

57. ročník matematické olympiády na středních školách

Karel Horák (editor); Daniel Král (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 57. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2007/2008. 49. mezinárodní matematická olympiáda. 20. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2010.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/405144>

Terms of use:

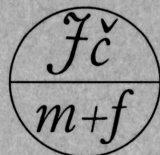
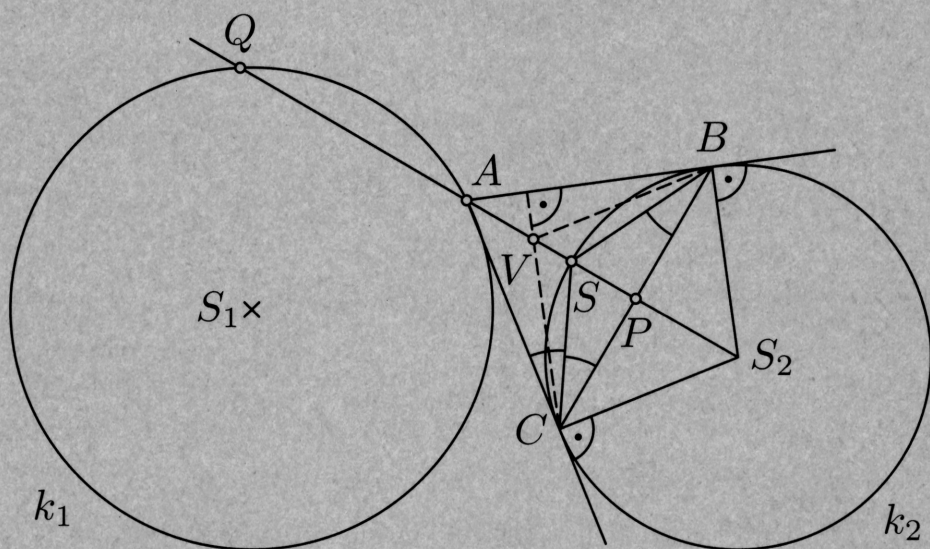
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MO

57. ročník matematické olympiády na středních školách



PADESÁTÝ SEDMÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2007/2008

49. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

20. MEZINÁRODNÍ OLYMPIÁDA V INFORMATICE

Za přispění spolupracovníků zpracovali

RNDr. Karel Horák, CSc., RNDr. Daniel Král, Ph.D., Mgr. Martin Mareš,
Mgr. Peter Novotný, doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.,
doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc.,

© Karel Horák, editor, 2010

ISBN 978-80-7015-006-1

Obsah

O průběhu 57. ročníku matematické olympiády	5
Nejúspěšnější řešitelé II. kola MO v kategoriích A, B, C a P	15
Výsledky ústředního kola 57. ročníku MO kategorie A	29
Výsledky ústředního kola 57. ročníku MO kategorie P	30
Kategorie C	31
Texty úloh	31
Řešení úloh	34
Kategorie B	46
Texty úloh	46
Řešení úloh	49
Kategorie A	61
Texty úloh	61
Řešení úloh	66
Kategorie P	93
Texty úloh	93
Kategorie Z5	114
Texty úloh	114
Kategorie Z6	117
Texty úloh	117
Kategorie Z7	120
Texty úloh	120
Kategorie Z8	123
Texty úloh	123
Kategorie Z9	126
Texty úloh	126
Přípravné soustředění před 49. MMO	130
Úlohy zadané na přípravném soustředění	131
Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské	134
Texty soutěžních úloh	135
Řešení úloh	136
49. mezinárodní matematická olympiáda	148
Texty soutěžních úloh	151
Řešení úloh	153
2. střeoevropská matematická olympiáda	165
Texty soutěžních úloh	167
Řešení úloh	169
15. střeoevropská olympiáda v informatice	180
20. mezinárodní olympiáda v informatice	183
Texty soutěžních úloh	186

O průběhu 57. ročníku matematické olympiády

Ve školním roce 2007/08 se uskutečnil v České republice již 57. ročník matematické olympiády. Hlavním pořadatelem soutěže bylo již tradičně Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR, dále Jednota českých matematiků a fyziků a Matematický ústav akademie věd ČR. Chod soutěže zajišťovala stejně jako v předešlých ročnících soutěže Ústřední komise MO (ÚK MO), jejímž předsedou byl doc. RNDr. *Jaromír Šimša*, CSc.

Funkce místopředsedů ÚK MO vykonávali: RNDr. *Jaroslav Švrček*, CSc. (pro kategorie A, B, C), Mgr. *Vojtěch Žádník*, Ph.D. (pro kategorie Z9–Z5) a doc. RNDr. *Pavel Töpfer*, CSc. (pro kategorii P), tajemníkem ÚK MO byl RNDr. *Karel Horák*, CSc.

Přípravou a výběrem úloh pro jednotlivé kategorie a soutěžní kola byly pověřeny Ústřední komisí MO dvě úlohové komise (jedna pro kategorie A, B, C a druhá pro kategorie Z9–Z5). Obě komise se sešly na svých pracovních seminářích dvakrát ročně (v listopadu 2007 a v květnu 2008). Ve spolupráci se slovenskými kolegy zabezpečují obě komise s více než ročním předstihem výběr úloh pro další ročník MO v České republice a na Slovensku. Garanty výběru úloh v kategoriích A, B, C byli v tomto ročníku soutěže po řadě doc. RNDr. *Jaromír Šimša*, CSc., doc. RNDr. *Pavel Novotný*, CSc., a RNDr. *Pavel Leischner*, Ph.D.

Průběh 57. ročníku soutěže byl standardní. Letáky s úlohami a komentáře k řešení úloh I. kola 57. ročníku MO byly pro všechny kategorie soutěže dodány včas. Krajská (II.) kola v jednotlivých kategoriích se uskutečnila ve stanovených termínech: 22. 1. 2008 v kategorii A, 1. 4. 2008 v kategoriích B a C a 15. 1. 2008 v kategorii P. Celkové počty účastníků v jednotlivých krajích každé z uvedených kategorií jsou uvedeny v tabulkách, které tvoří přílohu této zprávy.

Ústřední (III.) kola 57. ročníku matematické olympiády v kategoriích A a P se konala v termínu 9.–15. března 2008 v Českých Budějovicích. Organizací obou závěrečných kol soutěže bylo Ústřední komisí MO pověřeno Gymnázium v Českých Budějovicích v Jírovcově ulici. Vedení školy připravilo ve spolupráci s Krajskou komisí MO Jihočeského

kraje a pobočkou JČMF v Českých Budějovicích a za účinné podpory krajského města České Budějovice velmi dobré podmínky pro vlastní soutěž. Mimořádný dík za zdařilý průběh ústředního kola soutěže patří především hlavním organizátorům ústředního kola — Mgr. *Radku Trčovi*, předsedovi Krajské komise MO Jihočeského kraje, a dále řediteli Gymnázia na Jírovcově ulici — RNDr. *Karlu Lichtenbergovi*, CSc.

Na základě jednotné koordinace oprav úloh krajského kola bylo k účasti v ústředním kole kategorie A pozváno 49 nejlepších řešitelů (podle pravidel soutěže je do celostátního kola zváno nejvýše 50 řešitelů), v kategorii P bylo pozváno k účasti v ústředním kole 30 nejlepších řešitelů krajských kol. Všichni účastníci soutěže byli ubytováni v Domově mládeže v městské části Adamov.

Soutěžními dny pro kategorii A byly 10. a 11. březen 2008, v nichž soutěžící řešili tradičně po třech soutěžních úlohách; na řešení každé trojice úloh měli přitom vyhrazeny vždy 4,5 hodiny čistého času a každá úloha byla hodnocena maximálně 7 body (s celočíselnými bodovými zisky). Soutěžními dny ústředního kola v kategorii P byly 13. a 14. březen 2008. První soutěžní den řešili soutěžící tři úlohy teoretické, celý druhý soutěžní den byl vyhrazen tradičně řešení dvou praktických úloh. Za každou teoretickou úlohu mohli soutěžící získat maximálně 10 bodů, za řešení každé praktické úlohy pak maximálně 15 bodů — celkově tedy maximálně 60 bodů. Na přípravě soutěžních úloh v kategorii P se podíleli pracovníci Katedry matematické informatiky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Slavnostní zahájení ústředního kola v kategorii A se uskutečnilo v neděli 9. března v koncertní síni Otakara Jeremiáše v Českých Budějovicích za účasti zástupců magistrátu města České Budějovice, Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích a nejvýznamnějších sponzorů akce, mezi něž patřila především společnost ČEZ a Komerční banka v Českých Budějovicích. Vlastní soutěž v obou kategoriích proběhla v učebnách pořádající školy — gymnázia na Jírovcově ulici.

Pořadatelé ústředního kola zajistili pro soutěžící také zajímavý doprovodný program. Odpoledne po prvním soutěžním dni absolvovali všichni soutěžící kategorie A prohlídku zámku Hluboká nad Vltavou. Na odpoledne po druhém soutěžním byla připravena exkurze do pivovaru Budvar. Podobný charakter měl i doprovodný program pro účastníky ústředního kola v kategorii P.

Vyhlášení výsledků soutěže v kategorii A se uskutečnilo ve středu 12. března 2008 v obřadní síni radnice v Českých Budějovicích, v kate-

gorii P pak v sobotu 15. 3. 2008 v aule pořadatelské školy. Ceny vítězům a úspěšným řešitelům ústředního kola v obou kategoriích předal ředitel Gymnázia České Budějovice v Jírovcově ulici dr. Lichtenberg, zástupci ÚK MO a města České Budějovice. Všichni vítězové a úspěšní řešitelé ústředního kola si přitom domů odvezli kromě příslušných diplomů také hodnotné věcné ceny.

Devět z deseti vítězů soutěže v kategorii A bylo pozváno k výběrovému soustředění před 49. mezinárodní matematickou olympiádou (MMO). Ta se uskutečnila v červenci 2008 ve španělském Madridu. Kromě toho bylo vybráno také družstvo pro 2. ročník Středoevropské matematické olympiády (MEMO), který se konal počátkem září 2008 v Olomouci. Družstvo pro tuto mezinárodní soutěž tvořila šestice úspěšných řešitelů ústředního kola kategorie A, kteří se nezúčastnili 49. MMO ve Španělsku. Počátkem července 2008 se konal v Drážďanech za české účasti také 15. ročník Středoevropské olympiády v informatice (CEOI) a zhruba o měsíc později se české reprezentační družstvo zúčastnilo již 20. ročníku Mezinárodní olympiády v informatice (IOI) v egyptské Káhiře.

Ústřední komise MO se během 57. ročníku soutěže sešla na dvou pravidelných jednáních, a to 12. prosince 2007 v Matematickém ústavu AV ČR v Praze a dále 10. března 2008 v Českých Budějovicích u příležitosti konání ústředního kola MO.

Pro nejlepší řešitele krajských kol v kategoriích B a C uspořádala Ústřední komise MO v prvním červnovém týdnu 2008 tradiční soustředění v Jevíčku, jehož se zúčastnilo 40 nejlepších řešitelů krajských kol v kategoriích B i C. Lektorsky se na tomto soustředění podíleli doc. Boček, doc. Calda, doc. Šimša, dr. Dula, dr. Švrček, dr. Leischner a dr. Hrubý. Pro nejlepší řešitele kategorie A (všichni ti, kteří se kvalifikovali do ústředního kola kategorie A a přitom ještě nenastoupili do maturitního ročníku) uspořádala ÚK MO v polovině září 2008 tradiční soustředění v Janských Lázních, jehož se zúčastnilo 20 pozvaných žáků. Zaměstnání a přednášky na něm vedli: doc. Šimša, dr. Švrček, dr. Horák, Mgr. Panák, dr. Calábek a dr. Zhouf.

Ústřední komise MO děkuje všem zainteresovaným učitelům matematiky a informatiky na středních i základních školách, zejména pak těm kteří se významnou měrou podíleli na rozvoji nejvýraznějších matematických a informatických talentů v České republice.

**Projev předsedy Ústřední komise MO
při slavnostním zahájení ústředního kola 57. ročníku MO
v Českých Budějovicích**

Dámy a pánové, vážení hosté, milí soutěžící,
spolu s Vámi prožívám slavnostní atmosféru těchto chvil. Doufám, že
ji příliš nenaruším svým pracovně zaměřeným vystoupením, ve kterém,
jak jinak, vyřeším jednu úlohu. Snad se nebude nudit nikdo z přítomných,
když úloha bude mít takovéto zadání.

*Matematik M. zvolil dvě nesoudělná pětimístná čísla m , n a na své
kalkulačce zadal podíl $m : n$. Na jejím desetimístném displeji se objevilo:*



Určete čísla m a n , která M. zvolil.

Oprávněně můžete zapochybovat, zda má smysl se takovou kuriózní
hádankou, která zřejmě nemá žádný praktický význam, vůbec zabývat.
Vzdělanější skeptici mohou namítnout, že ani z matematického hlediska
není popsána situace nijak zajímavá. Běžný počítač s vhodně napsaným
programem totiž hledaná pětimístná čísla odhalí ve zlomku vteřiny (na
obyčejné kalkulačce by podobné testování trvalo nejspíše několik hodin,
možná i dnů). Na takovou výhradu odpovím protiotázkou: proč i k sou-
časným disciplínám sportovní olympiády patří tolik oblíbené běžecké dis-
ciplíny a cyklistika, když máme motorky, auta nebo dokonce letadla?
Berme proto postavenou úlohu jako ušlechtilou výzvu našemu intelektu
a pokusme se ji vyřešit bez užití počítačových programů.

Úloha je snad zadána správně česky (slovo *display* může být mužského
i ženského rodu), podívejme se na její obsah. Nikoho z přítomných snad
neudiví, že je možné mezi sebou dělit i čísla, která jsou nesoudělná. Na-
opak mnozí si asi povšimnuli, že výsledek dělení se na kalkulačce zobrazil
jako dnešní datum. Nejde o náhodu, M. se totiž s kalkulačkou chystal na
dnešní cestu do Českých Budějovic a jsem rád, že je tady přítomen.

Méně nápadnou okolností, kterou M. v první chvíli ani nezpozoroval,
je skutečnost, že na desetimístném displeji se objevil pouze osmimístný
výsledek. Musím na M. prozradit, že v používání kalkulačky není velký
odborník. Přestože například ví, že kalkulačka má jednoduchou paměť,
nedovede M. do ní žádné mezivýsledky uložit, natož je později vyvolat;
paměť na kalkulačce mu zkrátka neslouží. Teprve při posuzované úloze

se M. ujistil, že displej kalkulačky má 10 míst, a že tudíž v zobrazeném výsledku došlo k záhadnému výpadku dvou číslic.

Nejednalo by se samozřejmě o žádnou záhadu, kdyby byl zobrazený výsledek přesnou hodnotou zadaného podílu. V tom případě by ovšem platily přesné rovnosti

$$\begin{aligned}\frac{m}{n} = 0,903\,200\,8 &= \frac{9\,032\,008}{10^7} = \frac{2^3 \cdot 23 \cdot 191 \cdot 257}{2^7 \cdot 5^7} = \\ &= \frac{23 \cdot 191 \cdot 257}{2^4 \cdot 5^7} = \frac{1\,129\,001}{1\,250\,000}.\end{aligned}$$

Poslední zlomek zapsaný sedmimístnými čísly je však v základním tvaru, takže se nemůže přesně rovnat podílu dvou pětimístných čísel. Z tohoto rozporu plyne závěr, že zobrazená hodnota byla pouze přibližná a že přesná hodnota má desetinný zápis

$$\frac{m}{n} = 0,903\,200\,800\ldots$$

Zdánlivá záhada je tak vyřešena: poslední dvě vypsane nuly se na kalkulačce — patrně z úsporných důvodů — nezobrazily! Dodejme, že nadanou úlohou M. zjistil i další podrobnosti o své kalkulačce — že totiž pracuje při interních výpočtech s přesnějšími hodnotami, než které na displeji zobrazuje a že tyto hodnoty nejsou při zobrazování zaokrouhlovány, nýbrž jejich dekadické zápisy jsou na desátém platném místě prostě „useknuty“, což nám pro přesnost praktických výpočtů většinou bohatě stačí.

Vraťme se však k samotné úloze, kterou máme řešit. Abyste lépe pochopili postup, kterým se k oběma neznámým pětimístným číslům dobereme, vyřeším nejprve méně pracný úkol téhož druhu: najdeme dvojčíslí m , n s poměrem $m : n$ daným kalkulačkou v podobě desetinného čísla

2.24 137931

Nejprve v zadaném čísle vyčleníme celou část, abychom vyjádřili, kolikrát je menší jmenovatel n ve větším čitateli m obsažen:

$$\frac{m}{n} = 2,241\,379\,31 = 2 + 0,241\,379\,31.$$

(Od tohoto místa jsou rovnítka znaky přibližných rovností na kalkulačce.) Hledejme zlomek rovný zbylému desetinnému číslu menšímu než 1. Tento

zlomek bude mít číselník menší než jmenovatel. Zjistíme proto tentokrát, kolikrát je číselník obsažen ve jmenovateli. Dosáhneme toho tím, že vypočteme převrácenou hodnotu daného čísla a pak v něm opět vyčleníme celou část:

$$\frac{1}{0,241\,379\,31} = 4,142\,857\,143 = 4 + 0,142\,857\,143.$$

Pro zbylé desetinné číslo menší než 1 postup zopakujeme ještě jednou:

$$\frac{1}{0,142\,857\,143} = 7 \quad (\text{hurál}).$$

Máme vyhráno, zbývá zapsat celý výpočet jedním výrazem a určit jeho hodnotu:

$$\frac{m}{n} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7}} = \frac{65}{29}.$$

Hledaná čísla jsou tedy $m = 65$ a $n = 29$.

Nyní již víme, co nás čeká při řešení původní úlohy, netušíme jen, po kolika krocích celý výpočet skončí:

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} &= 0,903\,200\,8, \\ \frac{1}{0,903\,200\,8} &= 1,107\,173\,51 = 1 + 0,107\,173\,51, \\ \frac{1}{0,107\,173\,51} &= 9,330\,663\,911 = 9 + 0,330\,663\,911, \\ \frac{1}{0,330\,663\,911} &= 3,024\,218\,75 = 3 + 0,024\,218\,75, \\ \frac{1}{0,024\,218\,75} &= 41,290\,322\,58 = 41 + 0,290\,322\,58, \\ \frac{1}{0,290\,322\,58} &= 3,444\,444\,444 = 3 + 0,444\,444\,444, \\ \frac{1}{0,444\,444\,444} &= 2,25 = 2 + 0,25, \\ \frac{1}{0,25} &= 4. \end{aligned}$$

Výsledkem je, nelekněte se prosím, obrovitý zlomek

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{3 + \frac{1}{41 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}}}}},$$

kterému v matematice říkáme *řetězový* a který stručněji zapisujeme takto:

$$\frac{m}{n} = [0, 1, 9, 3, 41, 3, 2, 4].$$

Jeho hodnotu určíme postupným výpočtem „odspodu nahoru“:

$$\begin{aligned} 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} &\rightarrow 3 + \frac{4}{9} = \frac{31}{9} \rightarrow 41 + \frac{9}{31} = \frac{1280}{31} \rightarrow \\ 3 + \frac{31}{1280} = \frac{3871}{1280} &\rightarrow 9 + \frac{1280}{3871} = \frac{36119}{3871} \rightarrow 1 + \frac{3871}{36119} = \frac{39990}{36119} \rightarrow \\ \frac{m}{n} &= \frac{36119}{39990}. \end{aligned}$$

Pomocí výpočtů několika převrácených čísel na kalkulačce jsme tedy poměrně rychle zjistili, že matematik M. mohl dělit číslo 36 119 číslem 39 990. Na počítači s přesnější aritmetikou vyjde hodnota jejich podílu jako číslo se zápisem

$$\frac{36119}{39990} = \underline{0,903\,200\,800\,200\,050\dots},$$

přítom podtržením vyznačujeme číslice zobrazené na kalkulačce.

Přítomní mladí soutěžící jistě cítí, že podané řešení úlohy není úplné. Měli bychom ještě zdůvodnit, že nalezená čísla jsou jediná, která mohl M. zvolit, že tedy žádná jiná pětimístná čísla m a n nemají podíl zapsaný na kalkulačce dnešním datem. Museli bychom toho vědět o řetězových zlomcích více, abychom našli další zlomky s hodnotami blízkými danému

desetinnému číslu, pět nejbližších podílů pětimístných čísel vám teď od nejmenšího po největší vypíše:

$$\begin{aligned}\frac{m_1}{n_1} &= \frac{44\,274}{49\,019} = \underline{0,903\,200\,799\,689\,916\dots}, \\ \frac{m_2}{n_2} &= \frac{80\,393}{89\,009} = \underline{0,903\,200\,799\,919\,109\dots}, \\ \frac{m_3}{n_3} &= \frac{36\,119}{39\,990} = \underline{0,903\,200\,800\,200\,050\dots}, \\ \frac{m_4}{n_4} &= \frac{64\,083}{70\,951} = \underline{0,903\,200\,800\,552\,493\dots}, \\ \frac{m_5}{n_5} &= \frac{27\,964}{30\,961} = \underline{0,903\,200\,801\,007\,719\dots}\end{aligned}$$

Vidíte, že posuzovaná úloha má dvě řešení, zapsaná jako třetí a čtvrtý zlomek. M. tedy určitě počítal jeden ze dvou podílů

$$36\,119 : 39\,990 \quad \text{nebo} \quad 64\,083 : 70\,951.$$

Na závěr bych chtěl alespoň trochu poodhalit krásu konstrukce uvedených řetězových zlomků

$$\begin{aligned}\frac{m_1}{n_1} &= \frac{44\,274}{49\,019} = [0, 1, 9, 3, 41, 3, 2, 5], \\ \frac{m_2}{n_2} &= \frac{80\,393}{89\,009} = [0, 1, 9, 3, 41, 3, 2, 4, 2], \\ \frac{m_3}{n_3} &= \frac{36\,119}{39\,990} = [0, 1, 9, 3, 41, 3, 2, 4], \\ \frac{m_4}{n_4} &= \frac{64\,083}{70\,951} = [0, 1, 9, 3, 41, 3, 2, 3, 2], \\ \frac{m_5}{n_5} &= \frac{27\,964}{30\,961} = [0, 1, 9, 3, 41, 3, 2, 3].\end{aligned}$$

Všimněte si například, jak jednoduše lze druhý zlomek sestavit z prvního a třetího zlomku:

$$\begin{aligned}80\,393 &= 44\,274 + 36\,119, \\ 89\,009 &= 49\,019 + 39\,990.\end{aligned}$$

Obecně pro naše zlomky platí

$$\frac{m_i}{n_i} = \frac{m_{i-1} + m_{i+1}}{n_{i-1} + n_{i+1}}.$$

Další pozoruhodné rovnosti mezi dvojicemi sousedních zlomků je už obtížnější numericky ověřit, proto rovnou vypíšu jejich obecné vyjádření

$$m_i \cdot n_{i-1} - m_{i-1} \cdot n_i = 1.$$

Tím naše krátká exkurze do říše řetězových zlomků končí. Vráťím se k soutěži, která nás všechny dnes do Českých Budějovic přivedla, a popřeji vám účastníkům jménem pracovníků Ústřední komise MO hodně zdaru při řešení pondělních i úterních úloh. V zadání jedné z nich najdete sice ne datum, avšak alespoň aktuální letopočet. Jsme zvědaví, jak si s ní i s ostatními pěti úlohami bez kalkulačky a počítače poradíte, těšíme se na vaše řešení. Prohlašuji ústřední kolo 57. ročníku Matematické olympiády za zahájené.

Tabulka 1

Počty žáků středních škol soutěžících v I. kole 57. ročníku MO

Kraj	Kategorie								Celkem	
	A		B		C		P			
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	93	82	57	44	112	95	9	8	271	229
Středočeský	74	29	77	23	130	70	7	6	288	128
Jihočeský	67	39	51	31	107	79	4	4	229	153
Plzeňský	55	21	34	17	62	41	8	4	159	83
Karlovarský	32	17	15	8	15	9	0	0	62	34
Ústecký	18	16	26	15	52	28	2	2	98	61
Liberecký	24	9	45	18	77	36	10	10	156	73
Královéhradecký	36	22	43	19	48	27	4	3	131	71
Pardubický	30	25	32	24	53	41	5	5	120	95
Vysočina	66	32	44	18	75	54	15	8	200	112
Jihomoravský	135	90	108	64	142	98	6	6	391	258
Zlínský	60	31	69	25	81	52	4	4	214	112
Olomoucký	34	26	16	12	49	28	1	1	100	67
Moravskoslezský	54	38	69	32	124	80	15	11	262	161
ČR	778	477	686	350	1 127	738	90	72	2 681	1 637

Tabulka 2

Počty žáků středních škol soutěžících v II. kole 57. ročníku MO

Kraj	Kategorie								Celkem	
	A		B		C		P			
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	50	16	34	16	72	43	8	4	164	79
Středočeský	27	1	23	5	60	10	5	2	115	18
Jihočeský	36	4	28	8	77	12	4	3	145	27
Plzeňský	21	4	17	7	39	18	4	3	81	32
Karlovarský	17	1	8	1	9	3	0	0	34	5
Ústecký	16	2	15	2	28	5	2	1	61	10
Liberecký	9	1	14	6	34	6	10	1	67	14
Královéhradecký	22	4	19	10	27	17	3	3	71	34
Pardubický	25	2	19	6	39	14	5	1	88	23
Vysočina	26	8	18	6	49	13	7	3	100	30
Jihomoravský	81	15	55	12	94	25	6	5	236	57
Zlínský	29	2	16	6	26	18	3	0	74	26
Olomoucký	24	2	12	6	28	12	1	0	65	20
Moravskoslezský	38	5	31	9	71	27	11	4	151	45
ČR	421	67	309	100	653	223	69	30	1 452	420

S ... počet všech soutěžících

U ... počet úspěšných řešitelů

Nejúspěšnější řešitelé II. kola MO
v kategoriích A, B, C a P

Z každého kraje a z každé kategorie jsou dle dostupných výsledků uvedeni všichni úspěšní řešitelé, kteří skončili do desátého místa. Označení G znamená gymnázium.

..... Kraj Praha

Kategorie A

1. *Josef Tkadlec*, G J. Keplera, Praha 6
2. *Jakub Marian*, G Praha 9, Litoměřická
3. *Tomáš Hřebejk*, G Praha 4, Písnická
4. *Jakub Töpfer*, G J. Keplera, Praha 6
5. *Radek Marciňa*, G Ch. Dopplera, Praha 5
6. *Alena Skálová*, G Praha 4, Na Vítězné pláni
- 7.–9. *Matěj Peterka*, G Praha 6, Nad Alejí
Jiří Vančura, SPŠST, Praha 1, Panská
Matěj Veselský, G J. Keplera, Praha 6
- 10.–13. *Van Nhan Nguyen*, G Praha 6, Nad Alejí
Vladimír Novotný, G Praha 4, Na Vítězné pláni
Tomáš Pavlík, G J. Keplera, Praha 6
Martin Výška, G Praha 6, Nad Alejí

Kategorie B

1. *Jáchym Sýkora*, G Ch. Dopplera, Praha 5
- 2.–3. *Vlastimil Dort*, G Špitálská, Praha 9
Kateřina Honzáková, G J. Keplera, Praha 6
- 4.–5. *Miroslav Olšák*, G Buďánka, Praha 5
Radek Marciňa, G Ch. Dopplera, Praha 5
- 6.–7. *Jan Bílek*, G Praha 4, Na Vítězné pláni
Petr Ryšavý, G J. Heyrovského, Praha 5

8. *Tomáš Novák*, G Praha 9, Špitálská
- 9.–11. *Tomáš Vítek*, G Praha 6, Arabská
Petr Sedláček, G Ch. Dopplera, Praha 5
Pavel Taufer, Akad. G Praha 2, Korunní

Kategorie C

- 1.–5. *Tadeáš Dohnal*, G Ch. Dopplera, Praha 5
Marek Goldstein, G Praha 5, Nad Kavalírkou
Joel Jančařík, G Buďánka, Praha 5
Matěj Petrouš, G Ch. Dopplera, Praha 5
Daniel Šafka, G J. Keplera, Praha 6
6. *Jakub Zíka*, G Praha 6, Nad Alejí
7. *Daniel Samek*, Akad. G Praha 2, Štěpánská
- 8.–12. *Pavel Černý*, G Praha 10, Voděradská
Vít Henych, G Praha 6, Nad Alejí
Jiří Kučera, G Ch. Dopplera, Praha 5
Michal Soucha, G Praha 10, Voděradská
Hoang Van Tru, SPŠE Praha 1, Ječná

Kategorie P

1. *Roman Smrž*, G E. Krásnohorské Praha 4
2. *František Hejl*, G J. Nerudy, Praha 1
3. *Jiří Setnička*, G Čakovice
4. *Petr Malý*, G K. Sladkovského, Praha 3

• • • • • Středočeský kraj • • • • •

Kategorie A

1. *Tomáš Gergelits*, G Benešov

Kategorie B

1. *Petr Čermák*, G Kladno
2. *Kateřina Štěpánková*, G Kladno
3. *Adéla Zajíčková*, G Příbram

4. *Tomáš Král*, G Vlašim
5. *Martin Rouček*, G Kladno

Kategorie C

1. *Jiří Stránský*, G Kralupy
2. *Karolína Kopecká*, G Beroun
3. *Vilém Plaček*, G SPedŠ Čáslav
4. *John Plechatý*, G Slaný
- 5.–7. *Ondřej Brajer*, G Hořovice
Tomáš Martínek, G Vlašim
Jana Martínková, G Vlašim
- 8.–10. *Helena Brandejská*, G J. Ortena, Kutná Hora
Kristian Holan, G Nymburk
Ondřej Ježek, G Příbram

Kategorie P

1. *Lukáš Beran*, G Benešov
2. *Petr Sloup*, G F. Palackého, Neratovice

..... Jihočeský kraj

Kategorie A

- 1.–2. *Jan Matějka*, G České Budějovice, Jírovcova
Libor Peltan, G České Budějovice, Česká
3. *Jan Hermann*, G Český Krumlov
4. *Martin Pecka*, G V. Nováka Jindřichův Hradec

Kategorie B

1. *Adam Juraszek*, G České Budějovice, Jírovcova
2. *Martina Vaváčková*, G P. de Coubertina, Tábor
3. *Denisa Bernardová*, G České Budějovice, Jírovcova
4. *Tereza Hruběšová*, G Český Krumlov
5. *Jan Moravec*, G Český Krumlov
6. *František Steinhauser*, G Dačice

7. *Petr Procházka*, G Písek

8. *Pavel Jan*, G Kaplice

Kategorie C

1. *David Krška*, G J. V. Jirsíka, České Budějovice

2. *Pavel Dupal*, G České Budějovice, Jírovcova

3.–4. *Filip Matzner*, G J. V. Jirsíka, České Budějovice

Iveta Šelepová, G P. de Coubertina, Tábor

5.–7. *Lenka Hobizalová*, G České Budějovice, Česká

Daniel Slunečko, G České Budějovice, Jírovcova

Josef Válek, G Třeboň

8. *Josef Janoušek*, G P. de Coubertina, Tábor

9.–11. *Josef Kolář*, G České Budějovice, Jírovcova

Lukáš Mojžíš, G České Budějovice, Jírovcova

Filip Šochman, G Vimperk

Kategorie P

1. *Jan Matějka*, G České Budějovice, Jírovcova

2. *Libor Peltan*, G České Budějovice, Česká

3. *Roman Říha*, G Prachatice

• • • • • Plzeňský kraj • • • • •

Kategorie A

1. *Van Minh Nguyen*, G Tachov

2.–4. *Michal Bugoš*, G Plzeň, Mikulášské nám.

Jindřich Havlík, G Plzeň, Mikulášské nám.

Václav Vondrášek, G J. Vrchlického, Klatovy

Kategorie B

1. *Jakub Klemsa*, G J. Vrchlického, Klatovy

2. *Lukáš Chlad*, G Plzeň, Mikulášské nám.

3. *Jan Laksar*, G Plzeň, Mikulášské nám.

- 4.–5. *Trung Ha Duc*, Masarykovo G, Plzeň
Vladimír Švígler, G Plzeň, Mikulášské nám.
6. *Karel Tesař*, SPŠE Plzeň
7. *Karel Kovařík*, G J. Vrchlického, Klatovy

Kategorie C

1. *Filip Hlásek*, G Plzeň, Mikulášské nám.
- 2.–3. *Martin Bucháček*, G L. Pika, Plzeň
Michaela Kochmanová, G Plzeň, Mikulášské nám.
4. *Jakub Suchý*, G Plzeň, Mikulášské nám.
5. *Marek Mukenšnabl*, G Plzeň, Mikulášské nám.
- 6.–7. *Hynek Kasl*, G Plzeň, Mikulášské nám.
Filip Štědronský, G Plzeň, Mikulášské nám.
- 8.–10. *Jan Ambrož*, G J. Vrchlického, Klatovy
Jiří Němeček, G Plzeň, Mikulášské nám.
Jan Škoda, G Plzeň, Mikulášské nám.

Kategorie P

1. *Filip Hlásek*, G Plzeň, Mikulášské nám.
2. *Roman Diba*, VOŠ a SPŠE Plzeň
3. *Martin Holeček*, G Plzeň, Mikulášské nám.

• • • • • **Karlovarský kraj** • • • • •

Kategorie A

1. *Lukáš Ledvina*, První české G, Karlovy Vary

Kategorie B

1. *Tomáš Horák*, Svobodná chebská škola, Cheb

Kategorie C

1. *Josef Hazi*, G Cheb

- 2.-3. *Roman Schindler*, První české G, Karlovy Vary
Duc Minh Tran, G Cheb

..... Ústecký kraj

Kategorie A

1. *Jan Čapek*, G Duchcov
2. *Libor Vytlačil*, G Roudnice nad Labem

Kategorie B

- 1.-2. *Kateřina Pastířáková*, G Most, Čs. armády
Libor Vytlačil, G Dr. V. Šmejkal, Ústí nad Labem

Kategorie C

1. *David Kuboň*, G Teplice, Čs. Dobrovolců
2. *Klára Vlčková*, G Děčín, Komenského nám.
- 3.-5. *Michal Mojžík*, SPŠ a VOŠ Chomutov
David Verner, G V. Hlavatého, Louny
Martin Zuckerstein, G Lovosice

Kategorie P

1. *Milan Rybář*, G J. Jungmanna, Litoměřice

..... Liberecký kraj

Kategorie A

1. *Martin Černý*, G Jilemnice

Kategorie B

- 1.-2. *Vendulka Haiblíková*, G Jablonec, U Balvanu
Matěj Ondrušek, G Česká Lípa

- 3.-4. *Lukáš Beran*, G F. X. Šaldy, Liberec
Simona Macková, G F. X. Šaldy, Liberec
- 5.-6. *Ondřej Henych*, G Liberec, Jeronýmova
Kateřina Šimůnková, G Semily

Kategorie C

1. *Jakub Hrnčír*, G F. X. Šaldy, Liberec
2. *Jakub Petr*, G F. X. Šaldy, Liberec
3. *Petra Skrbková*, G Dr. Randy, Jablonec nad Nisou
4. *Jiří Erhart*, G F. X. Šaldy, Liberec
- 5.-6. *Matěj Hudec*, G Liberec, Jeronýmova
Zdeněk Šubčík, G Dr. Randy, Jablonec nad Nisou

Kategorie P

1. *Martin Preisler*, G F. X. Šaldy, Liberec

..... **Královéhradecký kraj**

Kategorie A

1. *Martin Michálek*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
2. *Martin Šubr*, G Nový Bydžov
3. *Alena Peterová*, G Dobruška
4. *Jan Bednář*, G Trutnov

Kategorie B

1. *Petr Pařízek*, G B. Němcové, Hradec Králové
- 2.-3. *Tomáš Rubín*, G B. Němcové, Hradec Králové
Martin Vojtíšek, G B. Němcové, Hradec Králové
4. *Patrik Macej*, G B. Němcové, Hradec Králové
5. *Veronika Milerská*, G B. Němcové, Hradec Králové
6. *Jan Voborník*, Jiráskovo G, Náchod
7. *Aleš Hanuš*, G B. Němcové, Hradec Králové
8. *Michal Bilanský*, Lepařovo G, Jičín

- 9.–10. *Václav Hrnčíř*, Jiráskovo G, Náchod
Jakub Lelek, G Broumov

Kategorie C

1. *Anna Chejnovská*, G B. Němcové, Hradec Králové
2. *Jan Klazar*, G B. Němcové, Hradec Králové
3.–4. *Kateřina Medková*, Biskupské G B. Balbína, Hradec Králové
Radek Papež, Jiráskovo G, Náchod
5.–6. *Jan Fišer*, Lepařovo G, Jičín
Jan Šimbera, Jiráskovo G, Náchod
7. *Jakub Valtar*, Jiráskovo G, Náchod
8. *Alena Bušáková*, G Trutnov
9.–10. *Vojtěch Jírovec*, G B. Němcové, Hradec Králové
Anetta Sternwaldová, Biskupské G B. Balbína, Hradec Králové

Kategorie P

1. *Jakub Kaplan*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
2. *Lukáš Lánský*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
3. *Jirí Maršík*, G J. K. Tyla, Hradec Králové

• • • • • Pardubický kraj • • • • •

Kategorie A

1. *František Kalibán*, G Litomyšl
2. *Adam Bartoš*, G K. V. Raise, Hlinsko

Kategorie B

1. *David Vondrák*, G Pardubice, Dašická
2. *Jan Krys*, G Chrudim
3. *Jakub Stodola*, G Polička
4. *Filip Beran*, G Pardubice, Dašická
5.–6. *Martin Chladil*, G Jevíčko
Karel Kalecký, G Holice

Kategorie C

1. *Martin Laštovička*, G Pardubice, Dašická
2. *Filip Lux*, G Žamberk
- 3.–5. *Zuzana Jedličková*, G Lanškroun
Miroslav Koblížek, G Žamberk
Jakub Lněnička, G Pardubice, Dašická
6. *Tomáš Felcman*, G Žamberk
- 7.–8. *Michal Hodas*, G Ústí nad Orlicí
Tomáš Klejch, G Litomyšl
9. *Tereza Soukupová*, G Česká Třebová
- 10.–11. *Milan Beneš*, G Litomyšl
Jan Novotný, G Pardubice, Dašická
- 12.–14. *Petr Kouba*, G Pardubice, Dašická
Ondřej Tobek, G Litomyšl
Johana Vrbacká, G Pardubice, Dašická

Kategorie P

1. *David Vondrák*, G Pardubice, Dašická

• • • • • Kraj Vysočina • • • • •

Kategorie A

1. *Matěj Klusáček*, G Třebíč
- 2.–5. *Martin Hyrš*, Havlíčkov G, Havlíčkův Brod
Michal Kozák, G Jihlava
Jan Máca, G Třebíč
Jan Nevoral, G Jihlava
6. *Jakub Menšík*, G Třebíč
7. *Marek Nečada*, G Jihlava
8. *Tomáš Pejchal*, G Žďár nad Sázavou

Kategorie B

1. *Jan Nevoral*, G Jihlava
2. *Jaromír Karmazín*, G Velké Meziříčí

3. *Michal Čermák*, G Chotěboř
4. *Ondřej Šalanda*, G Žďár nad Sázavou
- 5.–7. *Jiří Hladík*, G Žďár nad Sázavou
Kateřina Semrádová, G Světlá nad Sázavou
Jindřich Vítek, G Jihlava

Kategorie C

1. *Petr Louša*, Havlíčkovo G, Havlíčkův Brod
- 2.–4. *Radka Janoušová*, G Bystřice nad Pernštejnem
Magdalena Kodetová, G Jihlava
Petra Staňková, G Jihlava
5. *Kristýna Krejčířová*, GOB a SOŠ Telč
6. *Tomáš Dobrovolný*, G Jihlava
- 7.–9. *Radim Cajzl*, G V. Makovského, Nové Město na Moravě
Tereza Hovorková, G Pelhřimov
Jiří Kurka, G Třebíč
10. *Dalimil Fišar*, G Žďár nad Sázavou

Kategorie P

1. *Vojtěch Tůma*, G Jihlava
2. *Marek Nečada*, G Jihlava
3. *Michal Koutný*, G Třebíč

• • • • • Jihomoravský kraj • • • • •

Kategorie A

1. *Samuel Říha*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
2. *David Klačka*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 3.–4. *Jan Kovář*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Jiří Marek, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
5. *Vojtěch Robotka*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 6.–7. *Petr Fiala*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Zuzana Komárková, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
8. *Hana Šormová*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

9. *Alexandr Slávik*, G Brno, T. Novákové
10. *Jan Brandejs*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

Kategorie B

1. *David Klačka*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
2. *Bohuslav Zmek*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
3. *Jaromír Kala*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
4. *Tomáš Lamser*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
5. *Jana Veselá*, G Brno, Lerchova
- 6.–8. *Luboš Pajtina*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Helena Valouchová, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Adam Zemek, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 9.–12. *Roman Lelek*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Alena Lososová, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Richard Pánek, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Ondřej Pleskot, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

Kategorie C

1. *Aleš Dostál*, G Blansko
- 2.–5. *Hynek Jemelík*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Gabriela Kubíčková, G Brno, Lerchova
Tomáš Pokorný, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Jan Sopoušek, G Brno, T. Novákové
6. *Dominik Velan*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 7.–10. *František Fiala*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
David Formánek, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Marek Vlašín, G Brno, Vídeňská
Zuzana Žufanová, G Brno, Vídeňská

Kategorie P

1. *Hynek Jemelík*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
2. *David Klačka*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
3. *Radim Janalík*, G Brno, Vídeňská
4. *Radek Hrbáček*, G Brno, T. Novákové
5. *Marek Bryša*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

..... Zlínský kraj

Kategorie A

1. *Josef Ondřej*, G Rožnov pod Radhoštěm
2. *Jan Vaňhara*, G L. Jaroše, Holešov

Kategorie B

1. *Josef Ondřej*, G Rožnov pod Radhoštěm
2. *Jan Kotík*, G Zlín, Lesní čtvrť
3. *Štěpán Poláček*, G F. Palackého, Valašské Meziříčí
- 4.–5. *Martina Suchánková*, G Uherské Hradiště
Antonín Štěpán, G F. Palackého, Valašské Meziříčí
6. *Lukáš Ptáček*, G J. A. Komenského Uherský Brod

Kategorie C

1. *Matěj Kocián*, G Zlín, Lesní čtvrť
- 2.–3. *Markéta Michálková*, G Rožnov pod Radhoštěm
Josef Svoboda, G Rožnov pod Radhoštěm
4. *Petr Pecha*, SPŠS Vsetín
5. *David Svoboda*, G Zlín, Lesní čtvrť
6. *Zuzana Kluková*, G Uherské Hradiště
- 7.–8. *Tomáš Nesvadba*, G Zlín, Lesní čtvrť
Martina Švehláková, G Kroměříž
- 9.–11. *Eliška Dostálková*, G Uherské Hradiště
Michal Skalský, Masarykovo G, Vsetín
Markéta Švehláková, G Kroměříž

..... Olomoucký kraj

Kategorie A

1. *Jana Faltýnková*, G Prostějov, Komenského
2. *Lucie Kadrmanová*, G Jeseník

Kategorie B

1. *Vojtěch Miloš*, G Hranice
2. *Lukáš Langer*, G Hranice
3. *Karel Kraus*, G Hranice
4. *Jakub Šebesta*, G Šumperk
- 5.–6. *Petr Kučera*, G J. Wolkera, Prostějov
Tamara Skokánková, G Olomouc-Hejčín

Kategorie C

1. *Věra Kumová*, G J. Škody, Přerov
- 2.–3. *Jan Kostecký*, VOŠ a SPŠ Šumperk
Marie Kročová, G J. Škody, Přerov
4. *Karel Beneš*, G Kojetín
- 5.–6. *Dominik Lachman*, G Olomouc-Hejčín
Daniel Navrátil, G J. Škody, Přerov
7. *Pavel Francírek*, G Kojetín
8. *Daniel Frýbort*, Cyrilometodějské G Prostějov
- 9.–10. *Petra Macigová*, G Hranice
Jan Tvrđík, Cyrilometodějské G Prostějov

• • • • • Moravskoslezský kraj • • • • •

Kategorie A

1. *Miroslav Klimoš*, G M. Koperníka, Bílovec
2. *Lucie Mohelníková*, G M. Koperníka, Bílovec
- 3.–5. *Hana Bílková*, G Frenštát pod Radhoštěm
Tomáš Vejпустek, Wichterlovo G, Ostrava-Poruba
Tomáš Toufar, G M. Koperníka, Bílovec
- 6.–7. *Jan Ohnheiser*, SŠE Frenštát pod Radhoštěm
Jan Ptáčník, G Hladnov, Slezská Ostrava
8. *Matúš Kopf*, Mendelovo G, Opava
9. *Jitka Novotná*, G M. Koperníka, Bílovec
10. *Helena Švihlová*, G P. Bezruče, Frýdek-Místek

Kategorie B

1. *Simona Domesová*, G M. Koperníka, Bílovec
- 2.–3. *Matúš Kopf*, Mendelovo G, Opava
Jan Legerský, G Ostrava-Hrabůvka
- 4.–5. *Radka Luňáčková*, Wichterlovo G, Ostrava-Poruba
Miroslav Raška, Wichterlovo G, Ostrava-Poruba
- 6.–8. *Martin Mrovec*, Wichterlovo G, Ostrava-Poruba
Jan Samiec, G Český Těšín
Lenka Šloufová, Wichterlovo G, Ostrava-Poruba
9. *Marek Vavrečka*, Wichterlovo G, Ostrava-Poruba

Kategorie C

1. *Lukáš Folwarczny*, G Havířov, Komenského
- 2.–6. *Jiří Biolk*, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
Petr Heinz, G Hladnov, Slezská Ostrava
Eva Klabusayová, Wichterlovo G, Ostrava-Poruba
Lucie Martinková, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
Jakub Solovský, G M. Koperníka, Bílovec
- 7.–8. *Ondřej Bouchala*, G Havířov, Komenského
Ondřej Vejpustek, Wichterlovo G, Ostrava-Poruba
- 9.–10. *Vendula Maulerová*, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
Jakub Štoček, G Havířov, Studentská

Kategorie P

1. *Miroslav Klímoš*, G M. Koperníka, Bílovec
2. *Tomáš Toufar*, G M. Koperníka, Bílovec
3. *Libor Plucnar*, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
4. *Jan Koščák*, Mendelovo G, Opava

Výsledky ústředního kola 57. ročníku MO
kategorie A

Vítězové

1.	<i>Josef Tkadlec</i> , 7/8 G J. Keplera, Praha 6	42 b.
2.	<i>Miroslav Klimoš</i> , 3/4 G M. Koperníka, Bílovec	33 b.
3.	<i>David Klačka</i> , 2/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	30 b.
4.	<i>Alena Peterová</i> , 8/8 G Dobruška	26 b.
5.–7.	<i>Van Nhan Nguyen</i> , 7/8 G Praha 6, Nad Alejí	24 b.
	<i>Samuel Říha</i> , 3/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	24 b.
	<i>Jakub Töpfer</i> , 7/8 G J. Keplera, Praha 6	24 b.
8.	<i>Van Minh Nguyen</i> , 5/6 G Tachov	23 b.
9.–11.	<i>Tomáš Hřebejk</i> , 8/8 G Praha 4, Písnická	22 b.
	<i>Jan Matějka</i> , 7/8 G České Budějovice, Jírovčova	22 b.
	<i>Alena Skálová</i> , 6/6 G Praha 4, Na Vítězné Pláni	22 b.

