

54. ročník matematické olympiády na středních školách

Karel Horák (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor); Jaroslav Zhouf (editor): 54. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2004/2005. 46. mezinárodní matematická olympiáda. 17. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2006.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/405083>

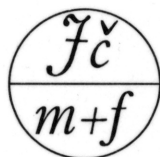
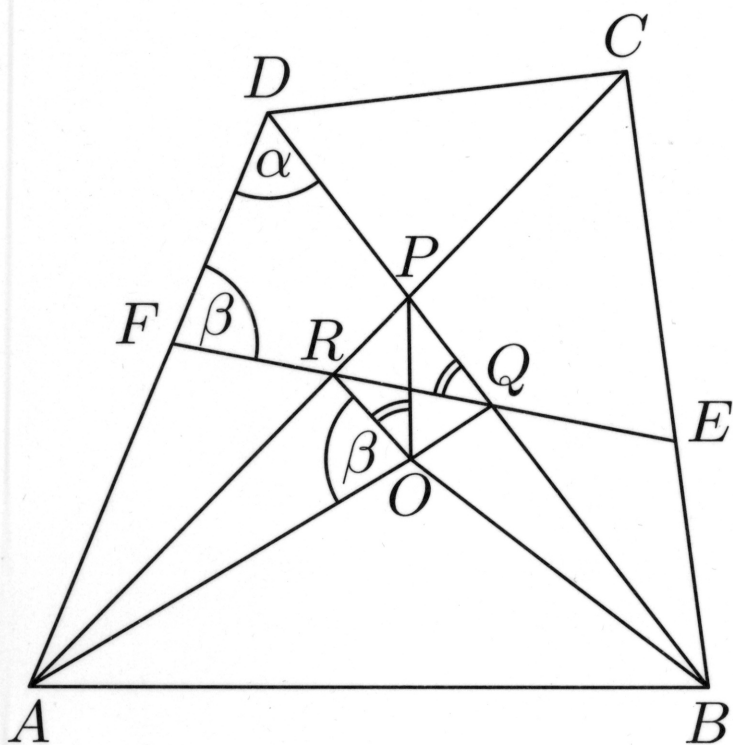
Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

54. ročník matematické olympiády na středních školách



PADESÁTÝ ČTVRTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2004/2005

46. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA
SEDMNÁCTÁ MEZINÁRODNÍ OLYMPIÁDA V INFORMATICE

Za přispění spolupracovníků zpracovali

RNDr. Karel Horák, CSc., Mgr. Martin Mareš, Mgr. Peter Novotný,

doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.,

doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc., RNDr. Jaroslav Zhouf, PhD.

© Karel Horák, editor, 2006

ISBN 80-7015-109-9

Obsah

O průběhu 54. ročníku matematické olympiády	5
Nejúspěšnější řešitelé II. kola MO v kategoriích A, B, C a P	11
Výsledky celostátního kola 54. ročníku MO kategorie A	27
Výsledky celostátního kola 54. ročníku MO kategorie P	28
Kategorie C	29
Texty úloh	29
Řešení úloh	32
Kategorie B	44
Texty úloh	44
Řešení úloh	47
Kategorie A	59
Texty úloh	59
Řešení úloh	64
Kategorie P	93
Texty úloh	93
Kategorie Z5	116
Texty úloh	116
Kategorie Z6	119
Texty úloh	119
Kategorie Z7	122
Texty úloh	122
Kategorie Z8	125
Texty úloh	125
Kategorie Z9	128
Texty úloh	128
Přípravná soustředění před 46. MMO	132
Úlohy zadané na přípravném soustředění	133
Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské	136
Mecz matematyczny	137
Texty soutěžních úloh	138
Řešení soutěžních úloh	139
46. mezinárodní matematická olympiáda	149
Texty soutěžních úloh	152
Řešení soutěžních úloh	153
Dvanáctý ročník Středoevropské olympiády v informatice	166
17. mezinárodní olympiáda v informatice	168
Texty soutěžních úloh	170

O průběhu 54. ročníku matematické olympiády

Hlavními pořadateli 54. ročníku matematické olympiády, který se uskutečnil ve školním roce 2004/05, byly podobně jako v letech předešlých Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR, Jednota českých matematiků a fyziků a Matematický ústav akademie věd ČR. Organizaci soutěže zabezpečil Ústřední výbor MO, v jehož čele stál předseda doc. RNDr. *Jaromír Šimša*, CSc., a místopředsedové RNDr. *Jaroslav Švrček*, CSc. (pro kategorie A, B, C), doc. RNDr. *Pavel Tlustý*, CSc. (pro kategorie Z) a doc. RNDr. *Pavel Töpfer*, CSc. (pro kategorii P). Funkci tajemníka ÚV MO vykonával RNDr. *Karel Horák*, CSc.

Přípravou a výběrem úloh pro jednotlivé kategorie a soutěžní kola MO jsou Ústředním výborem MO pověřeny dvě úlohové komise (jedna pro kategorie A, B a C, druhá pro kategorie Z). Obě komise se scházejí pravidelně dvakrát ročně (vždy v listopadu a v květnu) tak, aby ve spolupráci se slovenskými kolegy zabezpečily s ročním předstihem výběr úloh pro další ročník MO v České republice a na Slovensku. Garanty výběru úloh v kategoriích A, B, C byli v tomto ročníku soutěže doc. RNDr. *Jaromír Šimša*, CSc., doc. RNDr. *Pavel Novotný*, CSc., a doc. RNDr. *Leo Boček*, CSc.

Letáky s úlohami I. kola 54. ročníku MO byly včas distribuovány do škol, rovněž komentáře k řešení úloh I. kola se včas a v potřebném počtu dostaly na jednotlivé školy.

Ústřední kolo 54. ročníku matematické olympiády v kategoriích A a P se uskutečnilo 3.–9. dubna 2005 v Benešově. Organizací obou závěrečných kol soutěže bylo Ústředním výborem MO pověřeno Gymnázium Benešov, které ve spolupráci s KV MO Středočeského kraje a městem Benešov vytvořilo pro soutěž výborné podmínky.

Na základě jednotné koordinace úloh II. (krajského) kola bylo pozváno k účasti ve III. kole kategorie A 42 nejlepších řešitelů a v kategorii P 30 nejlepších řešitelů z celé České republiky. Soutěžními dny pro kategorii A byly 4. a 5. duben 2005, kdy žáci řešili tradičně vždy 3 soutěžní úlohy. Na řešení každé trojice úloh měli vyhrazeny 4,5 hodiny čistého času a přitom každá úloha byla hodnocena maximálně 7 body.

Soutěžními dny III. kola v kategorii P byly 7. a 8. duben 2005. První soutěžní den řešili soutěžící 4 úlohy teoretické, celý druhý soutěžní den byl vyhrazen řešení páté, praktické úlohy.

Slavnostní zahájení III. kola v kategorii A se konalo v neděli 3. dubna ve starobylé aule benešovského gymnázia za přítomnosti PaedDr. *Jaroslava Müllnera*, náměstka ministryně školství, mládeže a tělovýchovy ČR, RNDr. *Antonína Sochora*, DrSc., ředitele Matematického ústavu AV ČR, zástupců města Benešov a dalších významných představitelů společenského života. Vlastní soutěž se pak konala (s výjimkou praktické úlohy v kategorii P) v konferenčním sále hotelu Hláskva ve Zlenicích poblíž Benešova, kde byli všichni účastníci obou kategorií A i P také po celou dobu soutěže ubytováni.

Pro volný čas soutěžících zajistili pořadatelé hodnotný program. Po prvním soutěžním dopoledni byl pro všechny účastníky zajištěn autobusový zájezd do CHKO Velký Blaník, kde měli všichni soutěžící možnost vystoupit také na rozhlednu, která je postavena na vrcholu významné české hory *Blaník*. Odpoledne druhého soutěžního dne bylo věnováno návštěvě blízkého zámku *Konopiště*. V rámci soutěže kategorie A proběhla navíc v prostorách benešovského gymnázia prezentace softwaru firmy Elkan podporovaného programem *MATHEMATICA*.

Vyhlášení výsledků soutěže proběhlo pro kategorii A ve středu 6. dubna 2005 a pro kategorii P v sobotu 9. dubna 2005 opět v aule benešovského gymnázia. Díky sponzorům si nejlepší soutěžící odvezli domů z Benešova pěkné ceny. O hladký průběh III. kola v obou kategoriích se zasloužili velkou měrou rovněž učitelé Gymnázia Benešov v čele s ředitelem školy Mgr. *Zdeňkem Zahradníčkem*.

Cenu profesora Zelinky za originální řešení ve výši 5 000 Kč, kterou již potřetí věnoval *Igor Puzanov*, absolvent bývalého matematického gymnázia W. Piecka v Praze, získal *Zbyněk Konečný* z 2. ročníku Gymnázia Brno na třídě Kpt. Jaroše za řešení první úlohy celostátního kola.

Všichni vítězové kategorie A byli pozváni k výběrovému soustředění před 46. MMO, které se uskutečnilo 18.–22. 4. 2005 v Bílovci na místním Gymnáziu M. Koperníka. Závěrem tohoto soustředění bylo na podkladě dosažených výsledků vybráno šestičlenné družstvo, které reprezentovalo naši republiku na 46. MMO v Mexiku. Podrobnou informaci o 46. mezinárodní matematické olympiádě a o 17. mezinárodní olympiádě v informatice najdete na konci této ročenky.

Ústřední výbor MO se během tohoto soutěžního ročníku sešel na dvou pravidelných jednáních, a to 10. prosince 2004 v Praze a 4. dubna 2005

v Benešově u příležitosti konání III. kola kategorií A a P. Na obou zasedáních byly kromě pravidelných bodů programu řešeny také některé zásadní otázky týkající se především nového organizačního řádu matematické olympiády.

Pro nejlepší řešitele krajských kol v kategoriích B a C uspořádal ÚV MO od 31. května do 7. června 2005 odborné soustředění v Jevíčku, kterého se zúčastnilo 40 žáků ze všech krajů republiky. Lektorsky se na tomto soustředění podíleli doc. Boček, doc. Calda, doc. Šimša, dr. Dula, dr. Hrubý a dr. Švrček.

Podobně pro nejlepší řešitele kategorie A uspořádal ÚV MO od 11. do 17. září 2005 v Janských Lázních přípravné soustředění, kterého se zúčastnilo celkem 23 pozvaných soutěžících. Zaměstnání a přednášky zde vedli členové ÚV MO — doc. Šimša, dr. Švrček, dr. Horák, dr. Zhouf a dr. Leischner.

Ústřední výbor matematické olympiády si dovoluje závěrem upřímně poděkovat všem zapojeným učitelům matematiky a informatiky na středních i základních školách v celé ČR za jejich poctivou a mnohdy nadšeneckou práci s našimi mladými matematickými a informatickými talenty. Bez jejich pomoci si chod nejstarší předmětové soutěže v České republice lze jen stěží představit. Zvláštní poděkování patří pražské firmě Elkan, která se výraznou finanční podporou zasloužila o vytištění této ročenky.

Tato ročenka se od předchozích ročenek poněkud odlišuje svým obsahem: nenajdete v ní podrobná řešení úloh kategorie P (ty najdou vážní zájemci na internetové adrese <http://mff.cuni.cz>), zato se v ní objevují zadání všech úloh kategorií Z (také bez řešení, protože i ta v případě potřeby najdete na webových stránkách MO). Chceme tak do ročenky MO vrátit mnoho zajímavých úloh. Úlohy ze zhruba desetiletého období, kdy se tyto úlohy v ročenkách neobjevovaly, najdete ve sbírce, kterou chystá nakladatelství Prometheus.

Významným oceněním našich úspěšných olympioniků se už tradičně stává Præmium Bohemiæ, které vždy 4. prosince uděluje na zámku Sychrov Nadace B. Jana Horáčka Českému ráji. V tomto roce byli mezi oceněnými ve studentské kategorii *František Konopecký* (30 000 Kč za zlatou medaili na 46. MMO) *Pavel Kocourek* a *Jaromír Kuben* (15 000 Kč za stříbrnou medaili na 46. MMO), *Jakub Opršal* a *Marek Pechal* (10 000 Kč za bronzovou medaili na 46. MMO), *Ondřej Bílka* a *Daniel Marek* (10 000 Kč za bronzovou medaili na 17. IOI).

**Projev předsedy Ústředního výboru MO
při slavnostním zahájení ústředního kola 54. ročníku MO v Benešově**

Dámy a pánové, vážení hosté, milí soutěžící,

dovolte, abych vás pozdravil jménem týmu lidí, který soutěž Matematická olympiáda nejen řídí, ale také (nebo spíše především) připravuje její úlohy. Hledání nových úloh nám působí zvláštní potěšení, při kterém se znovu a znovu přesvědčujeme, jak je naše královna věd rozmanitá a svou přesnou konstrukcí a neúprosnou logikou působná. Na důkaz toho, jak je v dnešní době matematika stále živá a otevřená novým otázkám, teď uvedu jeden významný výsledek matematického výzkumu získaný v minulém roce 2004.

Jak si jistě uvědomíte, letošní letopočet 2005 není prvočíslo, je totiž součinem prvočísel 5 a 401. Mezi tato prvočísla můžeme vložit další dvě prvočísla, totiž 137 a 269, která s nimi vytvoří čtyřčlennou aritmetickou posloupnost

5, 137, 269, 401.

Skutečně, každé následující číslo je vždy o 132 větší než číslo předchozí.

Podobné prvočíselné aritmetické posloupnosti jsou přirozeně tím kurióznější, čím více mají členů. Delší příklad se zastoupením prvočísel 5 a 401 neexistuje. Kdyby se psal rok 2089, kterého se věřím někteří z přítomných dožijí, ukázal bych vám rovnou desatero prvočísel, kde každé následující číslo je o 210 větší než číslo předchozí:

199, 409, 619, 829, 1039, 1 249, 1 459, 1 669, 1 879, 2 089.

Všimněte si prosím, že zmíněná diference 210 je rovna součinu 2 krát 3 krát 5 krát 7, tj. *součinu všech prvočísel menších než 10*. Věřím, že každý z přítomných soutěžících by rychle dokázal, že takovým součinem je dělitelná diference každé desetičlenné prvočíselné aritmetické posloupnosti a že *neexistuje žádná nekonečná prvočíselná aritmetická posloupnost*.

Poslední fakt okamžitě vyvolá v mysli matematika otázku, jak dlouhé aritmetické posloupnosti mohou prvočísla vytvářet. Od roku 1995 matematikové díky výkonným počítačům znají aritmetickou posloupnost tvořenou 22 prvočísly. Loňského roku byla odhalena taková posloupnost 23 prvočísel (která jsou mimochodem 14-, 15- a 16-místná). To však není za loňský rok to hlavní. 8. dubna 2004 vystavili matematikové *Ben Green* a *Terence Tao* na Internet preprint článku, ve kterém dokázali, že *existují*

aritmetické prvočíselné posloupnosti libovolné délky. I když tedy žádnou takovou posloupnost, která má více než 23 členů, neznáme, máme již jistotu, že takové příklady existují. Je to krásný příklad situace, kterou se matematika významně odlišuje od jiných přírodních věd.

Ani zmíněný výsledek neuzavírá problematiku prvočíselných aritmetických posloupností definitivně. Můžeme se například ptát, jak dlouhé mohou být aritmetické posloupnosti *po sobě následujících* prvočísel, jako je například prvočíselné kvarteto

251, 257, 263, 269.

Jaká je odpověď na tuto otázku, zatím nevíme. Známe však již *desatero po sobě jdoucích prvočísel*, která tvoří aritmetickou posloupnost (jejíž difference je mimochodem rovna přímo číslu 210). Zápis těchto prvočísel vám ale nyní neukáží, každé z nich má totiž v desítkové soustavě 93 číslic.

Chtěl bych ještě dodat, že oba matematikové Green a Tao jsou mladší třiceti let a že druhý z nich třikrát soutěžil v australském družstvu na Mezinárodní matematické olympiádě. Bylo to v letech 1986, 1987 a 1988, když mu bylo 11 až 13 let a kdy získal postupně bronzovou, stříbrnou a zlatou medaili.

Milí mladí přátelé, snad toho příliš neprozradím, když řeknu, že i na vás v příštích dvou dnech čeká jedna úloha o aritmetických posloupnostech. Při řešení nejen této úlohy, ale i pěti ostatních soutěžních úloh vám přeji hodně úspěchů.

Tabulka 1

Počty žáků středních škol soutěžících v I. kole 54. ročníku MO

Kraj	Kategorie								Celkem	
	A		B		C		P			
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	126	63	87	38	143	78	14	14	370	193
Středočeský	71	40	87	39	85	31	19	14	262	124
Jihočeský	68	39	51	35	66	49	6	6	191	129
Plzeňský	27	23	34	19	42	34	5	3	108	79
Karlovarský	13	10	12	6	19	13	0	0	44	29
Ústecký	35	29	49	20	52	29	0	0	136	78
Liberecký	47	13	62	20	44	14	10	10	163	57
Královéhradecký	34	19	37	25	43	29	7	4	121	77
Pardubický	34	21	28	17	39	25	10	10	111	73
Vysočina	61	43	45	32	75	45	20	10	201	130
Jihomoravský	190	96	111	49	171	103	16	16	488	264
Zlínský	124	38	75	22	93	64	8	8	300	132
Olomoucký	32	14	48	16	52	32	1	1	133	63
Moravskoslezský	42	24	50	29	60	45	23	23	175	121
ČR	904	472	776	367	984	591	139	119	2 803	1 549

Tabulka 2

Počty žáků středních škol soutěžících v II. kole 54. ročníku MO

Kraj	Kategorie								Celkem	
	A		B		C		P			
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	56	17	34	14	69	32	14	5	173	68
Středočeský	40	3	39	6	31	10	13	4	123	23
Jihočeský	37	3	32	12	44	15	6	2	119	32
Plzeňský	21	5	18	3	34	22	3	1	76	31
Karlovarský	10	3	6	2	13	4	0	0	29	9
Ústecký	24	3	20	5	28	14	0	0	72	22
Liberecký	13	4	15	4	14	5	10	2	52	15
Královéhradecký	19	7	23	9	28	14	4	1	74	31
Pardubický	20	7	16	4	25	8	10	4	71	23
Vysočina	40	11	25	6	40	20	8	6	113	43
Jihomoravský	90	21	45	25	84	29	12	5	231	80
Zlínský	37	3	21	3	45	27	8	6	111	39
Olomoucký	14	6	13	6	29	13	1	0	57	25
Moravskoslezský	24	11	29	10	45	25	23	2	121	48
ČR	445	104	336	109	529	238	112	38	1 422	489

S ... počet všech soutěžících

U ... počet úspěšných řešitelů

Nejúspěšnější řešitelé II. kola MO
v kategoriích A, B, C a P

Z každého kraje a z každé kategorie jsou dle dostupných výsledků uvedeni všichni úspěšní řešitelé, kteří skončili do desátého místa. Označení G znamená gymnázium.

• • • • • **Kraj Praha** • • • • •

Kategorie A

1. *Pavel Kocourek*, SPŠST, Praha 1, Panská
2. *Mikuláš Peksa*, G Ch. Dopplera, Praha 5
- 3.–4. *Jan Drašnar*, G J. Keplera, Praha 6
Miroslav Hlaváč, G Ch. Dopplera, Praha 5
- 5.–6. *Petr Čermák*, G J. Heyrovského, Praha 5
Tomáš Hejda, G Ch. Dopplera, Praha 5
7. *Radek Žlebčík*, G Ch. Dopplera, Praha 5
8. *Jan Lachnitt*, G Ch. Dopplera, Praha 5
- 9.–11. *Miroslav Kolář*, G Praha 4, Na Vítězné pláni
Ondřej Prikryl, G Praha 1, Truhlářská
František Sedlák, G E. Krásnohorské Praha 4

Kategorie B

1. *Jan Jelínek*, G Praha 4, Konstantinova
Lukáš Malina, G Ch. Dopplera, Praha 5
Jakub Mrva, G J. Heyrovského, Praha 5
4. *Jindřich Helcl*, G Ch. Dopplera, Praha 5
- 5.–7. *Jan Přech*, G Praha 7, Nad Štolou
Adam Ráž, G Praha 4, Budějovická
Michal Rolínek, G J. Keplera, Praha 6
- 8.–9. *Michal Jex*, G J. Heyrovského, Praha 5

Hoang Tran Minh, G Ch. Dopplera, Praha 5
10. *Šárka Gregorová*, G Praha 6, Nad Alejí

Kategorie C

- 1.–2. *Tomáš Hřebejk*, G Praha 4, Písnická
Alena Skálová, G Praha 4, Na Vítězné pláni
3. *Hoang Vo Viet*, G Praha 4, Na Vítězné pláni
4. *Lukáš Drápal*, G Ch. Dopplera, Praha 5
- 5.–7. *Erik Derner*, G Praha 5, Nad Kavalírkou
Marek Maška, SPŠST, Praha 1, Panská
Martina Mazurová, G Praha 9, Chodovická
8. *Petr Janouch*, G Praha 8, Ústavní
- 9.–10. *Marie Hamplová*, G Praha 8, Ústavní
Eliška Šabartová, G Praha 5, Nad Kavalírkou

Kategorie P

1. *Daniel Marek*, G Ch. Dopplera, Praha 5
2. *Roman Smrž*, G E. Krásnohorské Praha 4
3. *Petr Soběslavský*, G J. Heyrovského, Praha 5
4. *Pavel Kocourek*, SPŠST, Praha 1, Panská
5. *David Holaň*, G Praha 10, Voděradská

• • • • • Středočeský kraj • • • • •

Kategorie A

1. *Richard Řezníček*, G Český Brod
2. *Václav Gergelits*, G Benešov
3. *Petr Balek*, GJB Beroun

Kategorie B

1. *Petr Fojtů*, G Benešov
2. *Lenka Slavíková*, G Mnichovo Hradiště
- 3.–4. *Miloš Broulík*, G Mladá Boleslav
Petr Stratil, Sport. G a G Kladno

5. *Stanislav Vávra*, G Vlašim
6. *Rudolf Rosa*, G Kladno, nám. E. Beneše

Kategorie C

- 1.–2. *Tomáš Gergelits*, G Benešov
Josef Müller, G dr. J. Pekaře, Mladá Boleslav
3. *Matouš Macháček*, G Říčany
- 4.–5. *Lucie Pokorná*, G Slaný
Tomáš Vorel, G Benešov
6. *Ota Kukral*, G dr. J. Pekaře, Mladá Boleslav
7. *Pavla Balíková*, G Příbram
8. *Lukáš Beran*, G Benešov
- 9.–10. *Kristina Labudová*, GJO Kutná Hora
Helena Zrůstová, G Kolín

Kategorie P

1. *Martin Zrcek*, G Benešov
2. *Jan Procházka*, Dvořákovo G a OA, Kralupy nad Vltavou
- 3.–4. *Miroslav Kratochvíl*, G a SPedŠ Čáslav
Lukáš Mach, Sport. G a G Kladno

• • • • • Jihočeský kraj • • • • •

Kategorie A

- 1 *Jan Kuchař*, G PdeC Tábor
- 2.–3. *Jiří Blažek*, G JVJ České Budějovice
Karel Vácha, G Český Krumlov

Kategorie B

1. *Radim Hošek*, G České Budějovice, Jírovcova
- 2.–4. *Miloš Chaloupka*, G PdeC Tábor
Adam Kabelá, G České Budějovice, Jírovcova
Martina Urbanová, G České Budějovice, Jírovcova
5. *Michal Pavelka*, G Strakonice

6. *Jiří Blažek*, G JVJ České Budějovice
- 7.–8. *Karel Chuchel*, G České Budějovice, Jírovcova
Zdeněk Vošta, G České Budějovice, Jírovcova
9. *Josef Pihera*, G Strakonice
- 10.–11. *Jan Broulím*, SPŠ a VOŠ Písek
Jan Junek, G České Budějovice, Jírovcova

Kategorie C

1. *Libor Peltan*, G České Budějovice, Česká
2. *František Batysta*, G JVJ České Budějovice
3. *Karolína Mašková*, G Soběslav
4. *Petr Petrouš*, G České Budějovice, Jírovcova
5. *Lukáš Mareš*, G České Budějovice, Jírovcova
6. *Jan Hermann*, G Český Krumlov
- 7.–9. *Michal Kuna*, G JVJ České Budějovice
Luděk Míka, G Strakonice
Matěj Novotný, G VN Jindřichův Hradec
- 10.–11. *Michal Kuneš*, G Strakonice
Magdaléna Zoubková, G PdeC Tábor

Kategorie P

1. *Josef Pihera*, G Strakonice
2. *Jiří Václavík*, G Strakonice

• • • • • Plzeňský kraj • • • • •

Kategorie A

1. *Pavel Paták*, G Sušice
- 2.–3. *Stanislav Haviar*, G Klatovy
Ondřej Hort, G Plzeň, Mikulášské nám.
- 4.–5. *Jakub Bulín*, G Plzeň, Mikulášské nám.
Daniel Soutner, G L. Pika, Plzeň

Kategorie B

1. *Růžena Janoutová*, G Plzeň, Mikulášské nám.
2. *Kryštof Touška*, G Klatovy
3. *Petra Nožičková*, G Plzeň, Mikulášské nám.

Kategorie C

1. *Vlastimil Šetka*, SPŠ elektro, Plzeň
2. *Milan Hajžman*, G Plzeň, Mikulášské nám.
3. *Tran Thu Trang*, G Plzeň, Mikulášské nám.
- 4.-8. *Martin Čábal*, G Plzeň, Mikulášské nám.
Tomáš Čechura, G Plzeň, Mikulášské nám.
Jindřich Havlík, G Plzeň, Mikulášské nám.
Van Mingh Nguyen, G Tachov
Jana Sternerová, G Stříbro
9. *Miroslav Vomáčka*, G Plzeň, Mikulášské nám.
- 10.-14. *Daniela Čábalová*, G Plzeň, Mikulášské nám.
Daniel Duda, G L. Pika, Plzeň
Josef Michálek, G Plzeň, Mikulášské nám.
Jan Škach, G Plzeň, Mikulášské nám.
Helena Talánová, G Rokycany

Kategorie P

1. *Jan Bulánek*, G J. Vrchlického, Klatovy

• • • • • **Karlovarský kraj** • • • • •

Kategorie A

1. *Petr Žáček*, Svobodná chebská škola
- 2.-3. *Eva Černožorská*, První české G Karlovy Vary
Štěpán Trojánek, G Cheb

Kategorie B

1. *Štěpán Masák*, První české G Karlovy Vary
2. *Radek Hájek*, G Cheb

Kategorie C

1. *Marek Pospíšil*, G Cheb
2. *Jaroslav Žák*, První české G Karlovy Vary
3. *Lukáš Vítovec*, První české G Karlovy Vary
4. *Jan Matička*, G Cheb
5. *Jakub Vaník*, G Cheb

• • • • • **Ústecký kraj** • • • • •

Kategorie A

1. *Daniel Petřík*, G Most, Čs. armády
- 2.–3. *Martin Fiala*, G Teplice, Čs. Dobrovolců
Michaela Tichá, G Chomutov, Mostecká

Kategorie B

1. *Martin Obr*, G Chomutov, Mostecká
- 2.–3. *Daniel Šimsa*, G J. Jungmanna, Litoměřice
Cao Bien Thuy, G Ústí nad Labem, Stavbařů
4. *Pavel Eger*, G Litvínov, Studentská
5. *Martin Černý*, SPŠ a VOŠ, Chomutov

Kategorie C

1. *J. Štoviček*, G Teplice, Čs. Dobrovolců
2. *Jan Čapek*, G Duchcov
- 3.–4. *Jan Mudruňka*, G Ústí nad Labem, Stavbařů
Martin Šerg, G Podbořany
- 5.–7. *M. Korec*, G Teplice, Čs. Dobrovolců
Nicole Mertinová, G Ústí nad Labem, Stavbařů
Paula Cimrová, G Roudnice nad Labem

8. *Jiří Mudruška*, G Ústí nad Labem, Stavbařů
9.–12. *T. Kozák*, G Teplice, Čs. Dobrovolců
Tomáš Pajma, G Most, Čs. armády
Jan Tran, G Podbořany
Martin Žižka, G Roudnice nad Labem
13. *Kateřina Gotfriedová*, G V. Hlavatého Louny
14. *Eliška Černá*, G Lovosice

9.-12. *T. Kozák*, G Teplice, Čs. Dobrovolců

Tomáš Pajma, G Most, Čs. armády

Jan Tran, G Podbořany

Martin Žižka, G Roudnice nad Labem

13. *Kateřina Gotfriedov, G V. Hlavatého Louny*

14. *Eliška Černá*, G Lovosice

Liberecký kraj

Kategorie A

1. *Ondřej Soroka*, G F. X. Šaldy, Liberec
2. *Vítězslav Žabka*, G F. X. Šaldy, Liberec
- 3.–4. *Tomáš Jakoubek*, G a SPeGŠ Liberec, Jeronýmova
- Lukáš Ježek*, G F. X. Šaldy, Liberec

2. Vítězslav Žabka, G F. X. Šaldy, Liberec

3.-4. *Tomáš Jakoubek*, G a SPeGŠ Liberec, Jeronýmova

Lukáš Ježek, G F. X. Šaldy, Liberec

Kategorie B

1. *Hana Bendová*, G Česká Lípa
2. *Tomáš Koblíř*, G Jilemnice
3. *Martin Černý*, G Jilemnice
4. *Tomáš Holman*, G Dr. Randy, Jablonec n. N.

2. *Tomáš Kobrle*, G Jilemnice3. *Martin Černý*, G Jilemnice

4. *Tomáš Holman*, G Dr. Randy, Jablonec n. N.

Kategorie C

1. *Vít Jakimiv*, SPŠSE, Liberec
- 2.–3. *Robert Brunetto*, SPŠSE, Liberec
Michal Šmrha, G Dr. Randy, Jablonec n. N.
4. *Pavel Beran*, G Jablonec, U Balvanu
5. *Tomáš Náčovský*, G a SPeGŠ Liberec, Jeronýmova

2.-3. *Robert Brunetto*, SPŠSE, Liberec

Michal Šmrha, G Dr. Randy, Jablonec n. N.

4. *Pavel Beran*, G Jablonec, U Balvanu

5. *Tomáš Nácvoský*, G a SPeGŠ Liberec, Jeronýmova

Kategorie P

1. *Michal Vaner*, G Turnov
2. *Jan Hrnčíř*, G F. X. Šaldy, Liberec

2. Jan Hrnčíř, G F. X. Šaldy, Liberec

Kategorie A

- 1.-2. *Kateřina Fišerová*, LG Jičín
Jana Kašparová, G B. Němcové, Hradec Králové
3. *Radek Moravec*, G B. Němcové, Hradec Králové
4. *Michal Švagerka*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
- 5.-6. *Aleš Balcar*, G B. Němcové, Hradec Králové
Jan Marek, G B. Němcové, Hradec Králové
7. *Jan Bednář*, COP Hronov

Kategorie B

- 1.-2. *Pavel Kuchyňa*, G B. Němcové, Hradec Králové
Martin Petr, G J. K. Tyla, Hradec Králové
3. *Adam Polák*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
4. *Jana Zaydlarová*, G Dvůr Králové
5. *Marek Buday*, G B. Němcové, Hradec Králové
6. *Jiří Cabal*, SPŠ Dvůr Králové
7. *Michal Čapek*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
- 8.-9. *Jakub Dundálek*, JG Náchod
Lukáš Novotný, G J. K. Tyla, Hradec Králové

Kategorie C

1. *Jiří Řičař*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
2. *Lukáš Lánský*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
- 3.-4. *Karel Jára*, JG Náchod
Jakub Zajíc, G J. K. Tyla, Hradec Králové
5. *Petr Polák*, JG Náchod
6. *Martina Zajícová*, JG Náchod
- 7.-8. *Jakub Kaplan*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Petr Kubizňák, G Dvůr Králové
9. *Martin Michálek*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
- 10.-11. *Jiří Maršík*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Adriana Šmídová, G J. K. Tyla, Hradec Králové

Kategorie P

1. *Oto Petřík*, G Vrchlabí

• • • • • *Pardubický kraj* • • • • •

Kategorie A

1. *Vojtěch Novotný*, G Chrudim
2. *Barbara Scholleová*, G Pardubice, Dašická
- 3.–4. *Miroslav Klimoš*, G Lanškroun
Marek Scholle, G Pardubice, Dašická
5. *Tereza Klimošová*, G Lanškroun
6. *Jakub Kutílek*, G Pardubice, Dašická
7. *Kristýna Stodolová*, G Polička

Kategorie B

1. *Marek Scholle*, G Pardubice, Dašická
2. *Lubomír Štěpánek*, G Pardubice, Dašická
3. *Lucie Pekařová*, G Litomyšl
4. *Tomáš Popelář*, G Žamberk

Kategorie C

1. *František Kalibán*, G Litomyšl
- 2.–3. *Miroslav Klimoš*, G Lanškroun
Martin Schmid, G Česká Třebová
- 4.–5. *David Hesoun*, G Polička
Matěj Soukup, G Česká Třebová
6. *Petra Širůčková*, G Polička
7. *Tereza Junková*, G Polička
8. *Martin Basovník*, G Polička

Kategorie P

1. *Miroslav Klimoš*, G Lanškroun
2. *Martin Dobroucký*, G Moravská Třebová

3. *Marek Scholle*, G Pardubice, Dašická

4. *Tereza Klímošová*, G Lanškroun

..... Kraj Vysočina

Kategorie A

1. *Ondřej Křivánek*, G Třebíč

2. *Tomáš Jedlička*, G Třebíč

3. *Aleš Řáda*, G Pelhřimov

4.-5. *Hana Dohnalová*, HG Havlíčkův Brod
Michaela Krpálková, G Jihlava

6. *Martin Kohout*, G Třebíč

7.-11. *Ondřej Hoferek*, G Žďár nad Sázavou
Rostislav Kváš, G Jihlava
Karel Lavička, G Jihlava
Martin Tomec, G Třebíč
Ladislav Zvoník, G Žďár nad Sázavou

Kategorie B

1. *Mirek Dočekal*, G Jihlava

2. *Dana Dohnalová*, HG Havlíčkův Brod

3. *Miloslav Sobotka*, G Žďár nad Sázavou

4. *Petr Kratochvíl*, G Světlá nad Sázavou

5. *Tomáš Herceg*, G Třebíč

6. *Jan Korbel*, G Jihlava

Kategorie C

1. *Matěj Klusáček*, G Třebíč

2.-3. *Jan Máca*, G Třebíč

Michal Kozák, G Jihlava

4. *Tomáš Pejchal*, G Žďár nad Sázavou

5.-6. *Anna Nedělková*, G Pelhřimov

Ladislav Robotka, G Velké Meziříčí

7.-10. *Karel Barták*, G Ledeč nad Sázavou
Jiří Matlák, G Jihlava

Darina Součková, GOB a SOŠ Telč

Kategorie P

1. *Zbyněk Falt*, G Žďár nad Sázavou
- 2.–3. *Martin Tomec*, G Třebíč
Václav Vacek, G Třebíč
4. *Petr Kratochvíl*, G Světlá nad Sázavou
- 5.–6. *Tomáš Herceg*, G Třebíč
Martin Jonáš, SPŠ Jihlava

Jihomoravský kraj

Kategorie A

1. *Jakub Opršal*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
2. *Jaromír Kuben*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 3.–4. *Zbyněk Konečný*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Martin Vejnar, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 5.–6. *Alexandr Pícha*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Michal Rychnovský, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 7.–8. *Martin Krivánek*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Jan Uhlík, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 9.–11. *Miloš Minařík*, SPŠs Brno, Sokolská
Vojtěch Říha, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Jiří Zelinka, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

Kategorie B

1. *Jiří Řihák*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
2. *Zbyněk Konečný*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
3. *Martin Chvátal*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 4.-5. *Ondřej Budík*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Lucie Fabriková, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
6. *Karel Otto*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 7.-8. *Hana Jirků*, G Brno, T. Novákové
Petr Velan, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

- 9.–11. *Ondřej Bouda*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Tomáš Jelínek, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Jan Komínek, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

Kategorie C

- 1.–3. *Petr Fiala*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Vojtěch Robotka, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Jaroslav Šmíd, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
4. *Jaroslav Novotný*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
5. *Jan Kovář*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
6. *Václav Plíhal*, G Brno, Barvičova
7.–8. *Jan Báča*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Pavel Urbánek, G Brno, Vídeňská
9.–16. *Jan Brandejs*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Vojtěch Ivičič, GML Brno, Žižkova
Jakub Knořlíček, G Kyjov
Adam Kolář, G Kyjov
Jan Kotrla, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Tomáš Orsava, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Adam Říha, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Martin Skalský, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

Kategorie P

1. *Martin Vejnar*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
2. *Jan Rygl*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
3.–4. *Jiří Appl*, G Brno, Vejrostova
Martin Hradil, G Brno, Vejrostova
5. *Jiří Zelinka*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

• • • • • **Zlínský kraj** • • • • •

Kategorie A

1. *Marek Pechal*, G Zlín, Lesní čtvrť
2. *Aleš Holub*, G Uherské Hradiště
2. *František Konopecký*, G L. Jaroše, Holešov

3. *Stanislav Basovník*, G Kroměříž
4. *Pavel Šalom*, G Rožnov pod Radhoštěm
5. *Ondra Bilka*, G Zlín, Lesní čtvrť
6. *Jiří Machálek*, G L. Jaroše, Holešov
7. *Michal Čudrnák*, G L. Jaroše, Holešov
7. *Václav Slimáček*, GFP, Valašské Meziříčí
8. *Petra Klimentová*, GFP, Valašské Meziříčí
8. *Zbyněk Savara*, G Uherský Brod
8. *Jan Váňa*, G Zlín, Lesní čtvrť

Kategorie B

1. *Hana Bosáková*, GFP, Valašské Meziříčí
2. *Petr Dlabaja*, G L. Jaroše, Holešov
3. *Josef Žíla*, G Zlín, Lesní čtvrť
4. *Petr Haloda*, G Uherské Hradiště
5. *Michal Krajňanský*, G Zlín, Lesní čtvrť
6. *Jan Horáček*, G Zlín, Lesní čtvrť

Kategorie C

1. *Martina Rosíková*, G Zlín, Lesní čtvrť
- 2.–4. *Filip Bártek*, G Rožnov pod Radhoštěm
Petra Papežíková, G L. Jaroše, Holešov
Alžběta Pechová, GaOA Valašské Klobouky
5. *Magdaléna Beníčková*, G Uherský Brod
- 6.–10. *Petr Maňák*, MG Vsetín
Tomáš Smetka, G L. Jaroše, Holešov
Jiří Václavík, MG Vsetín
Petr Vévoda, G Jana Pivečky, Slavičín
Martin Zapletal, G L. Jaroše, Holešov

Kategorie P

- 1.–2. *Jan Pelc*, G Uherský Brod
Ondřej Bílka, G Zlín, Lesní čtvrť
3. *Stanislav Basovník*, G Kroměříž
4. *Martin Koníček*, G Uherský Brod

5. *Marek Blahuš*, G Uherské Hradiště

6. *Pavel Křupala*, G Zlín, Lesní čtvrť

• • • • • **Olomoucký kraj** • • • • •

Kategorie A

1. *Matěj Pilát*, SGO, Olomouc

2.–3. *Jiří Horký*, G J. Škody, Přerov

Tomáš Javůrek, G Jeseník

4.–5. *Zdeněk Černohouz*, SGO, Olomouc

Anežka Faltýnková, G J. Škody, Přerov

6. *Zuzana Dřízgová*, G Lipník nad Bečvou

Kategorie B

1. *Anežka Faltýnková*, G J. Škody, Přerov

2. *Tomáš Javůrek*, G Jeseník

3. *Markéta Paloncýová*, G Šumperk

4. *Ondřej Klabal*, G J. Wolkera, Prostějov

5. *Petr Hošek*, G Zábřeh

6. *Jakub Zouhar*, SGO, Olomouc

Kategorie C

1. *Jan Havlíček*, G Zábřeh

2. *Petr Kunc*, G Uničov

3.–4. *Lukáš Bednařík*, SGO, Olomouc

Eva Rolincová, G Hranice

5. *Dita Přikrylová*, G J. Škody, Přerov

6. *Martin Juřen*, G Kojetín

7.–8. *Michal Havrila*, G Jeseník

Pavla Kosová, G Šternberk

9.–10. *Jan Macháček*, G Jeseník

Martin Šeřl, G Uničov

Kategorie A

1. Zuzana Safernová, G M. Koperníka, Bílovec
2. Jaroslav Hančl, G M. Koperníka, Bílovec
3. Josef Žabenský, G M. Koperníka, Bílovec
4. Jakub Dvorský, G M. Koperníka, Bílovec
- 5.–6. Adam Kubetta, G M. Koperníka, Bílovec
Vít Orava, G M. Koperníka, Bílovec
- 7.–8. Michael Kučera, G M. Koperníka, Bílovec
Pavel Motloch, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
- 9.–11. Miloslav Holík, G M. Koperníka, Bílovec
Cyril Hrubíš, G M. Koperníka, Bílovec
Tomáš Javůrek, G Jeseník

Kategorie B

1. Miroslav Štufka, G M. Koperníka, Bílovec
- 2.–3. Petr Dluhoš, Mendelovo G Opava
Pavel Motloch, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
4. Tomáš Jeziorský, G M. Koperníka, Bílovec
- 5.–6. Jakub Hromádka, G Frýdlant n. O.
Lukáš Merta, G Frenštát pod Radhoštěm
7. Petr Slovák, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
8. Vít Orava, G M. Koperníka, Bílovec
- 9.–10. Tomáš Princ, G Ostrava, Čs. exilu
Jan Šebetovský, VOŠ, SOŠ a SOU Kopřivnice

Kategorie C

- 1.–2. Tomáš Toufar, G M. Koperníka, Bílovec
Daniel Vopalecký, G Ostrava, F. Hajdy
3. Petr Cheng Siruň, Matiční G Ostrava
- 4.–5. Klára Krejčíčková, Matiční G Ostrava
Jan Ohnheiser, SPŠE Ostrava, Křižíkova
- 6.–7. Václav Mařák, G Ostrava, Čs. exilu
Libor Šmejkal, Mendelovo G Opava
8. Matěj Štěpánek, G P. Bezruče, Frýdek-Místek

- 9.-12. *Jiří Harasim*, G M. Koperníka, Bílovec
Tomáš Raček, G M. Koperníka, Bílovec
Martin Sieber, G Orlová
Silvestr Tkáč, G Frenštát pod Radhoštěm

Kategorie P

1. *Pavel Motloch*, G P. Bezruč, Frýdek-Místek
2. *Cyril Hrubíš*, G M. Koperníka, Bílovec

Výsledky celostátního kola 54. ročníku MO
kategorie A

Vítězové

1.	<i>František Konopecký</i> , 8/8, G L. Jaroše, Holešov	31 b.
2.–3.	<i>Ondřej Bílka</i> , 3/4, G Zlín, Lesní čtvrť	28 b.
	<i>Marek Pechal</i> , 7/8, G Zlín, Lesní čtvrť	28 b.
4.	<i>Jakub Opršal</i> , 3/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	27 b.
5.	<i>Marek Scholle</i> , 6/8, G Pardubice, Dašická	26 b.
6.–7.	<i>Jaroslav Hančl</i> , 3/4, G M. Koperníka, Bílovec	25 b.
	<i>Jaromír Kuben</i> , 3/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	25 b.
8.	<i>Michal Švagerka</i> , 4/4, G J. K. Tyla, Hradec Králové	21 b.
9.–10.	<i>Pavel Kocourek</i> , 4/4, SPŠST Praha 1, Panská	19 b.
	<i>Martin Křivánek</i> , 3/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	19 b.

Další úspěšní řešitelé

11.	<i>Mikuláš Peksa</i> , 4/4, G Ch. Dopplera, Praha 5	18 b.
12.	<i>Zbyněk Konečný</i> , 2/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	17 b.
13.–14.	<i>Stanislav Basovník</i> , 8/8, G Kroměříž	16 b.
	<i>Alexandr Pícha</i> , 3/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	16 b.
15.–19.	<i>Jan Drašnar</i> , 8/8, G J. Keplera, Praha 6	15 b.
	<i>Aleš Holub</i> , 8/8, G Uherské Hradiště	15 b.
	<i>Pavel Paták</i> , 8/8, G Sušice	15 b.
	<i>Michal Rychnovský</i> , 4/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	15 b.
	<i>Pavel Šalom</i> , 7/8, G Rožnov pod Radhoštěm	15 b.

Výsledky celostátního kola 54. ročníku MO
kategorie P

Vítězové

1. Zbyněk Falt, 8/8, G Žďár nad Sázavou	47 b.
2. Jan Bulánek, 8/8, G J. Vrchlického, Klatovy	46 b.
3. Ondřej Bílka, 3/4, G Zlín, Lesní čtvrť	44 b.
4. Daniel Marek, 3/4, G Ch. Dopplera, Praha	41 b.
5. Jan Pelc, 3/4, G J. A. Komenského, Uherský Brod	39 b.
6.–7. Roman Smrž, 5/8, G E. Krásnohorské, Praha	33 b.
Michal Vaner, 7/8, G Jana Palacha, Turnov	33 b.

Další úspěšní řešitelé

8.–9. Stanislav Basovník, 8/8, G Kroměříž	29 b.
Martin Vojnár, 8/8, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	29 b.
10. Josef Pihera, 6/8, G Strakonice	28 b.
11.–12. Martin Dobroucký, 8/8, G Moravská Třebová	26 b.
Cyřil Hrubíš, 3/4, G M. Koperníka, Bílovec	26 b.
13. Miroslav Klímoš, 4/8, G Lanškroun	24 b.
14. Pavel Kocourek, 4/4, SPŠST Praha 1, Panská	23 b.
15. Pavel Motloch, 4/6, G P. Bezruč, Frýdek-Místek	22 b.

Kategorie C

Texty úloh

C – I – 1

Nechť a, b, c, d jsou taková reálná čísla, že $a + d = b + c$. Dokažte nerovnost

$$(a - b)(c - d) + (a - c)(b - d) + (d - a)(b - c) \geq 0.$$

(E. Kováč)

C – I – 2

Zjistěte, pro která přirozená čísla n ($n \geq 2$) je možno z množiny $\{1, 2, \dots, n - 1\}$ vybrat navzájem různá sudá čísla tak, aby jejich součet byl dělitelný číslem n .

(J. Zhouf)

C – I – 3

V libovolném konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ označme E střed strany BC a F střed strany AD . Dokažte, že trojúhelníky AED a BFC mají stejný obsah, právě když jsou strany AB a CD rovnoběžné.

(J. Šimša)

C – I – 4

Tři čtyřmístná čísla k, l, m jsou stejného tvaru $ABAB$ (tj. číslice na místě jednotek je stejná jako číslice na místě stovek a číslice na místě desítek je stejná jako číslice na místě tisíců). Číslo l má číslici na místě jednotek o 2 větší a číslici na místě desítek o 1 menší než číslo k . Číslo m je součtem čísel k a l a je dělitelné devíti. Určete všechna taková čísla k .

