57 popíšeme tyč ROD1 dvojicí $\langle (4, 3), (4, 8) \rangle$ a tyč ROD2 dvojicí $\langle (4, 4), (9, 4) \rangle$.

V této úloze musíte pro vstup a výstup použít speciální knihovnu. Rozměry čtvercové sítě (číslo N) získáte voláním knihovní funkce `gridsize`. Tuto funkci musí váš program zavolat na začátku výpočtu pro každá testovací data. Pro nalezení polohy tyčí můžete používat pouze knihovní funkci `rect(a, b, c, d)`, která zkoumá obdélníkovou oblast sítě vymezenou souřadnicemi $[a, b] \times [c, d]$ (dejte pozor na význam jednotlivých parametrů — viz šedivou oblast na obr. 57), kde $a \leq b$ a $c \leq d$. [Nenechte se zmást tím, že grafická knihovna jednoho nejmenovaného mobilního telefonu používá odlišný souřadný systém.] Pokud se ve zkoumaném obdélníku nachází alespoň jeden znak **X** (tj. část nějaké tyče), funkce `rect` vrátí 1; jinak vrátí 0. V příkladu na obr. 57 by volání `rect(3, 8, 3, 6)` vrátilo hodnotu 1. Vaším úkolem je napsat program, který určí přesnou pozici obou tyčí pomocí omezeného počtu volání funkce `rect`.

Výsledek předáte voláním další knihovní funkce `report(r1, c1, r2, c2, p1, q1, p2, q2)`, kde tyč ROD1 je reprezentována dvojicí $\langle (r_1, c_1), (r_2, c_2) \rangle$ a tyč ROD2 je reprezentována dvojicí $\langle (p_1, q_1), (p_2, q_2) \rangle$. Volání funkce `report` ukončí váš program. Uvědomte si, že ROD1 je vodorovná tyč a ROD2 svislá tyč, (r_1, c_1) je levý konec vodorovné tyče ROD1, (p_1, q_1) je horní konec svislé tyče ROD2. Platí tedy $r_1 = r_2$, $c_1 < c_2$, $p_1 < p_2$ a $q_1 = q_2$. Pokud parametry volání funkce `report` neodpovídají těmto podmínkám, bude na standardní výstup vypsáno chybové hlášení.

Omezení.

- ▷ Vstup můžete obdržet pouze pomocí knihovních funkcí `gridsize` a `rect`.
- ▷ N splňuje podmínky $5 \leq N \leq 10\,000$.
- ▷ Pro každá testovací data můžete funkci `rect` zavolat nejvýše 400krát. Pokud váš program zavolá funkci `rect` vícekrát, bude ukončen.
- ▷ Váš program musí volat funkci `rect` více než jednou a funkci `report` právě jednou.
- ▷ Když je funkce `rect` volána s nekorektními parametry (např. zkoumaný obdélník přesahuje rozměry čtvercové sítě), je váš program ukončen.

- ▷ Váš program nesmí přistupovat k žádným souborům a nesmí používat standardní vstup a výstup.

Knihovny. Máte k dispozici následující knihovny:

FreePascal (prectlib.ppu, prectlib.o)

```
function gridsize : LongInt;  
function rect(a,b,c,d : LongInt) : LongInt;  
procedure report(r1, c1, r2, c2, p1, q1, p2, q2 :  
                LongInt);
```

Do vašeho programu rods.pas vložte příkaz

```
uses prectlib;
```

Program přeložte pomocí

```
fpc -So -O2 -XS rods.pas
```

Program prodstool.pas ukazuje příklad použití této knihovny.

GNU C/C++ (crectlib.h, crectlib.o)

```
int gridsize();  
int rect(int a, int b, int c, int d);  
void report(int r1, int c1, int r2, int c2,  
            int p1, int q1, int p2, int q2);
```

Do svého programu rods.c vložte direktivu

```
#include "crectlib.h"
```

Program přeložte pomocí

```
gcc -O2 -static rods.c crectlib.o -lm  
g++ -O2 -static rods.cpp crectlib.o -lm
```

Program crodstool.c ukazuje příklad použití této knihovny.

C/C++ v RHIDE

Nezapomeňte nastavit Option→Linker na crectlib.o.

Testování. Abyste mohli testovat svůj program s knihovnou, musíte vytvořit textový soubor rods.in. Soubor musí obsahovat tři řádky. První řádek obsahuje jedno celé číslo N — rozměr čtvercové sítě. Druhý řádek obsahuje souřadnice koncových bodů tyče ROD1, r_1, c_1, r_2, c_2 , kde (r_1, c_1) je levý konec tyče. Třetí řádek obsahuje analogicky souřadnice koncových bodů tyče ROD2, p_1, q_1, p_2, q_2 , kde (p_1, q_1) je horní konec tyče.

Po ukončení vašeho programu voláním funkce **report** dostanete výstupní soubor rods.out. Soubor obsahuje počet volání funkce **rect** a souřadnice konců tyče, které jste předali funkci **report**. Pokud během výpočtu nastala nějaká chyba při volání knihovnických funkcí, soubor rods.out bude obsahovat příslušné chybové hlášení.

Dialog mezi vaším programem a knihovnou je zaznamenáván do souboru `rods.log`. Tento soubor obsahuje posloupnost volání funkce `rect` ve tvaru „ $k : \text{rect}(a, b, c, d) = \text{ans}$ “. Záznam znamená, že při k -tém volání `rect(a, b, c, d)` byla vrácena hodnota `ans`.

Příklad souborů pro testování.

<code>rods.in</code>	<code>rods.out</code>
9	20
4 3 4 8	4 3 4 8
4 4 9 4	4 4 9 4

Hodnocení. Pokud váš program poruší některé z výše uvedených omezení (např. vykoná více než 400 volání funkce `rect`) nebo dá chybný výsledek, tak pro tato testovací data bude hodnocen 0 body.

Pokud je výsledek správný, hodnocení závisí na počtu provedených volání funkce `rect`. Pokud bylo pro tato vstupní data provedeno nejvýše 100 volání, získáte 5 bodů. Pokud program provedl 101 až 200 volání, dostanete 3 body. Je-li počet provedených volání mezi 201 a 400, dostanete 1 bod.

doc. RNDr. Leo Boček, CSc., RNDr. Karel Horák, CSc.,
RNDr. Tomáš Pitner, Dr., doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.,
RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc.
RNDr. Jaroslav Zhouf, PhD.

**PADESÁTÝ PRVNÍ ROČNÍK
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH**

Vydala Jednota českých matematiků a fyziků,
Žitná 25, 117 10 Praha 1
jako svou publikaci č. 57-552-03
Sazbu programem $\text{\TeX}$ připravil Karel Horák
Vytisklo Polygrafické středisko
Univerzity Palackého v Olomouci
1. vydání
Praha 2003

ISBN 80-7015-924-3

**matematická
olympiáda**



ISBN 80-7015-924-3