Další úspěšní řešitelé

12.–13.	<i>Petr Fiala</i> , 4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	21 b.
	<i>Tomáš Pavlík</i> , 7/8 G J. Keplera, Praha 6	21 b.
14.	<i>Jiří Marek</i> , 3/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	20 b.
15.–16.	<i>Hana Šormová</i> , 3/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	19 b.
	<i>Jan Vaňhara</i> , 7/8 G L. Jaroše, Holešov	19 b.
17.–18.	<i>Libor Máca</i> , 8/8 G Třebíč	18 b.
	<i>Libor Peltan</i> , 8/8 G České Budějovice, Česká	18 b.
19.–20.	<i>Jakub Menšík</i> , 4/4 G Třebíč	17 b.
	<i>Marek Nečada</i> , 8/8 G Jihlava	17 b.
21.–22.	<i>Alexander Slávik</i> , 7/8 G Brno, Terezy Novákové	16 b.
	<i>Martin Výška</i> , 7/8 G Praha 6, Nad Alejí	16 b.
23.	<i>Jiří Vančura</i> , 3/4 SPŠ ST Praha 1, Panská	15 b.
24.	<i>Martin Michálek</i> , 4/4 G J. K. Tyla, Hradec Králové	14 b.

Výsledky ústředního kola 57. ročníku MO
kategorie P

Vítězové

1. <i>Miroslav Klimoš</i> , 3/4 G M. Koperníka, Bílovec	46 b.
2. <i>Roman Smrž</i> , 8/8 G E. Krásnohorské, Praha	41 b.
3. <i>David Klaška</i> , 6/8 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	36 b.
4. <i>Jan Matějka</i> , 7/8 G České Budějovice, Jírovcova	29 b.
5. <i>Vojtěch Tůma</i> , 8/8 G Jihlava	25 b.
6. <i>Tomáš Toufar</i> , 4/4 G M. Koperníka, Bílovec	23 b.
7. <i>Jiří Maršík</i> , 4/4 G J. K. Tyla, Hradec Králové	22 b.

Další úspěšní řešitelé

8.–9. <i>František Hejl</i> , 5/6 G Jana Nerudy, Praha	19 b.
<i>Lukáš Lánský</i> , 4/4 G J. K. Tyla, Hradec Králové	19 b.
10. <i>Jakub Kaplan</i> , 4/4 G J. K. Tyla, Hradec Králové	17 b.
11. <i>Libor Plucnar</i> , 5/6 G P. Bezruče, Frýdek-Místek	16 b.
12. <i>Roman Diba</i> , 4/4 VOŠ a SPŠE Plzeň	15 b.
13.–14. <i>Hynek Jemelík</i> , 1/4 G tř. Kpt. Jaroše, Brno	13 b.
<i>Marek Nečada</i> , 8/8 G Jihlava	13 b.
15.–16. <i>Lukáš Beran</i> , 8/8 G Benešov	12 b.
<i>Radim Janalík</i> , 3/4 G Brno, Vídeňská	12 b.

Kategorie C

Texty úloh

C – I – 1

Určete nejmenší přirozené číslo n , pro něž i čísla $\sqrt{2n}$, $\sqrt[3]{3n}$, $\sqrt[5]{5n}$ jsou přirozená.
(Jaroslav Švrček)

C – I – 2

Čtyřúhelníku $ABCD$ je vepsána kružnice se středem S . Určete rozdíl $|\sphericalangle ASD| - |\sphericalangle CSD|$, jestliže $|\sphericalangle ASB| - |\sphericalangle BSC| = 40^\circ$.
(Jaromír Šimša)

C – I – 3

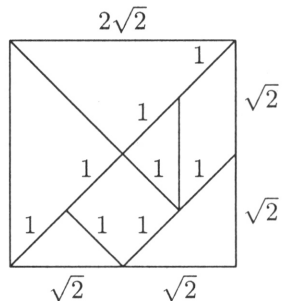
Máme určitý počet krabiček a určitý počet kuliček. Dáme-li do každé krabičky právě jednu kuličku, zbyde nám n kuliček. Když však dáme právě n krabiček stranou, můžeme všechny kuličky rozmístit tak, aby jich v každé zbývající krabičce bylo právě n . Kolik máme krabiček a kolik kuliček?
(Vojtech Bálint)

C – I – 4

Tangram je skládačka, kterou lze vyrobit z papíru rozřezáním vystřiženého čtverce na sedm dílů podle čar vyznačených na obrázku. Předpokládejme, že délka strany čtverce je $2\sqrt{2}$ cm. Rozhodněte, zda lze z dílů tangramu složit:

- obdélník $2\text{cm} \times 4\text{cm}$,
- obdélník $\sqrt{2}\text{cm} \times 4\sqrt{2}\text{cm}$.

(Pavel Leischner)



C – I – 5

Ve skupině n lidí ($n \geq 4$) se někteří znají. Vztah „znát se“ je vzájemný: jestliže osoba A zná osobu B , pak také B zná A a nazýváme je dvojici známých.

- Jestliže mezi každými čtyřmi osobami jsou aspoň čtyři dvojice známých, pak každé dvě osoby, které se neznají, mají společného známého. Dokažte.
- Zjistěte, pro která $n \geq 4$ existuje skupina osob, v níž jsou mezi každými čtyřmi osobami aspoň tři dvojice známých a současně se některé dvě osoby neznají ani nemají společného známého.
- Rozhodněte, zda ve skupině šesti osob mohou být v každé čtveřici právě tři dvojice známých a právě tři dvojice neznámých.

(Ján Mazák)

C – I – 6

Klárka měla na papíru napsáno trojmístné číslo. Když ho správně vynásobila devíti, dostala čtyřmístné číslo, jež začínalo touž číslicí jako číslo původní, prostřední dvě číslice se rovnaly a poslední číslice byla součtem číslic původního čísla. Které čtyřmístné číslo mohla Klárka dostat?

(Peter Novotný)

C – S – 1

Najděte všechny dvojice přirozených čísel a, b větších než 1 tak, aby jejich součet i součin byly mocniny prvočísel (s kladnými celočíselnými mocniteli).

(Ján Mazák)

C – S – 2

V daném rovnoběžníku $ABCD$ je bod E střed strany BC a bod F leží uvnitř strany AB . Obsah trojúhelníku AFD je 15 cm^2 a obsah trojúhelníku FBE je 14 cm^2 . Určete obsah čtyřúhelníku $FECD$.

(Peter Novotný)

C – S – 3

Ve skupině šesti lidí existuje právě 11 dvojic známých. Vztah „znát se“ je vzájemný, tzn. jestliže osoba A zná osobu B , pak také B zná A . Pokud

se kdokoli ze skupiny dozví nějakou zprávu, řekne ji všem svým známým. Dokažte, že se tímto způsobem zprávu dozví nakonec všichni.

(*Vojtech Bálint*)

C – II – 1

Trojúhelník ABC splňuje při obvyklém značení délek stran podmínku $a \leq b \leq c$. Vepsaná kružnice se dotýká stran AB , BC a AC po řadě v bodech K , L a M . Dokažte, že z úseček AK , BL a CM lze sestrojit trojúhelník, právě když platí $b + c < 3a$.

(*Jaroslav Švrček*)

C – II – 2

Klárka udělala chybu při písemném násobení dvou dvojmístných čísel, a tak jí vyšlo číslo o 400 menší, než byl správný výsledek. Pro kontrolu vydělila číslo, které dostala, menším z násobených čísel. Tentokrát počítala správně a vyšel jí neúplný podíl 67 a zbytek 56. Která čísla Klárka násobila?

(*Jaromír Šimša*)

C – II – 3

Dokažte, že pokud ve skupině šesti osob existuje aspoň deset dvojic známých, pak v ní lze nalézt tři osoby, které se znají navzájem. Vztah „znát se“ je vzájemný, tzn. jestliže osoba A zná osobu B , pak také B zná A . Ukažte, že taková trojice existovat nemusí, jestliže ve skupině šesti osob je méně než deset dvojic známých.

(*Vojtech Bálint*)

C – II – 4

Najděte všechny trojice celých čísel x , y , z , pro něž platí

$$x + y\sqrt{3} + z\sqrt{7} = y + z\sqrt{3} + x\sqrt{7}.$$

(*Ján Mazák*)

Řešení úloh

C – I – 1

Vysvětlíme, proč prvočíselný rozklad hledaného čísla musí obsahovat jen vhodné mocniny prvočísel 2, 3 a 5. Každé případné další prvočíslu by se v rozkladu čísla n muselo vyskytovat v mocnině, jejíž mocnitel je dělitelný dvěma, třemi i pěti zároveň (viz návodnou úlohu 1). Po vyškrtnutí takového prvočísla by se číslo n zmenšilo a zkoumané odmocniny by přitom zůstaly celočíselné.

Položme proto $n = 2^a 3^b 5^c$, kde a, b, c jsou přirozená čísla. Čísla $\sqrt[3]{3n}$ a $\sqrt[5]{5n}$ jsou celá, proto je exponent a násobkem tří a pěti. Také $\sqrt{2n}$ je celé číslo, proto musí být číslo a liché. Je tedy lichým násobkem patnácti: $a \in \{15, 45, 75, \dots\}$. Analogicky je mocnitel b takový násobek deseti, který při dělení třemi dává zbytek 2: $b \in \{20, 50, 80, \dots\}$. Číslo c je pak tím násobkem šesti, který při dělení pěti dává zbytek 4: $c \in \{24, 54, 84, \dots\}$. Z podmínky, že n je nejmenší, nakonec plyne $n = 2^{15} 3^{20} 5^{24}$.

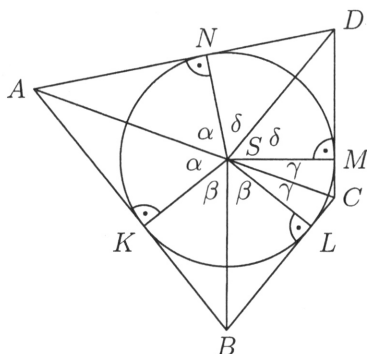
Přesvědčíme se ještě, že dané odmocniny jsou přirozená čísla:

$$\sqrt{2n} = 2^8 3^{10} 5^{12}, \quad \sqrt[3]{3n} = 2^5 3^7 5^8, \quad \sqrt[5]{5n} = 2^3 3^2 5^5.$$

Závěr: $n = 2^{15} 3^{20} 5^{24}$.

C – I – 2

Paty kolmic ze středu S vepsané kružnice ke stranám AB, BC, CD a DA označme po řadě písmeny K, L, M a N (obr. 1). Pravoúhlé troj-



Obr. 1

úhelníky ASK a ASN jsou shodné podle věty Ssu . Mají totiž společnou přeponu AS a shodné odvěsny SK a SL , jejichž délka je rovna poloměru vepsané kružnice. Ze shodnosti těchto trojúhelníků plyne jednak známé tvrzení o délkách tečen ($|AK| = |AN|$), jednak shodnost úhlů ASK a ASN , jejichž společnou velikost označíme α :

$$|\sphericalangle ASK| = |\sphericalangle ASN| = \alpha.$$

Analogicky zjistíme shodnost trojúhelníků SBK a SBL , dále pak SCL a SCM , nakonec SDM a SDN . Na základě uvedených shodností zjistíme, že lze položit

$$\begin{aligned} |\sphericalangle BSK| &= |\sphericalangle BSL| = \beta, & |\sphericalangle CSL| &= |\sphericalangle CSM| = \gamma, \\ |\sphericalangle DSM| &= |\sphericalangle DSN| = \delta. \end{aligned}$$

Odtud a z obr. 1 pak plyne

$$\begin{aligned} |\sphericalangle ASD| - |\sphericalangle CSD| &= (\alpha + \delta) - (\gamma + \delta) = \alpha - \gamma = \\ &= (\alpha + \beta) - (\gamma + \beta) = |\sphericalangle ASB| - |\sphericalangle BSC| = 40^\circ. \end{aligned}$$

$$\text{Závěr: } |\sphericalangle ASD| - |\sphericalangle CSD| = 40^\circ.$$

C – I – 3

Označíme-li x počet krabiček a y počet kuliček, vede zadání na soustavu rovnic

$$x + n = y \quad \text{a} \quad (x - n) \cdot n = y \quad (1)$$

s neznámými x , y a n z oboru přirozených čísel. Vyloučením neznámé y dostaneme rovnici $x + n = (x - n) \cdot n$, která nemá řešení pro $n = 1$. Pro $n \geq 2$ dostaneme

$$x = \frac{n^2 + n}{n - 1} = n + 2 + \frac{2}{n - 1},$$

odkud vidíme, že (přirozené) číslo $n - 1$ musí být dělitelem čísla 2. Tedy $n \in \{2, 3\}$. Přípustné hodnoty n dosadíme do (1) a soustavu vyřešíme (lze též využít poslední vztah). Pro $n = 2$ dostaneme $x = 6$, $y = 8$ a pro $n = 3$ určíme $x = 6$ a $y = 9$.

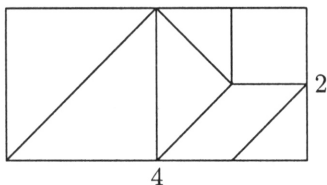
Zkouška: Mějme šest krabiček a osm kuliček. Když do každé krabičky dáme právě jednu kuličku, zbyde $n = 2$ kuliček. Když však odebereme

dvě krabičky, můžeme do zbývajících čtyř rozdělit kuličky právě po dvou. Podmínky úlohy jsou tedy splněny. Pro šest krabiček a devět kuliček provedeme zkoušku stejně snadno.

Závěr: Buď máme šest krabiček a osm kuliček, nebo šest krabiček a devět kuliček.

C – I – 4

a) Obdélník složit lze (obr. 2).



Obr. 2

b) Celková délka „iracionálních“ stran všech dílů tangramu je $10\sqrt{2}$ cm. Je tedy rovna obvodu obdélníku, který máme složit.

Pro celá nezáporná čísla a, b, c, d platí, že Délku úsečky lze vyjádřit ve tvaru $a + b\sqrt{2}$ a současně ve tvaru $c + d\sqrt{2}$, právě když $a = c$ a $b = d$. Rovnost $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ je totiž ekvivalentní se vztahem $a - c = (d - b)\sqrt{2}$, jehož levá strana je celé číslo, zatímco pravá strana je pro $d \neq b$ iracionální. Rovnost nastává, jen když platí $a = c$ a $b = d$.

Vidíme tedy, že všechny „iracionální“ strany dílů tangramu musejí být umístěny na hranici skládaného obdélníku. To však není možné, neboť protilehlé „iracionální“ strany kosodélníkového dílu mají vzdálenost menší než 1 cm, kdežto nejmenší vzdálenost protilehlých stran obdélníku je $\sqrt{2}$ cm.

Závěr: Obdélník $2 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$ lze z tangramu složit, ale obdélník $\sqrt{2} \text{ cm} \times 4\sqrt{2} \text{ cm}$ složit nelze.

C – I – 5

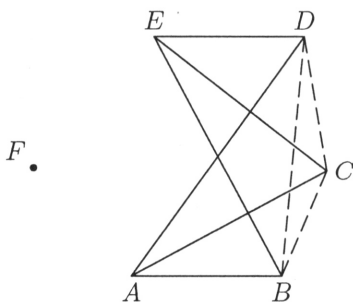
a) Označme A, B dvě osoby, jež se neznají, a přidejme k nim libovolné další dvě osoby X a Y . Kdyby ani osoba X , ani osoba Y nebyla společným známým osob A a B , měli bychom ze všech šesti dvojic ve čtveřici $ABXY$ aspoň tři dvojice neznámých: dvojici AB , dvojici AX nebo BX a dvojici

AY nebo BY . Dvojice známých ve čtveřici $ABXY$ by tak byly nejvýše tři, což odporuje předpokladu ze zadání části a). Tím je část a) dokázána.

b) Skupina požadovaných vlastností existuje pro všechna $n \geq 4$. Jako příklad stačí zvolit skupinu, v níž se osoba A nezná s nikým a ostatní se znají navzájem. Pak existuje dokonce $n - 1$ dvojic osob, které se ani neznají, ani nemají společného známého, a mezi každými čtyřmi osobami jsou aspoň tři dvojice známých.

c) Budeme předpokládat, že šestice osob s popsanou vlastností existuje. Využijeme grafického znázornění, v nichž osoby zakreslíme jako body. Plnou (resp. čárkovanou) úsečkou, kterou některé dva z těchto bodů spojíme, vyznačíme dvojici známých (resp. dvojici neznámých).

Z každého bodu grafického znázornění skupiny šesti osob vychází právě pět úseček. Podle Dirichletova principu jsou proto aspoň tři úsečky, jež vycházejí z téhož bodu, stejného typu (jsou buď čárkované, nebo plné). Označme body A, B, C, D, E a F tak, aby byly téhož typu úsečky AB, AC a AD , a předpokládejme nejprve, že označují dvojice známých. Ve čtveřici $ABCD$ jsou však podle předpokladu právě tři dvojice neznámých, a proto je trojúhelník BCD v grafickém znázornění zakreslen čárkovaně. Ve čtveřici $BCDE$ pak úsečky EB, EC, ED nutně představují dvojice známých (obr. 3). Odtud plyne, že ve čtveřici $ABDE$ jsou aspoň čtyři dvojice známých, které na obr. 3 znázorňují úsečky AB, AD, EB a ED , což odporuje našemu předpokladu. Případ, kdy úsečky AB, AC a AD představují dvojice neznámých, vede ke sporu analogicky (v předchozích úvahách stačí zaměnit vztahy *znát se* a *neznat se* a samozřejmě i čárkované a nečárkované úsečky).



Obr. 3

Závěr části c): Neexistuje skupina šesti osob, která má v každé své čtveřici právě tři dvojice známých a právě tři dvojice neznámých.

Hledejme původní číslo $x = 100a + 10b + c$, jehož číslice jsou a, b, c . Číslici, která se vyskytuje na prostředních dvou místech výsledného součinu, označme d . Ze zadání plyne:

$$9(100a + 10b + c) = 1\,000a + 100d + 10d + (a + b + c), \quad (1)$$

přičemž výraz v poslední závorce představuje číslici shodnou s poslední číslici součinu $9c$. To ovšem znamená, že nemůže být $c \geq 5$: pro takové c totiž končí číslo $9c$ číslici nepřevyšující 5, a protože $a \neq 0$, platí naopak $a + b + c > c \geq 5$.

Také zřejmě je $c \neq 0$ (v opačném případě by platilo $a = b = c = x = 0$). Ostatní možnosti vyšetříme sestavením následující tabulky.

c	$9c$	$a + b + c$	$a + b$
1	9	9	8
2	18	8	6
3	27	7	4
4	36	6	2

Tabulka 1

Rovnost (1) lze přepsat na tvar

$$100(b - a - d) = 10d + a + 11b - 8c. \quad (2)$$

Hodnota pravé strany je aspoň -72 a menší než 200, neboť každé z čísel a, b, c, d je nejvýše rovno devíti. Je tedy buď $b - a - d = 0$, nebo $b - a - d = 1$.

V prvním případě po substituci $d = b - a$ upravíme vztah (2) na tvar $8c = 3(7b - 3a)$, z něž vidíme, že c je násobkem tří. Z tabulky 1 pak plyne $c = 3$, $a = 4 - b$, což po dosazení do rovnice $8c = 3(7b - 3a)$ vede k řešení $a = b = 2$, $c = 3$. Původní číslo je tedy $x = 223$ a jeho devítinásobek $9x = 2\,007$.

Ve druhém případě dosadíme $d = b - a - 1$ do (2) a zjistíme, že $8c + 110 = 3(7b - 3a)$. Výraz $8c + 110$ je tudíž dělitelný třemi, proto číslo c dává při dělení třemi zbytek 2. Dosazením jediných možných hodnot $c = 2$ a $b = 6 - a$ do poslední rovnice zjistíme, že $a = 0$, což odporuje tomu, že číslo $x = 100a + 10b + c$ je trojmístné.

Závěr: Klárka obdržela čtyřmístné číslo 2 007.

Poznámka. Tabulka 1 nabízí jednodušší, ale numericky pracnější postup přímého dosazování všech přípustných hodnot čísel a, b, c do rovnice (1). Počet všech možností lze omezit na deset odhadem $b \geq a$, který zjistíme pomocí vhodné úpravy vztahu (1) — například na tvar (2). Řešení uvádíme v tabulce 2.

a	1	2	3	4	1	2	3	1	2	1
b	7	6	5	4	5	4	3	3	2	1
c	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4
$9x$	1 539	2 349	3 159	3 969	1 368	2 178	2 988	1 197	2 007	1 026

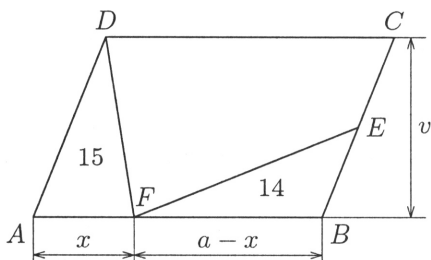
Tabulka 2

C – S – 1

Z podmínky pro součin plyne, že a i b jsou mocninami téhož prvočísla p : $a = p^r$, $b = p^s$, kde r, s jsou celá kladná čísla. Kdyby bylo p liché, byl by součet $a + b$ dělitelný kromě čísla p i číslem 2, takže by nebyl mocninou prvočísla. Je-li $p = 2$ a $r < s$, je součet $a + b = 2^r(1 + 2^{s-r})$ opět číslo sudé dělitelné lichým číslem větším než 1, není tudíž mocninou prvočísla. Analogicky dojdeme ke stejnému závěru i v případě, kdy $r > s$. Zbývá proto jediná možnost: $a = b = 2^r$, kde r je celé kladné číslo. Zkouška $a + b = 2^r + 2^r = 2^{r+1}$ a $ab = 2^{2r}$ potvrzuje, že řešením jsou všechny dvojice $(a, b) = (2^r, 2^r)$, kde r je celé kladné číslo.

C – S – 2

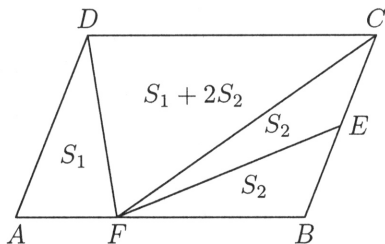
Označme v vzdálenost bodu C od přímky AB , $a = |AB|$ a $x = |AF|$. Pro obsahy trojúhelníků AFD a FBE (obr. 4) platí: $S_{AFD} = \frac{1}{2}x \cdot v = 15$, $S_{FBE} = \frac{1}{2}(a - x) \cdot \frac{1}{2}v = 14$. Odtud $xv = 30$, $av - xv = 56$.



Obr. 4

Sečtením obou rovnic nalezneme obsah rovnoběžníku $ABCD$: $S_{ABCD} = av = 86 \text{ cm}^2$. Obsah čtyřúhelníku $FECD$ je tedy $S_{FECD} = S_{ABCD} - (S_{AFD} + S_{FBE}) = 57 \text{ cm}^2$.

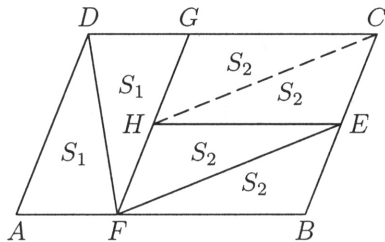
Jiné řešení. Trojúhelníky BEF a ECF mají stejnou výšku z vrcholu F a shodné základny BE a EC . Proto jsou obsahy obou trojúhelníků stejné. Z obr. 5 vidíme, že obsah trojúhelníku CDF je polovinou



Obr. 5

obsahu rovnoběžníku $ABCD$ (oba útvary mají společnou základnu CD a stejnou výšku), druhou polovinu tvoří součet obsahů trojúhelníků AFD a BCF . Odtud $S_{FECD} = S_{ECF} + S_{CDF} = S_{ECF} + (S_{AFD} + S_{BCF}) = S_{AFD} + 3S_{FBE} = 57 \text{ cm}^2$.

Jiné řešení. Do rovnoběžníku přikreslíme úsečky FG a EH rovnoběžné se stranami BC a AB tak, jak znázorňuje obr. 6. Rovnoběžníky

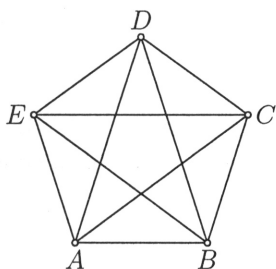


Obr. 6

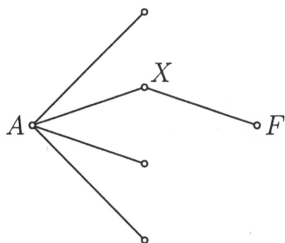
$AFGD$ a $FBEH$ jsou svými úhlopříčkami DF a EF rozděleny na dvojice shodných trojúhelníků. Je tedy $S_{GDF} = S_{AFD} = 15 \text{ cm}^2$ a $S_{HFE} = S_{BEF} = 14 \text{ cm}^2$. Ze shodnosti rovnoběžníků $HECG$ a $FBEH$ navíc snadno nahlédneme, že všechny čtyři trojúhelníky FBE , EHF , HEC a CGH jsou shodné, takže obsah čtyřúhelníku $FECD$ je $S_{AFD} + 3S_{FBE} = 57 \text{ cm}^2$.

Jednotlivé osoby označíme písmeny A, B, C, D, E a F . Aspoň jedna z nich (označme ji A) má aspoň čtyři známé (pokud by měla každá osoba nejvýše tři známé, bylo by známých dvojic méně než deset). Kdyby měla dokonce pět známých, dozví se zprávu od každého ve skupině a může ji komukoli ve skupině sdělit.

Pokud má osoba A právě čtyři známé, například osoby B, C, D a E , existuje ve skupině osob A, B, C, D, E nejvýše 10 známostí (obr. 7, dvojice známých znázorňují úsečky), a tak se osoba F musí znát s některou osobou $X \in \{B, C, D, E\}$. Možnost šíření zprávy od libovolné osoby ke kterékoli jiné snadno ověříme podle obr. 8.

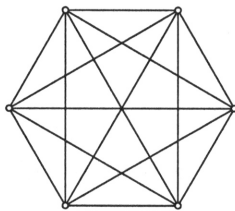


Obr. 7



Obr. 8

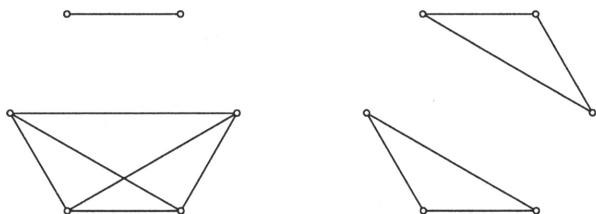
Jiné řešení. Znázornění kterékoli množiny právě jedenácti dvojic známých ve skupině šesti osob obdržíme odstraněním čtyř z patnácti hran úplného grafu (obr. 9, v něm z každého uzlu vychází právě pět hran). Po odstranění pouze čtyř hran z grafu na obr. 9 musí tedy z každého vrcholu vycházet aspoň jedna hrana. Ve skupině tedy neexistuje člověk, který by



Obr. 9

nikoho neznal. Aby se proto zpráva nemohla od některé z osob rozšířit ke všem ostatním, musela by v příslušném grafu existovat buď aspoň jedna

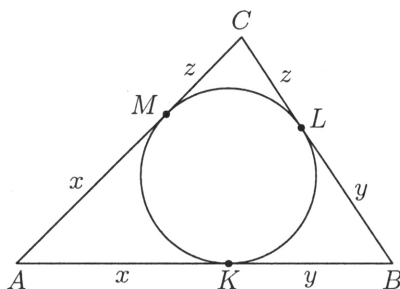
oddělená dvojice, nebo dvě oddělené trojice, v nichž se osoby znají navzájem. V žádné z těchto situací však počet dvojic známých nepřevyšuje sedm, jak vidíme z obr. 10. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.



Obr. 10

C – II – 1

Označme $x = |AK| = |AM|$, $y = |BL| = |BK|$, $z = |CM| = |CL|$ (obr. 11) shodné úseky tečen z jednotlivých vrcholů trojúhelníku k ve-



Obr. 11

psané kružnici. Zřejmě platí:

$$a = y + z, \quad b = z + x, \quad c = x + y. \quad (1)$$

Z uvedených rovností vidíme, že daná podmínka

$$b + c < 3a \quad (2)$$

je ekvivalentní nerovnosti

$$x < y + z, \quad (3)$$

což je nutná podmínka existence trojúhelníku se stranami délek x , y a z .

Dosazením z (1) do podmínek $b \leq c$ a $a \leq b$ zjistíme, že $z \leq y$ a $y \leq x$. To znamená, že další dvě trojúhelníkové nerovnosti $y < z + x$ a $z < x + y$ jsou automaticky splněny, takže nerovnost (3), a tím i (2) je podmínkou postačující. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

C – II – 2

Označme x menší a y větší z násobených čísel. Podle zadání platí $xy - 400 = 67x + 56$, neboli

$$x(y - 67) = 456. \quad (1)$$

Číslo x je tedy dvojmístný dělitel čísla $456 = 2^3 \cdot 3 \cdot 19$. Ze zadání navíc plyne, že číslo x je větší než příslušný zbytek 56. Nejmenší takové x je $x = 3 \cdot 19 = 57$. Pro každý další takový dělitel platí $x \geq 4 \cdot 19 = 76$ a $y - 67 \leq 2 \cdot 3 = 6$, takže $y \leq 73 < x$, což odporuje zvolenému označení $x < y$. Je tedy $x = 57$ a $y = 75$. Snadno ověříme, že tato čísla vyhovují zadání úlohy.

Závěr. Klárka násobila čísla 57 a 75.

C – II – 3

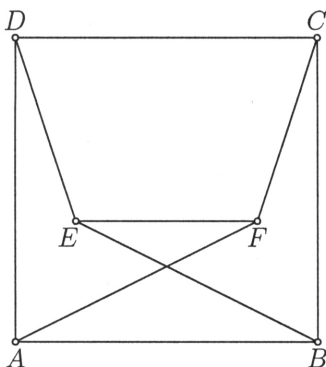
Nazvěme A osobu (případně jednu z osob), která má v dané skupině nejvíce známých, a tento počet známých označme n . Zřejmě je $n \leq 5$.

Je-li $n = 5$, existuje mezi zbývajícimi osobami aspoň pět dalších dvojic známých. Kterákoliv z těchto dvojic pak tvoří s osobou A trojici známých.

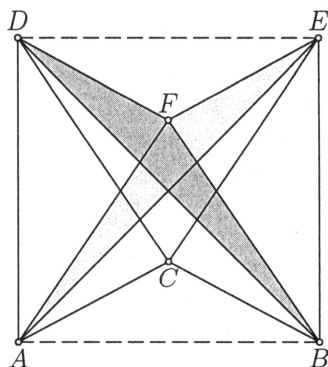
Je-li $n = 4$, existuje osoba B , která se s A nezná, a ta má rovněž nejvýše čtyři známé. Proto se mezi známými osoby A vyskytují aspoň dvě dvojice známých. Osoba A s jednou z těchto dvojic tvoří opět trojici známých.

Situace $n \leq 3$ nemůže nastat, protože celkový počet dvojic známých ve skupině je pak nejvýše $\frac{1}{2} \cdot 6n \leq 9$.

Příklad skupiny šesti osob s devíti dvojicemi, ale s žádnou trojicí známých je znázorněn grafem na obr. 12. V něm body A, B, C, D, E a F představují jednotlivé osoby a dvojice známých jsou vyznačeny úsečkami. Přitom žádné tři z úseček netvoří trojúhelník. Pokud je ve skupině méně než devět dvojic známých, sestrojíme vhodný příklad odstraněním příslušného počtu úseček z obr. 12 (přitom určitě žádný trojúhelník nevznikne).



Obr. 12



Obr. 13

Jiné řešení. Je-li v šestici osob aspoň 10 dvojic známých, je v ní nejvýše 5 dvojic neznámých, neboť všech dvojic je právě 15. Budeme proto naopak předpokládat, že se v každé trojici najde dvojice neznámých, a dokážeme, že v celé šestici je takových dvojic alespoň 6. Za uvedeného předpokladu můžeme označení osob zvolit tak, aby v trojicích ABC a DEF byly dvojice neznámých AB a DE . Pak další čtyři různé dvojice neznámých najdeme (po jedné) v trojicích ACD , AEF , BCE , BDF (každá dvojice se vyskytuje nejvýše v jedné z uvedených čtyř trojic a žádná z těchto trojic neobsahuje ani dvojici AB , ani dvojici DE ; jinými slovy (obr. 13) libovolné dva z uvedených trojúhelníků mají společný nejvýše jeden vrchol, tedy žádnou stranu).

Příklad pro menší počet dvojic známých sestrojíme stejně jako v předchozím řešení.

C – II – 4

Rovnici přepíšeme na tvar

$$x - y = (z - y)\sqrt{3} + (x - z)\sqrt{7}$$

a umocníme. Po jednoduché úpravě dostaneme

$$(x - y)^2 - 3(z - y)^2 - 7(x - z)^2 = 2(x - z)(z - y)\sqrt{21}. \quad (1)$$

Pro $x \neq z$ a $y \neq z$ nemůže rovnost (1) platit, protože její pravá strana je v takovém případě číslo iracionální, kdežto levá je číslo celé. Rovnost tedy může nastat, jen když $x = z$ nebo $y = z$.

V prvním případě po dosazení $x = z$ do původní rovnice dostaneme $z - y = \sqrt{3}(z - y)$. Odtud $z = y = x$.

Ve druhém případě, kdy $y = z$, dojdeme analogicky k témuž výsledku.

Závěr. Řešením dané rovnice jsou všechny trojice $(x, y, z) = (k, k, k)$, kde k je libovolné celé číslo.

Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

Najděte všechna přirozená čísla k , pro něž je zápis čísla $6^k \cdot 7^{2007-k}$ v desítkové soustavě zakončen dvojčíslím a) 02; b) 04. (Eva Řídká)

B – I – 2

V pásu mezi rovnoběžkami p , q jsou dány dva různé body M a N . Seštrojte kosočtverec nebo čtverec, jehož dvě protější strany leží na přímkách p a q a body M a N leží po jednom na zbývajících dvou stranách. (Jaromír Šimša)

B – I – 3

Jsou-li x a y reálná čísla, pro něž platí $x^3 + y^3 \leq 2$, potom $x + y \leq 2$. Dokažte. (Ján Mazák)

B – I – 4

Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky s délkami stran a , b , c a délkami těžnic t_a , t_b , t_c , pro něž platí $a + t_a = b + t_b$. Uvažujte oba případy, kdy AB je a) přepona, b) odvěsna. (Pavel Novotný)

B – I – 5

Určete všechny dvojice a , b reálných čísel, pro něž má každá z kvadratických rovnic

$$ax^2 + 2bx + 1 = 0, \quad bx^2 + 2ax + 1 = 0$$

dva různé reálné kořeny, přičemž právě jeden z nich je oběma rovnicím společný. (Jaroslav Švrček)

B – I – 6

Obdélník 2005×2007 je rozdělen na černé a bílé jednotkové čtverečky. Dokažte, že pak pro jednu z barev (černou nebo bílou) existuje více než 95 800 pravoúhelníků (složených z jednotkových čtverečků), jež se navzájem nepřekrývají a jejichž rohová políčka mají vesměs zvolenou barvu, přičemž každá z jejich stran obsahuje aspoň dva čtverečky.

(Pavel Leischner)

B – S – 1

Jestliže libovolné prvočíslo vydělíme třiceti, bude zbytkem číslo 1 nebo prvočíslo. Dokažte.

(Vojtech Bálint)

B – S – 2

Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro něž mají rovnice

$$x^2 + (3a + b)x + 4a = 0, \quad x^2 + (3b + a)x + 4b = 0$$

společný reálný kořen.

(Jaroslav Švrček)

B – S – 3

V rovině jsou dány dvě rovnoběžky p a q , bod A na přímce p a bod M ležící uvnitř pásu mezi přímkami p a q . Sestrojte kosočtverec nebo čtverec $ABCD$ tak, aby strana AB ležela na přímce p , strana CD na přímce q a aby úhlopříčka BD procházela bodem M .

(Jaromír Šimša)

B – II – 1

Uvažujme dvě kvadratické rovnice

$$x^2 - ax - b = 0, \quad x^2 - bx - a = 0$$

s reálnými parametry a, b . Zjistěte, jaké nejmenší a jaké největší hodnoty může nabývat součet $a + b$, existuje-li právě jedno reálné číslo x , které současně vyhovuje oběma rovnicím. Určete dále všechny dvojice (a, b) reálných parametrů, pro něž uvažovaný součet těchto hodnot nabývá.