(T. Joska)

C – I – 5

Určete počet všech trojic dvojmístných přirozených čísel a, b, c , jejichž součin abc má zápis, ve kterém jsou všechny číslice stejné. Trojice lišící se pouze pořadím čísel považujeme za stejné, tj. započítáváme je pouze jednou. (J. Šimša)

C – I – 6

V trojúhelníku ABC se stranou BC délky 2 cm je bod K středem strany AB . Body L a M rozdělují stranu AC na tři shodné úsečky. Trojúhelník KLM je rovnoramenný a pravoúhlý. Určete délky stran AB, AC všech takových trojúhelníků ABC . (P. Leischner)

C – S – 1

Najděte všechny trojice celých čísel x, y, z , pro které platí

$$x + yz = 2005,$$

$$y + xz = 2006.$$

(J. Šimša)

C – S – 2

Pro která přirozená čísla n lze z množiny $\{n, n+1, n+2, \dots, n^2\}$ vybrat čtyři navzájem různá čísla a, b, c, d tak, že platí $ab = cd$? (J. Šimša)

C – S – 3

Je dána úsečka AB . Sestrojte bod C tak, aby se obsah trojúhelníku ABC rovnal $1/8$ obsahu S čtverce o straně AB a součet obsahů čtverců o stranách AC a BC se rovnal S . (A. Jančařík)

C – II – 1

Určete číslice x, y, z tak, aby platila rovnost

$$\frac{x+y}{z} = \overline{z,yx},$$

kde $\overline{z,yx}$ značí číslo složené ze z jednotek, y desetin a x setin.

(J. Zhouf)

C – II – 2

Ke každému přirozenému číslu $n > 2$ najděte aspoň jednu dvojici různých přirozených čísel p, q tak, aby číslo $\frac{1}{n}$ bylo aritmetickým průměrem čísel $\frac{1}{p}$ a $\frac{1}{q}$. (L. Boček)

C – II – 3

Libovolným vnitřním bodem P úhlopříčky AC daného obdélníku $ABCD$ jsou vedeny rovnoběžky s jeho stranami, které protínají úsečky AB, BC, CD a DA po řadě v bodech K, L, M a N . Dokažte, že

- a) přímky LM a KN jsou rovnoběžky,
- b) vzdálenost rovnoběžek LM a KN je konstantní (nezávisí na volbě bodu P),
- c) pro obvod o čtyřúhelníku $KLMN$ platí nerovnost $o \geq 2|AC|$. (J. Švrček)

C – II – 4

Popište konstrukci lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD , kterému je možno opsat kružnici s poloměrem $r = 5$ cm, je-li dána vzdálenost $d = 2$ cm jejího středu od průsečíku úhlopříček a $|\sphericalangle BAC| = 70^\circ$. (E. Kováč)

Řešení úloh

C – I – 1

Vyjádříme-li z rovnosti v předpokladu např. $d = b + c - a$ a dosadíme-li tuto hodnotu do levé strany dokazované nerovnosti, postupně dostaneme:

$$\begin{aligned}(a-b)(a-b) + (a-c)(a-c) + (b+c-2a)(b-c) &= \\= a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 + bc - 2ab - bc - c^2 + 2ac &= \\= 2a^2 - 4ab + 2b^2 = 2(a^2 - 2ab + b^2) = 2(a-b)^2.\end{aligned}$$

Tento výraz je nezáporný pro všechna reálná čísla a, b , čímž je daná nerovnost dokázána.

Jiné řešení. Nejprve ponecháme podmínku $a + d = b + c$ stranou a ukážeme, že výraz z levé strany dokazované nerovnosti lze upravit na součin. První část výrazu, součin $(a-b)(c-d)$, je roven nule v případech, kdy $a = b$ nebo $c = d$; druhá část výrazu, součet $(a-c)(b-d) + (d-a)(b-c)$, má rovněž v obou případech $a = b, c = d$ nulovou hodnotu, takže musí být dělitelný součinem $(a-b)(c-d)$. Přesvědčíme se o tom roznásobením a následným postupným vytýkáním:

$$\begin{aligned}(a-c)(b-d) + (d-a)(b-c) &= \\= (ab - bc - ad + cd) + (bd - ab - cd + ac) &= \\= (-bc + bd) + (-ad + ac) = -b(c-d) + a(c-d) &= \\= (a-b)(c-d).\end{aligned}$$

Dokazovaná nerovnost má proto tvar

$$2(a-b)(c-d) \geq 0,$$

do kterého nyní dosadíme $c-d = a-b$. Dostaneme tak nerovnost

$$2(a-b)^2 \geq 0,$$

která platí pro všechna reálná čísla a, b . Tím je daná nerovnost dokázána.

C – I – 2

Je-li n sudé a v dané množině jsou sudá čísla 2 a $n-2$, přičemž $2 < n-2$, je jejich součet $2 + (n-2) = n$ dělitelný číslem n . Z podmínky $2 < n-2$ tedy plyne, že všechna sudá čísla $n > 4$ vyhovují podmínce úlohy.

Z množin $\{1\}$ (pro $n = 2$) a $\{1, 2, 3\}$ (pro $n = 4$) zřejmě nelze požadovaný výběr provést.

Je-li n liché, můžeme pro $n > 7$ z dané množiny analogicky vybrat tři sudá čísla $4, n - 3, n - 1$, přičemž $4 < n - 3 < n - 1$, se součtem $4 + (n - 3) + (n - 1) = 2n$, který je dělitelný číslem n .

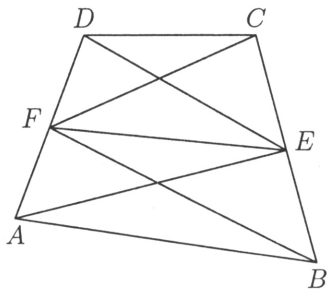
Z množin $\{1, 2\}$ (pro $n = 3$), $\{1, 2, 3, 4\}$ (pro $n = 5$) a $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (pro $n = 7$) zřejmě nelze vybrat ani dvě, ani tři různá sudá čísla s požadovanou vlastností.

Podmínce úlohy vyhovují číslo $n = 6$ a všechna přirozená čísla $n \geq 8$.

C – I – 3

Příčka EF daného čtyřúhelníku $ABCD$ je v každém z trojúhelníků AED i BFC těžnicí (obr. 1), což znamená, že pro jejich obsahy platí

$$\begin{aligned} S(AED) &= 2S(FED) = 2S(FEA), \\ S(BFC) &= 2S(FEC) = 2S(FEB). \end{aligned} \quad (1)$$



Obr. 1

Oba trojúhelníky FED, FEC mají společnou stranu FE a jejich obsahy jsou stejné, právě když $CD \parallel FE$. Podobně i trojúhelníky FEA, FEB mají společnou stranu FE a jejich obsahy jsou stejné, právě když $AB \parallel FE$. Proto mají-li trojúhelníky AED a BFC stejný obsah, je $CD \parallel FE$ a $AB \parallel FE$, tedy $AB \parallel CD$.

Je-li obráceně $AB \parallel CD$, je střední příčka EF lichoběžníku $ABCD$ rovnoběžná s oběma základnami AB a CD , takže dle předchozí úvahy $S(FED) = S(FEC)$ a podle (1) také $S(AED) = S(BFC)$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

C – I – 4

Aby bylo číslo $m = \overline{C D C D}$ dělitelné devíti, musí být součet $2(C + D)$ jeho číslic dělitelný devíti, tudíž i součet $C + D$ musí být dělitelný devíti, neboli číslo $\overline{C D}$ musí být dělitelné devíti.

Má-li číslo k číslice A, B, A, B , má číslo l číslice $A - 1, B + 2, A - 1, B + 2$. Jelikož číslo $B + (B + 2) = 2B + 2$ je sudé, je číslice D čísla $m = k + l$ sudá. Proto připadají vzhledem k dělitelnosti devíti v úvahu jen tato čísla m : 1 818, 3 636, 5 454, 7 272, 9 090. Protože číslice C je ve všech případech lichá a součet číslic $A + (A - 1) = 2A - 1$ je rovněž lichý, nemůže být $B + (B + 2) > 10$, tedy $B + (B + 2) = D$ a $A + (A - 1) = C$. Odtud už snadno určíme odpovídající číslice C, D a čísla k, l zapíšeme do následující tabulky:

m	1 818	3 636	5 454	7 272	9 090
k	1 313	2 222	3 131	4 040	neexistuje
l	0 505	1 414	2 323	3 232	neexistuje

Číslo 0505 není čtyřmístné, proto jsou řešením úlohy pouze čísla $k \in \{2\,222, 3\,131, 4\,040\}$

C – I – 5

Pro dvojmístná čísla a, b, c je součin abc číslo čtyřmístné, nebo pětímístné, nebo šestímístné. Jsou-li proto všechny číslice čísla abc rovny téže číslici k , platí jedna z rovností $abc = k \cdot 1\,111$, $abc = k \cdot 11\,111$ či $abc = k \cdot 111\,111$, $k \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

Čísla $1\,111 = 11 \cdot 101$ a $11 \cdot 111 = 41 \cdot 271$ mají ovšem ve svém rozkladu trojmístná prvočísla, takže nemohou být součinem dvojmístných čísel. Zbývá proto jediná možnost:

$$abc = k \cdot 111\,111 = k \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37.$$

Podívejme se, jak mohou být prvočísla 3, 7, 11, 13, 37 rozdělena do jednotlivých činitelů a, b, c . Protože součiny $37 \cdot 3$ a $3 \cdot 7 \cdot 11$ jsou větší než 100, musí být prvočíslo 37 samo jako jeden činitel a zbylá čtyři prvočísla 3, 7, 11, 13 musí být rozdělena do dvojic. Jelikož i součin $11 \cdot 13$ je větší než 100, připadají do úvahy pouze rozdělení na činitele $3 \cdot 11, 7 \cdot 13$ a 37, nebo na činitele $3 \cdot 13, 7 \cdot 11$ a 37. K těmto činitelům ještě připojíme

možné činitele z rozkladu číslce k a dostaneme řešení dvou typů:

$$a = 33k_1, \quad b = 91, \quad c = 37k_2, \quad \text{kde } k_1 \in \{1, 2, 3\}, \quad k_2 \in \{1, 2\},$$

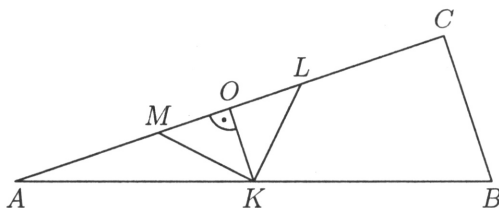
$$a = 39k_1, \quad b = 77, \quad c = 37k_2, \quad \text{kde } k_1 \in \{1, 2\}, \quad k_2 \in \{1, 2\},$$

Hledaný počet trojic čísel a, b, c je tedy $3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10$.

C – I – 6

Body L a M na straně AC zvolíme tak, aby $|AM| = |ML| = |LC|$. Těžiště KO trojúhelníku KLM je střední příčkou trojúhelníku ABC , platí tedy $|KO| = \frac{1}{2}|BC|$, $|AC| = 6|MO|$ a $|AB| = 2|AK|$. Rozlišíme tři možnosti:

(a) Nechť $|KL| = |KM|$ (obr. 2). Pak je $|\sphericalangle MKL| = |\sphericalangle MOK| = 90^\circ$ a $|MO| = |KO|$. Z Pythagorovy věty pro trojúhelník AKO plyne



Obr. 2

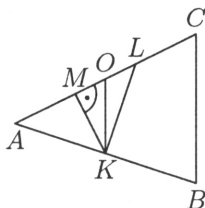
$$|AK| = \sqrt{(3|MO|)^2 + |KO|^2} = \sqrt{10|KO|^2} = \sqrt{10}|KO| = \frac{1}{2}\sqrt{10}|BC|,$$

takže

$$|AB| = 2|AK| = \sqrt{10}|BC| = 2\sqrt{10} \text{ cm},$$

$$|AC| = 6|MO| = 6|KO| = 3|BC| = 6 \text{ cm}.$$

(b) Nechť $|ML| = |MK|$ (obr. 3). Pak je $|\sphericalangle KML| = 90^\circ$ a $|AM| =$



Obr. 3

$= |ML| = |MK| = 2|MO|$. Z Pythagorovy věty pro trojúhelník KMO plyne

$$|KO| = \sqrt{|MO|^2 + (2|MO|)^2} = \sqrt{5}|MO|,$$

takže

$$|AC| = 6|MO| = \frac{3}{\sqrt{5}}|BC| = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ cm.}$$

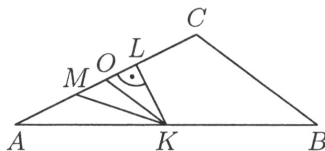
Z Pythagorovy věty pro trojúhelník AKM plyne

$$\begin{aligned} |AK| &= \sqrt{|AM|^2 + |MK|^2} = \sqrt{2}|MK| = 2\sqrt{2}|MO| = \\ &= \frac{2\sqrt{10}}{5}|KO| = \frac{\sqrt{10}}{5}|BC|, \end{aligned}$$

takže

$$|AB| = 2|AK| = \frac{2\sqrt{10}}{5}|BC| = \frac{4\sqrt{10}}{5} \text{ cm.}$$

(c) Necht' $|ML| = |KL|$ (obr. 4). Pak je $\sphericalangle MLK = 90^\circ$. Je tedy $|KL| = |ML| = 2|LO| = 2|MO|$ a $|AL| = |AM| + |ML| = 4|MO|$.



Obr. 4

Z Pythagorovy věty pro trojúhelník KLO tak plyne

$$|KO| = \sqrt{|LO|^2 + (2|LO|)^2} = \sqrt{5}|LO|,$$

takže

$$|AC| = 6|MO| = 6|LO| = \frac{3}{\sqrt{5}}|BC| = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ cm.}$$

Z Pythagorovy věty pro trojúhelník AKL plyne

$$\begin{aligned} |AK| &= \sqrt{|AL|^2 + |LK|^2} = \sqrt{(4|LO|)^2 + (2|LO|)^2} = \\ &= 2\sqrt{5}|LO| = 2|KO| = |BC| = 2 \text{ cm,} \end{aligned}$$

takže

$$|AB| = 2|AK| = 2|BC| = 4 \text{ cm.}$$

C – S – 1

Odečtením první rovnice od druhé dostaneme

$$(x - y)(z - 1) = 1,$$

odkud plyne, že buď platí $x - y = z - 1 = 1$, nebo $x - y = z - 1 = -1$.

V prvním případě je $z = 2$, $y = x - 1$ a po dosazení do kterékoli z původních rovnic určíme $x = 669$, takže $y = 668$.

Ve druhém případě je $z = 0$, $y = x + 1$, takže $x = 2005$ a $y = 2006$.

Řešením jsou dvě trojice $x = 669$, $y = 668$, $z = 2$ a $x = 2005$, $y = 2006$, $z = 0$.

Jiné řešení. Z první rovnice vyjádříme

$$x = 2005 - yz$$

a tuto hodnotu dosadíme do druhé rovnice, kterou upravíme:

$$\begin{aligned}y + 2005z - yz^2 &= 2006, \\ y(1 - z^2) &= 2005(1 - z) + 1.\end{aligned}$$

Z dané soustavy je zřejmé, že nemůže být $z = 1$, takže můžeme psát

$$y(1 + z) = 2005 + \frac{1}{1 - z}.$$

Levá strana poslední rovnosti je celá, proto musí být celá i pravá strana. Této podmínce vyhovuje jedině $z = 0$ a $z = 2$.

Stejně jako v předchozím řešení dosazením do kterékoli rovnice původní soustavy dopočteme $x = 669$, $y = 668$ pro $z = 2$ a $x = 2005$, $y = 2006$ pro $z = 0$.

C – S – 2

Pro $n = 1$ a $n = 2$ má daná množina méně než čtyři prvky.

Jelikož pro každé přirozené číslo n platí

$$n(2n + 2) = 2n(n + 1),$$

mohli bychom zvolit $a = n$, $b = 2n + 2$, $c = 2n$, $d = n + 1$. Tato čísla jsou vzájemně různá pro každé $n > 1$, neboť pro taková n platí $n < n + 1 < 2n < 2n + 2$. Ještě zbývá ověřit, pro která čísla n je $2n + 2 \leq n^2$,

aby takto zvolená čtyři čísla a, b, c, d byla z dané množiny. Je vidět, že tato poslední nerovnost platí pro každé $n > 2$, neboť je ekvivalentní s nerovností $3 \leq (n-1)^2$.

Můžeme tedy shrnout, že požadovaná čísla a, b, c, d lze z dané množiny vybrat pro každé přirozené číslo $n > 2$.

Jiné řešení. Pro $n = 1$ a $n = 2$ má daná množina méně než čtyři prvky.

Jelikož pro každé přirozené číslo n platí

$$n \cdot 6n = 2n \cdot 3n,$$

mohli bychom zvolit $a = n, b = 6n, c = 2n, d = 3n$. Tato čísla jsou vzájemně různá pro každé n , neboť $n < 2n < 3n < 6n$. Ještě zbývá ověřit, pro která čísla n je $6n \leq n^2$, aby zvolená čtyři čísla a, b, c, d byla z dané množiny. Je vidět, že tato poslední nerovnost platí pro každé $n > 5$.

Pro $n = 3$ vybereme $a = 3, b = 8, c = 6, d = 4$ (viz předchozí řešení), pro $n = 4$ vybereme $a = 4, b = 10, c = 8, d = 5$ (viz předchozí řešení), nebo $a = 5, b = 12, c = 6, d = 10$ (viz následující poznámku), pro $n = 5$ vybereme $a = 5, b = 12, c = 10, d = 6$ (viz předchozí řešení).

Můžeme tedy shrnout, že požadovaná čísla a, b, c, d lze z dané množiny vybrat pro každé přirozené číslo $n > 2$.

Poznámka. Čtveřic vzájemně různých čísel a, b, c, d , která splňují dané podmínky, je mnoho. Pokaždé je ale třeba u takové čtveřice určit, od kterého nejmenšího čísla n dané podmínky platí, a pro zbylá přirozená čísla n je třeba určit konkrétní hodnoty čísel a, b, c, d .

Tak např. je možné volit $a = n, b = 3n + 3, c = 3n, d = n + 1$ pro $n > 3$, nebo $a = n + 1, b = 2n + 4, c = 2(n + 1), d = n + 2$ pro $n > 3$ (viz druhé řešení pro $n = 4$) apod.

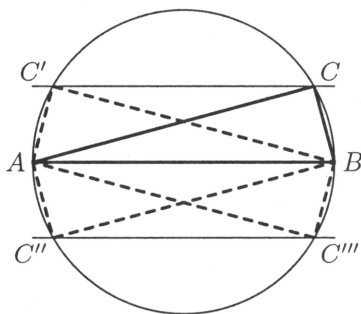
C – S – 3

Podmínka, že obsah trojúhelníku ABC se má rovnat $\frac{1}{8}$ obsahu S čtverce o straně AB , znamená, že výška trojúhelníku ABC na stranu AB má délku $\frac{1}{4}|AB|$, takže bod C musí ležet na jedné ze dvou rovnoběžek s přímkou AB vzdálených $\frac{1}{4}|AB|$ od přímky AB .

Podmínka, že součet obsahů čtverců o stranách AC a BC se má rovnat obsahu čtverce o straně AB , znamená podle Pythagorovy věty pro trojúhelník ABC , že je tento trojúhelník pravoúhlý s přeponou AB ,

takže bod C musí ležet na kružnici se středem ve středu přepony AB a poloměrem $\frac{1}{2}|AB|$.

Konstrukce bodu C je tedy jednoduchá. Obě zmíněné rovnoběžky zřejmě protnou kružnici nad průměrem AB ve čtyřech bodech (obr. 5). Vzhledem k tomu, že se jedná o polohovou úlohu, má úloha čtyři řešení.



Obr. 5

C – II – 1

Danou rovnost pro $z \neq 0$ postupně upravíme:

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{z} &= \overline{z, yx}, \\ \frac{x+y}{z} &= z + \frac{y}{10} + \frac{x}{100}, \\ 100(x+y) &= (100z + 10y + x) \cdot z.\end{aligned}$$

Jelikož x, y, z jsou číslice, platí nerovnosti $100 \cdot (9 + 9) \geq 100(x + y)$ a $(100z + 10y + x) \cdot z \geq 100z \cdot z$, odkud plyne $18 \geq z^2$. To znamená, že může být jediné $z = 1$, nebo $z = 2$, nebo $z = 3$, nebo $z = 4$ (hodnota $z = 0$ není přípustná).

Pro $z = 1$ má daná rovnost tvar

$$\begin{aligned}100(x+y) &= 100 + 10y + x, \\ 99x + 90y &= 100.\end{aligned}$$

Úvahou o dělitelnosti třemi či devíti zjistíme, že poslední rovnice nemá žádné celočíselné řešení. Proto nemůže být $z = 1$.

Pro $z = 2$ má daná rovnost tvar

$$\begin{aligned}100(x + y) &= (200 + 10y + x) \cdot 2, \\49x + 40y &= 200.\end{aligned}$$

Úvahou o dělitelnosti deseti zjistíme, že může být jedině $x = 0$. Pak je $y = 5$, takže v tomto případě splňují danou rovnost číslce $x = 0$, $y = 5$, $z = 2$.

Pro $z = 3$ má daná rovnost tvar

$$\begin{aligned}100(x + y) &= (300 + 10y + x) \cdot 3, \\97x + 70y &= 900.\end{aligned}$$

Úvahou o dělitelnosti deseti zjistíme, že může být jedině $x = 0$. Pak ale neexistuje žádné celé y splňující rovnost $70y = 900$. Proto nemůže být $z = 3$.

Pro $z = 4$ má daná rovnost tvar

$$\begin{aligned}100(x + y) &= (400 + 10y + x) \cdot 4, \\24x + 15y &= 400.\end{aligned}$$

Úvahou o dělitelnosti třemi zjistíme, že poslední rovnice nemá žádné celočíselné řešení. Proto nemůže být $z = 4$.

Daná rovnost je splněna jedině pro $x = 0$, $y = 5$, $z = 2$. Skutečně platí $\frac{0+5}{2} = 2,50$.

C – II – 2

K libovolně zvolenému přirozenému číslu $n > 2$ hledáme příklad různých přirozených čísel p , q závislých na čísle n tak, aby platilo

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right).$$

Po úpravách má tato rovnost tvar

$$2pq = n(p + q), \quad \text{neboli} \quad p(2q - n) = nq.$$

Jelikož stačí nalézt jedinou dvojici čísel p , q , je možné ji hledat zkoušením několika jednoduchých možností v poslední rovnici.

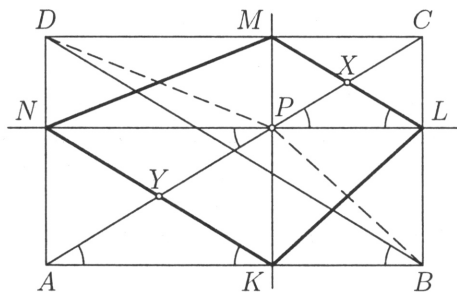
Zkusme položit $2q - n = 1$. Získáme tak $q = \frac{1}{2}(n+1)$ a $p = \frac{1}{2}n(n+1)$. Tato čísla jsou přirozená a vzájemně různá pro libovolné liché číslo $n > 2$.

Dále zkusme položit $2q - n = 2$. Získáme tak $q = \frac{1}{2}(n+2)$ a $p = \frac{1}{4}n(n+2)$. Tato čísla jsou přirozená a vzájemně různá pro libovolné sudé číslo $n > 2$.

Můžeme tedy pro liché číslo $n > 2$ položit $q = \frac{1}{2}(n+1)$ a $p = \frac{1}{2}n(n+1)$ a pro sudé číslo $n > 2$ zas $q = \frac{1}{2}(n+2)$ a $p = \frac{1}{4}n(n+2)$.

C – II – 3

a) AC a BD jsou úhlopříčky obdélníku $ABCD$, proto jsou úhly ABD a BAC shodné. AP a KN jsou úhlopříčky pravoúhelníku $AKPN$, proto jsou úhly AKN , KAP a APN shodné (obr. 6). PC a LM jsou úhlopříčky pravoúhelníku $PLCM$, proto jsou úhly PLM a LPC shodné. Úhly APN a LPC jsou shodné (vrcholové úhly), proto jsou shodné i úhly AKN , PLM a ABD , přímky LM a KN jsou tudíž rovnoběžné s úhlopříčkou BD daného obdélníku, a jsou tedy rovnoběžné navzájem.



Obr. 6

b) Jsou-li X a Y průsečíky přímek LM a KN s úhlopříčkou AC , je $|XY| = |XP| + |PY| = \frac{1}{2}|CP| + \frac{1}{2}|PA| = \frac{1}{2}(|CP| + |PA|) = \frac{1}{2}|CA|$. Úsečka XY má tedy délku nezávislou na poloze bodu P . Podle a) svírá přímka XY s přímkami KN a LM stejný úhel jako s přímkou BD , takže tento úhel rovněž nezávisí na poloze bodu P . Proto je i vzdálenost přímek LM a KN nezávislá na poloze bodu P (a je jednoznačně určena velikostí $|XY|$ a úhlem MXP , přičemž $|\sphericalangle MXP| = 2|\sphericalangle ABD|$).

c) KL a BP jsou úhlopříčky pravoúhelníku $KBLP$, jsou proto shodné. Podobně jsou MN a PD shodné úhlopříčky pravoúhelníku $NPMD$, LM a PC shodné úhlopříčky pravoúhelníku $PLCM$ a NK a AP shodné úhlopříčky pravoúhelníku $AKPN$. Pro obvod čtyřúhelníku $KLMN$ tak

platí

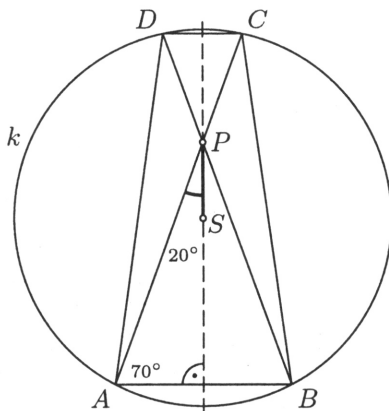
$$\begin{aligned} o &= |KL| + |LM| + |MN| + |NK| = \\ &= (|KL| + |MN|) + (|LM| + |NK|) = \\ &= (|BP| + |PD|) + (|PC| + |AP|) \geq |BD| + |AC| = 2|AC|, \end{aligned}$$

kde jsme pro trojici bodů B , D , P využili trojúhelníkovou nerovnost $|BP| + |PD| \geq |BD|$.

Jiné řešení části b). Čtyřúhelník $KLMN$ je podle části a) lichoběžník (anebo případně rovnoběžník, který můžeme považovat za speciální případ lichoběžníku) se základnami KN a LM . Naší úlohou je ukázat, že jeho výška nezávisí na volbě bodu P . Strany a úhlopříčky čtyřúhelníku $KLMN$ dělí obdélník $ABCD$ na čtyři dvojice shodných trojúhelníků, z čehož plyne, že obsah $KLMN$ je polovinou obsahu $ABCD$. Dále součet délek základů KN a LM je roven součtu délek úsečků AP a PC , tedy délce úsečky AC . Lichoběžník $KLMN$ má tedy konstantní obsah a konstantní součet délek základů, má tedy i konstantní výšku.

C – II – 4

Všimněme si lichoběžníku $ABCD$, jemuž lze opsat kružnici. Přímka jdoucí jejím středem S kolmo k oběma základnám AB a CD je osou souměrnosti obou tětv AB a CD , tedy i osou souměrnosti celého lichoběžníku $ABCD$. Jeho ramena AD a BC jsou tudíž shodná a průsečík P úhlopříček AC a BD leží též na ose úseček AB a CD . Jelikož je podle zadání $|\sphericalangle BAC| = 70^\circ$, je $|\sphericalangle APS| = 20^\circ$ (obr. 7).



Obr. 7

Popis konstrukce: Sestrojíme úsečku SP , kde $|SP| = d = 2\text{ cm}$, a kružnici $k(S; 5\text{ cm})$. Bodem P vedeme polopřímky PX a PY tak, aby $|\sphericalangle SPX| = |\sphericalangle SPY| = 20^\circ$. Průsečíky polopřímek PX a PY s kružnicí k jsou body A a B . Potom průsečíky vnitřků polopřímek AP a BP s kružnicí k jsou body C a D .

Úloha má jediné řešení.

Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro které má každá z rovnic

$$x^2 + ax + b = 0, \quad x^2 + (2a + 1)x + 2b + 1 = 0$$

dva různé reálné kořeny, přičemž kořeny druhé rovnice jsou převrácené hodnoty kořenů první rovnice. (E. Kováč)

B – I – 2

Je dán rovnoběžník $ABCD$. Přímka vedená bodem D protíná úsečku AC v bodě G , úsečku BC v bodě F a polopřímku AB v bodě E tak, že trojúhelníky BEF a CGF mají stejný obsah. Určete poměr $|AG| : |GC|$. (T. Jurík)

B – I – 3

Na stole leží k hromádek o $1, 2, 3, \dots, k$ kamenech, kde $k \geq 3$. V každém kroku vybereme tři libovolné hromádky na stole, sloučíme je do jedné a přidáme k ní jeden kámen, který na stole dosud neležel. Jestliže po několika krocích vznikne jediná hromádka, není výsledný počet kamenů dělitelný třemi. Dokažte. (J. Zhouf)

B – I – 4

Označme V průsečík výšek a S střed kružnice opsané trojúhelníku ABC , který není rovnostranný. Pokud má úhel při vrcholu C velikost 60° , je osa úhlu ACB osou úsečky VS . Dokažte. (J. Zhouf)

B – I – 5

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\frac{x}{x+4} = \frac{5[x] - 7}{7[x] - 5},$$

kde $[x]$ označuje největší celé číslo, jež nepřevyšuje číslo x (tzv. *dolní celou část* reálného čísla x). (J. Šimša)

B – I – 6

Do kružnice k o poloměru r jsou vepsány dvě kružnice k_1, k_2 o poloměru $\frac{1}{2}r$, jež se vzájemně dotýkají. Kružnice l se vně dotýká kružnic k_1, k_2 a s kružnicí k má vnitřní dotyk. Kružnice m má vnější dotyk s kružnicemi k_2 a l a vnitřní dotyk s kružnicí k . Vypočtěte poloměry kružnic l a m . (L. Boček)

B – S – 1

Na stole leží 54 hromádky o 1, 2, 3, ..., 54 kamenech. V každém kroku vybereme libovolnou hromádku, řekněme o k kamenech, a odebereme ji celou ze stolu spolu s k kameny z každé té hromádky, ve které je aspoň k kamenů. Například po prvním kroku, při kterém vybereme hromádku o 52 kamenech, zůstanou na stole hromádky o 1, 2, 3, ..., 51, 1 a 2 kamenech. Předpokládejme, že po určitém počtu kroků zůstane na stole jediná hromádka. Zdůvodněte, kolik kamenů v ní může být. (J. Šimša)

B – S – 2

Nechť ABC je pravoúhlý trojúhelník se stranami $a < b < c$. Označme Q střed odvěsny BC a S střed přepony AB . Průsečík osy úsečky AB s odvěsnou CA označme R . Dokažte, že $|RQ| = |RS|$, právě když

$$a^2 : b^2 : c^2 = 1 : 2 : 3.$$

(J. Švrček)

B – S – 3

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\left\lfloor \frac{x}{1-x} \right\rfloor = \frac{\lfloor x \rfloor}{1-\lfloor x \rfloor},$$

kde $\lfloor a \rfloor$ označuje největší celé číslo, jež nepřevyšuje číslo a . (J. Šimša)

B – II – 1

Kružnice k_1 o poloměru 1 má vnější dotyk s kružnicí k_2 o poloměru 2. Každá z kružnic k_1 , k_2 má vnitřní dotyk s kružnicí k_3 o poloměru 3. Vypočítejte poloměr kružnice k , která má s kružnicemi k_1 , k_2 vnější dotyk a s kružnicí k_3 vnitřní dotyk. (P. Novotný)

B – II – 2

Na jedné internetové stránce probíhá hlasování o nejlepšího hokejistu světa posledního desetiletí. Počet hlasů pro jednotlivé hráče je uváděn po zaokrouhlení v celých procentech. Po Mirkově hlasování pro Jaromíra Jágra se jeho zisk 7 % nezměnil. Kolik nejméně lidí včetně Mirka hlasovalo? Předpokládáme, že každý účastník ankety hlasoval právě jednou, a to pro jediného hráče. (M. Panák)

B – II – 3

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník. Označme K a L paty výšek z vrcholů A a B , M střed strany AB a V průsečík výšek trojúhelníku ABC . Dokažte, že osa úhlu KML prochází středem úsečky VC . (J. Švrček)

B – II – 4

Najděte všechny trojice reálných čísel x , y , z , pro které platí

$$\lfloor x \rfloor - y = 2 \cdot \lfloor y \rfloor - z = 3 \cdot \lfloor z \rfloor - x = \frac{2004}{2005},$$

kde $\lfloor a \rfloor$ označuje největší celé číslo, jež nepřevyšuje číslo a . (J. Šimša)

Řešení úloh

B – I – 1

Nechť x_1, x_2 jsou kořeny první rovnice. Potom

$$x_1 + x_2 = -a, \quad x_1 x_2 = b,$$

a protože druhá rovnice má kořeny $1/x_1$ a $1/x_2$, platí

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -(2a + 1), \quad \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = 2b + 1.$$

Je tedy $\frac{1}{b} = 2b + 1$, což vede na kvadratickou rovnici $2b^2 + b - 1 = 0$, která má kořeny $b = -1$ a $b = \frac{1}{2}$.

Pro $b = -1$ máme

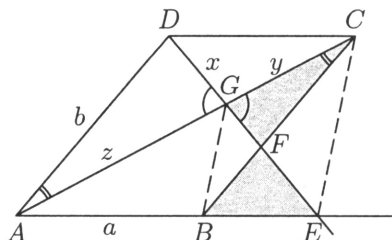
$$-(2a + 1) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-a}{-1},$$

což je pro neznámou a lineární rovnice s řešením $a = -\frac{1}{3}$.

Obdobně pro $b = \frac{1}{2}$ dostáváme $-(2a + 1) = -2a$, tato rovnice však nemá řešení. Zkouškou (je třeba ověřit, že kořeny jsou reálné) se přesvědčíme, že dvojice $a = -\frac{1}{3}$, $b = -1$ je (jediným) řešením úlohy.

B – I – 2

Z obr. 8 je vidět, že trojúhelníky AGD a CGF jsou podobné podle věty



Obr. 8

uu. Příslušný poměr podobnosti k je roven hledanému poměru $|AG| : |GC|$. Označíme-li proto $b = |AD|$, $x = |DG|$ a $y = |CG|$, platí $|GF| = x/k$ a $|CF| = b/k$, odkud

$$|FB| = |BC| - |FB| = b - \frac{b}{k} = (k - 1) \frac{b}{k}$$

a

$$|DF| = |DG| + |GF| = x + \frac{x}{k} = (k+1)\frac{x}{k}.$$

Z podobnosti trojúhelníků $BEF \sim CDF$ dostáváme

$$|EF| = \frac{|DF| \cdot |BF|}{|CF|} = \frac{k^2 - 1}{k} \cdot x.$$

Z rovnosti obsahů trojúhelníků BEF a CGF vyplývá

$$|FB| \cdot |FE| = |FC| \cdot |FG|,$$

odkud po dosazení vyjde

$$\frac{k-1}{k} \cdot b \cdot \frac{k^2-1}{k} \cdot x = \frac{b}{k} \cdot \frac{x}{k}.$$

Je tedy $k^3 - k^2 - k + 1 = 1$, a protože $k \neq 0$, dostáváme pro hledané k kvadratickou rovnici $k^2 - k - 1 = 0$. Úloze vyhovuje její kladný kořen $k = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Jiné řešení. Označme $|AG| = z$, $|GC| = y$. Protože trojúhelníky BEF a CGF mají stejný obsah, mají stejný obsah i trojúhelníky GBE a GBC . Proto platí $EC \parallel BG$. Z podobnosti trojúhelníků $ABG \sim AEC$, $DFC \sim EFB$, $CFE \sim BFG$ a $AEC \sim ABG$ postupně plyne

$$\frac{z}{y} = \frac{|AG|}{|GC|} = \frac{|AB|}{|BE|} = \frac{|DC|}{|BE|} = \frac{|FC|}{|BF|} = \frac{|CE|}{|BG|} = \frac{|AC|}{|AG|} = \frac{z+y}{z}.$$

Z výsledné rovnosti $z/y = 1 + y/z$ dostáváme

$$\left(\frac{z}{y}\right)^2 - \frac{z}{y} - 1 = 0,$$

a protože $z/y > 0$, je

$$\frac{z}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

B – I – 3

V každém kroku se počet hromádek zmenší o dvě. Aby vznikla jedna hromádka, musí být na začátku lichý počet hromádek, tedy $k = 2m + 1$.

Na zmenšení počtu hromádek o $2m$ je třeba m kroků. Při každém přibude jeden kamen, a proto je výsledný počet kamenů

$$\begin{aligned} p &= 1 + 2 + 3 + \dots + (2m + 1) + m = \frac{(2m + 1)(2m + 2)}{2} + m = \\ &= 2m^2 + 4m + 1. \end{aligned}$$

Číslo m má jeden ze tvarů $m = 3n$, $m = 3n + 1$, $m = 3n + 2$. V prvním případě je $p = 18n^2 + 12n + 1 = 3(6n^2 + 2n) + 1$, ve druhém $18n^2 + 24n + 7 = 3(6n^2 + 8n + 2) + 1$ a ve třetím $p = 18n^2 + 36n + 17 = 3(6n^2 + 12n + 5) + 2$. Žádné z těchto čísel není dělitelné třemi.

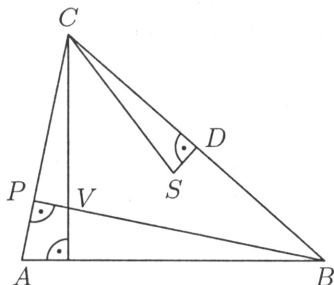
Poznámka. Stačí ověřit, že p není dělitelné třemi pro $m = 0$, $m = 1$ a $m = 2$ [návodná úloha 1].

B – I – 4

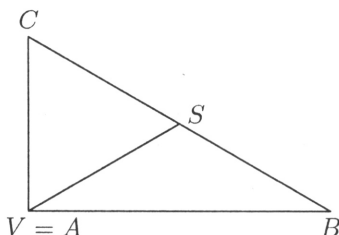
Nechť například $|AC| < |BC|$. Předpokládejme nejprve, že trojúhelník ABC je ostroúhlý. Označme D střed strany BC a P patu výšky z vrcholu B na stranu AC (obr. 9). Platí $|CP| = |BC| \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}|BC| = |CD|$, $|\sphericalangle CPV| = |\sphericalangle CDS| = 90^\circ$, $|\sphericalangle CVP| = |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CSD|$ (obvodový úhel a polovina středového). Ze shodnosti trojúhelníků CPV a CDS vyplývá $|CV| = |CS|$, $|\sphericalangle PCV| = |\sphericalangle DCS|$. Trojúhelník VSC je tedy rovnoramenný, a osa úhlu ACB je tak i osou úhlu VCS a současně osou strany VS .

Je-li trojúhelník ABC pravoúhlý (obr. 10), je trojúhelník VSC rovnonožný a osa úhlu VCS je i osou strany VS .

Je-li trojúhelník ABC tupoúhlý, dokážeme tvrzení úlohy stejně jako v případě ostroúhlého trojúhelníku s tím rozdílem, že bude $|\sphericalangle CVP| = |\sphericalangle CSD| = 180^\circ - |\sphericalangle CAB|$.



Obr. 9



Obr. 10

B – I – 5

Každé reálné číslo x můžeme zapsat ve tvaru $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, kde $\lfloor x \rfloor$ je *celá část* a $\{x\}$ tzv. *zlomková část* čísla x . Zřejmě platí $0 \leq \{x\} < 1$, přičemž $\{x\} = 0$, právě když x je celé. Odtud vyplývá, že $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, přičemž rovnost $\lfloor x \rfloor = x$ platí, právě když x je celé; tyto nerovnosti často používáme při řešení úloh s celou částí. Označíme-li $\lfloor x \rfloor = k$, dostaneme z dané rovnice po odstranění zlomku a roznásobení

$$7kx - 5x = 5kx + 20k - 7x - 28$$

a odtud

$$x = \frac{10k - 14}{k + 1}. \quad (1)$$

Protože $k = \lfloor x \rfloor$, musí platit

$$k \leq \frac{10k - 14}{k + 1} < k + 1.$$

Každou z nerovnic vyřešíme samostatně:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{k(k+1) - (10k - 14)}{k+1} = \frac{(k-7)(k-2)}{k+1}, & k \in (-\infty, -1) \cup \langle 2, 7 \rangle; \\ 0 &< \frac{(k+1)^2 - (10k - 14)}{k+1} = \frac{(k-3)(k-5)}{k+1}, & k \in (-1, 3) \cup (5, \infty). \end{aligned}$$

Protože k je celé, máme $k \in \{2, 6, 7\}$. Rovnice má tedy tři řešení, která dostaneme dosazením do vztahu (1): $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{46}{7}$, $x_3 = 7$.

B – I – 6

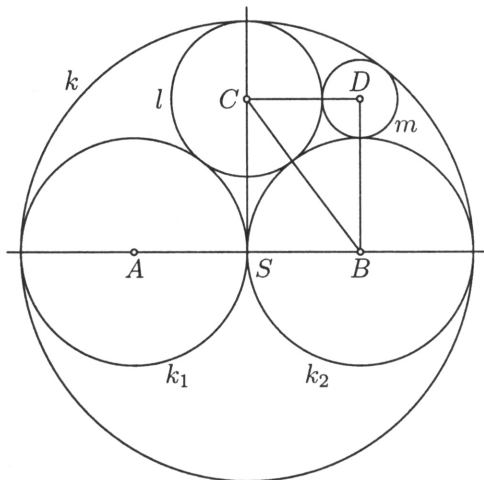
Označme S , A , B , C , D středy kružnic k , k_1 , k_2 , l , m a x , y poloměry kružnic l a m . Bod C leží na přímce, která prochází bodem S a je kolmá na AB (obr. 11). Z pravoúhlého trojúhelníku BCS máme podle Pythagorovy věty

$$\left(\frac{r}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + (r - x)^2$$

a odtud $x = \frac{1}{3}r$. Označme P , Q paty kolmic z bodu D na přímky AB a SC a $u = |SP|$, $v = |SQ|$. Jestliže $u \neq \frac{1}{2}r$, je BPD pravoúhlý trojúhelník a podle Pythagorovy věty

$$\left(\frac{r}{2} + y\right)^2 = v^2 + \left(u - \frac{r}{2}\right)^2. \quad (1)$$

Tato rovnice platí i v případě $u = \frac{1}{2}r$.



Obr. 11

Podobně z pravoúhlého trojúhelníku QCD (jestliže $Q \neq C$) anebo porovnáním protilehlých stran obdélníku (jestliže $Q = C$) dostaneme

$$\left(\frac{r}{3} + y\right)^2 = u^2 + \left(v - \frac{2r}{3}\right)^2. \quad (2)$$

Navíc z pravoúhlého trojúhelníku SPD máme

$$(r - y)^2 = u^2 + v^2. \quad (3)$$

Odečtením rovnic (3) a (2) dostaneme $\frac{4}{3}r^2 - \frac{8}{3}ry = \frac{4}{3}vr$, tedy $v = r - 2y$. Podobně odečtením rovnic (3) a (1) vyjde $r^2 - 3ry = ur$ a odtud $u = r - 3y$. Dosazením do (3) a úpravou postupně dostaneme

$$\begin{aligned} (r - y)^2 &= (r - 3y)^2 + (r - 2y)^2, \\ r^2 - 8ry + 12y^2 &= 0, \\ (r - 6y)(r - 2y) &= 0. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že $y = \frac{1}{2}r$ nebo $y = \frac{1}{6}r$. Poloměr $\frac{1}{2}r$ má kružnice k_1 , poloměr $\frac{1}{6}r$ kružnice m znázorněná na obr. 11. Každá z těchto dvou kružnic se dotýká kružnic k , k_2 a l požadovaným způsobem.

B – S – 1

Pokud v každém kroku zvolíme hromádku s největším počtem kamenů, budeme postupně odebírat hromádky s 54, 53, 52, ... kameny a po 53. kroku zůstane na stole jediná hromádka s jedním kamenem.

Dokážeme, že při libovolném postupu zůstane v poslední hromádce jediný kámen. Ukážeme totiž, že po každém kroku, po němž na stole zbývá aspoň jedna hromádka, tvoří počty kamenů v jednotlivých hromádkách vždy celou množinu $\{1, 2, \dots, n\}$ pro vhodné přirozené n (nevyključujeme ovšem, že k některým číslům existuje více hromádek s týmž počtem kamenů). To tedy znamená, že je vždy na stole aspoň jedna hromádka s právě jedním kamenem.

Na začátku tvoří počty kamenů v hromádkách množinu $\{1, 2, \dots, 54\}$. Předpokládejme, že po určitém počtu kroků tvoří počty kamenů v jednotlivých hromádkách množinu $\{1, 2, \dots, n\}$ ($n \geq 2$). Zvolíme-li nyní hromádku s n kameny nebo hromádku s jedním kamenem, budou v dalším kroku počty kamenů v hromádkách tvořit množinu $\{1, 2, \dots, n-1\}$. Pokud zvolíme hromádku s m kameny, kde $m \notin \{1, n\}$, budou počty kamenů v dalším kroku tvořit množinu $\{1, 2, \dots, m-1\} \cup \{1, 2, \dots, n-m\} = \{1, 2, \dots, p\}$, kde $p = \max\{m-1, n-m\}$. Tím je tvrzení o počtu kamenů v jednotlivých hromádkách dokázáno.

Odpověď. Poslední hromádka bude bez ohledu na zvolený postup vždy obsahovat jediný kámen.

B – S – 2

Podle Pythagorovy věty je v pravoúhlém trojúhelníku rovnost $a^2 : b^2 = 1 : 2$ splněna, právě když $b^2 : c^2 = 2 : 3$. Stačí tedy dokázat požadovanou ekvivalenci jen pro jednu z rovností $a^2 : b^2 = 1 : 2$, $b^2 : c^2 = 2 : 3$.

Trojúhelníky ASR a ACB (obr. 12) mají společný úhel při vrcholu A a shodují se v pravých úhlech ASR a ACB , takže jsou podobné (uu). Odtud vyplývá rovnost

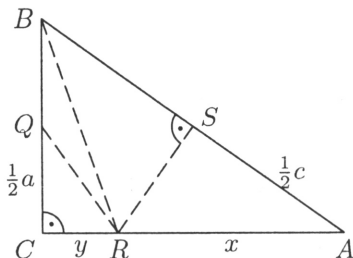
$$\frac{|AR|}{|AS|} = \frac{|AB|}{|AC|},$$

neboli

$$x = |AR| = \frac{|AB| \cdot |AS|}{|AC|} = \frac{c^2}{2b}. \quad (1)$$

Podle Pythagorovy věty je $|RS|^2 = |AR|^2 - |AS|^2 = x^2 - \frac{1}{4}c^2$ a $|RQ|^2 = |QC|^2 + |CR|^2 = \frac{1}{4}a^2 + (b-x)^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2 - 2bx + x^2$, takže $|RQ| = |RS|$,

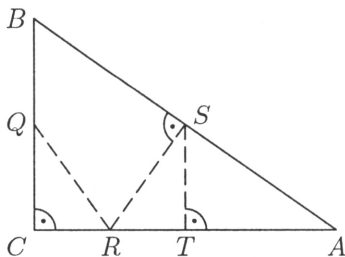
právě když $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2 + b^2 = 2bx$, což po dosazení z (1) a $a^2 = c^2 - b^2$ po úpravě dává $\frac{3}{4}b^2 = \frac{1}{2}c^2$, neboli $b^2 : c^2 = 2 : 3$. Tím je požadovaná ekvivalence dokázána.