(Jaroslav Švrček)

B – II – 2

V trojúhelníku ABC má úhel α velikost 20° . Vypočítejte velikosti úhlů β a γ , platí-li rovnost $a + 2v_a = b + 2v_b$.
(Pavel Novotný)

B – II – 3

V rovině je dán rovnoběžník $ABCD$, jehož úhlopříčka BD je kolmá ke straně AD . Označme M ($M \neq A$) průsečík přímky AC s kružnicí o průměru AD . Dokažte, že osa úsečky BM prochází středem strany CD .

(Jaroslav Švrček)

B – II – 4

Hokejový turnaj se hraje systémem „každý s každým“. V průběhu turnaje se každá dvojice družstev střetne právě jednou. Turnaj se odehrává po jednotlivých kolech. Při sudém počtu družstev sehraje každé v jednom kole jeden zápas, při lichém počtu má v každém kole jedno z družstev volno. Za remízu dostane každý ze soupeřů po jednom bodu. Pokud zápas neskončí remízou, dostane vítěz dva body, poražený nezíská žádný bod. O pořadí v tabulce rozhoduje především počet bodů, při rovnosti bodů pak skóre. Po odehrání několika kol neměla žádná dvojice družstev stejný počet bodů. Dokažte, že v tom případě už poslední v tabulce ztratil naději na celkové vítězství. Úlohu řešte pro turnaj

- a) deseti družstev,
- b) jedenácti družstev.

(Martin Panák)

Řešení úloh

B – I – 1

Opakovaným násobením číslem 6 zjistíme, že poslední dvojčíslí mocnin 6^k pro $k = 1, 2, 3, \dots$ jsou postupně

$$06, 36, 16, 96, 76, 56, 36, 16, 96, 76, 56, \dots, \quad (1)$$

opakují se tedy od druhého členu s periodou délky 5. Podobně opakovaným násobením číslem 7 zjistíme, že poslední dvojčíslí mocnin 7^m pro $m = 1, 2, 3, \dots$ jsou postupně

$$07, 49, 43, 01, 07, 49, 43, 01, \dots, \quad (2)$$

opakují se tedy již od prvního členu s periodou délky 4.

a) Protože každá mocnina šesti je zakončena číslicí 6, bude číslo $6^k \cdot 7^{2007-k}$ zakončeno dvojkou, jedině když bude číslo 7^{2007-k} zakončeno dvojčíslím 07 (jiné dvojčíslí z (2) nevyhovuje). Násobením čísly 6, 36, 16, 96, 76 a 56 ovšem zjistíme, že číslo $6^k \cdot 7^{2007-k}$ může mít v takovém případě na předposledním místě jen některou z číslic 1, 3, 4, 5, 7, 9. Zakončení dvojčíslím 02 proto není možné.

b) Protože každá mocnina šesti je zakončena číslicí 6, bude číslo $6^k \cdot 7^{2007-k}$ zakončeno čtyřkou, právě když 7^{2007-k} bude zakončeno dvojčíslím 49 (jiné dvojčíslí z (2) nevyhovuje). Násobením všemi různými čísly z (1) zjistíme, že $6^k \cdot 7^{2007-k}$ je zakončeno dvojčíslím 04, jedině když 6^k končí dvojčíslím 96. Číslo 6^k končí na 96, právě když je mocnitel k tvaru $k = 4 + 5a$; číslo 7^{2007-k} končí na 49, právě když příslušný mocnitel má tvar $2007 - k = 2 + 4b$. Dosazením $k = 4 + 5a$ dostaneme rovnici $2007 - 4 - 5a = 2 + 4b$, kde a a b jsou celá nezáporná čísla. Z ní vychází

$$b = \frac{2001 - 5a}{4} = 500 - a - \frac{a - 1}{4}.$$

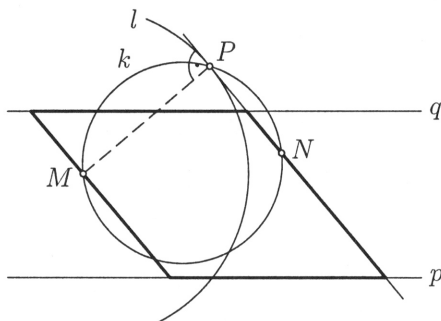
Aby bylo b celé, musí být $a - 1$ dělitelné čtyřmi, tedy $a = 4c + 1$; potom $b = 499 - 5c$, $k = 9 + 20c$. Mocnitel $2007 - k$ rovný $1998 - 20c$ nemůže být záporný, proto $c \leq 99$.

Číslo $6^k \cdot 7^{2007-k}$ je zakončeno dvojčíslím 04, právě když je číslo k tvaru $k = 9 + 20c$, kde $c \in \{0, 1, 2, \dots, 99\}$.

Poznámka. Rovnice tvaru $ax + by = c$, kde a, b, c jsou daná celá čísla a x, y celočíselné neznámé, se nazývá *lineární diofantická rovnice* o dvou neznámých.

B – I – 2

V kosočtverci (čtverci) jsou vzdálenosti protilehlých stran stejné. Naším úkolem je tedy vést body M a N rovnoběžky, jejichž vzdálenost je rovna vzdálenosti d rovnoběžek p a q . Pata P kolmice z bodu M ke straně hledaného kosočtverce procházející bodem N leží na Thaletově kružnici nad průměrem MN a má od bodu M vzdálenost d (obr. 14). Odtud plyne konstrukce:



Obr. 14

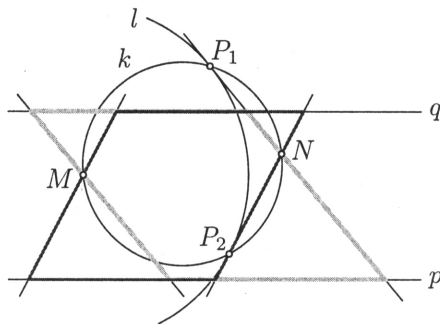
Sestrojíme Thaletovu kružnici k nad průměrem MN a kružnici l se středem M , jejíž poloměr je roven vzdálenosti d přímek p a q . Označíme P průsečík kružnic k a l . Na přímce PN leží jedna ze stran hledaného (koso)čtverce. Protilehlá strana prochází bodem M a je s přímkou PN rovnoběžná.

Vzniklý rovnoběžník je skutečně kosočtverec nebo čtverec, neboť ze shodnosti výšek vyplývá shodnost stran.

Diskuse: Existence řešení je podmíněna existencí bodu P . Zřejmě pak nemůže být $NP \parallel q$, protože by to znamenalo, že je $|MP| < d$, takže rovnoběžky procházející body M, N vždy vytnou požadovaný rovnoběžník. Je-li $|MN| > d$, mají kružnice k a l dva různé průsečíky $P_1 \neq P_2$ (obr. 15), takže úloha má dvě řešení. Je-li $|MN| = d$, potom $P = N$; stranu kosočtverce procházející bodem N sestrojíme jako kolmici na MN a úloha má jen jedno řešení. V případě $|MN| < d$ nemá úloha řešení.

B – I – 3

Tvrzení dokážeme sporem. Pripustíme, že platí $x + y > 2$. Potom $y > 2 - x$, takže $y^3 > (2 - x)^3$, neboť funkce $s = t^3$ je v proměnné t rostoucí v celém



Obr. 15

oboru reálných čísel. Proto platí

$$x^3 + y^3 > x^3 + (2 - x)^3 = 8 - 12x + 6x^2 = 6(x - 1)^2 + 2 \geq 2.$$

To je ve sporu s předpokladem. Tím je tvrzení dokázáno.

Jiné řešení. Dvojčlen $x^3 + y^3$ rozložíme na součin $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$. Kdyby platilo $x + y > 2$, pak bychom pro druhý činitel $x^2 - xy + y^2$ měli odhad

$$x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{4}(x + y)^2 + \frac{3}{4}(x - y)^2 > 1.$$

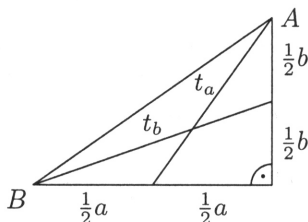
Pro výraz $x^3 + y^3$ by pak platilo

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) > 2 \cdot 1 = 2.$$

To je opět ve sporu s předpokladem. Tím je tvrzení dokázáno.

B - I - 4

a) Necht a i b jsou odvěšny (obr. 16). Potom podle Pythagorovy věty



Obr. 16

platí

$$t_a = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}, \quad t_b = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2},$$

takže podmínka $a + t_a = b + t_b$ má tvar

$$a + \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = b + \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Protože z nerovnosti $a > b$ vyplývá (viz závěrečnou poznámku) $t_b > t_a$, jsou následující úpravy ekvivalentní:

$$\begin{aligned} 2a - 2b &= \sqrt{4a^2 + b^2} - \sqrt{4b^2 + a^2}, \\ 4a^2 - 8ab + 4b^2 &= 5a^2 + 5b^2 - 2\sqrt{(4a^2 + b^2)(4b^2 + a^2)}, \\ 2\sqrt{4a^4 + 17a^2b^2 + 4b^4} &= a^2 + 8ab + b^2, \\ 16a^4 + 68a^2b^2 + 16b^4 &= a^4 + 16a^3b + 66a^2b^2 + 16ab^3 + b^4, \\ 15a^4 - 16a^3b + 2a^2b^2 - 16ab^3 + 15b^4 &= 0. \end{aligned}$$

Mnohočlen na levé straně poslední rovnice je zřejmě dělitelný dvojitelnem $a - b$ (pro $a = b$ je totiž roven nule). Dělením zjistíme, že výsledný mnohočlen třetího stupně má opět stejnou vlastnost, takže po opakovaném dělení převedeme zkoumanou rovnici do součinného tvaru

$$(a - b)^2(15a^2 + 14ab + 15b^2) = 0.$$

Poslední rovnost platí, právě když $a = b$, protože $15a^2 + 14ab + 15b^2 > 0$ pro každou dvojici reálných čísel a, b .

V případě a) můžeme postupovat i následovně: Odečtením rovností

$$t_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

dostaneme

$$t_a^2 - t_b^2 = \frac{3}{4}(b^2 - a^2).$$

Na obou stranách poslední rovnice jsou rozdíly druhých mocnin. Převedeme je na součiny a pak využijeme danou rovnost $a + t_a = b + t_b$ upravenou do tvaru $t_a - t_b = b - a$:

$$\begin{aligned} (t_a - t_b)(t_a + t_b) &= \frac{3}{4}(b - a)(b + a), \\ (b - a)(t_a + t_b) &= \frac{3}{4}(b - a)(a + b). \end{aligned}$$

Kdyby bylo $a \neq b$, vyjde $t_a + t_b = \frac{3}{4}(a + b)$; to spolu s rovností $t_a - t_b = b - a$ dává $t_a = \frac{7}{8}b - \frac{1}{8}a$, tedy $t_a < b$, což odporuje tomu, že t_a je přepona a b odvěsna téhož pravoúhlého trojúhelníku (obr. 16). Proto musí platit rovnost $a = b$.

b) Nechtě např. a je přepona (je-li přepona b , stačí strany a, b v následujícím textu navzájem vyměnit). Potom z Thaletovy a Pythagorovy věty plyne

$$t_a = \frac{a}{2}, \quad t_b = \sqrt{c^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2},$$

a rovnost ze zadání má tedy tvar

$$\frac{3a}{2} = b + \sqrt{a^2 - b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Protože přepona a je delší než odvěsna b , tedy $a > b$, jsou následující úpravy ekvivalentní:

$$\begin{aligned} 3a - 2b &= \sqrt{4a^2 - 3b^2}, \\ 9a^2 - 12ab + 4b^2 &= 4a^2 - 3b^2, \\ 5a^2 - 12ab + 7b^2 &= 0, \\ (a - b)(5a - 7b) &= 0, \\ 5a - 7b &= 0. \end{aligned}$$

Závěr: Rovnost $a + t_a = b + t_b$ platí pro pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky s odvěsnami $a = b$ a pro pravoúhlé trojúhelníky, které mají strany v poměru $5 : \sqrt{24} : 7$, a přitom nejkratší z nich je (třetí) strana c .

Poznámka. Těžnice obecného trojúhelníku (ať je pravoúhlý či nikoliv) mají stejnou vlastnost jako jeho výšky: ke kratší straně směřuje delší těžnice. Odtud plyne, že rovnost $a + t_b = b + t_a$ platí, právě když $a = b$. [Nerovnosti mezi stranami a, b a mezi částmi těžnic $\frac{2}{3}t_a, \frac{2}{3}t_b$ porovnáme na základě toho, že vrchol C i těžiště T trojúhelníku ABC leží ve stejné polorovině vyřáté osou strany AB .]

B – I – 5

Ze zadání vyplývá, že $a \neq 0, b \neq 0$ (rovnice by nebyly kvadratické) a $a \neq b$ (rovnice by byly totožné, a pokud by měly dva reálné kořeny, byly by oba společné).

Označme x_0 společný kořen obou rovnic, takže

$$ax_0^2 + 2bx_0 + 1 = 0, \quad bx_0^2 + 2ax_0 + 1 = 0.$$

Odečtením obou rovnic dostaneme

$$(a - b)(x_0^2 - 2x_0) = x_0(a - b)(x_0 - 2) = 0.$$

Protože $a \neq b$ a 0 zřejmě kořenem daných rovnic není, musí být společným kořenem číslo $x_0 = 2$. Dosazením do daných rovnic tak dostaneme jedinou podmínku $4a + 4b + 1 = 0$, neboli

$$b = -a - \frac{1}{4}.$$

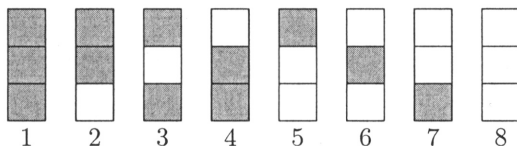
Diskriminant druhé z daných rovnic je pak $4a^2 - 4b = 4a^2 + 4a + 1 = (2a + 1)^2$, takže rovnice má dva různé reálné kořeny pro libovolné $a \neq -\frac{1}{2}$. Podobně diskriminant první z daných rovnic je $4b^2 - 4a = 4b^2 + 4b + 1 = (2b + 1)^2$. Rovnice má tedy dva různé reálné kořeny pro libovolné $b \neq -\frac{1}{2}$ neboli $a \neq \frac{1}{4}$.

Z uvedených předpokladů však zároveň plyne, že musí být $a \neq -\frac{1}{4}$ ($b \neq 0$) a $a \neq -\frac{1}{8}$ ($a \neq b$).

Závěr: Vyhovují všechny dvojice $(a, -a - \frac{1}{4})$, kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{4}\}$.

B – I – 6

Budeme hledat obdélník co nejmenšího obsahu, v němž musí být obsažen pravoúhelník, který má všechna rohová políčka stejné barvy. Šířka 2 nestačí (při libovolné délce by například mohl být jeden celý řádek černý a druhý bílý). Uvažujme tedy obdélník šířky 3. Jeho sloupce mohou být obarveny osmi způsoby (obr. 17):



Obr. 17

Je-li obdélník složen jen ze šesti sloupců 2 až 7, nemá žádný pravoúhelník s rozměry většími než 1 v něm obsažený všechna rohová políčka

téže barvy. Uvedených šest sloupců totiž představuje všechny možnosti, jak obarvit sloupec složený ze tří políček dvěma barvami, aby nebyl jednobarevný (jednobarevné jsou pak zbývající dva sloupce 1 a 8). Kdyby v takovém obdélníku existoval pravoúhelník s rohovými políčky téže barvy, byly by příslušné sloupce stejné.

Má-li však obdélník šířky 3 délku aspoň 7, jsou v něm buď dva stejné sloupce, nebo v něm je některý z jednobarevných sloupců (1 a 8). V případě dvou stejných sloupců je existence pravoúhelníku se stejně obarvenými rohovými políčky zřejmá. Nejsou-li žádné dva sloupce stejné, ale je tam jednobarevný sloupec barvy A, musí v obdélníku být i sloupec, jehož dvě políčka mají barvu A. Tento sloupec a jednobarevný sloupec barvy A vymezují pravoúhelník, jehož všechna rohová políčka mají barvu A.

Daný obdélník 2005×2007 nyní rozdělíme na dvě části 2002×2007 a 3×2007 . Protože $2002 = 7 \cdot 286$, $2007 = 3 \cdot 669$, skládá se první část z $286 \cdot 669$ nepřekrývajících se obdélníků 7×3 . V druhé části je ještě dalších 286 obdélníků 7×3 . Obdélníků 7×3 je tedy celkem $286 \cdot 669 + 286 = 286 \cdot 670 = 191\,620$. V každém z nich je obsažen aspoň jeden pravoúhelník, který má všechna rohová políčka stejné barvy. Pro nejméně polovinu takto nalezených obdélníků, tedy pro alespoň $95\,810$ je pak barva rohových polí stejná.

B – S – 1

Libovolné prvočíslo p lze napsat ve tvaru $p = 30a + z$, kde a je celé nezáporné a z , $1 \leq z \leq 29$, je zbytek při dělení čísla p třiceti (je-li p prvočíslo, můžeme nulový zbytek vyloučit).

Jestliže p je prvočíslo menší než 30, je zřejmě $z = p$ také prvočíslo.

Předpokládejme tedy, že p je prvočíslo větší než 30, takže $a \geq 1$. Pripustíme, že zbytek z není ani číslo 1, ani prvočíslo, a označme q jeho nejmenší prvočíselný dělitel. Zřejmě platí $q^2 \leq z < 30 < 7^2$, odkud $q < 7$ neboli $q \in \{2, 3, 5\}$. Protože číslo 30 je dělitelné dvěma, třemi i pěti, je dělitelné prvočíslem q , takže i číslo $p = 30a + z$ je prvočíslem q dělitelné. Nemůže to tudíž být prvočíslo.

Jiné řešení. Vyjádřeme číslo p ve tvaru $p = 30a + z$. Kdyby bylo zbytkem z některé z čísel 0, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, bylo by p sudé a přitom větší než 2, takže by nebylo prvočíslem. Kdyby bylo zbytkem některé z čísel 9, 15, 21, 27, bylo by p dělitelné třemi a přitom větší než 3 a nemohlo by být prvočíslem. Konečně při zbytku 25 by bylo p dělitelné pěti a přitom větší než 5, takže ani pak by to nebylo prvočíslo.

Stručněji řečeno: Protože každé složené číslo menší než 30 je soudělné s 30, je zbytkem prvočísla p při dělení třiceti jednotka nebo prvočísla.

B – S – 2

Je-li x_0 společný kořen obou rovnic, platí

$$x_0^2 + (3a + b)x_0 + 4a = 0, \quad x_0^2 + (3b + a)x_0 + 4b = 0.$$

Odečtením těchto rovností dostaneme $(2a - 2b)x_0 + 4(a - b) = 0$, což po úpravě dává $(a - b)(x_0 + 2) = 0$.

Rozebereme dvě možnosti:

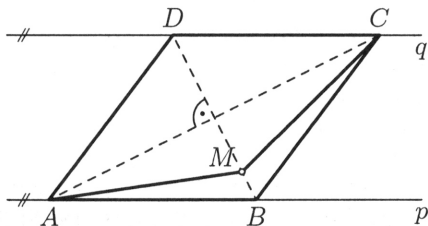
Číslo $x_0 = -2$ je společným kořenem obou rovnic, dosazením do kterékoli z nich dostaneme $4 - 2a - 2b = 0$, tedy $b = 2 - a$. Pro takové b mají obě rovnice při libovolné hodnotě parametru a společný kořen -2 .

Jestliže $a = b$, mají obě dané rovnice stejný tvar $x^2 + 4ax + 4a = 0$. Aspoň jeden kořen (samozřejmě společný) existuje, právě když je diskriminant $16a^2 - 16a$ nezáporný, tedy právě když $a \notin (0, 1)$.

Závěr: Dané rovnice mají aspoň jeden společný kořen pro všechny dvojice tvaru $(a, 2 - a)$, kde a je libovolné, a pro všechny dvojice (a, a) , kde $a \notin (0, 1)$.

B – S – 3

Ze shodnosti trojúhelníků ABM a CBM (*sus*) vyplývá $|CM| = |AM|$; bod C proto musí ležet na kružnici se středem M a poloměrem $|AM|$ (obr. 18). Úhlopříčky (koso)čtverce jsou na sebe kolmé, proto body B a D leží na kolmici vedené bodem M na přímku AC .



Obr. 18

Konstrukce: Sestrojíme kružnici k se středem M a poloměrem $|AM|$. Průsečík této kružnice s přímkou q je bod C . Bodem M vedeme kolmici

Diskuse: Je-li vzdálenost bodu M od přímky q větší než jeho vzdálenost od bodu A , nemá kružnice k s přímkou q společný bod a úloha nemá řešení.

Má-li bod M stejnou vzdálenost od přímky q jako od bodu A , má kružnice k s přímkou q jediný společný bod C . Pokud zároveň bod M neleží na ose pásu mezi rovnoběžkami p a q , není přímka AC kolmá na p , proto kolmice vedená bodem M na přímku AC není s přímkou p rovnoběžná a úloha má jedno řešení; pokud ale bod M leží na ose pásu (je to tedy průsečík osy pásu s kolmicí k přímce p vedenou bodem A), nemá úloha řešení.

Je-li vzdálenost bodu M od přímky q menší než jeho vzdálenost od bodu A , protíná kružnice k přímku q ve dvou bodech. Pokud bod M leží na ose pásu mezi rovnoběžkami p a q , leží jeden z průsečíků na kolmici vedené bodem A na přímku p a úloha má jedno řešení; neleží-li M na ose pásu, má úloha dvě řešení.

Jiné řešení. Průsečík S úhlopříček (koso)čtverce $ABCD$ musí ležet na ose pásu mezi rovnoběžkami p a q .

Leží-li bod M na ose pásu, musí platit $S = M$; bod C je potom průsečík přímek AS a q , B a D jsou průsečíky kolmice k přímce AC vedené bodem M s přímkami p a q . Je-li přitom $AM \perp p$, nemá úloha řešení, jinak má jedno řešení.

Neleží-li M na ose pásu, je úhel ASM pravý. Proto je bod S průsečíkem osy pásu s Thaletovou kružnicí nad průměrem AM . Body C , B , D potom najdeme stejně jako v předchozím řešení. Podle počtu společných bodů osy pásu a Thaletovy kružnice má potom úloha dvě řešení, jedno řešení nebo nemá žádné řešení.

Jiné řešení. Bod M leží na ose úhlu ADC , proto má od přímek AD a q stejnou vzdálenost. Přímka AD je tedy tečnou kružnice, která má střed M a dotýká se přímky q .

Konstrukce: Sestrojíme kružnici h se středem M , která se dotýká přímky q . Vrchol D hledaného (koso)čtverce je průsečík přímky q s tečnou kružnice h procházející bodem A . Body B a C potom už najdeme snadno.

Diskuse: Má-li bod M od bodu A menší vzdálenost než od přímky q , neprochází bodem A žádná tečna kružnice h a úloha nemá řešení.

Má-li bod M od bodu A stejnou vzdálenost jako od přímky q , leží bod A na kružnici h a prochází jím jedna tečna této kružnice. Pokud přitom bod M leží na ose pásu mezi rovnoběžkami p a q , je touto tečnou přímka p , která přímku q neprotíná, a úloha nemá řešení. Pokud ale bod M na ose pásu neleží, tečna je s přímkou q různoběžná a úloha má jedno řešení.

Má-li bod M od bodu A větší vzdálenost než od přímky q , existují dvě tečny kružnice h procházející bodem A . Pokud přitom bod M leží na ose pásu, je jednou z tečen přímka p a úloha má jedno řešení; pokud bod M na ose pásu neleží, jsou obě tečny s q různoběžné a úloha má dvě řešení.

B – II – 1

Odečtením obou daných rovnic dostaneme rovnost $(b - a)x + a - b = 0$ neboli $(b - a)(x - 1) = 0$, odtud plyne $b = a$ nebo $x = 1$.

Jestliže $b = a$, mají obě rovnice tvar $x^2 - ax - a = 0$. Právě jedno řešení existuje, právě když je diskriminant $a^2 + 4a$ nulový. To platí pro $a = 0$ a pro $a = -4$. Protože $b = a$, má součet $a + b$ v prvním případě hodnotu 0 a ve druhém případě hodnotu -8 .

Jestliže $x = 1$, dostaneme z daných rovnic $a + b = 1$, tedy $b = 1 - a$. Rovnice potom mají tvar

$$x^2 - ax + a - 1 = 0 \quad \text{a} \quad x^2 + (a - 1)x - a = 0.$$

První má kořeny 1 a $a - 1$, druhá kořeny 1 a $-a$. Právě jedno společné řešení tak dostaneme vždy s výjimkou případu, kdy $a - 1 = -a$ neboli $a = \frac{1}{2}$, kdy jsou společná řešení dvě.

Závěr. Nejmenší hodnota součtu $a + b$ je -8 a je dosažena pro $a = b = -4$. Největší hodnota součtu $a + b$ je 1 ; této hodnoty je dosaženo pro všechny dvojice $(a, 1 - a)$, kde $a \neq \frac{1}{2}$ je libovolné reálné číslo.

B – II – 2

Z vyjádření výšek pomocí úhlu γ , tj. $v_a = b \sin \gamma$ a $v_b = a \sin \gamma$, dostaneme dosazením do předpokládaného vztahu rovnost $a + 2b \sin \gamma = b + 2a \sin \gamma$, která platí, právě když $(a - b)(1 - 2 \sin \gamma) = 0$.

Jestliže $a = b$, vychází $\beta = \alpha = 20^\circ$, takže $\gamma = 140^\circ$.

Jinak musí být $\sin \gamma = \frac{1}{2}$, takže $\gamma = 30^\circ$ nebo $\gamma = 150^\circ$; úhel β v obou případech dopočítáme jako $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$.

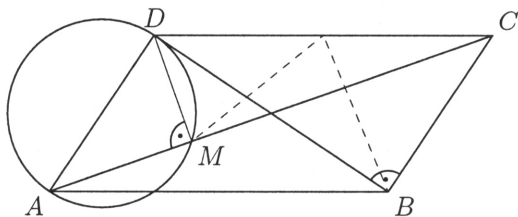
Úloha má tři řešení: $\beta = 20^\circ$ a $\gamma = 140^\circ$, $\beta = 130^\circ$ a $\gamma = 30^\circ$, $\beta = 10^\circ$ a $\gamma = 150^\circ$.

Jiné řešení. Dvojným vyjádřením obsahu trojúhelníku ABC dostaneme rovnost $av_a = bv_b$. Hodnoty ve dvojicích a , $2v_a$ a b , $2v_b$ mají tedy stejné součiny a podle zadání i stejné součty, takže to jsou dvojice kořenů téže kvadratické rovnice, proto $\{a, 2v_a\} = \{b, 2v_b\}$. V případě $v_a = v_b$ je $a = b$, a tedy $\alpha = \beta$, případ $a = 2v_b$ nastane, právě když má γ velikost 30 nebo 150 stupňů.

Poznámka. Úvahu o zmíněné kvadratické rovnici lze samozřejmě nahradit i přímým dosazením $b = a + 2v_a - 2v_b$ do rovnosti $av_a = bv_b$; po úpravě vyjde $(a - 2v_b)(v_a - v_b) = 0$.

B – II – 3

Podle Thaletovy věty je úhel AMD pravý, proto je i úhel DMC pravý (obr. 20). Strany BC a AD jsou rovnoběžné, proto je úhlopříčka BD kolmá i ke straně BC . Body M a B tedy leží na Thaletově kružnici s průměrem CD . Mají proto od středu úsečky CD stejnou vzdálenost, takže zmiňovaný střed leží na ose úsečky MB .



Obr. 20

a) Turnaj se skládá z devíti kol. Má-li každé družstvo jiný počet bodů, musí mít první v tabulce aspoň o 9 bodů víc než poslední. Na zisk devíti bodů je nezbytné sehrát aspoň pět zápasů; to znamená, že už muselo proběhnout aspoň 5 kol, takže do konce turnaje zbývají nejvýše čtyři kola. V nich může poslední v tabulce získat maximálně 8 bodů, a prvního už nemůže dostihnout.

b) V turnaji proběhne 11 kol (každé družstvo desetkrát hraje a jednou má volno). Má-li každé družstvo jiný počet bodů, muselo už být uděleno aspoň $0 + 1 + 2 + \dots + 10 = 55$ bodů. V jednom kole se odehraje 5 zápasů, takže se rozdělí $5 \cdot 2 = 10$ bodů. Proto už muselo být odehráno aspoň 6 kol a do konce jich zbývá nejvýše pět.

Kdyby byl mezi některými sousedy v tabulce větší rozdíl než jednobodový, měl by první aspoň o 11 bodů víc než poslední a ve zbývajících nejvýše pěti kolech by jím nemohl být dostižen. Pripusťme tedy, že rozdíly mezi sousedy v tabulce jsou pouze jednobodové. Má-li poslední b bodů (zřejmě $0 \leq b < 11$), je celkový počet udělených bodů $b + (b + 1) + (b + 2) + \dots + (b + 10) = 11b + 55$. K tomu bylo potřeba odehrát $k = \frac{1}{10}(11b + 55) = b + 5 + \frac{1}{10}(b + 5)$ kol. Počet odehraných kol je celé číslo, proto $10 \mid b + 5$. Odtud vyplývá $b = 5$, a tedy $k = 11$. To znamená, že jsou odehrána všechna kola a poslední místo v tabulce je definitivní.

Jiné řešení části b). Stejně jako v prvním řešení dokážeme, že už muselo proběhnout aspoň 6 kol. Mezi prvním a posledním v tabulce je aspoň desetibodový rozdíl. Kdyby proběhlo kol aspoň 7, zbývala by do konce nejvýš 4 kola a v nich by nemohl poslední nejméně desetibodový náskok prvního vyrovnat. Předpokládejme tedy, že proběhlo přesně 6 kol, takže bylo rozděleno právě 60 bodů. Kdyby měl poslední v tabulce aspoň jeden bod, byl by celkový počet udělených bodů alespoň $1 + 2 + 3 + \dots + 11 = 66 > 60$. Poslední tedy musel být bez bodu. Potom ale první musel mít více než 10 bodů, protože v opačném případě by byl bodový zisk všech družstev $0 + 1 + 2 + \dots + 10 = 55 < 60$. Měl tedy první před posledním aspoň jedenáctibodový náskok, který už poslední ve zbývajících pěti kolech nemůže vyrovnat.

Kategorie A

Texty úloh

A – I – 1

Najděte všechny trojice reálných čísel a, b, c s vlastností: Každá z rovnic

$$x^3 + (a + 1)x^2 + (b + 3)x + (c + 2) = 0,$$

$$x^3 + (a + 2)x^2 + (b + 1)x + (c + 3) = 0,$$

$$x^3 + (a + 3)x^2 + (b + 2)x + (c + 1) = 0$$

má v oboru reálných čísel tři různé kořeny, celkem je to však pouze pět různých čísel. (Jaromír Šimša)

A – I – 2

V rovině je dána úsečka AV a ostrý úhel velikosti α . Určete množinu středů kružnic opsaných všem těm trojúhelníkům ABC s vnitřním úhlem α při vrcholu A , jejichž výšky se protínají v bodě V . (Pavel Leischner)

A – I – 3

Množinu M tvoří $2n$ různých kladných reálných čísel, kde $n \geq 2$. Uvažujme n obdélníků, jejichž rozměry jsou čísla z M , přičemž každý prvek z M je použit právě jednou. Určete, jaké rozměry mají tyto obdélníky, je-li součet jejich obsahů

a) největší možný; b) nejmenší možný. (Jaroslav Švrček)

A – I – 4

Určete počet konečných rostoucích posloupností přirozených čísel $a_1, a_2, \dots, a_k$ všech možných délek k , pro které platí $a_1 = 1, a_i \mid a_{i+1}$ pro $i = 1, 2, \dots, k - 1$ a $a_k = 969\,969$. (Martin Panák)

A – I – 5

Je dána kružnice k , bod O , který na ní neleží, a přímka p , která ji neprotíná. Uvažujme libovolnou kružnici l , která má vnější dotyk s kružnicí k a dotýká se i přímky p . Příslušné body dotyku označme A a B . Pokud body O , A , B neleží v přímce, sestrojíme kružnici m opsanou trojúhelníku OAB . Dokažte, že všechny takové kružnice m procházejí společným bodem různým od bodu O , anebo se dotýkají téže přímky.

(Ján Mazák)

A – I – 6

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n existuje celé číslo a , $1 < a < 5^n$, takové, že platí $5^n \mid a^3 - a + 1$.

(Ján Mazák)

A – S – 1

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 - y = z^2,$$

$$y^2 - z = x^2,$$

$$z^2 - x = y^2.$$

(Ján Mazák)

A – S – 2

Podstavy hranolu tvoří dva shodné konvexní n -úhelníky. Počet v vrcholů tohoto tělesa, počet s jeho stěnových úhlopříček a počet t jeho tělesových úhlopříček tvoří v jistém pořadí první tři členy aritmetické posloupnosti. Pro která n to platí? (Poznámka: Stěnami hranolu rozumíme boční stěny i podstavy. Tělesová úhlopříčka je úsečka, jež spojuje dva vrcholy hranolu, které neleží v téže stěně.)

(Vojtech Bálint)

A – S – 3

V rovině je dán úhel $XS Y$ a kružnice k o středu S . Uvažujme libovolný trojúhelník ABC s vepsanou kružnicí k , jehož vrcholy A a B leží po řadě na polopřímkách SX a SY . Určete množinu vrcholů C všech takových trojúhelníků ABC .

(Jaromír Šimša)

A – II – 1

Nechť n je dané přirozené číslo větší než 1. Najděte všechny dvojice celých čísel s a t , pro které rovnice

$$x^n + sx - 2007 = 0, \quad x^n + tx - 2008 = 0$$

mají v oboru reálných čísel aspoň jeden společný kořen.

(Jaromír Šimša)

A – II – 2

V rovině jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 o různých poloměrech, které mají vnější dotyk v bodě T . Uvažujme libovolné dva body $A \in k_1$ a $B \in k_2$, oba různé od bodu T a vybrané tak, že úhel ATB je pravý.

- Dokažte, že všechny uvažované přímký AB procházejí týmž bodem.
- Najděte množinu středů všech takových úseček AB . (Ján Mazák)

A – II – 3

Pole tabulky $n \times n$, kde $n \geq 3$, jsou střídavě černá a bílá jako na obyčejné šachovnici, přičemž pole v levém horním rohu je černé. Bílá pole budeme barvit načerno následujícím postupem. V jednom kroku vybereme libovolný obdélník 2×3 nebo 3×2 , ve kterém jsou ještě tři bílá pole, a tato tři pole začerníme. Pro která n můžeme po určitém počtu kroků začernit celou tabulku?

(Peter Novotný)

A – II – 4

Nechť M je libovolný vnitřní bod polokružnice k se středem S a průměrem AB . Označme k_A kružnici vepsanou kruhové výseči ASM a k_B kružnici vepsanou kruhové výseči BSM . Dokažte, že kružnice k_A a k_B leží v opačných polorovinách vyřatých některou přímkou kolmou k úsečce AB . (Kružnice vepsaná kruhové výseči se dotýká obou ramen i hraničního oblouku.)

(Jaroslav Švrček)

A – III – 1

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x + y^2 &= y^3, \\ y + x^2 &= x^3.\end{aligned}$$

(Jaroslav Švrček)

A – III – 2

Jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$, přičemž $|S_1S_2| > r_1 + r_2$. Uvažujme libovolný trojúhelník ABC s vrcholem A na kružnici k_1 a vrcholy B, C na kružnici k_2 zvolenými tak, že obě přímky AB, AC jsou tečnami kružnice k_2 . Najděte

a) množinu středů kružnic vepsaných,

b) množinu průsečíků výšek

všech takových trojúhelníků ABC .

(Tomáš Jurík)

A – III – 3

Zjistěte, pro která celá kladná čísla a, b je hodnota podílu

$$\frac{b^2 + ab + a + b - 1}{a^2 + ab + 1}$$

rovna celému číslu.

(Martin Panák)

A – III – 4

Rovnost

$$2008 = 1111 + 666 + 99 + 88 + 44$$

je rozkladem čísla 2008 na součet několika navzájem různých vícemístných čísel, z nichž každé je zapsáno stejnými číslicemi. Najděte

a) aspoň jeden takový rozklad čísla 8002,

b) všechny takové rozklady čísla 8002, které mají co nejmenší počet sčítanců (na jejich pořadí nebereme zřetel).

(Jaromír Šimša)

A – III – 5

Karel v jistý okamžik na svých přesně jdoucích hodinkách zjistil, že konec velké ručičky, konec malé ručičky a vhodný bod na kružnici ciferníku tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku. Než tento jev nastal podruhé, uplynula doba t . Najděte největší možné t pro dané hodinky v závislosti na poměru k délek obou ručiček ($k > 1$), když poloměr kružnice ciferníku je shodný s délkou velké ručičky.

(Jaromír Šimša)

A – III – 6

Určete největší reálné číslo p a nejmenší reálné číslo q , pro něž nerovnosti

$$p < \frac{a + t_b}{b + t_a} < q$$

platí v libovolném trojúhelníku ABC se stranami a, b a těžnicemi t_a, t_b .

(Pavel Novotný)

Řešení úloh

A – I – 1

Předpokládejme, že čísla a , b , c mají požadovanou vlastnost. Všimneme si nejdříve, že každé dvě z daných rovnic musejí mít společný kořen, jinak by měly dohromady šest různých kořenů.

Společné kořeny dvou z daných tří kubických rovnic, které pro potřeby řešení očíslovujeme (1), (2) a (3), jsou kořeny kvadratických rovnic, které dostaneme jejich odečtením. Vypišme všechny tři „rozdílové“ rovnice, které nezávisejí na parametrech a , b , c (to je řešitelsky pozitivní zjištění), a rozložme rovnou jejich levé strany na kořenové činitele:

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0, \quad (2)-(1)$$

$$2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1) = 0, \quad (3)-(1)$$

$$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2) = 0. \quad (3)-(2)$$

Vidíme, že rovnice (1) a (2) mají jediný společný kořen $x = 1$, takže mají dohromady právě pět různých kořenů. Proto musí být každý z kořenů rovnice (3) kořenem aspoň jedné z rovnic (1) nebo (2). Z uvedených rozkladů plyne, že číslo $x = 1$ je rovněž kořenem rovnice (3).

Vysvětleme, proč ostatní dva kořeny rovnice (3) nemohou být zároveň i kořeny jedné z rovnic (1) nebo (2). V opačném případě by jedna z rovnic (1), (2) měla s rovnicí (3) stejnou trojici kořenů, a proto by musely mít stejné koeficienty nejen u kubického členu. To však neplatí, neboť pro libovolnou hodnotu parametru c jsou čísla $c + 1$, $c + 2$, $c + 3$ (tj. absolutní členy rovnic) vesměs různá.

Rovnice (3) má tedy kromě kořenu $x = 1$ ještě jeden společný kořen s rovnicí (1) a jeden společný kořen s rovnicí (2); podle rozkladů (3)–(1) a (3)–(2) vidíme, že se jedná o čísla $x = -\frac{1}{2}$ a $x = -2$. Levá strana rovnice (3) má proto rozklad

$$(x - 1)(x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1.$$

Odtud porovnáním s koeficienty zapsanými v (3) již dostaneme $a = -\frac{3}{2}$, $b = -\frac{7}{2}$, $c = -2$.

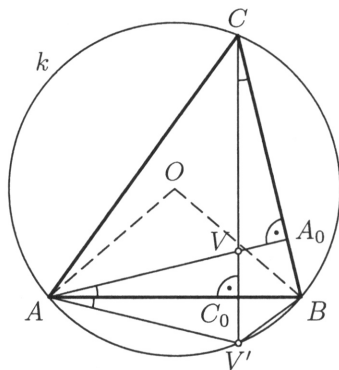
Z našeho postupu plyne, že pro nalezené hodnoty a , b , c má rovnice (3) trojici kořenů 1 , $-\frac{1}{2}$ a -2 , že čísla 1 , $-\frac{1}{2}$ jsou kořeny rovnice (1) a že čísla 1 , -2 jsou kořeny rovnice (2). Musíme se ještě přesvědčit, že třetí kořeny

rovnice (1) a (2) jsou další dvě (různá) čísla. Tyto třetí kořeny můžeme výhodně najít pomocí Viětových vztahů. Protože součin tří kořenů rovnice (1) je číslo opačné k absolutnímu členu $c + 2$ rovnému nule, je číslo nula třetí kořen rovnice (1). Podobně součin tří kořenů rovnice (2) je roven -1 , takže třetí kořen je číslo $x = \frac{1}{2}$.

Závěr. Jediným řešením úlohy jsou čísla $a = -\frac{3}{2}$, $b = -\frac{7}{2}$, $c = -2$.

A – I – 2

Nejprve dokažme jedno obecně užitečné tvrzení o průsečíku V výšek libovolného ostroúhlého trojúhelníku ABC . Označme V' průsečík přímky obsahující výšku CC_0 s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC (obr. 21). Pravoúhlé trojúhelníky C_0VA a A_0VC jsou podobné (shodují se ještě



Obr. 21

v úhlu při vrcholu V), proto $|\sphericalangle BAA_0| = |\sphericalangle BCC_0|$. Úhly BCC_0 a $V'AB$ jsou shodné obvodové úhly nad obloukem $V'B$, takže body V a V' jsou *souměrně sdruženy podle přímky AB* .

Označíme-li úhly v trojúhelníku ABC obvyklým způsobem, bude $|\sphericalangle ACV'| = |\sphericalangle ACC_0| = 90^\circ - \alpha$, takže pro délku úsečky AV díky uvedené souměrnosti dostaneme

$$|AV| = |AV'| = 2r \sin(90^\circ - \alpha) = 2r \cos \alpha, \quad (1)$$

kde r je velikost poloměru kružnice k opsané trojúhelníku ABC (a zároveň i trojúhelníku $AV'C$). Stejný vzorec (1) platí pro trojúhelník ABC s ostrým vnitřním úhlem α při vrcholu A i v případě, kdy jeden z ostatních dvou vnitřních úhlů (např. u vrcholu B) je pravý nebo tupý (obr. 22). Celou úvahu můžeme zopakovat slovo od slova.

A – I – 3

Věnujme se nejdříve nejjednodušší situaci, kdy $n = 2$. Danou množinu M tak tvoří čtyři kladná čísla, která označíme podle velikosti

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4.$$

Máme pouze tři možnosti, jak požadovaným způsobem sestavit dvojici obdélníků. Vypíšeme na třech řádcích jejich rozměry:

$$a_1 \times a_2 \quad a \quad a_3 \times a_4,$$

$$a_1 \times a_3 \quad a \quad a_2 \times a_4,$$

$$a_1 \times a_4 \quad a \quad a_2 \times a_3,$$

a ukažme, že součty obsahů těchto obdélníků jsou v uvedeném pořadí klesající, tj. že platí

$$a_1 a_2 + a_3 a_4 > a_1 a_3 + a_2 a_4 > a_1 a_4 + a_2 a_3. \quad (1)$$

Místo dvou snadných důkazů (provedte sami) poznamenejme, že obě nerovnosti jsou téhož typu a lze je zdůvodnit obecným pravidlem

$$a < b, \quad c < d \implies ac + bd > ad + bc, \quad (2)$$

jež platí pro libovolnou čtveřici reálných čísel a, b, c, d díky rovnosti

$$(ac + bd) - (ad + bc) = (b - a)(d - c).$$

Skutečně, levou nerovnost z (1) dostaneme z pravidla (2) volbou

$$a = a_1, \quad b = a_4, \quad c = a_2, \quad d = a_3 \quad (\text{platí } a_1 < a_4 \text{ a } a_2 < a_3),$$

pravou nerovnost pak volbou

$$a = a_1, \quad b = a_2, \quad c = a_3, \quad d = a_4 \quad (\text{platí } a_1 < a_2 \text{ a } a_3 < a_4).$$

Tím je úloha v případě $n = 2$ vyřešena. Tato zkušenost nás jistě přivede k odhadu výsledku pro obecné $n \geq 2$:

Jsou-li $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n}$ prvky dané množiny M , pak největší sumární obsah má jediná n -tice obdélníků s rozměry $a_1 \times a_2, a_3 \times a_4, \dots, a_{2n-1} \times a_{2n}$; nejmenší sumární obsah má jediná n -tice obdélníků s rozměry $a_1 \times a_{2n}, a_2 \times a_{2n-1}, \dots, a_n \times a_{n+1}$.

K důkazu prvního závěru předpokládejme, že vyhovující n -tice obdélníků je sestavena tak, že čísla a_1, a_2 nejsou rozměry téhož obdélníku. Pak v takové n -tici jsou obdélníky $a_1 \times a_i$ a $a_2 \times a_j$, kde $i, j > 2$. Zaměňme je obdélníky $a_1 \times a_2$ a $a_i \times a_j$. Dostaneme (jinou) vyhovující n -tici obdélníků, která bude mít oproti původní n -tici větší sumární obsah, neboť platí

$$a_1 a_2 + a_i a_j > a_1 a_i + a_2 a_j,$$

a to opět díky pravidlu (2) pro čísla $a_1 < a_j$ a $a_2 < a_i$. Z této úvahy plyne: největší sumární obsah může mít jen taková n -tice uvažovaných obdélníků, mezi nimiž je obdélník $a_1 \times a_2$. Tento obdélník můžeme tedy dát stranou a uvažovat úlohu o nejmenším obsahu pro redukovanou množinu M' o $2n - 2$ prvcích $a_3 < a_4 < \dots < a_{2n}$. Opakováním předchozího postupu vytvoříme obdélník $a_3 \times a_4$ a provedeme další redukci množiny atd. (formálně můžeme využít matematickou indukci). Hypotéza o soustavě obdélníků s největším sumárním obsahem je tak dokázána.

Zcela obdobně dokážeme závěr o soustavě s nejmenším sumárním obsahem. Nejsou-li a_1, a_{2n} rozměry téhož obdélníku, jsou mezi uvažovanými obdélníky $a_1 \times a_i$ a $a_j \times a_{2n}$ (kde $1 < i, j < 2n$), které zaměníme obdélníky $a_1 \times a_{2n}$ a $a_i \times a_j$, čímž se sumární obsah obdélníků zmenší, neboť platí

$$a_1 a_i + a_j a_{2n} > a_1 a_{2n} + a_i a_j.$$

podle pravidla (2) pro čísla $a_1 < a_j$ a $a_i < a_{2n}$. Nejmenší sumární obsah proto může mít jen taková vyhovující n -tice obdélníků, mezi nimiž je obdélník $a_1 \times a_{2n}$. Tento obdélník dáme stranou a uvažujeme úlohu o nejmenším obsahu pro redukovanou množinu M' o $2n - 2$ prvcích $a_2 < a_3 < \dots < a_{2n-1}$. Vše ostatní je už zbytečné opakovat.

A - I - 4

Ze zadání úlohy plyne, že všechny členy uvažovaných posloupností budou děliteli jejich posledního členu, rovnému číslu 969 969. Najdeme proto nejprve rozklad tohoto čísla na prvočinitele:

$$969\,969 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19. \quad (1)$$

Nyní již snadno můžeme vytvářet příklady vyhovujících posloupností různých délek. Vypišme kupříkladu tu nejkratší, jednu z nejdelších a ještě

jednu další:

$$(a_1, a_2) = (1, 969\,969),$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = (1, 13, 91, 1\,729, 5\,187, 57\,057, 969\,969),$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 21, 4\,641, 88\,179, 969\,969).$$

(Zkontrolujte uvedené příklady výpočtem podílů a_{i+1}/a_i pro všechna přípustná i).

Experimentováním s konkrétními posloupnostmi dojdeme k poznání jejich společných vlastností, které je plně charakterizují:

Libovolný člen a_i každé vyhovující posloupnosti $a_1, a_2, \dots, a_k$ je součinem několika (v případě $i = 1$ žádného, v případě $i = k$ všech) z šesti různých prvočísel z rozkladu (1), přitom (v případě $i < k$) člen a_{i+1} má kromě všech činitelů členu a_i ještě alespoň jednoho nového činitele navíc (posloupnost má být rostoucí!). Naopak, každá taková konečná posloupnost je vyhovující.

Z uvedeného vyplývá způsob, jak „úsporně“ zadat každou vyhovující posloupnost; stačí jen uvést, jak se noví činitelé postupně objevují, tj. zadat posloupnost podílů

$$\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \frac{a_4}{a_3}, \dots, \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}}, \frac{a_k}{a_{k-1}}, \quad (2)$$

do jejichž rozkladů na prvočinitele je šest prvočísel z (1) rozděleno (v každém aspoň jedno). Proto je hledaný počet vyhovujících posloupností roven počtu rozdělení šesti daných prvočísel do jedné nebo několika *očíslovaných* neprázdných skupin (odpovídajících prvočinitelům podílů (2), takže na pořadí prvočísel ve skupině nezáleží). Slovo „očíslovaných“ znamená, že na pořadí skupin záleží. Například pro rozdělení do dvou skupin $\{3, 11, 19\}$, $\{7, 13, 17\}$ dostaneme podle toho, v jakém pořadí obě skupiny vezmeme, dvě vyhovující posloupnosti $(1, u, uv)$ a $(1, v, uv)$, kde $u = 3 \cdot 11 \cdot 19$ a $v = 7 \cdot 13 \cdot 17$.

Dospěli jsme tak ke kombinatorické úloze určení hodnoty $P(6)$, kde $P(n)$ značí počet rozdělení n -prvkové množiny X do libovolného počtu očíslovaných neprázdných podmnožin $X_1, X_2, X_3, \dots$. Není schůdné hodnotu $P(6)$ vypočítat *přímo*, zato bude možné hodnoty $P(n)$ počítat *postupně* pro $n = 1$, $n = 2$, atd. až po potřebné $n = 6$. Takovému způsobu výpočtu říkáme *rekurentní*. V naší úloze bude výpočet založen na rekurentní rovnici

$$P(n) = \binom{n}{1}P(n-1) + \binom{n}{2}P(n-2) + \dots + \binom{n}{n-1}P(1) + 1 \quad (3)$$

platné pro každé $n \geq 2$, jak nyní ukážeme.

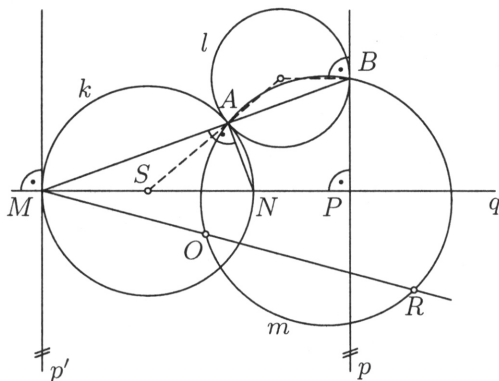
Všechna uvažovaná rozdělení n -prvkové množiny X rozdělíme do n skupin podle počtu j prvků první podmnožiny X_1 ($1 \leq j \leq n$). První podmnožinu X_1 o j prvcích lze vybrat právě $\binom{n}{j}$ způsoby, právě $P(n-j)$ způsoby pak lze zbylou množinu $X' = X \setminus X_1$ rozdělit na neprázdné očíslované podmnožiny $X_2, X_3, X_4, \dots$ (Platí to i v případě $j = n$, když položíme $P(0) = 1$, neboť už není co rozdělovat.) Podle pravidla součinu je proto počet všech rozdělení původní množiny X s první množinou X_1 o j prvcích roven $\binom{n}{j} P(n-j)$. Tím je vzorec (3), na jehož pravé straně poslední člen 1 odpovídá hodnotě $j = n$, dokázán.

Ze zřejmé hodnoty $P(1) = 1$ opakovaným užitím vzorce (3) vypočteme další hodnoty $P(2) = 3$, $P(3) = 13$, $P(4) = 75$, $P(5) = 541$ a $P(6) = 4683$.

Závěr. Existuje právě 4683 vyhovujících posloupností.

A - I - 5

Jedna z vyhovujících kružnic l je znázorněna na obr. 24. Bod A vnějšího dotyku kružnic k, l je jejich (vnitřním) středem stejnolehlosti, v níž tečny p kružnice l odpovídá s ní rovnoběžná tečna p' kružnice k . Její bod dotyku M s kružnicí k leží na ose q kružnice k , která je kolmá na přímkou p . Přitom ze dvou průsečíků M, N přímky q s kružnicí k je bod M ten vzdálenější od přímky p , neboť úsečka spojující stejnohlé body dotyku M a B protíná kružnici k v bodě A (středů příslušné stejnolehlosti).



Obr. 24

Bod M tedy na volbě kružnice l nezávisí. Body $A \in k$ a $B \in p$ pochopitelně ano, ukažme však, že jejich vzájemná poloha na polopřímce s počátkem M je vázána podmínkou

$$|MA| \cdot |MB| = |MN| \cdot |MP|, \quad (1)$$

kde P je průsečík kolmic p a q . To jednoduše plyne z podobnosti

$$|MA| : |MN| = |MP| : |MB|$$

pravoúhlých trojúhelníků AMN , PMB . Vztah (1) lze rovněž zdůvodnit pomocí mocnosti bodu M ke kružnici sestrojené nad průměrem NB (jež prochází body P , A podle Thaletovy věty).

Teprve nyní vstoupí do našich úvah daný bod O . Na obr. 24 je kružnice l vybrána tak, že odpovídající přímka AB bodem O neprochází, takže existuje kružnice m opsaná trojúhelníku OAB . Podle zadání platí $O \notin k$, a tedy $O \neq M$, takže je určena polopřímka MO , která kromě bodu O bude mít s kružnicí m společný ještě jeden bod, který označíme R (v případě, kdy MO je tečna kružnice m , položíme $R = O$).¹ Dvojným vyjádřením mocnosti bodu M ke kružnici m pak dostaneme

$$|MA| \cdot |MB| = |MO| \cdot |MR|,$$

odkud porovnáním s (1) zjistíme, že úsečka MR má délku

$$|MR| = \frac{|MN| \cdot |MP|}{|MO|},$$

kteřá zřejmě nezávisí na volbě kružnice l . Protože bod R navíc leží na pevné polopřímce MO , je v případě $|MR| \neq |MO|$ bod R společným bodem všech kružnic m ($R \neq O$), v případě $|MR| = |MO|$ je přímka MO jejich společná tečna. Tím je řešení úlohy u konce.

A – I – 6

Začneme poněkud obsírněji případem $n = 1$. Najdeme *všechna* celá čísla a s vlastností $5 \mid a^3 - a + 1$. Nejprve sestavíme tabulku hodnot $r^3 - r + 1$ pro všechny možné zbytky r při dělení pěti, tedy pro $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$:

r	0	1	2	3	4
$r^3 - r + 1$	1	1	7	25	61

¹ Zdůrazněme, že vzhledem ke vzájemné poloze bodů M , A , B leží bod M ve vnější oblasti *každé* kružnice procházející body A , B , tedy i kružnice m . Polopřímka MO tedy má s kružnicí m , není-li její tečnou, společně skutečně dva různé body.

Pro ostatní celá čísla a už hodnoty $a^3 - a + 1$ počítat nemusíme. Je-li totiž r zbytek čísla a při dělení pěti, tedy $a = 5q + r$ pro vhodné celé q , pak čísla $a^3 - a + 1$ a $r^3 - r + 1$ dávají při dělení pěti stejný zbytek, neboť jejich rozdíl

$$\begin{aligned}(a^3 - a + 1) - (r^3 - r + 1) &= (a^3 - r^3) - (a - r) = \\ &= (a - r)(a^2 + ar + r^2 - 1)\end{aligned}$$

je dělitelný číslem $a - r = 5q$, je tedy násobkem pěti.² Z uvedené tabulky vidíme, že pro celé a platí $5 \mid a^3 - a + 1$, právě když $a = 5q + 3$.

Zadanou úlohu vyřešíme tak, že indukcí vzhledem k číslu n dokážeme existenci celého čísla a_n z intervalu $(1, 5^n)$, jež vyhovuje podmínce, že 5^n dělí $a_n^3 - a_n + 1$. Pro $n = 1$ podle prvního odstavce dokazované tvrzení splňuje (v intervalu $(1, 5)$!) jediné číslo $a_1 = 3$.

V druhém indukčním kroku předpokládejme, že pro některé přirozené k známe číslo a_k z intervalu $(1, 5^k)$ s vlastností $5^k \mid a_k^3 - a_k + 1$, a na základě znalosti a_k sestrojme vyhovující číslo a_{k+1} . Zbytkem čísla $a_k^3 - a_k + 1$ při dělení číslem 5^{k+1} musí být číslo dělitelné 5^k , tedy jedno z čísel

$$0, 5^k, 2 \cdot 5^k, 3 \cdot 5^k, 4 \cdot 5^k.$$

Zapišme proto tento zbytek ve tvaru $r \cdot 5^k$, kde $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, a hledejme číslo a_{k+1} ve tvaru $a_{k+1} = a_k + s \cdot 5^k$ pro vhodné $s \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. (Je ihned jasné, že v případě $r = 0$ můžeme vzít $a_{k+1} = a_k$, tedy $s = 0$). I když hodnotu s vybereme až za chvíli, z podmínky $1 < a_k < 5^k$ a nerovností $a_k \leq a_{k+1} \leq a_k + 4 \cdot 5^k$ už nyní plyne, že podmínka $1 < a_{k+1} < 5^{k+1}$ bude splněna (ať dopadne výběr s jakkoliv). Pro číslo a_{k+1} zvoleného tvaru dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{a_{k+1}^3 - a_{k+1} + 1}{5^{k+1}} &= \frac{(a_k + s \cdot 5^k)^3 - (a_k + s \cdot 5^k) + 1}{5^{k+1}} = \\ &= \frac{a_k^3 + 3a_k^2 s \cdot 5^k + 3a_k s^2 5^{2k} + s^3 5^{3k} - a_k - s \cdot 5^k + 1}{5^{k+1}} = \\ &= 3a_k s^2 5^{k-1} + s^3 5^{2k-1} + \frac{(a_k^3 - a_k + 1) - r \cdot 5^k}{5^{k+1}} + \frac{(3a_k^2 - 1)s + r}{5}.\end{aligned}$$

Hodnota posledního součtu bude celočíselná, budou-li takové oba závěrečné zlomky. První z nich tuto vlastnost má díky tomu, jak jsme

² Stejně snadno se dokáže obecnější užitečný poznatek: pro libovolný mnohočlen F s celočíselnými koeficienty a libovolná celá a, b je rozdíl $F(a) - F(b)$ celočíselným násobkem rozdílu $a - b$.

zavedli číslo $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Proto je zapotřebí jen najít takové $s \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, aby i druhý zlomek byl celočíselný, tedy aby číslo $(3a_k^2 - 1)s + r$ bylo dělitelné pěti. Jistě stačí ukázat, že pět čísel

$$c(s) = (3a_k^2 - 1)s + r, \quad \text{kde } s \in \{0, 1, 2, 3, 4\},$$

dává při dělení pěti navzájem různé zbytky (jeden z nich pak bude nula). Kdyby tomu tak nebylo, platilo by $5 \mid c(s) - c(s')$ pro některá dvě různá $s, s' \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$; z vyjádření

$$c(s) - c(s') = (3a_k^2 - 1)(s - s')$$

bychom pak usoudili, že číslo $3a_k^2 - 1$ je dělitelné pěti. Vztah $5 \mid 3a^2 - 1$ však neplatí pro žádné celé a ; podle úvah z prvního odstavce se stačí o tom přesvědčit pro pět hodnot $a \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$:

a	0	1	2	3	4
$3a^2 - 1$	-1	2	11	26	47

Tím je celý důkaz matematickou indukcí ukončen. Pro zajímavost dodejme, že jsme schopni snadno vysvětlit, že naše číslo $3a_k^2 - 1$ dává při dělení pěti vždy zbytek 1 (takže v případě $r \neq 0$ vyhovuje $s = 5 - r$). Skutečně, vzhledem k tomu, že $k \geq 1$, z podmínky $5^k \mid a_k^3 - a_k + 1$ plyne $5 \mid a_k^3 - a_k + 1$, což je podle prvního odstavce splněno, právě když $a_k = 5k + 3$; číslo $3a_k^2 - 1$ tudíž při dělení pěti dává stejný zbytek jako číslo $3 \cdot 3^2 - 1 = 26$.

A – S – 1

Sečtením všech tří rovnic po zrušení kvadratických členů dostaneme

$$x + y + z = 0. \tag{1}$$

Odtud vyjádříme $z = -x - y$ a dosadíme do první rovnice soustavy. Obdržíme $x^2 - y = (-x - y)^2$, což po úpravě dá rovnici $y(2x + y + 1) = 0$. Rozlišíme proto, který z obou činitelů na její levé straně je roven nule.

V případě $y = 0$ z rovnice (1) obdržíme $z = -x$ a po dosazení y, z do původní soustavy dostaneme pro neznámou x jedinou podmínku $x(x - 1) = 0$, kterou splňuje pouze $x = 0$ a $x = 1$. Jim odpovídají řešení (x, y, z) tvaru $(0, 0, 0)$ a $(1, 0, -1)$.

V případě, kdy $2x + y + 1 = 0$ neboli $y = -2x - 1$, z (1) máme $z = -x - y = x + 1$. Po dosazení y, z do původní soustavy dostaneme pro neznámou x jedinou podmínku $x(x + 1) = 0$, kterou splňují pouze $x = 0$ a $x = -1$. Jim odpovídají řešení (x, y, z) tvaru $(0, -1, 1)$ a $(-1, 1, 0)$.

Závěr: Daná soustava má právě čtyři řešení (x, y, z) : trojice $(0, 0, 0)$, $(1, 0, -1)$, $(0, -1, 1)$ a $(-1, 1, 0)$.

Jiné řešení. Sečtením dvou prvních rovnic dané soustavy eliminujeme neznámou x a dostaneme rovnici $y^2 - z^2 = y + z$, kterou lze zapsat v součinném tvaru

$$(y + z)(y - z - 1) = 0. \quad (2)$$

Rozlišíme opět, který ze dvou činitelů v poslední rovnici se rovná nule.

V případě $y + z = 0$ ze třetí rovnice dané soustavy vyjde $x = 0$ a z prvních dvou rovnic po dosazení $x = 0$ a $z = -y$ dostaneme pro neznámou y jedinou podmínku $y(y + 1) = 0$, tedy $y = 0$ nebo $y = -1$. Odpovídající řešení (x, y, z) jsou $(0, 0, 0)$ a $(0, -1, 1)$.

V případě, kdy $y - z - 1 = 0$ neboli $z = y - 1$, obdržíme ze třetí rovnice soustavy $x = z^2 - y^2 = (y - 1)^2 - y^2 = 1 - 2y$. Dosazením x, z dostaneme pro neznámou y jedinou podmínku $y(y - 1) = 0$, tedy $y = 0$ nebo $y = 1$. Odpovídající řešení (x, y, z) jsou $(1, 0, -1)$ a $(-1, 1, 0)$.

A – S – 2

Každý n -boký hranol má právě n vrcholů v každé ze svých podstav, takže platí $v = 2n$. Z každého vrcholu vychází $n - 3$ úhlopříček ležících v podstavě a dvě úhlopříčky ležící v bočních stěnách, celkem je to $n - 1$ stěnových úhlopříček. Z $2n$ vrcholů tedy vychází $2n(n - 1)$ stěnových úhlopříček, každá z nich je však započítána dvakrát, proto $s = n(n - 1)$. Podobně určíme počet t tělesových úhlopříček: z každého vrcholu jich vychází $n - 3$ (do všech vrcholů druhé podstavy s výjimkou těch tří vrcholů, se kterými je daný vrchol spojen hranou nebo úhlopříčkou v boční stěně), proto $t = 2n(n - 3) : 2 = n(n - 3)$.

Hledáme ta celá $n \geq 3$, pro něž čísla

$$v = 2n, \quad s = n(n - 1) \quad \text{a} \quad t = n(n - 3)$$

tvoří ve vhodném pořadí trojici x, y, z s vlastností $y - x = z - y$ neboli $y = \frac{1}{2}(x + z)$. Snadným dosazením zjistíme, že pro $n = 3$ jde o nevyhovující trojici čísel 6, 6, 0, zatímco pro $n = 4$ vychází vyhovující trojice 8,

12, 4 (platí $8 = \frac{1}{2}(4 + 12)$). Pro libovolné $n \geq 5$ máme $n - 1 > n - 3 \geq 2$, odkud po násobení číslem n dostaneme $s > t \geq v$, takže požadovaná rovnost s aritmetickým průměrem musí být tvaru $t = \frac{1}{2}(v + s)$. Po dosazení dostáváme rovnici

$$n(n - 3) = \frac{2n + n(n - 1)}{2}$$

s jediným přípustným kořenem $n = 7$ (kořen $n = 0$ nemá reálný smysl).

Závěr: Vyhovují jediné $n = 4$ a $n = 7$.

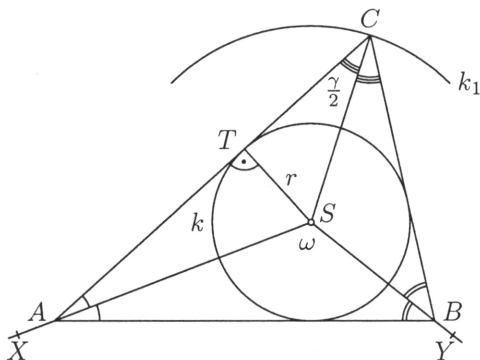
A – S – 3

Označme r poloměr dané kružnice k a ω velikost daného (konvexního) úhlu $XS Y$. V libovolném vyhovujícím trojúhelníku ABC označme obvyklým způsobem vnitřní úhly. V trojúhelníku ABS platí (obr. 25)

$$\omega = |\sphericalangle ASB| = 180^\circ - |\sphericalangle SAB| - |\sphericalangle SBA| = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2},$$

odkud plyne, že hledaná množina je prázdná, pokud $\omega \leq 90^\circ$ nebo $\omega = 180^\circ$, a že všechny vyhovující trojúhelníky ABC mají vnitřní úhel γ , pro jehož velikost platí

$$\gamma = 2\omega - 180^\circ.$$



Obr. 25

Z pravoúhlého trojúhelníku CST , kde T je bod dotyku kružnice k se stranou AC (obr. 25), vyjádříme délku přepony SC vztahem

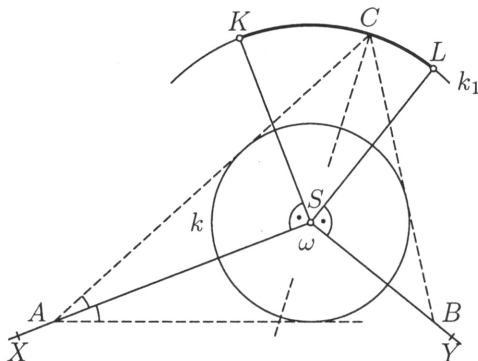
$$|SC| = \frac{|ST|}{\sin \frac{1}{2}\gamma} = \frac{r}{\sin(\omega - 90^\circ)}.$$

Bod C tak leží na kružnici k_1 o středu S a poloměru $r_1 = r / \sin(\omega - 90^\circ)$.

Stejně jako úhel ASB jsou i úhly ASC a BSC (neboli úhly XSC a YSC) tupé, neboť

$$|\sphericalangle ASC| = 90^\circ + \frac{\beta}{2} \quad \text{a} \quad |\sphericalangle BSC| = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}. \quad (1)$$

Dohromady tak dostáváme, že bod C je vnitřním bodem oblouku KL kružnice k_1 , který leží vně daného úhlu $XS Y$ a jehož krajní body K, L jsou určeny pravými úhly XSK a YSL (obr. 26).



Obr. 26

Vybereme-li naopak libovolný vnitřní bod C oblouku KL , polopřímky SX, SY a SC rozdělí rovinu na tři tupé úhly, přičemž polopřímka CS oddělí body X a Y . Z rovnosti $|SC| = r_1$ plyne, že tečna z bodu C ke kružnici k sestřená v polorovině CSX svírá s polopřímkou CS ostrý úhel $\omega - 90^\circ$, takže protne polopřímku SX v bodě, který označíme A . Analogicky tečna z bodu C ke kružnici k sestřená v polorovině CSY protne polopřímku SY v bodě, který označíme B .

Zvolme nyní hodnoty α, β, γ tak, aby $\omega - 90^\circ = \frac{1}{2}\gamma$, $|\sphericalangle CSK| = \frac{1}{2}\beta$, $|\sphericalangle CSL| = \frac{1}{2}\alpha$, potom z plného úhlu u vrcholu S vyplývá

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 180^\circ - \omega = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} \quad \text{neboli} \quad \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Jak snadno spočteme, tečna z nalezeného bodu A ke kružnici k souměrně sdružená s tečnou AC podle přímky SX protíná polopřímku CS pod úhlem $\frac{1}{2}\gamma + \alpha$, a podobně vyjde, že analogická tečna z nalezeného bodu B protne tutéž polopřímku pod úhlem $\frac{1}{2}\gamma + \beta$. Součet obou uvedených úhlů je však 180° , proto jsou obě tečny ke kružnici k rovnoběžné, a tedy totožné (oba příslušné body dotyku musejí totiž ležet uvnitř konvexního úhlu $XS Y$). Nalezený trojúhelník ABC má proto požadované vlastnosti.

A – II – 1

Vyjádřením členu x^n z obou rovnic

$$x^n = 2007 - sx, \quad x^n = 2008 - tx$$

dostaneme po porovnání rovnic $2007 - sx = 2008 - tx$, podle které společný kořen x může existovat jen v případě $s \neq t$ a musí být tvaru $x = 1/(t - s)$. Takové x je skutečně kořenem obou původních rovnic, právě když je kořenem jedné z nich; po dosazení např. do první rovnice dostaneme po úpravě ekvivalentní podmínku

$$(t - s)^{n-1} \cdot (s - 2007(t - s)) = -1.$$

Protože oba činitele na levé straně jsou celá čísla, musí to být čísla 1 a -1 v některém pořadí, takže podle prvního činitele musí rovněž platit $t - s = \pm 1$.

a) Je-li $t - s = 1$, pak nalezená podmínka má tvar $s - 2007(t - s) = -1$. Dvojice rovnic pro neznámé hodnoty s, t

$$t - s = 1, \quad s - 2007(t - s) = -1$$

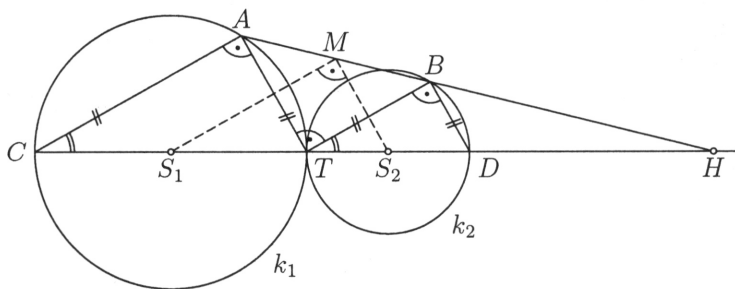
má jediné řešení $s = 2006$ a $t = 2007$. (Společný kořen je $x = 1$.)

b) Je-li $t - s = -1$, pak $s - 2007(t - s) = (-1)^n$, odkud podobně jako v případě a) nalezneme řešení $s = (-1)^n - 2007$ a $t = (-1)^n - 2008$. (Společný kořen je $x = -1$.)

Závěr: Podmínky úlohy vyhovují právě dvě dvojice

$$(s, t) = (2006, 2007) \quad \text{a} \quad (s, t) = ((-1)^n - 2007, (-1)^n - 2008).$$

a) Na obr.27 jsou zakresleny průměry CT , DT daných kružnic $k_1(S_1, r_1)$, resp. $k_2(S_2, r_2)$ a jedna dvojice vyhovujících bodů A , B . Pro-



Obr. 27

tože středná S_1S_2 a na ni kolmá společná tečna obou kružnic v bodě T rozdělují rovinu na čtyři kvadranty, je zřejmé, že oba body A , B , které s bodem T tvoří pravý úhel (a musejí proto ležet v sousedních kvadrantech), leží v téže polovině určené přímkou S_1S_2 .

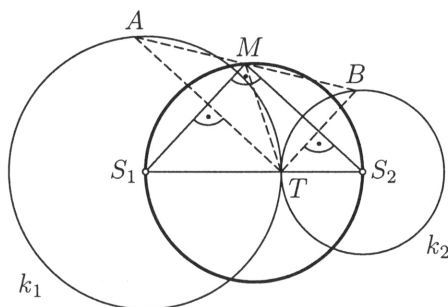
Z Thaletovy věty plyne, že $CA \perp AT \perp TB \perp BD$, takže $AC \parallel BT$ a $AT \parallel BD$. Proto podle věty *uu* platí $\triangle ACT \sim \triangle BTD$, odkud $|AC| : |BT| = |CT| : |TD| = r_1 : r_2$. Je-li např. $r_1 > r_2$, pak přímka AB protne polopřímku CT v takovém bodě H , že platí $|CH| : |TH| = r_1 : r_2$ (z podobných trojúhelníků ACH a BTH). Díky této úměře je bod H společný všem uvažovaným přímkám AB . Stejnou úvahu provedeme i v případě $r_1 < r_2$ (možnost $r_1 = r_2$ je zadáním úlohy vyloučena). Tím je tvrzení a) dokázáno.

Dodejme, že po zjištěních $AC \parallel BT$ a $AT \parallel BD$ jsme se mohli rovnou odvolat na školské poznatky o stejnolehlosti dvou kružnic. V případě $r_1 \neq r_2$ totiž vždy existuje vnější střed H stejnolehlosti kružnic k_1 , k_2 , v níž tětivy AC , AT kružnice k_1 musí přejít v rovnoběžné tětivy BT , resp. BD kružnice k_2 , neboť krajní body C , T prvních dvou tětiv přejdou v krajní body T , resp. D druhých dvou tětiv. Proto bod A přejde do bodu B , takže přímka AB prochází vnějším středem H .

b) Označme M střed úsečky AB (obr. 1) a využijme znovu vztahy $CA \perp AT \perp TB \perp BD$. Úsečky S_1M a S_2M jsou střední příčky lichoběžníků $CTBA$, resp. $DTAB$, takže platí $S_1M \parallel TB \perp AT \parallel S_2M$, tedy úhel S_1MS_2 je pravý. Bod M proto leží na Thaletově kružnici nad

průměrem S_1S_2 a je různý od bodů S_1 a S_2 (úsečka AB střednou S_1S_2 neprotne).

Obráceně, je-li M libovolný bod nalezené Thaletovy kružnice různý od S_1 , S_2 a sestrojíme-li tětivu TA kružnice k_1 kolmou k úsečce S_1M a tětivu TB kružnice k_2 kolmou k úsečce S_2M (obr. 28), bude úhel ATB stejně jako úhel S_1MS_2 pravý a přímky S_1M , S_2M budou osami úseček TA , resp. TB . Budou tudíž platit rovnosti $|MA| = |MT| = |MB|$, takže bod M bude středem kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku TAB , bude tedy středem jeho přepony AB .



Obr. 28

Hledanou množinou středů úseček AB je kružnice nad průměrem S_1S_2 s vyloučenými body S_1 , S_2 .

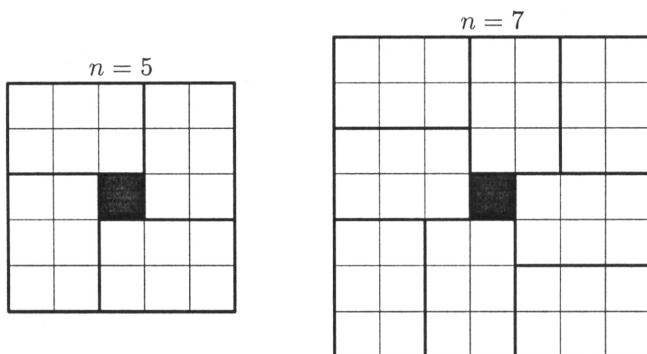
A – II – 3

V jednom kroku začneme právě tři pole, proto musí být celkový počet bílých polí dané tabulky dělitelný třemi. Pro sudé n je tento počet roven $\frac{1}{2}n^2$ (černých i bílých polí je totiž stejný počet), pro liché n je počet bílých polí roven $\frac{1}{2}(n^2 - 1)$ (černých polí je o 1 více než bílých). Číslo $\frac{1}{2}n^2$, resp. $\frac{1}{2}(n^2 - 1)$ je násobkem tří, právě když $n = 6k$, resp. $n = 6k \pm 1$ pro vhodné celé k .

Nyní ukážeme, že pro všechna čísla n uvedených tvarů je začernění celé tabulky možné. Pro $n = 6k$ je to nasnadě, neboť celou tabulku můžeme rozdělit na obdélníky 2×3 a v každém z nich provést začernění. Všimněme si, že stejný postup lze uplatnit i v každém obdélníku, jehož jeden rozměr je dělitelný dvěma a druhý třemi.

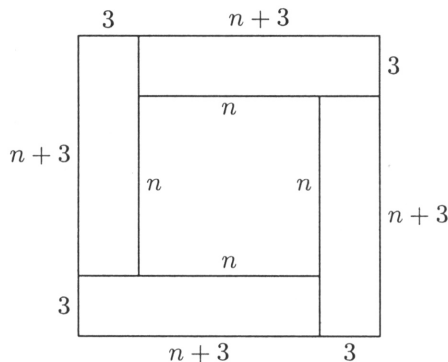
Pro čísla $n = 6k \pm 1$ popíšeme začernění pomocí matematické indukce. Pro nejmenší čísla $n = 5$ a $n = 7$ vidíte na obr. 29 obdélníky 2×3

a 3×2 v příslušných tabulkách, ve kterých provedeme začernění (pro lepší



Obr. 29

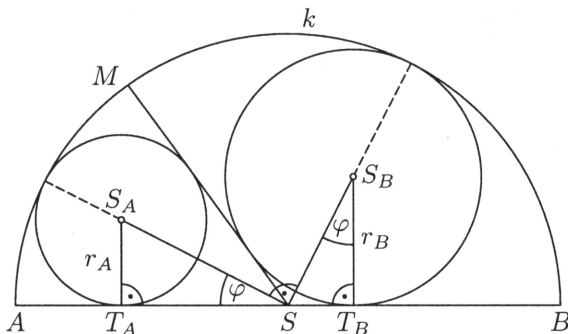
přehled je z původního šachovnicového obarvení začerněno jen středové, obdélníky nepokryté pole). Ve druhém indukčním kroku stačí ukázat, že lze-li začernit celou tabulku $n \times n$ pro některé liché n , lze udělat totéž i s tabulkou $(n + 6) \times (n + 6)$. Postup je jasný z obr. 30: nejprve začerníme „středovou“ tabulku $n \times n$ (ta má černá rohová pole) a pak začerníme každý ze čtyř vyznačených obdélníků o rozměrech $(n + 3) \times 3$ nebo $3 \times (n + 3)$. (To je možné podle závěru předchozího odstavce, neboť pro liché n je číslo $n + 3$ dělitelné dvěma.)



Obr. 30

Závěr: Celou tabulku můžeme začernit, právě když je číslo n tvaru $6k$, $6k + 1$ nebo $6k - 1$ pro nějaké celé k .

Podle obr. 31 zavedme označení $k_A(S_A, r_A)$, $k_B(S_B, r_B)$, $T_A \in AB \cap k_A$, $T_B \in AB \cap k_B$, $\varphi = \frac{1}{2}|\sphericalangle ASM|$. Protože polopřímky SS_A , SS_B jsou osami vedlejších úhlů ASM a BSM , je úhel S_ASS_B pravý a platí $\varphi = |\sphericalangle ASS_A| = |\sphericalangle SS_BT_B|$.



Obr. 31

Přímka s požadovanou vlastností existuje, právě když kolmé průměty kružnic k_A , k_B na přímku AB mají nejvýše jeden společný bod. Těmito průměty jsou úsečky se středy T_A , T_B a jejich délky jsou $2r_A$ a $2r_B$, takže podmínka z předchozí věty je ekvivalentní nerovnosti

$$|T_AT_B| \geq r_A + r_B. \quad (1)$$

Označme ještě r poloměr polokružnice k . Pak $|SS_A| = r - r_A$, $|SS_B| = r - r_B$ a z pravoúhlých trojúhelníků S_AST_A , S_BST_B plynou vyjádření

$$\begin{aligned} r_A &= (r - r_A) \sin \varphi, & |T_AS| &= (r - r_A) \cos \varphi, \\ r_B &= (r - r_B) \cos \varphi, & |T_BS| &= (r - r_B) \sin \varphi, \end{aligned}$$

z nichž snadným výpočtem dostaneme

$$\begin{aligned} r_A &= \frac{r \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}, & |T_AS| &= \frac{r \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}, \\ r_B &= \frac{r \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}, & |T_BS| &= \frac{r \sin \varphi}{1 + \cos \varphi}. \end{aligned}$$

nyňí, že také úhel u vrcholu S' je ostrý. Ze zřejmé shodnosti dvojic úhlů $S'NS$, TS_BU a $S'SN$, T_BS_BU (jejich ramena jsou navzájem kolmá) pro součet úhlů u vrcholu S a N zkoumaného trojúhelníku $S'SN$ totiž plyne

$$|\sphericalangle S'NS| + |\sphericalangle S'SN| = |\sphericalangle TS_BU| + |\sphericalangle T_BS_BU| = 2|\sphericalangle S_AS_BS| > 90^\circ.$$

To znamená, že přímka obsahující výšku z vrcholu N v trojúhelníku $S'SN$ má požadovanou vlastnost: odděluje obě kružnice k_A , k_B a je kolmá na AB .

A – III – 1

Odečtením první rovnice od druhé dostaneme

$$\begin{aligned}(x^3 - y^3) - (x^2 - y^2) + (x - y) &= 0, \\ (x - y)(x^2 + xy + y^2 - x - y + 1) &= 0.\end{aligned}$$

Druhý činitel je kladný pro jakákoliv reálná čísla x a y , neboť

$$x^2 + xy + y^2 - x - y + 1 = \frac{1}{2}(x + y)^2 + \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{2}(y - 1)^2$$

a základy všech tří druhých mocnin nemohou být rovny nule současně. Proto pro každé řešení (x, y) dané soustavy musí platit $x - y = 0$ neboli $y = x$, což redukuje soustavu na jedinou rovnici $x + x^2 = x^3$ s kořeny $x_1 = 0$ a $x_{2,3} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$.

Řešeními jsou právě tři dvojice (x, y) , kde $y = x \in \{0, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\}$.

Jiné řešení. Vyjádření $y = x^3 - x^2$ z druhé rovnice dosadíme do rovnice první. Dostaneme rovnici $x + (x^3 - x^2)^2 = (x^3 - x^2)^3$, po úpravě

$$x^9 - 3x^8 + 3x^7 - 2x^6 + 2x^5 - x^4 - x = 0.$$

To je sice rovnice 9. stupně, ale pomůže nám taková úvaha: případu $x = y$ odpovídá jediná rovnice $x + x^2 = x^3$, proto získaný mnohočlen stupně 9 *musí být dělitelný* mnohočlenem $x^3 - x^2 - x$. Vydělením přejdeme k rovnici v součinném tvaru

$$(x^3 - x^2 - x)(x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1) = 0.$$

Druhý činitel je však kladný pro jakékoliv reálné číslo x , neboť

$$x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1 = (x^3 - x^2)^2 + (x^2 - x)^2 + (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}.$$

První složka x každého řešení (x, y) proto musí splňovat rovnici $x^3 - x^2 - x = 0$. Zbytek řešení je nasnadě.

Jiné řešení. Ještě jedním způsobem dokážeme, že $x = y$. Pripusťme, že existuje řešení s vlastností $x > y$ (opačný případ je symetrický). Pak z rovností $x = y^3 - y^2$ a $y = x^3 - x^2$ plyne $y^3 - y^2 > y$ a $x^3 - x^2 < x$, tedy $P(y) > 0$ a $P(x) < 0$, kde P je mnohočlen $P(x) = x^3 - x^2 - x$ s rozkladem $P(x) = x(x - x_2)(x - x_3)$, přitom $x_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) > 0$ a $x_3 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) < 0$. Nerovnosti $P(y) > 0$ a $P(x) < 0$ znamenají, že platí $y \in (x_3, 0) \cup (x_2, \infty)$ a $x \in (-\infty, x_3) \cup (0, x_2)$, což s ohledem na $x > y$ lze upřesnit na $y \in (x_3, 0)$ a $x \in (0, x_2)$. Přímou z $y < 0$ ovšem plyne nerovnost $y^3 - y^2 < 0$, tedy $x < 0$, což je ve sporu s tím, že $x \in (0, x_2)$.