Obr. 12

Jiné řešení. Podle Pythagorovy věty je (obr. 12) $|BR|^2 = |BC|^2 + |CR|^2 = a^2 + y^2$, $|RS|^2 = |BR|^2 - |BS|^2 = a^2 + y^2 - \frac{1}{4}c^2$, $|RQ|^2 = |QC|^2 + |CR|^2 = \frac{1}{4}a^2 + y^2$. Rovnost $|RQ| = |RS|$ tedy platí, právě když $a^2 + y^2 - \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}a^2 + y^2$, neboli $3a^2 = c^2$. V pravoúhlém trojúhelníku je tato rovnost ekvivalentní s rovností $3b^2 = 2c^2$, neboli $a^2 : b^2 : c^2 = 1 : 2 : 3$.

Jiné řešení. Označme T střed strany AC (obr. 13). Protože $|QC| = |ST|$ a $\sphericalangle QCR = \sphericalangle STR = 90^\circ$, jsou trojúhelníky QCR a STR shodné, právě když $|RQ| = |RS|$ a zároveň právě když $|RC| = |RT|$.



Obr. 13

Rovnost $|RQ| = |RS|$ je tedy ekvivalentní s tím, že bod R je střed úsečky CT , tj. $x = |RA| = \frac{3}{4}b$. Z podobnosti trojúhelníků $ABC \sim ARS$ máme (stejně jako v prvním řešení)

$$x = \frac{c^2}{2b},$$

takže $|RQ| = |RS|$, právě když

$$\frac{3b}{4} = \frac{c^2}{2b}, \quad \text{neboli} \quad 3b^2 = 2c^2.$$

V pravoúhlém trojúhelníku je to dle Pythagorovy věty ekvivalentní s rovností $3a^2 = c^2$, neboli $a^2 : b^2 : c^2 = 1 : 2 : 3$.

B – S – 3

Výraz $\left\lfloor \frac{x}{1-x} \right\rfloor$ je celé číslo, proto i $\frac{\lfloor x \rfloor}{1-\lfloor x \rfloor} = \frac{1}{1-\lfloor x \rfloor} - 1$ je celé, což znamená, že $1 - \lfloor x \rfloor \in \{-1, 1\}$, neboli $\lfloor x \rfloor \in \{0, 2\}$.

Nechť $\lfloor x \rfloor = 0$. Potom $0 \leq x < 1$ a daná rovnice má tvar

$$\left\lfloor \frac{x}{1-x} \right\rfloor = 0,$$

takže je splněna, právě když $0 \leq \frac{x}{1-x} < 1$, což je s ohledem na předpoklad $1 - x > 0$ ekvivalentní s nerovnostmi $0 \leq x < \frac{1}{2}$. V tomto případě dané rovnici vyhovují všechna x z intervalu $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$.

Nechť $\lfloor x \rfloor = 2$. Potom $2 \leq x < 3$ a daná rovnice má tvar

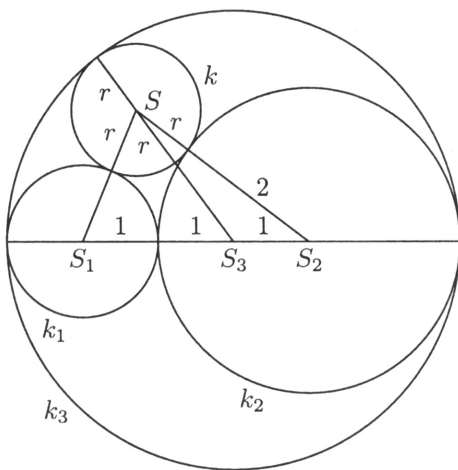
$$\left\lfloor \frac{x}{1-x} \right\rfloor = -2,$$

takže je splněna, právě když $-2 \leq \frac{x}{1-x} < -1$, což je s ohledem na předpoklad $2 \leq x$ (takže $1 - x < 0$) ekvivalentní s nerovnostmi $-2 + 2x \geq x > -1 + x$, neboli $x \geq 2$. V tomto případě dané rovnici vyhovují všechna x z intervalu $\langle 2, 3 \rangle$.

Závěr. Všechna řešení dané rovnice tvoří množinu $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle \cup \langle 2, 3 \rangle$.

B – II – 1

Protože se součet průměrů kružnic k_1 a k_2 rovná průměru kružnice k_3 , leží jejich středy S_1 , S_2 a S_3 v přímce. Existují dvě shodné kružnice, které splňují podmínky úlohy, a jsou souměrně sdružené podle přímky S_1S_2 . Označme k jednu z nich (obr. 14), S její střed a r odpovídající poloměr.

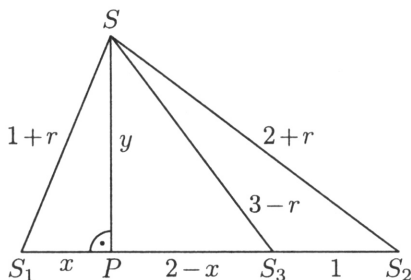


Obr. 14

Pro velikosti stran trojúhelníku S_1S_2S platí: $|S_1S| = 1 + r$, $|S_2S| = 2 + r$, $|S_1S_2| = 3$ a $|S_3S| = 3 - r$. Pro bod S_3 zároveň platí, že $|S_3S_1| = 2$ a $|S_3S_2| = 1$. Označíme-li P pravoúhlý průmět bodu S na přímku S_1S_2 (obr. 15) a $x = |S_1P|$, $y = |SP|$, můžeme podle Pythagorovy věty psát

$$\begin{aligned}(1 + r)^2 &= x^2 + y^2, \\ (2 + r)^2 &= (3 - x)^2 + y^2, \\ (3 - r)^2 &= (2 - x)^2 + y^2.\end{aligned}$$

Odečtením první rovnice od druhé dostaneme $3 + 2r = 9 - 6x$ neboli $2r = 6 - 6x$, odečtením první od třetí $8 - 8r = 4 - 4x$ neboli $2r = 1 + x$. Porovnáním obou důsledků vyjde rovnice $6 - 6x = 1 + x$, odkud $x = \frac{5}{7}$, $r = 3 - 3x = \frac{6}{7}$.



Obr. 15

Poznámka. Se znalostí kosinové věty se obejdeme bez pomocného bodu P : stačí napsat kosinové věty pro trojúhelníky S_1S_3S a S_1S_2S . Dostaneme tak dvě rovnice

$$\begin{aligned}(3-r)^2 &= 4 + (1+r)^2 - 2 \cdot 2(1+r) \cos \omega, \\ (2+r)^2 &= 9 + (1+r)^2 - 2 \cdot 3(1+r) \cos \omega,\end{aligned}$$

kde $\omega = |\angle S_2S_1S|$. Po úpravě a vyjádření $(1+r) \cos \omega$ z obou rovnic dostaneme pro r rovnici $2r - 1 = 1 - \frac{1}{3}r$, z níž plyne $r = \frac{6}{7}$.

B – II – 2

Označme p počet účastníků ankety včetně Mirka a j počet hlasů pro Jágra. Na celých 7 % se zaokrouhlí čísla z intervalu $(6,5\%; 7,5\%)$ neboli $(0,065; 0,075)$. Před Mirkovým hlasováním měl Jágr $j-1$ hlasů a po něm j hlasů. Musí proto platit

$$0,065 \leq \frac{j-1}{p-1} < 0,075, \quad 0,065 \leq \frac{j}{p} < 0,075.$$

Protože z nerovnosti $0 < j < p$ plyne $\frac{j-1}{p-1} < \frac{j}{p}$, stačí řešit dvě nerovnice

$$0,065 \leq \frac{j-1}{p-1} \quad \text{a} \quad \frac{j}{p} < 0,075. \quad (1)$$

První z nich je ekvivalentní s nerovnicí $0,065p - 0,065 + 1 \leq j$ a druhá s nerovnicí $j < 0,075p$, proto musí platit $0,065p + 0,935 < 0,075p$, odkud plyne $p > 93,5$. Protože p je celé číslo, dostáváme $p \geq 94$. Musíme ovšem ještě zjistit, pro které nejmenší $p \geq 94$ existuje celé číslo j , jež vyhovuje nerovnicím (1). Z podmínky $p \geq 94$ dostaneme $j \geq 0,065 \cdot 94 + 0,935 = 7,045$, a tudíž $j \geq 8$. Z nerovnice $j < 0,075p$ pak máme $p > \frac{320}{3}$, neboli $p \geq 107$. Protože $0,065 \cdot 107 + 0,935 < 8$, je dvojice $j = 8, p = 107$ řešením soustavy (1), takže $p = 107$ je nejmenší možný počet lidí, kteří v anketě hlasovali.

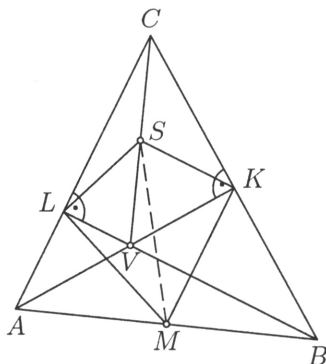
Jiné řešení. Nerovnice $0,065p + 0,935 \leq j < 0,075p$, ekvivalentní nerovnicím (1), upravíme na tvar

$$\frac{j}{0,075} < p \leq \frac{j - 0,935}{0,065},$$

což dává podmínku $0,065j < 0,075j - 0,075 \cdot 0,935$, neboli $j > 7,5 \cdot 0,935 > 7$, takže $j \geq 8$. Z nerovnosti $p > j/0,075$ tak dostáváme nerovnost $p \geq 107$. Nyní stačí ověřit, že $p = 107$ vyhovuje pro $j = 8$ i druhé podmínce, tj. že platí $107 \leq \frac{8 - 0,935}{0,065}$.

B – II – 3

Označme S střed úsečky CV (obr. 16). Body K a L leží na Thaletově kružnici s průměrem AB , takže $|ML| = |MK|$. Body K a L zároveň leží i na Thaletově kružnici s průměrem CV , takže $|SL| = |SK|$. Trojúhelníky SLM a SKM jsou tudíž shodné (sss), takže $|\sphericalangle SML| = |\sphericalangle SMK|$, neboli osa úhlu LMK prochází středem S úsečky VC .



Obr. 16

B – II – 4

Danou soustavu rovnic přepíšeme ekvivalentně do tvaru

$$\begin{aligned} y &= [x] - \alpha, \\ z &= 2[y] - \alpha, \\ x &= 3[z] - \alpha, \end{aligned} \tag{1}$$

kde jsme jako α označili číslo $\frac{2004}{2005}$ z intervalu $(0, 1)$. Ze soustavy (1) plynou postupně rovnosti

$$\begin{aligned} [y] &= [x] - 1, \\ [z] &= 2[y] - 1 = 2[x] - 3, \\ [x] &= 3[z] - 1 = 6[x] - 10. \end{aligned}$$

Z poslední rovnice dostáváme $\lfloor x \rfloor = 2$ a ze zbylých dvou rovnic dále dopočítáme $\lfloor y \rfloor = \lfloor z \rfloor = 1$. Dosazením do (1) tak máme $x = 3 - \frac{2004}{2005} = 2 + \frac{1}{2005}$, $y = 2 - \frac{2004}{2005} = 1 + \frac{1}{2005}$ a $z = 2 - \frac{2004}{2005} = 1 + \frac{1}{2005}$. Vyšla necelá čísla x , y a z , která mají právě takové celé části, jaké jsme dosazovali do pravých stran rovností (1). Tak jsme zároveň provedli zkoušku (kterou lze ovšem provést i přímým dosazením do původní soustavy). Uvedená trojice je (jediným) řešením dané úlohy.

Kategorie A

Texty úloh

A – I – 1

Neprázdnou množinu přirozených čísel nazveme *malou*, když má méně prvků, než je její nejmenší prvek. Určete počet všech malých množin M , které jsou podmnožinami množiny $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ a mají tuto vlastnost: patří-li do M dvě různá čísla x a y , patří do M rovněž číslo $|x - y|$.

(J. Földes)

A – I – 2

Nechť M je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku CD kružnice opsané čtverci $ABCD$. Označme P, R průsečíky přímky AM po řadě s úsečkami BD, CD a podobně Q, S průsečíky přímky BM s úsečkami AC, DC . Dokažte, že přímky PS a QR jsou navzájem kolmé.

(J. Švrček)

A – I – 3

Nechť k je libovolné přirozené číslo. Uvažujme dvojice (a, b) celých čísel, pro něž mají kvadratické rovnice

$$x^2 - 2ax + b = 0, \quad y^2 + 2ay + b = 0$$

reálné kořeny (ne nutně různé), které lze označit $x_{1,2}$, resp. $y_{1,2}$ v takovém pořadí, že platí rovnost $x_1 y_1 - x_2 y_2 = 4k$.

- Pro dané k určete největší možnou hodnotu b ze všech takových dvojic (a, b) .
- Pro $k = 2004$ určete počet všech takových dvojic (a, b) .
- Pro dané k vypočítejte součet čísel b ze všech takových dvojic (a, b) , přičemž každé číslo b se přičítá tolikrát, v kolika dvojicích (a, b) vystupuje.

(E. Kováč)

A – I – 4

Dané aritmetické posloupnosti $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ a $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ mají stejný první člen a následující vlastnost: existuje index k ($k > 1$), pro který platí rovnosti

$$x_k^2 - y_k^2 = 53, \quad x_{k-1}^2 - y_{k-1}^2 = 78, \quad x_{k+1}^2 - y_{k+1}^2 = 27.$$

Najděte všechny takové indexy k .

(V. Bálint)

A – I – 5

V lichoběžníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$) platí $|AB| = 2|CD|$. Označme E střed ramene BC . Dokažte, že rovnost $|AB| = |BC|$ platí, právě když čtyřúhelník $AECD$ je tečnový.

(R. Horenský)

A – I – 6

Najděte všechny funkce $f: \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$, které vyhovují současně následujícím třem podmínkám:

- a) Pro libovolná nezáporná reálná čísla x, y taková, že $x + y > 0$, platí rovnost

$$f(xf(y))f(y) = f\left(\frac{xy}{x+y}\right);$$

- b) $f(1) = 0$;

- c) $f(x) > 0$ pro libovolné $x > 1$.

(P. Calábek)

A – S – 1

Určete počet všech nekonečných aritmetických posloupností celých čísel, které mají mezi svými prvními deseti členy obě čísla 1 a 2005.

(V. Bálint, J. Šimša)

A – S – 2

V rovnoběžníku $ABCD$ platí $|AB| > |BC|$. Označme K, L, M a N po řadě body dotyku kružnic vepsaných trojúhelníkům ACD, BCD, ABC a ABD s příslušnou úhlopříčkou AC , resp. BD . Dokažte, že $KLMN$ je obdélník.

(R. Horenský)

A – S – 3

Zjistěte, pro která přirozená čísla k má soustava nerovnic

$$k(k-2) \leq \left(k + \frac{1}{k}\right)x \leq k^2(k+3)$$

s neznámou x a parametrem k právě $(k+1)^2$ řešení v oboru celých čísel.
(J. Šimša)

A – II – 1

Je-li součin kladných reálných čísel a, b, c roven 1, platí nerovnost

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost.
(J. Šimša)

A – II – 2

V oboru celých čísel řešte soustavu rovnic

$$x(y+z+1) = y^2 + z^2 - 5,$$

$$y(z+x+1) = z^2 + x^2 - 5,$$

$$z(x+y+1) = x^2 + y^2 - 5.$$

(J. Šimša)

A – II – 3

V rovině je dán rovnoramenný trojúhelník KLM se základnou KL . Uvažujme libovolné dvě kružnice k a l , které mají vnější dotyk a které se dotýkají přímkou KM a LM po řadě v bodech K a L . Určete množinu dotykových bodů T všech takových kružnic k a l .
(J. Švrček)

A – II – 4

Najděte všechny dvojice přirozených čísel, jejichž součet má poslední číslici 3, rozdíl je prvočíslo a součin je druhou mocninou přirozeného čísla.
(J. Földes)

A – III – 1

Uvažujme libovolné aritmetické posloupnosti reálných čísel $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ a $(y_i)_{i=1}^{\infty}$, které mají stejný první člen a splňují pro některé $k > 1$ rovnosti

$$x_{k-1}y_{k-1} = 42, \quad x_k y_k = 30 \quad \text{a} \quad x_{k+1}y_{k+1} = 16.$$

Najděte všechny takové posloupnosti, pro které je index k největší možný.
(*J. Šimša*)

A – III – 2

Zjistěte, pro která m existuje právě 2^{15} podmnožin X množiny $\{1, 2, 3, \dots, 47\}$ s vlastností: číslo m je nejmenší prvek množiny X a pro každé $x \in X$ platí buď $x + m \in X$, nebo $x + m > 47$.
(*R. Kučera*)

A – III – 3

V lichoběžníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$) označme E střed ramene BC . Jsou-li oba čtyřúhelníky $ABED$ a $AECD$ tečnové, splňují délky stran lichoběžníku $ABCD$ označené obvyklým způsobem rovnosti

$$a + c = \frac{b}{3} + d \quad \text{a} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{3}{b}.$$

Dokažte.
(*R. Horenský*)

A – III – 4

V rovině je dán ostroúhlý trojúhelník AKL . Uvažujme libovolný pravoúhelník $ABCD$, který je trojúhelníku AKL opsán tak, že bod K leží na straně BC a bod L leží na straně CD . Určete množinu průsečíků S úhlopříček AC , BD všech takových pravoúhelníků $ABCD$. (*J. Šimša*)

A – III – 5

Dokažte, že pro libovolná reálná čísla p, q, r, s za podmínek $q \neq -1$ a $s \neq -1$ platí: Kvadratické rovnice

$$x^2 + px + q = 0, \quad x^2 + rx + s = 0$$

mají v oboru reálných čísel společný kořen a jejich další kořeny jsou navzájem převrácená čísla, právě když koeficienty p, q, r, s splňují rovnosti

$$pr = (q + 1)(s + 1) \quad \text{a} \quad p(q + 1)s = r(s + 1)q.$$

(Dvojnásobný kořen kvadratické rovnice počítáme dvakrát.)

(*J. Šimša*)

A – III – 6

Rozhodněte, zda pro každé pořadí čísel $1, 2, 3, \dots, 15$ lze tato čísla zapsat nejvýše čtyřmi různými barvami tak, aby všechna čísla stejné barvy tvořila v daném pořadí monotonní (tj. rostoucí nebo klesající) posloupnost. (Jednočlenná posloupnost je monotonní.)

(*J. Šimša*)

Řešení úloh

A – I – 1

Zjistíme nejprve, jak vypadají všechny konečné neprázdné množiny M přirozených čísel s (klíčovou) vlastností ze závěru zadání. Teprve poté posoudíme, které z těchto množin jsou malé, a určíme počet těch z nich, které jsou sestaveny z čísel od 1 do 100.

Nechť M je tedy libovolná konečná neprázdná množina přirozených čísel s vlastností: je-li $x, y \in M$ a $x \neq y$, pak i $|x - y| \in M$. Předpokládejme, že M má právě k prvků, a uspořádejme je podle velikosti od nejmenšího čísla po největší:

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_k.$$

V případě $k = 1$ splňuje množina $M = \{x_1\}$ danou vlastnost triviálně, předpokládejme proto dále, že $k > 1$. Pak číslo $x_2 - x_1 = |x_2 - x_1|$ podle posuzované vlastnosti patří do M a je menší než x_2 , takže se musí rovnat číslu x_1 . Z rovnosti $x_2 - x_1 = x_1$ dostáváme $x_2 = 2x_1$. Analogicky platí: čísla $x_3 - x_2$, $x_3 - x_1$ jsou dvě čísla z M , jež jsou menší než x_3 , přitom $x_3 - x_2 < x_3 - x_1$, takže musí platit $x_3 - x_2 = x_1$ a $x_3 - x_1 = x_2$, což spolu s dokázanou rovností $x_2 = 2x_1$ vede k závěru, že $x_3 = x_1 + x_2 = 3x_1$. Ve stejných úvahách můžeme pokračovat a získat rovnosti $x_4 = 4x_1, \dots, x_k = kx_1$. Formálně lze tyto rovnosti dokázat indukcí: platí-li rovnost $x_n = nx_1$ pro některé n , $1 \leq n < k$, pak úvahou o n číslech

$$x_{n+1} - x_n < x_{n+1} - x_{n-1} < \dots < x_{n+1} - x_1,$$

která podle posuzované vlastnosti patří do M a jsou menší než x_{n+1} , docházíme k závěru, že $x_{n+1} - x_n = x_1$, odkud $x_{n+1} = x_n + x_1 = nx_1 + x_1 = (n + 1)x_1$. Důkaz indukcí je hotov. Označíme-li $x_1 = m$, plyne z našich úvah, že zkoumaná k -prvková množina M má nutně tvar

$$M = \{m, 2m, 3m, \dots, km\}. \quad (1)$$

Na druhou stranu je zřejmé, že taková množina M má požadovanou vlastnost, ať jsou přirozená čísla m a k vybrána jakkoliv.

Množina M zapsaná v (1) má k prvků, přičemž nejmenší z nich je číslo m . Podle zadání úlohy je taková množina malá, právě když platí nerovnost $k < m$. Zároveň je jasné, že taková množina M je podmnožinou množiny $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$, právě když platí nerovnost $km \leq 100$.

Naší úlohou je tedy najít počet všech dvojic přirozených čísel k, m , pro něž platí $k < m$ a $km \leq 100$. Jak je při řešení obdobných kombinatorických úloh obvyklé, hledaný počet určíme, když vyhovující dvojice (k, m) vhodně rozdělíme do menších skupin a určíme počty dvojic v jednotlivých skupinách. V naší úloze se nabízí jednak rozdělení do skupin dvojic (k, m) se stejnou hodnotou k , jednak rozdělení do skupin dvojic (k, m) se stejnou hodnotou m . (To odpovídá tomu, že původní objekty (množiny M vyhovující úloze) rozdělíme do skupin buď podle počtu jejich prvků, nebo podle velikosti jejich nejmenších prvků.)

Uvedme zde oba výpočty. K tomu označme $p(k)$, $q(m)$ počty vyhovujících dvojic (k, m) s daným k , resp. daným m . Uvědomme si, že z nerovností $k < m$ a $km \leq 100$ plynou odhady $1 \leq k \leq 9$ a $2 \leq m \leq 100$, které signalizují, že výpočet pomocí hodnot $p(k)$ bude méně pracný než výpočet pomocí hodnot $q(m)$.

Při pevném k jsou vyhovující čísla m určena nerovnostmi $k + 1 \leq m \leq 100/k$. Dosazením jednotlivých hodnot k zjistíme, že $p(1) = 99$, $p(2) = 48$, $p(3) = 30$, $p(4) = 21$, $p(5) = 15$, $p(6) = 10$, $p(7) = 7$, $p(8) = 4$ a $p(9) = 2$. Hledaný celkový počet je tedy roven

$$99 + 48 + 30 + 21 + 15 + 10 + 7 + 4 + 2 = 236.$$

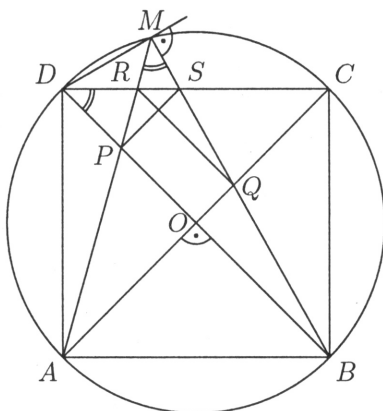
Naopak při pevném m je číslo k omezeno takto: $1 \leq k \leq \min\{m-1, 100/m\}$. Odtud vypočteme, že $q(2) = 1$, $q(3) = 2$, $q(4) = 3, \dots, q(9) = 8$, $q(10) = q(11) = 9$, $q(12) = 8$, $q(13) = q(14) = 7$, $q(15) = q(16) = 6$, $q(17) = \dots = q(20) = 5$, $q(21) = \dots = q(25) = 4$, $q(26) = \dots = q(33) = 3$, $q(34) = \dots = q(50) = 2$, $q(51) = \dots = q(100) = 1$. Hledaný počet je tedy roven

$$1 + 2 + \dots + 8 + 2 \cdot 9 + 8 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 17 \cdot 2 + 50 = 236.$$

Při výpočtu jednotlivých hodnot $q(m)$ je výhodné si uvědomit, že pro každé přirozené $m \leq 10$ platí nerovnost $m-1 < 100/m$, zatímco pro každé $m \geq 11$ platí opačná nerovnost $m-1 > 100/m$.

A – I – 2

Označme O střed daného čtverce $ABDC$ (obr. 17). Protože bod M leží na zmíněném oblouku, má úhel AMB velikost rovnou polovině velikosti středového (pravého) úhlu AOB , tedy 45° . Protože stejnou velikost má



Obr. 17

ve čtverci $ABCD$ úhel BDC , je pod úhlem 45° z bodů D, M vidět tutéž úsečku PS . Protože navíc oba body D, M leží ve stejné polorovině s hranicí PS , je $PSMD$ tětiový čtyřúhelník. Jeho vnitřní úhel DMS je pravý (bod M totiž leží na Thaletově kružnici nad průměrem BD), takže je pravý i vnitřní úhel DPS . Tak jsme dokázali, že $PS \perp BD$. Zcela obdobně se ukáže, že $QR \perp AC$. Z posledních dvou vztahů již plyne, že $PS \perp QR$ (neboť $AC \perp BD$).

A – I – 3

Úpravou rovnic „doplněním na čtverce“

$$(x - a)^2 = a^2 - b, \quad (y + a)^2 = a^2 - b \quad (1)$$

(nebo přímým užitím známého vzorce s diskriminantem) zjišťujeme, že dané rovnice mají v oboru $\mathbb{R}$ kořeny, právě když celá čísla a, b splňují podmínku $a^2 - b \geq 0$; tyto kořeny pak tvoří dvojice

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2\} &= \{a + \sqrt{a^2 - b}, a - \sqrt{a^2 - b}\}, \\ \{y_1, y_2\} &= \{-a + \sqrt{a^2 - b}, -a - \sqrt{a^2 - b}\}. \end{aligned}$$

Nyní stojíme před otázkou, jak efektivně (tj. bez stereotypního opakování obdobných výpočtů) určit všechny čtyři hodnoty výrazu $V = x_1y_1 - x_2y_2$, který lze zapsat poněkud neurčitě jako

$$(a \pm \sqrt{a^2 - b})(-a \pm \sqrt{a^2 - b}) - (a \pm \sqrt{a^2 - b})(-a \pm \sqrt{a^2 - b}),$$

kde při prvním a třetím výskytu znaku $\pm$, stejně jako při druhém a čtvrtém, vybíráme navzájem opačná znaménka. Naznačíme tři možné přístupy. (Celá diskuse bude sice delší, než kdybychom vypsalí výpočet všech čtyř různých výrazů, ale o to nám v komentáři nejde.)

(i) Zvolíme-li pevně označení x_1, x_2, y_1, y_2 , stačí vypočítat dvě hodnoty $V_1 = x_1y_1 - x_2y_2$, $V_2 = x_1y_2 - x_2y_1$, ostatní dvě hodnoty jsou k nim opačná čísla $V_3 = x_2y_2 - x_1y_1 = -V_1$ a $V_4 = x_2y_1 - x_1y_2 = -V_2$. Oddělený výpočet obou hodnot V_1, V_2 však není nezbytný, jak hned uvidíme.

(ii) Výběr znamének pro čísla x_1 a y_1 lze zapsat ve tvaru $x_1 = a + \varepsilon\sqrt{a^2 - b}$ a $y_1 = -a + \delta\sqrt{a^2 - b}$, kde koeficienty ε a δ jsou čísla z množiny $\{-1, 1\}$. Pak $x_2 = a - \varepsilon\sqrt{a^2 - b}$, $y_2 = -a - \delta\sqrt{a^2 - b}$ a stačí provést jediný výpočet s obecnými ε, δ (pro stručnost zápisu označíme ještě $c = \sqrt{a^2 - b}$):

$$\begin{aligned} x_1y_1 - x_2y_2 &= (a + \varepsilon c)(-a + \delta c) - (a - \varepsilon c)(-a - \delta c) = \\ &= (-a^2 - \varepsilon ac + \delta ac + \varepsilon \delta c^2) - (-a^2 + \varepsilon ac - \delta ac + \varepsilon \delta c^2) = \\ &= -2a(\varepsilon - \delta)c. \end{aligned}$$

Protože $\varepsilon - \delta$ nabývá hodnot $-2, 0$ a 2 , hodnoty výrazu $V = x_1y_1 - x_2y_2$ jsou právě čísla $4a\sqrt{a^2 - b}$, 0 a $-4a\sqrt{a^2 - b}$.

(iii) Výběr znamének pro čísla x_1 a y_1 můžeme vyřešit zápisy $x_1 = a + u$ a $y_1 = -a + v$, kde u a v jsou reálná čísla splňující rovnosti $u^2 = v^2 = a^2 - b$. (Dodejme, že čísla u, v jsou vlastně základy druhých mocnin v rovnicích (1), nebo též čísla $\varepsilon\sqrt{a^2 - b}, \delta\sqrt{a^2 - b}$ z předchozího odstavce.) Potom platí $x_2 = a - u$, $y_2 = -a - v$ a

$$V = x_1y_1 - x_2y_2 = (a + u)(-a + v) - (a - u)(-a - v) = -2a(u - v).$$

Protože hodnoty $u - v$ za podmínky $u^2 = v^2 = a^2 - b$ jsou $-2\sqrt{a^2 - b}$, 0 a $2\sqrt{a^2 - b}$, docházíme ke stejnému závěru jako v (ii).

Po výpočtu hodnot výrazu V zjišťujeme, že rovnost $x_1y_1 - x_2y_2 = 4k$ nastane, právě když $4k \in \{-4a\sqrt{a^2 - b}, 0, 4a\sqrt{a^2 - b}\}$. Protože k je přirozené číslo, je $a \neq 0$ a poslední podmínka je ekvivalentní s rovností

$$k = |a|\sqrt{a^2 - b}, \quad (2)$$

která je rozkladem čísla k na součin dvou činitelů, jež musejí být rovněž přirozená čísla. (Číslo $\sqrt{a^2 - b}$ je rovno zlomku $k/|a|$, takže je to číslo racionální, a tudíž číslo celé.) Proto můžeme všechna celočíselná řešení

(a, b) rovnice (2) snadno popsat: vezmeme libovolný rozklad $k = m \cdot n$ daného čísla k na dva (kladné) činitele m, n a z rovností $|a| = m$ a $\sqrt{a^2 - b} = n$ snadno určíme obě vyhovující dvojice (a, b) :

$$a = \pm m, \quad b = m^2 - n^2. \quad (3)$$

Nyní již máme všechno připraveno k řešení otázek původní úlohy.

Část a). Protože pro činitele m, n z libovolného rozkladu $k = m \cdot n$ platí $m \leq k$ a $n \geq 1$, plyne ze vzorce (3) odhad $b \leq m^2 - 1$, přitom rovnost nastane, když zvolíme $m = k$ a $n = 1$. Pro dané k je tedy největší hodnota b rovna $b_{\max} = k^2 - 1$.

Část b). Pro $k = 2004$ existuje právě 12 uspořádaných dvojic (m, n) , pro něž $2004 = m \cdot n$, neboť všech rozkladů čísla 2004 na dva činitele (nehledíme-li na jejich pořadí) je právě šest: $1 \cdot 2004 = 2 \cdot 1002 = 3 \cdot 668 = 4 \cdot 551 = 6 \cdot 334 = 12 \cdot 167$. Protože můžeme dvěma způsoby volit znaménko čísla a ve vzorci (3), hledaný počet dvojic (a, b) je roven dvojnásobku počtu dvojic (m, n) , tedy číslu $2 \cdot 12 = 24$.

Část c). Naším úkolem je určit součet čísel b z dvojic (a, b) určených vzorci (3), probíhají-li dvojice (m, n) všechny rozklady $k = m \cdot n$ daného čísla k . Je-li $m = n$, platí podle (3) $b = 0$, proto můžeme uvažovat jen takové dvojice činitelů (m, n) , ve kterých $m \neq n$, a sdružit je do párů (m, n) a (n, m) . Protože v každém páru pro součet příslušných hodnot b platí $(m^2 - n^2) + (n^2 - m^2) = 0$ (jak pro jednu, tak pro druhou volbu znaménka čísla a), je hledaný součet čísel b ze všech uvažovaných dvojic (a, b) roven nule (pro každé pevné k).

A - I - 4

Označme c, d difference první, resp. druhé z daných aritmetických posloupností. Protože podle zadání platí $y_1 = x_1$, mají členy obou posloupností obecné vyjádření

$$x_i = x_1 + (i - 1)c \quad a \quad y_i = x_1 + (i - 1)d$$

pro každý index i . Rozdíl $x_i^2 - y_i^2$ lze proto upravit do tvaru

$$\begin{aligned} x_i^2 - y_i^2 &= (x_1^2 + 2x_1(i - 1)c + (i - 1)^2c^2) - \\ &\quad - (x_1^2 + 2x_1(i - 1)d + (i - 1)^2d^2) = \\ &= 2x_1(i - 1)(c - d) + (i - 1)^2(c^2 - d^2). \end{aligned}$$

Pro index k podle zadání úlohy platí soustava rovnic

$$53 = 2x_1(k-1)(c-d) + (k-1)^2(c^2-d^2), \quad (1)$$

$$78 = 2x_1(k-2)(c-d) + (k-2)^2(c^2-d^2), \quad (2)$$

$$27 = 2x_1k(c-d) + k^2(c^2-d^2). \quad (3)$$

Tyto rovnice či jejich násobky teď vhodně navzájem sečteme. Abychom se zbavili členů s x_1 , odečteme od dvojnásobku rovnice (1) součet rovnic (2) a (3), neboť u členu $2x_1(c-d)$ pak zůstane koeficient $2(k-1) - (k-2+k) = 0$. Protože $2 \cdot 53 - (78+27) = 1$ a $2(k-1)^2 - (k-2)^2 - k^2 = -2$, dostaneme zmíněnou kombinací jednoduchou rovnici $1 = -2(c^2-d^2)$, ze které určíme $c^2-d^2 = -\frac{1}{2}$. To dosadíme do rovnic (2) a (3), které tak přejdou do tvaru

$$78 = 2x_1(k-2)(c-d) - \frac{1}{2}(k-2)^2, \quad (2')$$

$$27 = 2x_1k(c-d) - \frac{1}{2}k^2. \quad (3')$$

Členů s x_1 se opět zbavíme, když od k -násobku rovnice (2') odečteme $(k-2)$ -násobek rovnice (3'); získanou rovnici s neznámou k pak vyřešíme:

$$78k - 27(k-2) = -\frac{1}{2}(k-2)^2 \cdot k + \frac{1}{2}k^2 \cdot (k-2),$$

$$51k + 54 = -\frac{1}{2}(k^3 - 4k^2 + 4k) + \frac{1}{2}(k^3 - 2k^2),$$

$$0 = k^2 - 53k - 54,$$

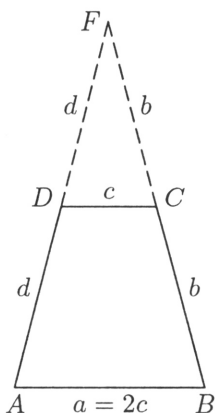
$$0 = (k+1)(k-54).$$

Protože index k je přirozené číslo, platí nutně $k = 54$. Tím je úloha vyřešena.

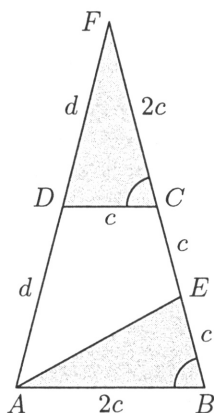
Dodejme, že zadání úlohy nevyžaduje zkoumat, zda pro nalezenou (jedinou) hodnotu indexu k dvojice posloupností splňujících podmínky úlohy existuje. Pro zajímavost uvedme, že takových dvojic posloupností je dokonce nekonečně mnoho; je nutné a stačí, aby jejich společný první člen x_1 a difference c, d splňovaly podmínky $c^2-d^2 = -\frac{1}{2}$ a $x_1(c-d) = \frac{55}{4}$. Plyne to snadno z kterékoliv z rovnic (1)–(3) po dosazení hodnot $k = 54$ a $c^2-d^2 = -\frac{1}{2}$, přesvědčete se sami.

Označme obvyklým způsobem a, b, c, d délky stran daného lichoběžníku. Podle zadání platí rovnost $a = 2c$, jež znamená, že základna CD je střední příčkou trojúhelníku ABF , kde F je průsečík ramen BC a AD prodloužených za vrchol C resp. D (obr. 18). Proto též platí $|CF| = b$ a $|DF| = d$.

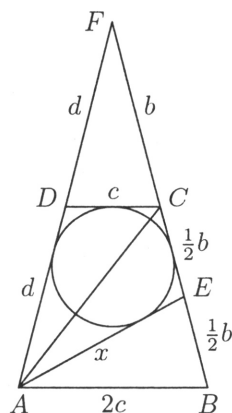
V první části řešení předpokládejme, že $|AB| = |BC|$ neboli $2c = b$ (obr. 19). Pak $|CF| = b = 2c$ a $|EB| = |EC| = \frac{1}{2}b = c$, takže trojúhelníky ABE a FCD (jež jsou na obr. 19 vybarveny) jsou shodné podle věty *sss* (jejich strany délek $2c$ a c svírají souhlasné úhly, vyřáté přímkou BC mezi rovnoběžkami AB a CD). Ze shodnosti třetích stran AE a FD pak plyne rovnost $|AE| = d$. Tak přicházíme k závěru, že strany čtyřúhelníku $AECD$ mají délky d, c, c, d ; jde tudíž o tečnový čtyřúhelník (dokonce deltoid, případně kosočtverec).



Obr. 18



Obr. 19



Obr. 20

V druhé části řešení předpokládejme, že čtyřúhelník $AECD$ je tečnový, takže podle známé věty pro délky jeho stran platí rovnost $|AE| + |CD| = |EC| + |AD|$, neboli $x + c = \frac{1}{2}b + d$, kde $x = |AE|$ (obr. 20). Odtud vyjádříme délku x , se kterou budeme dále pracovat, ve tvaru

$$x = \frac{b}{2} - c + d. \quad (1)$$

Všimněme si nyní, že úsečky CD, AC a AE dělí trojúhelník ABF na čtyři trojúhelníky téhož obsahu. (Podrobněji: z $|AD| = |DF|$, $|BC| = |CF|$

a $|BE| = |EC|$ plyne řetězec rovností $S_{ADC} = S_{CDF} = \frac{1}{2}S_{ACF} = \frac{1}{2}S_{ABC} = S_{ABE} = S_{ACE}$.) Proto pro obsahy čtyřúhelníku $AECD$ a trojúhelníku AEF platí úměra $S_{AECD} : S_{AEF} = 2 : 3$. Tyto dva mnohoúhelníky však mají společnou vepsanou kružnici, takže ve stejném poměru $2 : 3$ musí být i jejich obvody (připomeňme, že obsah mnohoúhelníku s obvodem o a vepsanou kružnicí o poloměru ϱ je roven $\frac{1}{2}o \cdot \varrho$). Protože tyto obvody mají vyjádření

$$o_{AECD} = x + \frac{b}{2} + c + d, \quad o_{AEF} = x + \frac{3b}{2} + 2d,$$

platí úměra $(x + \frac{1}{2}b + c + d) : (x + \frac{3}{2}b + 2d) = 2 : 3$, ze které snadno vyjádříme neznámou x jako

$$x = \frac{3b}{2} - 3c + d. \quad (2)$$

Porovnáním (1) a (2) dostaneme rovnost $b = 2c$, neboli $b = a$. Tím je rovnost $|AB| = |BC|$ dokázána.

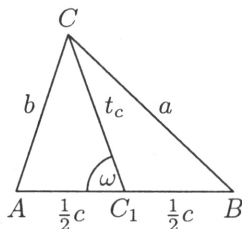
Jiné řešení. (*Pavel Novotný*) Připomeňme nejdříve vyjádření délek těžnic trojúhelníku pomocí délek jeho stran: v obecném trojúhelníku ABC při obvyklém označení platí vzorec

$$4t_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2. \quad (1)$$

Odvození (1) je snadné: stačí sečíst rovnosti

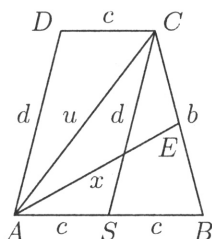
$$b^2 = \left(\frac{1}{2}c\right)^2 + t_c^2 - ct_c \cos \omega, \quad a^2 = \left(\frac{1}{2}c\right)^2 + t_c^2 + ct_c \cos \omega,$$

které platí podle kosinové věty pro trojúhelníky ACC_1 a BCC_1 , kde C_1 je střed strany AB a $\omega = \angle AC_1C$ (obr. 21).



Obr. 21

V daném lichoběžníku $ABCD$ (v němž platí $a = 2c$) uvažujme kromě středu E ramene BC ještě střed S základny AB a označme $x = |AE|$ a $u = |AC|$ (obr. 22). Protože $|AS| = |SB| = \frac{1}{2}a = c$, je $ASCD$ rovno-



Obr. 22

běžník, tudíž $|CS| = d$. Nyní podle vzorců (1) vyjádříme délky těžnic AE a CS trojúhelníku ABC :

$$4x^2 = 2u^2 + 2(2c)^2 - b^2 \quad \text{a} \quad 4d^2 = 2u^2 + 2b^2 - (2c)^2.$$

Vzájemným odečtením těchto rovnic vyloučíme veličinu u a dostaneme

$$4(x^2 - d^2) = 3(4c^2 - b^2), \quad \text{neboli} \quad 4(x - d)(x + d) = 3(2c - b)(2c + b).$$

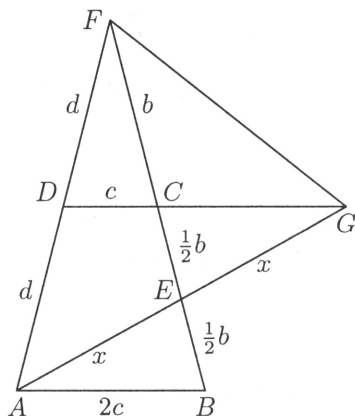
Odtud plyne, že znaménko rozdílu $x - d$ je vždy stejné jako znaménko rozdílu $2c - b$. Ukažme, že z tohoto poznatku plyne celé řešení naší úlohy. Použijeme k tomu známé kritérium pro tečnové čtyřúhelníky: čtyřúhelník $AECD$ je tečnový, právě když se rovnají oba součty délek jeho protilehlých stran, tj. právě když $x + c = d + \frac{1}{2}b$.

Je-li $b = 2c$, pak podle našeho poznatku $x = d$, a tedy $AECD$ je deltoid (případně kosočtverec). (Rovnost $x + c = d + \frac{1}{2}b$ tehdy platí dokonce „sčítanec po sčítanci“.)

Je-li $b > 2c$, pak podle našeho poznatku $x < d$, a tedy $x + c < d + \frac{1}{2}b$, takže čtyřúhelník $AECD$ není tečnový.

Je-li $b < 2c$, pak podle našeho poznatku $x > d$, a tedy $x + c > d + \frac{1}{2}b$, takže čtyřúhelník $AECD$ není tečnový.

Další řešení. V lichoběžníku $ABCD$, v němž platí $a = 2c$, uvažujme kromě středu E ramene BC a průsečíku F prodloužených ramen BC , AD ještě průsečík G přímek AE , CD (obr. 23). Snadno vysvětlíme, že úsečky EF a DG jsou těžnice trojúhelníku AFG (a bod C jeho těžiště).



Obr. 23

Platí-li rovnost $b = 2c$, jsou tyto těžnice shodné, a proto je trojúhelník AFG rovnoramenný se základnou FG , tudíž $AECD$ je deltoid (nebo kosočtverec). Lze-li naopak čtyřúhelníku $AECD$ vepsat kružnici, je tato kružnice vepsána i oběma trojúhelníkům AEF a ADG , jež mají shodné obsahy (totiž rovné vždy polovině obsahu trojúhelníku AFG). Pak se ovšem musí rovnat i jejich obvody, což pro délku $x = |AE| = |EG|$ dává rovnici

$$x + \frac{3b}{2} + 2d = 2x + 3c + d,$$

ze které vychází vyjádření neznámé x ve tvaru (2) z prvního řešení. Stejně jako tam pak dojdeme k rovnosti $b = 2c$.

Nad obrázkem 23 lze uvažovat i takto: čtyřúhelník $AECD$ bude tečnový, právě když splynou kružnice vepsané trojúhelníkům AEF a ADG . Tyto trojúhelníky mají totožná ramena vnitřních úhlů při společném vrcholu A , takže jejich vepsané kružnice splynou, právě když budou mít shodné poloměry. To je však ekvivalentní s tím, že oba trojúhelníky mají stejný obvod (vždy totiž mají stejný obsah). Protože společná část hranic trojúhelníků AEF a ADG je tvořena lomenou čarou EAD , rovnají se jejich obvody, právě když platí rovnost $|DF| + |FE| = |DG| + |GE|$. Protože $DE \parallel FG$, je z úvahy o elipse s ohnisky D, E jasné, že odvozená rovnost nastane, právě když úsečky DE a FG mají společnou osu souměrnosti (a $AECD$ je pak deltoid, případně kosočtverec).

A - I - 6

Předpokládejme, že $f: \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$ je libovolná z hledaných funkcí. Dosadíme-li do dané rovnice hodnotu $y = 1$ a číslo $x \geq 0$ ponecháme libovolné, dostaneme

$$f(xf(1))f(1) = f\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

Vzhledem k tomu, že $f(1) = 0$ podle podmínky b), poslední rovnost znamená, že

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0 \quad \text{pro každé } x \geq 0.$$

Vidíme, že funkce f nabývá hodnoty nula ve všech bodech definičního oboru, které lze vyjádřit ve tvaru zlomku $\frac{x}{x+1}$ s vhodným $x \geq 0$. Každý takový zlomek jistě leží v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, naopak pro každé reálné číslo $t \in \langle 0, 1 \rangle$ zřejmě má rovnice $t = \frac{x}{x+1}$ nezáporné řešení $x = \frac{t}{1-t}$.

Zjištěný poznatek spolu s podmínkou c) ze zadání úlohy vede k závěru, že rovnost $f(t) = 0$ platí, právě když $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Abychom určili (kladnou) hodnotu $f(t)$ pro pevné $t > 1$, uvažíme dvě rovnice s takovým parametrem t a neznámou x , totiž rovnice

$$f(xf(t))f(t) = 0 \quad \text{a} \quad f\left(\frac{xt}{x+t}\right) = 0.$$

Protože podle zadání úlohy se levé strany obou rovnic rovnají (zvolme $y = t$ v dané funkcionální rovnici) a $f(t) > 0$, musí mít obě rovnice stejné množiny řešení. Pro první z nich je tato množina určena soustavou nerovnic $0 \leq xf(t) \leq 1$, takže tvoří interval $\left\langle 0, \frac{1}{f(t)} \right\rangle$; druhá rovnice je ekvivalentní se soustavou nerovnic $0 \leq \frac{xt}{x+t} \leq 1$, jejíž řešení (s ohledem na $x+t > 0$) tvoří interval $\left\langle 0, \frac{t}{t-1} \right\rangle$.