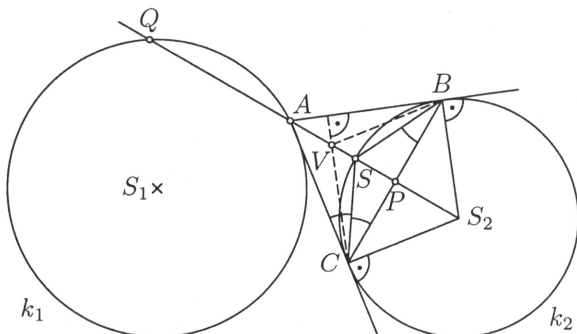
Jiné řešení. Opět dokážeme sporem, že $x = y$. Pripusťme, že existuje řešení s vlastností $x > y$ (opačný případ je symetrický). Taková čísla x, y jsou zřejmě nenulová (z $x = 0$ plyne $y = 0$ a naopak), takže splňují jednu z podmínek $x > y > 0$, $x > 0 > y$ nebo $0 > x > y$.

Je-li $x > y > 0$, pak z vyjádření $x = y^2(y - 1)$ plyne $y > 1$, takže $x^2 > y^2 > 1$ a zároveň $x - 1 > y - 1$. Vynásobením těchto nerovností dostaneme $x^2(x - 1) > y^2(y - 1)$ neboli $y > x$, a to je spor.

Je-li $x > 0 > y$, pak $y^3 < 0$ a $y^2 > 0$, takže $y^3 - y^2 < 0$ neboli $x < 0$, což je opět spor. A konečně je-li $0 > x > y$, pak $x^3 > y^3$ a $x^2 < y^2$, takže $x^3 - x^2 > y^3 - y^2$ neboli $y > x$, a to je i tentokrát spor.

A - III - 2

a) Bod A může být na kružnici k_1 vybrán *libovolně*, body B a C jsou pak nutně body dotyku obou polopřímek s počátkem A , které jsou tečné ke kružnici k_2 (obr. 33). Vzhledem k jejich symetrii je ABC rovno-



Obr. 33

ramenný trojúhelník souměrný podle přímky AS_2 . Středem kružnice jemu vepsané je průsečík S úsečky AS_2 s kružnicí k_2 . Tento bod S totiž leží nejen na ose úhlu BAC , ale také na osách obou (souměrně sdružených) úhlů ABC a ACB , protože podle věty o obvodovém a úsekovém úhlu platí $|\sphericalangle ACS| = |\sphericalangle CBS|$ a ze symetrie $|\sphericalangle CBS| = |\sphericalangle BCS|$. Obráceně, zvolíme-li na kružnici k_2 libovolně bod S tak, aby polopřímka S_2S protala kružnici k_1 v aspoň jednom bodě, který označíme A a ke kterému sestrojíme podle první věty řešení vyhovující trojúhelník ABC , bude podle předchozích úvah bod S středem kružnice vepsané právě takovému trojúhelníku ABC . Hledanou množinou je tedy množina průsečíků kružnice k_2 se všemi úsečkami S_2A , kde bod A probíhá celou kružnicí k_1 . Je to zřejmě kratší z obou oblouků (včetně krajních bodů) kružnice k_2 , které na ní vytínají obě polopřímky s počátkem S_2 , jež se dotýkají kružnice k_1 .

b) Dokážeme, že hledanou množinou je kružnice, která je obrazem kružnice k_1 ve stejnolehlosti se středem S_2 a kladným koeficientem

$$\lambda = \frac{2r_2^2}{|S_1S_2|^2 - r_1^2}.$$

Vysvětlíme totiž, proč ortocentrum V každého uvažovaného trojúhelníku ABC , jež z důvodu osové souměrnosti leží na polopřímce S_2A (díky ostrým úhlům ABC , ACB leží body A , V ve stejné polorovině s hranicí BC), je ve zmíněné stejnolehlosti obrazem druhého průsečíku Q polopřímky S_2A s kružnicí k_1 , který — stejně jako první průsečík A — probíhá celou kružnicí k_1 (v případě, kdy se polopřímka S_2A dotýká kružnice k_1 , klademe $Q = A$). Potřebný vztah $|S_2V| : |S_2Q| = \lambda$ dostaneme vydělením rovností

$$|S_2A| \cdot |S_2Q| = |S_1S_2|^2 - r_1^2 \quad \text{a} \quad \frac{1}{2}|S_2V| \cdot |S_2A| = r_2^2,$$

které nyní zdůvodníme (a tak bude celý důkaz hotov).

První rovnost vyjadřuje (kladnou) mocnost bodu S_2 ke kružnici k_1 . Druhá rovnost plyne z Eukleidovy věty o odvěsně S_2B pravoúhlého trojúhelníku S_2BA , protože střed P úsečky BC je nejen patou výšky z vrcholu A , ale také středem kosočtverce CS_2BV , tudíž

$$r_2^2 = |S_2B|^2 = |S_2P| \cdot |S_2A| = \frac{1}{2}|S_2V| \cdot |S_2A|.$$

Poznámka. Střed P úsečky BC je zřejmě obrazem bodu A v kruhové inverzi ι dle kružnice k_2 , zatímco odpovídající průsečík výšek V trojúhelníku ABC je zas obrazem bodu P ve stejnolehlosti $\kappa(S_2, 2)$. Protože

obrazem kružnice k_1 , která určitě neprochází bodem S_2 , je v uvedené kruhové inverzi kružnice, je hledanou množinou kružnice, která je obrazem kružnice k_1 ve složeném zobrazení $\iota \circ \kappa$.

A – III – 3

Ukážeme, že všechny vyhovující dvojice (a, b) jsou tvaru $(1, b)$, kde b je libovolné celé kladné číslo.

Označme $X = a^2 + ab + 1 = a(a + b) + 1$ a $Y = b^2 + ab + a + b - 1 = (b + 1)(a + b) - 1$. Dělí-li číslo X číslo Y , dělí i číslo

$$\begin{aligned}(b + 1)X - aY &= (b + 1)[a(a + b) + 1] - a[(b + 1)(a + b) - 1] = \\ &= a + b + 1,\end{aligned}$$

kteří tudíž jako kladný násobek čísla X splňuje nerovnost

$$a + b + 1 \geq X = a^2 + ab + 1.$$

Odtud po zrušení jednotek a dělení číslem $a + b$ dostaneme $1 \geq a$, tedy nutně $a = 1$.

Naopak, je-li $a = 1$, je $X = b + 2$ a $Y = b^2 + 2b = b(b + 2)$, takže $X \mid Y$ platí.

A – III – 4

a) Příkladem hledaného rozkladu je rovnost

$$\begin{aligned}8\,002 &= 3\,333 + 999 + 888 + 777 + 666 + 555 + 333 + 99 + 88 + 77 + \\ &\quad + 66 + 55 + 44 + 22.\end{aligned}$$

V druhé části ukážeme, že je to jediný vyhovující rozklad čísla 2 008 na 14 sčítanců a že žádný takový rozklad na menší počet sčítanců neexistuje.

b) Číslo tvaru $\overline{aaaa}$, resp. $\overline{aaa}$, resp. $\overline{aa}$ je a -násobkem čísla 1 111, resp. 111, resp. 11. Proto každý uvažovaný rozklad čísla 8 002 můžeme po částečném sečtení („stejnomístných“ sčítanců) zapsat ve tvaru

$$8\,002 = 1\,111k + 111l + 11m,$$

kde k, l, m jsou celá nezáporná čísla nepřevyšující hodnotu součtu $1 + 2 + \dots + 9 = 45$ (neboť sčítaná „stejnomístná“ čísla mají být navzájem různá).

Uvedenou rovnost přepíšeme do tvaru

$$\begin{aligned} 8\,002 &= 727 \cdot 11 + 5 = 11(101k + 10l + m) + l, \\ 727 &= 101k + 10l + m + \frac{l-5}{11}. \end{aligned}$$

Odtud vychází (s ohledem na $l \leq 45$), že $l = 11q + 5$, kde $q \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dostáváme tak rovnost

$$677 = 101 \cdot 6 + 71 = 101(k + q) + 10q + m,$$

z níž zřejmě plyne $k + q = 6$ a $10q + m = 71$. Tato soustava má za daných podmínek jediné řešení $q = 3$, $k = 3$ a $m = 41$. Pro l tak vychází $l = 38$.

K vytvoření hledaného rozkladu zbývá rozložit nalezená čísla k , l , m na součet jednoho či několika různých jednomístných sčítanců. Vzhledem k tomu, že na výběr máme právě devět sčítanců $9+8+7+6+5+4+3+2+1$ se součtem 45, bude zřejmě jednodušší vypsát rozklady pro k , $45 - l$ a $45 - m$ (rozklady čísel l a m pak dostaneme vynecháním nalezených sčítanců ze součtu $1 + 2 + \dots + 9$):

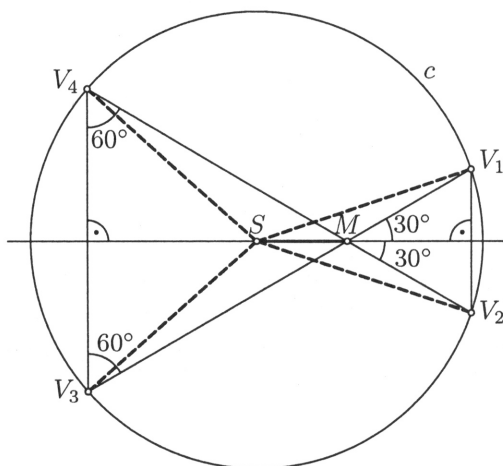
$$\begin{aligned} k &= 3 = 1 + 2, \\ 45 - l &= 7 = 1 + 6 = 1 + 2 + 4 = 2 + 5 = 3 + 4, \\ 45 - m &= 4 = 1 + 3. \end{aligned}$$

Našli jsme všech $2 \cdot 5 \cdot 2$ možných rozkladů čísla 8 002, jež mají požadované vlastnosti a z nichž každý má alespoň $1 + 6 + 7 = 14$ sčítanců, přičemž rozklad na 14 sčítanců je jediný a byl uveden v řešení části a).

A – III – 5

Ukážeme, že hledané největší t je rovno $4/11$ hod nezávisle na poměru k délek ručiček.

Označme c kružnici ciferníku, S její střed a M konec malé ručičky (obr. 34). Vysvětlíme nejprve, proč při pevné poloze bodu M existují právě dva rovnostranné trojúhelníky MXY s vrcholy X, Y na kružnici c . Protože přímka SM musí být osou tětiny XY , a tedy i osou úhlu XYM , svírají obě přímky MX, MY s přímkou SM úhel 30° . Proto je trojúhelník MXY totožný s jedním z rovnostranných trojúhelníků MV_1V_2, MV_3V_4 sestrojených na obr. 34.



Obr. 34

Body V_i rozdělují kružnici c na čtyři oblouky. Obloukům V_2V_3 a V_4V_1 přísluší obvodové úhly $V_2V_4V_3$, $V_1V_3V_4$ velikosti 60° . Proto podle věty o obvodovém a středovém úhlu platí první dvě z rovností

$$|\sphericalangle V_2SV_3| = |\sphericalangle V_4SV_1| = 120^\circ \quad \text{a} \quad |\sphericalangle V_1SV_2| + |\sphericalangle V_3SV_4| = 120^\circ,$$

třetí rovnost je jejich důsledkem (dopočítáním podle plného úhlu u vrcholu S). Plyne z ní, že oba středové úhly V_1SV_2 , V_3SV_4 jsou menší než 120° .

Můžeme si představit, že malá ručička hodinek je nehybná a velká ručička se kolem středu S otáčí úhlovou rychlostí $(360 - 30)^\circ = 330^\circ$ za hodinu. Jak jsme zjistili, zkoumaný jev nastane, právě když konec V velké ručičky splyne s jedním ze čtyř bodů V_i . Mezi dvěma po sobě jdoucími jevy se proto velká ručička otočí o úhel, který má ve dvou případech velikost 120° a ve zbylých dvou případech velikosti $|\sphericalangle V_1SV_2|$ a $|\sphericalangle V_3SV_4|$, které jsou menší než 120° (a závisí na poměru k). Nejdelší doba t je tedy na poměru k nezávislá a je rovna $120/330$ hod.

A – III – 6

Ukážeme, že hledaná čísla jsou $p = 1/4$ a $q = 4$. Stačí pouze zdůvodnit, že $q = 4$ (pak totiž $p = 1/4$, neboť záměna stran a , b mění hodnotu zkoumaného zlomku na převrácené číslo).

Podle trojúhelníkových nerovností platí

$$\frac{1}{2}a < b + t_a \quad \text{a} \quad \frac{1}{3}t_b < \frac{2}{3}t_a + \frac{1}{2}b.$$

První nerovnost vynásobíme dvěma, druhou třemi a pak je sečteme:

$$a + t_b < (2b + 2t_a) + (2t_a + \frac{3}{2}b) = \frac{7}{2}b + 4t_a < 4(b + t_a).$$

Požadovanou vlastnost má tedy každé číslo $q \geq 4$; ukážeme ještě, že ji nemá žádné číslo $q < 4$. K tomu uvažíme rovnoramenný trojúhelník ABC , ve kterém $a = c = 1$ a $b \in (0, 2)$ (takový trojúhelník existuje pro libovolné b z uvedeného intervalu). Z obecných vzorců

$$t_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}, \quad t_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}$$

dostaneme $t_a = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2b^2}$ a $t_b = \frac{1}{2}\sqrt{4 - b^2}$, odkud

$$\frac{a + t_b}{b + t_a} = \frac{2 + \sqrt{4 - b^2}}{2b + \sqrt{1 + 2b^2}}.$$

Poslední zlomek může být pro malé kladné b libovolně blízký číslu 4. Vysvětlíme to takto: zvolíme-li $\varepsilon > 0$, pak pro všechna dostatečně malá kladná b současně platí

$$\sqrt{4 - b^2} > 2 - \varepsilon, \quad 2b < \varepsilon \quad \text{a} \quad \sqrt{1 + 2b^2} < 1 + \varepsilon,$$

takže

$$\frac{a + t_b}{b + t_a} > \frac{4 - \varepsilon}{1 + 2\varepsilon},$$

a je snadné vybrat $\varepsilon > 0$ tak, aby byl poslední zlomek větší než jakékoliv předem zvolené q menší než 4. Stačí, aby platilo

$$\varepsilon < \frac{4 - q}{1 + 2q}.$$

Kategorie P

Texty úloh

P – I – 1

O zdánlivém kopci

Franta a Pepík se chystali na výlet. Vymysleli si trasu, kudy spolu půjdou, potom každý vytáhnul svoji mapu a začal si v ní trasu prohlížet. Některé body, kterými trasa vedla, měly v mapách vyznačenu nadmořskou výšku.

„To je zajímavé,“ řekl po chvíli Franta. „Když se dívám jen na nadmořské výšky bodů, kterými budeme procházet, vypadá to, že půjdeme jenom přes jeden kopec — nejprve nahoru a potom dolů.“

„Ale kdepak, to není pravda,“ podivil se Pepík.

Za chvíli zjistili, kde vzniknul problém: měli různě přesné mapy. Některé nadmořské výšky bodů, které byly na Pepíkově mapě vyznačeny, na Frantově mapě chyběly.

Soutěžní úloha. Napište program, který dostane na vstupu seznam nadmořských výšek z Pepíkovy mapy a zjistí, kolik nejvýše z nich může být vyznačeno i na Frantově mapě.

Formát vstupu: První řádek vstupu obsahuje jedno celé číslo N ($1 \leq N \leq 100\,000$) — počet těch bodů na trase výletu, které mají na Pepíkově mapě vyznačenou nadmořskou výšku. Další řádky obsahují celkem N celých čísel z rozsahu 1 až 1 000 000 000 — nadmořské výšky těchto bodů (v nějakých vám neznámých jednotkách). Výšky jsou uvedeny v pořadí, jak po sobě následují na trase výletu.

Formát výstupu: Výstupem bude jediné celé číslo K — největší počet nadmořských výšek z Pepíkovy mapy, které mohly být vyznačeny i na Frantově mapě.

Jestliže $a_1, \dots, a_K$ jsou výšky vyznačené na Frantově mapě, pak musí splňovat následující podmínku: pro nějaké i z množiny $\{1, \dots, K\}$ musí platit $\forall j \in \{1, \dots, i-1\}: a_j < a_{j+1}$ a zároveň $\forall j \in \{i, \dots, K-1\}: a_j > a_{j+1}$.

Příklad:

vstup:

12

112 247 211 209 244

350 470 510 312 215

117 217

výstup:

9

*Jedna možnost, jak mohly vypadat
nadmořské výšky na Frantově mapě:*

112, 211, 244, 350, 470, 510, 312, 215, 117

P – I – 2

Rezervace místenek

„V horách se našlo zlato!“ šeptali si lidé v širokém okolí už několik týdnů. Ti s dobrodružnější povahou si už balili věci a mířili přímo do hor, do legendami opředené oblasti zvané Horní Klondík.

Když ale Horní Klondík zaplavila vlna nových zlatokopů, nastal nečekaný problém. Jediný místní vláček, který v Klondíku měli, byl najednou tak přecpaný, že se do něj polovina zájemců ani nevešla. A nedivte se, že zlatokopa, který se žene za co nejvýhodnější parcelou, něco takového pořádně rozzlobí.

Když už se zdálo, že zanedlouho dojde na každé železniční stanici ke krveprolití, dostali železničáři spásonosný nápad. Budou na vláček prodávat místenky.

Soutěžní úloha. Napište program, který bude zpracovávat rezervace míst na jednu jízdu vlaku. Trať vlaku má $N + 1$ stanic, které si očíslováme od 0 do N v pořadí, jak na trati leží. Ve vlaku je M míst, takže mezi každou dvojicí po sobě následujících stanic může jet vlakem nejvýše M zlatokopů.

Váš program musí postupně zpracovat několik požadavků na rezervaci míst. Každý požadavek je tvaru „ x lidí chce jet ze stanice y do stanice z .“ Pokud je ještě na každém úseku trati mezi stanicemi y a z ve vlaku aspoň x míst volných, váš program takovýto požadavek přijme, v opačném případě ho odmítne.

Formát vstupu: První řádek vstupu obsahuje tři celá čísla N , M a P ($1 \leq N, M, P \leq 100\,000$) — počet úseků trati, počet míst ve vlaku a počet požadavků na rezervaci.

Následuje P řádků, každý z nich popisuje jeden požadavek na rezervaci v pořadí, v jakém byly tyto požadavky zadány. Přesněji, i -tý z těchto řádků obsahuje tři celá čísla x_i , y_i , z_i oddělená mezerami ($1 \leq x_i \leq M$, $0 \leq y_i < z_i \leq N$). Význam těchto hodnot byl popsán výše.

Formát výstupu: Pro každý požadavek vypište na výstup jeden řádek a na něm buď řetězec **prijat**, jestliže příslušný požadavek bylo ještě možné splnit, nebo řetězec **odmitnut**, pokud už ve vlaku nebylo dost volných míst.

Příklad:

<i>vstup:</i>	<i>výstup:</i>
4 6 6	prijat
2 1 4	prijat
2 1 3	odmitnut
3 2 4	odmitnut
3 1 2	prijat
6 0 1	prijat
4 3 4	

Po přijetí prvních dvou požadavků víme, že v úsecích mezi stanicemi 1 a 2 a mezi stanicemi 2 a 3 zůstanou už jen dvě volná místa. Proto musíme odmítnout následující dvě trojčlenné skupiny, které chtějí cestovat i na těchto úsecích tratě. Poslední dva požadavky opět můžeme splnit. U prvního z nich je to zřejmé, u druhého nám ve stanici 3 vystoupí dostatek lidí na to, aby se na poslední úsek trati uvolnila přesně potřebná čtyři místa.

P – I – 3

Fibonacciho soustava

Fibonacciho posloupnost vypadá následovně:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

Sestrojíme ji tak, že prvními dvěma členy posloupnosti jsou 0 a 1 a každý následující člen posloupnosti je součtem dvou předcházejících. Matematicky zapsáno:

$$F_0 = 0,$$

$$F_1 = 1,$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (\forall n \geq 0).$$

Podívejme se nyní na to, jak fungují poziční číselné soustavy. Poziční číselná soustava je určena dvěma údaji: množinou používaných cifer a posloupností, která pro každou pozici v zápisu čísla udává hodnotu, jíž se příslušná cifra násobí.

Například naše desítková soustava používá množinu cifer $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ a jednotlivé pozice v čísle mají hodnoty (zprava doleva) 1, 10, 100, 1000, ...

Fibonacciho číselná soustava je poziční číselná soustava, která používá pouze cifry 0 a 1 a v níž jsou hodnoty jednotlivých pozic postupně rovny členům Fibonacciho posloupnosti (počínaje číslem $F_2 = 1$). Tedy například zápis 10011 ve Fibonacciho soustavě představuje číslo $1 \cdot 8 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 11$.

Na rozdíl od běžných číselných soustav ve Fibonacciho soustavě nemají některá čísla jednoznačný zápis. Například také zápis 10100 představuje číslo 11.

Soutěžní úloha.

- (3 body) Zápis čísla ve Fibonacciho soustavě nazveme *pěkný*, jestliže se v něm nikde nevyskytují dvě po sobě jdoucí jedničky. Dokažte, že každé přirozené číslo má ve Fibonacciho soustavě právě jeden pěkný zápis. Napište program, který ze vstupu přečte přirozené číslo N a vypíše jeho pěkný zápis.
- (7 bodů) Napište program, který pro daná k , A a B spočítá, kolik čísel z množiny $\{A, A + 1, \dots, B\}$ má ve svém pěkném zápisu právě k jedniček.

Formát vstupu: V části a) je na vstupu jediné přirozené číslo N ($1 \leq N \leq 1\,000\,000\,000$).

V části b) jsou na vstupu tři přirozená čísla k , A a B ($1 \leq k \leq 30$, $1 \leq A < B \leq 1\,000\,000\,000$).

Formát výstupu: V části a) vypište na jeden řádek řetězec nul a jedniček, který představuje pěkný zápis čísla N .

V části b) vypište jedno celé číslo — počet čísel ze zadaného intervalu, která mají ve svém pěkném zápisu právě k jedniček.

Příklady pro část a):

<i>vstup 1:</i>	<i>výstup 1:</i>
11	10100
<i>vstup 2:</i>	<i>výstup 2:</i>
174591	1010001000000000100010010

Příklady pro část b):

<i>vstup 1:</i>	<i>výstup 1:</i>
1 4 13	3

(Pro $k = 1$ je výstupem počet Fibonacciho čísel v daném rozsahu. V zadaném rozsahu leží Fibonacciho čísla 5, 8 a 13.)

vstup 2:

2 4 13

vstup 3:

10 102000 103000

výstup 2:

6

výstup 3:

86

P – I – 4

Překládací stroje

V tomto ročníku olympiády budeme pracovat s překládacími stroji. Ve studijním textu uvedeném za zadáním úlohy jsou tyto stroje popsány.

Soutěžní úloha.

- a) (1 bod) Všimněte si překládacích strojů B a C z příkladů ve studijním textu. Tyto dva stroje zjevně provádějí překlad „opačnými směry“. Mohli bychom proto očekávat, že platí následující tvrzení: Necht M je libovolná (třeba i nekonečná) množina, jejímiž prvky jsou nějaké řetězce písmen a , e a i . Potom $C(B(M)) = M$. Slovně popsáno: Když vezmeme množinu M , přeložíme ji pomocí stroje B a výsledek přeložíme pomocí C , dostaneme původní množinu. Pokud toto tvrzení skutečně platí, dokažte ho. Pokud ne, najděte protipříklad.
- b) (1 bod) Totéž jako v předcházející části, jen M obsahuje řetězce tvořené znaky $-$ a $\bullet$ a zajímá nás, zda musí platit $B(C(M)) = M$.
- c) (3 body) Řekneme, že řetězec je zajímavý, jestliže obsahuje pouze písmena a a b , přičemž písmen a je dvojnásobný počet než písmen b . Necht X je množina všech zajímavých řetězců. Tedy například $aaabab \in X$, ale $baba \notin X$. Necht Y je množina všech řetězců, které obsahují nejprve několik písmen a a za nimi trojnásobné množství písmen b . Tedy například $abbb \in Y$, ale $aaabab \notin Y$. Sestrojte překládací stroj, který přeloží X na Y .
- d) (5 bodů) Na začátku máme množinu M_1 , jež obsahuje všechny takové řetězce tvořené z písmen a , b , které obsahují stejný počet písmen a jako b . Tedy například $abbbba \in M_1$, ale $aabab \notin M_1$. Nové množiny můžeme sestavovat následujícími operacemi:
- ▷ překladem nějaké již sestrojené množiny nějakým strojem (můžeme použít pokaždé jiný stroj),
 - ▷ sjednocením dvou již sestrojených množin,
 - ▷ průnikem dvou již sestrojených množin.

Provedením co nejmenšího počtu operací sestrojte množinu G , která obsahuje právě všechny řetězce, v nichž je nejprve několik písmen a , potom stejný počet písmen b , a nakonec stejný počet písmen c . Tedy například $aabbcc \in G$, ale $abcc \notin G$, a ani $bac \notin G$.

Překládací stroj přijímá na vstupu řetězec znaků. Tento řetězec postupně čte a podle předem zvolené soustavy pravidel (tedy podle svého programu) občas nějaké znaky zapíše na výstup. Když stroj zpracuje celý vstupní řetězec a úspěšně ukončí svůj výpočet, vezmeme řetězec znaků zapsaný na výstup a nazveme ho *překladem* vstupního řetězce.

Výpočet stroje nemusí být jednoznačně určen. Jinými slovy, soustava pravidel může někdy stroji umožnit, aby se rozhodl o dalším postupu výpočtu. V takovém případě se může stát, že některý řetězec bude mít více různých překladů.

Naopak, může se stát, že v určité situaci se podle daných pravidel nebude moci v překladu pokračovat vůbec. V takovém případě se může stát, že některý řetězec nebude mít vůbec žádný překlad.

Formálnější definice překládacího stroje. Každý překládací stroj pracuje nad nějakou předem zvolenou konečnou množinou znaků. Tuto množinu znaků budeme nazývat *abeceda* a značit Σ . V soutěžních úlohách bude vždy Σ známa ze zadání úlohy. Abeceda nebude nikdy obsahovat znak \$, ten budeme používat k označení konce vstupního řetězce.

Stroj si může během překladu řetězce pamatovat informaci konečné velikosti. Formálně tuto skutečnost definujeme tak, že stroj se v každém okamžiku překladu nachází v jednom z *konečně mnoha* stavů. Nutnou součástí programu překládacího stroje je tedy nějaká konečná *množina stavů*, v nichž se stroj může nacházet. Tuto množinu označíme K . Kromě samotné množiny stavů je také třeba uvést, ve kterém stavu se stroj nachází na začátku každého překladu. Tento stav nazveme *počáteční stav*.

Program stroje se skládá z konečného počtu překladových pravidel. Každé pravidlo má tvar čtveřice (p, u, v, q) , kde $p, q \in K$ jsou nějaké dva stavy a u, v jsou nějaké dva řetězce znaků z abecedy Σ .

Stavy p a q mohou být i stejné. Řetězec u může být tvořen jediným znakem \$. Řetězce u a v mohou být i stejné. Některý z těchto řetězců může být případně prázdný. Aby se program lépe četl, budeme místo prázdného řetězce psát symbol ϵ .

Překladové pravidlo má následující význam: „Když je stroj právě ve stavu p a dosud nepřečtená část vstupu začíná řetězcem u , může stroj tento řetězec ze vstupu přečíst, na výstup zapsat řetězec v a změnit

svůj stav na q .“ Všimněte si, že pravidlo tvaru (p, ε, v, q) můžeme použít vždy, když se stroj nachází ve stavu p , bez ohledu na to, jaké znaky ještě zůstávají na vstupu.

Ještě potřebujeme stanovit, kdy překlad úspěšně skončil. V první řadě budeme požadovat, aby překládací stroj přečetl celý vstupný řetězec. Kromě toho umožníme stroji „odpovědět“, zda se mu překlad podařil nebo ne. To zařídíme tak, že některé stavy stroje označíme jako *koncové stavy*. Množinu všech koncových stavů budeme značit F .

Formální definice překládacího stroje. Překládací stroj je uspořádaná pětice (K, Σ, P, q_0, F) , kde Σ a K jsou *konečné* množiny, $q_0 \in K$, $F \subseteq K$ a P je *konečná* množina překladových pravidel popsaných výše. Přesněji, nechť Σ^* je množina všech řetězců tvořených znaky ze Σ , potom P je *konečná* podmnožina množiny $K \times (\Sigma^* \cup \{\$\}) \times \Sigma^* \times K$.

(Pro každé $q \in K$ budeme množinu pravidel, jejichž první složkou je q , nazývat „překladová pravidla ze stavu q “.)

Chceme-li definovat konkrétní překládací stroj, musíme uvést všech pět výše uvedených objektů.

Když už máme definován konkrétní stroj $A = (K, \Sigma, P, q_0, F)$, můžeme určit, jak tento stroj překládá konkrétní řetězec. Uvedeme nejprve formální definici a potom ji slovně vysvětlíme.

Množina *platných překladů* řetězce u překládacím strojem A je:

$$A(u) = \left\{ v \mid \begin{aligned} &\exists n \geq 0 \exists (p_1, u_1, v_1, r_1), \dots, (p_n, u_n, v_n, r_n) \in P : \\ &(\forall i \in \{1, \dots, n-1\} : r_i = p_{i+1}) \wedge p_1 = q_0 \wedge r_n \in F \wedge \\ &\wedge \exists k \geq 0 : u_1 u_2 \dots u_n = u \underbrace{\$ \dots \$}_k \wedge v_1 v_2 \dots v_n = v \end{aligned} \right\}.$$

Definice stanoví, kdy je řetězec v překladem řetězce u . Vysvětlíme si slovně význam jednotlivých řádků definice:

- ▷ První řádek říká, že aby se dalo u přeložit na v , musí existovat nějaká posloupnost překladových pravidel, kterou při tomto překladu použijeme. Další dva řádky popisují, jak tato posloupnost musí vypadat.
- ▷ Druhý řádek zabezpečuje, aby stavy v použitých pravidlech byly správné: První pravidlo musí být pravidlem z počátečního stavu, každé další pravidlo musí být pravidlem z toho stavu, do něhož se stroj dostal použitím předcházejícího pravidla.

Navíc stav, v němž se bude stroj nacházet po skončení výpočtu, musí být koncový.

▷ Poslední řádek popisuje řetězce, které stroj při použití dotyčných překladových pravidel čte a zapisuje.

Řetězec, který při použití těchto pravidel stroj přečte ze vstupu, musí být skutečně zadaným řetězcem u , případné může být zprava doplněn vhodným počtem znaků \$.

Řetězec, který stroj zapíše na výstup, musí být přesně řetězcem v .

K čemu budeme používat překládací stroje? Překládací stroje nám budou sloužit k získání překladu jedné množiny řetězců na jinou množinu řetězců. Jestliže A je překládací stroj a $M \subseteq \Sigma^*$ nějaká množina řetězců, potom překlad množiny M strojem A je množina

$$A(M) = \bigcup_{u \in M} A(u).$$

Jinými slovy, výslednou množinu $A(M)$ sestrojíme tak, že vezmeme všechny řetězce z M a pro každý z nich přidáme do $A(M)$ všechny jeho platné překlady.

Příklad 1: Mějme abecedu $\Sigma = \{0, \dots, 9\}$. Nechť M je množina všech řetězců, které představují zápisy kladných celých čísel v desítkové soustavě. Sestrojíme překládací stroj A , pro který bude platit, že překladem této množiny M bude množina zápisů všech kladných celých čísel, která jsou dělitelná třemi.

ŘEŠENÍ. Nejjednodušší bude prostě vybrat z M ta čísla, která jsou dělitelná třemi. Náš překládací stroj bude kopírovat cifry ze vstupu na výstup, přičemž si bude pomoci stavu pamatovat, jaký zbytek po dělení třemi dává dosud přečtené (a zapsané) číslo. Nachází-li se po dočtení vstupu ve stavu odpovídajícím zbytku 0, přejde do koncového stavu.

Formálně A bude pětice $(K, \Sigma, P, 0, F)$, kde $K = \{0, 1, 2, \text{end}\}$, $F = \{\text{end}\}$ a překladová pravidla vypadají následovně:

$$P = \{(x, y, z) \mid x \in \{0, 1, 2\} \wedge y \in \Sigma \wedge z = (10x + y) \bmod 3\} \cup \{(0, \$, \varepsilon, \text{end})\}.$$

Příklad 2: Mějme abecedu $\Sigma = \{a, e, i, \bullet, -\}$. Sestrojíme překládací stroj B , pro který bude platit, že překladem libovolné množiny M , která obsahuje pouze řetězce z písmen a , e a i , bude množina stejných řetězců zapsaných v morseovce (bez oddělovačů mezi znaky). Zápisy našich písmen v morseovce vypadají následovně: a je $\bullet-$, e je $\bullet$ a i je $\bullet\bullet$.

Například množinu $M = \{ae, eea, ia\}$ by náš stroj měl přeložit na množinu $\{\bullet - \bullet, \bullet\bullet -\}$. (Všimněte si, že řetězce eea a ia mají v morseovce bez oddělovačů stejný zápis.)

ŘEŠENÍ. Překládací stroj B bude číst vstupní řetězec po znacích a vždy zapíše na výstup kód přečteného znaku.

Formálně B bude pětice $(K, \Sigma, P, \heartsuit, F)$, kde $K = \{\heartsuit\}$, $F = \{\heartsuit\}$ a překladová pravidla vypadají takto:

$$P = \{(\heartsuit, a, \bullet - \bullet, \heartsuit), (\heartsuit, e, \bullet, \heartsuit), (\heartsuit, i, \bullet\bullet, \heartsuit)\}.$$

Všimněte si, že nepotřebujeme nijak zvlášť kontrolovat, zda jsme na konci vstupu. Během celého překladu je totiž stroj v koncovém stavu, takže jakmile přečte poslední znak ze vstupu, bude vytvořený překlad platný.

Příklad 3: Mějme abecedu $\Sigma = \{a, e, i, \bullet, -\}$. Sestrojíme překládací stroj C , pro který bude platit, že překladem libovolné množiny M , která obsahuje pouze řetězce tvořené znaky $\bullet$ a $-$, bude množina *všech* řetězců z písmen a, e a i , jejichž zápisy v morseovce (bez oddělovačů mezi znaky) jsou obsaženy v množině M . Například množinu $M = \{\bullet - \bullet, \bullet\bullet\bullet -\}$ by náš stroj měl přeložit na $\{ae, eea, ia\}$.

ŘEŠENÍ. Našemu překládacímu stroji dáme možnost rozhodnout se v každém okamžiku překladu, že bude číst kód nějakého písmena a zapíše na výstup toto písmeno. Potom každé možnosti, jak lze rozdělit vstupní řetězec na kódy písmen, bude odpovídat jeden platný překlad.

Formálně C bude pětice $(K, \Sigma, P, \diamondsuit, F)$, kde $K = \{\diamondsuit\}$, $F = \{\diamondsuit\}$ a překladová pravidla vypadají následovně:

$$P = \{(\diamondsuit, \bullet - \bullet, a, \diamondsuit), (\diamondsuit, \bullet, e, \diamondsuit), (\diamondsuit, \bullet\bullet, i, \diamondsuit)\}.$$

Ukážeme si, jak mohl probíhat překlad řetězců z výše uvedené množiny M . Existují tyto tři možnosti:

- ▷ $(\diamondsuit, \bullet - \bullet, a, \diamondsuit), (\diamondsuit, \bullet, e, \diamondsuit)$
- ▷ $(\diamondsuit, \bullet\bullet, i, \diamondsuit), (\diamondsuit, \bullet - \bullet, a, \diamondsuit)$
- ▷ $(\diamondsuit, \bullet, e, \diamondsuit), (\diamondsuit, \bullet, e, \diamondsuit), (\diamondsuit, \bullet - \bullet, a, \diamondsuit)$

Kdybychom zkusili pro libovolný vstupní řetězec z M použít překladová pravidla v jiném pořadí – např. pro vstup $\bullet\bullet\bullet -$ použít třikrát pravidlo $(\diamondsuit, \bullet, e, \diamondsuit)$ – nepodaří se nám dočíst vstupní řetězec až do konce.

Příklad 4: Mějme abecedu $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nechť množina X obsahuje právě všechny řetězce, v nichž je obsažen stejný počet znaků a a b . Tedy například $abbccac \in X$, ale $cbaa \notin X$.

Nechť množina Y obsahuje právě všechny řetězce, které neobsahují žádné a , neobsahují podřetězec bc , a písmen c je dvakrát více než písmen b . Tedy například $ccccbb \in Y$, ale $cccbcb \notin Y$ a $acacba \notin Y$.

Sestrojíme překládací stroj D , který přeloží X na Y .

ŘEŠENÍ. Budeme překládat jenom některé vhodné řetězce z množiny X . Budou to ty řetězce, které neobsahují žádné c a všechna a v nich předcházejí všem znakům b . Takovýto řetězec přeložíme tak, že nejprve každé a prepíšeme na cc , a potom zkopírujeme na výstup všechna b . Tedy například překladem slova $aabb$ bude slovo $ccccbb$.

Formálně D bude pětice $(K, \Sigma, P, \text{čti-}a, F)$, kde $K = \{\text{čti-}a, \text{čti-}b\}$, $F = \{\text{čti-}b\}$ a překladová pravidla vypadají takto:

$$P = \{(\text{čti-}a, a, cc, \text{čti-}a), (\text{čti-}a, \varepsilon, \varepsilon, \text{čti-}b), (\text{čti-}b, b, b, \text{čti-}b)\}.$$

Proč tento překládací stroj funguje? Když vstupní řetězec obsahuje nějaké písmeno c , při jeho překládání se u prvního výskytu c náš stroj zastaví. Proto takové řetězce nemají žádný platný překlad. Podobně nemají platný překlad řetězce, v nichž není dodrženo pořadí písmen a a b . Po přečtení nějaké posloupnosti písmen a přejde stroj pomocí druhého pravidla do stavu $\text{čti-}b$, a pokud se poté ještě objeví na vstupu a , stroj se zastaví.

Platné překlady tedy existují skutečně pouze pro slova výše popsaného tvaru. Je zjevné, že překladem každého z nich získáme nějaký řetězec z Y , takže $D(X) \subseteq Y$. Naopak, vybereme-li si libovolné slovo z Y , snadno najdeme slovo z X , které se na něj přeloží. Proto také $Y \subseteq D(X)$, takže $Y = D(X)$.

P – II – 1

Parkování kočárů

Král Kazimír vdává dceru. U takové slávy (a tolika jídla zdarma) nemůže chybět žádný šlechtic z okolí. A jak tak šlechtici jedou ve svých kočárech na svatbu, vůbec netuší, kolik starostí sluhům krále Kazimíra způsobí při řešení následujícího problému.

Všechny kočáry je třeba zaparkovat, a to ne jen tak nahodile. Kočáry musí stát v řadách za sebou a těchto řad musí být co nejméně, aby královi neponičily trávník.

Dvorní etiketa káže, že až se budou hosté rozjíždět ze svatby domů, musí odjíždět seřazeni podle důležitosti, nejdůležitější host jako poslední.

To ovšem ještě není všechno. Kočáry, které jsou zaparkovány v jedné řadě, musí samozřejmě odjíždět v pořadí, ve kterém stojí. Aby se předešlo srážkám kočárů, sluhové je navíc chtějí zaparkovat tak, aby po skončení svatby odjela vždy celá jedna řada kočárů, až potom začala odjíždět další řada atd.

Soutěžní úloha. Sluhové přesně znají pořadí, v němž budou přijíždět hosté na svatbu, a znají také důležitost každého nich. Když parkují kočár, mohou ho zaparkovat *na začátek nebo na konec* libovolné již existující řady kočárů, případně ho mohou postavit do nové řady. Sluhové musí zaparkovat jednotlivé kočáry v tom pořadí, jak hosté přijíždějí.

Vášim úkolem je určit nejmenší počet řad, který stačí k tomu, aby po správném zaparkování mohly kočáry odjíždět ve stanoveném pořadí.

Formát vstupu: Vstup začíná celým číslem N ($1 \leq N \leq 100\,000$), které určuje počet hostů. Následuje N různých kladných celých čísel d_i ($1 \leq d_i \leq 10^9$), která určují důležitost hostů v pořadí, v jakém přijíždějí (větší číslo představuje důležitějšího hosta).

Formát výstupu: Výstup je tvořen jediným řádkem, který obsahuje jedno celé číslo představující nejmenší možný počet řad pro zaparkování kočárů.

Příklady:

<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>
10	1
10 9 11 12 13 8 14 7 6 100	

V tomto případě stačí držet se pravidla „kočáry méně důležité než 10 jdou na začátek řady, ostatní na konec“.

<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>
6	2
12 17 9 23 16 14	

Jedním možným řešením je zaparkovat kočáry 12 a 17 do různých řad, a pak kočár 9 postavit před kočár 12, kočár 23 za kočár 17, kočár 16 před kočár 17 a nakonec kočár 14 před kočár 16.

<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>
12	6
1 3 2 5 4 7 6 9 8 11 10 12	

V jediném optimálním řešení budou po zaparkování řady: (1 2), (3 4), (5 6), (7 8), (9 10) a (11 12).

Dluhopisy

Kleofáš nedávno zdědil po své bohaté tetičce Anastázii hromadu peněz. Nevěděl však co s nimi, a proto se rozhodl investovat je do dluhopisů. Od vás si chce nechat poradit, jak by měl svou investici optimálně spravovat.

Pro jednoduchost budeme předpokládat následující skutečnosti:

- ▷ Každý typ dluhopisu má svoji pevnou cenu, stejnou při koupi i prodeji.
- ▷ Každý typ dluhopisu má pevně daný roční výnos, který se vyplácí vždy na konci roku.
- ▷ Je možné nakoupit libovolné množství každého typu dluhopisu.

Uvažujme například následující situaci: Banka nabízí dva typy dluhopisů: Dluhopisy za 4 000 korun s ročním výnosem 400 a dluhopisy za 3 000 korun s ročním výnosem 250. Má-li Kleofáš 10 000 korun, nejlepší, co s nimi může udělat, je koupit dva dluhopisy po 3 000 a jeden za 4 000, čímž získá roční výnos 900 korun. Po dvou letech obdrží Kleofáš dvakrát výnosy a bude mít celkově kapitál 11 800 korun. V tomto okamžiku se mu vyplatí jeden dluhopis za 3 000 korun prodat a místo něj si koupit dluhopis za 4 000. Po třetím roce bude jeho kapitál roven 12 850 korunám.

Soutěžní úloha. Napište program, který přečte ze vstupu Kleofášův počáteční kapitál, ceny a výnosy nabízených dluhopisů a počet roků, na které chce Kleofáš investovat, a spočítá, kolik nejvíce peněz může Kleofáš mít po uplynutí daného počtu roků.

Formát vstupu: Na prvním řádku vstupu je jedno celé číslo K ($1 \leq K \leq 1\,000\,000$), které udává Kleofášův počáteční kapitál. Na druhém řádku je uveden počet typů nabízených dluhopisů D ($1 \leq D \leq 100$). Na třetím řádku je D dvojic celých čísel c_i a v_i , které představují ceny a výnosy jednotlivých dluhopisů ($0 < c_i \leq 10^9$, $0 \leq v_i \leq c_i/10$, c_i je vždy násobkem $T = 1000$). Na posledním řádku vstupu je uveden počet roků R ($1 \leq R \leq 40$).

Časovou složitost svého algoritmu vyjádřete pomocí K , D , T a R . Navrhněte algoritmus, který pro hodnoty K , D , T a R z výše uvedených rozsahů bude co nejrychlejší.

Formát výstupu: Výstupem programu je jediné číslo, které určuje maximální hodnotu Kleofášova kapitálu po R letech obchodování s dluho-

pisy. Můžete předpokládat, že se tato hodnota vejde do běžné celočíselné proměnné.

Příklady:

Vstup:

10000

2

4000 400 3000 250

4

Výstup:

14050

Příklad ze zadání úlohy. Ve čtvrtém roce bude Kleofáš vlastnit 3 dluhopisy po 4 000, čímž vydělá dalších 1 200.

Vstup:

100000

3

103000 9001 47000 7 83000 100

31

Výstup:

112001

Kleofáš koupí jeden dluhopis za 83 000. Tím za 30 let získá 3 000 korun. Na poslední rok si konečně může koupit první dluhopis za 103 000. V posledním roce tedy vydělá dalších 9 001.

Vstup:

100000

3

103000 9001 47000 7 83000 100

37

Výstup:

166014

Pokračování z předchozího příkladu. Po roce 36 Kleofáš dokoupí dluhopis za 47 000, takže v posledním roce získá o 7 korun více.

P – II – 3

Píškworkový turnaj

Silvestr se rozhodl, že uspořádá programátorský turnaj v píškworkách. Požádal tedy své přátele, aby vytvořili programy pro hraní píškworkek, které se turnaje zúčastní. Silvestrovi přátelé na jeho výzvu rychle zareagovali, a tak velký turnaj může začít.

Pravidla turnaje určil Silvestr velmi jednoduše: v každém kole se náhodně vylosují dva programy, které vzájemně sehrají partii, a program, který prohraje, z turnaje nadobro vypadne.

Den před turnajem však Silvestra přemohla zvědavost a zkusil pustit některé dvojice programů proti sobě. Poté si však uvědomil, že se tímto

svým počínáním připravil o velkou část překvapení spojenou s turnajem. Protože všechny programy jsou deterministické (tj. nepoužívají náhodnost), dopadne souboj každých dvou programů vždy stejně. Silvestr už tedy ví, že některé programy turnaj nemohou vyhrát. Pro jednoduchost předpokládáme, že to, který program v dvojici začne souboj, výsledek souboje těchto dvou programů neovlivní.

Soutěžní úloha. Pro dané výsledky soubojů některých dvojic programů určete, které programy mohou v turnaji ještě zvítězit.

Formát vstupu: Na prvním řádku vstupu je jedno celé číslo N ($1 \leq N \leq 100\,000$), které určuje počet programů přihlášených do turnaje. Programy jsou očíslovány od 1 do N .

Následuje N řádků, které popisují výsledky zápasů, které Silvestr již zná; i -tý z těchto řádků začíná číslem d_i , které určuje počet programů poražených i -tým programem ve vzájemných soubojích. Tento řádek pak obsahuje d_i čísel programů, které i -tý program porazil. Těchto d_i čísel je seřazeno podle velikosti od nejmenšího po největší.

Označme počet zápasů $d_1 + \dots + d_N$, které Silvestr den před turnajem spustil, jako M . Můžete předpokládat, že platí $0 \leq M \leq 1\,000\,000$. Také můžete předpokládat korektnost vstupu, tedy speciálně, že pokud program x porazil program y , pak program y neporazil program x .

Formát výstupu: Výstupem programu je jediný řádek, na kterém budou uvedena čísla všech programů, které mohou v turnaji zvítězit.

Příklady:

Vstup:

4
2 2 3
0
1 2
1 2

Výstup:

1 3 4

Do turnaje jsou přihlášeny 4 programy. Program 1 v souboji porazí programy 2 a 3, programy 3 a 4 porazí program 2. Program 2 tedy prohraje souboj s libovolným jiným programem, a tak určitě nemůže turnaj vyhrát.

Ostatní programy v turnaji však zvítězit mohou. Jako příklad si předvedme, jak může v turnaji zvítězit program 3: nejdříve program 3 vyřadí program 2, pak program 4 vyřadí program 1 a nakonec program 3 vyřadí program 4.

Vstup:

5

2 2 3

0

1 2

1 2

0

Výstup:

1 2 3 4 5

Tentokrát může zvítězit libovolný z programů 1, 2, 3, 4 a 5. Např. program 2 může zvítězit následovně: nejdříve program 3 porazí program 4, pak program 5 postupně vyřadí programy 3 a 1 a nakonec program 2 vyřadí program 5.

P – II – 4

Překládací stroje

Studijní text je stejný jako v úloze P–I–4.

Soutěžní úloha.

- a) (6 bodů) Necht M_1 je množina tvořená všemi řetězci písmen a a b , které obsahují stejný počet písmen a a b . Tedy např. $abbbba \in M_1$, avšak $aabab \notin M_1$.

Nové množiny můžeme sestrojit následujícími operacemi:

- ▷ překladem již sestrojené množiny pomocí překládacího stroje (lze použít jiné překládací stroje při různých překladech),
- ▷ sjednocením dvou již sestrojených množin, nebo
- ▷ průnikem dvou již sestrojených množin.

Pomocí co nejmenšího počtu výše popsanych operaci sestrojte množinu G , která obsahuje právě všechny řetězce písmen a , b a c , které obsahují stejné množství písmen a jako písmen b a také jako písmen c . Tedy například $aabbcc \in G$, $bac \in G$, ale $abcc \notin G$.

- b) (4 body) Množina X obsahuje zápisy kladných celých čísel v desítkové soustavě, v nichž se vyskytuje stejný počet číslic 1 a 2. Tedy například $1122 \in X$, $21231 \in X$, $47 \in X$, ale $112 \notin X$ a $031221 \notin X$ (zápis kladného čísla nemůže začínat číslicí 0).

Množina Y obsahuje zápisy v desítkové soustavě těch kladných čísel, která jsou dělitelná 7. Tedy například $140 \in Y$, $7707 \in Y$, ale $47 \notin Y$ a $07 \notin Y$.

Sestrojte překládací stroj, který přeloží množinu X na množinu Y , anebo dokažte, že takový překládací stroj neexistuje.

Karpaty

Už zanedlouho si splníte svůj velký cestovatelský sen a vydáte se na vy-touženou pouť přes celé Vnější Karpaty. Vše máte dobře naplánováno — začnete v Beskydech a budete pokračovat přes Slovensko, Polsko a Ukra-jinu až do Rumunska, odkud už se chcete vrátit skrze civilizaci. Cestou máte v úmyslu vystoupit na co nejvíce hor, kolem kterých pojedete, ale jak se znáte, tak jakmile vystoupíte na nějakou horu, už se vám nebude chtít na žádnou stejně vysokou nebo dokonce nižší.

V rámci pečlivého plánování jste si vypsali výšky všech hor v tom pořadí, v jakém kolem nich budete projíždět a přemýšlíte, na které z hor budete chtít vystoupit, abyste vystoupili během své cesty na co největší počet hor.

Po krátkém zamyšlení jste si uvědomili, že těch nejdelších posloup-ností hor takových, že jejich výšky striktně rostou, může být i více. Místo výčtu všech možností byste si raději u každé hory poznačili, zda ji navští-víte určitě (tedy pokud je v každé nejdelší posloupnosti hor, kde výšky hor rostou), zda ji můžete navštívit, nebo ji určitě nenavštívíte, pokud chcete vystoupat na co největší počet hor.

Soutěžní úloha. Pro zadanou posloupnost celých kladných čísel určete, která ze zadaných čísel leží v každé nejdelší rostoucí podposloupnosti, v nějaké nejdelší rostoucí podposloupnosti a v žádné nejdelší rostoucí podposloupnosti.

Formát vstupu: Vstup je tvořen dvěma řádky. Na prvním řádku je jedno celé číslo N , které určuje počet hor na vaší cestě. Druhý řádek pak obsahuje N celých kladných čísel $v_1 \dots v_n$, která udávají výšku hor.

Formát výstupu: Výstup je tvořen jedním řádkem s N slovy odděle-nými jednou mezerou. Slova ve výstupu jsou ‘musím’, ‘mohu’ a ‘nemohu’ podle toho, zda na danou horu musíte, můžete nebo nemůžete vystoupat, pokud chcete během své cesty zdolat co největší počet hor tak, aby jejich výšky postupně rostly.

Příklad:

Vstup

9

3 2 1 4 5 6 1 8 7

Výstup

mohu mohu mohu musím musím musím nemohu mohu mohu

Nejdelší posloupnost rostoucích hor zde má délku 5 a z první trojice a poslední dvojice vždy obsahuje právě jeden prvek.

P – III – 2

Velechrám

Oslavy 75. narozenin královny Šeherezády se blíží a v paláci se to jen hemží. Vyměňují se tapisérie, pokládají se nové koberce a přemalovávají se obrazy. Radní se rozhodli, že královnu překvapí novou duhovou výzdobou velechrámu. Chtějí nechat natřít sloupy v chrámu různými barvami, aby z toho jen oči přecházely. Aby byl výsledný dojem co nejlepší, je třeba, aby v žádné řadě sloupů neměly dva sloupy stejnou barvu. Královská pokladna však není bezedná, a proto je třeba nakoupit co nejméně druhů barev. Proto si vás zavolali na pomoc.

Soutěžní úloha. Velechrám si lze představit jako šachovnici o velikosti $N \times N$. Na čtvercových polích stojí M sloupů, tj. ne na všech polích stojí sloup. Žádné dva sloupy nestojí na stejném poli. Vaším úkolem je obarvit tyto sloupy co nejmenším počtem K barev tak, aby žádné dva sloupy ve stejném řádku nebo sloupci neměly stejnou barvu.

Formát vstupu: Na prvním řádku dostanete dvě přirozená čísla N a M , velikost šachovnice $1 \leq N \leq 500$ a počet sloupů $0 \leq M \leq N^2$.

Následuje M řádků popisujících polohu sloupů. Na i -tém z nich najdete dvě celá čísla R_i a S_i , řádek $1 \leq R_i \leq N$ a sloupec $1 \leq S_i \leq N$ pole, na kterém stojí i -tý sloup.

Formát výstupu: První řádek výstupu obsahuje minimální počet K barev. Na následujících M řádků vypište barvy sloupů. Na i -tý z těchto řádků napište číslo barvy B_i , $1 \leq B_i \leq K$, kterou má být obarven i -tý sloup. Optimálních obarvení bude zřejmě více (barvy lze například mezi sebou libovolně permutovat), vypište proto libovolné z nich.

Příklady:

Vstup:

3 4

1 1

1 3

3 3

3 1

Výstup:

2

1

2

1

2

Sloupy leží ve vrcholech čtverce. Protilehlé sloupy dostanou stejnou barvu.

Vstup:	Výstup:
4 8	3
1 1	1
1 3	2
1 4	3
2 1	2
3 3	3
4 1	3
4 2	2
4 3	1

P – III – 3

Překládací stroje

Studijní text je stejný jako v úloze P–I–4.

Uvažme následující množiny A , B , C a D řetězců. Množina A obsahuje všechny dobře uzavorkované řetězce znaků '(', ')', '[', ']', '{' a '}'. Množinu A lze rekurzivně nadefinovat následujícím způsobem: A obsahuje prázdný řetězec ε a všechny řetězce tvaru $(\alpha_1 \dots \alpha_k)$, $[\alpha_1 \dots \alpha_k]$ a $\{\alpha_1 \dots \alpha_k\}$, kde $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jsou nějaké řetězce v A již obsažené. Množina A tedy obsahuje řetězce $(([\{\}]))$ a $((())()(\{\}))$, ale neobsahuje ani jeden z řetězců $([])$ a $((()))$.

Množiny B a C jsou množiny řetězců nad dvojpísmennou abecedou $\{a, b\}$. Množina B obsahuje řetězce nejprve tvořené $n \geq 0$ písmeny a a pak alespoň $2n$ písmeny b . Množina C obsahuje ty řetězce, které jsou tvořeny stejným počtem písmen a a b . Např. $aabbbb \in B$ a $abba \in C$, ale $aaabbbb \notin B$, $bbba \notin B$ a $ababb \notin C$.

Množina D je tvořena těmi řetězci, které nejprve obsahují $n \geq 0$ písmen a , pak n písmen b a nakonec n písmen c . Tedy, $aaabbbccc \in D$, ale $aababbbccc \notin D$ a $bbbaaaccc \notin D$.

Soutěžní úloha.

- (2 body) Navrhněte překládací stroj, který přeloží množinu A na množinu B .
- (3 body) Nalezněte množinu řetězců E nad abecedou $\{a, b\}$ a překládací stroje M_1 a M_2 takové, že stroj M_1 přeloží množinu E na množinu A a stroj M_2 přeloží množinu E na množinu D .
- (5 bodů) Sestrojte překládací stroj, který přeloží množinu A na množinu C . Nezapomeňte, že nutnou součástí řešení je i důkaz, že vámi navržený překládací stroj přeloží množinu A právě na množinu C .

Sbírka čísel

Program: sbirka.pas / sbirka.c / sbirka.cpp

Vstup: sbirka.in

Výstup: sbirka.out

Pan Pterodaktylos je sběratelem. Vášnivým a takřikajíc univerzálním. Sbírá úplně všechno: známky, motýly, známky s obrázky motýlů, ba dokonce i všechna přirozená čísla. Těch má několik zvláště vydařených sbírek.

Každá sbírka čísel je určena parametry B a D a obsahuje všechna nezáporná celá čísla, která se dají zapsat v soustavě o základu B pomocí nejvýše D číslic.¹ Tato čísla jsou ve sbírce seřazena důmyslným způsobem: nejprve vzestupně podle svého ciferného součtu a uvnitř každé skupiny se stejným ciferným součtem pak vzestupně podle hodnoty čísel. Například sbírka označená parametry $B = 3$, $D = 2$ obsahuje nejvýše dvouciferná čísla v trojkové soustavě, a to v následujícím pořadí: 0; 1, 10; 2, 11, 20; 12, 21; 22 (středníkem jsou odděleny bloky čísel se stejným ciferným součtem).

Pro větší hodnoty B a D je taková sbírka dosti rozsáhlá. Pokud pan Pterodaktylos chce ze sbírky vytáhnout k -té číslo v pořadí, čeká ho obvykle dlouhá cesta mezi kilometry regálů, než se k němu dostane. Vás napadlo, že to vůbec není potřeba — když víte, že sbírka obsahuje opravdu všechna čísla, lze k -té číslo v pořadí snadno spočítat.

Úloha. Napište program, který dostane parametry B a D sbírky čísel a číslo k a odpoví k -tým číslem ve sbírce.

Vstup: Vstupní soubor `sbirka.in` obsahuje jediný řádek, na němž jsou zapsána tři čísla oddělená mezerami: základ soustavy B ($2 \leq B \leq 10$), délka čísla D ($1 \leq D \leq 30$) a pořadí hledaného čísla ($1 \leq k \leq 10^{18}$). Můžete se spolehnout na to, že všechna čísla ve sbírce jsou menší než 10^{18} .

Výstup: Výstupní soubor `sbirka.out` obsahuje jediný řádek a na něm k -té číslo sbírky zapsané v soustavě o základu B . Nevýznamné nuly na začátku čísla nevpisujte.

¹ Připomeňme, že zápis $x_{k-1} \dots x_0$, $x_i \in \{0, \dots, B-1\}$, v soustavě o základu B představuje číslo $\sum_{i=0}^{k-1} x_i B^i$.

Příklad 1:

sbirka.in

3 2 5

sbirka.out

11 (*viz příklad sbírky výše*)

Příklad 2:

sbirka.in

10 15 9999999999999998

sbirka.out

9999999999999998

P – III – 5

Strouhání mrkve

Program: mrkev.pas / mrkev.c / mrkev.cpp

Vstup: mrkev.in

Výstup: mrkev.out

Jak zajíček Hopsálek stárnul, začaly mu padat zuby. Dostal sice pěknou zubní protézu, ale už si nemohl pochutnávat na své oblíbené mrkvi. Rozhodl se tedy, že začne provozovat továrnu na strouhání mrkve. Do továrny pak může přijít zaječí důchodce a mrkev mu tam nastrouhají, aby si na ní mohl pochutnat i v pokročilém věku.

Hopsálek plánuje, že továrna bude fungovat na směny. Každá směna bude trvat přesně M minut a směny budou následovat bezprostředně jedna za druhou. První směna musí začít v jedné z prvních M minut provozu.

Továrna pracuje jenom tehdy, když do ní přijde nějaký (za)ječící důchodce. Pokud víme, že v průběhu celé směny neprijde ani jeden, můžeme směnu zrušit a tím ušetřit.

Úloha. Zjistili jste přesně, v jakých minutách budou do továrny chodit mrkvechtiví důchodci. Mrkev stihnou zaměstnanci továrny nastrouhat ještě v té minutě, kdy ji zákazník přinesl. Vaším úkolem je zjistit, kterou z prvních M minut má začít první směna, aby bylo směn, ve kterých se v továrně pracuje, co nejméně.

Vstup: Na prvním řádku vstupního souboru `mrkev.in` jsou dvě mezerou oddělená přirozená čísla M a N ($1 \leq M, N \leq 1\,000\,000$). M je délka trvání každé směny v minutách, N je počet zaječích seniorů, kteří si přijdou nechat nastrouhat mrkev. Na druhém řádku je mezerou oddělených N přirozených čísel $z_1 < z_2 < \dots < z_N$ — čísla minut příchodu zaječích zákazníků. Všechna z_i splňují $M < z_i < 2\,000\,000\,000$ a minuty jsou číslovány od jedné.

Výstup: Na první řádek výstupního souboru `mrkev.out` vypište jedno přirozené číslo S — nejmenší počet směn, ve kterých se musí v továrně pracovat, tj. těch, které nebudou zrušeny. Na druhý řádek vypište, kterou minutou musí začínat první směna, aby bylo třeba pracovat jenom S směn. Pokud je možností více, vypište všechny v *rostoucím* pořadí oddělené právě jednou mezerou.

Příklad 1:

<i>Vstup</i>	<i>Výstup</i>	
5 4	2	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
7 8 14 16	2 4	

Šedivou barvou jsou označeny příchody zaječích stařešinů. Spodní dva řádky znázorňují dvě optimální řešení, černé jsou směny, ve kterých se v továrně pracuje.

Příklad 2:

<i>Vstup</i>	<i>Výstup</i>
5 4	3
7 9 14 17	1 2 3 4 5

V této situaci jsou všechny možné začátky stejně dobré. Nezapomeňte na to, že je musíte vypsát setříděné.

Kategorie Z5

Texty úloh

Z5 – I – 1

Kuchyňský stůl má tvar obdélníku o rozměrech $90\text{ cm} \times 140\text{ cm}$. Chceme na něj ušít ubrus tak, aby na všech okrajích stolu přesahoval stejně.

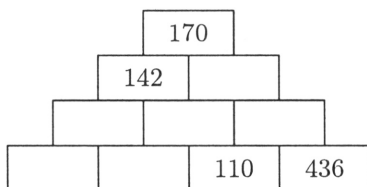
- a) Kolik látky šířky 140 cm je třeba koupit, abychom již nemuseli látku stříhat?
- b) Kolik centimetrů bude tento ubrus na každé straně přesahovat?

(Světlana Bednářová)

Z5 – I – 2

Doplň na prázdné cihličky pyramidy z obr.35 chybějící čísla tak, aby platilo: na každé cihličce (kromě spodní řady) je napsané číslo, které se rovná polovině součtu čísel napsaných na dvou sousedních cihličkách z nižšího řádku.

(Světlana Bednářová)



Obr. 35

Z5 – I – 3

Ve školce mají stavebnici ze stejně velkých molitanových kvádrů. Délky jejich hran v centimetrech jsou celá čísla. Když děti chtějí postavit věž, položí všechny kvádry na sebe tak, aby na sobě ležely stejnými stěnami a aby v žádném patře nebyly dva kvádry vedle sebe. Takto se jim po-

stupně podařilo postavit tři různě vysoké věže. První měla výšku 120 cm, druhá 130 cm a třetí 150 cm. Kolik kvádrů mohly děti ve školce mít?

(Světлана Bednářová)

Z5 – I – 4

Trojčata právě oslavila své třetí narozeniny. Za pět let bude součet jejich věků roven dnešnímu stáří jejich matky. Kolik let bude jejich matce za pět let?

(Marie Krejčová)

Z5 – I – 5

Číslo se nazývá *mazané*, jestliže počínaje od jeho třetí číslice zleva platí: Každá jeho číslice je součtem všech číslic ležících nalevo od něj.

a) Uveď dvě největší mazaná čísla.

b) Kolik je všech čtyřmístných mazaných čísel? (Světлана Bednářová)

Z5 – I – 6

Doplň do prázdných políček přirozená čísla od 1 do 16 (každé číslo můžeš použít jen jednou) tak, aby platily matematické vztahy:

$$\square \xrightarrow{+8} \square \xrightarrow{:5} \square \xrightarrow{+10} \square$$

$$\square \xrightarrow{:4} \square \xrightarrow{+6} \square \xrightarrow{+1} \square$$

$$\square \xrightarrow{:7} \square \xrightarrow{:2} \square \xrightarrow{+4} \square$$

$$\square \xrightarrow{+4} \square \xrightarrow{:2} \square \xrightarrow{+3} \square$$

(Miroslava Smitková)

Z5 – II – 1

Polovina dětí 5.A chodí na taneční kroužek. Dívky chodí všechny a z 18 chlapců chodí jedna třetina.

a) Kolik dětí chodí do 5.A?

b) Kolik dívek chodí do 5.A?

(Marta Volfová)

Z5 – II – 2

Marek sečetl čtyři po sobě jdoucí dvojmístná čísla a výsledek zaokrouhlil na desítky. Jirka vzal stejná čísla, nejdříve je zaokrouhlil na desítky a potom je sečetl. Jeho výsledek byl o deset větší než Markův. Která čísla chlapci sčítali, když jejich výsledky byly menší než 100? Najděte všechna možná řešení.

(*Monika Dillingerová*)

Z5 – II – 3

Maminka šije utěrky z látky šíře 120 cm. Hotová utěrka má rozměry 60 cm × 38 cm. Při stříhání látky je potřeba počítat 2 cm na každém okraji na začištění. Kolik nejméně centimetrů látky musí maminka koupit, aby z ní mohla ušít 10 utěrek?

(*Monika Dillingerová*)

Kategorie Z6

Texty úloh

Z6 – I – 1

Jirka koupil dvě čokolády v obchodě naproti škole. Michal si koupil stejné dvě čokolády v obchodě za školou a Ivan si koupil jednu takovou čokoládu, ale ve školním bufetu. Potom zjistili, že průměrně je vyšla jedna čokoláda na 19,70 Kč. Cena zakoupených čokolád je o 6 Kč vyšší, než kdyby chlapci nakoupili všech 5 čokolád v obchodě naproti škole, a o 6,50 Kč nižší, než kdyby nakupovali jen v obchodě za školou. Za kolik korun prodávají čokoládu v jednotlivých obchodech? *(Monika Dillingerová)*

Z6 – I – 2

Michal měl barevné nálepky dvou druhů ve tvaru pravoúhlých rovno-ramenných trojúhelníků. První nálepka měla ramena délky 5 cm, těch bylo 9. Druhá měla nejdelší stranu dlouhou 10 cm a těchto nálepek bylo 17. Kolik nálepek prvního druhu si má Michal ještě dokoupit, aby všemi svými nálepkami mohl oblépit (pokrýt) stěny krychle s hranou délky 10 cm? *(Monika Dillingerová)*

Z6 – I – 3

V rovině mají ležet body A , B , C , D tak, aby platilo: $|AB| = 7$ cm, $|BC| = 8$ cm, $|CD| = 5$ cm a $|DA| = 9$ cm.

- Urči největší možnou vzdálenost bodů A a C .
- Urči nejmenší možnou vzdálenost bodů A a C . *(Libor Šimůnek)*

Z6 – I – 4

Při chudokrevnosti se doporučuje pít směs šťávy z mrkve a červené řepy. Červená řepa však má tvořit pouze $1/5$ z objemu nápoje. Ze dvou kilo-

gramů mrkve získáme v odšťavňovači 7,5 dl šťávy. Z jednoho kilogramu červené řepy získáme 6 dl šťávy.

- a) Jaké množství mrkve potřebujeme na 250 gramů červené řepy, abychom získali správně namíchanou směs šťávy?
b) Jaké množství šťávy takto získáme? (Světлана Bednářová)

Z6 – I – 5

Řekne-li mimozemšťan v rozhovoru o Vánocích „haf quin lina“, znamená to „velké zlaté hvězdy“; když „kari lina mejk“, znamená to „blikavá zlatá kolečka“; když „esca haf kari“, znamená to „červená velká kolečka“. Jak se řekne „blikavé hvězdy“? (Zapiš svou úvahu.) (Marta Volfová)

Z6 – I – 6

Z čísel 532 a 179 vyškrtni dohromady dvě číslice, aby součin takto vzniklých čísel byl co největší. (Monika Dillingarová)

Z6 – II – 1

Na zahradě pana Kozla kvetlo několik třešní. Na každé třešni seděli tři špačci a ještě jeden seděl na plotě. Pes pana Kozla je vyplašil a špačci uletěli. Za chvíli se všichni vrátili a usadili se na třešně. Třešeň, pod kterou spal pes, zůstala prázdná, na každé z ostatních se usadili čtyři špačci. Kolik třešní má pan Kozel a kolik bylo na zahradě špačků?

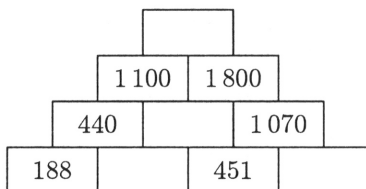
(Libuše Hozová)

Z6 – II – 2

Je dán trojúhelník ABC takový, že pata P kolmice z bodu C na přímkou AB leží uvnitř úsečky AB . Z bodu P jsou vedeny kolmice p, q na přímky AC a BC (v uvedeném pořadí). Označme S průsečík přímky BC a přímky q , T průsečík přímky AC a přímky p . Vypočítej velikost úhlu ACB , pokud víš, že $|\sphericalangle APT| + |\sphericalangle BPS| = 20^\circ$. (Monika Dillingarová)

Z6 – II – 3

Na obr. 36 je zaokrouhlovací sčítací pyramida. Do každé cihly (kromě těch z nejspodnějšího řádku) patří součet čísel napsaných na dvou s ní sousedících cihlách z nižšího řádku, ovšem patřičně zaokrouhlený: součty



Obr. 36

ve druhém řádku odspodu zaokrouhlujeme na desítky, ve třetím na stovky a v nejvyšším čtvrtém na tisíce. Doplňte do prázdných cihel pyramidu největší možná celá čísla.

(Monika Dillingerová)

Kategorie Z7

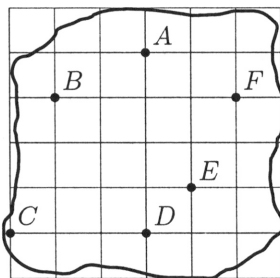
Texty úloh

Z7 – I – 1

Číslo je *trochu nešťastné*, je-li násobkem čísla 13. Číslo, které je násobkem čísla 17, se nazývá *trochu usměvavé*. Kolik existuje čísel mezi přirozenými čísly od 1 do 1 000 000, která nekončí nulou ani pětkou a jsou přitom zároveň trochu nešťastná a trochu usměvavá? (Marta Volfová)

Z7 – I – 2

Vláda země Tramtárie se rozhodla, že své území rozdělí do šesti okresů. Vybrala proto šest nejvýznamnějších měst a každému chce přiřadit okres podle následujícího klíče: každé místo v zemi patří do okresu toho města, které je danému místu nejbližší. Překreslete si ve vhodném měřítku mapu Tramtárie (obr. 37) a narýsujte do ní hranice okresů. (Okresní města jsou označena písmeny A–F, silná čára značí hranice Tramtárie. Pomyslná čtvercová síť má pouze usnadňovat orientaci v mapě a nijak neovlivňuje hranice okresů!) (Libor Šimůnek)



Obr. 37

Z7 – I – 3

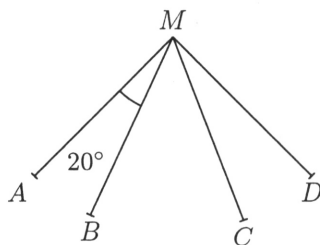
Ve 12 hodin stála na parkovišti česká, německá a francouzská auta, a to v poměru 9 : 4 (česká ku německým) a 2 : 3 (německá ku francouzským). Během hodiny odjelo jedenáct a přijelo pět českých aut, odjelo jedno a přijelo jedenáct německých aut a odjela tři a přijelo šest francouzských aut. Jaký je poměr českých, německých a francouzských aut ve 13.00 na parkovišti, když ve 12.00 tam bylo dvanáct francouzských aut?

(Šárka Ptáčková)

Z7 – I – 4

Úsečky AM , BM , CM a DM uspořádané jako na obr. 38 mají stejnou délku. Úhly, které svírají, mají velikosti 20° , 20° , 50° , 50° , 70° a α . Jaká je velikost úhlu, který svírají přímky AB a CD ? (Obrázek je nepřesný, nevypatí se měřit.)

(Michaela Raabová)



Obr. 38

Z7 – I – 5

Políčka na šachovnici 4×4 vybarvi 4 barvami a vepiš do nich 4 písmena J, A, R, O tak, aby v každém řádku i každém sloupci byly zastoupeny všechny barvy i všechna písmena. (Každé políčko bude obsahovat právě jedno písmeno a bude vybarveno jednou barvou. Každé písmeno musí být vybarveno postupně všemi barvami a také každá barva musí vystřídat všechna písmena.) Najdi aspoň jedno řešení.

(Marta Volfová)

Z7 – I – 6

Na papíře je napsáno několik bezprostředně po sobě jdoucích přirozených čísel. Je mezi nimi 12 násobků čísla 5 a 10 násobků čísla 7.

a) Kolik přirozených čísel je na papíře napsáno?

b) Najdi jednu řadu čísel, která odpovídá těmto podmínkám.

(*Libor Šimůnek*)

Z7 – II – 1

Máme rovnoběžník $ABCD$ ($|AB| \neq |BC|$) s vnitřním úhlem 72° u vrcholu A . Jedním vrcholem tohoto rovnoběžníku vedeme dvě přímky, které rovnoběžník rozdělují na tři rovnoramenné trojúhelníky. Určete velikosti vnitřních úhlů těchto trojúhelníků.

(*Libuše Hozová*)

Z7 – II – 2

Král Líného království vydal v neděli 1. dubna 2007 dekret, kterým vyřadil ze všech následujících týdnů pátky. Od té doby v jeho království následuje vždy po čtvrtku sobota a týden má jen šest dní. Který den v týdnu připadne v Líném království na 9. dubna 2008? (Nezapomeňte, že rok 2008 je přestupný!)

(*Libor Šimůnek*)

Z7 – II – 3

U Nováků napekli svatební koláče. Čtvrtinu zavezli příbuzným na Moravu, šestinu rozdali kolegům v práci a devítinu dali sousedům. Kdyby jim zůstalo o tři koláče více, byla by to polovina původního počtu. Kolik koláčů napekli?

(*Marta Volfová*)

Kategorie Z8

Texty úloh

Z8 – I – 1

Najděte všechna čtyřmístná čísla dělitelná třemi, která po vynásobení číslem 17 dávají součin končící trojčíslím 519. *(Libuše Hozová)*

Z8 – I – 2

Najděte všechny trojice přirozených čísel menších než 10, jejichž součin je sedminásobkem jejich součtu. *(Libuše Hozová)*

Z8 – I – 3

Jano si koupil sedmimílové boty. Jeho kamarád Honza z Čech si koupil létající koberec. Potom se oba dva zúčastnili pohádkového dvanáctihodinového závodu. Během závodu měli hlad, a tak se oba dva zastavili na jídlo. Oběma zabrala přestávka na jídlo jednu hodinu. Kdyby se Honza nezastavil po cestě na vepřo-knedlo-zelo, předběhl by Jana o 51 kilometrů. Kdyby se Jano nestavil na bryndzové halušky, předběhl by Honzu o 28 kilometrů. Jak daleko od sebe by skončili, kdyby nejedl ani jeden z nich? Kdo z nich by byl první? *(Monika Dillingerová)*

Z8 – I – 4

V Tramtárii mají pět lékařských fakult, z nichž každá může přijmout do prvního ročníku 200 studentů. Příjímací zkoušky na jednotlivé fakulty se konají v různé dny, proto si studenti mohou podat přihlášku na více škol. Ptali jsme se na jednotlivých fakultách, kolik dostali přihlášek pro rok 2007/08. Získali jsme tyto odpovědi:

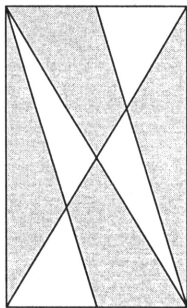
1. fakulta: „Dostali jsme pětkrát více přihlášek, než kolik jsme měli volných míst.“
2. fakulta: „U nás počet uchazečů převyšoval kapacitu o 320 %.“

3. fakulta: „Na naši fakultu se hlásilo o 510 uchazečů více, než kolik jsme mohli přijmout.“
4. fakulta: „U nás na každé volné místo připadly v průměru 3 přihlášky.“
5. fakulta: „K nám se hlásilo o tři čtvrtiny zájemců více, než kolik jsme měli míst.“

V akademickém roce 2007/08 nakonec na lékařské fakulty nastoupilo do 1. ročníku 1 000 studentů. Ze statistik vyplývá, že zájemce o studium medicíny podal na lékařské fakulty průměrně 2,5 přihlášky. Kolik zájemců se nedostalo na žádnou z fakult? *(Libor Šimůnek)*

Z8 – I – 5

Pan Poleno s panem Střepinou vyráběli nové domovní dveře o velikosti 3 m^2 . Rám dveří tvaru obdélníku, jeho úhlopříčky a dvě další příčky, které spojovaly dva vrcholy obdélníku se středy protilehlých stran, byly z kovových tyčí. Pan Poleno vyplnil dřevem čtyři tmavé části dveří a pan Střepina zbývající části dveří zasklil (obr. 39). Kolik metrů čtverečních dřeva potřeboval pan Poleno na výplň dveří? *(Libuše Hozová)*



Obr. 39

Z8 – I – 6

Uprostřed náměstí v Kocourkově je čtvercový travnatý záhon. Kocourkovští zjistili, že zapomněli udělat chodník. Proto na něj z každého okraje záhonu ubrali 2 metry. Před položením zámkové dlažby a písku pod ní bylo třeba pod celou plochu chodníku vykopat půl metru hluboký výkop. Odkopáním trávy a hlíny se záhon zmenšil o $1\,200\text{ m}^2$.

a) Vypočítejte obsah plochy zbylého travnatého záhonu.

- b) Kolik m^3 písku je pod dlažbou, jestliže povrch dlažby je v rovině s travnatým záhonem a výška dlaždice je 8 cm?

(*Miroslava Smitková*)

Z8 – II – 1

Tým chce v sezóně vyhrát $\frac{3}{4}$ všech svých zápasů. V první třetině z nich však vyhrál jen 55 % zápasů.

- a) Kolik procent zbývajících zápasů by musel tým vyhrát, aby dosáhl zamýšleného cíle?
- b) Kdyby tým vyhrál všechny zbývající zápasy, kolik procent svých zápasů by v celé sezóně vyhrál?

(*Marta Volfová*)

Z8 – II – 2

Jakou část obsahu nerovnoramenného lichoběžníku $KLMN$ ($KL \parallel MN$) tvoří obsah trojúhelníku ABC , kde A je střed základny KL , B je střed základny MN a C je střed ramene KN ?

(*Libuše Hozová*)

Z8 – II – 3

Aby přirozené číslo přinášelo Liborovi štěstí, musí být jeho druhá mocnina dělitelná čísly sedm, osm, devět i deset. Najděte všechna přirozená čísla menší než 1 000, která Liborovi přinášejí štěstí. (*Libor Šimůnek*)

Kategorie Z9

Texty úloh

Z9 – I – 1

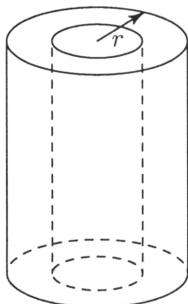
Najděte všechna čtyřmístná čísla končící číslicí 9, která jsou dělitelná každou svou číslicí. *(Pavel Thustý)*

Z9 – I – 2

Petr se ptal babičky, kolik je dědečkovi let. Babička mu odpověděla takto: „To víš, už dávno nám není padesát, ale zase nám ještě není osmdesát let. Když vynásobíš součet mého a dědečkova věku jejich rozdílem a k výsledku přičteš oba naše věky, dostaneš 492.“ „Aha,“ řekl po chvíli Petr, „tak to je dědečkovi...“ Kolik let je Petrovu dědečkovi, víte-li, že je starší než Petrova babička? *(Michaela Raabová)*

Z9 – I – 3

Středem rotačního válce s podstavou o poloměru r a výškou v byl vyvrtán válcový otvor. Objem takto vzniklého „dutého válce“ je poloviční než objem válce původního. Vyjádřete tloušťku stěny dutého válce pomocí r . *(Marie Krejčová)*



Z9 – I – 4

Minulou divadelní sezónu se prodávaly vstupenky za jednotnou cenu 160 Kč. Pro letošní sezónu se sedadla rozdělila do dvou kategorií. Místa I. kategorie stojí 180 Kč, místa II. kategorie 155 Kč. Pokud jsou všechna sedadla v sále rozprodána, je celková tržba stejná jako při vyprodaném představení loni. Ředitel divadla však není s tímto rozdělením spokojen, a pro příští sezónu plánuje změnu: z nejméně atraktivních míst současně II. kategorie vytvoří novou III. kategorii. Aby se tržba za vyprodaný sál nezměnila, rozhodl, že vstupenky budou stát 180 Kč (I. kategorie), 160 Kč (II. kategorie) a 130 Kč (III. kategorie). V jakém poměru budou příští sezónu počty sedadel jednotlivých kategorií? *(Libor Šimůnek)*

Z9 – I – 5

Jirka koupil dvě čokolády v obchodě naproti škole. Michal si koupil stejné dvě čokolády v obchodě za školou a Ivan si koupil jednu takovou čokoládu, ale ve školním bufetu. Cena zakoupených čokolád je o 6 Kč vyšší, než kdyby chlapi nakoupili všech 5 čokolád v obchodě naproti škole, a je o 6,50 Kč nižší, než kdyby nakupovali jen v obchodě za školou. Ve školním bufetu prodávají čokoládu za 19,50 Kč. Kolik zaplatili kluci za všech pět čokolád dohromady? Kolik stojí jedna čokoláda v obchodě za školou? *(Monika Dillingrová)*

Z9 – I – 6

V rovině je dán čtyřúhelník $ABCD$. Sestrojte bod K , který je vrcholem rovnoběžníku $BCDK$, a bod L , který je vrcholem rovnoběžníku $CDAL$. Ukažte, že přímka KL prochází středem strany AB daného čtyřúhelníku $ABCD$. *(Jaroslav Švrček)*

Z9 – II – 1

Bára si napsala dvě různá celá čísla. Potom je (ve stejném pořadí) sečetla, odečetla, vynásobila a vydělila. Dostala čtyři výsledky, jejichž součet byl -100 . Když vynechala výsledek sčítání a sečetla zbývající tři výsledky, dostala také součet -100 . Jaká čísla mohla Bára původně napsat? *(Šárka Černíčková)*

Z9 – II – 2

Z krychlíček o hraně 1 cm jsme postavili kvádr. Kdybychom z kvádru odebrali jeden sloupec, zbytek stavby by se skládal z 602 krychlíček. Pokud bychom místo toho odebrali jeden řádek horní vrstvy, zůstala by nám stavba z 605 krychlíček. Jaké má kvádr rozměry? (*Libor Šimůnek*)

Z9 – II – 3

Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky a a úsečka KL délky $5a$ tak, že $A \equiv K$ a strana AB leží na úsečce KL . Čtverec $ABCD$ se „kutálením“ (otáčením kolem pravého dolního rohu čtverce o 90°) pohybuje po úsečce KL tak dlouho, než strana AB opět splyne s částí úsečky KL ($B \equiv L$).

a) Narýsujte, jak se bude pohybovat bod S , který je středem strany AB .
b) Určete délku křivky, kterou bod S při pohybu opsal.