Z totožnosti obou intervalů plyne rovnost

$$\frac{1}{f(t)} = \frac{t}{t-1}, \quad \text{neboli} \quad f(t) = \frac{t-1}{t}.$$

Našli jsme hodnotu $f(t)$ pro každé $t > 1$. Můžeme tedy shrnout, že hledaná funkce f musí mít tvar

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t \leq 1), \\ \frac{t-1}{t} & (t > 1). \end{cases}$$

Nyní ještě ukážeme, že funkce f určená posledním předpisem má skutečně vlastnost a) ze zadání úlohy (vlastnosti b) a c) jsou zřejmé). Rovnosti obou stran

$$L = f(x f(y)) f(y), \quad P = f\left(\frac{xy}{x+y}\right)$$

dané funkcionální rovnice dokážeme v každém ze čtyř případů rozlišených podle možných hodnot proměnné y a zlomku $\frac{xy}{x+y}$:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & y = 0 \text{ (a } x > 0), \quad \text{(ii)} \quad 0 < y \leq 1, \\ \text{(iii)} & y > 1 \text{ a } \frac{xy}{x+y} \leq 1, \quad \text{(iv)} \quad y > 1 \text{ a } \frac{xy}{x+y} > 1. \end{array}$$

Případ (i). Z $y = 0$ plyne $f(y) = 0$ a $\frac{xy}{x+y} = 0$, takže rovněž $f\left(\frac{xy}{x+y}\right) = 0$, tudíž $L = P = 0$.

Případ (ii). Z $0 < y \leq 1$ plyne $\frac{xy}{x+y} < 1$, takže opět $L = P = 0$.

Případ (iii). Z $y > 1$ a $\frac{xy}{x+y} \leq 1$ plyne $x \leq \frac{y}{y-1}$, takže s ohledem na hodnotu $f(y) = \frac{y-1}{y}$ platí nerovnost $x f(y) \leq 1$, tudíž opět $L = P = 0$.

Případ (iv). Z $y > 1$ a $\frac{xy}{x+y} > 1$ plyne $x > \frac{y}{y-1}$, takže s ohledem na hodnotu $f(y) = \frac{y-1}{y}$ platí nerovnost $x f(y) > 1$, tudíž

$$\begin{aligned} L &= \frac{x \cdot \frac{y-1}{y} - 1}{x \cdot \frac{y-1}{y}} \cdot \frac{y-1}{y} = \frac{xy - x - y}{xy}, \\ P &= \frac{\frac{xy}{x+y} - 1}{\frac{xy}{x+y}} = \frac{xy - x - y}{xy}. \end{aligned}$$

Rovnost $L = P$ je tak dokázána ve všech případech.

A – S – 1

Posuďme otázku, pro které celočíselné aritmetické posloupnosti $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ existují indexy $i, j \in \{1, 2, \dots, 10\}$ takové, že $a_i = 1$ a $a_j = 2005$. Zdůrazněme, že taková dvojice indexů (i, j) , pokud vůbec existuje, je jediná,

neboť v nekonstantní aritmetické posloupnosti se každé číslo vyskytuje nejvýše jednou.

Předpokládejme, že zmíněné indexy i a j známe, a pomocí nich vyjádříme první člen a_1 a diferenci d dotyčné posloupnosti. Protože obecný člen aritmetické posloupnosti má vyjádření $a_k = a_1 + (k-1)d$, dostáváme soustavu rovnic

$$a_i = a_1 + (i-1)d = 1 \quad \text{a} \quad a_j = a_1 + (j-1)d = 2005,$$

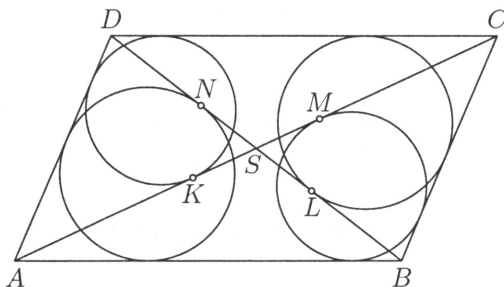
kteřou snadno vyřešíme vzhledem k neznámým a_1, d :

$$d = \frac{2004}{j-i} \quad \text{a} \quad a_1 = 1 - \frac{2004(i-1)}{j-i}.$$

Takové hodnoty a_1, d jsou celá čísla, právě když je přirozené číslo $|j-i|$ dělitelem čísla 2004, takže $|j-i|$ musí být jedno z čísel 1, 2, 3, 4 nebo 6 (z podmínky $i, j \in \{1, 2, \dots, 10\}$ totiž plyne $|j-i| < 10$ a číslo 2004 jiné jednomístné dělitele nemá). Hledaný počet posloupností je proto roven počtu dvojic indexů (i, j) vybraných z množiny $\{1, 2, \dots, 10\}$, pro které platí $|j-i| \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Takových dvojic (i, j) je po řadě $2 \cdot 9, 2 \cdot 8, 2 \cdot 7, 2 \cdot 6$ a $2 \cdot 4$, takže všech posloupností je $18 + 16 + 14 + 12 + 8 = 68$.

A – S – 2

Rovnoběžník $ABCD$ je útvar středově souměrný podle průsečíku S úhlopříček AC, BD (obr. 24). Proto jsou podle středu S souměrně sdružené trojúhelníky ACD a CAB , tudíž i jejich kružnice vepsané a odpovídající

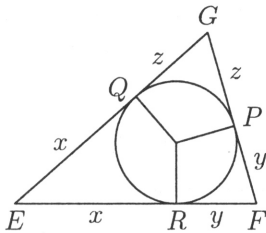


Obr. 24

si body dotyku K a M . Totéž platí i o dvojici bodů L a N . Docházíme tak k závěru, že $KLMN$ je rovnoběžník. (Možnosti $K = M = S$ nebo

$L = N = S$ jsou vyloučeny podmínkou $|AB| > |BC|$, jež zaručuje, že zmíněné trojúhelníky nejsou rovnoramenné se základnou AC nebo BD , takže se vepsané kružnice nedotýkají těchto stran v jejich středu.)

Provedená úvaha o středové souměrnosti však nestačí k důkazu toho, že rovnoběžník $KLMN$ je obdélník, tj. že má shodné úhlopříčky KM a LN . K tomu budeme muset provést výpočet založený na známých vzorcích, které vyjadřují vzdálenosti vrcholů obecného trojúhelníku od bodů dotyku kružnice vepsané pomocí délek stran tohoto trojúhelníku (obr. 25):



Obr. 25

$$\begin{aligned}x &= |ER| = |EQ| = \frac{|EF| + |EG| - |FG|}{2}, \\y &= |FP| = |FR| = \frac{|FG| + |FE| - |EG|}{2}, \\z &= |GP| = |GQ| = \frac{|GF| + |GE| - |EF|}{2}.\end{aligned}$$

Připomeňme, že tyto vzorce plynou ze soustavy rovnic

$$x + y = |EF|, \quad y + z = |FG|, \quad x + z = |EG|.$$

Vraťme se k naší úloze a v daném čtyřúhelníku $ABCD$ označme ještě délky $a = |AB| = |CD|$, $b = |BC| = |AD|$, $e = |AC|$ a $f = |BD|$. Podle vzorců uvedených vedle obr. 2 platí rovnosti

$$|AK| = \frac{e + b - a}{2} = |CM| \quad \text{a} \quad |BL| = \frac{f + b - a}{2} = |DN|.$$

Z předpokladu úlohy $a > b$ proto plyne $|AK| < \frac{1}{2}e = |AS|$, takže bod K leží mezi body A a S a má od středu S vzdálenost

$$|KS| = |AS| - |AK| = \frac{e}{2} - \frac{e + b - a}{2} = \frac{a - b}{2}.$$

Obdobně vyjde, že body L , M , N leží po řadě na úsečkách BS , CS , DS a platí rovnosti $|LS| = |MS| = |NS| = \frac{1}{2}(a - b)$. To dohromady znamená, že čtyřúhelník $KLMN$ má shodné úhlopříčky, které se navzájem půlí; je to tedy obdélník. (Kdyby to byl čtverec, muselo by platit $KM \perp LN$, tedy $AC \perp BD$, což je ve sporu s tím, že $a \neq b$.)

Dodejme, že v předchozím odstavci jsme podali úplné řešení, které nevyžaduje úvahy o středové souměrnosti z úvodního odstavce.

A – S – 3

Po vydělení (kladným) číslem $k + \frac{1}{k}$ a úpravě zlomků dostaneme ekvivalentní soustavu nerovnic

$$\frac{k^2(k-2)}{k^2+1} \leq x \leq \frac{k^3(k+3)}{k^2+1}. \quad (1)$$

Abychom určili, mezi kterými celými čísly leží oba zlomky z (1), vydělíme nejprve (se zbytkem) mnohočleny z jejich čitatelů mnohočlenem ze jmenovatele:

$$\begin{aligned} (k^3 - 2k^2) : (k^2 + 1) &= k - 2, & \text{zbytek} &= k + 2, \\ (k^4 + 3k^3) : (k^2 + 1) &= k^2 + 3k - 1, & \text{zbytek} &= 3k + 1. \end{aligned}$$

Oba výsledky dělení dosadíme do (1):

$$k - 2 - \frac{k-2}{k^2+1} \leq x \leq k^2 + 3k - 1 - \frac{3k-1}{k^2+1}. \quad (2)$$

Pokud pro „zbytkové členy“ z obou krajních výrazů budou platit nerovnosti

$$0 \leq \frac{k-2}{k^2+1} < 1 \quad \text{a} \quad 0 < \frac{3k-1}{k^2+1} \leq 1, \quad (3)$$

budou řešeními soustavy (1) právě ta celá x , pro která platí $k-2 \leq x \leq k^2 + 3k - 2$. Takových x je

$$(k^2 + 3k - 2) - (k - 2) + 1 = (k + 1)^2,$$

což je právě počet uvedený v zadání úlohy.

Snadno vysvětlíme, že nerovnosti (3) platí pro každé $k \geq 2$. Tehdy totiž máme $0 \leq k-2 < k+1 < k^2+1$, odkud plyne levá část (3). Pravá část (3) je zřejmá pro každé $k \geq 3$ (neboť tehdy $0 < 3k-1 \leq k^2-1 < k^2+1$); pro $k=2$ platí $3k-1=5=k^2+1$, takže v (3) úplně napravo nastane rovnost.

Ještě je nutné zjistit, zda požadovanou vlastnost nemá i „zbylé“ přirozené číslo $k=1$; pro ně však má soustava (1) tvar $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2$, takže má v celých číslech právě tři řešení, což je méně než $(1+1)^2=4$.

Závěr: Hledaná k jsou všechna přirozená čísla větší než 1.

Poznámka. Přesný počet celých čísel x , jež leží v intervalu (1), nelze určit z pouhé *délky* tohoto intervalu, neboť ani tato délka, ani žádný z krajních bodů intervalu není celé číslo. Není těžké ověřit ekvivalentními úpravami, že pro délku intervalu (1) při každém $k > 2$ platí nerovnosti

$$(k+1)^2 - 1 < \frac{k^3(k+3)}{k^2+1} - \frac{k^2(k-2)}{k^2+1} < (k+1)^2. \quad (4)$$

Z nich ovšem plyne pouze, že počet celých čísel v intervalu (1) je roven buď číslu $(k+1)^2 - 1$, nebo číslu $(k+1)^2$. K přesnému určení tohoto počtu se zdá být nezbytné určit nejmenší celé číslo $(k-2)$ a největší celé číslo $(k^2 + 3k - 2)$, která v daném intervalu leží.

A - II - 1

Po vynásobení kladným číslem $4(a+1)(b+1)(c+1)$ postupnými ekvivalentními úpravami dostaneme:

$$\begin{aligned} 4a(c+1) + 4b(a+1) + 4c(b+1) &\geq 3(a+1)(b+1)(c+1), \\ 4(ac+c) + 4(ab+b) + 4(bc+c) &\geq 3(ab+a+b+1)(c+1), \\ 4(ab+ac+bc+a+b+c) &\geq 3(abc+ab+ac+bc+a+b+c+1), \\ ab+ac+bc+a+b+c &\geq 3(abc+1). \end{aligned}$$

Protože $abc = 1$, dostaneme po dosazení do pravé strany poslední nerovnosti nerovnost

$$ab+ac+bc+a+b+c \geq 6. \quad (1)$$

Dosadíme-li ještě do levé strany $ab = \frac{1}{c}$, $ac = \frac{1}{b}$ a $bc = \frac{1}{a}$, dostaneme nerovnost

$$\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right) \geq 6,$$

která platí, neboť hodnota každé závorky v levé straně je alespoň 2. Pro každé $t > 0$ je totiž splněna nerovnost $t + t^{-1} \geq 2$, v níž nastane rovnost, právě když $t = 1$. (Tento známý fakt lze zdůvodnit např. úpravou nerovnosti $(\sqrt{t} - \sqrt{t^{-1}})^2 \geq 0$, nebo se lze odvolat na nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dvou navzájem převrácených čísel.) Zároveň vidíme, že rovnost v nerovnosti (1), a tedy i v nerovnosti z textu úlohy nastane, právě když platí $a = b = c = 1$. Tím je řešení celé úlohy ukončeno.

Dodejme, že za předpokladu $abc = 1$ nerovnost (1) plyne přímo z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem šestice čísel ab , ac , bc , a , b , c :

$$\frac{ab + ac + bc + a + b + c}{6} \geq \sqrt[6]{ab \cdot ac \cdot bc \cdot a \cdot b \cdot c} = \sqrt[6]{abc} = 1.$$

A – II – 2

Odečteme-li od první rovnice rovnici druhou, dostaneme postupnými úpravami:

$$\begin{aligned}(xy + xz + x) - (yz + xy + y) &= (y^2 + z^2 - 5) - (z^2 + x^2 - 5), \\(x - y)z + x - y &= (y - x)(y + x), \\(x - y)(x + y + z + 1) &= 0.\end{aligned}$$

Analogicky odvodíme rovnosti

$$(y - z)(x + y + z + 1) = 0 \quad \text{a} \quad (x - z)(x + y + z + 1) = 0. \quad (1)$$

Ve všech třech odvozených rovnicích vystupuje činitel $x + y + z + 1$. Rozlišíme proto, zda je roven nule, či nikoliv.

A. Nechť $x + y + z + 1 = 0$. Pak můžeme původní soustavu rovnic zapsat takto:

$$\begin{aligned}x \cdot (-x) &= y^2 + z^2 - 5, & y \cdot (-y) &= z^2 + x^2 - 5, \\z \cdot (-z) &= x^2 + y^2 - 5.\end{aligned}$$

Vidíme, že celá soustava je ekvivalentní s jedinou rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, která (vzhledem k nezápornosti druhých mocnin) má v oboru celých čísel pouze taková řešení, že trojice (x^2, y^2, z^2) je (až na pořadí) trojice $(4, 1, 0)$, takže (x, y, z) je permutace některé z trojic $(\pm 2, \pm 1, 0)$. Znaménka čísel x , y , z snadno určíme z podmínky $x + y + z + 1 = 0$: vyhovuje jediné trojice $(-2, 1, 0)$ a libovolná její permutace. V případě A tedy dostáváme právě šest řešení dané soustavy.

B. Nechť $x + y + z + 1 \neq 0$. Pak z rovnic odvozených v úvodu řešení vyplývá, že platí $x = y = z$. Tehdy rovnice dané soustavy splývají v jedinou rovnici $x(2x + 1) = 2x^2 - 5$, které vyhovuje pouze $x = -5$. V případě B tedy máme jediné řešení $x = y = z = -5$.

Dodejme, že v první části řešení jsme mohli rovněž původní soustavu rovnic upravit do tvaru

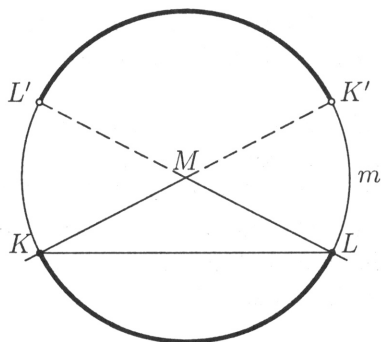
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 5 &= x(x + y + z + 1) = \\ &= y(x + y + z + 1) = \\ &= z(x + y + z + 1). \end{aligned} \quad (2)$$

Odtud opět dostáváme, že platí buď $x + y + z + 1 = 0$, nebo $x = y = z$.

Odpověď: Soustava má sedm řešení: trojici $(-5, -5, -5)$, trojici $(-2, 1, 0)$ a její libovolnou permutaci.

A – II – 3

Ukážeme, že hledanou množinu tvoří body K a L a dále vnitřní body oblouku KL kružnice $m(M, |MK|)$ a oblouku $K'L'$ středově souměrně sdruženého s obloukem KL podle středu M (obr. 26).

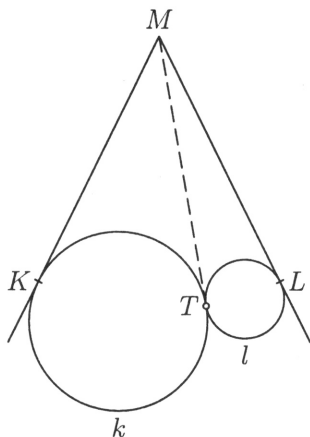


Obr. 26

Dokažme nejdříve, že přímka MT (obr. 27) je (vnitřní) společnou tečnou kružnic k a l . Pripusťme, že přímka MT protne kružnici k v bodech T, T_1 a kružnici l v bodech T, T_2 . Pro mocnosti bodu M (je to bod tečny, proto leží ve vnější oblasti každé z obou kružnic k a l) k oběma kružnicím platí

$$|MT| \cdot |MT_1| = |MK|^2 = |ML|^2 = |MT| \cdot |MT_2|,$$

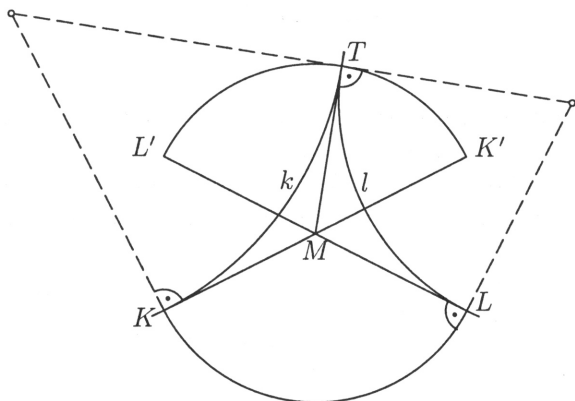
odkud $|MT_1| = |MT_2|$. Protože oba body T_1, T_2 leží na téže polopřímce MT , plyne odtud $T_1 = T_2$. Obě kružnice k a l však mají společný jediný bod, takže $T_1 = T_2 = T$. Proto je MT společná tečna obou kružnic a navíc $|MT| = |MK| = |ML|$, bod T tedy leží na kružnici $m(M, |MK|)$.



Obr. 27

Protože přímka MT obě kružnice odděluje, neleží body K a L uvnitř téže poloroviny určené přímkou MT , přímka MT protíná stranu KL trojúhelníku KLM , a proto bod T leží na jednom z kratších oblouků KL , $K'L'$ kružnice m .

Je-li naopak T libovolný vnitřní bod jednoho z těchto oblouků (obr. 28), leží sousední konvexní úhly KMT a LMT na opačných stranách společného ramene MT . Z rovností $|MK| = |MT|$ a $|ML| = |MT|$ pak plyne, že do zmíněných úhlů lze vepsat kružnice tak, aby se dotkly ramen příslušného úhlu v bodech K a T , resp. L a T . To jsou vyhovující kružnice k , l s dotykovým bodem T .



Obr. 28

Je-li $T = K$, vyhovuje libovolná kružnice k dotýkající se přímky MK v bodě K a ležící v polorovině MKL' a kružnice l dotýkající se ramen úhlu KML v bodech K a L (ta je určena jednoznačně). Analogicky sestrojíme vyhovující kružnice k a l pro bod $T = L$.

Bod K' ani bod L' do hledané množiny patřit nemohou, protože K' leží na tečně KM k libovolné z kružnic k a analogicky bod L' leží na tečně LM k libovolné z kružnic l .

A – II – 4

Označme x a y hledaná čísla, přičemž $x > y$. Protože $p = x - y$ je prvočíslo a pro největší společný dělitel d čísel x a y platí $d \mid (x - y)$ neboli $d \mid p$, je buď $d = p$, nebo $d = 1$.

Kdyby platilo $d = p$, měli bychom $y = kp$ a $x = y + p = (k + 1)p$ pro vhodné přirozené k , takže součin xy by se rovnal číslu $k(k + 1)p^2$. To ale není druhá mocnina přirozeného čísla (dále stručněji „čtverec“) pro žádné k , neboť číslo $k(k + 1)$ není nikdy čtverec.¹ Musí proto být $d = 1$, takže čísla x a y jsou nesoudělná. Jejich součin xy je pak čtverec jedině v případě, kdy oba činitele jsou čtverce, tedy $x = u^2$ a $y = v^2$ pro vhodná $u, v \in \mathbb{N}$, $u > v$, odkud $p = x - y = (u - v)(u + v)$. Takový rozklad prvočísla p na součin má jedině možné činitele $u - v = 1$ a $u + v = p$. Odtud snadno plynou rovnosti $u = \frac{1}{2}(p + 1)$ a $v = \frac{1}{2}(p - 1)$, z nichž pro součet $s = x + y$ získáme vyjádření

$$s = x + y = u^2 + v^2 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = \frac{p^2+1}{2}.$$

Dekadický zápis čísla s podle zadání končí číslicí 3, takže zápis čísla $p^2 + 1$ (rovného číslu $2s$) končí číslicí 6. Zápis čísla p^2 proto končí číslicí 5, je tedy násobkem pěti, což nastane jedině pro prvočíslo $p = 5$. Dosazením této hodnoty do odvozených vzorců dostaneme $u = 3$, $v = 2$, $x = 9$ a $y = 4$. Zkouška je triviální: $9 - 4 = 5$, $9 + 4 = 13$, $9 \cdot 4 = 6^2$.

Odpověď: Podmínkám úlohy vyhovuje jediná dvojice čísel 9 a 4.

¹ Platí totiž $k^2 < k(k + 1) < (k + 1)^2$, takže číslo $k(k + 1)$ leží mezi dvěma sousedními čtverci. Jiné vysvětlení lze založit na tom, že čísla k , $k + 1$ jsou navzájem nesoudělná, takže by obě musela být čtverci lišícími se o 1. Takové čtverce však neexistují.

A – III – 1

Označme c , resp. d difference hledaných posloupností, takže z vyjádření $x_i = x_1 + (i-1)c$ a $y_i = x_1 + (i-1)d$ pak dostaneme pro každé i rovnost

$$x_i y_i = x_1^2 + (i-1)x_1(c+d) + (i-1)^2 cd.$$

Budeme se tedy zabývat otázkou, kdy pro některý index $k > 1$ platí soustava rovnic

$$x_1^2 + (k-2)x_1(c+d) + (k-2)^2 cd = 42, \quad (1)$$

$$x_1^2 + (k-1)x_1(c+d) + (k-1)^2 cd = 30, \quad (2)$$

$$x_1^2 + kx_1(c+d) + k^2 cd = 16. \quad (3)$$

Odečteme-li od dvojnásobku rovnice (2) součet rovnic (1) a (3), dostaneme po úpravě rovnost $cd = -1$. Odečteme-li od rovnice (3) rovnici (2), obdržíme vztah

$$x_1(c+d) + (2k-1)cd = -14,$$

z něhož po dosazení hodnoty $cd = -1$ dojdeme k rovnosti

$$x_1(c+d) = 2k-15. \quad (4)$$

Dosazením tohoto výsledku do rovnice (3) dostaneme vztah

$$x_1^2 + k(2k-15) - k^2 = 16,$$

ze kterého vyjádříme x_1^2 jako kvadratickou funkci indexu k :

$$x_1^2 = 16 - k(2k-15) + k^2 = 16 + 15k - k^2 = (k+1)(16-k).$$

Protože $x_1^2 \geq 0$ a $k > 1$, plyne z posledního vzorce odhad $k \leq 16$. V případě $k = 16$ ovšem vychází $x_1 = 0$ a rovnost (4) pak přejde do tvaru $0(c+d) = 2$, což není možné. Pro $k = 15$ dostaneme $x_1^2 = 16$, takže $x_1 = \pm 4$. Pro $x_1 = 4$ (a $k = 15$) z (4) plyne $c+d = \frac{15}{4}$, což spolu s rovností $cd = -1$ vede k závěru, že $\{c, d\} = \{4, -\frac{1}{4}\}$. To znamená, že obě posloupnosti jsou (až na pořadí) určeny vzorci:

$$x_i = 4 + (i-1)4 \quad \text{a} \quad y_i = 4 - \frac{i-1}{4} \quad \text{pro každé } i. \quad (5)$$

Pro takovou dvojici posloupností skutečně platí

$$x_{14}y_{14} = 56 \cdot \frac{3}{4} = 42, \quad x_{15}y_{15} = 60 \cdot \frac{1}{2} = 30 \quad \text{a} \quad x_{16}y_{16} = 64 \cdot \frac{1}{4} = 16.$$

Podobně pro druhou možnou hodnotu $x_1 = -4$ dostaneme posloupnosti, jejichž členy jsou opačné ke členům posloupností (5), tedy posloupnosti

$$x_i = -4 - (i-1)4 \quad \text{a} \quad y_i = -4 + \frac{i-1}{4} \quad \text{pro každé } i. \quad (6)$$

Odpověď. Největší hodnota indexu k je 15 a všechny vyhovující posloupnosti jsou (až na možnou záměnu pořadí ve dvojici) určeny vztahy (5) a (6).

Jiné řešení. (Podle *Zbyňka Konečného*.) Uvažujme posloupnost $z_i = x_i y_i$. Protože je to kvadratická posloupnost, je příslušná diferenční posloupnost $r_i = z_{i+1} - z_i$ aritmetická, přičemž z rovností

$$z_{k-1} = 42, \quad z_k = 30, \quad z_{k+1} = 16$$

plyne $r_{k-1} = -12$ a $r_k = -14$. Aritmetická posloupnost (r_i) má proto diferenci -2 , takže $r_{k+1} = -16$ a $z_{k+2} = 0$. Využijeme-li opakovaně vztah $r_{k-i} = r_k + 2i$, dostaneme

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= r_k + z_k = r_k + r_{k-1} + z_{k+1} = \dots = \\ &= r_k + r_{k-1} + \dots + r_{k-14} + z_{k-14} = \\ &= -14 - 12 - \dots - 2 + 0 + 2 + \dots + 12 + 14 + z_{k-14} = \\ &= z_{k-14}, \end{aligned}$$

takže je $z_{k-14} = z_{k+1} = 16$ a také $z_{k-15} = z_{k-14} - r_{k-15} = 16 - 16 = 0$. Pro $n > 15$ je tedy $r_{k-n} > 0$ a $z_{k-n} < 0$. Vidíme, že členy posloupnosti (z_i) jsou nezáporné právě jen pro indexy $i \in \{k-15, k-14, \dots, k-1\}$, a protože $z_1 = x_1 y_1 = x_1^2 \geq 0$, musí být $1 \geq k-15$, neboli $k \leq 16$.

Pro $k = 16$ je ovšem podle předchozích výpočtů $z_1 = z_{k-15} = 0$, takže také $x_1 = y_1 = 0$. Zároveň je $z_{18} = z_{k+2} = 0$, což znamená, že jedna z aritmetických posloupností (x_i) , (y_i) je nulová. To není možné, protože pak by byla nulová i posloupnost (z_i) .

Pro $k = 15$ je $z_1 = 16$, takže $x_1 = \pm 4$. Protože $z_{17} = z_{k+2} = 0$, je $x_{17} = 0$ nebo $y_{17} = 0$. Vzhledem k symetrii daných podmínek můžeme předpokládat, že je $x_{17} = 0$. Označíme-li c , resp. d difference hledaných

posloupností, pak pro $x_1 = -4$ vyjde $c = \frac{1}{4}$, pro $x_1 = 4$ vyjde $c = -\frac{1}{4}$. Z rovnosti $x_{15}y_{15} = 30$ pak v prvním případě dostaneme $d = -4$, v druhém $d = 4$. Je tedy

$$x_i = -4 + \frac{1}{4}(i-1) \quad \text{a} \quad y_i = -4 - 4(i-1) \quad \text{pro každé } i$$

nebo

$$x_i = 4 - \frac{1}{4}(i-1) \quad \text{a} \quad y_i = 4 + 4(i-1) \quad \text{pro každé } i.$$

Snadno ověříme, že obě dvojice posloupností splňují podmínky úlohy. Největší hodnota indexu k je tedy $k = 15$ a krkomě uvedených posloupností mu odpovídají i další dvě dvojice vzniklé záměnou (x_i) a (y_i) .

A – III – 2

Nejprve v závislosti na daném čísle m ($1 \leq m \leq 47$) vyjádříme, kolik množin X popsané vlastnosti má nejmenší prvek rovný zvolenému číslu m . K tomu vydělíme číslo 47 číslem m se zbytkem,

$$47 = qm + r \quad (q \geq 1, 0 \leq r < m),$$

a ukážeme, že existuje právě $(q+1)^r q^{m-1-r}$ vyhovujících množin X s nejmenším prvkem m . Protože každá taková množina X je podmnožina množiny

$$T_m = \{m, m+1, \dots, 47\},$$

rozdělíme množinu T_m na nejvýše m skupin čísel tak, aby se čísla v téže skupině navzájem lišila o násobky čísla m : dostaneme tak předně q -prvkovou skupinu

$$P_0 = \{m, 2m, \dots, qm\},$$

v případě $r > 0$ dalších r skupin o q prvcích

$$P_i = \{m+i, 2m+i, \dots, qm+i\} \quad (1 \leq i \leq r),$$

v případě $r < m-1$ a $q > 1$ pak ještě $m-r-1$ skupin o $q-1$ prvcích

$$P_i = \{m+i, 2m+i, \dots, (q-1)m+i\} \quad (r+1 \leq i \leq m-1).$$

Obecně lze říci, že každá skupina P_i je tvořena právě těmi čísly z T_m , která při dělení číslem m dávají zbytek i ; jak jsme uvedli, některé z těchto m skupin $P_0, \dots, P_{m-1}$ mohou být prázdné.

Množina $X \subseteq T_m = P_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_{m-1}$ s nejmenším prvkem m zřejmě má požadovanou vlastnost, právě když obsahuje celou skupinu P_0 a zároveň pro každé $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ buď neobsahuje žádný prvek z P_i , nebo obsahuje všechny prvky z P_i *od jistého prvku počínaje*. Tak pro každou z r skupin $P_1, \dots, P_r$ máme $q+1$ možností, zatímco pro každou z $m-r-1$ skupin $P_{r+1}, \dots, P_{m-1}$ máme q možností, jak vybrat prvky pro X . Protože tyto výběry můžeme kombinovat nezávisle, je počet množin X skutečně roven číslu $(q+1)^r q^{m-1-r}$. (Platí to i pro případy $r=0$, $r=m-1$ nebo $q=1$, kdy některé ze skupin P_i jsou prázdné.)

Nyní zjistíme, kdy pro neúplný podíl q a zbytek r z rovnosti $47 = qm + r$ platí

$$(q+1)^r q^{m-1-r} = 2^{15}. \quad (*)$$

V případě $q=1$ dostáváme z $(*)$ rovnici $2^r = 2^{15}$, odkud $r=15$, a z rovnosti $47 = m+r$ pak vychází $m=32$.

V případě $q > 1$ musí být v rovnici $(*)$ jedna z mocnin $(q+1)^r$, q^{m-1-r} rovna 2^{15} a druhá rovna jedné, tedy musí mít nulový exponent. Proberme nyní možné hodnoty $q > 1$ v rostoucím pořadí a u každé z nich otestujeme, zda příslušné řešení rovnice $(*)$ splňuje podmínku $47 = qm+r$:

a) $q=2^1$, $m-1-r=15$ a $r=0$. Pak $m=16$ a $qm+r=32$ — nevyhovuje.

b) $q=2^3-1$, $r=5$ a $m-1-r=0$. Pak $m=6$ a $qm+r=47$ — vyhovuje.

c) $q=2^3$, $m-1-r=5$ a $r=0$. Pak $m=6$ a $qm+r=48$ — nevyhovuje.

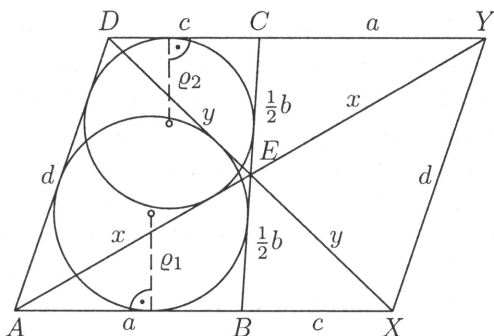
Z podmínky $47 = qm+r$ plyne, že největší možné hodnoty q jsou 47 (pro $m=1$) a 23 (pro $m=2$). Zbylé možnosti ($q=2^5-1$, $q=2^5$, $q=2^{15}-1$, $q=2^{15}$) už proto není nutné detailně rozebírat.

Odpověď. Hledané hodnoty m jsou dvě: $m=6$ a $m=32$.

A – III – 3

Označme $x = |AE|$, $y = |DE|$ a doplníme lichoběžník $ABCD$ na rovnoběžník $AXYD$ tak, aby bod E byl průsečíkem jeho úhlopříček AY a DX (obr. 29). Zřejmě platí $|AX| = |DY| = a+c$, $|AY| = 2x$ a $|DX| = 2y$.

Označme ϱ_1 (resp. ϱ_2) poloměr kružnice vepsané tečnovému čtyřúhelníku $ABED$ (resp. $AECD$), jež je zároveň vepsána i trojúhelníku AXD (resp. AYD). Pro délky stran těchto čtyřúhelníků podle známého kritéria



Obr. 29

platí rovnosti

$$a + y = \frac{b}{2} + d = c + x,$$

neboli

$$a + y = c + x, \quad (1)$$

takže oba čtyřúhelníky mají též obvod. Trojúhelníky AXD a AYD mají zase též obsah (rovný $\frac{1}{2}S_{AXYD}$, tedy rovný S_{ABCD}). Poměr $\rho_1 : \rho_2$ se proto rovná jak poměru obsahů $S_{ABED} : S_{AECD}$, tak poměru obvodů $o_{AYD} : o_{AXD}$ (ty jsme zapsali v opačném pořadí než příslušné polo-měry). Oba tyto poměry nyní vyjádříme a pak porovnáme (v značí výšku lichoběžníku $ABCD$):

$$\frac{S_{ABED}}{S_{AECD}} = \frac{S_{ABCD} - S_{CDE}}{S_{ABCD} - S_{ABE}} = \frac{\frac{1}{2}(a+c)v - \frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{2}v}{\frac{1}{2}(a+c)v - \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}v} = \frac{2a+c}{a+2c},$$

$$\frac{o_{AYD}}{o_{AXD}} = \frac{2x + (a+c) + d}{2y + (a+c) + d}.$$

Spolu s (1) tak pro neznámé x, y dostáváme soustavu lineárních rovnic

$$\frac{2a+c}{a+2c} = \frac{2x+a+c+d}{2y+a+c+d} \quad \text{a} \quad x-y = a-c,$$

jež má za podmínky $a \neq c$ (zaručené tím, že $ABCD$ je lichoběžník) jediné řešení

$$x = \frac{3a+c-d}{2} \quad \text{a} \quad y = \frac{a+3c-d}{2}. \quad (2)$$

Dosazením (2) do rovnosti (1) dostaneme první dokazovaný vztah $3(a+c) = b+3d$. S jeho pomocí lze (2) přepsat do tvaru

$$x = a + \frac{b}{6} \quad \text{a} \quad y = c + \frac{b}{6}.$$

S tímto vyjádřením délek x, y využijeme kosinové věty pro trojúhelníky ABE, CDE k výpočtu kosinu úhlu ABE resp. DCE :

$$\cos |\sphericalangle ABE| = \frac{a^2 + (\frac{1}{2}b)^2 - (a + \frac{1}{6}b)^2}{2a \cdot \frac{1}{2}b} = \frac{2b}{9a} - \frac{1}{3},$$

$$\cos |\sphericalangle DCE| = \frac{c^2 + (\frac{1}{2}b)^2 - (c + \frac{1}{6}b)^2}{2c \cdot \frac{1}{2}b} = \frac{2b}{9c} - \frac{1}{3}.$$

Protože se úhly ABE a DCE doplňují do 180° , je součet jejich kosinů roven nule:

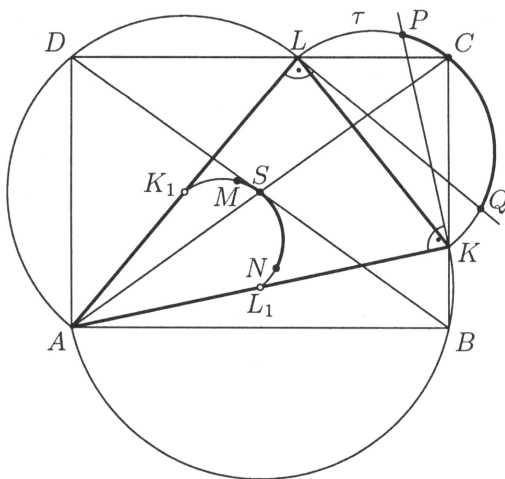
$$\left(\frac{2b}{9a} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2b}{9c} - \frac{1}{3}\right) = 0.$$

Odtud již snadnou úpravou dostaneme druhý dokazovaný vztah

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{3}{b}.$$

A – III – 4

Označme K_1 střed strany AL a L_1 střed strany AK . Ukážeme, že hledanou množinou bodů S je oblouk MN , který je částí polokružnice sestrojené nad průměrem K_1L_1 v polorovině opačné k polorovině K_1L_1A , přitom krajní body M, N zmíněného oblouku jsou určeny podmínkami $ML_1 \perp AK$ a $NK_1 \perp AL$ (obr. 30).



Obr. 30

Protože průsečík S úhlopříček AC , BD je středem úsečky AC , množinu všech bodů S dostaneme, když nejprve určíme množinu vrcholů C a tu pak zobrazíme ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem $\frac{1}{2}$. Protože je úhel KCL pravý (nemůže být ani $C = K$, ani $C = L$) a přímka KL body A a C odděluje, leží bod C na polokružnici τ sestrojené nad průměrem KL v polovině opačné k polovině KLA . Které body $C \in \tau$ jsou skutečně vrcholy vyhovujících pravoúhelníků $ABCD$? Zřejmě právě ty, pro něž polopřímky CK a CL protnou analogicky sestrojené polokružnice nad průměry AK resp. AL (v bodech, které budou vrcholy B resp. D). Jsou to body oblouku $PQ \subset \tau$, jehož krajní body P , Q jsou určeny podmínkami $PK \perp AK$ a $QL \perp AL$. Hledaná množina bodů S je proto obrazem oblouku PQ ve zmíněné stejnolehlosti, takže to je skutečně oblouk MN popsáný v úvodu řešení (body M , N jsou obrazy bodů P a Q , neboť bod L_1 je obrazem bodu K a bod K_1 je obrazem bodu L).

A – III – 5

V první části řešení předpokládáme, že první z daných kvadratických rovnic má kořeny u , v a druhá z nich má kořeny u , v^{-1} . Pak platí vzorce

$$p = -(u + v), \quad q = uv, \quad r = -\left(u + \frac{1}{v}\right), \quad s = u \cdot \frac{1}{v}. \quad (1)$$

Po jejich dosazení do jednotlivých stran rovností, jež máme dokázat, dostaneme

$$\begin{aligned} pr &= (u + v)\left(u + \frac{1}{v}\right) = \frac{(u + v)(uv + 1)}{v}, \\ (q + 1)(s + 1) &= (uv + 1)\left(\frac{u}{v} + 1\right) = \frac{(uv + 1)(u + v)}{v}, \\ p(q + 1)s &= -(u + v)(uv + 1) \cdot \frac{u}{v} = -\frac{(u + v)(uv + 1)u}{v}, \\ r(s + 1)q &= -\left(u + \frac{1}{v}\right)\left(\frac{u}{v} + 1\right) \cdot uv = -\frac{(uv + 1)(u + v)u}{v}, \end{aligned}$$

takže vidíme, že skutečně platí rovnosti

$$pr = (q + 1)(s + 1) \quad \text{a} \quad p(q + 1)s = r(s + 1)q. \quad (2)$$

Všimněme si ještě, že rovněž platí rovnosti

$$-\frac{ps}{s + 1} = \frac{(u + v) \cdot \frac{u}{v}}{\frac{u}{v} + 1} = u \quad \text{a} \quad -\frac{p}{s + 1} = \frac{u + v}{\frac{u}{v} + 1} = v,$$

které nám napovídají, jak postupovat při důkazu obrácené implikace.

V druhé části řešení předpokládáme, že čísla p, q, r, s splňují rovnosti (2) a navíc platí $q \neq -1$ a $s \neq -1$. Z první rovnosti (2) pak plyne $p \neq 0$ a $r \neq 0$, takže rovnosti (2) lze upravit do tvaru

$$\frac{p}{s+1} = \frac{q+1}{r} \quad \text{a} \quad \frac{ps}{s+1} = \frac{rq}{q+1}. \quad (3)$$

Definujme reálná čísla u, v pomocí vzorců

$$u = -\frac{ps}{s+1} \quad \text{a} \quad v = -\frac{p}{s+1}. \quad (4)$$

Pak platí $v \neq 0$ a podle (4) lze rovněž psát

$$u = -\frac{rq}{q+1} \quad \text{a} \quad v = -\frac{q+1}{r}. \quad (5)$$

Ověříme-li, že tato čísla u, v splňují všechny čtyři vztahy (1), bude to znamenat, že (u, v) a (u, v^{-1}) jsou dvojice kořenů kvadratických rovnic z textu úlohy a řešení úlohy bude u konce. Podle (4) a (5) je ale проверка vztahů (1) snadná:

$$\begin{aligned} -(u+v) &= \frac{ps}{s+1} + \frac{p}{s+1} = p, \\ uv &= \frac{-rq}{q+1} \cdot \frac{-(q+1)}{r} = q, \\ -\left(u + \frac{1}{v}\right) &= \frac{rq}{q+1} + \frac{r}{q+1} = r, \\ u \cdot \frac{1}{v} &= \frac{-ps}{s+1} \cdot \frac{-(s+1)}{p} = s. \end{aligned}$$

A – III – 6

Ukážeme, že požadovaným způsobem nelze obarvit patnáctici čísel

$$\underbrace{5, 4, 3, 2, 1}_I, \underbrace{9, 8, 7, 6}_{II}, \underbrace{12, 11, 10}_{III}, \underbrace{14, 13}_{IV}, \underbrace{15}_V,$$

pod níž jsme vyznačili rozdělení na pět skupin sousedních čísel (tvořících klesající posloupnosti).

Připusťme, že uvedenou patnáctici jsme zapsali čtyřmi barvami tak, že čísla se stejnou barvou tvoří monotonní posloupnosti. Ve skupině I

je pět čísel, dvě z nich proto mají stejnou barvu; protože tvoří klesající posloupnost, barvu těchto dvou čísel nemá žádné z čísel skupin II až V. V nich jsou tedy pouze čísla tří barev; barvu dvou čísel ze skupiny II nemá žádné z čísel skupin III až V, ve kterých jsou tedy pouze čísla dvou barev. Ještě jedním opakováním předchozí úvahy zjistíme, čísla 14, 13 a 15 ze skupin IV a V jsou jedné barvy, a to je spor.

Poznámka. Příklad v uvedeném řešení lze snadným způsobem zobecnit a dokázat tak následující negativní tvrzení: Splňují-li přirozená čísla k a N rovnost

$$N = 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1),$$

pak k barev *nestačí* k tomu, abychom jimi zapsali členy jakékoliv posloupnosti sestavené z N různých celých čísel, mají-li čísla kterékoliv barvy tvořit monotonní posloupnost. Bez důkazu dodejme, že k barev k požadovanému úkolu stačí, platí-li nerovnost

$$N < 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1).$$

Kategorie P

Texty úloh

P – I – 1

Prádelna

Bořivoj se rozhodl, že začne podnikat — a to ve velkém. Jednou v noci, poté co upadl v koupelně, dostal skvělý nápad: otevře si prádelnu. Každý, kdo přijde, si bude moci za malý obnos půjčit pračku, pokud bude nějaká volná, a vypere si své prádlo. Ihned se tedy zeptal svých přátel, zda by chtěli jeho prádelnu navštěvovat, a zjistil, že zájem je opravdu veliký. Brzy ani nevěděl, kolik praček bude vůbec potřebovat, aby se dostalo na všechny zákazníky. A proto se rozhodl obrátit se na vás s prosbou o pomoc.

Soutěžní úloha. Na vstupu dostanete počet zakázek, které Bořivoj na jeden konkrétní den obdržel. U každé zakázky víte čas příchodu zákazníka a dobu, na jakou si chce pronajmout jednu pračku. Požadavky zákazníků nejsou uvedeny v žádném konkrétním pořadí.

Vaším úkolem je zjistit, kolik nejméně praček bude Bořivoj potřebovat, aby si každý zákazník mohl pronajmout pračku na celou požadovanou dobu od svého příchodu. Kromě minimálního počtu praček musíte pro Bořivoje vytvořit ještě seznam, podle kterého bude posílat zákazníky k volným pračkám.

Formát vstupu: První řádka textového souboru `pradelna.in` obsahuje jediné přirozené číslo $N \leq 10\,000$ — počet zákazníků. Další N řádek obsahuje informace o jednotlivých zákaznících: na i -té z těchto řádek je uveden čas T_i , kdy chce zákazník přijít, a doba T'_i , na kterou si chce pronajmout pračku. Můžete předpokládat, že T_i a T'_i jsou celá čísla od 1 do 1 000 000 000.

Formát výstupu: První řádka textového souboru `pradelna.out` obsahuje jediné číslo P — nejmenší možný počet praček, s nimiž může Bořivoj obsloužit všechny zákazníky. Další N řádek bude obsahovat N čísel a_1

až a_N , přičemž a_i je číslo pračky, kterou má použít i -tý zákazník. Předpokládejte, že pračky budou očíslovány od 1 do P .

<i>Příklad:</i>	pradelna.in	pradelna.out
	4	3
	1000 1000	2
	1900 900	1
	1500 700	3
	2000 500	2

P – I – 2

Závody

Letos se po několika letech opět konají slavné závody švábů. Závody probíhají na pečlivě připravené překážkové dráze obsahující takové záhudnosti, jako je třeba mistička s cukrem. Švábi závodníci jsou na trať vypouštěni v minutových intervalech a aby je bylo možno v cíli rozeznat, má každý závodník k sobě připevněnu cedulku s minutou startu (první šváb má tedy číslo nula, druhý jedna, atd.). Organizátory závodu by zajímalo, jak moc se švábi během tréninkového běhu promíchali. Pokud by se totiž promíchali hodně, bylo by třeba prodloužit intervaly mezi jednotlivými závodníky, aby se při běhu tolik neovlivňovali. Jako míra promíchanosti závodníků byl stanoven počet dvojic závodníků, kteří doběhli do cíle v opačném pořadí, než v jakém vyběhli na trať. Spočítat míru promíchanosti pro dané pořadí švábů v cíli je již úloha pro vás.

Váš program dostane na vstupu počet švábů N a pořadí, v jakém švábi doběhli do cíle (tedy nějakou permutaci čísel $0, \dots, N-1$). Na výstup má váš program vypsát míru promíchanosti závodníků.

Formát vstupu: Vstupní textový soubor `zavody.in` obsahuje dva řádky. Na prvním řádku je uvedeno jedno celé číslo N , $1 \leq N \leq 30\,000$. Na druhém řádku je N různých celých čísel z intervalu $0, \dots, N-1$ oddělených jednou mezerou.