(*Marta Volfová*)

Z9 – II – 4

Severských závodů psích spřežení se zúčastnilo dohromady celkem 315 dvojspreží a trojspreží. Do cíle dorazilo ve stanoveném limitu 60 % všech dvojspreží a $\frac{1}{3}$ všech trojspreží, takže do cíle dorazila včas přesně polovina všech psů. Kolik dvojspreží a kolik trojspreží závodilo?

(*Lubomír Černíček*)

Z9 – III – 1

Ve Lhotě volili starostu. Kandidovali dva občané: Ing. Schopný a jeho manželka Dr. Schopná. V obci byly tři volební místnosti. V první i druhé místnosti dostala více hlasů Dr. Schopná. V první byl poměr hlasů 7 : 5, ve druhé 5 : 3. Ve třetí volební místnosti byl poměr hlasů 3 : 7 ve prospěch Ing. Schopného. Volby nakonec skončily nerozhodně, oba kandidáti totiž získali stejný počet hlasů. V jakém poměru byly počty odevzdaných platných hlasovacích lístků v jednotlivých volebních místnostech, víme-li, že v první a druhé místnosti odevzdal platný hlas stejný počet lidí?

(*Libor Šimůnek*)

Z9 – III – 2

Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$), kde $|AB| > |CD|$. Bodem A se dají vést dvě přímky tak, aby rozdělily lichoběžník na tři

rovnoramenné trojúhelníky. Určete velikosti úhlů lichoběžníku $ABCD$.
(Libuše Hozová)

Z9 – III – 3

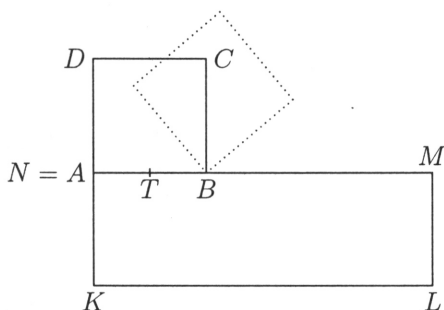
Najděte všechna kladná celá čísla x, y , pro která platí:

$$1 + x + y + xy = 2008.$$

(Libuše Hozová)

Z9 – III – 4

Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky a a obdélník $KLMN$ o stranách délek $|KL| = 3a$ a $|LM| = a$. Na počátku je čtverec $ABCD$ umístěn tak, že $A = N$ a strana AB leží na straně NM . Čtverec $ABCD$ se otáčením kolem svých vrcholů pohybuje jedním směrem po obvodu obdélníku $KLMN$ (obr. 40) tak dlouho, než se opět dostane do původní polohy.



Obr. 40

- Narýsujte dráhu, po níž se bude pohybovat bod T , který je středem strany AB .
- Určete obsah plochy ohraničené křivkou, kterou opisuje bod T .

(Monika Dillingerová)

Přípravné soustředění před 49. MMO

Výběrové soustředění pro přípravu na mezinárodní matematickou olympiádu proběhlo od 7.–11. dubna 2008 v Kostelci nad Černými lesy. Na soustředění bylo pozváno 11 nejlepších řešitelů III. kola. Soustředění bylo zaměřeno na přípravu reprezentantů a posloužilo ke konečné nominaci šestičlenného družstva.

Úspěšnost jednotlivých studentů ukazuje následující tabulka:

Josef Tkadlec	7/8 GJK Praha 6, Parlérova	90,5
Miroslav Klimoš	3/4 GMK Bílovec, 17. listopadu	77
Samuel Říha	3/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	68
David Klaška	2/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	63,5
Tomáš Hřebejk	8/8 G Praha 4, Písnická	58
Jakub Töpfer	7/8 GJK Praha 6, Parlérova	56
Jan Matějka	7/8 G České Budějovice, Jírovcova	53,5
Alena Skálová	6/6 G Praha 4, Na Vítězné Pláni	51,5
Alena Peterová	8/8 G Dobruška	50,5
Van Nhan Nguyen	7/8 G Praha 6, Nad Alejí	43
Van Minh Nguyen	5/6 G Tachov	38

Na základě uvedených výsledků, v nichž jsou započítány i výsledky oblastního a celostátního kola, bylo tedy vybráno reprezentační družstvo. Z první šestice se omluvil David Klaška, takže ho nahradil sedmý Jan Matějka a náhradnicí se tak stala osmá Alena Skálová. Toto družstvo nás reprezentovalo i na již tradičním střetnutí s družstvy Slovenska a Polska.

Jednotlivé semináře vedli a úlohy připravili:

dr. *Jaroslav Zhouf* (7. 4.),

dr. *Karel Horák* (8. 4.),

dr. *Martin Panák* (9. 4.),

dr. *Jaroslav Švrček* (10. 4.)

a doc. *Jaromír Šimša* (11. 4.).

Úlohy zadané na přípravném soustředění

1. Adam a Borek hrají hru na neohraničeném čtverečkováném papíru. Adam vždy vyznačí čtverec 2×2 nebo 3×3 a Borek v něm začerní jeden čtvereček. Zakreslované čtverce se mohou překrývat, ale nesmějí to být ty samé, které již jednou byly vyznačeny, a také začerněný čtvereček musí být pokaždé jiný. Borek vyhraje, jestliže se mu podaří udělat aspoň 20 tahů, jinak vyhrává Adam. Kdo vyhraje při bezchybné hře?

2. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Bod P leží na oblouku AVB , kde V je průsečík výšek trojúhelníku ABC . Přímky AP , BP protnou strany BC , AC postupně v bodech Q , R . Najděte množinu středů úseček QR .

3. Je dáno přirozené číslo $n > 6$. Uvažujme všechna přirozená čísla z otevřeného intervalu $(n(n-1); n^2)$, která jsou nesoudělná s číslem $n(n-1)$. Dokažte, že největší společný dělitel všech těchto čísel je 1.

4. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \geq 1$ a libovolná kladná reálná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí nerovnost

$$(1+x_1)(1+x_1+x_2)\dots(1+x_1+x_2+\dots+x_n) \geq \sqrt{(n+1)^{n+1}} \sqrt{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

5. Jsou dány dvě kružnice k_1 , k_2 , jež se protínají v bodech A a B . Označme PQ a RS úseky jejich společných tečen (body P , R leží na k_1 , body Q , S na k_2) a W další průsečík kružnice k_2 s polopřímku RB . Určete poměr $|RB|/|BW|$, jestliže $RB \parallel PQ$.

6. Označme postupně A_1 , B_1 , C_1 body dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ABC se stranami BC , CA , AB . Další průsečík úsečky AA_1 s vepsanou kružnicí označme Q . Průsečíky přímk A_1C_1 a A_1B_1 s přímkou p procházející vrcholem A rovnoběžně s BC označme P a R . Dokažte, že úhly PQR a B_1QC_1 mají stejnou velikost.

7. Ve čtverci 300×300 je n čtverečků začerněno tak, že žádné tři černé čtverečky netvoří „roh“ (trojici sousedních čtverečků uspořádaných do tvaru L), a přitom začerněním libovolného bílého čtverečku už nějaký černý roh vznikne. Najděte nejmenší možné n .

8. V trojúhelníku ABC označme A_0 , B_0 průsečíky příslušných os vnitřních úhlů při vrcholech A a B s kružnicí trojúhelníku opsanou a A_1 , B_1 průsečíky obou os s odpovídajícími stranami BC a CA . Průsečík přímk A_0B_0 a A_1B_1 označme P . Dokažte, že spojnice bodu P se středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC je rovnoběžná se stranou AB .

9. Máme rovnoramenné váhy a sadu $n + 1$ závaží, jejichž hmotnosti v uncích jsou celá kladná čísla a jejichž úhrnná hmotnost je $2n$ uncí. Závaží po jednom umísťujeme od nejtěžšího po nejlehčí na váhy tak, že je položíme vždy na tu misku, na které jsou závaží o menší celkové hmotnosti. Pokud v některém kroku (třeba na počátku) jsou váhy v rovnováze, vybereme misku libovolně. Dokažte, že po umístění všech závaží budou váhy v rovnováze.

10. Nechtě x, y, z jsou nezáporná reálná čísla splňující rovnost $x + y + z + xyz = 4$. Dokažte, že

$$x + y + z \geq xy + yz + zx.$$

11. Jsou dány dvě různoběžky p a q protínající se v bodě P . Pro libovolný bod O na p (mimo bod P) uvažme kružnici k_1 se středem O , která se dotýká přímky q , a dále kružnici k_2 , která se dotýká přímk p, q i kružnice k_1 . Nalezněte množinu všech bodů dotyku takových kružnic k_1 a k_2 .

12. Uvažujme trojúhelník ABC , v němž (při obvyklém označení velikostí vnitřních úhlů) je $\beta > \gamma$. Označme E střed kružnice připsané straně BC uvažovaného trojúhelníku. Nechtě M a N jsou po řadě takové body stran AB a AC , že EM je osou úhlu AEB a N osou úhlu AEC . Dokažte větu: Protínají-li se přímky MN a BC v bodě L , pak platí

$$|\sphericalangle BEL| + |\sphericalangle CEL| = 180^\circ.$$

13. Jsou dána dvě celá čísla m, n taková, že $0 \leq m \leq 2n$. Dokažte, že číslo

$$2^{2n+2} + 2^{m+2} + 1$$

je druhou mocninou nějakého přirozeného čísla, právě když $m = n$.

14. V rovině je dán trojúhelník ABC , v němž $|AB| < |BC|$. Uvažujme takový bod D jeho strany AC , pro který platí $|AB| = |BD|$. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká jeho stran AB a AC po řadě v bodech K a L . Označme J střed kružnice vepsané trojúhelníku BCD . Dokažte, že přímka KL prochází středem úsečky AJ .

15. Pro každé přirozené n určete všechny mnohočleny tvaru

$$n!x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + (-1)^n(n+1)n$$

s celočíselnými koeficienty $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$, které mají n různých reálných kořenů $x_1, x_2, \dots, x_n$ splňujících nerovnosti $k \leq x_k \leq k+1$ pro všechna $k = 1, 2, \dots, n$.

16. Daný trojúhelník $A_1A_2A_3$ není pravoúhlý a kružnice $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$, $k_3(O_3, r_3)$ mají následující vlastnosti:

- (i) $A_2, A_3 \in k_1$, $A_1, A_3 \in k_2$, $A_1, A_2 \in k_3$,
- (ii) kružnice k_3 má vnitřní dotyk s každou z kružnic k_1 , k_2 , které samy mají vnější dotyk.

Za předpokladu, že trojúhelníky $A_1A_2A_3$ a $O_1O_2O_3$ jsou podobné (pořadí odpovídajících si vrcholů není známo), vypočtěte jejich vnitřní úhly a zapište je ve stupních.

17. Vypište vzorcem alespoň 398 dvojic trojmístných celých kladných čísel a , b , pro něž je součet $\sqrt{a^2 - 2008b} + \sqrt{b^2 + 2008a}$ celočíselný.

18. Pro daná celá m , n větší než 1 uvažujme šestiúhelník $ABCDEF$ s vrcholy $A[0, 0]$, $B[m, 0]$, $C[m, n]$, $D[m - 1, n]$, $E[m - 1, 1]$, $F[0, 1]$ rozdělený na $m + n - 1$ jednotkových čtverců s vrcholy v mřížových bodech. Najděte počet cest z A do C po hranicích zmíněných čtverců, které každým bodem procházejí nejvýše jedenkrát. (Výsledek musí být uveden v nejjednodušším tvaru.)

Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské

V rámci závěrečné přípravy před MMO se uskutečnilo již osmé mezinárodní střetnutí mezi týmy České republiky, Polska a Slovenska. Jednotlivé země reprezentovala šestice účastníků, kteří si vybojovali ve svých zemích postup na 49. MMO v Madridu.

Soutěž se uskutečnila 23.–25. 6. 2008 v polské Zwardoni. Všechna tři reprezentační družstva přicestovala na místo konání již v neděli večer 22. 6. 2008. Organizace a průběh soutěže zůstal zachován z předešlých ročníků — je přizpůsoben stylu III. kola naší MO a podmínkám na MMO. Soutěžícím byly ve dvou dnech předloženy dvě trojice soutěžních úloh, přitom za každou z úloh mohli získat nejvýše 7 bodů, tj. celkově (stejně jako na MMO) 42 body. Na každou trojici úloh měli soutěžící vyhrazeno 4,5 hodiny.

Pořadí	Jméno	Země	body	Součet
1.	Jakub Oćwieja	POL	777776	41
2.	Karol Żebrowski	POL	777775	40
3.	Szymon Majewski	POL	277777	37
4.	Jakub Konieczny	POL	706717	28
5.	Jacek Jendrej	POL	077715	27
6.	Radosław Burny	POL	407770	25
7.	Josef Tkadlec	CZE	700771	22
8.	Michal Spišiak	SVK	007704	18
9.	Vladislav Ujházi	SVK	073700	17
10.	Miroslav Klimoš	CZE	070702	16
11.–13.	Miroslav Baláž	SVK	007503	15
	Jan Matějka	CZE	070701	15
	Samuel Říha	CZE	070710	15
14.	Tomáš Kocák	SVK	201710	11
15.	Filip Sládek	SVK	002710	10
16.–18.	Albert Herencsár	SVK	000700	7
	Tomáš Hřebejk	CZE	000700	7
	Jakub Töpfer	CZE	000700	7

Návrh všech šesti úloh (a jejich vzorová řešení) připravili kolegové z Polské republiky, řešení úloh koordinovala mezinárodní komise ve složení *Jaromír Šimša*, *Jaroslav Švrček* a *Karel Horák* za Českou republiku, *Pavol Novotný*, *Peter Novotný* a *Erika Trojáková* za Slovensko a *Waldemar Pompe*, *Jerzy Bednarczyk* a *Andrzej Grzesik* za Polsko.

Texty soutěžních úloh

1. Určete všechny trojice (x, y, z) kladných reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$2x^3 = 2y(x^2 + 1) - 1(z^2 + 1),$$

$$2y^4 = 3z(y^2 + 1) - 2(x^2 + 1),$$

$$2z^5 = 4x(z^2 + 1) - 3(y^2 + 1).$$

(*Adam Osekowski*)

2. Je dán konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ se shodnými vnitřními úhly při vrcholech A , C a E , v němž platí $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE|$ a $|EF| = |FA|$. Dokažte, že se přímky AD , BE a CF protínají ve společném bodě.

(*Waldemar Pompe*)

3. Určete všechna prvočísla p , pro něž je součet

$$\binom{p}{1}^2 + \binom{p}{2}^2 + \dots + \binom{p}{p-1}^2$$

dělitelný číslem p^3 .

(*Jarosław Wróblewski*)

4. Dokažte, že existuje přirozené číslo n takové, že pro libovolné celé číslo k nemá číslo $k^2 + k + n$ žádného prvočíselného dělitele menšího než 2008.

(*Jarosław Wróblewski*)

5. V rovině je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Určete nejmenší hodnotu výrazu

$$\frac{|PA| + |PB|}{|PC| + |PD| + |PE|},$$

kde P je libovolný bod roviny daného pětiúhelníku.

(*Waldemar Pompe*)

6. Najděte všechny trojice (k, m, n) přirozených čísel s následující vlastností: Čtverec se stranou délky m je možno rozřezat na několik pravoúhelníků o rozměrech $1 \times k$ a právě jeden čtverec se stranou délky n .

(*Jarosław Wróblewski*)

Řešení úloh

1. Předpokládejme, že trojice (x, y, z) kladných reálných čísel je řešením dané soustavy. Rozebereme tři případy podle toho, které z čísel x, y, z je nejmenší. Ukáže se, že v každém z těchto případů stačí uvažovat jen jednu rovnici soustavy. Vícekrát použijeme známou nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem n -tice kladných reálných čísel (v našem případě bude $n \in \{2, 3, 4\}$), v níž platí rovnost, právě když je všech n čísel stejných.

Je-li $x \geq y, z \geq y$, platí zřejmě nerovnosti

$$2x^3 + (z^2 + 1) \geq 2yx^2 + (z^2 + 1) \geq 2yx^2 + 2z \geq 2yx^2 + 2y = 2y(x^2 + 1),$$

tedy $2x^3 \geq 2y(x^2 + 1) - (z^2 + 1)$. Přitom rovnost nastává jen v případě, kdy $2x^3 = 2yx^2, z^2 + 1 = 2z$ a $2z = 2y$, tedy $x = y, z = 1$ a $z = y$. Těmto podmínkám, a tedy i první rovnici soustavy vyhovuje jediné trojice $x = y = z = 1$. Snadno ověříme, že tato trojice splňuje i zbylé dvě rovnice.

Je-li $x \geq z, y \geq z$, dostáváme

$$\begin{aligned} 2y^4 + 2(x^2 + 1) &\geq 2y^4 + 2 \cdot 2x = (y^4 + y^4 + x) + 3x \geq \\ &\geq (y^4 + y^2 z^2 + z) + 3z \geq 3\sqrt[3]{y^6 z^3} + 3z = 3z(y^2 + 1), \end{aligned}$$

tedy $2y^4 \geq 3z(y^2 + 1) - 2(x^2 + 1)$. Rovnost nastává jediné v případě, kdy jsou splněny podmínky $x = 1, y^4 = y^2 z^2, x = z$ a $y^4 = y^2 z^2 = z$. Tomu, a tedy i druhé rovnici soustavy vyhovuje jediné trojice $x = y = z = 1$.

Je-li $y \geq x, z \geq x$, máme podobně jako v předešlém případě

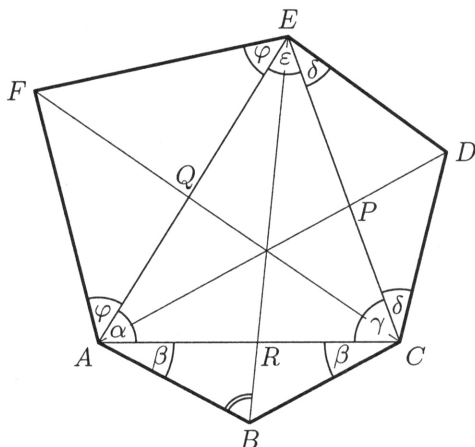
$$\begin{aligned} 2z^5 + 3(y^2 + 1) &\geq 2z^5 + 3 \cdot 2y = (z^5 + z^5 + y + y) + 4y \geq \\ &\geq (z^5 + z^3 x^2 + x + x) + 4x \geq \\ &\geq 4\sqrt[4]{z^8 x^4} + 4x = 4x(z^2 + 1), \end{aligned}$$

tedy $2z^5 \geq 4x(z^2 + 1) - 3(y^2 + 1)$. Rovnost dostaneme jen při dodržení podmínek $y = 1, z^5 = z^3 x^2, y = x$ a $z^5 = z^3 x^2 = x$. Třetí rovnice soustavy je tedy splněna jediné pro trojici $x = y = z = 1$.

Jediným řešením soustavy je trojice $(1, 1, 1)$.

2. Označme v trojúhelníku ACE velikosti vnitřních úhlů při vrcholech A, C, E postupně $\alpha, \gamma, \varepsilon$. Trojúhelníky ACB, CED, EAF jsou podle zadání rovnoramenné. Označme velikosti jejich vnitřních úhlů při základnách postupně β, δ, φ (obr. 41). Tvzení dokážeme použitím Čèvovy vèty.

Proto ještě označme P, Q, R průsečíky přímek AD, CF, EB postupně se stranami CE, EA, AC trojúhelníku ACE .



Obr. 41

Ze sinové věty v trojúhelníku ABR máme

$$\frac{|AR|}{\sin |\sphericalangle ABE|} = \frac{|BR|}{\sin \beta}, \quad \text{tedy} \quad |AR| = \frac{|BR| \cdot \sin |\sphericalangle ABE|}{\sin \beta}. \quad (1)$$

Ze sinové věty v trojúhelníku ABE máme

$$\frac{|AE|}{\sin |\sphericalangle ABE|} = \frac{|BE|}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad \text{tedy} \quad \sin |\sphericalangle ABE| = \frac{|AE| \cdot \sin(\alpha + \beta)}{|BE|}.$$

Dosazením do (1) dostáváme

$$|AR| = \frac{|BR| \cdot |AE| \cdot \sin(\alpha + \beta)}{|BE| \cdot \sin \beta}.$$

Zřejmě analogicky (ze sinových vět v trojúhelnících CBR a CBE) můžeme odvodit

$$|CR| = \frac{|BR| \cdot |CE| \cdot \sin(\gamma + \beta)}{|BE| \cdot \sin \beta}.$$

Proto

$$\frac{|AR|}{|CR|} = \frac{|AE| \cdot \sin(\alpha + \beta)}{|CE| \cdot \sin(\gamma + \beta)}.$$

Opět analogicky lze vyjádřit poměry

$$\frac{|CP|}{|EP|} = \frac{|CA| \cdot \sin(\gamma + \delta)}{|EA| \cdot \sin(\varepsilon + \delta)} \quad \text{a} \quad \frac{|EQ|}{|AQ|} = \frac{|EC| \cdot \sin(\varepsilon + \varphi)}{|AC| \cdot \sin(\alpha + \varphi)}.$$

Odtud

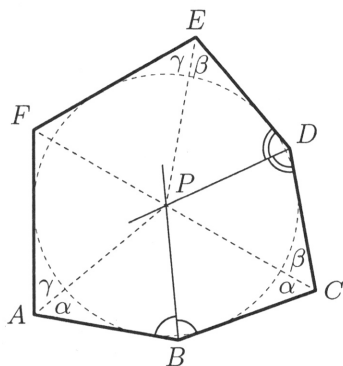
$$\frac{|AR|}{|CR|} \cdot \frac{|CP|}{|EP|} \cdot \frac{|EQ|}{|AQ|} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\gamma + \beta)} \cdot \frac{\sin(\gamma + \delta)}{\sin(\varepsilon + \delta)} \cdot \frac{\sin(\varepsilon + \varphi)}{\sin(\alpha + \varphi)}. \quad (2)$$

Podle zadání však platí $\varphi + \alpha + \beta = \beta + \gamma + \delta = \delta + \varepsilon + \varphi$. Proto

$$\alpha + \beta = \varepsilon + \delta, \quad \gamma + \delta = \alpha + \varphi, \quad \varepsilon + \varphi = \gamma + \beta$$

a součin (2) je rovný 1. Podle Cèvovy věty se tak přímky AD , BE a CF protínají v jednom bodě.

Jiné řešení. Označme P průsečík os vnitřních úhlů daného šestiúhelníku při vrcholech B a D (obr. 42). Dokážeme, že šestiúhelníku $ABCDEF$ lze vepsat kružnici, jejímž středem je bod P . Dané tvrzení pak plyne z Brianchonovy věty.¹



Obr. 42

Z rovnosti $|AB| = |BC|$ plyne, že trojúhelníky ABP a CBP jsou shodné podle věty *sus*. Proto $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle BCP| = \alpha$. Obdobně jsou shodné i trojúhelníky CDP a EDP , tj. $|\sphericalangle DCP| = |\sphericalangle DEP| = \beta$.

¹ Uvedená věta říká, že jestliže se strany šestiúhelníku $ABCDEF$ dotýkají téže kuželosečky, protínají se přímky AD , BE a CF v jednom bodě.

Z uvedených shodností navíc máme $|AP| = |CP| = |EP|$, odkud dohromady se zadanou rovností $|AF| = |EF|$ dostáváme podle věty sss shodnost trojúhelníků AFP a EFP . Proto osa vnitřního úhlu při vrcholu F prochází bodem P a $|\sphericalangle FAP| = |\sphericalangle FEP| = \gamma$.

Rovnosti $|\sphericalangle FAB| = |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle DEF|$ jsou ekvivalentní s rovnostmi $\gamma + \alpha = \alpha + \beta = \beta + \gamma$, z nichž triviálně vyplývá $\alpha = \beta = \gamma$. Proto i osy vnitřních úhlů při vrcholech A , C a E procházejí bodem P a šestiúhelníku $ABCDEF$ lze vepsat kružnici se středem P .

3. Necht' $M = \{1, 2, \dots, p-1\}$ je množina všech nenulových zbytků při dělení p . Pro každé $k \in M$ je kombinační číslo

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$$

dělitelné prvočíslem p , neboť všechny činitele součinu $k!(p-k)!$ ve jmenovateli jsou menší než p (a tedy s p nesoudělné), zatímco čítec $p!$ zřejmě prvočíslem p dělitelný je. Každý ze sčítanců součtu v zadání je tedy dělitelný číslem p^2 a naší úlohou je zjistit, pro která prvočísla p je součet

$$S = \frac{1}{p^2} \binom{p}{1}^2 + \frac{1}{p^2} \binom{p}{2}^2 + \dots + \frac{1}{p^2} \binom{p}{p-1}^2 \quad (1)$$

dělitelný p .

Pro každé $k \in M$ zkoumejme, jaký dává přirozené číslo

$$a_k = \frac{1}{p^2} \binom{p}{k}^2 = \left(\frac{(p-1)!}{k!(p-k)!} \right)^2 \quad (2)$$

zbytek při dělení p . Protože pro libovolné i platí $p-i \equiv -i \pmod{p}$, je

$$\begin{aligned} (p-k)! &= (p-k)(p-(k+1)) \dots (p-(p-1)) \equiv \\ &\equiv (-1)^{p-k} k(k+1) \dots (p-1) \pmod{p}. \end{aligned}$$

Úpravou vztahu (2) tak dostáváme

$$\begin{aligned} ((p-1)!)^2 &= a_k (k!(p-k)!)^2 \equiv a_k (k!(-1)^{p-k} k(k+1) \dots (p-1))^2 = \\ &= a_k \cdot k^2 ((p-1)!)^2 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Tuto kongruenci můžeme vydělit výrazem $((p-1)!)^2$, který je nesoudělný s p . Tedy

$$1 \equiv a_k \cdot k^2 \pmod{p}. \quad (3)$$

Jak víme, ke každému zbytku $k \in M$ existuje právě jeden zbytek $z_k \in M$ takový, že $z_k \cdot k \equiv 1 \pmod{p}$; jestliže navíc $k, l \in M$ jsou různé, tak i z_k, z_l jsou různé.² Množina $M' = \{z_1, z_2, \dots, z_{p-1}\}$ má tedy stejně prvků jako množina M , a protože $M' \subset M$, nutně $M' = M$.

Z definice prvku z_k dostáváme $1 = 1^2 \equiv (z_k \cdot k)^2 = z_k^2 \cdot k^2 \pmod{p}$. Dohromady s (3) potom $a_k \cdot k^2 \equiv z_k^2 \cdot k^2 \pmod{p}$ a po vydělení k^2 máme $a_k \equiv z_k^2 \pmod{p}$. Pro zbytek součtu (1) tedy platí

$$\begin{aligned} S &= a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1} \equiv z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{p-1}^2 = \\ &= 1^2 + 2^2 + \dots + (p-1)^2 = \frac{1}{6}p(p-1)(2p-1) \pmod{p} \end{aligned}$$

(využili jsme dokázanou rovnost $\{z_1, z_2, \dots, z_{p-1}\} = \{1, 2, \dots, p-1\}$ a známý vzorec pro součet druhých mocnin). Snadno přímým dosazením ověříme, že výraz $\frac{1}{6}p(p-1)(2p-1)$ není pro $p = 2, 3$ násobkem p . Naopak, každé prvočíslo $p \geq 5$ je nesoudělné s číslem 6, je tedy p dělitelem čísla $p \cdot \frac{1}{6}(p-1)(2p-1)$.

Daný součet je dělitelný číslem p^3 pro všechna prvočísla větší než 5.

4. Uvažujme prvočíslo p a podívejme se, jaký zbytek při dělení p může dávat číslo $k^2 + k$. Na to stačí za k postupně dosadit čísla $0, 1, \dots, p-1$, dále se už budou zbytky periodicky opakovat. Pro $p = 2, 3, 5, 7$ tak dostaneme zbytky uvedené v tabulce:

$p \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
2	0	0					
3	0	2	0				
5	0	2	1	2	0		
7	0	2	6	5	6	2	0

Vidíme, že v uvedených posloupnostech se některé zbytky neobjevují. Například pro $p = 2$ nedává $k^2 + k$ nikdy zbytek 1, pro $p = 3$ nedostaneme zbytek 1, pro $p = 5$ zbytek 3 ani 4 atd. Abychom to dokázali pro obecné p , stačí ověřit, že některý zbytek se v této konečné posloupnosti objeví aspoň dvakrát. Počet různých zbytků je totiž p a délka posloupnosti je rovněž p , proto jakmile se v posloupnosti nějaký zbytek zopakuje, nebude už v ní dost místa pro všechny možné zbytky.

² Existence zbytku z_k vyplývá z existence celých čísel a, b takových, že $ak + bp = 1$. Jednoznačnost je zřejmá: jestliže $1 \equiv z_k \cdot k \equiv z'_k \cdot k \pmod{p}$, pak vydělením k máme $z_k \equiv z'_k \pmod{p}$. Různost triviálně vyplývá z jednoznačnosti a z vlastnosti $z_{z_k} = k$: jestliže $z_k = z_l$, tak $k = z_{z_k} = z_{z_l} = l$.

Opakujícím se zbytkem je například 0, platí totiž

$$0^2 + 0 \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{a} \quad (p-1)^2 + (p-1) = p^2 - p \equiv 0 \pmod{p},$$

takže zbytek 0 dostaneme pro $k = 0$ i pro $k = p-1$.

Nechť $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ je množina všech prvočísel menších než 2008. Pro každé $j = 1, 2, \dots, m$ označme r_{p_j} libovolný ze zbytků při dělení prvočíslem p_j , pro který $k^2 + k \not\equiv r_{p_j} \pmod{p_j}$ pro všechna celá čísla k (už jsme dokázali, že takový zbytek existuje). Abychom vyhověli zadání, stačí zvolit n , které splňuje soustavu kongruencí

$$\begin{aligned} n &\equiv -r_{p_1} \pmod{p_1}, \\ n &\equiv -r_{p_2} \pmod{p_2}, \\ &\vdots \\ n &\equiv -r_{p_m} \pmod{p_m}, \end{aligned}$$

potom totiž $k^2 + k + n \equiv k^2 + k - r_{p_j} \not\equiv 0 \pmod{p_j}$ pro všechna $j = 1, 2, \dots, m$. Existence požadovaného n už přímo vyplývá z čínské zbytkové věty³, protože prvočísla $p_1, p_2, \dots, p_m$ jsou navzájem nesoudělná.

5. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že pravidelný pětiúhelník $ABCDE$ má délku strany 1. Potom každá z jeho úhlopříček má délku⁴

$$u = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

³ Podle ní pro navzájem nesoudělná čísla $q_1, \dots, q_m$ a libovolná celá čísla $a_1, \dots, a_m$ existuje celé číslo x splňující

$$x \equiv a_1 \pmod{q_1}, \quad x \equiv a_2 \pmod{q_2}, \quad \dots, \quad x \equiv a_m \pmod{q_m}.$$

Tuto větu lze jednoduše dokázat přímou konstrukcí x : První kongruenci splňuje $x = kq_1 + a_1$ pro libovolné celé k . Jestliže za k dosadíme postupně $0, 1, \dots, q_2-1$, pro x dostaneme q_2 různých zbytků při dělení q_2 a jeden z nich, $k'q_1 + a_1$, bude tudíž roven a_2 . Abychom tedy splnili i druhou kongruenci, stačí zvolit $x = (k' + lq_2)q_1 + a_1$ pro libovolné celé l . Za l dosadíme postupně $0, 1, \dots, q_3-1$, dostaneme q_3 různých zbytků při dělení q_3 , jeden z nich bude roven a_3 , atd.

⁴ Délku úhlopříčky u pravidelného pětiúhelníku $ABCDE$ se stranou délky 1 lze jednoduše vypočítat například z podobnosti rovnoramenných trojúhelníků CAB a DEX , kde X je průsečík úhlopříček AD a EC . Čtyřúhelník $ABCX$ je totiž kosočtverec, takže $|EX| = u - 1$, a tedy $(u-1) : 1 = 1 : u$.

Použitím Ptolemaiovy nerovnosti⁵ pro čtyřúhelníky $APBE$, $APBD$, $APBC$ (obr. 43), resp. příslušné čtveřice bodů, pokud body v uvedeném pořadí netvoří čtyřúhelníky, dostáváme

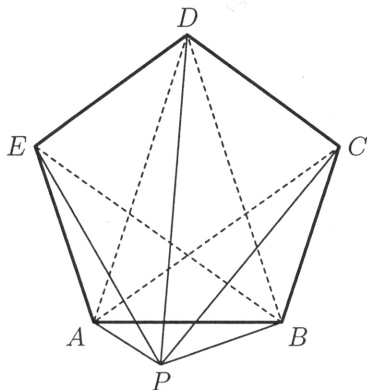
$$\begin{aligned} |PA| \cdot u + |PB| \cdot 1 &\geq 1 \cdot |PE|, \\ |PA| \cdot u + |PB| \cdot u &\geq 1 \cdot |PD|, \\ |PA| \cdot 1 + |PB| \cdot u &\geq 1 \cdot |PC|. \end{aligned} \quad (1)$$

Sečtením těchto nerovností už získáváme dolní odhad pro výraz ze zadání:

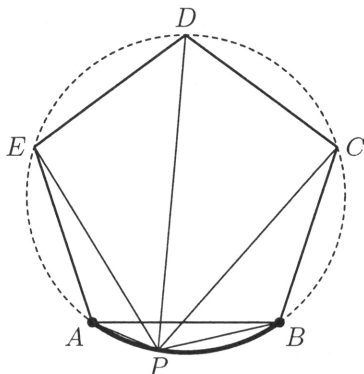
$$(|PA| + |PB|) \cdot (2u + 1) \geq |PC| + |PD| + |PE|,$$

odkud

$$\frac{|PA| + |PB|}{|PC| + |PD| + |PE|} \geq \frac{1}{2u + 1}. \quad (2)$$



Obr. 43



Obr. 44

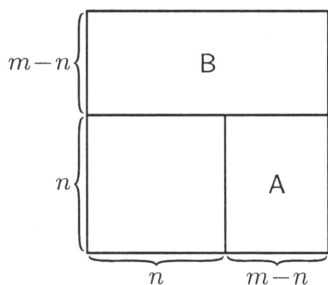
Přitom rovnost ve všech nerovnostech v (1), a tedy i ve (2) platí, právě když jsou čtyřúhelníky $APBE$, $APBD$, $APBC$ tětiové (připouští se i možnost $P = A$, resp. $P = B$), tj. jestliže bod P leží na kratším

⁵ Jestliže X, Y, Z, W jsou libovolné čtyři body v rovině, pak podle Ptolemaiovy nerovnosti platí $|XY| \cdot |ZW| + |YZ| \cdot |WX| \geq |XZ| \cdot |YW|$, přičemž rovnost podle Ptolemaiovy věty nastane, právě když body X, Y, Z, W leží (v tomto pořadí) na téže kružnici. Je-li $XYZW$ čtyřúhelník, říká Ptolemaiova nerovnost (resp. věta), že součet součinů délek protilehlých stran není menší než součin délek úhlopříček, přičemž rovnost nastane, právě když je čtyřúhelník $XYZW$ tětiový.

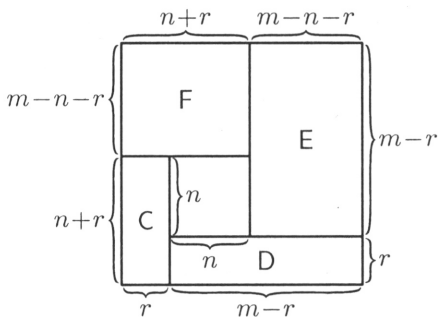
oblouku AB kružnice opsané pětiúhelníku $ABCDE$ (obr. 44). Nejmenší možná hodnota zadaného výrazu je proto

$$\frac{1}{2u+1} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})+1} = \frac{1}{\sqrt{5}+2} = \sqrt{5}-2.$$

6. Zřejmě každý pravoúhelník, jehož aspoň jedna strana má délku, která je násobkem k , se dá rozdělit na pravoúhelníky rozměrů $1 \times k$. Pokusme se tedy rozdělit čtverec $m \times m$ na jeden čtverec $n \times n$ a několik pravoúhelníků s uvedenou vlastností. Samozřejmě má smysl zabývat se jen případem $m \geq n$.



Obr. 45



Obr. 46

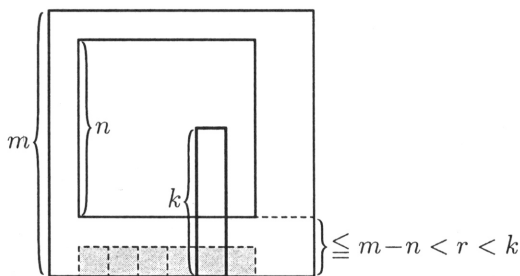
Jestliže $k \mid m - n$, můžeme čtverec $m \times m$ rozdělit tak, jak je znázorněno na obr. 45, oba pravoúhelníky A, B totiž mají jednu stranu délky $m - n$, která je násobkem k .

Jestliže $k \mid m + n$ a $n + r \leq m$, kde r je zbytek, který dává číslo m po dělení k , dá se čtverec $m \times m$ rozdělit jako na obr. 46. Pravoúhelníky D, E mají jednu stranu délky $m - r$, která je násobkem k . Podmínka $k \mid m + n$ zabezpečuje, že násobkem k je i číslo $n + r$, tj. délka jedné ze stran v pravoúhelnících C, F. Díky nerovnosti $n + r \leq m$ mají pravoúhelníky E, F stranu nezáporné délky $m - n - r$, uvedené rozdělení je tedy vskutku možné (strany délky 0 jsou povoleny, v takovém případě na pokrytí degenerovaného pravoúhelníku rozměrů $0 \times l$ prostě nepotřebujeme žádný pravoúhelník $1 \times k$).

Aby trojice (k, m, n) , kde $m \geq n$, vyhovovala zadání, stačí, aby byla splněna aspoň jedna z podmínek

- (a) $k \mid m - n$;
- (b) $k \mid m + n$ a současně $n + r \leq m$, kde r je zbytek, jenž dává číslo m při dělení číslem k .

Ukážeme, že tyto podmínky jsou zároveň i nutné. Nejdříve dokážeme, že jestliže pro trojici (k, m, n) , v níž $m > n$, existuje vyhovující rozdělení, pak $n + r \leq m$ (to při $m > n$ triviálně platí, jakmile je splněna podmínka (a), nemusíme tedy rozlišovat dva případy). Předpokládejme proto sporem, že máme vyhovující rozdělení, a přitom $n + r > m$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že se čtverec $n \times n$ nedotýká spodní strany čtverce $m \times m$ (obr. 47). Protože $m - n < r < k$, všechny jednotkové čtverečky dotýkající se průmětu čtverce $n \times n$ na spodní stranu čtverce $m \times m$ (na obr. 47 znázorněné šedou barvou) musejí být pokryty „ležícími“ pravoúhelníky $1 \times k$ (tj. takovými, které mají delší stranu rovnoběžnou se spodní stranou čtverce $m \times m$); „stoječí“ pravoúhelníky $1 \times k$ je nemohou pokrývat, protože by zasahovali do čtverce $n \times n$.



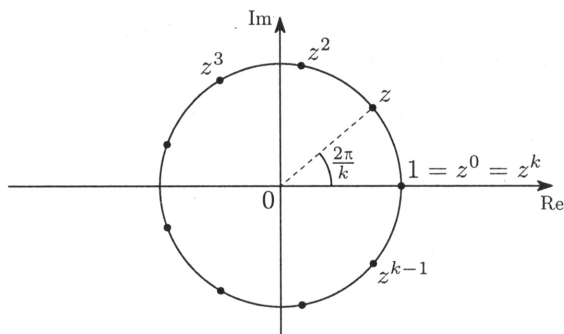
Obr. 47

Nechť p je počet „ležících“ pravoúhelníků $1 \times k$ pokrývajících zmíněných n šedých jednotkových čtverečků. Protože tyto pravoúhelníky pokrývají jen čtverečky při spodní straně čtverce $m \times m$ a zároveň pokrývají minimálně n šedých jednotkových čtverečků, platí $n \leq pk \leq m$. Spolu s nerovností $n + r > m$ dostáváme

$$m - r < pk \leq m,$$

což je ve sporu s tím, že r je zbytek čísla m při dělení číslem k (mezi čísla $m - r$ a m nemůže ležet žádný násobek čísla k).

Zbývá dokázat, že $k \mid m - n$ anebo $k \mid m + n$. Hlavní myšlenka je následující. Do každého jednotkového čtverečku napíšeme jedno číslo. Přitom celé očíslování uděláme tak, aby v každém pravoúhelníku $1 \times k$ byl součet čísel roven 0. To znamená, že v každém vyhovujícím rozdělení bude muset být součet všech čísel ve čtverci $m \times m$ stejný jako součet čísel v menším čtverci $n \times n$. Porovnáním obou součtů stanovíme nutné podmínky pro k , m a n .

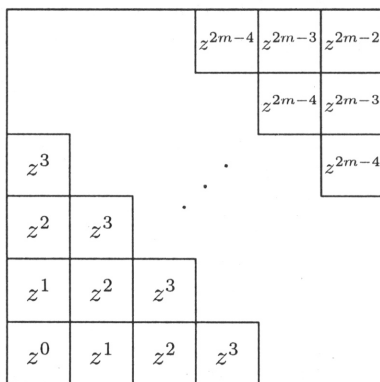


Obr. 48

Výhodné bude očíslování pomocí komplexních čísel. Označme $z = \cos(2\pi/k) + i\sin(2\pi/k)$. Číslo z je tedy k -tá komplexní odmocnina z čísla 1 s nejmenším úhlem (obr. 48). Přitom

$$z^0 + z^1 + \dots + z^{k-1} = \frac{z^k - 1}{z - 1} = \frac{0}{z - 1} = 0. \quad (1)$$

Očíslujme čtverečky tak, jak je naznačeno na obr. 49, tj. jestliže čtverec $m \times m$ je umístěn do prvního kvadrantu souřadnicové soustavy s vrcholem v počátku, tak do čtverečku, jehož levý dolní vrchol má souřadnice (x, y) , napíšeme číslo z^{x+y} :



Obr. 49

Uvažujme libovolný pravoúhelník $1 \times k$. Nechť v jeho čtverečku s nejmenší x -ovou (jestliže se jedná o „ležící“ pravoúhelník), resp. nejmenší

y -ovou (jestliže je to „stojící“ pravoúhelník) je napsáno číslo z^t . Potom součet všech čísel v něm napsaných je (s využitím (1))

$$z^t + z^{t+1} + \dots + z^{t+k-1} = z^t(z^0 + z^1 + \dots + z^{k-1}) = 0,$$

takové očíslování tedy splňuje požadovanou podmínku.