Formát výstupu: Výstupní textový soubor `zavody.out` obsahuje jediný řádek s jedním celým číslem — počtem dvojic závodníků, kteří doběhli v opačném pořadí, než v jakém vystartovali.

<i>Příklad:</i>	zavody.in	zavody.out
	5	3
	1 0 4 2 3	

Fylogenetika

Fylogenetika je obor biologie zabývající se rozpoznáváním vývojových vztahů mezi organismy. Často používanou metodou je srovnávání genetického kódu. V této úloze se budeme zabývat výrazně zjednodušenou variantou tohoto problému.

Genetický kód budeme mít uložen jako řetězec skládající se z písmen ,A', ,C', ,G' a ,T'. Budeme předpokládat, že vývoj nového druhu probíhá tak, že se na začátek nebo na konec genetického kódu připojí nové geny — to je samozřejmě pouze idealizace (čti: úplný nesmysl). Dostanete zadán genetický kód několika organismů, vaším úkolem je nalézt mezi nimi všechny dvojice předek — potomek, tj. takové, že genetický kód předka je souvislým podřetězcem genetického kódu potomka.

Formát vstupu: Vstupní textový soubor `fylogen.in` obsahuje několik řetězců složených z písmen ,A', ,C', ,G' a ,T', reprezentujících genetické kódy jednotlivých organismů. Organismy jsou očíslovány $1, 2, \dots, n$; na i -tém řádku se nachází kód i -tého organismu. Můžete předpokládat, že řetězců je nejvýše 50, každý z nich má nejvýše 50 znaků a žádné dva řetězce nejsou stejné.

Formát výstupu: Výstupní textový soubor `fylogen.out` tvoří seznam všech dvojic předek — potomek. Každá řádka výstupního souboru popisuje jednu z těchto dvojic a sestává z čísla předka následovaného číslem potomka. Dvojice mohou být uvedeny v libovolném pořadí, nesmějí se však opakovat.

Příklad: Pro vstup

```
ATAT
CATATG
CATATGA
CATATGG
```

je jedním z možných správných řešení výstup

```
1 2
1 3
1 4
2 3
2 4
```


ALIK

Aritmeticko-logický integerový kalkulátor (zkráceně ALIK) je počítač stroj pracující s W -bitovými celými čísly v rozsahu 0 až $2^W - 1$ včetně; kdykoliv budeme hovořit o *číslech*, půjde o tato čísla. Budeme je obvykle zapisovat ve dvojkové soustavě polotučnými číslicemi a vždy si na začátek dvojkového zápisu doplníme příslušný počet nul, aby číslic (bitů) bylo právě W . Většinou také nebudeme rozlišovat mezi číslem a jeho dvojkovým zápisem, takže i -tým bitem čísla budeme rozumět i -tý bit jeho dvojkového zápisu (bity číslujeme zprava doleva od 0 do $W - 1$).

Paměť stroje je tvořena 26 *registry* pojmenovanými a až z . Každý registr vždy obsahuje jedno číslo.

ALIK se řídí programem, což je posloupnost přiřazovacích příkazů typu *registr := výraz*, přičemž *výraz* může obsahovat konstanty (čísla zapsaná ve dvojkové soustavě), registry, závorky a následující operátory (řecká písmena značí podvýrazy, v pravém sloupci jsou priority operátorů):

$\alpha + \beta$	sečte čísla α a β . Pokud je výsledek větší než $2^W - 1$, číslice vyšších řádů odřízne. Jinými slovy, počítá součet modulo 2^W .	4
$\alpha - \beta$	odečte od čísla α číslo β . Pokud je $\alpha < \beta$, spočte $2^W + \alpha - \beta$, čili rozdíl modulo 2^W .	4
$\neg \alpha$	spočte bitovou negaci čísla α , což je číslo, jehož i -tý bit je 0 právě tehdy, je-li i -tý bit čísla α roven 1, a naopak.	9
$\alpha \wedge \beta$	bitové operace: <i>and</i> , <i>or</i> a <i>xor</i> . Vyhodnocují se tak, že	8
$\alpha \vee \beta$	se i -tý bit výsledku spočte z i -tého bitu čísla α a i -tého	7
$\alpha \oplus \beta$	bitu čísla β podle následujících tabulek:	7

$0 \wedge 0 = 0$	$0 \vee 0 = 0$	$0 \oplus 0 = 0$
$0 \wedge 1 = 0$	$0 \vee 1 = 1$	$0 \oplus 1 = 1$
$1 \wedge 0 = 0$	$1 \vee 0 = 1$	$1 \oplus 0 = 1$
$1 \wedge 1 = 1$	$1 \vee 1 = 1$	$1 \oplus 1 = 0$

$\alpha \ll \beta$	posune číslo α o β bitů doleva, čili doplní na jeho konec β nul a odřízne prvních β bitů, aby byl výsledek opět W -bitový.	2
--------------------	---	---

$\alpha \gg \beta$ posune číslo α o β bitů doprava, čili doplní na jeho začátek β nul a odřízne posledních β bitů, aby byl výsledek opět W -bitový. 2

Pokud závorky neurčí jinak, vyhodnocují se operátory s vyšší prioritou před operátory s nižší prioritou. V rámci stejné priority se pak vyhodnocuje zleva doprava (s výjimkou operátoru $\neg$, který je unární, a tudíž se musí vyhodnocovat zprava doleva).

Příklad 0 (jak fungují operátory; zde máme $W = 4$):

$a + b \wedge c + d = (a + (b \wedge c)) + d$	zde zafungují priority operátorů
0101 + 1110 = 0011	nejvyšší bit výsledku 10011 se již oříznul
0001 - 1111 = 0010	odčítáme modulo 16 = 10000
0101 $\wedge$ 0011 = 0001	takto funguje <i>and</i>
0101 $\vee$ 0011 = 0111	takto <i>or</i>
0101 $\oplus$ 0011 = 0110	a takto <i>xor</i>
(1 $\ll$ 11) - 1 = 1000 - 1 = 0111	jak vyrobit pomocí $\ll$ posloupnost jedniček
$a \vee \neg a = 1111$	jak získat z čehokoliv samé jedničky

Výpočet probíhá takto: Nejprve se do registru x nastaví vstup (to je vždy jedno číslo) a do ostatních registrů nuly. Poté se provedou všechny příkazy v pořadí, v jakém jsou v programu uvedeny, přičemž vždy se nejprve vyhodnotí *výraz* na pravé straně a teprve poté se jeho výsledek uloží do *registru*, takže uvnitř výrazu je ještě možné pracovat s původní hodnotou registru. Po dokončení posledního příkazu se hodnota v registru y interpretuje jako výsledek výpočtu. Hodnoty v ostatních registrech mohou být libovolné.

Často budeme potřebovat, aby program mohl pracovat s většími čísly, než je číslo na vstupu, takže budeme rozlišovat velikost vstupu N (tj. počet bitů potřebných k zápisu vstupní hodnoty) a velikost W registrů a mezivýsledků, kterou si při psaní programu sami určíme. Pokud bychom ovšem povolili exponenciálně velká čísla (tedy $W = 2^N$), mohli bychom cokoliv spočítat v konstantním čase — stačilo by do jedné dlouhatánské konstanty uvedené v programu zakódovat všechny možné výsledky programu pro všechny hodnoty vstupu. Tak dlouhé registry lze však stěží považovat za realistické, proto přijmeme omezení, že W musí být polynomiální ve velikosti vstupu, čili že existuje konstanta k taková, že pro každé N je $W \leq N^k$.

Ne vždy si ovšem vystačíme s jedním programem, který funguje pro všechny velikosti vstupu — mnohdy potřebujeme podle N měnit hodnoty pomocných konstant v programu, někdy také nějakou operaci opakovat vícekrát v závislosti na velikosti vstupu. Povolíme si tedy programy zapisovat obecněji, a to tak, že uvedeme seznam pravidel, jež nám pro každé N vytvoří program, který počítá správně pro všechny vstupy velikosti N . [Formálně bychom tato pravidla mohli zavést třeba jako programy v nějakém klasickém programovacím jazyce. My si ale formalismus odpustíme a budeme je popisovat slovně.]

Při řešení úloh budeme chtít, aby časová složitost vygenerovaných programů, tedy jejich délka v závislosti na N , byla co nejmenší. Mezi stejně rychlými programy je pak lepší ten, který si vystačí s kratšími čísly, čili s menším W (to je analogie prostorové složitosti). Podobně jako u klasických programů ovšem budeme v obou případech přehlížet multiplikativní konstanty.

Příklad 1: Sestrojte program pro ALIK, který dostane na vstupu nenulové číslo a vrátí výsledek 1 právě tehdy, je-li toto číslo mocninou dvojky, jinak vrátí nulu.

ŘEŠENÍ. Nejdříve si všimněme, že mocniny dvojky jsou právě čísla, která obsahují právě jeden jedničkový bit. Sledujme chování následujícího jednoduchého programu.

Zmíňme ale ještě konvence, které budeme používat při psaní všech ukázkových programů: V levém sloupci naleznete jednotlivé příkazy, v pravém sloupci obecný tvar spočítané hodnoty pro libovolné N . Pokud se nějaká číslice nebo skupina číslic opakuje vícekrát, značíme opakování exponentem, tedy 0^8 je osm nul, $(01)^3$ je zkratka za **010101**. Řeckými písmeny značíme blíže neurčené skupiny bitů.

$$\begin{array}{ll} & x = \alpha 10^i \\ a := x - 1 & a = \alpha 01^i \\ b := x \wedge a & b = \alpha 00^i \end{array}$$

Číslo v registru a se od x vždy liší tím, že nejpravější 1 se změní na 0 a všechny 0 vpravo od ní se změní na 1. Proto $b = x \wedge a$ se musí od x lišit právě přepsáním nejpravější 1 na 0. (To proto, že bity vlevo od této 1 jsou stále stejné a $\alpha \wedge \alpha = \alpha$, zatímco ve zbytku čísla se vždy *anduje* 0 s 1, což dá nulu.) A jelikož mocniny dvojky jsou právě čísla, v jejichž dvojkovém zápisu je právě jedna 1, spočte náš program v b nulu

právě tehdy, je-li x mocninou dvojky (nebo nulou, což jsme si ale zakázali).

Zbývá tedy vyřešit, jak z nuly udělat požadovanou jedničku a z nenuly nulu. K tomu si zavedeme operaci $r := \text{if}(s, t, u)$, která bude realizovat podmínku: pokud $s \neq 0$, přiřadí $r := t$, jinak $r := u$. Provedeme to jednoduchým trikem: rozšíříme si registry o jeden pomocný bit vlevo, nastavíme v r tento bit na jedničku a sledujeme, zda se zmenšením vzniklého čísla o jedničku tento bit změní na nulu nebo ne:

$$\begin{array}{ll}
 v := s \vee 10^N & v = 1s \\
 v := v - 1 & v = 1r' \text{ (je-li } r \neq 0), \text{ jinak } 01^N \\
 v := v \wedge 10^N & v = 10^N \text{ nebo } 00^N \\
 v := v \gg N & v = 0^N 1 \text{ nebo } 0^N 0 \\
 v := v - 1 & v = 0^{N+1} \text{ nebo } 1^{N+1} \\
 r := (u \wedge v) \vee (t \wedge \neg v) & r = t \text{ nebo } u
 \end{array}$$

Stačí tedy na konec našeho programu přidat

$$y := \text{if}(b, 0, 1) \qquad y = 0 \text{ nebo } 1$$

a máme program, který rozpoznává mocniny dvojky v konstantním čase a používá k tomu čísla o $N + 1 = O(N)$ bitech.

Ještě si ukažme, jak bude probíhat výpočet pro dva konkrétní 8-bitové vstupy (tehdy je $N = 8$ a $W = 9$):

$$\begin{array}{lll}
 & x = 001011000 & x = 000100000 \\
 a := x - 1 & a = 001010111 & a = 000011111 \\
 b := x \wedge a & b = 001010000 & b = 000000000 \\
 v := b \vee 100000000 & v = 101010000 & v = 100000000 \\
 v := v - 1 & v = 101001111 & v = 011111111 \\
 v := v \wedge 100000000 & v = 100000000 & v = 000000000 \\
 v := v \gg 8 & v = 000000001 & v = 000000000 \\
 v := v - 1 & v = 000000000 & v = 111111111 \\
 y := (000000001 \wedge v) \vee & y = 000000000 & y = 000000001 \\
 \quad \vee (000000000 \wedge \neg v) & &
 \end{array}$$

Příklad 2: Sestrojte program pro ALIK, který spočte *binární paritu* vstupního čísla, čili vrátí 0 nebo 1 podle toho, zda je v tomto čísle sudý nebo lichý počet jedničkových bitů.

ŘEŠENÍ. Binární parita $P(x)$ čísla $x = x_{N-1} \dots x_1 x_0$ je podle definice rovna $x_0 \oplus x_1 \oplus \dots \oplus x_{N-1}$. Jelikož operace $\oplus$ je asociativní ($\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma$) a komutativní ($\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$), můžeme tento vztah pro $N = 2^k$ (to opět můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat) přeuspořádat na

$$P(x) = (x_0 \oplus x_{N/2}) \oplus (x_1 \oplus x_{N/2+1}) \oplus \dots \oplus (x_{N/2-1} \oplus x_{N-1}),$$

což je ovšem parita čísla vzniklého vyxorováním horní a dolní poloviny čísla x . Takže výpočet parity N -bitového čísla můžeme na konstantní počet příkazů převést na výpočet parity $\frac{1}{2}N$ -bitového čísla, ten zase na výpočet parity $\frac{1}{4}N$ -bitového čísla atd., až po $\log_2 N$ kroků na paritu 1-bitového čísla, která je ovšem rovna číslu samému.

Paritu tedy vypočteme na logaritmický počet příkazů pracujících s N -bitovými čísly takto:

$$\begin{array}{ll} p := x \gg \frac{1}{2}N & p = \text{horních } \frac{1}{2}N \text{ bitů } x \\ q := x \wedge \mathbf{1}^{N/2} & q = \text{dolních } \frac{1}{2}N \text{ bitů } x \\ x := p \oplus q & x = \frac{1}{2}N\text{-bitové číslo s paritou} \\ & \text{jako původní } x \\ x := (x \gg \frac{1}{4}N) \oplus (x \wedge \mathbf{1}^{N/4}) & x = \frac{1}{4}N\text{-bitové... (můžeme psát zkráceně)} \\ \dots & \\ x := (x \gg 1) \oplus (x \wedge \mathbf{1}) & x = 1\text{-bitové...} \\ y := x & y = x \text{ (už jen zkopírovat výsledek)} \end{array}$$

Náš programovací jazyk samozřejmě žádné celé části čísel a podobné operace nemá, ale to vůbec nevadí, protože je vždy používáme jen na podvýrazy závisící pouze na N , takže je v programu můžeme pro každé N uvést jako konstanty. Například pro $N = 8$ bude výpočet probíhat takto:

$$\begin{array}{ll} & x = \mathbf{00110110} \\ p := x \gg 4 & p = \dots \mathbf{0011} \\ q := x \wedge \mathbf{1111} & q = \dots \mathbf{0110} \\ x := p \oplus q & x = \dots \mathbf{0101} \\ x := (x \gg 2) \oplus (x \wedge \mathbf{11}) & x = \dots \mathbf{00} \\ x := (x \gg 1) \oplus (x \wedge \mathbf{1}) & x = \dots \mathbf{0} \\ y := x & y = \mathbf{00000000} \end{array}$$

Soutěžní úlohy.

- a) Sestrojte program pro ALIK, jehož výsledkem bude počet jedničkových bitů ve dvojkovém zápisu čísla na vstupu.

- b) Sestrojte program pro ALIK, který k zadanému číslu x spočte nejbližší větší číslo, v jehož dvojkovém zápisu je stejný počet jedniček jako v zápisu x . Pokud takové číslo neexistuje, výsledek může být libovolný.

P – II – 1

Prádelní salón

Z Bořivoje se stal díky vaší pomoci úspěšný podnikatel a jeho klientela zahrnuje i bohatší a malichernější zákazníky. Pokud totiž nějaký zákazník uvidí dva různé zákazníky používat stejnou pračku, nebude už tuto prádelnu dále navštěvovat: „No považte, přece nelze prát prádlo s lidmi, kteří nemají na to, aby si zaplatili pračku sami pro sebe!“

Soutěžní úloha. Na vstupu dostanete $N \leq 10\,000$ — počet zákazníků, kteří navštíví Bořivojovu prádelnu během jednoho dne. U každého zákazníka je zadán čas jeho příchodu a doba, na jakou si chce pronajmout pračku (obojí jsou celá čísla mezi 1 a 1 000 000 000). Požadavky zákazníků nejsou uvedeny v žádném konkrétním pořadí.

Vášim úkolem je zjistit, kolik nejméně praček Bořivoj potřebuje, aby všichni jeho zákazníci byli zcela spokojeni. Zákazník bude spokojen, pokud si bude moci pronajmout pračku od okamžiku příchodu na dobu, kterou požaduje (je samozřejmé, že jednu pračku nemohou používat dva různí zákazníci současně), a navíc během doby, kdy bude prát, nebude žádnou pračku využívat více zákazníků po sobě.

Kromě určení minimálního počtu praček musíte pro Bořivoje vytvořit ještě seznam, podle kterého bude posílat zákazníky k volným pračkám.

Příklad: Pro 5 zákazníků, jejichž příchody a doby praní jsou

1000 1000

3000 2000

4500 500

1500 500

2000 2000

jsou potřeba alespoň 3 pračky a přiřazení praček zákazníkům například takové:

zákazník 1 bude u pračky 2

zákazník 2 bude u pračky 3

zákazník 3 bude u pračky 1

zákazník 4 bude u pračky 3

zákazník 5 bude u pračky 2

Všimněte si, že zákazníci 3 a 5 nemohou dostat stejnou pračku, protože by je viděl zákazník 2 pracovat u stejné pračky.

P – II – 2

Zakázané rozdíly

Mějme dáno celé kladné číslo N , $N \geq 2$, a soustavu podmínek tvaru $x_i - x_j \neq a_{i,j}$, kde $x_1, \dots, x_{N+1}$ jsou proměnné, $a_{i,j}$ jsou celá čísla mezi 0 a $N - 1$ a pro každou dvojici indexů i a j , $1 \leq i < j \leq N + 1$ soustava obsahuje právě jednu podmínku.

Soustavu budeme řešit modulo modulo zadané číslo N , tj. všechny aritmetické operace jsou prováděny modulo N . Připomeňme si, že výsledkem aritmetické operace provedené modulo N je zbytek po dělení původního výsledku číslem N , např. $(2+3) \bmod 4 = 1$, $(2-3) \bmod 4 = 3$, $(3 \cdot 2) \bmod 5 = 1$, $(3 \cdot 4) \bmod 6 = 0$, atd. Všimněte si zejména způsobu počítání, pokud je původní výsledek operace záporný.

Naleznete algoritmus, který pro zadané N a čísla $a_{i,j}$ zjistí, zda zadaná soustava podmínek má řešení, tzn. zda existují čísla $x_1, \dots, x_{N+1} \in \{0, \dots, N - 1\}$ taková, že rozdíl $x_j - x_i - a_{i,j}$ není dělitelný N pro žádné i a j , $1 \leq i < j \leq N + 1$. Pokud má soustava řešení, algoritmus musí také libovolné její řešení nalézt a vypsát.

Příklad 1: Pro $N = 3$, máme zadány následující podmínky:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\neq 1, \\ x_1 - x_3 &\neq 2, \\ x_1 - x_4 &\neq 2, \\ x_2 - x_3 &\neq 2, \\ x_2 - x_4 &\neq 1, \\ x_3 - x_4 &\neq 0. \end{aligned}$$

Soustava má řešení, např. $x_1 = x_2 = x_4 = 2$ a $x_3 = 1$.

Příklad 2: Pro $N = 2$, máme zadány následující podmínky:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\neq 1, \\ x_1 - x_3 &\neq 0, \\ x_2 - x_3 &\neq 1. \end{aligned}$$

Pokud $x_1 = 0$, pak $x_2 = 0$ podle první podmínky a $x_3 = 1$ podle druhé podmínky. Potom ale třetí podmínka není splněna. Podobně pokud

$x_1 = 1$, x_2 musí být rovno 0 a x_3 rovno 1 a třetí podmínka opět není splněna. Zadaná soustava podmínek tedy nemá řešení.

P – II – 3

Redundantní redundance

Úřad pro potírání redundantních repetíc (zřízený Komisí pro likvidaci redundantních úřadů) se zabývá odstraňováním zbytečně opakovaných dokumentů v archivech. Procházení archivů je samozřejmě velmi nudná práce, která odvádí úředníky od jiných, mnohem zajímavějších a jistě i prospěšnějších využití jejich pracovního času. Velmi by je proto potěšilo, kdybyste pro ně napsali program řešící následující úlohu:

Je dáno přirozené číslo k a nějaký znakový řetězec T . Určete souvislý podřetězec délky k , který se v T nejvíce opakuje, a také počet jeho výskytů R . Jednotlivé výskyty tohoto řetězce se mohou částečně překrývat. V případě, že existuje více řetězců, které se opakují R -krát, vypište jeden libovolný z nich.

Příklad: Pro vstup abababa a $k = 3$ je nejčastějším řetězcem aba opakující se 3krát.

P – II – 4

ALÍK

Definici stroje ALIK naleznete ve studijním textu za touto úlohou. Od domácího kola se liší tím, že přibýly operace násobení, dělení a zbytku po dělení a Příklad 3 na tyto operace.

Soutěžní úloha. Sestrojte program pro ALIK, který k zadanému číslu $x = x_{N-1} \dots x_1 x_0$ nalezne zrcadlové číslo $y = x_0 x_1 \dots x_{N-1}$, tj. číslo, jehož dvojkový zápis vznikne zapsáním N -bitového dvojkového zápisu čísla x (včetně případných počátečních nul) pozpátku.

Studijní text. Aritmeticko-logický integerový kalkulátor (zkráceně ALIK) je počítačový stroj pracující s W -bitovými celými čísly v rozsahu 0 až $2^W - 1$ včetně; kdykoliv budeme hovořit o *číslech*, půjde o tato čísla. Budeme je obvykle zapisovat ve dvojkové soustavě polotučnými číslicemi a vždy si na začátek dvojkového zápisu doplníme příslušný počet nul, aby číslic (bitů) bylo právě W . Většinou také nebudeme rozlišovat mezi číslem a jeho dvojkovým zápisem, takže i -tým bitem čísla budeme rozumět i -tý bit jeho dvojkového zápisu (bity číslujeme zprava doleva od 0 do $W - 1$).

Paměť stroje je tvořena 26 *registry* pojmenovanými *a* až *z*. Každý registr vždy obsahuje jedno číslo.

ALIK se řídí programem, což je posloupnost přiřazovacích příkazů typu *registr := výraz*, přičemž *výraz* může obsahovat konstanty (čísla zapsaná ve dvojkové soustavě), registry, závorky a následující operátory (řecká písmena značí podvýrazy, v pravém sloupci jsou priority operátorů):

$\alpha + \beta$	sečte čísla α a β . Pokud je výsledek větší než $2^W - 1$, číslice vyšších řádů odřízne. Jinými slovy, počítá součet modulo 2^W .	4
$\alpha - \beta$	odečte od čísla α číslo β . Pokud je $\alpha < \beta$, spočte $2^W + \alpha - \beta$, čili rozdíl modulo 2^W .	4
$\alpha * \beta$	vynásobí dvě čísla, výsledek opět modulo 2^W .	6
α / β	vydělí číslo α číslem β ; dělení nulou dá vždy výsledek 0.	6
$\alpha \% \beta$	vrátí zbytek po dělení čísla α číslem β , čili $\alpha - \beta * (\alpha / \beta)$; pokud je $\beta = 0$, je výsledek roven α .	6
$\neg \alpha$	spočte bitovou negaci čísla α , což je číslo, jehož <i>i</i> -tý bit je 0 právě tehdy, je-li <i>i</i> -tý bit čísla α roven 1, a naopak.	9
$\alpha \wedge \beta$	bitové operace: <i>and</i> , <i>or</i> a <i>xor</i> . Vyhodnocují se tak, že	8
$\alpha \vee \beta$	se <i>i</i> -tý bit výsledku spočte z <i>i</i> -tého bitu čísla α a <i>i</i> -tého bitu čísla β podle následujících tabulek:	7
$\alpha \oplus \beta$		7

$0 \wedge 0 = 0$	$0 \vee 0 = 0$	$0 \oplus 0 = 0$
$0 \wedge 1 = 0$	$0 \vee 1 = 1$	$0 \oplus 1 = 1$
$1 \wedge 0 = 0$	$1 \vee 0 = 1$	$1 \oplus 0 = 1$
$1 \wedge 1 = 1$	$1 \vee 1 = 1$	$1 \oplus 1 = 0$

$\alpha \ll \beta$	posune číslo α o β bitů doleva, čili doplní na jeho konec β nul a odřízne prvních β bitů, aby byl výsledek opět W -bitový.	2
$\alpha \gg \beta$	posune číslo α o β bitů doprava, čili doplní na jeho začátek β nul a odřízne posledních β bitů, aby byl výsledek opět W -bitový.	2

Pokud závorky neurčí jinak, vyhodnocují se operátory s vyšší prioritou před operátory s nižší prioritou. V rámci stejné priority se pak vyhodnocuje zleva doprava (s výjimkou operátoru $\neg$, který je unární, a tudíž se musí vyhodnocovat zprava doleva).

Příklad 0 (jak fungují operátory; zde máme $W = 4$):

$a + b \wedge c + d = (a + (b \wedge c)) + d$	zde zafungují priority operátorů
0101 + 1110 = 0011	nejvyšší bit výsledku 10011 se již oříznul
0001 - 1111 = 0010	odčítáme modulo 16 = 10000
0101 $\wedge$ 0011 = 0001	takto funguje <i>and</i>
0101 $\vee$ 0011 = 0111	takto <i>or</i>
0101 $\oplus$ 0011 = 0110	a takto <i>xor</i>
(1 $\ll$ 11) - 1 = 1000 - 1 = 0111	jak vyrobit pomocí $\ll$ posloupnost jedniček
$a \vee \neg a = 1111$	jak získat z čehokoliv samé jedničky

Výpočet probíhá takto: Nejprve se do registru x nastaví vstup (to je vždy jedno číslo) a do ostatních registrů nuly. Poté se provedou všechny příkazy v pořadí, v jakém jsou v programu uvedeny, přičemž vždy se nejprve vyhodnotí *výraz* na pravé straně a teprve poté se jeho výsledek uloží do *registru*, takže uvnitř výrazu je ještě možné pracovat s původní hodnotou registru. Po dokončení posledního příkazu se hodnota v registru y interpretuje jako výsledek výpočtu. Hodnoty v ostatních registrech mohou být libovolné.

Často budeme potřebovat, aby program mohl pracovat s většími čísly, než je číslo na vstupu, takže budeme rozlišovat velikost vstupu N (tj. počet bitů potřebných k zápisu vstupní hodnoty) a velikost W registrů a mezivýsledků, kterou si při psaní programu sami určíme. Pokud bychom ovšem povolili exponenciálně velká čísla (tedy $W = 2^N$), mohli bychom cokoliv spočítat v konstantním čase — stačilo by do jedné dlouhatánské konstanty uvedené v programu zakódovat všechny možné výsledky programu pro všechny hodnoty vstupu. Tak dlouhé registry lze však stěží považovat za realistické, proto přijmeme omezení, že W musí být polynomiální ve velikosti vstupu, čili že existuje konstanta k taková, že pro každé N je $W \leq N^k$.

Ne vždy si ovšem vystačíme s jedním programem, který funguje pro všechny velikosti vstupu — mnohdy potřebujeme podle N měnit hodnoty pomocných konstant v programu, někdy také nějakou operaci opakovat vícekrát v závislosti na velikosti vstupu. Povolíme si tedy programy zapisovat obecněji, a to tak, že uvedeme seznam pravidel, jež nám pro každé N vytvoří program, který počítá správně pro všechny vstupy velikosti N . [Formálně bychom tato pravidla mohli zavést třeba jako programy v ně-

jakém klasickém programovacím jazyce. My si ale formalismus odpustíme a budeme je popisovat slovně.]

Při řešení úloh budeme chtít, aby časová složitost vygenerovaných programů, tedy jejich délka v závislosti na N , byla co nejmenší. Mezi stejně rychlými programy je pak lepší ten, který si vystačí s kratšími čísly, čili s menším W (to je analogie prostorové složitosti). Podobně jako u klasických programů ovšem budeme v obou případech přehlížet multiplikativní konstanty.

Příklad 1: Sestrojte program pro ALIK, který dostane na vstupu nenulové číslo a vrátí výsledek 1 právě tehdy, je-li toto číslo mocninou dvojky, jinak vrátí nulu.

ŘEŠENÍ. Nejříve si všimněme, že mocniny dvojky jsou právě čísla, která obsahují právě jeden jedničkový bit. Sledujme chování následujícího jednoduchého programu.

Zmíňme ale ještě konvence, které budeme používat při psaní všech ukázkových programů: V levém sloupci naleznete jednotlivé příkazy, v pravém sloupci obecný tvar spočítané hodnoty pro libovolné N . Pokud se nějaká číslice nebo skupina číslic opakuje vícekrát, značíme opakování exponentem, tedy 0^8 je osm nul, $(01)^3$ je zkratka za 010101 . Řeckými písmeny značíme blíže neurčené skupiny bitů.

$$\begin{array}{ll} & x = \alpha 10^i \\ a := x - 1 & a = \alpha 01^i \\ b := x \wedge a & b = \alpha 00^i \end{array}$$

Číslo v registru a se od x vždy liší tím, že nejpravější 1 se změní na 0 a všechny 0 vpravo od ní se změní na 1. Proto $b = x \wedge a$ se musí od x lišit právě přepsáním nejpravější 1 na 0. (To proto, že bity vlevo od této 1 jsou stále stejné a $\alpha \wedge \alpha = \alpha$, zatímco ve zbytku čísla se vždy *anduje* 0 s 1, což dá nulu.) A jelikož mocniny dvojky jsou právě čísla, v jejichž dvojkovém zápisu je právě jedna 1, spočte náš program v b nulu právě tehdy, je-li x mocninou dvojky (nebo nulou, což jsme si ale zakázali).

Zbývá tedy vyřešit, jak z nuly udělat požadovanou jedničku a z nenuly nulu. K tomu si zavedeme operaci $r := \text{if}(s, t, u)$, která bude realizovat podmínku: pokud $s \neq 0$, přiřadí $r := t$, jinak $r := u$. Provedeme to jednoduchým trikem: rozšíříme si registry o jeden pomocný bit vlevo, nastavíme v r tento bit na jedničku a sledujeme, zda se zmenšením vznik-

lého čísla o jedničku tento bit změní na nulu nebo ne:

$$\begin{array}{ll}
 v := s \vee \mathbf{10}^N & v = \mathbf{1}s \\
 v := v - 1 & v = \mathbf{1}r' \text{ (je-li } r \neq 0), \text{ jinak } \mathbf{01}^N \\
 v := v \wedge \mathbf{10}^N & v = \mathbf{10}^N \text{ nebo } \mathbf{00}^N \\
 v := v \gg N & v = \mathbf{0}^N \mathbf{1} \text{ nebo } \mathbf{0}^N \mathbf{0} \\
 v := v - 1 & v = \mathbf{0}^{N+1} \text{ nebo } \mathbf{1}^{N+1} \\
 r := (u \wedge v) \vee (t \wedge \neg v) & r = t \text{ nebo } u
 \end{array}$$

Stačí tedy na konec našeho programu přidat

$$y := \text{if}(b, 0, 1) \qquad y = \mathbf{0} \text{ nebo } \mathbf{1}$$

a máme program, který rozpoznává mocniny dvojky v konstantním čase a používá k tomu čísla o $N + 1 = O(N)$ bitech.

Ještě si ukažme, jak bude probíhat výpočet pro dva konkrétní 8-bitové vstupy (tehdy je $N = 8$ a $W = 9$):

$$\begin{array}{lll}
 & x = \mathbf{001011000} & x = \mathbf{000100000} \\
 a := x - 1 & a = \mathbf{001010111} & a = \mathbf{000011111} \\
 b := x \wedge a & b = \mathbf{001010000} & b = \mathbf{000000000} \\
 v := b \vee \mathbf{100000000} & v = \mathbf{101010000} & v = \mathbf{100000000} \\
 v := v - 1 & v = \mathbf{101001111} & v = \mathbf{011111111} \\
 v := v \wedge \mathbf{100000000} & v = \mathbf{100000000} & v = \mathbf{000000000} \\
 v := v \gg 8 & v = \mathbf{000000001} & v = \mathbf{000000000} \\
 v := v - 1 & v = \mathbf{000000000} & v = \mathbf{111111111} \\
 y := (\mathbf{000000001} \wedge v) \vee & y = \mathbf{000000000} & y = \mathbf{000000001} \\
 & & \vee (\mathbf{000000000} \wedge \neg v)
 \end{array}$$

Příklad 2: Sestrojte program pro ALIK, který spočte *binární paritu* vstupního čísla, čili vrátí 0 nebo 1 podle toho, zda je v tomto čísle sudý nebo lichý počet jedničkových bitů.

ŘEŠENÍ. Binární parita $P(x)$ čísla $x = x_{N-1} \dots x_1 x_0$ je podle definice rovna $x_0 \oplus x_1 \oplus \dots \oplus x_{N-1}$. Jelikož operace $\oplus$ je asociativní ($\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma$) a komutativní ($\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$), můžeme tento vztah pro $N = 2^k$ (to opět můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat) přeuspořádat na

$$P(x) = (x_0 \oplus x_{N/2}) \oplus (x_1 \oplus x_{N/2+1}) \oplus \dots \oplus (x_{N/2-1} \oplus x_{N-1}),$$

což je ovšem parita čísla vzniklého v XORování horní a dolní poloviny čísla x . Takže výpočet parity N -bitového čísla můžeme na konstantní počet příkazů převést na výpočet parity $\frac{1}{2}N$ -bitového čísla, ten zase na výpočet parity $\frac{1}{4}N$ -bitového čísla atd., až po $\log_2 N$ kroků na paritu 1-bitového čísla, která je ovšem rovna číslu samému.

Paritu tedy vypočteme na logaritmický počet příkazů pracujících s N -bitovými čísly takto:

$$\begin{array}{ll}
 p := x \gg \frac{1}{2}N & p = \text{horních } \frac{1}{2}N \text{ bitů } x \\
 q := x \wedge \mathbf{1}^{N/2} & q = \text{dolních } \frac{1}{2}N \text{ bitů } x \\
 x := p \oplus q & x = \frac{1}{2}N\text{-bitové číslo s paritou} \\
 & \text{jako původní } x \\
 x := (x \gg \frac{1}{4}N) \oplus (x \wedge \mathbf{1}^{N/4}) & x = \frac{1}{4}N\text{-bitové... (můžeme psát zkráceně)} \\
 \dots & \\
 x := (x \gg 1) \oplus (x \wedge \mathbf{1}) & x = 1\text{-bitové...} \\
 y := x & y = x \text{ (už jen zkopírovat výsledek)}
 \end{array}$$

Náš programovací jazyk samozřejmě žádné celé části čísel a podobné operace nemá, ale to vůbec nevadí, protože je vždy používáme jen na podvýrazy závisící pouze na N , takže je v programu můžeme pro každé N uvést jako konstanty. Například pro $N = 8$ bude výpočet probíhat takto:

$$\begin{array}{ll}
 & x = \mathbf{00110110} \\
 p := x \gg 4 & p = \dots \mathbf{0011} \\
 q := x \wedge \mathbf{1111} & q = \dots \mathbf{0110} \\
 x := p \oplus q & x = \dots \mathbf{0101} \\
 x := (x \gg 2) \oplus (x \wedge \mathbf{11}) & x = \dots \mathbf{00} \\
 x := (x \gg 1) \oplus (x \wedge \mathbf{1}) & x = \dots \mathbf{0} \\
 y := x & y = \mathbf{00000000}
 \end{array}$$

Příklad 3: Ve vzorovém řešení úlohy P-I-4 b) jsme potřebovali přesunout posloupnost jedniček na konec čísla, tedy číslo tvaru $\mathbf{0}^i \mathbf{1}^j \mathbf{0}^k$ převést na $\mathbf{0}^i \mathbf{0}^j \mathbf{1}^k$. To je pomocí dělení možné provést v konstantním čase třeba takto:

$$\begin{array}{ll}
 & x = \mathbf{0}^i \mathbf{1}^j \mathbf{0}^k \\
 a := x \wedge (x - 1) & a = \mathbf{0}^i \mathbf{1}^{j-1} \mathbf{00}^k \text{ (viz Příklad 1)} \\
 b := x \oplus a & b = \mathbf{0}^i \mathbf{0}^{j-1} \mathbf{10}^k \\
 y := x / b & b = \mathbf{0}^i \mathbf{0}^k \mathbf{1}^j
 \end{array}$$

Zde jsme využili toho, že dělení mocninou dvojky je možné použít jako bitový posun doprava, ovšem zadaný místo počtu bitů, o které se má posouvat, číslem majícím 1 na pozici, která se má po posunu objevit úplně vpravo.

P – III – 1

Náhrdelníky

K. O. Lektor je sběratel náhrdelníků. Náhrdelníky se liší počtem, pořadím a druhy použitých drahokamů. Jeho finanční zdroje nejsou neomezené, proto by se chtěl vyhnout tomu, aby kupoval více kusů stejného typu náhrdelníku. Vymyslel tedy kódování, které funguje takto: každému druhu drahokamů přiřadil písmeno abecedy a tyto kódy zapsal v pořadí, v jakém se nacházejí na náhrdelníku, počínaje libovolným z nich. Dále si pořídil stroj, který pro zadaný kód zjistí, zda již má příslušný náhrdelník ve sbírce.

Obchodníci s náhrdelníky si samozřejmě rychle povšimli slabiny tohoto systému — pokud náhrdelník pootočili, případně obrátili, kód se změnil a K. O. Lektor si tak nakoupil několik duplikátů — například náhrdelník ABCA si koupil i jako AABC a ACBA. Chtěl by tedy svůj stroj vylepšit tak, aby tuto situaci rozeznal. Napište program implementující toto vylepšení.

Program dostane na vstupu několik kódů náhrdelníků $x_1, \dots, x_N$ ($1 \leq N \leq 1\,000\,000$) a měl by pro každý z nich vypsát, zda si ho má K. O. Lektor koupit nebo ne tak, aby získal každý typ náhrdelníků právě jednou. Pokud je náhrdelník x_i různý od všech náhrdelníků $x_1, \dots, x_{i-1}$ (včetně rotací a zrcadlení), program odpoví „Kup to“, v opačném případě odpoví „Podvod“.

Program může využívat starý stroj jako „černou skříňku“, která si pamatuje množinu kódů náhrdelníků (na počátku práce množinu prázdnou) a je schopna do této množiny kódy přidávat (zavoláním procedury `Pridej`) a zjišťovat, jestli stroj již nějaký kód zná (zavoláním funkce `UzMam`, která vrací `true` (1 v C), pokud někdy předtím byla zavolána procedura `Pridej` pro stejný kód):

```
int UzMam (const char *kod);           /* v C */
void Pridej (const char *kod);
function UzMam (var kod:string):boolean; { v Pascalu }
procedure Pridej (var kod:string);
```

K. O. Lektor má na váš program následující požadavky: Paměťová složitost nesmí záviset na počtu testovaných náhrdelníků. Časová složitost by měla být co nejnižší, přičemž volání funkce starého stroje počítáme jako operace běžící v lineárním čase. Ze dvou programů o stejné časové složitosti pak považuje za lepší ten, který funkce starého stroje volá méněkrát.

Příklad: V levém sloupci je vstup, v pravém jediný správný výstup:

ABCA	Kup to
ACBA	Podvod
AABC	Podvod

P – III – 2

Mosty

Magické observatoře (MO) nedávno otevřely nový areál v Horních Mokřadech. Podnebí v Horních Mokřadech je bohužel poměrně deštivé, a tak se vedení MO rozhodlo, že propojí všechny budovy v areálu nadzemními krytými mosty. Vedení MO samozřejmě chce, aby si dodatečné stavební úpravy vyžádaly co nejmenší náklady. Proto požaduje, aby celková délka mostů, které propojí budovy v areálu, byla co nejmenší. Navíc, kvůli vlivu energetických zón v okolí Horních Mokřad, musí všechny mosty vést severojižně.

Vášim úkolem je vytvořit algoritmus, který pro zadanou mapu areálu MO navrhne nejlepší možné propojení budov severojižními mosty. Pokud všechny budovy nelze navzájem propojit, pak algoritmus vypíše vhodnou zprávu.

Na vstupu algoritmus obdrží mapu areálu MO jako čtvercovou síť o N řádcích a M sloupcích. Budovy v areálu jsou reprezentovány znaky x , volná prostranství tečkami. Budova je maximální oblast tvořená políčky x , která se mezi sebou dotýkají hranami. Vášim úkolem je navrhnout propojení budov severojižními (na mapě svislými) mosty tak, aby mezi každými dvěma budovami existovala cesta používající pouze políček x a mostů: Mezi dvěma políčky x lze přejít, pokud sousedí hranou, mosty lze používat pouze v severojižním směru, tj. seshora dolů nebo zdola nahoru v jejich směru na mapě.

Při (popisu) řešení této úlohy se soustřeďte na efektivní nalezení optimálního propojení mezi budovami a zdůvodnění správnosti navrženého algoritmu.

Příklad 1: Pro $M = 8$ a $N = 5$
uvažme následující mapu areálu:

```
..xxxxx.
.....x
...x...x
.x.x....
.xxx..xx
```

Areál je tvořen čtyřmi budovami (na následujícím obrázku jsou jejich políčka označena čísly 1 až 4; všimněte si, že políčka s čísly 1 a 2 tvoří dvě různé budovy):

```
..11111.
.....2
...3...2
.3.3....
.333..44
```

Optimální řešení úlohy pro zadanou mapu je propojit dvojici budov 1 a 3 mostem délky jedna, dvojici budov 2 a 4 rovněž mostem délky jedna a budovy 1 a 4 mostem délky tři:

```
..11111.
...|.|.2
...3...|2
.3.3...||
.333..44
```

Protože mosty lze používat pouze severojižně, nemůžeme z mostu spojujícího budovy 1 a 4 přejít do budovy 2 a je třeba vybudovat i most mezi budovami 2 a 4.

Příklad 2: Pro $M = 6$ a $N = 5$
uvažme následující mapu areálu:

```
xxxxxxx
x...x
x.xx.x
x...x
xxxxxxx
```

Areál je tvořen dvěma budovami a k jejich propojení stačí vybudovat jeden most délky 1:

```
xxxxxxx
x.|..x
x.xx.x
x...x
xxxxxxx
```

Příklad 3: Pro $M = 5$ a $N = 4$
uvažme následující mapu areálu:

```
xxx..
.....
xxx..
...xx
```

Areál je tvořen třemi budovami. Protože budovu v pravém dolním rohu nelze spojit s žádnou jinou budovou mostem, všechny budovy nelze vzájemně propojit.

P – III – 3

ALÍK

Sestrojte program pro stroj ALÍK, který spočte dvojkový logaritmus zadaného nenulového čísla x , tedy pozici nejlevější jedničky v x . Pozice bitů rostou zprava doleva, nejnižší řád je na pozici 0.

Příklad: Dvojkový logaritmus dvojkového čísla **00110001** je 5, logaritmus z **00000001** je 0.

P – III – 4

Zaklínadla

Program: `magie.pas / magie.c / magie.cpp`

Vstup: `magie.in`

Výstup: `magie.out`

Při výzkumu vlivu přesmyček na magická zaklínadla se podařilo dokázat, že výměna takových dvou sousedních písmen v zaklínadle, která se nevyskytují v (anglické) abecedě těsně vedle sebe, nemá vliv na magický účinek zaklínadla. Například místo oblíbeného *abraka* lze stejně dobře použít *arbaka*, ale nikoliv již *baraka*. Samozřejmě lze sousední písmena v zaklínadle prohazovat vícekrát, takže z *abraka* lze postupně odvodit následující (stejně účinná) zaklínadla:

$$\begin{aligned} \text{abraka} &\longrightarrow \text{arbaka} \longrightarrow \text{rabaka} \longrightarrow \text{rabkaa} \longrightarrow \\ &\longrightarrow \text{rakbaa} \longrightarrow \text{rkabaa} \longrightarrow \text{krabaa}. \end{aligned}$$

Povšimněte si, že pořadí výměn sousedních písmen v zaklínadle můžeme otočit, a tedy ze zaklínadla *krabaa* lze též získat původní *abraka*.

Dvě zaklínadla nazveme *ekvivalentní*, jestliže je lze mezi sebou převést posloupností výměn dvou sousedních písmen, která se nevyskytují v abecedě těsně vedle sebe. Například zaklínadla *abraka* a *krabaa* jsou ekvivalentní, ale zaklínadla *dabra* a *badar* ne.

Soutěžní úloha. Napište program, který pro zadané dvojice zaklínadel určí, zda jsou či nejsou ekvivalentní.

Vstup: Vstupní soubor `magie.in` obsahuje několik bloků, z nichž každý odpovídá jedné dvojici zaklínadel. Obě zaklínadla v jednom bloku mají vždy stejný počet písmen N , $1 \leq N \leq 1\,000\,000$, který je uveden na prvním řádku každého bloku. Následuje N řádků, z nichž každý obsahuje dvě malá písmena anglické abecedy (tzn. znaky z rozmezí

a...z), která jsou oddělená jednou mezerou. První znak na *i*-tém z těchto řádků je *i*-tý znak prvního zaklínadla, druhý znak je *i*-tý znak druhého zaklínadla. Vstupní soubor je ukončen řádkem, který obsahuje jediné číslo 0.

Výstup: Výstupní soubor `magie.out` obsahuje pro každý blok vstupního souboru jeden řádek. Tento řádek obsahuje slovo „ekvivalentni“, pokud jsou zadaná zaklínadla ekvivalentní, a slovo „neekvivalentni“, pokud nejsou. Řádky musí být vypsány v pořadí, v jakém se jim odpovídající bloky vyskytují v souboru `magie.in`.

Příklad:

Soubor <code>magie.in</code>	Soubor <code>magie.out</code>
6	ekvivalentni
a k	neekvivalentni
b r	
r a	
a b	
k a	
a a	
5	
d b	
a a	
b d	
r a	
a r	
0	

P – III – 5

Asfaltěři

Program: `asfalt.pas` / `asfalt.c` / `asfalt.cpp`

Vstup: `asfalt.in`

Výstup: `asfalt.out`

Ve Viácii si občané již dlouho stěžovali na nekvalitní silnice. Když si jednou i vrchní cestář při cestě do práce v kočáře vyrazil zub, rozhodl se k radikální akci. Doslechl se, že v sousední zemi začali na cesty používat novinku zvanou asfalt, a myšlenka na vyasfaltování všech silnic ve Viácii byla na světě. A jak si vrchní cestář usmyslel, tak se i stalo. Při realizaci nápadu se ale nižší cestáři museli potýkat s nemilým problémem: asfalt se

do Viácie dovážel v ohromných barelech, ve kterých bylo asfaltu tak akorát na dvě cesty (byly to opravdu ohromné barely). Potíž byla v tom, že jakmile se barel narazil a asfalt z něj začal vytékat, nedal se už proud asfaltu ničím zastavit a bylo tedy nutné vyasfaltovat najednou dvě na sebe navazující cesty. Jenže jak rozvrhnout asfaltování, aby cestáři neskončili ve městě s poloplným barelem a se všemi cestami vedoucími do města už vyasfaltovanými? Důsledky zalití náměstí a několika přilehlých čtvrtí do asfaltu by byly pro cestáře jistě nemilé... Rozhodli se proto přizvat k problému vás, jakožto na asfalt vzaté odborníky.

Soutěžní úloha. Napište program, který pro zadané propojení měst cestami rozhodne, zda je možno cesty podle popsaných pravidel vyasfaltovat, a pokud ano, vypíše jednu z možností, jak rozvrhnout, která dvojice cest bude asfaltována ze kterého barelu.

Vstup: Na prvním řádku vstupního souboru `asfalt.in` se nacházejí dvě celá čísla N a M oddělená mezerou, $1 \leq N \leq 10\,000$, $1 \leq M \leq \leq 40\,000$ — počet měst a počet cest ve Viácii. Dále ve vstupním souboru následuje M řádků popisujících jednotlivé cesty. Každý řádek obsahuje dvě celá čísla A a B oddělená mezerou — čísla měst (města číslováme od jedné do N), mezi kterými cesta vede. Předpokládejte, že mezi každými dvěma městy se lze po cestách dostat (pokud ne přímo, tak přes jiná města).

Výstup: Výstupní soubor `asfalt.out` bude buď obsahovat jediný řádek s textem „Cesty nelze vyasfaltovat.“, pokud neexistuje způsob, jak vyasfaltovat všechny cesty a neskončit s poloplným barelem v nějakém městě, nebo bude obsahovat $M/2$ řádků s popisem postupu asfaltování. Každý řádek postupu bude popisovat využití jednoho barelu s asfaltem. Bude obsahovat tři celá čísla oddělená mezerou — číslo města, ve kterém má asfaltování začít, číslo města, do kterého se má pokračovat a číslo města, ve kterém má asfaltování skončit. Každá cesta musí být vyasfaltována právě jednou.

Příklad 1:

Soubor `asfalt.in`

3 3

1 2

2 3

3 1

Soubor `asfalt.out`

Cesty nelze vyasfaltovat.

Příklad 2:

Soubor `asfalt.in`

5 8

1 5

1 4

1 3

1 2

3 2

3 4

4 5

4 2

Soubor `asfalt.out`

5 1 4

5 4 3

4 2 3

3 1 2

Kategorie Z5

Texty úloh

Z5 – I – 1

Vendelín zavřel do bedny všechna dvoumístná čísla, která při dělení pěti dávají zbytek 3, avšak na jedno z nich zapomněl. Když čísla v bedně správně sečetl, dostal součet 911. Na které číslo zapomněl?

(L. Hozová)

Z5 – I – 2

Andulka a Maruška měly sraz přesně v 17.30 před kinem. Andulka si myslela, že jí jdou hodinky o 4 minuty napřed, ale ve skutečnosti se jí zpožďovaly o 8 minut. Maruška si myslela, že se jí hodinky o 8 minut zpožďují, ale šly jí o 4 minuty napřed. Kdy která z dívek přišla na sraz, jestliže si obě myslely, že přišly přesně v 17.30?

(Š. Ptáčková)

Z5 – I – 3

Tři princové šli na mnohohlavého draka. První princ mu levou rukou usekl polovinu hlav a pravou rukou ještě další dvě. Totéž udělali se zbylými hlavami druhý a pak i třetí princ. Potom drak padl bezhlavý na zem. Na kolikahlavého draka se princové vydali?

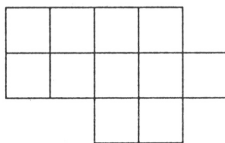
(Š. Ptáčková)

Z5 – I – 4

Na obr. 31 je mnohoúhelník složený z jedenácti stejných čtverečků.

- Zjisti jeho obvod, jestliže víš, že jeden malý čtvereček má obvod 20 cm.
- Které dva čtverečky mnohoúhelníku je nutno ubrat, aby vznikl nový mnohoúhelník s co největším obvodem? Namaluj alespoň jedno řešení.

(S. Bednářová)



Obr. 31

Z5 – I – 5

Hrací kostka má puntíky rozmístěny tak, že jejich součet na protilehlých stěnách je vždy 7. Kostka na obr. 32 stojí na stěně s jedním puntíkem, takže na podložce zanechá otisk „1“. Když převalíme kostku doprava na stěnu se dvěma puntíky, zanechá na podložce otisk „2“. Když pak převalíme kostku směrem k sobě, zanechá otisk „3“. Při tomto valení dostaneme stopu na obr. 33. Součet čísel této stopy je 6. Jestliže výchozí postavení kostky je na obr. 32,

a) jaký bude součet na stopě na obr. 34?

b) Jak bude vypadat stopa, na níž je součet 22?

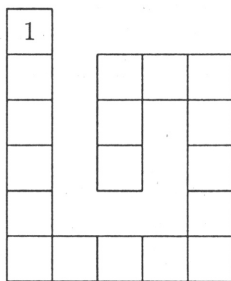
(*L. Hozová*)



Obr. 32



Obr. 33

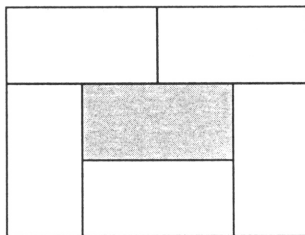


Obr. 34

Z5 – I – 6

Ivanka si staví z kostek komíny. Všechny kostky jsou stejné a mají rozměry 1 cm, 1 cm a 2 cm. Teď postavila jednopatrový dutý komín z pěti kostek na ploše 12 cm^2 (obr. 35). Rozhodla se ale, že postaví dutý komín na ploše 36 cm^2 z 260 takových kostek. Jaký nejvyšší komín mohla postavit, jestliže jí žádná kostka nezbyla a komín byl nahoře rovný?

(*Š. Ptáčková*)



Obr. 35

Z5 – II – 1

Karel měl sčítat všechna dvojmístná čísla, která po dělení deseti dávají zbytek, který se dá beze zbytku dělit pěti. Jedno z čísel však omylem započítal třikrát, takže mu vyšel součet 1 035. Které číslo započtl třikrát?
(S. Bednářová)

Z5 – II – 2

Krteček si začal razit nový tunel. Nejdříve tunel vedl 5 metrů na sever, potom 23 dm na západ, 150 cm na jih, 37 dm na západ, 620 cm na jih, 53 cm na východ a 27 dm na sever. Kolik centimetrů mu ještě zbývá vykopat, aby se dostal na začátek tunelu?
(M. Dillingerová)

Z5 – II – 3

Z čísla 9 876 543 210 vyškrtni co nejmenší počet číslic tak, aby na místě desítek byla číslice třikrát menší než na místě tisíců a na místě jednotek byla číslice o tři menší než na místě stovek. Najdi všechna řešení.
(S. Bodláková)

Kategorie Z6

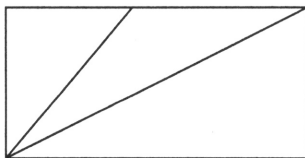
Texty úloh

Z6 – I – 1

Kladné desetinné číslo nazveme *vyvážené*, jestliže je součet číslic ležících před desetinnou čárkou roven součtu číslic za desetinnou čárkou. Např. číslo 25,133 je vyvážené. Napiš a) nejmenší, b) největší vyvážené číslo, jehož žádné dvě číslice nejsou stejné. (S. Bednářová)

Z6 – I – 2

Obdélník jsme rozdělili na tři trojúhelníky jako na obr. 36. Odměřili jsme všechny vnitřní úhly v těchto trojúhelnících a získali následující hodnoty: 20° , 30° , 30° , 40° , 50° , 60° , 90° , 90° a 130° . Dopiš je na správná místa v obrázku. (Pozor, obrázek může být nepřesný, nevyplatí se měřit.) (S. Bednářová)



Obr. 36

Z6 – I – 3

V zemi „Číselkovo“ žijí jen přirozená čísla. Muži a chlapci jsou sudá čísla, ženy a dívky jsou lichá čísla. Manželé mají hned po svatbě děti, a to všechna čísla, která dělí jejich součin beze zbytku. Kterého nápadníka z čísel 2, 8, 14 si má vybrat slečna Sedmička, jestliže chce mít

- co nejvíce dětí,
- stejný počet dcer jako synů?

(M. Dillingerová)

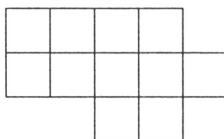
Z6 – I – 4

Na kartičce mám napsáno sudé čtyřmístné číslo. Rozstříhnu ji tak, že získám dvě dvoumístná čísla, jejichž součin je 2 562. Které čtyřmístné číslo jsem měla na kartičce? (M. Raabová)

Z6 – I – 5

Na obr. 37 je mnohoúhelník složený z jedenácti stejných čtverečků.

- Zjisti jeho obvod, jestliže víš, že jeden malý čtvereček má obvod 2 cm.
- Které dva čtverečky mnohoúhelníku je nutno přemístit, aby vznikl nový mnohoúhelník s co největším obvodem? (S. Bednářová)



Obr. 37

Z6 – I – 6

V Petříkově, Boříkově a Tomíkově žije celkem 6 000 obyvatel. V každé z těchto tří vesnic připadá v průměru na 20 obyvatel 1 pes a na 30 obyvatel 1 kočka. V Petříkově a Boříkově žije celkem 234 psů, v Boříkově a Tomíkově žije celkem 92 koček. Kolik obyvatel mají jednotlivé vesnice? (Š. Ptáčková)

Z6 – II – 1

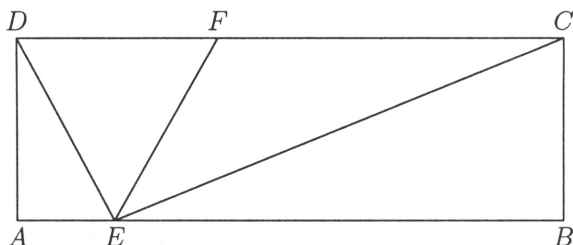
Desetinné číslo nazveme *vyvážené*, jestliže je součet číslic ležících před desetinnou čárkou roven součtu číslic za desetinnou čárkou. Např. číslo 25,133 je vyvážené. V každém z čísel 497 365,198 043 a 197 352,598 062 škrtni několik číslic tak, aby vzniklo a) co největší vyvážené číslo, b) vyvážené číslo s co největším počtem číslic. (S. Bednářová)

Z6 – II – 2

Obdélník jsme rozdělili na čtyři trojúhelníky jako na obr. 38. Odměřili jsme všechny vnitřní úhly v těchto trojúhelnících a získali následující hodnoty: 15° , 20° , 20° , 50° , 55° , 70° , 75° , 75° , 90° , 90° , 130° a ještě jednu

hodnotu, kterou jsme zapomněli zapsat. Zjisti chybějící hodnotu a napiš, o který úhel se jedná, pokud víš, že úsečka BE je delší než úsečka FC . (Pozor, obrázek může být nepřesný, nevyplatí se měřit.)

(S. Bednářová)



Obr. 38

Z6 – II – 3

Když v pekárně napečou koláčky, rozdělí je do balíčku po 6 a po 12 kusech. Z prodeje šestikusového balíčku mají zisk 4 Kč a z prodeje dvanáctikusového balíčku 9 Kč. Kolik nejvíce a kolik nejméně koláčků může být na jednom pekáči, pokud zisk z jejich prodeje je 219 Kč?

(M. Dillingerová)

Kategorie Z7

Texty úloh

Z7 – I – 1

Dlouhý, Široký a Bystrozraký změřili svou výšku. Zjistili, že Dlouhý je dvakrát vyšší než Široký, výška Bystrozrakého představuje dvě třetiny výšky Dlouhého, ale přitom je o 44 cm vyšší než Široký. Zjisti, jak vysoký je Dlouhý, Široký i Bystrozraký. *(M. Dillingerová)*

Z7 – I – 2

Je dáno pětímístné číslo dělitelné třemi. Vyškrtnu-li z něj číslice na lichých místech, dostanu dvoumístné číslo. Toto číslo je 67krát menší než číslo získané z původního pětímístného čísla vyškrtnutím číslic na sudých místech. Zjisti, jaké bylo původní pětímístné číslo. *(M. Raabová)*

Z7 – I – 3

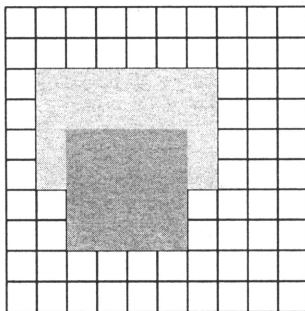
V zemi „Číselkovo“ žijí jen přirozená čísla. Muži a chlapci jsou sudá čísla, ženy a dívky jsou lichá čísla. Manželé mají hned po svatbě děti, a to všechna čísla, která dělí jejich součin beze zbytku. Kterého nápadníka z čísel 2, 16, 28, 46 si má vybrat slečna Devítka, jestliže chce mít

- a) co nejvíce dětí,
- b) stejný počet dcer jako synů? *(M. Dillingerová)*

Z7 – I – 4

Kamilka při kreslení obdélníků ve čtvercové síti narazila na takovouto zajímavou dvojici: Obdélník s rozměry 6 cm a 4 cm a čtverec se stranou délky 4 cm. Nejdříve zakreslila do sítě obdélník a pak čtverec (obr. 39). S údivem ve svém obrázku objevila, že obsah nezakryté části obdélníku je roven obsahu čtverce a že nezakrytá část obvodu obdélníku je rovna

celému obvodu čtverce. Mezi následujícími obdélníky najdi všechny dvojice, které mají obě vlastnosti Kamilčiných obdélníků: 3×9 , 4×9 , 4×6 a 5×7 (v centimetrech). (M. Dillingerová)



Obr. 39

Z7 – I – 5

Myška Hryzalka našla cihlu síry. První den snědla $\frac{1}{8}$, druhý den $\frac{1}{7}$ zbytku, třetí den $\frac{1}{6}$ zbytku a čtvrtý den $\frac{1}{5}$ zbytku. Pak už z cihly zůstala jen krychle s povrchem 150 cm^2 . Jaký objem měla původní cihla síry?

(M. Dillingerová)

Z7 – I – 6

Archeologové vykopali papyrus se zvláštní tabulkou s výřezem ve tvaru „obráceného Z“ (obr. 40). Jde zřejmě o talisman. Měl zajímavou vlastnost: zakroužkujeme-li libovolných pět čísel tak, aby v každém sloupci i řádce bylo zakroužkované právě jedno, a těchto pět čísel sečteme, dostaneme vždy stejný součet. Pokus se zrekonstruovat tento talisman, tzn. doplň čísla na prázdná místa. (S. Bednářová)

0				4
		3	2	
				9
	8	5		
6		7		

Obr. 40

Z7 – II – 1

V zemi „Číselkovo“ žijí jen přirozená čísla. Muži a chlapci jsou sudá čísla, ženy a dívky jsou lichá čísla. Manželé mají ihned po svatbě děti, a to všechna čísla, která dělí jejich součin beze zbytku. Součet hodnot všech dětí manželů Kvádríkových je 28. Otec Kvádrík má nižší hodnotu než aspoň jeden ze synů. Určete hodnoty pana a paní Kvádríkových.

(*M. Dillingerová*)

Z7 – II – 2

Kolik malých krychlíček, z nichž každá má povrch 54 cm^2 , potřebujeme na postavení velké krychle s povrchem 864 cm^2 ?

(*M. Krejčová*)

Z7 – II – 3

Máme čtyři nádoby. V prvních třech je voda, čtvrtá je prázdná. Ve druhé je dvakrát více vody než v první a ve třetí je dvakrát více vody než ve druhé. Do čtvrté nádoby přelejeme polovinu vody z první nádoby, třetinu vody ze druhé nádoby a čtvrtinu vody ze třetí nádoby. Ve čtvrté nádobě máme nyní 26 litrů vody. Kolik vody je dohromady ve všech nádobách?

(*M. Raabová*)

Kategorie Z8

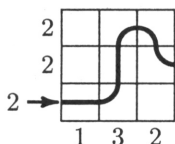
Texty úloh

Z8 – I – 1

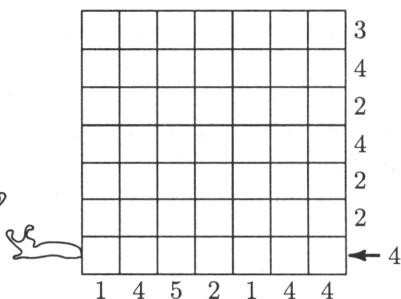
Pořadové číslo dne v měsíci je *smutné*, protože v jistém roce nebylo ani jednou nedělí. Jaké číslo to bylo a na který den v týdnu připadl v tom roce Nový rok?
(M. Volfová)

Z8 – I – 2

Slimák lezl po čtvercové síti a zanechal za sebou stopu (obr. 41). Čísla pod sítí a vedle ní udávají počet navštívených čtverečků v daném řádku či sloupci. Na obr. 42 určete dráhu slimáka, víte-li, že nikdy nevlezl dvakrát do stejného čtverečku a že nikdy nelezl šikmo.
(Š. Ptáčková)



Obr. 41



Obr. 42

Z8 – I – 3

O lichoběžníku $LICH$ ($LI \parallel CH$) víme, že $LC \perp HI$, $|\angle ILC| = |\angle IHC|$ a aritmetický průměr délek jeho základů je 8 cm. Vypočítejte obsah tohoto lichoběžníku.
(S. Bednářová)

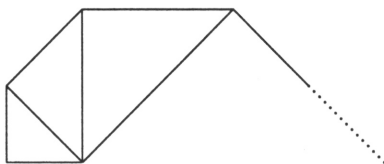
Z8 – I – 4

Kolik je mezi čísly $1, 2, 3, \dots, 999, 1\,000$ takových, která nejsou dělitelná žádným z čísel $2, 3, 4, 5$? (M. Volfová)

Z8 – I – 5

Alenka sestavovala „hlemýžďí ulitu“ z rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků jako na obr. 43. Použila k tomu co nejvíc trojúhelníků, ale žádné dva se nepřekrývaly.

- a) Z kolika trojúhelníků byla ulita sestavena?
- b) Jaký je obsah největšího trojúhelníku, je-li odvěsna nejmenšího z nich dlouhá 1 cm ? (M. Raabová)



Obr. 43

Z8 – I – 6

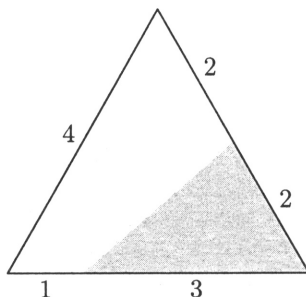
Archeologové vykopali papyrus se zvláštní tabulkou s výřezem ve tvaru „obráceného Z“ (obr. 44). Jde zřejmě o talisman. Měl zajímavou vlastnost: zakroužkujeme-li libovolných pět čísel tak, aby v každém sloupci i řádce bylo zakroužkováno právě jedno, a těchto pět čísel sečteme, dostaneme vždy stejný součet. Pokuste se zrekonstruovat tento talisman, tzn. doplňte čísla na prázdná místa. (S. Bednářová)

0				4
		3	2	
				9
	8	5		
6		7		

Obr. 44

Z8 – II – 1

Je dán rovnostranný trojúhelník o straně 4 cm (obr. 45). Určete obsah tmavé části a také, kolik procent plochy původního trojúhelníku zaujímá tmavá část? *(P. Thustý)*



Obr. 45

Z8 – II – 2

V domácím úkolu na výpočet hodnoty výrazu

$$2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - 9 + 10 =$$

Radek zapomněl napsat dvojice závorek, takže mu při správném počítání vyšel výsledek o 18 větší, než by získal, kdyby měl zapsané i závorky. Doplň dvěma způsoby závorky a napiš, jaké číslo Radkovi vyšlo a jaké mu mělo vyjít. *(M. Dillingerová)*

Z8 – II – 3

Během prvních jedenácti dnů odpovědělo na anketní otázku 700 lidí. Každý z nich vybral právě jednu ze tří nabízených možností. Poměr četností jednotlivých odpovědí byl 4 : 7 : 14. Dvanáctý den se ankety zúčastnilo ještě několik lidí, čímž se poměr četností odpovědí změnil na 6 : 9 : 16. Kolik nejméně lidí muselo odpovídat na anketu dvanáctý den? *(L. Šimůnek)*

Kategorie Z9

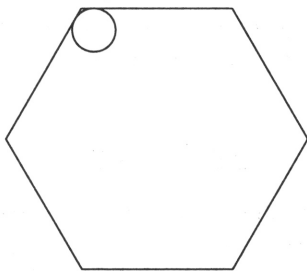
Texty úloh

Z9 – I – 1

Dvoustupňové číslo se nazývá *exkluzivní*, jestliže má následující vlastnost: číslice exkluzivního čísla navzájem vynásobíme, po přičtení součtu všech číslic exkluzivního čísla k předchozímu výsledku získáme toto exkluzivní číslo. Například 79 je exkluzivní, neboť $79 = 7 \cdot 9 + (7 + 9)$. Najděte všechna exkluzivní čísla. (P. Tlustý)

Z9 – I – 2

Uvnitř pravidelného šestiúhelníku o straně délky $2\sqrt{3}$ cm se pohybuje kruh o průměru 1 cm tak, že se stále dotýká obvodu pravidelného šestiúhelníku (obr. 46). Vypočítejte obsah té části šestiúhelníku, která nemůže být nikdy překryta pohybujícím se kruhem. (M. Dillingerová)



Obr. 46

Z9 – I – 3

Kolika způsoby lze vybrat sedm čísel z množiny $\{1, 2, \dots, 8, 9\}$ tak, aby jejich součet byl dělitelný třemi? (P. Tlustý)

Z9 – I – 4

Jsou dány kruh a čtverec se stejným obsahem. Do daného kruhu vepíšeme čtverec, do daného čtverce vepíšeme kruh. Který z vepsaných obrazců má větší obsah?

(*M. Volfová*)

Z9 – I – 5

Pan Sudý měl sudý počet oveček, pan Lichý lichý počet oveček. Počet všech oveček dohromady tvořil trojmístné číslo, které mělo všechny číslice stejné. Každé ovečce pana Sudého se narodily tři ovečky, každé ovečce pana Lichého dvě ovečky. Jednoho dne však vlk zadával tři ovečky panu Sudému. Teď má pan Sudý stejně velké stádo jako pan Lichý. Kolik oveček měl původně každý z chovatelů?

(*L. Hozová*)

Z9 – I – 6

Pět dětí postupně říká: „Včera bylo pondělí.“ „Dnes je čtvrtek.“ „Pozítří bude pátek.“ „Zítra bude sobota.“ „Předevčírem bylo úterý.“ Pokud byste věděli, kolik z dětí lhalo, hned by bylo jasné, který je den. Který je tedy den?

(*Š. Ptáčková*)

Z9 – II – 1

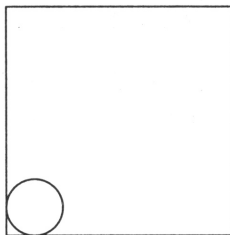
Princ Zrychlený pozval princeznu Zpomalenou na svůj hrad. Když dlouho nešla, vydal se jí naproti. Po dvou dnech putování ji potkal v jedné pětině její cesty. Spolu už pokračovali v cestě dvakrát rychleji, než když cestovala princezna sama. Na princův hrad dorazili druhou sobotu od vzájemného setkání. Který den se potkali, jestliže princezna vyrazila ze svého hradu v pátek?

(*M. Dillingerová*)

Z9 – II – 2

Uvnitř čtverce o straně 4 cm se pohybuje kruh s průměrem 1 cm tak, že se stále dotýká obvodu čtverce (obr. 47). Vypočítejte obsah té části čtverce, která nemůže být nikdy překryta pohybujícím se kruhem.

(*M. Dillingerová*)



Obr. 47

Z9 – II – 3

Do okresního kola postoupili Petr, Mojmír, Karel a Eva. Ve škole pak sdělili:

Eva: „Z naší čtveřice jsem nebyla ani první, ani poslední.“

Mojmír: „Nebyl jsem z naší čtveřice poslední.“

Karel: „Byl jsem z nás první.“

Petr: „Já jsem byl z naší čtveřice poslední.“

Tři mluvili pravdu, jeden lhal. Kdo z nich byl v okresním kole nejlepší?
(*M. Volfová*)

Z9 – II – 4

Uklízečka stírala schodiště v mrakodrapu. Aby jí práce lépe ubíhala, počítala umyté schody. V době, kdy měla umytu přesně polovinu schodů, si udělala přestávku. Za chvíli se dala znovu do práce a chtěla také pokračovat v počítání schodů. Když ale vzpomínala na počet již umytých schodů, dopustila se omylu. Správné trojciferné číslo „přečetla“ odzadu, čímž vzniklo číslo nižší, a počítala od tohoto čísla. Po setření všech schodů došla k číslu 746. Kolik schodů mohla umýt ve skutečnosti?

(*L. Šimůnek*)

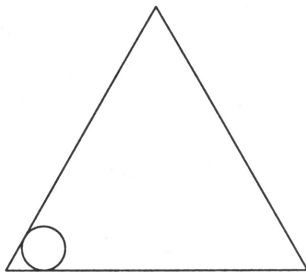
Z9 – III – 1

Přirozené dvojmístné číslo N strašně závidělo svému kamarádovi, dvojmístnému desetinnému číslu X , jeho desetinnou čárku. Tak mu X tu svou darovalo. Číslo N si ji vložilo mezi své dvě číslice a vůbec mu nevadilo, že je teď o 567 desetin menší, než bylo předtím. Také X bylo spokojené, protože teď bylo na číselné ose svému příteli N dvakrát blíže

než předtím. Zjistěte, o kterých dvou číslech N a X je tato příhoda.
(*S. Bednářová*)

Z9 – III – 2

Uvnitř rovnostranného trojúhelníku se stranou délky $4\sqrt{3}$ cm se pohybuje kruh s průměrem 1 cm tak, že se stále dotýká obvodu trojúhelníku (obr. 48). Vypočítejte obsah té části trojúhelníku, která nemůže být nikdy překryta pohybujícím se kruhem.
(*M. Dillingerová*)



Obr. 48

Z9 – III – 3

Maminka připravila na oslavu Jirkových narozenin pomerančový džus tak, že smíchala 1 litr 100% džusu s $\frac{2}{3}$ litru 30% džusu. Jirka si odlil do skleničky a ochutnal. Protože má radši slabší koncentraci, dolil připravený džus na původní množství. Výsledný džus měl koncentraci 61,2 %, a to mu vyhovovalo. Jaké množství džusu si Jirka odlil do skleničky?

(*M. Raabová*)

Z9 – III – 4

Je dán trojúhelník. Jestliže jeho nejdelší stranu zkrátíme o třetinu její délky, nejkratší stranu zdvojnásobíme a zbývající stranu zmenšíme o 2 cm, dostaneme trojúhelník shodný s původním trojúhelníkem. Jaké jsou rozměry tohoto trojúhelníku?
(*M. Raabová*)

Přípravná soustředění před 46. MMO

V průběhu 54. ročníku se konalo výběrové soustředění pro přípravu na mezinárodní matematickou olympiádu bezprostředně po skončeném celostátním kole kategorie A, a to od 18. do 22. dubna 2005 v Bílovci. Na soustředění bylo pozváno všech 10 vítězů III. kola kategorie A. Soustředění bylo zaměřeno na přípravu reprezentantů a ke konečné nominaci šestičlenného družstva.

Úspěšnost jednotlivých studentů ukazuje následující tabulka:

František Konopecký	8/8, GLJ Holešov	82
Ondřej Bílka	3/4, G Zlín, Lesní čtvrť	56,5
Marek Pechal	7/8, G Zlín, Lesní čtvrť	72,5
Jakub Opršal	3/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	58
Marek Scholle	6/8, G Pardubice	49
Jaroslav Hančl	3/4, GMK Bílovec	60
Jaromír Kuben	3/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	75,5
Michal Švagerka	4/4, GJKT Hradec Králové	47
Pavel Kocourek	4/4, SPŠST Praha 1, Panská	63
Martin Křivánek	3/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	47

Na základě uvedených výsledků, v nichž jsou započítány i výsledky oblastního a celostátního kola, bylo prvních šest vybráno do reprezentačního družstva a sedmý byl určen jako náhradník. Toto družstvo nás reprezentovalo i na již tradičním střetnutí s družstvy Slovenska a Polska.

Jednotlivé semináře vedli a úlohy připravili:

dr. *Jaroslav Zhouf* (18. 4.),

dr. *Pavel Calábek* (20. 4.),

dr. *Jaroslav Švrček* (19. 4. a 21. 4.)

a doc. *Jaromír Šimša* (22. 4.).

Úlohy zadané na přípravném soustředění

1. Funkce f z oboru celých čísel do oboru celých čísel splňuje zároveň tyto podmínky:

- 1) $f(f(n)) = n$ pro všechna celá čísla n ,
- 2) $f(f(n+2)+2) = n$ pro všechna celá čísla n ,
- 3) $f(0) = 1$.

Určete $f(2005)$.

2. Dokažte, že pro každá čtyři kladná reálná čísla a, b, c, d platí

$$\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{cd} \leq \sqrt[3]{(a+b+c)(b+c+d)}.$$

3. V sázkové kanceláři se přijímají sázky na šest zápasů, v nichž může dojít buď k výhře domácích, nebo k výhře hostů, nebo k nerozhodnému výsledku. Každá sázka je na všech šest zápasů. Jaký nejmenší počet sázek je možné zvolit, aby mezi nimi jistě byla sázka, v níž jsou výsledky všech šesti zápasů nesprávné?

4. Je dán trojúhelník ABC , který není rovnoramenný. Střed kružnic mu vepsané a opsané označme po řadě I a O . Vně připsaná kružnice se středem I_a se dotýká strany BC v bodě A_1 a polopřímek AB a AC po řadě v bodech A_2 a A_3 . Bod I'_a je souměrný s bodem I_a podle přímky A_2A_3 . Dokažte, že přímka OI_a dělí úsečku $A_1I'_a$ na dvě poloviny.

5. Množina přirozených čísel $1, 2, \dots, 5n$ je disjunktním způsobem rozdělena na dvě podmnožiny. Dokažte, že v těchto podmnožinách existuje aspoň n dvojic (x, y) , kde $x > y$, tak, že číslo $x - y$ patří téže podmnožině jako čísla x a y .

6. Střed I kružnice vepsané tečnovému čtyřúhelníku $ABCD$ a středy jeho úhlopříček AC a BD leží na téže přímce. Dokažte.

7. V rovině je dán pravidelný n -úhelník $A_1A_2 \dots A_n$ ($n \geq 3$). Určete počet všech navzájem neshodných trojúhelníků, jejichž vrcholy jsou totožné s některými třemi vrcholy daného n -úhelníku.

8. Na kružnici o jsou dány čtyři body, které po řadě označíme A, B, C, D (tj. $ABCD$ je konvexní tětíkový čtyřúhelník). Uvnitř kruhu ohraničeného kružnicí o je dán bod S tak, že

$$|\sphericalangle SAD| = |\sphericalangle SCB| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle SDA| = |\sphericalangle SBC|.$$

Osa úhlu ASB protíná kružnici o v bodech P a Q . Dokažte, že S je střed úsečky PQ .

9. Necht n je přirozené číslo. Do čtvercové tabulky $2n \times 2n$ je vepsáno $4n^2$ reálných čísel jejichž součet je 0 (na každém poli tabulky je právě jedno číslo). Absolutní hodnota každého z těchto čísel není větší než 1. Dokažte, že existuje řada tabulky (tj. řádek nebo sloupec) taková, že absolutní hodnota součtu jejich prvků není větší než n .

10. Necht $\mathbb{R}_+$ je množina kladných reálných čísel. Ukažte, že existuje právě jedna funkce $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ taková, že pro všechna $x \in \mathbb{R}_+$ platí

$$f(f(x)) = 6x - f(x).$$

11. Najděte alespoň jeden mnohočlen f s reálnými koeficienty takový, že $f(0) = 1$ a pro všechna přirozená čísla n je součet druhých mocnin všech koeficientů mnohočlenu $f^n(x)$ roven součtu druhých mocnin všech koeficientů mnohočlenu $(3x^2 + 7x + 2)^n$.

12. Necht n je přirozené číslo, $n \geq 3$. Dokažte, že součet třetích mocnin všech přirozených čísel menších než n a nesoudělných s n je dělitelný číslem n .

13. Necht D značí střed strany BC v trojúhelníku ABC . Určete velikost vnitřního úhlu při vrcholu C v tomto trojúhelníku, víte-li, že platí

$$|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle ACB| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle DAC| = 15^\circ.$$

14. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla platí nerovnost

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}.$$

Zjistěte, kdy platí rovnost.

15. Stranám AC a BC ostroúhlého trojúhelníku ABC jsou zvnějšku připsány pravoúhelníky $ACPQ$ a $BKLC$, které mají shodné obsahy. Dokažte, že střed úsečky PL , vrchol C a střed kružnice opsané trojúhelníku ABC leží na téže přímce.

16. Funkce f a g z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ splňují pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(x + g(y)) = 2x + y + 5.$$

Vyjádřete hodnotu výrazu $g(x + f(y))$ bez neznámých hodnot f a g .

17. Rozhodněte, zda existuje osm přirozených čísel a_k takových, že

$$\sum_{k=1}^8 \sqrt{\sqrt{a_k} - \sqrt{a_k - 1}} = 2.$$

18. Na tabuli je v jedné řadě zapsáno 54 znaků „minus“. Dva hráči A a B se střídají v tazích (první tah má hráč A). V každém tahu vybere hráč jeden nebo dva sousední znaky „minus“ a změní ho, resp. je na „plus“. (Znaky „minus“ například v trojici $-+-$ nejsou sousední.) Vítězí ten hráč, který změní poslední „minus“ na „plus“. Navrhněte jednomu z hráčů vítěznou strategii.

19. Na polici je v jedné řadě všech 100 dílů sebraných spisů Lva Tolstého. V libovolném kroku smíme vybrat dva díly, jeden s lichým číslem a druhý se sudým číslem, a navzájem vyměnit jejich místa v dané řadě. Určete nejmenší počet takových kroků, které stačí k tomu, abychom libovolné původní pořadí dílů změnili na „správné“ rostoucí pořadí dílů od čísla 1 po číslo 100 (zleva doprava).

Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské

ZWARDOŃ, 20.–22. ČERVNA 2005

V rámci závěrečné přípravy před MMO se uskutečnilo již páté mezinárodní střetnutí mezi týmy České republiky, Polska a Slovenska. Jednotlivé země reprezentovala šestice účastníků, kteří si vybojovali ve svých zemích postup na 46. MMO v Méridě.

Soutěž se uskutečnila ve Zwardoni v polské části Beskyd, takže to nebylo příliš daleko ani pro naše, ani pro slovenské reprezentanty. Všechna tři družstva přicestovala na místo konání již v neděli večer 19. června. Organizace a průběh soutěže zůstal zachován z předešlých ročníků — je přizpůsoben stylu III. kola naší MO a podmínkám na MMO. Soutěžícím byly ve dvou dnech předloženy dvě trojice soutěžních úloh, přitom za každou z úloh mohli získat nejvýše 7 bodů, tj. celkově (stejně jako na MMO) 42 body. Na každou trojici úloh měli soutěžící vyhrazeno 4,5 hodiny.

Pořadí	Jméno	Země	body	Součet
1.	Michał Pilipczuk	POL	7 2 7 7 6	36
2.	František Šimančík	SVK	6 1 2 7 7	30
3.	Michal Burger	SVK	7 1 2 7 5	29
4.–5.	Pavel Kocourek	CZE	0 7 7 2 5	28
	Tomasz Kulczyński	POL	7 2 0 7 5	28
6.	Tomasz Warszawski	POL	6 1 2 4 7	27
7.–8.	František Konopecký	CZE	0 7 0 7 3	24
	Marek Pechal	CZE	0 1 5 7 4	24
9.	Ondrej Budáč	SVK	0 2 0 7 7	23
10.	Jaromír Kuben	CZE	0 7 2 0 7	22
11.–12.	Jozef Bodnár	SVK	3 1 2 7 5	20
	Wojciech Śmietanka	POL	6 1 7 0 0	20
13.–14.	Nadbor Drozd	POL	0 1 0 7 4	19
	Jakub Závodný	SVK	0 2 2 7 1	19
15.	Jakub Opršal	CZE	0 1 2 7 0	17
16.	Peter Černo	SVK	0 2 2 0 0	11
17.	Piotr Achinger	POL	0 1 2 6 0	10
18.	Jaroslav Hančl	CZE	0 0 0 3 0	4

Hodnocení vyřešených úloh koordinovala mezinárodní komise ve složení *Jaromír Šimša*, *Jaroslav Švrček* a *Karel Horák* za Českou republiku, *Peter Novotný* a *Ján Mazák* za Slovensko a *Waldemar Pompe* a *Adam Osękowski* za Polsko.

Polští organizátoři připravili kromě obvyklé soutěže ještě soutěž družstev, tzv. *Matematický souboj*, který proběhl ve středu 22. června po vyhlášení výsledků soutěže jednotlivců. Nebojovali přitom proti sobě jednotlivá národní družstva, ale všech 18 účastníků se rozdělilo do dvou skupin, jež stály proti sobě. V každé skupině byli studenti ze všech tří zemí. Cílem bylo vyřešit co nejvíce z následujících 11 úloh a v rámci skupiny si vzájemně vysvětlit řešení tak, aby je libovolný zástupce skupiny (určený soupeřem) mohl co nejlépe prezentovat dle předem stanovených pravidel.

Kvůli souboji se střetnutí o jeden den protáhlo, a tak naši účastníci odcestovali až ve čtvrtek 23. června ráno. V dalším roce se společné přípravné střetnutí uskuteční na Slovensku.

Mecz matematyczny

1. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n takových, že všechna prvočísla, která dělí číslo $n^2 + 1$, jsou menší než n .

2. Rozhodněte, zda existují přirozená čísla $x, y, z_1, z_2, \dots, z_{2005}$ taková, že pro $k = 1, 2, 3$ platí

$$x^k + y^k = z_1^k + z_2^k + \dots + z_{2005}^k.$$

3. Necht p a $q = p + 2$ jsou prvočísla. Dokažte, že největší společný dělitel čísel $p^q - p$ a $q^p - q$ je větší než $2p^3$.

4. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je rozdíl $n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$ dělitelný číslem 547.

5. Označme P, Q, R, S, T, U po řadě středy úhlopříček AC, BD, CE, DF, EA, FB konvexního šestiúhelníku $ABCDEF$. Dokažte, že obsah šestiúhelníku $ABCDEF$ je čtyřikrát větší než obsah šestiúhelníku $PQRSTU$.

6. V rovině je dán konvexní šestiúhelník. Každá ze tří úseček spojujících středy jeho protilehlých stran dělí daný šestiúhelník na dva pětiúhelníky o stejném obsahu. Dokažte, tyto tři úsečky mají společný bod.

7. Je dána kružnice ω se středem O a poloměrem 1. Uvažujme všechny čtverce $ABCD$, jejichž vrcholy A a B leží na kružnici ω . Jakou největší velikost může mít úsečka OC ?

8. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí nerovnost

$$3\sqrt[9]{\frac{9a(a+b)}{2(a+b+c)^2}} + \sqrt[3]{\frac{6bc}{(a+b)(a+b+c)}} \leq 4.$$

9. Určete všechna přirozená čísla $n \geq 2$ s následující vlastností: Pro všechna celá čísla $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$, která nejsou dělitelná číslem n , existují indexy $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_k \leq n-1$ takové, že číslo

$$a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3} + \dots + a_{i_k} - 1$$

je dělitelné n .

10. Matematická společnost má posoudit správnost důkazu Velké věty Fermatovy. Po jeho prostudování členové společnosti hlasují. Každý její člen učiní seriózní rozhodnutí se stejnou pravděpodobností $p \in (\frac{1}{2}, 1)$. Rozhodnutí všech členů jsou nezávislá. Pokud většina členu společnosti rozhodne, že důkaz je správný, společnost považuje důkaz za správný. V případě, že počet členů společnosti je sudý a právě polovina z nich dala svůj hlas ve prospěch správnosti důkazu Velké věty Fermatovy, rozhodne o správnosti důkazu los pomocí mince.

V závislosti na p stanovte, která ze společností učiní s větší pravděpodobností správné rozhodnutí o bezchybnosti důkazu — společnost, která má 2 005 členů, nebo společnost, která má 2 006 členů?

11. Dokažte, že pro všechna kladná reálná čísla a, b, c, d, e platí nerovnost

$$\frac{a}{e+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+e} + \frac{e}{d+e+a} < 2.$$

Texty soutěžních úloh

1. Nechť n je dané přirozené číslo. Určete všechny n -tice $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nezáporných reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \dots + x_n^n &= n, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

2. Dokažte, že střed O kružnice opsané, střed I kružnice vepsané a průsečík P úhlopříček libovolného dvojitředového čtyřúhelníku leží v přímce.

3. Určete všechna přirozená čísla $n \geq 3$, pro něž lze mnohočlen

$$P(x) = x^n - 3x^{n-1} + 2x^{n-2} + 6$$

vyjádřit jako součin dvou mnohočlenů, z nichž každý je aspoň prvního stupně a oba mají celočíselné koeficienty.

4. Devíti osobám (A, B, C, D, E, F, G, H a I) rozdáme n označených míčků. Kolika způsoby je možno míčky rozdat za podmínky, že A dostane stejný počet míčků jako osoby B, C, D, E dohromady?

5. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník. Určete množinu všech jeho vnitřních bodů P , pro něž platí

$$S_{PAB} \cdot S_{PCD} = S_{PBC} \cdot S_{PDA},$$

kde symbol S_{XYZ} značí obsah trojúhelníku XYZ .

6. Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel, které vyhovují rovnici

$$y(x + y) = x^3 - 7x^2 + 11x - 3.$$

Řešení soutěžních úloh

1. Předpokládejme, že čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ splňují dané rovnice. Potom

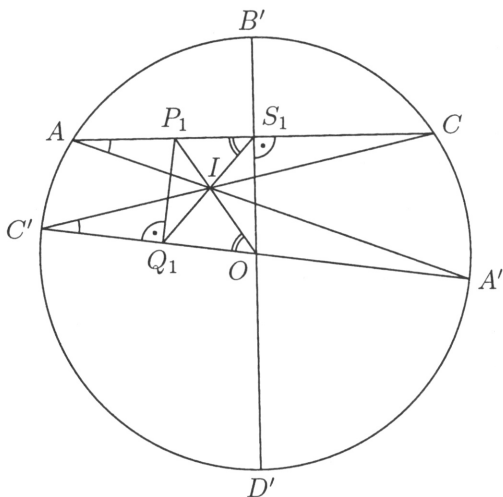
$$\begin{aligned} 0 &= x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \dots + x_n^n - n - \\ &\quad - (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n - \tfrac{1}{2}n(n+1)) = \\ &= (x_2^2 - 2x_2 + 2 - 1) + (x_3^3 - 3x_3 + 3 - 1) + \dots + (x_n^n - nx_n + n - 1). \end{aligned}$$

Přitom výrazy v závorkách jsou nezáporné. Pro $k \geq 2$ a $x \geq 0$ je totiž podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

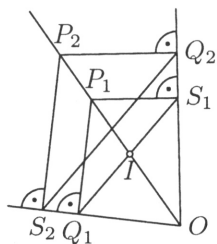
$$x^k + k - 1 = x^k + 1 + 1 + \dots + 1 \geq k \cdot \sqrt[k]{x^k} = kx$$

s rovností, právě když $x = 1$. Dostáváme tak $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 1$ a z první rovnice $x_1 = 1$. Snadno ověříme, že uvedená n -tice je (jediným) řešením.

2. (Podle Michala Burgera, Slovensko.) Označme A', B', C', D' po řadě další průsečíky polopřímek AI, BI, CI, DI s kružnicí k opsanou čtyřúhelníku $ABCD$ (obr. 49). Protože přímky AI, BI, CI, DI jsou osy odpovídajících úhlů čtyřúhelníku $ABCD$, tvoří úsečky $A'C'$ a $B'D'$ průměry kružnice k a jejich průsečíkem je střed O . Zřejmě jsou trojúhelníky ICA a $IA'C'$ podobné. Navíc tato podobnost zobrazuje střed S_1 úsečky AC do středu O úsečky $A'C'$ (obr. 49).



Obr. 49



Obr. 50

Označme P_1 průsečík přímek OI a AC a Q_1 průsečík přímek S_1I a $A'C'$. Z podobnosti trojúhelníků $IS_1A \sim IOC'$ plyne rovnost úhlů IS_1A a IOC' , takže čtyřúhelník $Q_1OS_1P_1$ je tětíivový. Protože průměr $B'D'$ kružnice k je kolmý na tetivu AC , je také P_1Q_1 kolmé na $A'C'$, jinými slovy S_1 a Q_1 jsou kolmé průměty bodu P_1 na průměry $B'D'$ a $A'C'$ kružnice k .

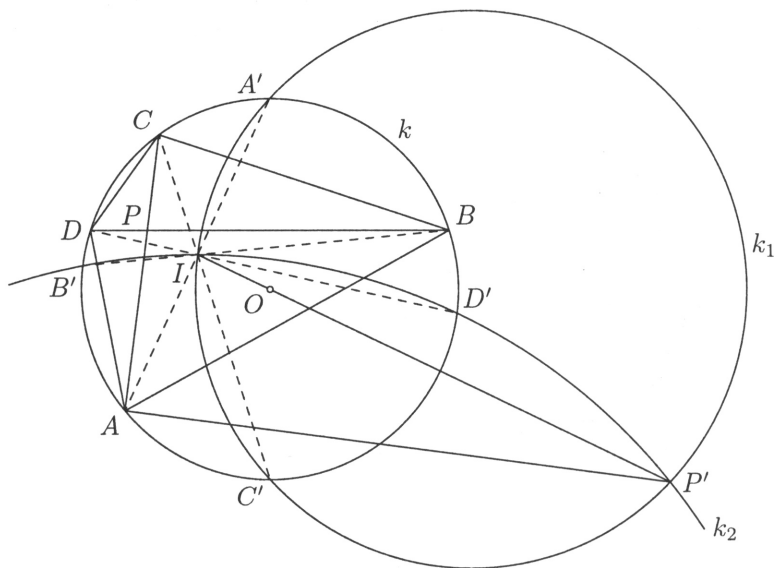
Označme analogicky S_2 střed úsečky BD , P_2 průsečík přímek OI a BD a Q_2 průsečík přímek S_2I a $B'D'$. Úplně stejně zjistíme, že Q_2 a S_2 jsou kolmé průměty bodu P_2 na průměry $B'D'$ a $A'C'$ kružnice k . Body P_1 i P_2 leží na přímce OI , ze zřejmé podobnosti pravoúhlých trojúhelníků $OS_1P_1 \sim OQ_2P_2$ a $OQ_1P_1 \sim OS_2P_2$ (obr. 50) plyne, že $Q_1S_1 \parallel S_2Q_2$. Bod I ovšem leží na obou rovnoběžných přímkách! Uvedené trojúhelníky jsou tudíž shodné a $P_1 = P_2$ a je to právě průsečík P přímek AC , BD . Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Jiné řešení. (Podle *Františka Šimančíka*, Slovensko.) Stejně jako v předešlém řešení označme A', B', C', D' po řadě další průsečíky polopřímek AI, BI, CI, DI s kružnicí k opsanou čtyřúhelníku $ABCD$. Z mocnosti bodu I ke kružnici k máme

$$|IA| \cdot |IA'| = |IB| \cdot |IB'| = |IC| \cdot |IC'| = |ID| \cdot |ID'|.$$

Existuje tedy kruhová inverze se středem I , která po složení se středovou souměrností podle téhož středu I zobrazí body A, B, C, D po řadě na

body A', B', C', D' . Označme P' obraz bodu P v tomto složeném zobrazení κ . Protože přímky PI a $P'I$ jsou totožné, stačí ukázat, že body O, I a P' leží v přímce. Zobrazení κ zřejmě zobrazí přímku AC na kružnici k_1 procházející body A', C', I a přímku BD na kružnici k_2 procházející body B', D', I (obr. 51). Bod P' je tudíž druhým průsečíkem kružnic k_1, k_2 (různým od bodu I).



Obr. 51

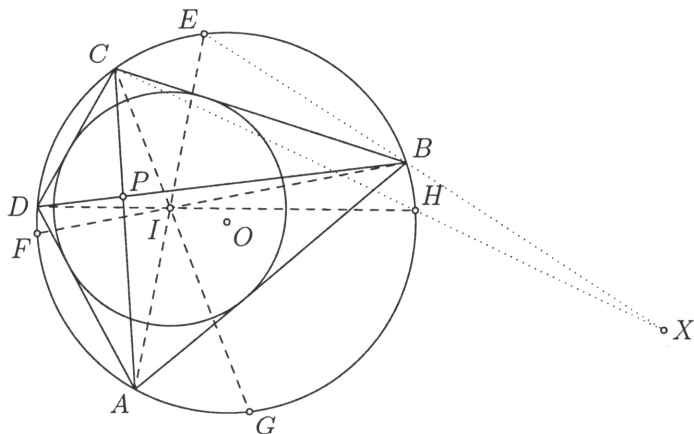
Přímka $P'I$ je chordálou kružnic k_1, k_2 . Stačí tedy ukázat, že bod O má k oběma kružnicím k_1, k_2 stejnou mocnost. Ovšem už v prvním řešení jsme ukázali, že $A'C'$ a $B'D'$ jsou průměry kružnice k , takže její střed O leží na na chordále kružnic k, k_1 i na chordále kružnic k, k_2 . Jinými slovy bod O má stejnou mocnost ke všem třem kružnicím k, k_1 a k_2 . Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Jiné řešení. Označme E, F, G, H po řadě další průsečíky polopřímek AI, BI, CI, DI s kružnicí k opsanou čtyřúhelníku $ABCD$. Protože přímky AI, BI, CI, DI jsou osy odpovídajících úhlů čtyřúhelníku $ABCD$, tvoří úsečky EG a FH průměry kružnice k , takže se protínají v bodě O .

Nyní využijeme *Pascalovu větu*, která říká, že pokud leží vrcholy daného šestiúhelníku (šestiúhelníkem zde rozumíme libovolnou uzavřenou

lomenou čáru se šesti vrcholy) na kružnici a dvojice přímek, na nichž leží protější strany šestiúhelníku (to jsou strany, jež spolu ani nesousedí, ani nemají společnou sousední stranu), se protínají, pak tyto průsečíky leží v přímce.

Označme X průsečík přímek CH a BE (obr. 52). Z Pascalovy věty pro šestiúhelník $ACHDBE$ plyne, že body P , X a I leží v přímce. Podobně z Pascalovy věty pro šestiúhelník $GCHFBE$ plyne, že body I , X a O leží v přímce. Leží tedy v přímce i body O , I a P , jak jsme chtěli dokázat.



Obr. 52

3. Snadno ověříme, že pro $n = 3$ platí

$$x^3 - 3x^2 + 2x + 6 = (x + 1)(x^2 - 4x + 6).$$

Kdyby pro $n = 4$ bylo

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 6 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d),$$

porovnáním koeficientů bychom dostali

$$a + c = -3, \quad ac + b + d = 2, \quad bd = 6.$$

Z první rovnosti vyplývá, že a a c mají různou paritu. Proto z druhé rovnosti plyne, že b a d mají stejnou paritu. To je ve sporu s třetí rovností.

Předpokládejme dále, že $n \geq 5$ a že existuje rozklad

$$P(x) = A(x)B(x), \quad (1)$$

kde

$$\begin{aligned} A(x) &= a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0, \\ B(x) &= b_{n-k} x^{n-k} + b_{n-k-1} x^{k-1} + \dots + b_1 x + b_0, \end{aligned}$$

jsou mnohočleny s celočíselnými koeficienty a $a_k = b_{n-k} = \pm 1$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $k \leq \lfloor n/2 \rfloor < n-2$ (protože $n \geq 5$). Porovnáním koeficientů na obou stranách (1) získáme rovnosti

$$\begin{aligned} a_0 b_0 &= 6, \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 &= 0, \\ &\vdots \\ a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0 &= 0. \end{aligned}$$

Nyní dokážeme indukcí, že a_0 dělí $a_1, a_2, \dots, a_k$. Předpokládejme, že toto tvrzení platí pro $a_1, a_2, \dots, a_l$. Protože

$$\begin{aligned} 0 &= a_0(a_0 b_{l+1} + a_1 b_l + \dots + a_l b_1 + a_{l+1} b_0) = \\ &= a_0^2 b_{l+1} + a_0 a_1 b_l + \dots + a_0 a_l b_1 + 6a_{l+1}, \end{aligned}$$

je

$$6a_{l+1} = -(a_0^2 b_{l+1} + a_0 a_1 b_l + \dots + a_0 a_l b_1).$$

Všechny sčítance na pravé straně jsou dělitelné členem a_0^2 , proto i levá strana je jím dělitelná a nutně $a_0 \mid a_{l+1}$. Protože však $a_k = \pm 1$, dostáváme $a_0 = \pm 1$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a_0 = 1$; potom $b_0 = 6$.

Stejné argumenty nyní zopakujeme i pro koeficienty mnohočlenu B . Dostaneme, že $b_0 = 6$ dělí $b_1, b_2, \dots, b_{n-3}$ (pro $l > n-k$ případně položíme $b_l = 0$). Dostaneme tak spor ($b_{n-k} = \pm 1$) s výjimkou případu, kdy $n-k > n-3$. Zůstali tak dva případy.

Případ $k = 2$. Porovnáním koeficientů při mocnině x^{n-2} v (1) máme

$$a_0 b_{n-2} + a_1 b_{n-3} + a_2 b_{n-4} = 2.$$

Už víme, že na levé straně jsou kromě prvního všechny členy dělitelné šesti, tj. jsou sudé, zatímco první člen je roven ± 1 . Tím dostáváme spor.

Případ $k = 1$. Úloha se tak zjednodušuje na nalezení celočíselných kořenů mnohočlenu P ; snadno však nahlédneme, že pro n sudé takové kořeny neexistují, zatímco pro n liché je vždy $P(-1) = 0$.

Podmínky úlohy tedy splňují právě jen lichá čísla n .

Jiné řešení. (Podle *Paula Kocourka*.) Pro n liché je zřejmé, že $P(-1) = 0$, mnohočlen P se tedy dá vyjádřit jako součin dvou mnohočlenů. Zároveň z vyjádření

$$P(x) = x^{n-2}(x^2 - 3x + 2) + 6 = x^{n-2}(x-1)(x-2) + 6$$

vidíme, že pro n sudé nabývá mnohočlen P vně intervalu $(1, 2)$ jen kladných hodnot, takže nemůže mít žádné celočíselné kořeny.

Předpokládejme tedy, že pro n sudé lze mnohočlen P rozložit na součin dvou mnohočlenů $P = AB$, kde

$$\begin{aligned} A(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_{k-1}x^{k-1} + a_kx^k, \\ B(x) &= b_0 + b_1x + \dots + b_{n-k-1}x^{n-k-1} + b_{n-k}x^{n-k} \end{aligned}$$

jsou mnohočleny s celočíselnými koeficienty a $2 \leq k \leq n-2$. Zřejmě musí platit $a_0b_0 = 6$ a $a_kb_{n-k} = 1$.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že a_0 je sudé a b_0 liché. Pro $j \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ jsou koeficienty mnohočlenu P u x^j sudé. Dostáváme tak postupně:

$$\begin{aligned} a_1b_0 + a_0b_1 &\Rightarrow a_1 \text{ je sudé,} \\ a_2b_0 + (a_1b_1 + a_0b_2) &\Rightarrow a_2 \text{ je sudé,} \\ &\vdots \\ a_kb_0 + (a_{k-1}b_1 + \dots + a_0b_k) &\Rightarrow a_k \text{ je sudé,} \end{aligned}$$

takže koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_k$ mnohočlenu A jsou vesměs sudé. Koeficient u x^{n-1} mnohočlenu P je lichý, je tudíž liché i číslo

$$a_{n-1}b_0 + (a_{n-2}b_1 + \dots + a_0b_{n-1}),$$

to ovšem znamená, že stupeň mnohočlenu A je aspoň $n-1$, takže B musí být lineární mnohočlen. Jak už víme, takový rozklad pro sudé n neexistuje.

Podmínky úlohy tedy splňují právě jen lichá čísla n .

4. Uvažujme mnohočlen

$$\begin{aligned}
 (x+2)^{2n} &= (x^2 + 4x + 4)^n = \\
 &= (x^2 + x + x + x + x + 1 + 1 + 1 + 1) \\
 &\quad (x^2 + x + x + x + x + 1 + 1 + 1 + 1) \dots \\
 &\quad (x^2 + x + x + x + x + 1 + 1 + 1 + 1),
 \end{aligned}$$

po jehož roznásobení dostaneme 9^n sčítanců. Ukážeme, že je vzájemně jednoznačná korespondence mezi koeficientem u x^n a počtem způsobů rozdělení míčků.

Předpokládejme, že máme požadované rozdělení. Jestliže k -tý míček dostal A , vybereme x^2 z k -té závorky. Dostal-li ho B , C , D nebo E , vybereme z k -té závorky první, druhou, třetí nebo čtvrtou jedničku. Podobně pro F , G , H , I vybereme z k -té závorky první, druhé, třetí nebo čtvrté x . Vynásobíme-li nyní vybrané činitele, vidíme, že výsledek se rovná x^n , právě když A dostal stejný počet míčků jako B , C , D a E dohromady.

Počet rozdělení, který nás zajímá, je tedy roven koeficientu u x^n v mnohočlenu $(x+2)^{2n}$, což je

$$\binom{2n}{n} \cdot 2^n.$$

Jiné řešení. Jestliže osoba A dostane k míčků, můžeme je vybrat $\binom{n}{k}$ způsoby, ze zbylých $n-k$ míčků můžeme $\binom{n-k}{k}$ způsoby vybrat k míčků pro osoby B , C , D a E , přičemž máme 4^k možností, jak mezi ně míčky rozdělit. Nakonec máme 4^{n-2k} možností, jak rozdat zbylé míčky osobám F , G , H , I . Protože všechny uvedené možnosti jsou navzájem nezávislé, dostáváme pro dané k

$$\binom{n}{k} \binom{n-k}{k} 4^k 4^{n-2k}$$

možností, jak míčky rozdat tak, že A dostane právě k míčků. Protože musí být $2k \leq n$, bude celkový počet možností roven součtu

$$S = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k} \binom{n-k}{k} 4^k 4^{n-2k}. \quad (1)$$

Spočtěme koeficient u členu x^n mnohočlenu

$$\begin{aligned} P(x) &= (4 + (4x + x^2))^n = \sum_{k=0}^n 4^k (4x + x^2)^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^n 4^k \sum_{j=0}^{n-k} x^{2j} (4x)^{n-k-j}. \end{aligned}$$

Tento koeficient dostaneme pro $2j + (n - k - j) = n$, tj. pro $j = k \leq n - k$, takže koeficient u x^n v mnohočlenu P je právě součet (1), který nás zajímá. Je však zároveň

$$P(x) = (x^2 + 4x + 4)^n = (x + 2)^{2n} = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} x^j 2^{2n-j},$$

koeficient u x^n v mnohočlenu P je tedy $\binom{2n}{n} 2^n$. To je hledaný počet rozdělení.

Jiné řešení. Jak jsme zjistili v předchozím řešení, je hledaný počet rozdělení roven součtu (1), který můžeme vzhledem k rovnosti $4^k 4^{n-2k} = 2^n 2^{n-2k}$ upravit na tvar

$$S = 2^n \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k}.$$

Suma v předchozí rovnosti je ovšem počet možností, jak rozdat n míčků čtyřem osobám A, B, C, D tak, aby jich A i B dostali stejně (stačí téměř doslovně zopakovat úvahy vedoucí ke vzorci (1)). Zbývá tedy vyřešit poněkud jednodušší úlohu. To provedeme následující kombinatorickou úvahou:

Uvažme dvě řady n polí (očíslovaných 1 až n), každá dvojice polí nad sebou reprezentuje jednu z rozdělovaných kuliček. Z těchto $2n$ polí vybereme n , která nějak označíme, a tomuto výběru jednoznačně přiřadíme rozdělení kuliček čtyřem osobám následujícím způsobem: A dostane kuličku j , jsou-li vybrána obě pole s číslem j , B dostane kuličku s číslem j , není-li vybráno žádné z polí toho čísla, C dostane příslušnou kuličku, je-li vybráno právě jen horní pole toho čísla, a konečně D dostane příslušnou kuličku, je-li vybráno právě jen dolní pole.

Protože celkový počet označených i neoznačených polí příslušných kuličkám rozdaným B a C je stejný, je stejný i počet označených a neoznačených polí, podle nichž rozdáváme kuličky osobám A a B . Každé kuličce (dvěma označeným polím), kterou dostane A , tak odpovídá kulička (dvojice neoznačených polí), kterou dostane B . Počet kuliček rozdělených osobám A a B je tedy stejný.

Je zřejmé, že každému rozdělení kuliček obráceně odpovídá nějaký výběr n polí. Přitom ke každému výběru k polí v horní řadě, který můžeme provést $\binom{n}{k}$ způsoby, máme $\binom{n}{n-k}$ možností, jak vybrat zbývajících $n - k$ polí v druhé řadě. To dává dohromady

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$$

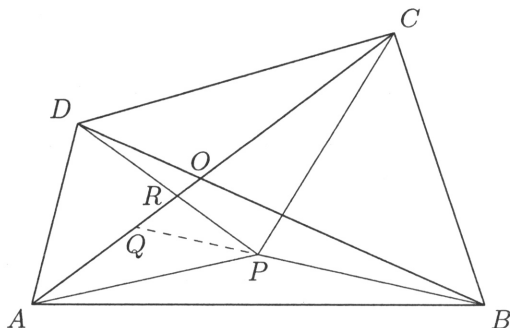
možností, takže hledaný počet S je $\binom{2n}{n} 2^n$.

5. Pokud P leží na některé z úhlopříček, řekněme na AC , tak

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PBC}} = \frac{|AP|}{|PC|} = \frac{S_{PDA}}{S_{PCD}},$$

požadovaná rovnost tedy platí. Dokážeme, že pro body P ležící uvnitř čtyřúhelníku $ABCD$ mimo úhlopříčky daná rovnost neplatí.

Označme O průsečík úhlopříček a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že P leží uvnitř trojúhelníku ABO (obr. 53). Označme ještě Q



Obr. 53

průsečík přímek BP a AC a R průsečík přímek DP a AC . Snadno pak odvodíme rovnosti

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PBC}} = \frac{|AQ|}{|QC|} \quad \text{a} \quad \frac{S_{PDA}}{S_{PCD}} = \frac{|AR|}{|RC|}.$$

Protože $Q \neq R$, zkoumaná rovnost nemůže platit.

Odpověď. Hledanou množinou bodů P jsou vnitřní body úhlopříček AC a BD .

6. Vynásobením uvažované rovnice čtyřmi a jednoduchou úpravou dostaneme ekvivalentní rovnici

$$\begin{aligned}(2y + x)^2 &= 4x^3 - 27x^2 + 44x - 12 = \\ &= (x - 2)(4x^2 - 19x + 6) = \\ &= (x - 2)((x - 2)(4x - 11) - 16).\end{aligned}\tag{1}$$

Výraz na pravé straně musí být čtverec. Proto $x - 2 = ks^2$ pro nějaké $k \in \{-2, -1, 1, 2\}$ a $s \in \mathbb{N}$ (pokud je totiž číslo $x - 2$ dělitelné právě jen lichou mocninou prvočísla p , pak musí p dělit i $(x - 2)(4x - 11) - 16$, takže $p \mid 16$ a $p = 2$).

Rozebereme tři případy.

1. Nechť $k = \pm 2$. Z (1) plyne, že $4x^2 - 19x + 6 = \pm 2u^2$ pro nějaké celé číslo u , odkud úpravou dostaneme

$$(8x - 19)^2 - 265 = \pm 32u^2.$$

Tuto rovnost ovšem nesplňují žádná dvě celá čísla x , u , protože levá strana může dát při dělení pěti zbytek 0, 1 nebo 4, zatímco pravá strana zbytek 0, 2 nebo 3. Jedinou možností tak je zbytek 0, v takovém případě by však pravá strana byla dělitelná číslem 25, ale levá ne.

2. Nechť $k = 1$. Potom $4x^2 - 19x + 6 = u^2$ pro nějaké celé číslo u , odkud po vynásobení šestnácti a po úpravě dostaneme

$$265 = (8x - 19)^2 - 16u^2 = (8x - 19 - 4u)(8x - 19 + 4u).$$

Snadno ověříme, že $x = 6$ je jediná možnost, pro niž dostaneme vyhovující řešení původní rovnice (stačí zvážit všechny možné rozklady čísla $265 = 1 \cdot 265 = 5 \cdot 53 = \dots$ a uvážit skutečnost, že $x - 2 = s^2$). Po dosazení do (1) tak získáme dvojice $(6, 3)$ a $(6, -9)$.

3. Nechť $k = -1$. Podobně jako v předchozím případě máme $4x^2 - 19x + 6 = -u^2$, odkud

$$265 = (8x - 19)^2 + (4u)^2,$$

takže $u \leq 4$. Ověříme všechny možnosti. Pro $u = 0, 1, 2$ nezískáme žádné řešení. Pro $u = 3$ dostaneme $(8x - 19)^2 = 121 = 11^2$, odkud $x = 1$; získáme tak dvojice $(1, 1)$, $(1, -2)$. Nakonec pro $u = 4$ máme $(8x - 19)^2 = 9 = 3^2$, tj. $x = 2$, odkud získáme dvojici $(2, -1)$.

Danou rovnost splňují dvojice $(6, 3)$, $(6, -9)$, $(1, 1)$, $(1, -2)$ a $(2, -1)$.

46. mezinárodní matematická olympiáda

Mérida, hlavní město mexického státu Yucatán, který se rozkládá na stejnojmenném poloostrově, hostila ve dnech 8.–19. července 2005 účastníky každoročního klání nejlepších matematických talentů mezi studenty středních škol. Sjeli se tam v rekordním počtu 513 soutěžících z 91 zemí celého světa.

Přípravu a zdárný průběh celé akce zajišťovali organizátoři z řad členů *Mexické matematické společnosti* za podpory mexického ministerstva školství, vlády státu Yucatán, tamních univerzit a desítek sponzorů. Nashromážděné finanční prostředky umožnily ubytovat všechny soutěžící, vedoucí družstev i členy výborů a hodnotících komisí v areálu luxusních hotelů nedaleko centra yucatánské metropole, založené španělskými dobyvateli roku 1542 na místě mayského města *Tihó*. Mexičtí hostitelé připravili výborné podmínky pro vlastní soutěž i zajímavý doprovodný program, jehož vrcholem byl celodenní výlet ke zříceninám mayského města *Chichén Itzá*. Závěr olympiády mírně narušil příchod hurikánu *Emily*, který však nakonec Méridu minul zhruba o 80 km a v samotném městě se projevil jen silnějším větrem.

Vedoucím českého družstva byl RNDr. *Karel Horák*, CSc., z Matematického ústavu Akademie věd v Praze. Soutěžní družstvo, které doprovázel pedagogický vedoucí doc. RNDr. *Jaromír Šimša*, CSc., z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně, bylo jmenováno na základě výsledků ústředního kola 54. ročníku MO v Benešově a následného týdenního soustředění v Bílovci. Tvořili je *Jaroslav Hančl* z 3. ročníku Gymnázia Mikuláše Koperníka v Bílovci, *Pavel Kocourek* ze 4. ročníku SPŠ ST v Panské ulici v Praze, *František Konopecký* z 8. ročníku Gymnázia Holešov, *Jaromír Kuben* a *Jakub Opršal* z 3. ročníku Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně a *Marek Pechal* ze 7. ročníku Gymnázia v Lesní čtvrti ve Zlíně.

Soutěžící jako obvykle řešili ve dvou půldnech vždy tři soutěžní úlohy po dobu 4,5 hodiny; za každou ze šesti úloh mohli získat nejvýše 7 bodů. Po následných opravách a koordinacích vyšlo najevo, že letos žádná soutěžní úloha nebyla extrémně obtížná — 16 soutěžících totiž dosáhlo

maxima 42 bodů. Dostali pochopitelně zlaté medaile spolu s dalšími 26 soutěžícími, kteří získali alespoň 35 bodů. Mezi nimi ovšem vynikl moldavský reprezentant *Iurie Boreico*, který získal zvláštní cenu za originální řešení třetí úlohy (viz dále). Kromě 42 zlatých medailí bylo uděleno 79 stříbrných medailí (za zisk 23–34 bodů) a 127 bronzových medailí (za zisk 12–22 bodů). Naši reprezentanti podali nečekaně dobrý výkon a vybojovali pět medailí, přičemž *František Konopecký* získal zlatou. Bez ocenění se tak vrátil domů pouze *Jaroslav Hančl*.

Je to bezesporu nejlepší výkon českého družstva na mezinárodní matematické olympiádě za posledních osm let, neboť předchozí zlatou medaili jsme získali na 38. MMO (tehdy jsme dosáhli i stejného počtu bodů):

Umístění	Body za úlohu						Body	Cena
	1	2	3	4	5	6		
340.–354. Jaroslav Hančl	2	0	0	1	2	0	5	
72.–88. Pavel Kocourek	7	7	0	7	7	0	28	II.
29.–34. František Konopecký	7	7	7	7	7	1	36	I.
57.–64. Jaromír Kuben	7	7	0	7	7	2	30	II.
156.–174. Jakub Opršal	7	7	0	2	2	0	18	III.
122.–130. Marek Pechal	7	7	0	1	7	0	22	III.
Celkem	37	35	7	25	32	3	139	

Pro srovnání uvedme i výsledky slovenských reprezentantů, kteří získali jen o pár bodů méně:

Umístění	Body za úlohu						Body	Cena
	1	2	3	4	5	6		
114.–121. Jozef Bodnár	7	7	0	7	0	2	23	II.
108.–113. Ondrej Budáč	7	1	0	7	7	2	24	II.
65.–71. Michal Burger	1	7	0	7	7	7	29	II.
191.–206. Peter Černo	6	1	0	7	2	0	16	III.
108.–113. František Simančík	0	7	1	7	7	2	24	II.
207.–224. Jakub Závodný	7	1	0	7	0	0	15	III.
Celkem	28	24	1	42	23	13	131	

Tvrzení o českém úspěchu dokládá naše umístění v níže uvedeném neoficiálním pořadí družstev, ve kterém nám v posledních letech obvykle patřilo místo ve třetí, a někdy i ve čtvrté desítce. V mexické Méridě jsme však obsadili 16. místo před takovými státy, jako jsou Hong-Kong, Kanada, Polsko či Austrálie, ve kterých se výchově matematických talentů

věnují — ve srovnání s Českou republikou — s větší intenzitou, danou především objemem institucionálních prostředků, které jsou na tuto péči vyčleňovány. (Případná čísla v závorce upozorňují na nižší počet reprezentantů.)

	I	II	III	body		I	II	III	body
ČLR	5	1	0	235	Lotyšsko	0	0	2	62
USA	4	2	0	213	Nizozemsko	0	0	2	62
Rusko	4	2	0	212	Ázerbájdžán	0	0	2	59
Írán	2	4	0	201	Řecko	0	0	2	58
Korea	3	3	0	200	Irsko	0	1	0	55
Rumunsko	4	1	1	191	Kuba (4)	0	0	3	54
Tchaj-wan	3	2	1	190	Litva	0	0	1	53
Japonsko	3	1	2	188	Makedonie	0	0	2	50
Maďarsko	2	3	1	181	Bosna a Hercegovina	0	0	2	49
Ukrajina	2	2	2	181	Finsko	0	0	2	49
Bulharsko	2	3	1	173	Slovinsko	0	1	0	49
Německo	1	3	2	163	Kirgizie	0	0	2	46
Velká Británie	1	3	2	159	Španělsko	0	0	1	46
Singapur	0	4	2	145	Albánie	0	1	0	44
Vietnam	0	3	3	143	Švédsko	0	0	0	42
<i>Česká republika</i>	1	2	2	139	Jihoafriká republika	0	0	0	39
Hongkong	1	3	1	138	Macao	0	0	1	38
Bělorusko	1	3	1	136	Norsko	0	0	0	38
Kanada	1	2	2	132	Kostarika	0	0	0	37
<i>Slovensko</i>	0	4	2	131	Uruguay (5)	0	0	1	37
Moldavsko	1	2	2	130	Srí Lanka	0	0	1	32
Turecko	0	4	1	130	Filipíny	0	0	0	30
Thajsko	0	4	2	128	Portugalsko	0	0	0	27
Itálie	0	2	4	120	Salvador	0	0	0	25
Austrálie	0	0	6	117	Island	0	0	1	23
Izrael	0	2	3	113	Maroko	0	0	0	18
Kazachstán	0	2	3	112	Turkmenistán (3)	0	0	1	18
Kolumbie	0	2	2	105	Ekvádor	0	0	1	17
<i>Polsko</i>	0	1	5	105	Malajsie	0	0	0	15
Peru	0	0	6	104	Venezuela (2)	0	0	0	15
Mexiko	0	0	4	91	Kypr	0	0	0	14
Francie	0	0	4	83	Trinidad a Tobago	0	0	0	13
Arménie	0	0	5	82	Paraguay	0	0	0	12
Brazílie	1	0	1	82	Pákistán	0	0	0	11
Chorvatsko	0	1	2	82	Tunisko (3)	0	0	0	9
Indie	0	1	1	81	Portoriko	0	0	0	8
Gruzie	0	0	4	80	Guatemala (3)	0	0	0	6
Nový Zéland	0	1	2	77	Lichtenštejnsko (3)	0	0	0	4
Srbsko a Černá Hora	0	0	3	75	Bangladés	0	0	0	3
Belgie	0	1	1	74	Kuvajt (5)	0	0	0	3
Rakousko	0	0	2	74	Lucembursko (2)	0	0	0	3
Indonézie	0	0	3	70	Saudská Arábie (5)	0	0	0	3
Švýcarsko	0	1	1	70	Tádžikistán (3)	0	0	0	3
Dánsko	0	0	4	69	Mozambik (5)	0	0	0	2
Estonsko	0	0	3	68	Bolívie (2)	0	0	0	0
Argentina	0	1	2	65					

Hostitelskými zeměmi příštích olympiád budou Slovinsko a Vietnam.

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Na stranách rovnostranného trojúhelníku ABC je zvoleno šest bodů: body A_1, A_2 na straně BC , body B_1, B_2 na straně CA a body C_1, C_2 na straně AB , přičemž tyto body tvoří vrcholy konvexního šestiúhelníku $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ se stranami téže délky. Dokažte, že přímky A_1B_2, B_1C_2 a C_1A_2 mají společný bod. (Rumunsko)

2. Necht' $a_1, a_2, \dots$ je posloupnost celých čísel s nekonečným počtem kladných členů a s nekonečným počtem záporných členů. Předpokládejme, že pro každé přirozené číslo n čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ po dělení číslem n dávají n různých zbytků. Dokažte, že každé celé číslo se v posloupnosti vyskytuje právě jednou. (Nizozemsko)

3. Necht' x, y a z jsou kladná reálná čísla taková, že $xyz \geq 1$. Dokažte, že

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

(Korea)

4. Uvažujme posloupnost $a_1, a_2, \dots$ definovanou vztahem

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

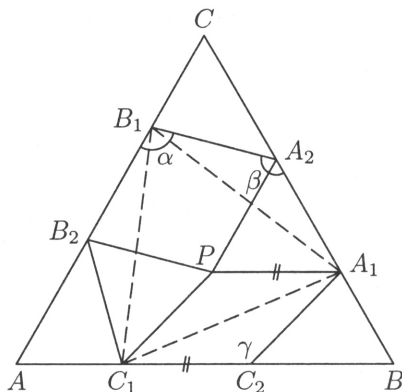
Určete všechna kladná celá čísla, která jsou nesoudělná s každým členem uvažované posloupnosti. (Polsko)

5. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ se stejně dlouhými a různoběžnými stranami BC a AD . Necht' bod E leží uvnitř strany BC a bod F uvnitř strany AD , přičemž $|BE| = |DF|$. Přímky AC a BD se protínají v bodě P , přímky BD a EF v bodě Q , přímky EF a AC v bodě R . Uvažujme všechny trojúhelníky PQR určené měnicemi se body E a F . Ukažte, že kružnice opsané těmito trojúhelníkům mají společný bod různý od P . (Polsko)

6. V matematické soutěži dostali soutěžící 6 úloh. Každou dvojici úloh vyřešilo více než $\frac{2}{5}$ soutěžících. Všech 6 úloh nevyřešil nikdo. Dokažte, že právě 5 úloh vyřešili aspoň dva soutěžící. (Rumunsko)

Řešení soutěžních úloh

1. Označme P vnitřní bod trojúhelníku ABC takový, že trojúhelník A_1A_2P je rovnostranný (obráz. 54). Zřejmě pak je $A_1P \parallel C_1C_2$ a $|A_1P| = |C_1C_2|$, takže $A_1PC_1C_2$ je kosoúhelník. Podobně i $A_2PB_2B_1$ je



Obr. 54

kosoúhelník. Označme α velikost úhlu $B_2B_1A_2$, β velikost úhlu $B_1A_2A_1$ a γ velikost úhlu $C_1C_2A_1$. Protože velikost úhlu při vrcholu C v trojúhelníku A_2CB_1 je 60° , je $\alpha + \beta = 240^\circ$, navíc je také $|\sphericalangle B_2PA_2| = \alpha$ a $|\sphericalangle C_1PA_1| = \gamma$. Je tedy

$$\alpha + \gamma = 360^\circ - (|\sphericalangle C_1PB_2| + |\sphericalangle A_1PA_2|) = 240^\circ,$$

takže $\beta = \gamma$. Podobně $|\sphericalangle C_1B_2B_1| = \beta$. Trojúhelníky $A_1A_2B_1$, $B_1B_2C_1$ a $C_1C_2A_1$ jsou tudíž shodné a trojúhelník $A_1B_1C_1$ je rovnostranný. To znamená, že přímky A_1B_2 , B_1C_2 a C_1A_2 jsou osy jeho stran B_1C_1 , C_1A_1 a A_1B_1 . Tím je tvrzení dokázáno.

Jiné řešení. (Podle *Jakuba Závodného*, Slovensko.) Označme vnitřní úhly při základnách rovnoramenných trojúhelníků $C_1B_1B_2$, $A_1C_1C_2$, $B_1A_1A_2$ postupně α , β , γ (obráz. 55). Dopočítáním úhlů do 180° při vrcholu C_2 , v trojúhelníku C_2BA_1 a v rovnoramenném trojúhelníku $A_2C_2A_1$ postupně dostaneme

$$|\sphericalangle BC_2A_1| = 2\beta, \quad |\sphericalangle C_2A_1B| = 120^\circ - 2\beta, \quad |\sphericalangle C_2A_2A_1| = 60^\circ - \beta.$$

Podobně

$$|\sphericalangle CA_2B_1| = 2\gamma, \quad |\sphericalangle A_2B_1C| = 120^\circ - 2\gamma, \quad |\sphericalangle B_1A_2B_2| = 60^\circ - \gamma.$$

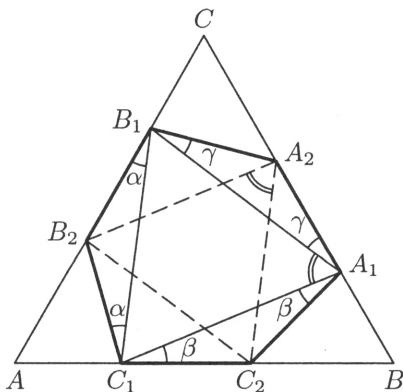
$$|\sphericalangle B_1 A_1 C_1| = 180^\circ - (120^\circ - 2\beta) - \beta - \gamma = 60^\circ + \beta - \gamma,$$

$$|\sphericalangle B_2 A_2 C_2| = 180^\circ - 2\gamma - (60^\circ - \gamma) - (60^\circ - \beta) = 60^\circ + \beta - \gamma,$$

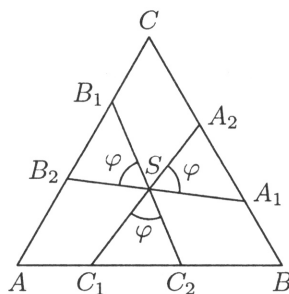
takže $|\sphericalangle B_1 A_1 C_1| = |\sphericalangle B_2 A_2 C_2|$. Stejným způsobem odvodíme i rovnosti

$$|\sphericalangle C_1 B_1 A_1| = |\sphericalangle C_2 B_2 A_2| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle A_1 C_1 B_1| = |\sphericalangle A_2 C_2 B_2|.$$

Trojúhelníky $A_1 B_1 C_1$ a $A_2 B_2 C_2$ jsou tedy podobné. Uvažujme (jednoznačně určené) podobné zobrazení, které zobrazí první z trojúhelníků na druhý. Uvedenou podobnost lze dostat složením otočení kolem středu S o úhel φ a stejnolehlosti s tímž středem S a koeficientem k (používáme známé tvrzení, že takový rozklad podobnosti existuje).



Obr. 55



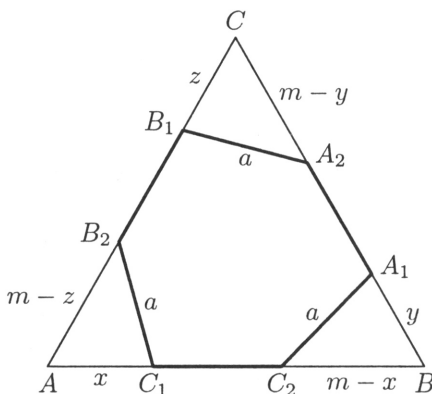
Obr. 56

Trojúhelníky $SA_1 A_2$, $SB_1 B_2$, $SC_1 C_2$ jsou navzájem podobné, protože při vrcholu S mají stejný úhel (obr. 56) a navíc $|SA_2| : |SA_1| = |SB_2| : |SB_1| = |SC_2| : |SC_1| = k$. Podle zadání je však $|A_1 A_2| = |B_1 B_2| = |C_1 C_2|$, takže uvedené trojúhelníky jsou shodné a mají shodné výšky z vrcholu S . Odtud plyne, že bod S má stejnou vzdálenost od všech stran trojúhelníku ABC , takže to musí být střed jeho vepsané kružnice (středů připsaných kružnic snadno vyloučíme). Z odvozené shodnosti plyne rovněž $|SA_1| = |SB_1| = |SC_1|$, a protože trojúhelník ABC je rovnostranný (se středem S), je díky symetrii rovnostranný i trojúhelník $A_1 B_1 C_1$.

Nyní už dokážeme požadované tvrzení. Čtyřúhelník $C_1 A_1 B_1 B_2$ je deltoid ($|C_1 A_1| = |A_1 B_1|$ a $|B_1 B_2| = |B_2 C_1|$), takže jeho úhlopříčka $A_1 B_2$

je zároveň osou úsečky B_1C_1 . Podobně je B_1C_2 osou úsečky C_1A_1 a C_1A_2 osou úsečky A_1B_1 . Vidíme, že dané tři přímky jsou osami stran trojúhelníku $A_1B_1C_1$, proto se protínají v jednom bodě.

Jiné řešení. (Podle *Ondřeje Budáče*, Slovensko.) Označme a délku strany šestiúhelníku $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ a položme $|AB| - a = m$. Dále píšme $|AC_1| = x$, $|BA_1| = y$, $|CB_1| = z$, takže $|BC_2| = m - x$, $|CA_2| = m - y$, $|AB_2| = m - z$ (obr. 57).



Obr. 57

Z kosinové věty pro trojúhelníky AC_1B_2 a BA_1C_2 (je $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$) dostaneme

$$a^2 = x^2 + (m - z)^2 - x(m - z) = y^2 + (m - x)^2 - y(m - x)$$

a po jednoduché úpravě

$$m(-2z + x + y) = (y - z)(y + z + x).$$

Zcela analogicky (z kosinové věty pro trojúhelníky AC_1B_2 a CB_1A_2 , nebo využijeme cyklickou záměnu) dostaneme i rovnost

$$(x - y)(x + y + z) = m(-2y + z + x).$$

Po vynásobení obou rovností, zkrácení nenulových činitelů m a $(x + y + z)$, roznásobení a dalších úpravách obdržíme

$$\begin{aligned}(x - y)(-2z + x + y) &= (y - z)(-2y + z + x), \\ x^2 - y^2 - 2zx + 2yz &= -2y^2 - z^2 + xy + 3yz - zx, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= xy + yz + zx,\end{aligned}$$

přičemž poslední rovnost je ekvivalentní rovnosti

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0.$$

Nutně tedy $x = y = z$, takže trojúhelník $A_1B_1C_1$ je rovnostranný (díky symetrii). Důkaz tvrzení úlohy dokončíme stejně jako v předchozím řešení.

Jiné řešení. Uvažujme šest vektorů

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}_2\mathbf{C}_1, \mathbf{u}' = \mathbf{C}_1\mathbf{C}_2, \mathbf{v} = \mathbf{C}_2\mathbf{A}_1, \mathbf{v}' = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2, \mathbf{w} = \mathbf{A}_2\mathbf{B}_1, \mathbf{w}' = \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2,$$

jež mají všechny stejnou délku a v součtu dávají nulový vektor. Protože zřejmě i součet vektorů $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ je nulový vektor, platí totéž i pro vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, takže $\mathbf{u} + \mathbf{v} = -\mathbf{w}$.

Ovšem dva vektory stejné délky dávají v součtu vektor téže délky jediné tehdy, když svírají úhel 120° . To znamená, že přímky B_2C_1 , C_2A_1 , A_2B_1 určují rovnostranný trojúhelník. Jak snadno nahlédneme, znamená to, že strany tohoto trojúhelníku protínají odpovídající dvě strany daného trojúhelníku pod stejnými úhly, takže „rohové“ trojúhelníky AC_1B_2 , BA_1C_2 a CB_1A_2 jsou podobné, ba dokonce vzhledem k rovnostem $|B_2C_1| = |C_2A_1| = |A_2B_1|$ shodné. Daný trojúhelník i šestiúhelník jsou tedy invariantní vůči otočení o 120° kolem středu O trojúhelníku ABC . Odtud mimo jiné plyne i rovnost úhlů

$$|\sphericalangle B_2C_1C_2| = |\sphericalangle C_2A_1A_2|, \quad |\sphericalangle A_1A_2B_1| = |\sphericalangle B_1B_2C_1|,$$

tudíž B_1C_2 je osou šestiúhelníku $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ a prochází středem O . Podobně procházejí středem O i další dvě přímky A_1B_2 a C_1A_2 .

2. Žádné číslo se v uvažované posloupnosti nemůže vyskytnout dvakrát. Kdyby totiž pro $i < j$ bylo $a_i = a_j$, pro každé $n \geq j$ by mezi čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ byla čísla a_i, a_j , která dávají při dělení n stejný zbytek. Navíc pro každé přirozené číslo n je rozdíl libovolných dvou čísel mezi čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ nejvýše $n - 1$: jinak bychom totiž našli dvě čísla a_i, a_j taková, že $i < j \leq n \leq |a_i - a_j| = m$, což znamená, že mezi čísla $a_1, a_2, \dots, a_m$ by byla dvě se stejným zbytkem při dělení číslem m .

Uvažujme množinu $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ pro libovolné přirozené n . Je-li c nejmenší a d největší číslo z M , z předešlého odstavce vyplývá, že $d - c \geq n - 1$ (všechny prvky množiny M jsou různé) a zároveň $d - c \leq n - 1$

(protože $c, d \in \mathbb{M}$). Je tedy nutně $d - c = n - 1$ a množinu $\mathbb{M}$ tvoří všechna celá čísla mezi c a d .

Nechť x je libovolné celé číslo. Protože uvažovaná posloupnost má nekonečně mnoho kladných i záporných členů a všechny její členy jsou navzájem různé, existuje index i , pro který $a_i < x$, a zároveň index j , pro který $x < a_j$. Pro $n = \max\{i, j\}$ jsou tak mezi čísly $a_1, a_2, \dots, a_n$ kromě jiných i všechna celá čísla mezi a_i a a_j , tudíž i číslo x .

3. Odečtením jedničky od každého ze zlomků dané nerovnosti dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \leq 3. \quad (1)$$

Z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti pro trojice $(x^{5/2}, y, z)$ a $(y^{1/2}z^{1/2}, y, z)$ a podmínky $xyz \geq 1$ dostaneme

$$\begin{aligned} (x^5 + y^2 + z^2)(yz + y^2 + z^2) &\geq (x^{5/2}(yz)^{1/2} + y^2 + z^2)^2 \geq \\ &\geq (x^2 + y^2 + z^2)^2, \end{aligned}$$

takže pro zlomky z (1) máme odhad

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} \leq \frac{yz + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Analogické nerovnosti platí i pro další dva zlomky, proto

$$\begin{aligned} \frac{yz + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{zx + z^2 + x^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{xy + x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} &\leq \\ &\leq 2 + \frac{yz + zx + xy}{x^2 + y^2 + z^2} \leq 3, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat. (Podobně jako v jednom z řešení první úlohy jsme využili známou nerovnost $yz + zx + xy \leq x^2 + y^2 + z^2$, která platí pro libovolná reálná čísla.)

Jiné řešení. (Podle *Iurie Boreica*, Moldavsko, na 46. MMO oceněno zvláštní cenou.) Protože

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} - \frac{x^5 - x^2}{x^3(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{x^2(x^2 + z^2)(x^3 - 1)^2}{x^3(x^5 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geq 0$$

(a podobná nerovnost platí i pro zlomky, jež dostaneme cyklickou záměnou proměnných), stačí místo dané nerovnosti dokázat silnější nerovnost

$$\frac{x^5 - x^2}{x^3(x^2 + y^2 + z^2)} + \frac{y^5 - y^2}{y^3(x^2 + y^2 + z^2)} + \frac{z^5 - z^2}{z^3(x^2 + y^2 + z^2)} \geq 0, \quad (1)$$

která je ekvivalentní s nerovností

$$\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \left(x^2 - \frac{1}{x} + y^2 - \frac{1}{y} + z^2 - \frac{1}{z} \right) \geq 0.$$

Z podmínky $xyz \geq 1$ plyne $1/x \leq yz$, $1/y \leq zx$, $1/z \leq xy$, pro výraz v závorce proto platí

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{1}{x} + y^2 - \frac{1}{y} + z^2 - \frac{1}{z} &\geq x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \\ &= \frac{1}{2} [(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] \geq 0. \end{aligned}$$

Tím je nerovnost (1) dokázaná.

Jiné řešení. (Podle *Františka Konopeckého*.)

1. Redukce případu $xyz > 1$ na případ $xyz = 1$. Je-li $xyz > 1$, je

$$x = kx_1, \quad y = ky_1, \quad z = kz_1, \quad \text{kde } k > 1 \text{ a } x_1 y_1 z_1 = 1.$$

Pro zlomky z dokazované nerovnosti

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0$$

platí

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} = \frac{k^3 x_1^5 - x_1^2}{k^3 x_1^5 + y_1^2 + z_1^2} \geq \frac{x_1^5 - x_1^2}{x_1^5 + y_1^2 + z_1^2},$$

neboť pro kladná čísla A, B, C, D

$$\frac{Ak^3 - B}{Ck^3 + D} - \frac{A - B}{C + D} = \frac{(k^3 - 1)(AD + BC)}{(Ck^3 + D)(C + D)} > 0.$$

Stačí tedy danou nerovnost dokázat pro čísla x_1, y_1, z_1 , jež splňují rovnost $x_1 y_1 z_1 = 1$.

2. Předpokládejme, že $xyz = 1$, a dokazovanou nerovnost

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0$$

vynásobíme součinem (kladných) jmenovatelů. Pak pro funkci

$$F(x, y, z) = (x^5 - x^2)(x^2 + y^5 + z^2)(x^2 + y^2 + z^5)$$

máme dokázat nerovnost

$$F(x, y, z) + F(y, z, x) + F(z, x, y) \geq 0.$$

Po pravném roznásobení a úpravě (vyjde 54 členů, po sečtení se „zruší“ 12 členů typu x^7y^2 , členy se záporným znaménkem převedeme z levé strany na pravou) dostaneme:

$$\begin{aligned} & x^9 + 2x^7y^5 + 2x^7z^5 + 2x^5y^7 + 3x^5y^5z^5 + \\ & + x^5y^2z^2 + 2x^5z^7 + x^2y^5z^2 + x^2y^2z^5 + \\ & + y^9 + 2y^7z^5 + 2y^5z^7 + z^9 \geq \\ & x^6 + x^5y^5z^2 + x^5y^4 + x^5y^2z^5 + x^5z^4 + x^4y^5 + \\ & + x^4y^2 + x^4z^5 + x^4z^2 + x^2y^5z^5 + x^2y^4 + \\ & + 3x^2y^2z^2 + x^2z^4 + y^6 + y^5z^4 + \\ & + y^4z^5 + y^4z^2 + y^2z^4 + z^6 \end{aligned} \quad (1)$$

Podtržené členy jsou rovny 1. Dále na levé straně máme

$$x^9 + x^5y^2z^2 = x^9 + x^3 \geq 2\sqrt{x^9 \cdot x^3} = 2x^6$$

a na pravé straně podle $uv + uw + vw \leq u^2 + v^2 + w^2$

$$\begin{aligned} x^5y^5z^2 + x^5y^2z^5 + x^2y^5z^5 &= x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3 \leq \\ &\leq x^6 + y^6 + z^6. \end{aligned}$$

Proto stačí dokázat nerovnost

$$\begin{aligned} 2(x^7y^5 + x^5y^7 + \dots) &\geq \\ &\geq (x^5y^4 + x^4y^5 + \dots) + (x^4y^2 + x^2y^4 + \dots). \end{aligned}$$

Homogenizujme členy na společný stupeň 12:

$$\begin{aligned} x^5y^4 &= x^5y^4 \cdot xyz = x^6y^5z, \\ x^4y^2 &= x^4y^2 \cdot (xyz)^2 = x^6y^4z^2. \end{aligned}$$

Dostaneme tak homogenní nerovnost

$$2(x^7y^5 + \dots) \geq (x^6y^5z + \dots) + (x^6y^4z^2 + \dots).$$

Ta už plyne z toho, že pro libovolná $x, y, z > 0$ máme dle tzv. Muirheadovy nerovnosti

$$(x^7y^5 + \dots) \geq (x^6y^5z + \dots) \geq (x^6y^4z^2 + \dots).$$

Vysvětlíme ještě, proč platí předchozí nerovnost, pomocí rozkladu rozdílů zastoupených výrazů:

$$x^5(y^7 + z^7 - y^6z - z^6y) + \dots = x^5(y^6 - z^6)(y - z) + \dots \geq 0,$$

což dokazuje levou nerovnost, pravou nerovnost nejdříve zkrátíme výrazem xyz do tvaru

$$(x^5y^4 + \dots) \geq (x^5y^3z + \dots)$$

a pak podobně rozložíme:

$$x^5(y^4 + z^4 - y^3z - z^3y) + \dots = x^5(y^3 - z^3)(y - z) + \dots \geq 0.$$

Poznámka. V souvislosti s právě uvedeným řešením připomeňme dvě užitečné nerovnosti. Pro n -tici $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ kladných reálných čísel a nezáporná čísla $x_1, \dots, x_n$ zavedme označení

$$T_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \sum y_1^{a_1} \dots y_n^{a_n},$$

kde sčítáme přes všechny permutace $(y_1, \dots, y_n)$ čísel $x_1, \dots, x_n$. O dvou n -ticích $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ a $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ navíc řekneme, že α majorizuje β , jestliže $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$ a zároveň všechny částečné součty splňují nerovnosti $a_1 + \dots + a_j \geq b_1 + \dots + b_j$ ($1 \leq j \leq n-1$).

Jestliže α majorizuje β , pak platí

$$T_\alpha(x_1, \dots, x_n) \geq T_\beta(x_1, \dots, x_n)$$

s rovností, právě když $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ (*Muirheadova nerovnost*).

Jestliže λ a μ jsou nezáporná reálná čísla, pak platí

$$T_{\lambda+2\mu,0,0}(x_1, x_2, x_3) + T_{\lambda,\mu,\mu}(x_1, x_2, x_3) \geq 2T_{\lambda+\mu,\mu,0}(x_1, x_2, x_3)$$

s rovností, právě když $x_1 = x_2 = x_3$ nebo $x_1 = x_2$ a $x_3 = 0$ nebo $x_1 = x_3$ a $x_2 = 0$ nebo $x_2 = x_3$ a $x_1 = 0$ (*Schurova nerovnost*).

Dokazovanou nerovnost (1) v předchozím řešení tak můžeme zapsat (pro jednoduchost vynecháme všude trojice proměnných (x, y, z)) jako

$$T_{9,0,0} + 2T_{7,5,0} + T_{5,2,2} \geq T_{6,0,0} + T_{5,5,2} + T_{5,4,0} + T_{4,2,0}$$

a její platnost teď plyne z následujících (zřejmých) nerovností (využíváme rovnost $xyz = 1$):

$$T_{9,0,0} + T_{5,2,2} \geq 2T_{7,2,0} \quad (\text{Schur}),$$

$$T_{7,2,0} \geq T_{7,1,1} = T_{6,0,0},$$

$$T_{7,2,0} \geq T_{5,3,1} = T_{4,2,0},$$

$$T_{7,5,0} \geq T_{5,5,2},$$

$$T_{7,5,0} \geq T_{6,5,1} = T_{5,4,0}.$$

4. Ukážeme, že každé prvočíslo p má v dané posloupnosti svůj násobek. Protože $a_2 = 48$ je násobkem dvou i tří, stačí uvažovat $p > 3$. V takovém případě dostáváme z malé věty Fermatovy (modulo p)

$$2^{p-1} \equiv 1, \quad 3^{p-1} \equiv 1, \quad \text{a tedy} \quad 6^{p-1} \equiv 1.$$

Odtud

$$\begin{aligned} 6a_{p-2} &= 6 \cdot 2^{p-2} + 6 \cdot 3^{p-2} + 6 \cdot 6^{p-2} - 6 = \\ &= 3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6 \equiv 3 + 2 + 1 - 6 = 0. \end{aligned}$$

Číslo $6a_{p-2}$ je tedy dělitelné p , a protože $p > 3$, je i číslo a_{p-2} násobkem prvočísla p .

Jediné kladné číslo, které je nesoudělné se všemi členy dané posloupnosti, je tedy 1.

Jiné řešení. Protože $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1^n$, má daná posloupnost charakteristický mnohočlen q s kořeny 2, 3, 6 a 1, tj.

$$q(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 6)(\lambda - 1) = \lambda^4 - 12\lambda^3 + 47\lambda^2 - 72\lambda + 36.$$

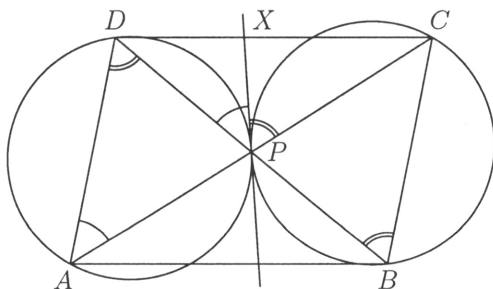
To znamená, že daná posloupnost splňuje následující rekurentní vztah

$$a_{n+4} = 12a_{n+3} - 47a_{n+2} + 72a_{n+1} - 36a_n \quad (1)$$

pro libovolné přirozené n . Daná posloupnost je tudíž pro libovolné prvočíslo p od jistého členu počínaje periodická modulo p . Je-li p prvočíslo nesoudělné s koeficientem 36 ($p \notin \{2, 3\}$) u členu a_n , můžeme rekurenci „obrátit“ a počítat členy posloupnosti „zpět“. Posloupnost čísel modulo takové prvočíslo p je tedy periodická celá. Snadno ovšem nahlédneme, že rekurentnímu vztahu (1) vyhovují i celočíselné členy $a_0 = 2$ a $a_{-1} = 0$, takže mezi členy dané posloupnosti musí existovat čísla dělitelná prvočíslem p .

Protože $a_2 = 48$, je 1 jediné kladné číslo, které je nesoudělné se všemi členy dané posloupnosti.

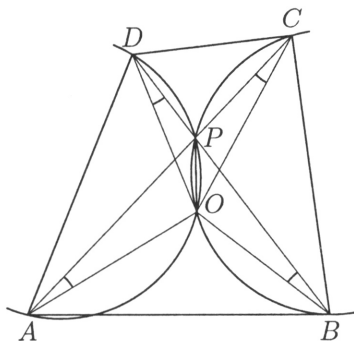
5. (Podle *Františka Simančíka*, Slovensko.) Uvažujme kružnice opsané trojúhelníkům BCP a ADP . Předpokládejme, že se v bodě P dotýkají a že jejich společná tečna v tomto bodě protíná stranu CD v bodě X (obr. 58). Z rovnosti obvodových a úsekových úhlů příslušných tětivám



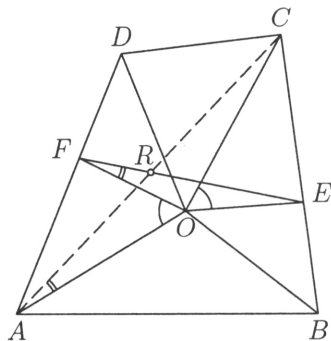
Obr. 58

DP a CP plynou rovnosti $|\sphericalangle DAP| = |\sphericalangle DPX|$ a $|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle CPX|$. Protože vedlejší úhel CPD trojúhelníku APD je roven součtu jeho úhlů při vrcholech A a D , vidíme, že $|\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle CPX| = |\sphericalangle CBP|$. To znamená, že strany BC a AD jsou rovnoběžné, což odporuje zadání úlohy. Uvažované kružnice se proto nedotýkají, a mají tak kromě bodu P ještě další průsečík, který označíme O .

Protože $|BC| = |AD|$ a $|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle APD|$, mají obě kružnice stejné poloměry a obvodové úhly příslušné společné tětivě PO mají stejnou velikost (obr. 59). Odtud vyplývá, že trojúhelníky CAO a BDO jsou rovnoramenné, takže $|OA| = |OC|$, $|OB| = |OD|$. Trojúhelníky OAD a OCB jsou proto shodné podle věty *sss*, a protože $|EC| = |AF|$, jsou shodné i trojúhelníky OAF a OCE . Odtud $|\sphericalangle AOF| = |\sphericalangle COE|$, takže $|\sphericalangle FOE| = |\sphericalangle AOC|$ a rovnoramenné trojúhelníky FOE a AOC jsou



Obr. 59



Obr. 60

podobné. Proto $|\sphericalangle OFE| = |\sphericalangle OAC| = |\sphericalangle OAR|$ a čtyřúhelník $AORF$ je tětiový (obr. 60).

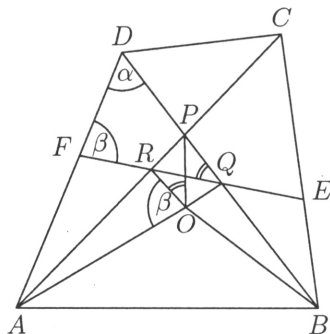
Označme $|\sphericalangle ADB| = \alpha$, $|\sphericalangle DFE| = \beta$. V tětiovém čtyřúhelníku $AORF$ máme $|\sphericalangle AOR| = 180^\circ - |\sphericalangle AFR| = \beta$. V tětiovém čtyřúhelníku $AOPD$ zase $|\sphericalangle AOP| = 180^\circ - \alpha$, tj.

$$|\sphericalangle ROP| = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

Zároveň však z trojúhelníku FQD máme

$$|\sphericalangle RQP| = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

Odtud $|\sphericalangle ROP| = |\sphericalangle RQP|$ a čtyřúhelník $PROQ$ je tětiový (obr. 61). Bod O proto leží na kružnici opsané trojúhelníku PQR . Protože poloha bodu O na volbě bodů E, F nezávisí, je úloha vyřešena.



Obr. 61

6. Označme n počet soutěžících a N počet všech vyřešených dvojic úloh (pokud soutěžící vyřešil r úloh, započítáme do N číslo $\binom{r}{2}$). Každou z 15 dvojic vyřešilo více než $\frac{2}{5}$ soutěžících, tj. aspoň $\frac{1}{5}(2n+1)$ soutěžících, proto

$$N \geq 15 \cdot \frac{2n+1}{5} = 6n+3. \quad (1)$$

Předpokládejme, že právě 5 úloh vyřešilo k účastníků. Každý z nich vyřešil 10 dvojic úloh, zatímco každý z ostatních $n-k$ účastníků vyřešil nejvýše 6 dvojic úloh, takže

$$N \leq 10k + 6(n-k) = 6n + 4k.$$

Z uvedených dvou odhadů je zřejmé, že $k \geq 1$. Kdyby navíc nebylo $\frac{1}{5}(2n+1)$ celé číslo, vyřešilo by každou dvojici úloh aspoň $\frac{1}{5}(2n+2)$ účastníků a první odhad by měl tvar $N \geq 6n+6$, což dává nerovnost $k \geq 2$, takže bychom byli hotovi. Podobně pokud by některý z účastníků vyřešil méně než 4 úlohy, tj. vyřešil by nejvýše 3 dvojice úloh, měl by druhý odhad tvar $N \leq 6n+4k-3$, a to spolu s (1) opět dává nerovnost $k \geq 2$.

Zbývá tedy vyloučit případ, kdy je $2n+1$ dělitelné pěti, jeden účastník (nazvěme ho *vítěz*) vyřešil 5 úloh a každý jiný vyřešil právě 4 úlohy. Předpokládejme, že taková situace nastala. Je tedy $N = 10 + 6(n-1) = 6n+4$ (vítěz vyřešil 10 dvojic a zbylí účastníci po 6 dvojicích úloh). Vzhledem k předpokládané hodnotě N a odhadu (1) existuje právě jedna dvojice úloh (nazvěme ji *speciální*), kterou vyřešilo právě $\frac{1}{5}(2n+1)+1$ účastníků, zatímco každou ze zbylých 14 dvojic vyřešilo právě $\frac{1}{5}(2n+1)$ účastníků.

Nazvěme úlohu, kterou *vítěz* nevyřešil, *těžkou*. Označme M počet vyřešených dvojic úloh, z nichž jedna je *těžká*. Pro každou z pěti dvojic obsahujících *těžkou* úlohu máme buď $\frac{1}{5}(2n+1)$, nebo $\frac{1}{5}(2n+1)+1$ účastníků, kteří obě úlohy z dvojice vyřešili. Takže $M = 2n+1$ nebo $M = 2n+2$ (druhá možnost nastane, pokud *speciální* dvojice obsahuje *těžkou* úlohu). Na druhé straně, pokud *těžkou* úlohu vyřešilo m účastníků, je $M = 3m$, protože každý z nich vyřešil kromě *těžké* úlohy právě 3 další. Dohromady tak dostáváme, že $2n+1$ nebo $2n+2$ je dělitelné třemi, neboli že (modulo 3) $2n+1 \equiv 0$ nebo $2n+1 \equiv 2$.

Zvolme nyní libovolnou úlohu u , která není *těžká* a není ani ve *speciální* dvojici (takové úlohy jsou aspoň tři). Označme L počet vyřešených dvojic úloh, z nichž jedna je u . Zřejmě $L = 2n+1$ (každou z pěti dvojic úloh obsahujících u vyřešilo právě $\frac{1}{5}(2n+1)$ účastníků). Na druhé

straně pokud úlohu u kromě *vítěze* vyřešilo ještě l dalších účastníků, je $L = 3l + 4$ (vítěz kromě u vyřešil 4 další úlohy, tj. vyřešil 4 dvojice obsahující u , ostatních l vyřešilo 3 dvojice obsahující u). Dostáváme tak $2n + 1 \equiv 1 \pmod{3}$, což odporuje předchozím dvěma možnostem. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Dvanáctý ročník Středoevropské olympiády v informatice

Hostitelem dvanácté středoevropské olympiády v informatice CEOI 2005 bylo Maďarsko. Soutěž se uskutečnila ve dnech 28. 7.–4. 8. 2005 na Gymnáziu Árpáda Vezéra v Sárospataku. Olympiáda probíhala v době prázdnin, takže na soutěž, zahajovací ceremoniál i část doprovodného programu mohly být využity počítačové laboratoře a ostatní volné prostory gymnázia. Slavnostní ukončovací ceremoniál se konal na sárospatsackém hradě. Ubytování a stravování bylo zajištěno v hotelu nedaleko školy.

Olympiáda byla skvěle připravena po stránce organizační, po stránce počítačového vybavení i z hlediska kvality přípravy soutěžních úloh. V každém ze dvou soutěžních dní studenti řešili u počítačů tři náročné příklady. Se svými počítači i soutěžním prostředím se přitom všichni mohli seznámit den před vlastní soutěží, kdy probíhalo tréninkové předkolo. Při soutěži bylo možné programovat v některém z programovacích jazyků Pascal, C nebo C++, každý si mohl zvolit podle svých zkušeností pracovní prostředí operačního systému Windows nebo Linux. O oba uvedené systémy byl mezi účastníky přibližně stejný zájem. Současně s klasickou soutěží probíhala i soutěž po Internetu pro veřejnost.

K testování a hodnocení vytvořených programů se na CEOI již několik let používá automatický vyhodnocovací systém testující programy na připravené sadě vstupních dat. Všechny prováděné testy mají dobu výpočtu omezenu předem známým časovým limitem a jednotlivá testovací vstupní data mají různou velikost a různou složitost, což dohromady umožňuje bodově rozlišit programy podle kvality použitého algoritmu. Za každou úlohu šlo získat maximálně 100 bodů, nejčastěji bylo zadáno 20 sad testovacích dat po 5 bodech. U některých úloh bylo navíc možné vyřešit i polovinu zadání (například při hledání optimálního uspořádání předmětů vypsát pouze cenu optima a již ne konkrétní uspořádání) a získat za takové řešení část bodů.

Dvanácté středoevropské olympiády v informatice se zúčastnilo 52 soutěžících studentů z 12 zemí střední Evropy. Z Maďarska se účastnily dva týmy, z nichž tým gymnázia v Sárospataku se do celkových výsledků nezapočítával; z ostatních států se účastnil vždy jeden tým. Českou

republiku reprezentovalo čtyřčlenné družstvo ve složení *Michal Vaner* (student Gymnázia Jana Palacha v Turnově), *Josef Pihera* (student Gymnázia ve Strakoniciích), *Roman Smrž* (student Gymnázia E. Krásnohorské v Praze) a *Cyril Hrubíš* (student Gymnázia M. Koperníka v Bílovci). Naši soutěžící byli vybráni na základě výsledků dosažených v celostátním kole 54. ročníku kategorie P Matematické olympiády. Vedením družstva byli pověřeni Mgr. *Martin Mareš* a *Milan Straka*, oba z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Na střeoevropské olympiádě v informatice se udělují ocenění podle podobného klíče, jaký se používá například na mezinárodní olympiádě v informatice. Nejvýše polovina soutěžících obdrží některou z medailí, přičemž zlaté, stříbrné a bronzové medaile se dělí přibližně v poměru 1 : 2 : 3. Na letošní CEOI 2005 bylo rozděleno celkem 25 medailí, z toho 4 zlaté, 8 stříbrných a 13 bronzových. O čtyři zlaté medaile se letos ne-tradičně podělily pouze dva státy — Rumunsko (1. místo) a Polsko (2. až 4. místo).

Naši studenti letos nezískali žádnou medaili, což je částečně způsobeno tím, že na střeoevropskou olympiádu jsou vysíláni mladí studenti, aby získali zkušenosti, které v následujících letech mohou zúročit na olympiádě mezinárodní. Slovenská reprezentace získala jen tři bronzové medaile. Následující tabulka shrnuje výsledky všech českých studentů v soutěži:

29. Michal Vaner	133 bodů	—
30. Josef Pihera	122 bodů	—
37. Roman Smrž	65 bodů	—
46. Cyril Hrubíš	12 bodů	—

Příští, v pořadí třináctá střeoevropská olympiáda v informatice CEOI 2006 se uskuteční v chorvatském městě Vrsaru uprostřed července 2006.

17. mezinárodní olympiáda v informatice

V pořadí 17. ročník mezinárodní olympiády v informatice (IOI — International Olympiad in Informatics) se konal v Polsku ve dnech 18.–25. 8. 2005.

Místem konání bylo město Nowy Sącz, které se nachází na samém jihu Polska nedaleko slovenských hranic.

Celá soutěž probíhala v prostorách první polské soukromé vysoké školy WSB-NLU (Wyższa Szkoła Biznesu — National Louis University), v blízkých kolejích školy bylo zajištěno i ubytování všech účastníků. Organizátoři ovšem byli většinou pracovníky varšavské university.

Letošní olympiády se zúčastnilo 276 soutěžících ze 72 zemí celého světa, další čtyři země vyslaly své pozorovatele s cílem seznámit se s průběhem soutěže a zúčastnit se jí aktivně v příštím roce. Každé družstvo je tvořeno čtyřmi soutěžícími studenty a je doprovázeno dvěma pedagogickými pracovníky jako vedoucími. Českou republiku letos reprezentovalo družstvo ve složení:

Ondřej Bílka, student Gymnázia ve Zlíně, Lesní čtvrť,

Jan Bulánek, absolvent Gymnázia J. Vrchlického v Klatovech,

Zbyněk Falt, absolvent Gymnázia ve Žďáru nad Sázavou,

Daniel Marek, student Gymnázia Ch. Dopplera v Praze 5.

Naši soutěžící byli vybráni na základě svých výsledků dosažených v celostátním kole kategorie P 54. ročníku matematické olympiády. Vedoucím české delegace byl jmenován doc. RNDr. *Pavel Töpfer*, CSc., z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, druhým vedoucím byl Mgr. *Zdeněk Dvořák*, rovněž z MFF UK v Praze.

Vlastní soutěž IOI probíhá vždy ve dvou soutěžních dnech, v každém z nich soutěžící řeší po dobu pěti hodin tři zadané úlohy. Každý účastník má pro svoji práci přidělen osobní počítač s nainstalovanými překladači programovacích jazyků Pascal, C a C++ a s interaktivním webovým rozhraním pro komunikaci soutěžícího s řídicím a vyhodnocovacím systémem soutěže. To umožňuje zálohovat data, tisknout výpisy programů, ověřovat správnost chování programu a zejména pak předávat vytvořené



programy na vyhodnocení. Všechny soutěžní úlohy jsou algoritmického charakteru a je nutné dovést je až do podoby kompletního odladěného programu, podobně jako je tomu třeba i v praktické části celostátního kola kategorie P naší matematické olympiády.

Odevzdané programy jsou vždy po skončení soutěžního dne automaticky testovány pomocí předem připravené sady testovacích dat, aby se ověřila jejich správnost. Důležitou součástí těchto testů jsou časové limity. Je pevně stanoveno, jak nejdéle může program počítat pro každá vstupní data. Tímto způsobem se mezi správně fungujícími programy ještě rozliší, na jak dobrém algoritmu je který program založen. Některá vstupní data zadávaná při testování jsou malá, takže výpočet s nimi stihne v časovém limitu i pomalejší algoritmus, naopak jiná vstupní data jsou rozsáhlá a včas je zvládnout zpracovat jedine program využívající dostatečně efektivní algoritmus.

Vedle samotné soutěže byl pro všechny účastníky IOI 2005 připraven i zajímavý doprovodný program. Jeho součástí byl celodenní výlet do Krakova a do známých solných dolů v městě Wieliczka, druhý výlet mířil do Národního parku Pieniny a zahrnoval i dvouhodinovou plavbu na plitích po řece Dunajec.

Letošní soutěžní úlohy byly algoritmicky zajímavé, byly dobře zvolené a pečlivě připravené. Nalézt opravdu dobré efektivní řešení bylo většinou poměrně obtížné, většina úloh však umožňovala získat částečné bodové ohodnocení i za méně efektivní algoritmus, jehož návrh tak náročný nebyl. Bodová ohodnocení získaná v soutěži se tak velmi dobře rozložila téměř v celé škále od nuly do plného počtu bodů. Za každou úlohu bylo možné získat maximálně 100 bodů, tj. celkově v soutěži 600 bodů. Hned čtyřem studentům (dva z Číny, po jednom z USA a Ukrajiny) se podařilo vyřešit všech šest soutěžních úloh zcela bezchybně a získali plný počet 600 bodů.

Na základě dosažených výsledků se na IOI udělují medaile tak, že nejvýše polovina účastníků obdrží některou z medailí, přičemž počet zlatých, stříbrných a bronzových medailí je v rámci možností přibližně v poměru 1 : 2 : 3. Letos bylo uděleno 24 zlatých medailí (soutěžícím, kteří dosáhli alespoň 496 bodů), 47 stříbrných medailí (za zisk alespoň 393 bodů) a 67 bronzových medailí (pro ty, kdo v soutěži získali minimálně 275 bodů). O medaile se podělili zástupci 57 zemí ze 72 zúčastněných. Naším studentům se tentokrát vedlo o něco hůře než v minulých letech, v soutěži získali jen dvě bronzové medaile.

Výsledky našich studentů:

82.	Daniel Marek	375 bodů	bronzová medaile
112.	Ondřej Bílka	316 bodů	bronzová medaile
	Jan Bulánek	233 bodů	–
	Zbyněk Falt	203 bodů	–

Mezinárodní olympiáda v informatice je soutěží jednotlivců, takže žádné oficiální pořadí národních družstev se v ní nevyhlašuje. Není ani stanoveno, zda by se mělo určovat podle součtu dosažených bodů, součtu umístění nebo třeba podle počtu získaných medailí. Podle kterékoliv zvolené metodiky výpočtu by se Česká republika umístila kolem 30.–35. místa, tzn. někde ke konci lepší poloviny zúčastněných zemí. Nejúspěšnějšími zeměmi letošního ročníku IOI byly po řadě Čína, USA a Slovensko, jejichž všichni čtyři soutěžící získali zlaté medaile. Další místa v pořadí první desítky by obsadily Thajsko, Ukrajina, Korea, Rusko, Polsko, Kanada a Izrael.

Příští, osmnáctý ročník soutěže IOI se bude konat v druhé polovině srpna 2006 v Mexiku. Uskuteční se ve městě Mérida v naprosto stejném místě, kde úspěšně proběhla 46. mezinárodní matematická olympiáda, o níž se dočtete na předchozích stránkách.

Texty soutěžních úloh

1. Hory

V Horském zábavním parku si pořídili zbrusu novou horskou dráhu. Její trať se skládá z n kolejnic spojených na koncích. Začátek první kolejnice je upevněn ve výšce 0. Bajtazar, operátor horské dráhy, může změnit sklon libovolného souvislého úseku kolejnic a tak upravit trasu horské dráhy. Sklon ostatních kolejnic se přitom nemění, takže se musí změnit výška, v níž se nacházejí kolejnice následující po úseku, jehož sklon Bajtazar upravil. Tak se zajistí, že se trať nepřeruší a její začátek zůstane ve výšce 0. Na obrázcích na druhé straně vidíte dva příklady úpravy horské dráhy.

Na trať vyjíždí vůz s energií dostatečnou na vystoupení do výšky h . Vůz tedy pokračuje v jízdě tak dlouho, dokud jeho výška nepřesáhne h nebo dokud nedojede na konec dráhy. Je zadán seznam všech jízd a úprav dráhy v průběhu jednoho dne. Určete pro každou jízdu, kolik kolejí vůz projel, než se zastavil.

Stav horské dráhy je reprezentován posloupností $d_1, \dots, d_n$ změn výšky. Číslo d_i představuje rozdíl výšek začátku a konce i -té kolejnice v centimetrech. Pokud je vůz na konci $(i - 1)$ -ní kolejnice ve výšce h centimetrů, pak po projetí i -té kolejnice je ve výšce $h + d_i$ centimetrů.

Na začátku dne je horská dráha rovná, a tedy $d_i = 0$ pro všechna i . Během dne probíhají v libovolném pořadí úpravy dráhy a jízdy. Každá úprava dráhy je popsána jako trojice celých čísel a, b a D . Po provedení této úpravy je $d_i = D$ pro všechna i taková, že $a \leq i \leq b$, zatímco sklon ostatních kolejnic (tedy d_i pro i mimo tento interval) se nemění.

Každá jízda je popsána jedním celým číslem h — největší výškou, které může vůz dosáhnout.

Úloha:

Napište program, který:

- ▷ Načte ze standardního vstupu posloupnost úprav dráhy a jízd.
- ▷ Pro každou jízdu určí na základě aktuální konfigurace trati počet projetých kolejnic.
- ▷ Vypíše odpovědi na standardní výstup.

Vstup: První řádek vstupu obsahuje jedno kladné celé číslo n — počet kolejnic, $1 \leq n \leq 1\,000\,000\,000$. Následující řádky obsahují úpravy dráhy a jízdy v pořadí, ve kterém nastaly během dne. Na posledním řádku vstupu je ukončovací značka. Každý řádek obsahuje jednu z těchto možností:

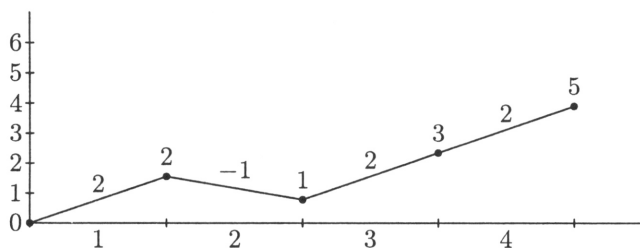
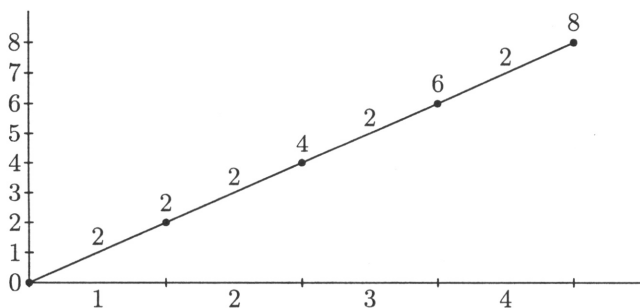
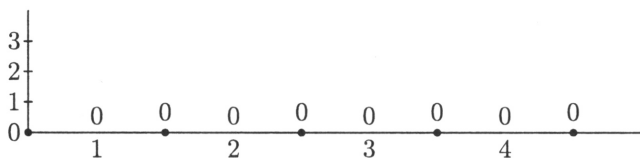
- ▷ Úprava dráhy — písmeno I, a trojici celých čísel a, b, D , vše odděleno vždy jednou mezerou ($1 \leq a \leq b \leq n$, $-1\,000\,000\,000 \leq D \leq 1\,000\,000\,000$).
- ▷ Jízda — písmeno Q, a jedno celé číslo h ($0 \leq h \leq 1\,000\,000\,000$) oddělené jednou mezerou.
- ▷ Koncová značka — písmeno E, označuje konec vstupních dat.

Výška všech částí dráhy je v libovolném okamžiku v intervalu $[0, 1\,000\,000\,000]$ centimetrů. Vstup obsahuje nejvýše 100 000 řádků. Pro 50 % vstupních dat platí, že $1 \leq n \leq 20\,000$ a že vstup má nejvýše 1 000 řádků.

Výstup: V pořadí i -tý řádek výstupu obsahuje jedno celé číslo — počet kolejnic, které vůz projel při i -té jízdě.

Příklad vstupu a výstupu:

4	4
Q 1	1
I 1 4 2	0
Q 3	3
Q 1	
I 2 2 -1	
Q 3	
E	



Obr. 62. Vzhled trati ze vzorového příkladu na začátku a po každé úpravě. Čísla na ose x představují čísla jednotlivých kolejnic. Čísla na ose y a čísla nad tečkami označují výšku. Čísla nad úsečkami označují změny výšky.

2. Posloupnost

Mějme neklesající posloupnost celých čísel $s_1, \dots, s_{n+1}$ ($s_i \leq s_{i+1}$ pro $1 \leq i \leq n$). Posloupnost $m_1, \dots, m_n$ definovanou pro $1 \leq i \leq n$ předpisem $m_i = \frac{1}{2}(s_i + s_{i+1})$ nazveme *průměrovou posloupností* pro posloupnost $s_1, \dots, s_{n+1}$. Například posloupnost 1, 5, 2, 3 je průměrovou posloupností pro posloupnost 1, 2, 2, 4. Členy průměrové posloupnosti nemusí být obecně celá čísla. V této úloze se však budeme zabývat jen průměrovými posloupnostmi tvořenými pouze celými čísly.

Je zadána neklesající posloupnost n celých čísel $m_1, \dots, m_n$. Určete počet různých neklesajících posloupností $s_1, \dots, s_{n+1}$ tvořených $n+1$ celými čísly tak, aby daná posloupnost $m_1, \dots, m_n$ byla jejich průměrovou posloupností.

Úloha:

Napište program, který:

- ▷ Načte ze standardního vstupu neklesající posloupnost $m_1, \dots, m_n$ celých čísel.
- ▷ Určí počet neklesajících posloupností, pro které je $m_1, \dots, m_n$ průměrovou posloupností.
- ▷ Vypíše tento počet na standardní výstup.

Vstup: První řádek vstupu obsahuje jedno celé číslo n ($2 \leq n \leq 5\,000\,000$). Následujících n řádků obsahuje posloupnost $m_1, \dots, m_n$. Hodnota m_i ($0 \leq m_i \leq 1\,000\,000\,000$) je zadána na řádku číslo $i + 1$. Alespoň pro 50 % vstupních dat navíc platí $n \leq 1\,000$ a $m_i \leq 20\,000$.

Výstup: Program vypíše na standardní výstup právě jedno celé číslo — počet neklesajících celočíselných posloupností, pro něž je posloupnost zadaná na vstupu posloupností průměrovou.

Příklad vstupu a výstupu:

3	4
2	
5	
9	

Existují totiž právě čtyři neklesající celočíselné posloupnosti, pro které je 2, 5, 9 průměrovou posloupností. Tyto posloupnosti jsou:

- | | |
|---------------|--------------|
| ▷ 2, 2, 8, 10 | 1, 3, 7, 11 |
| ▷ 0, 4, 6, 12 | -1, 5, 5, 13 |

3. Zahrada

Bajtazar má nejkrásnější zahradu v Bajticích. Vysadil si tam n růží, které mu v létě nádherně rozkvetly. Bajtazar začal podnikat v zábavním průmyslu, a proto už nemá dost času na to, aby se staral o všechny růže. Chtěl by si najmout dva zahradníky, kteří by mu pomáhali. Každý z těchto zahradníků by se staral o jednu obdélníkovou část zahrady. Aby se zahradníci nehádali, obě části musí být disjunktní a každá z nich musí obsahovat právě k růží.

Bajtazar také chce tyto obdélníkové oblasti oplotit, ale má málo peněz, takže chce, aby ploty byly co nejkratší. Vaším úkolem je pomoci Bajtazarovi vybrat nejvhodnější umístění těchto oblastí.

Zahrada má tvar obdélníka l metrů dlouhého a w metrů širokého. Je rozdělena na $l \cdot w$ čtverců o velikosti 1×1 metr. Zvolíme si systém souřadnic s osami rovnoběžnými se stranami zahrady. Všechny čtverce jsou označeny celočíselnými souřadnicemi (x, y) takovými, že $1 \leq x \leq l$ a $1 \leq y \leq w$. Každý čtverec může obsahovat libovolný počet růží.

Hledané obdélníkové oblasti musí mít strany rovnoběžné se stranami zahrady a čtverce v jejich rozích musí mít celočíselné souřadnice. Pro $1 \leq l_1 \leq l_2 \leq l$ a $1 \leq w_1 \leq w_2 \leq w$ obdélníková oblast s rohy (l_1, w_1) , (l_1, w_2) , (l_2, w_1) a (l_2, w_2) :

- ▷ obsahuje čtverce se souřadnicemi (x, y) takovými, že $l_1 \leq x \leq l_2$ a $w_1 \leq y \leq w_2$, a
- ▷ má obvod $2(l_2 - l_1 + 1) + 2(w_2 - w_1 + 1)$.

Obě obdélníkové oblasti musí být navzájem disjunktní, tzn. nemohou obsahovat tentýž čtverec. Mohou mít společný okraj nebo jeho část, ale i v takovém případě musí být každá oblast ohraničena vlastním plotem.

Úloha:

Napište program, který:

- ▷ Načte ze standardního vstupu rozměry zahrady, počet růží a jejich umístění v zahradě, a počet růží, které musí být v každé obdélníkové oblasti.
- ▷ Určí dvě obdélníkové oblasti tak, aby součet jejich obvodů byl co nejmenší, a zároveň aby splňovaly ostatní podmínky.
- ▷ Vypíše na standardní výstup součet jejich obvodů, nebo slovo NO, pokud takové dvě oblasti neexistují.

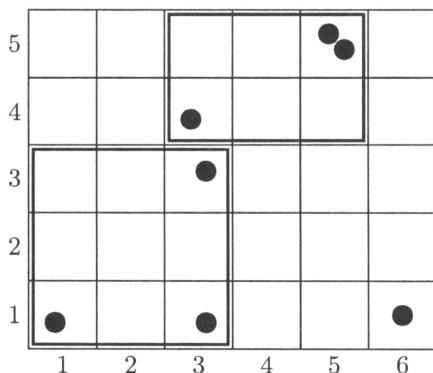
Vstup: První řádek vstupu obsahuje dvě celá čísla l a w ($1 \leq l, w \leq 250$) oddělená jednou mezerou — délku a šířku zahrady. Druhý řádek obsahuje dvě celá čísla n a k ($2 \leq n \leq 5\,000$, $1 \leq k \leq \frac{1}{2}n$)

oddělená jednou mezerou — počet růží v zahradě a počet růží, které by měly být v každé obdélníkové oblasti. Následujících n řádků obsahuje souřadnice růží, na každém z nich je uvedeno umístění jedné růže. Řádek $(i + 2)$ -hý obsahuje dvě celá čísla l_i, w_i ($1 \leq l_i \leq l, 1 \leq w_i \leq w$) oddělená jednou mezerou — souřadnice čtverce obsahujícího i -tou růži. V každém čtverci se může nacházet více růží. Pro 50 % vstupních dat platí $l, w \leq 40$.

Výstup: Program vypíše na standardní výstup právě jedno celé číslo — nejmenší možný součet obvodů dvou disjunktních obdélníkových oblastí, z nichž každá obsahuje právě k růží, nebo slovo NO, pokud takové oblasti neexistují.

Příklad vstupu a výstupu:

6	5	22
7	3	
3	4	
3	3	
6	1	
1	1	
5	5	
5	5	
3	1	



Obr. 63.

4. Narozeniny

Bajtazar má dnes narozeniny. Na oslavě jeho narozenin se sešlo n dětí (včetně Bajtazara). Děti jsou označeny čísly od 1 do n . Bajtazarovi rodiče

připravili velký kulatý stůl a kolem něj rozmístili n židlí. Každé dítě se po příchodu hned posadí k tomuto stolu. Dítě číslo 1 si sedne na jednu z židlí. Dítě číslo dvě se posadí hned vedle dítěte číslo 1, po jeho levé ruce. Dítě číslo 3 si sedne nalevo od dítěte číslo 2, atd., až nakonec dítě číslo n se posadí na poslední volnou židli mezi dětmi číslo 1 a $n - 1$.

Bajtazarovi rodiče vědí, že některé děti zlobí, pokud sedí příliš blízko u sebe. Proto chtějí přesadit děti v jiném pořadí. Toto pořadí je popsáno permutací $p_1, p_2, \dots, p_n$ ($p_1, p_2, \dots, p_n$ jsou navzájem různá celá čísla od 1 do n) — dítě číslo p_1 má sedět mezi dětmi číslo p_n a p_2 , dítě p_i (pro $i = 2, 3, \dots, n - 1$) má sedět mezi dětmi číslo p_{i-1} a p_{i+1} , a dítě číslo p_n má sedět mezi dětmi číslo p_{n-1} a p_1 . Všimněte si, že dítě číslo p_1 může sedět jak nalevo, tak napravo od dítěte p_n .

Všechny děti už ale dorazily a posadily se ke stolu. Aby děti seděly podle představ Bajtazarových rodičů, musí se každé dítě přesunout o nějaký počet míst doleva či doprava. Rodiče musí pro každé dítě určit, kam se má přemístit - tj. musí určit směr pohybu (doleva nebo doprava) a vzdálenost (počet míst). Na smluvený signál všechny děti vstanou, dojdou na určené místo a znovu si sednou.

Každý si asi uvědomil, že po vydání signálu nastane naprostý chaos. Míra chaosu je určena největší vzdáleností, o jakou se musí některé z dětí posunout. Děti mohou být přesazeny různými způsoby. Rodiče se rozhodli vybrat z nich ten, jehož míra chaosu je co nejmenší. Pomozte jim nalézt takový způsob přesazení dětí.

Úloha:

Napište program, který:

- ▷ načte ze standardního vstupu počet dětí a permutaci popisující požadované pořadí dětí u stolu,
- ▷ určí nejmenší možné m takové, že existuje způsob přesazení dětí, při kterém se každé dítě posune nejvýše o m míst,
- ▷ vypíše výsledek na standardní výstup.

Vstup: První řádek standardního vstupu obsahuje jedno celé číslo n ($1 \leq n \leq 1\,000\,000$). Druhý řádek obsahuje n celých čísel $p_1, p_2, \dots, p_n$ oddělených vždy jednou mezerou. Čísla $p_1, p_2, \dots, p_n$ tvoří permutaci množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, která popisuje požadované pořadí dětí u stolu. Pro 50 % vstupních dat navíc platí, že $n \leq 1\,000$.

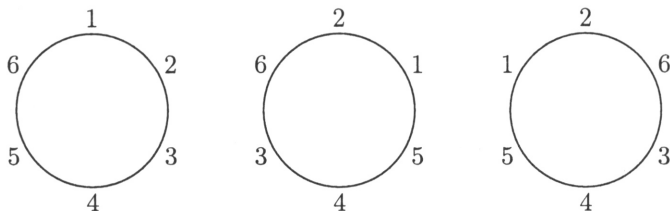
Výstup: Program vypíše na standardní výstup právě jedno celé číslo — nejmenší možnou míru chaosu m .

Příklad vstupu a výstupu:

6

2

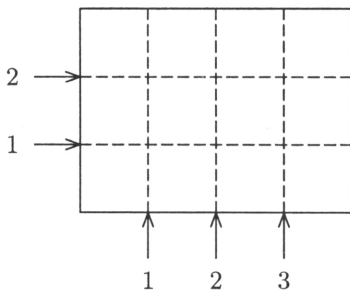
3 4 5 1 2 6



Obr. 64. Na levém obrázku je znázorněno počáteční rozmístění dětí. Prostřední obrázek ukazuje výsledek následujícího přesazování: děti číslo 1 a 2 se posunou o jedno místo, děti číslo 3 a 5 se posunou o dvě místa, a děti číslo 4 a 6 zůstanou na svém původním místě. Toto rozesazení splňuje podmínky zadání, neboť dítě 3 sedí mezi dětmi 6 a 4, 4 sedí mezi 3 a 5, 5 sedí mezi 4 a 1, 1 sedí mezi 5 a 2, 2 sedí mezi 1 a 6, a 6 sedí mezi 2 a 3. Existuje ještě jedno možné konečné rozmístění dětí, znázorněné na obrázku vpravo. V obou případech se žádné z dětí neposune o víc než o dvě místa.

5. Hra s obdélníkem

Alice a Bajtazar hrají následující hru. Mají obdélník o rozměrech $x \times y$, kde x a y jsou kladná celá čísla. Hráči se pravidelně střídají na tahu. Tah spočívá v rozdělení obdélníka na dvě obdélníkové části jedním svislým nebo vodorovným řezem. Výsledné obdélníky musí mít kladné celočíselné rozměry.



Obr. 65. Možné řezy v obdélníku o rozměrech 4×3 .

Menší ze vzniklých obdélníků je odstraněn a zbývající z nich je předán druhému hráči. Je-li obdélník rozdělen přesně na stejné poloviny, pak je odstraněna jedna z nich. Hráč, který dostane obdélník o rozměrech 1×1 prohrál, protože nemůže provést tah.

Alice v této hře neustále prohrává. Napište program, který jí proti Bajtazarovi pomůže vyhrát. Program musí používat speciální knihovnu, pomocí které bude hru hrát. Knihovna poskytuje funkce `dimension_x()` a `dimension_y()`, které vrací rozměry obdélníka. Počáteční rozměry obdélníka jsou celá čísla mezi 1 a 100 000 000. Alespoň jeden z rozměrů je větší než 1. Pro 50 % vstupních dat rozměry navíc nepřekročí 25.

Knihovna dále obsahuje proceduru `cut(dir, position)`, jejímž zavoláním váš program provede tah. Parametry `dir` a `position` popisují směr a umístění řezu. Parametr `dir` musí nabývat jedné z hodnot `vertical` nebo `horizontal`. Pokud `dir = vertical`, pak je řez veden svisle, parametr `position` určuje x -ovou souřadnici řezu (viz obrázek nahoře) a musí splňovat podmínku $1 \leq \text{position} \leq \text{dimension}_x() - 1$. Pokud `dir = horizontal`, pak je řez vodorovný, parametr `position` určuje y -ovou souřadnici řezu a musí splňovat $1 \leq \text{position} \leq \text{dimension}_y() - 1$.

Váš program bude hrát za prvního z hráčů — musí rozdělit počáteční obdélník. Když program zavolá proceduru `cut`, jeho tah je zaznamenán a řízení je předáno soupeři. Poté, co táhne soupeř, se řízení vrátí vašemu programu. Funkce `dimension_x()` a `dimension_y()` budou vracet rozměry obdélníka po provedení vašeho i soupeřova tahu. Váš program bude ukončen poté, co vyhraje, prohraje, nebo provede neplatný tah (tj. zavolá proceduru `cut` s chybnou hodnotou parametrů). Ukončení proběhne automaticky, váš program by tedy měl hrát tak dlouho, dokud je to možné. Můžete předpokládat, že pro každý z testovacích vstupů existuje vyhrávající strategie pro váš program.

Váš program nesmí číst z žádného souboru, ani zapisovat do žádného souboru, nesmí používat standardní vstup a výstup, a nesmí se pokusit měnit obsah paměti, která mu nepatří. Porušení kteréhokoliv z těchto pravidel může vést k diskvalifikaci.

6. Řeky

V Bajtánském království mají mnoho lesů a řek. Malé řeky se vlévají do větších, a nakonec se všechny řeky spojí v jeden mohutný tok, který u Bajtic ústí do moře.

V Bajtánii je n dřevorubeckých osad, ležících poblíž řek. V Bajticích se nachází Ústřední dřevařský závod, který zpracovává stromy, poražené v celém království. Stromy se dopravují do Bajtic po řekách. Doprava je však příliš drahá, a proto se král rozhodl nechat postavit k dalších dřevařských závodů v některých osadách. Stromy pak nebude nutné do-

pravovat až do Bajtic, ale bude možné zpracovat je v nejbližším závodě po proudu řeky. Stromy poražené poblíž osady s dřevařským závodem se po řece nebudou dopravovat vůbec. Je třeba podotknout, že bajtánské řeky se nerozvětvují, a z každé osady se tedy dá dostat právě jedním způsobem po proudu řeky do Bajtic.

Královští úředníci spočítali, kolik stromů se porazí u každé osady za rok. Máte rozhodnout, kde postavit dřevařské závody tak, aby celková cena za dopravu stromů po řece byla co nejmenší. Doprava jednoho stromu po řece stojí jeden cent za kilometr.

Úloha:

Napište program, který:

- ▷ načte ze standardního vstupu počet osad, počet stromů poražených za rok u každé z nich, počet nově budovaných dřevařských závodů a popis řek,
- ▷ určí nejmenší možnou cenu za dopravu stromů po řekách po postavení nových dřevařských závodů, a
- ▷ vypíše výsledek na standardní výstup.

Vstup: První řádek vstupu obsahuje dvě celá čísla oddělená mezerou: n — počet osad různých od Bajtic ($2 \leq n \leq 100$), a k — počet nových dřevařských závodů, které se mají vybudovat ($1 \leq k \leq 50$ a $k \leq n$). Osady jsou očíslovány $1, 2, \dots, n$, Bajtice jsou označeny číslem 0.

Každý z n následujících řádků obsahuje tři celá čísla, oddělená vždy jednou mezerou. Řádek $i + 1$ obsahuje:

- ▷ w_i — počet stromů poražených u osady číslo i za rok ($0 \leq w_i \leq 10\,000$),
- ▷ v_i — číslo první osady (nebo 0, pokud jsou to Bajtice) po proudu řeky od osady číslo i ($0 \leq v_i \leq n$),
- ▷ d_i — vzdálenost (v kilometrech) po proudu řeky od osady číslo i do osady v_i ($1 \leq d_i \leq 10\,000$).

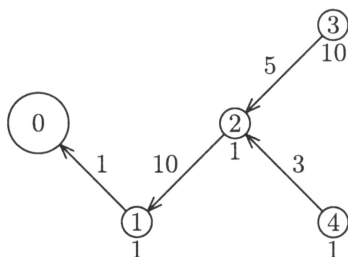
Celková cena za dopravu všech stromů do Bajtic za rok nepřesáhne 2 000 000 000 centů.

Pro 50 % vstupních dat navíc platí, že $n \leq 20$.

Výstup: Program vypíše na standardní výstup právě jedno celé číslo — nejmenší možnou cenu za dopravu stromů po řekách (v centech).

Příklad vstupu a výstupu:

4 2 4
 1 0 1
 1 1 10
 10 2 5
 1 2 3



Obr. 66. Obrázek odpovídá vstupním datům z příkladu. Číslo osad jsou uvnitř kroužků. Číslo pod kroužky udávají počet stromů poražených poblíž osad. Číslo nad šipkami udávají délky řek. Dřevařské závody je třeba postavit v osadách číslo 2 a 3.

RNDr. Karel Horák, CSc., Mgr. Martin Mareš, Mgr. Peter Novotný,
doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.,
doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc., RNDr. Jaroslav Zhouf, PhD.

**PADESÁTÝ ČTVRTÝ ROČNÍK
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH**

Vydala Jednota českých matematiků a fyziků,
Žitná 25, 117 10 Praha 1
jako svou publikaci č. 57-557-06
Sazbu programem $\text{\TeX}$ připravil Karel Horák
Vytisklo Polygrafické středisko
Univerzity Palackého v Olomouci
1. vydání
Praha 2006

ISBN 80-7015-109-9

**matematická
olympiáda**

MO
M

ISBN 80-7015-109-9