Součet čísel v libovolném čtverci $n \times n$, jehož levý dolní čtvereček má číslo z^t , je roven (sčítáme po jednotlivých řádcích)

$$\begin{aligned} & (z^t + \dots + z^{t+n-1}) + (z^{t+1} + \dots + z^{t+n}) + \dots + \\ & \quad + (z^{t+n-1} + \dots + z^{t+2n-2}) = \\ & = (z^t + z^{t+1} + \dots + z^{t+n-1})(z^0 + z^1 + \dots + z^{n-1}) = \\ & = z^t(z^0 + z^1 + \dots + z^{n-1})^2 = z^t \left(\frac{z^n - 1}{z - 1} \right)^2. \end{aligned}$$

Tento vztah můžeme použít i na výpočet součtu v celém čtverci $m \times m$. Ten má v levém dolním čtverečku číslo $z^0 = 1$, takže součet čísel v něm je $(z^m - 1)^2 / (z - 1)^2$.

Jestliže tedy máme vyhovující rozdělení, přičemž v levém dolním čtverečku čtverce $n \times n$ je napsáno číslo z^t , musí platit

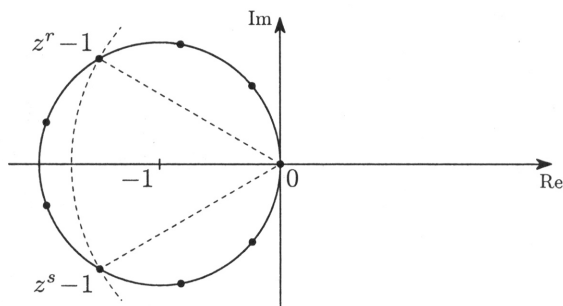
$$z^t \left(\frac{z^n - 1}{z - 1} \right)^2 = \left(\frac{z^m - 1}{z - 1} \right)^2.$$

Aby se dvě komplexní čísla rovnala, musejí se rovnat i jejich absolutní hodnoty. Důsledkovými úpravami předešlé rovnosti (využívající zřejmý vztah $|z| = 1$) tak postupně dostáváme

$$\begin{aligned} \left| z^t \left(\frac{z^n - 1}{z - 1} \right)^2 \right| &= \left| \left(\frac{z^m - 1}{z - 1} \right)^2 \right|, \\ |z|^t \frac{|z^n - 1|^2}{|z - 1|^2} &= \frac{|z^m - 1|^2}{|z - 1|^2}, \\ |z^n - 1|^2 &= |z^m - 1|^2, \\ |z^n - 1| &= |z^m - 1|. \end{aligned}$$

Nechť r, s jsou zbytky, které dávají m, n při dělení číslem k . Protože $z^k = 1$, zřejmě $z^m = z^r$ a $z^n = z^s$. Pro která čísla $r, s \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ mají komplexní čísla $z^r - 1, z^s - 1$ stejnou absolutní hodnotu? První možností samozřejmě je $r = s$. V takovém případě dávají m a n stejný zbytek při dělení k , takže $k \mid m - n$. Zabýváme se dále jen případem $r \neq s$.

Čísla z^r, z^s leží v komplexní rovině na jednotkové kružnici se středem v 0 (obr. 48), tudíž $z^r - 1, z^s - 1$ leží na jednotkové kružnici se středem v -1 . Aby měla dvě různá čísla na této kružnici stejnou absolutní hodnotu, musejí být stejně vzdálená od 0, což zřejmě nastane jedině v případě, kdy $z^r - 1, z^s - 1$ jsou navzájem komplexně sdružená, tj. jestliže $r + s = k$ (obr. 50). V tomto případě tedy $k \mid m + n$.



Obr. 50

Poznámka. Uvedenou metodou číslování polí čtvercové sítě komplexními jednotkami je možno také (či dokonce především) dokázat následující pozoruhodný výsledek: lze-li pravoúhelník $m \times n$ rozdělit na několik dílů $1 \times k$, pak $k \mid m$ nebo $k \mid n$.

49. mezinárodní matematická olympiáda

Hlavními organizátory 49. mezinárodní matematické olympiády, která se konala od 10. do 22. července v hlavním městě Španělska Madridu, bylo španělské Ministerstvo školství a sociální politiky a Královská matematická společnost Španělska.



Organizátoři připravili pro práci mezinárodní jury, jejímž hlavním úkolem je vybrat z připravených návrhů šestici soutěžních úloh, vynikající podmínky v kouzelném městečku San Ildefonso-La Granja v srdci Kastílie nedaleko Segovii (asi 80 km severozápadně od Madridu). Příjemnou nadmořskou výšku v blízkosti královského paláce a nádherných zahrad jsme dvojnásob ocenili po přesunu do rozpálených ulic Madridu, kam se mezitím sjel rekordní počet 535 soutěžících z 97 zemí celého světa (spolu s pozorovateli z Beninu a Sýrie a zástupci Pákistánu, jejichž studenti zůstali letos bohužel doma, když jim španělská ambasáda neposkytla včas víza, dosáhl počet formálně zúčastněných zemí stovky).

Letošní olympiádu zahájila cirkusová show za zvuků Fučíkova *Vjezdu gladiátorů*. Úvodní hrozba moderátora, že „dnes se spojí cirkusový svět se světem matematiky“ snad našla naplnění jen během úvodního defilé s národními vlajkami.

České družstvo, které bylo vybráno na základě výsledků ústředního kola 57. ročníku MO v Českých Budějovicích a následné týdenní přípravy v Kostelci nad Černými lesy, tvořili *Tomáš Hřebek* z 8. ročníku Gymnázia v Praze 4, *Miroslav Klimoš* z 3. ročníku Gymnázia Mikuláše Koperníka v Bílovci, *Jan Matějka* ze 7. ročníku Gymnázia v Českých Budějovicích v Jírovcově ulici, *Samuel Říha* ze 3. ročníku Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, *Josef Tkadlec* a *Jakub Töpfer*, oba ze 7. ročníku Gymnázia Jana Keplera v Praze 6. Vedoucím družstva byl RNDr. *Karel Horák*, CSc., z Matematického ústavu Akademie věd v Praze a studenty doprovázel Mgr. *Martin Panák*, Ph.D., z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně.

Vlastní soutěž se odehrála v jedné obrovské aule 16. a 17. července, kdy soutěžící jako obvykle řešili vždy po trojici soutěžních úloh. Na to měli pokaždé vyhrazeno přesně 4,5 hodiny; za každou ze šesti úloh mohli získat nejvýše 7 bodů.

Naši reprezentanti podali standardní výkon (až na jednoho vyřešili všichni nejlehčí první úlohu a skoro stejně dobře se vypořádali i s druhou z lehčích úloh — úlohou čtvrtou). Jediný, kdo si v každém soutěžním dnu poradil se dvěma úlohami, byl *Miroslav Klimoš*, který tak po bronzu ze 48. MMO rozšířil svou sbírku o stříbrnou medaili. Další medaili pro náš tým získal *Josef Tkadlec*, od něhož jsme však po vítězství v ústředním kole čekali trochu víc. Výsledky našich jsou shrnuty v následující tabulce:

Umístění	Body za úlohu						Body	Cena
	1	2	3	4	5	6		
424.–447. Tomáš Hřebejk	1	0	0	4	0	0	5	
64.–70. Miroslav Klimoš	7	7	0	7	7	0	28	II.
268.–283. Jan Matějka	7	2	0	4	1	0	14	HM
368.–391. Samuel Říha	7	0	0	1	0	0	8	HM
212.–237. Josef Tkadlec	7	1	0	6	1	1	16	III.
268.–283. Jakub Töpfer	7	0	0	7	0	0	14	HM
Celkem	36	10	0	29	9	1	85	

Další tři naši studenti se museli spokojit pouze se základním oceněním, kterým je tzv. *Honorary mention* a které se uděluje studentům bez medaile za úplné vyřešení alespoň jedné z nelehké šestice soutěžních úloh; jejich obtížnost si konečně můžete ověřit sami. Pro srovnání uvedme i výsledky slovenských reprezentantů, kteří získali jen o pár bodů méně:

Umístění	Body za úlohu						Body	Cena
	1	2	3	4	5	6		
407.–423. Miroslav Baláž	2	0	0	4	0	0	6	
346.–367. Albert Herencsár	5	0	0	4	0	0	9	
284.–296. Tomáš Kocák	7	1	0	4	1	0	13	HM
238.–267. Filip Sládek	7	1	0	7	0	0	15	III.
199.–211. Michal Spišiak	7	2	0	7	1	0	17	III.
212.–237. Vladislav Ujházi	5	4	0	7	0	0	16	III.
Celkem	33	8	0	33	2	0	76	

Počet získaných cen a celkový bodový zisk jednotlivých zemí vyčtete z připojené tabulky (čísla v závorce označují nižší počet reprezentantů):

	I	II	III	body		I	II	III	body
ČLR	5	1	0	217	Bosna a Hercegovina	0	0	3	68
Rusko	6	0	0	199	Slovinско	0	0	2	68
USA	4	2	0	190	Švýcarsko	0	1	1	68
Korea	4	2	0	188	Švédsko	0	1	0	67
Írán	1	5	0	181	Dánsko	0	2	0	66
Thajsko	2	3	1	175	Kostarika	0	0	2	65
KLDR	2	4	0	173	Malajsie	0	1	0	65
Turecko	3	1	2	170	Rakousko	0	0	1	63
Tchaj-wan	2	4	0	168	Norsko	1	0	0	62
Maďarsko	2	3	1	165	Belgie	0	1	1	61
Japonsko	2	3	1	163	Makedonie	0	0	2	61
Vietnam	2	2	2	159	Lucembursko (5)	0	0	2	60
<i>Polsko</i>	2	3	1	157	Tádžikistán	0	0	1	60
Bulharsko	2	1	3	154	Lotyšsko	0	1	0	58
Ukrajina	2	2	2	153	Macao	0	0	2	58
Brazílie	0	5	1	152	Maroko	0	0	1	58
Peru	1	3	2	141	Arménie	0	0	0	56
Rumunsko	0	4	2	141	Portugalsko	0	0	2	55
Austrálie	0	5	1	140	Albánie	0	0	1	53
Německo	1	2	3	139	Chile (3)	0	1	1	49
Srbsko	1	3	0	139	Irsko	0	0	0	45
Kanada	0	2	4	135	Kypr	0	0	1	42
Velká Británie	0	4	2	133	Nový Zéland	0	0	0	42
Itálie	0	3	3	132	Estonsko	0	0	1	41
Kazachstán	1	2	3	128	Finsko	0	0	1	40
Bělorusko	0	3	2	125	Bangladéš (4)	0	0	0	33
Izrael	1	1	2	120	Island (5)	0	0	1	31
Hongkong	0	3	1	107	Salvador (4)	0	0	0	31
Mongolsko	0	2	1	106	Srí Lanka	0	0	0	29
Francie	0	1	4	104	Kirgizie (5)	0	0	0	28
Indie	0	0	5	103	Trinidad a Tobago	0	0	1	28
Singapur	0	1	3	98	Kuba (1)	0	1	0	27
Nizozemsko	0	2	2	94	Ekvádor	0	0	0	26
Uzbekistán	0	0	4	94	Kambodža	0	0	0	25
Litva	0	1	2	92	Černá hora (3)	0	0	0	24
Indonézie	0	1	2	88	Paraguay (4)	0	0	1	24
Mexiko	0	1	1	87	Filipíny (3)	0	0	1	23
Chorvatsko	0	0	3	86	Uruguay (5)	0	0	0	22
Argentina	0	1	3	85	Tunisko (4)	0	0	0	20
<i>Česká republika</i>	0	1	1	85	Honduras (2)	0	0	0	17
Řecko	0	0	2	85	Guatemala (4)	0	0	1	16
Gruzie	0	0	5	84	Lichtenštejnsko (2)	0	0	0	16
Španělsko	0	0	3	82	Venezuela (2)	0	0	0	16
JAR	0	1	0	79	Portoriko (3)	0	0	0	9
Kolumbie	0	2	0	77	Saúdská Arábie	0	0	0	8
<i>Slovensko</i>	0	0	3	76	Bolívie (5)	0	0	0	5
Turkmenistán	0	0	4	76	SAE (4)	0	0	0	5
Ázerbájdžán	0	0	3	74	Kuvajt (5)	0	0	0	3
Moldavsko	0	1	0	74					

V neoficiálním pořadí všech zúčastněných zemí jsme jen taktak obhájili pozici v první čtyřicítce (spolu s Argentinou a Řeckem jsme se podělili o 39.–41. příčku).

Vynikající organizace se projevila i v bohaté náplni volného času jak studentů, tak jejich vedoucích. O tom svědčí zejména výlety do Segovii (která se kromě jiného může pochlubit i zbytky nádherného římského akvaduktu), El Escorialu a Toleda, v Aranjuez návštěva kulturního večera s vynikající představitelkou tradičního flamenca Mercedes Ruiz, pro studenty pak navíc možnost navštívit v Madridu světoznámou galerii Prado a dlouhá řada soutěží a aktivit.

Slavnostního zakončení olympiády v aule Univerzity Carlose III. se mimo jiné zúčastnilo i Jeho královské veličenstvo princ Felipe de Asturias se svou chotí princeznou Letiziou. Spolu s dalšími představiteli rozdali celkem 267 medailí všem, kteří v nelehkém klání získali alespoň 15 bodů. Mezi nimi bylo 100 studentů, kteří za 22–30 bodů získali stříbrnou medaili, a 47 nejúspěšnějších, kteří za získání alespoň 31 bodu byli oceněni medailí zlatou. Mezi nimi vynikli tři Číňani Xiaosheng Mu, Dongyi Wei (oba ČLR) a Alex Zhai (USA), kteří bezchybně vyřešili všech šest úloh.

O maximální počet 42 bodů banální chybou v řešení druhé úlohy přišel Maďar László Miklós Lovász, který tak s 39 body skončil až na 4. místě. Úloha měla dvě části a chyba byla, že se mladý Lovász v té druhé části věnoval úplně jiným problémům, než bylo třeba; přitom stačilo poznamenat, že požadovanou vlastnost už vlastně dokázal v první části. Dodejme, že jeho otec László Lovász, který je dnes prezidentem Mezinárodní matematické unie (IMU), získal v letech 1963–1966 na MMO nejprve stříbrnou a poté ještě tři zlaté medaile.

Hostitelskými zeměmi příštích olympiád budou Německo (jubilejní 50. ročník), Kazachstán a Holandsko.

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme H průsečík výšek. Kružnice se středem ve středu strany BC procházející bodem H protíná přímkou BC v bodech A_1 a A_2 . Podobně kružnice se středem ve středu strany CA procházející bodem H protíná přímkou CA v bodech B_1 a B_2 a kružnice se středem ve středu strany AB procházející bodem H protíná přímkou AB v bodech C_1 a C_2 . Ukažte, že body $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ leží na jedné kružnici. (Rusko)

2. (a) Dokažte, že

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

pro všechna reálná čísla x, y, z různá od 1 a splňující rovnost $xyz = 1$.

(b) Dokažte, že v uvedené nerovnosti platí rovnost pro nekonečně mnoho trojic racionálních čísel x, y, z různých od 1 a splňujících rovnost $xyz = 1$. (Rakousko)

3. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho kladných celých čísel n , pro něž má číslo $n^2 + 1$ prvočinitel větší než $2n + \sqrt{2n}$. (Litevsko)

4. Najděte všechny funkce $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ takové, že

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

pro všechna kladná reálná čísla w, x, y, z splňující rovnost $wx = yz$. (Jižní Korea)

5. Nechť n a k jsou kladná celá čísla, pro něž je $k - n$ nezáporné sudé číslo. Je dáno $2n$ lamp označených čísly $1, 2, \dots, 2n$, přičemž každá z nich může být *zapnutá* či *vypnutá*. Na počátku jsou všechny lampy vypnuté. Uvažujme posloupnosti *kroků*: v každém kroku jednu z lamp přepneme (vypnutou zapneme či zapnutou vypneme).

Označme N počet všech takových posloupností k kroků, jež vedou do stavu, kdy všechny lampy 1 až n jsou zapnuté a všechny lampy $n + 1$ až $2n$ vypnuté.

Označme M počet všech takových posloupností k kroků, jež vedou do stavu, kdy všechny lampy 1 až n jsou zapnuté a všechny lampy $n + 1$ až $2n$ vypnuté, přičemž žádná z lamp $n + 1$ až $2n$ nebyla nikdy zapnutá.

Určete podíl N/M .

(Francie)

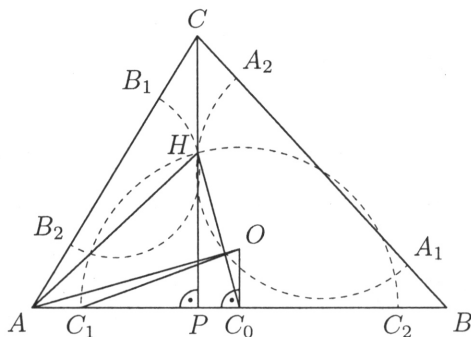
6. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, v němž $|BA| \neq |BC|$. Označme ω_1 a ω_2 kružnice vepsané trojúhelníkům ABC a ADC . Předpokládejme, že existuje kružnice ω , jež se dotýká polopřímky BA za bodem A , polopřímky BC za bodem C a zároveň i obou přímk AD a CD . Dokažte, že společné vnější tečny kružnic ω_1 a ω_2 se protínají v bodě kružnice ω .

(Rusko)

Řešení úloh

1. Osy úseček A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 jsou zároveň osami stran BC , CA , AB , takže se protínají v bodě O , jenž je středem kružnice opsané trojúhelníku ABC . Proto je O jediný bod, jenž může být středem požadované kružnice.

Označme strany a úhly v trojúhelníku standardním způsobem. Dále nechť $r = |OA|$ značí velikost poloměru opsané kružnice, C_0 střed strany AB a P patu výšky z vrcholu C (obr. 51). Dokážeme, že všech šest bodů ze zadání má od bodu O stejnou vzdálenost. Použitím Pythagorovy věty ve vícero trojúhelnících nejprve vyjádříme délku úsečky OC_1 pomocí jiných délek v trojúhelníku.



Obr. 51

Z pravoúhlých trojúhelníků OC_1C_0 , C_0HP ,¹ OAC_0 , HAP máme

$$|OC_1|^2 = |C_1C_0|^2 + |OC_0|^2, \quad (1)$$

$$|HC_0|^2 = |HP|^2 + |PC_0|^2, \quad (2)$$

$$|OC_0|^2 = r^2 - \left(\frac{1}{2}c\right)^2, \quad (3)$$

$$|HP|^2 = |AH|^2 - |AP|^2. \quad (4)$$

Protože podle zadání $|C_1C_0| = |HC_0|$, dosazením (2) a (3) do (1) a následným dosazením ze (4) dostáváme

$$|OC_1|^2 = |HP|^2 + |PC_0|^2 + r^2 - \left(\frac{1}{2}c\right)^2 = |AH|^2 - |AP|^2 + |PC_0|^2 + r^2 - \frac{1}{4}c^2.$$

Bez ohledu na to, zda bod P leží na úsečce AC_0 či na úsečce C_0B , platí

$$|PC_0|^2 = \left|\frac{1}{2}c - |AP|\right|^2 = \left(\frac{1}{2}c - |AP|\right)^2 = \frac{1}{4}c^2 - c|AP| + |AP|^2.$$

¹ Jestliže $P = C_0$, není C_0HP trojúhelník, ale rovnost (2) i tak triviálně platí.

Dosazením do předchozí rovnosti tak dostaneme

$$\begin{aligned} |OC_1|^2 &= |AH|^2 - |AP|^2 + \left(\frac{1}{4}c^2 - c|AP| + |AP|^2\right) + r^2 - \frac{1}{4}c^2 = \\ &= |AH|^2 + r^2 - c|AP|. \end{aligned}$$

Konečně pro délku výšky máme (z pravoúhlého trojúhelníku CAP) $|AP| = b \cos \alpha$, takže

$$|OC_1|^2 = |AH|^2 + r^2 - cb \cos \alpha.$$

Analogicky (jen vyměníme úlohu vrcholů B a C) dostaneme

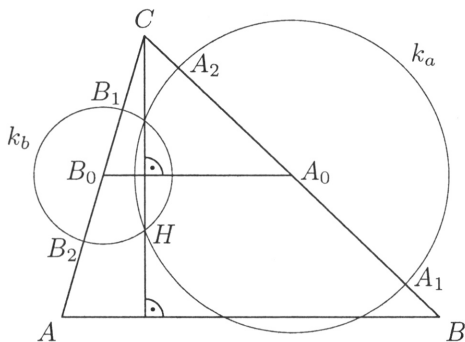
$$|OB_2|^2 = |AH|^2 + r^2 - bc \cos \alpha,$$

takže $|OC_1| = |OB_2|$. Analogicky odvodíme i rovnosti $|OA_1| = |OC_2|$ a $|OB_1| = |OA_2|$. Dohromady s triviálními rovnostmi $|OA_1| = |OA_2|$, $|OB_1| = |OB_2|$, $|OC_1| = |OC_2|$ dostáváme

$$|OA_1| = |OA_2| = |OB_1| = |OB_2| = |OC_1| = |OC_2|,$$

tedy body $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ leží na jedné kružnici se středem O .

Jiné řešení. Označme středy stran BC, CA, AB postupně A_0, B_0, C_0 a kružnice zmíněné v zadání se středy v těchto bodech označme postupně k_a, k_b, k_c . Úsečka A_0B_0 , střední příčka trojúhelníku ABC , je spojnicí středů kružnic k_a, k_b . Protože je rovnoběžná se stranou AB , je kolmá k výšce na stranu AB . A protože bod H je průsečíkem obou kružnic, je přímka CH jejich chordálou² (obr. 52).



Obr. 52

² Chordála dvou nesoustředných kružnic je množina bodů, které mají k oběma kružnicím stejnou mocnost. Je to vždy přímka kolmá na střednou (spojnici jejich středů) a obsahuje jejich případné průsečíky.

Protože bod C leží na chordále kružnic k_a, k_b , má k oběma kružnicím stejnou mocnost, takže $|CA_1| \cdot |CA_2| = |CB_1| \cdot |CB_2|$. Navíc bod C leží zároveň vně či uvnitř obou kružnic. To znamená, že uvedené čtyři body A_1, A_2, B_1, B_2 leží na jedné kružnici. Střed této kružnice přitom musí být průsečíkem os úseček A_1A_2, B_1B_2 , což je zřejmě střed O kružnice opsané danému trojúhelníku ABC . Odtud máme $|OA_1| = |OA_2| = |OB_1| = |OB_2|$. Úplně stejně dokážeme (BH je chordálou kružnic k_a, k_c) rovnosti $|OA_1| = |OA_2| = |OC_1| = |OC_2|$, odkud plyne, že body $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ leží na jedné kružnici se středem O .

Jiné řešení. Jak už víme, jediným kandidátem na střed hledané kružnice je střed O kružnice opsané trojúhelníku ABC . Stačí tedy pro libovolný z bodů $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ ukázat, že jeho vzdálenost od průsečíku výšek na volbě bodu nezávisí.

Označme středy stran BC, CA, AB postupně A_0, B_0, C_0 . Podobně jako v prvním řešení vyjďeme z rovnosti

$$|OC_1|^2 = |C_1C_0|^2 + |OC_0|^2 = |HC_0|^2 + |OC_0|^2.$$

Označíme-li N střed úsečky OH , platí dále

$$|HC_0|^2 + |OC_0|^2 = \frac{1}{2}|OH|^2 + 2|NC_0|^2.$$

To jsme jen zapsali známý vztah délek stran trojúhelníku HC_0O a jeho těžnice C_0N .³ Nyní si stačí uvědomit, že střed N úsečky OH je středem kružnice opsané trojúhelníku $A_0B_0C_0$ (je to tzv. kružnice devíti bodů), která má poloměr rovný polovině poloměru r kružnice opsané trojúhelníku ABC , jak snadno plyne ze stejnohlosti obou trojúhelníků podle jejich společného těžiště. Spojením uvedených rovností tak dostáváme $|OC_1|^2 = \frac{1}{2}(|OH|^2 + r^2)$. Odtud je už zřejmé, že všech šest uvažovaných bodů leží na kružnici se středem O a poloměrem $\frac{1}{2}(|OH|^2 + r^2)$.

Jiné řešení. Zvolíme-li střed O kružnice opsané trojúhelníku ABC za počátek souřadnicového systému a označíme jedním písmenem $\mathbf{X}$ odpovídající vektor $\mathbf{OX}$, platí $\mathbf{H} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$ (ve stejnohlosti se středem v těžišti T daného trojúhelníku, která převádí ABC na $A_0B_0C_0$, odpovídá totiž ortocentru H bod O , takže je $\mathbf{H} - \mathbf{T} = 2(\mathbf{T} - \mathbf{O})$ neboli

³ Rovnost snadno plyne z kosinové věty a je ekvivalentní s jinou známou rovností $2(a^2 + b^2) = e^2 + f^2$, která platí pro rovnoběžník se stranami a, b a úhlopříčkami e, f .

$H = 3T - 2O = 3T$). Zároveň také je $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = r^2$, kde r označuje poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC . Pro bod C_0 tak máme

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{C}_0 \mathbf{C}_1|^2 + |\mathbf{OC}_0|^2 &= |\mathbf{HC}_0|^2 + |\mathbf{OC}_0|^2 = \\
 &= \left(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} - \frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{2} \right) \cdot \left(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} - \frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{2} \right) + \\
 &\quad + \left(\frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{2} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{2} \right) = \\
 &= \frac{1}{4}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \frac{1}{4}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \\
 &= \frac{1}{4}(2\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} + 4\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} + 4\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + 4\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} + 4\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) = \\
 &= 2r^2 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{A},
 \end{aligned}$$

přičemž součinem $\cdot$ zde přirozeně rozumíme skalární součin příslušných vektorů. Ze symetrie posledního výrazu vidíme, že všechny body $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ mají od bodu O stejnou vzdálenost, takže leží na jedné kružnici.

2. a) Zavedme substituci

$$\frac{x}{x-1} = a, \quad \frac{y}{y-1} = b, \quad \frac{z}{z-1} = c,$$

tj.

$$x = \frac{a}{a-1}, \quad y = \frac{b}{b-1}, \quad z = \frac{c}{c-1}.$$

Chceme dokázat nerovnost $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$ pro libovolná reálná čísla $a, b, c \neq 1$ splňující rovnost

$$\frac{a}{a-1} \cdot \frac{b}{b-1} \cdot \frac{c}{c-1} = 1, \tag{1}$$

která je přepsáním podmínky $xyz = 1$. Ekvivalentními úpravami z (1) postupně dostáváme

$$\begin{aligned}
 abc &= (a-1)(b-1)(c-1), \\
 ab + bc + ca &= a + b + c - 1, \\
 (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) &= 2(a + b + c - 1), \\
 (a + b + c)^2 - 2(a + b + c) &= a^2 + b^2 + c^2 - 2, \\
 (a + b + c - 1)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 - 1.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Levá strana poslední rovnosti je vždy nezáporná, proto opravdu platí $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$.

b) Abychom našli *dokonce všechny* trojice racionálních čísel x, y, z různých od 1, jež splňují vztah $xyz = 1$ a pro něž v zadané nerovnosti platí rovnost, stačí najít trojice racionálních čísel $a, b, c \neq 1$, jež splňují jak (1) (což navíc znamená, že jsou nenulová), tak i rovnost $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, a použít uvedenou substituci (zachovávající racionálnost) na výpočet x, y, z . Přitom první z rovností jsme ekvivalentně upravili na tvar (2). V oboru racionálních čísel různých od 0 a 1 tedy řešíme soustavu

$$\begin{aligned}(a + b + c - 1)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 - 1, \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 1,\end{aligned}$$

která je zřejmě ekvivalentní se soustavou

$$a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c = 1.$$

Vyjádřením $c = 1 - a - b$ a dosazením do rovnice $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ tak dostáváme jedinou rovnici

$$a^2 + b^2 + ab - a - b = 0.$$

Jsou-li nyní $a, b \notin \{0, 1\}$ racionální čísla, je racionální i $\lambda = b/a$. Dosazením $b = \lambda a$ do poslední rovnice dostáváme

$$a^2(1 + \lambda^2 + \lambda) - a(1 + \lambda) = 0,$$

a protože $a \neq 0$ a $\lambda^2 + \lambda + 1 > 0$ pro každé λ , vychází

$$a = \frac{1 + \lambda}{1 + \lambda + \lambda^2}, \quad b = \frac{\lambda + \lambda^2}{1 + \lambda + \lambda^2}, \quad c = -\frac{\lambda}{1 + \lambda + \lambda^2}.$$

Našli jsme tak všechna racionální řešení uvažované soustavy, kterých je nekonečně mnoho, neboť žádná ze tří nalezených racionálních funkcí λ nenabývá jen konečně mnoha hodnot. Vyloučit musíme jediné dvě hodnoty $\lambda \in \{-1, 0\}$, jež vedou k nežádoucím hodnotám 0, 1 čísel a, b, c .

Jestliže se vrátíme k původním proměnným x, y, z , dostaneme po jednoduché úpravě trojice

$$x = -\frac{1 + \lambda}{\lambda^2}, \quad y = -\lambda(1 + \lambda), \quad z = \frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2},$$

důkaz je však úplný i bez tohoto vyjádření, neboť různým trojicím (a, b, c) zřejmě odpovídají různé trojice (x, y, z) , takže i jich je nekonečně mnoho.

Jiné řešení. Protože čísla x, y, z jsou různá od 1, můžeme položit $x = a + 1, y = b + 1, z = c + 1$ ($abc \neq 0$). Je tedy

$$\begin{aligned} V &= \frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} = \frac{(a+1)^2}{a^2} + \frac{(b+1)^2}{b^2} + \frac{(c+1)^2}{c^2} = \\ &= 3 + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \\ &= 3 + \frac{2(ab+bc+ca)}{abc} + \frac{(ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c)}{(abc)^2}. \end{aligned}$$

Označíme-li $a+b+c = p, ab+bc+ca = q, abc = r \neq 0$, máme $xyz = 1$, právě když $p+q+r = 0$. Protože $r \neq 0$, můžeme pokračovat

$$\begin{aligned} V &= 3 + \frac{2q}{r} + \frac{q^2 - 2rp}{r^2} = 3 + \frac{2q}{r} + \left(\frac{q}{r}\right)^2 - 2\frac{p}{r} = \\ &= 3 + \frac{2q}{r} + \left(\frac{q}{r}\right)^2 + 2\frac{q+r}{r} = \left(\frac{q}{r}\right)^2 + 4\frac{q}{r} + 5 = \left(\frac{q}{r} + 2\right)^2 + 1 \geq 1. \end{aligned}$$

Tím je požadovaná nerovnost dokázána. Zároveň vidíme, že rovnost nastává, právě když $q = -2r$ a $p+q+r = 0$.

Najdeme (podobně jako v prvním řešení) *všechny* trojice nenulových racionálních čísel a, b, c , které vyhovují soustavě posledních dvou rovnic, jež můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -2, \quad \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1.$$

Vytkneme-li ze dvou zlomků druhé rovnice činitel $1/c$, dostaneme v závorce součet $1/a + 1/b$, za který dosadíme jeho vyjádření z první rovnice. Dostaneme tak

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{c} \cdot \left(-2 - \frac{1}{c}\right) = 1 \quad \text{neboli} \quad \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \left(1 + \frac{1}{c}\right)^2.$$

Pomocí neznámé c tak máme vyjádřen jak součet, tak i součin zlomků $1/a$ a $1/b$, tato dvě racionální čísla jsou tudíž kořeny $t_{1,2}$ kvadratické rovnice

$$t^2 + \left(2 + \frac{1}{c}\right)t + \left(1 + \frac{1}{c}\right)^2 = 0.$$

Její diskriminant

$$\left(2 + \frac{1}{c}\right)^2 - 4\left(1 + \frac{1}{c}\right)^2 = -\frac{4c+3}{c^2}$$

proto musí být druhou mocninou racionálního čísla, takže pro vhodné racionální μ musí platit

$$4c + 3 = -\mu^2, \quad \text{odkud} \quad c = -\frac{\mu^2 + 3}{4}.$$

Po dosazení takového parametru c do odvozené kvadratické rovnice určíme oba její racionální kořeny $t_{1,2}$ (rutinní výpočet podle známého vzorce přeskočíme) a rovnou zapíšeme příslušné hodnoty a a b (v jednom z pořadí, na kterém ostatně díky symetrii úlohy tolik nezáleží):

$$a = \frac{1}{t_1} = -\frac{\mu^2 + 3}{(\mu - 1)^2} \quad \text{a} \quad b = \frac{1}{t_2} = -\frac{\mu^2 + 3}{(\mu + 1)^2}.$$

Racionální číslo μ jako parametr nalezeného popisu všech vyhovujících trojic (a, b, c) zřejmě může nabývat jakékoliv hodnoty s výjimkou $\mu = \pm 1$. Vrátime-li se k původním proměnným $x = a + 1$, $y = b + 1$, $z = c + 1$, obdržíme kýžené vzorce pro všechny hledané trojice (až na možnou záměnu x a y) ve tvaru

$$x = -\frac{2(\mu + 1)}{(\mu - 1)^2}, \quad y = \frac{2(\mu - 1)}{(\mu + 1)^2}, \quad z = \frac{1 - \mu^2}{4}.$$

Snadno se můžeme přesvědčit, že parametry λ a μ z obou podaných řešení popisují stejnou vyhovující trojici, platí-li $\lambda = -2/(\mu + 1)$ (podmínka $\mu \neq 1$ odpovídá podmínce $\lambda \neq -1$).

3. Nechť N je libovolné sudé přirozené číslo a p některý prvočinitel čísla $N^2 + 1$. Označme z zbytek čísla N při dělení prvočíslem p (zřejmě $0 < z < p$). Potom máme

$$z^2 \equiv N^2 \equiv -1 \pmod{p} \quad \text{a též} \quad (p - z)^2 \equiv z^2 \equiv -1 \pmod{p}.$$

Vezměme za n menší z dvojice čísel z , $p - z$. Platí tedy $0 < n < p/2$ (p je liché prvočíslo) a zároveň $p \mid n^2 + 1$. Navíc

$$(p - 2n)^2 \equiv 4n^2 \equiv -4 \pmod{p},$$

a protože $(p - 2n)^2 > 0$, dostáváme $(p - 2n)^2 \geq p - 4$. Pro prvočísla $p \geq 5$ tak po odmocnění a úpravě máme

$$\begin{aligned} p - 2n &\geq \sqrt{p - 4}, \\ p &\geq 2n + \sqrt{p - 4}. \end{aligned} \tag{1}$$

Je-li dokonce $p > 20$, je $\sqrt{p - 4} > 4$ a z (1) plyne $p > 2n + 4$ neboli $p - 4 > 2n$. Je tedy $\sqrt{p - 4} > \sqrt{2n}$ a dosazením do (1) dostáváme požadovanou nerovnost $p > 2n + \sqrt{2n}$.

Ukázali jsme, že pro každé prvočíslo $p > 20$, k němuž existuje takové číslo N , že $p \mid N^2 + 1$ (tedy pro každé prvočíslo, mezi jehož kvadratické zbytky patří -1) existuje číslo n s požadovanou vlastností. Kdyby bylo takových n jen konečně mnoho, muselo by existovat jen konečně mnoho popsaných prvočísel, z $p \mid n^2 + 1$ totiž plyne $p \leq n^2 + 1$. Avšak prvočísel s kvadratickým zbytkem -1 je nekonečně mnoho. Důkazem tohoto známého tvrzení zakončíme řešení úlohy.

Nechť M je libovolné přirozené číslo. Potom libovolné prvočíslo p , které je dělitelem čísla $(M!)^2 + 1$, má mezi svými kvadratickými zbytky číslo -1 . Zároveň $p > M$, neboť zřejmě žádné z čísel $2, 3, \dots, M$ není dělitelem čísla $(M!)^2 + 1$. Ke každému M tedy existuje prvočíslo $p > M$ s požadovanou vlastností. Takových prvočísel je proto nekonečně mnoho.

Poznámky. Každé prvočíslo tvaru $4k + 1$ má mezi svými kvadratickými zbytky číslo -1 . Naopak -1 není kvadratickým zbytkem žádného prvočísla tvaru $4k + 3$. Prvočísel tvaru $4k + 1$ je nekonečně mnoho.

První tvrzení plyne z Wilsonovy věty: pro každé (liché) prvočíslo p platí $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$. A protože $i(p-i) \equiv -i^2 \pmod{p}$, máme

$$(p-1)! \equiv (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} \left(\left(\frac{p-1}{2} \right)! \right)^2 \equiv -1 \pmod{p},$$

což ukazuje, že pro $p = 4k + 1$ je -1 kvadratickým zbytkem. Kdyby naopak pro $p = 4k + 3$ existovalo x , že $x^2 \equiv -1$, dostali bychom $x^{p-1} = (x^2)^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} = -1$, což odporuje malé Fermatově větě. A konečně jsou-li $p_1, p_2, \dots, p_n$ prvočísla dávající zbytek $1 \pmod{4}$, je prvočinitel p čísla $(p_1 p_2 \dots p_n)^2 + 1$ od prvočísel $p_1, p_2, \dots, p_n$ různý, a protože má mezi kvadratickými zbytky -1 , musí být podle předchozího jedině tvaru $4k + 1$.

4. Předpokládejme, že funkce f vyhovuje zadání. Budeme za w, x, y, z dosazovat různé čtveřice kladných čísel splňující $wx = yz$ a stanovovat tak podmínky, které musí f splňovat a jež budeme dále používat.

Po dosazení $w = x = y = z = 1$ máme $f(1)^2/f(1) = 1$, tedy $f(1) = 1$. Vezměme libovolné $t > 0$ a dosadíme $w = t, x = 1$ a $y = z = \sqrt{t}$. S využitím $f(1) = 1$ postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{f(t)^2 + 1}{2f(t)} &= \frac{t^2 + 1}{2t}, \\ tf(t)^2 + t &= t^2 f(t) + f(t), \\ tf(t)(f(t) - t) &= f(t) - t, \\ (f(t) - t)(tf(t) - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Pro každé $t > 0$ proto platí buď $f(t) = t$, anebo $f(t) = 1/t$. Přímým dosazením do zadání snadno ověříme, že obě funkce

$$f(t) = t \quad \text{pro všechna } t > 0 \quad \text{a} \quad f(t) = \frac{1}{t} \quad \text{pro všechna } t > 0 \quad (1)$$

vyhovují (první funkce zřejmě vyhovuje, v případě druhé stačí provést triviální úpravu a použít podmínku $wx = yz$). Ukážeme, že žádná jiná funkce podmínky zadání nespĺňuje, tj. že f nemůže pro některé $t \neq 1$ nabývat hodnotu t a pro nějaké jiné t hodnotu $1/t$.

Předpokládejme, že f není ani jedna z funkcí (1). Tedy pro nějaká $a > 0$, $b > 0$ platí $f(a) \neq a$ a $f(b) \neq 1/b$. Podle odvozených podmínek potom nutně $f(a) = 1/a$, $f(b) = b$. Dosazením $w = a$, $x = b$ a $y = z = \sqrt{ab}$ do dané rovnosti po úpravě dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{a^{-2} + b^2}{2f(ab)} &= \frac{a^2 + b^2}{2ab}, \\ f(ab) &= \frac{ab(a^{-2} + b^2)}{a^2 + b^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Víme, že $f(ab) = ab$ nebo $f(ab) = 1/ab$. Jestliže $f(ab) = ab$, je podle (2) $a^{-2} + b^2 = a^2 + b^2$, odkud $a = 1$. Avšak $f(1) = 1$, což odporuje předpokladu $f(a) \neq a$. Podobně jestliže $f(ab) = 1/ab$, z (2) máme

$$a^2 b^2 (a^{-2} + b^2) = a^2 + b^2, \quad \text{tedy} \quad b^2 + a^2 b^4 = a^2 + b^2,$$

odkud $b^4 = 1$, tj. $b = 1$, což odporuje předpokladu $f(b) \neq 1/b$.

Dvě funkce (1) jsou tedy jediné funkce, jež vyhovují zadání.

Jiné řešení. Předpokládejme, že funkce f vyhovuje zadání, a položíme $w = s$, $x = t$, $y = z = \sqrt{st}$. Pro libovolná kladná čísla s, t tak dostaneme

$$f(s)^2 + f(t)^2 = f(st) \frac{s^2 + t^2}{st}. \quad (3)$$

Pro $s = t = 1$ odtud snadno plyne $f(1) = 1$ a pro $s = 1/t$ pak vyjde

$$f(t)^2 + f\left(\frac{1}{t}\right)^2 = t^2 + \frac{1}{t^2}. \quad (4)$$

Konečně dosazením $s = 1$ do (3) dostaneme

$$f(t)^2 - \frac{t^2 + 1}{t} f(t) + 1 = 0,$$

což je stejná kvadratická rovnice pro $f(t)$, jakou jsme dostali v předchozím řešení. Vidíme tedy, že pro každé $t > 0$ platí buď $f(t) = t$, anebo $f(t) = 1/t$.

Označme $A = \{a: f(a) = a\}$ a $B = \{b: f(b) = 1/b\}$. Zřejmě $A \cap B = \{1\}$ a $A \cup B = (0, \infty)$. Ze vztahů (3) a (4) však navíc plyne, že obě množiny A i B jsou uzavřeny vzhledem k operacím násobení a převrácené hodnoty. Jsou-li nyní $a \in A$, $b \in B$ taková, že $a \neq 1$, $b \neq 1$, nemůže být ani $ab \in A$ (jinak by bylo $b = a^{-1} \cdot ab \in A$), ani $ab \in B$ (bylo by $a = ab \cdot b^{-1} \in B$). Odtud plyne, že jedna z množin A , B je nutně triviální (rovna $\{1\}$), zatímco druhá je rovna $(0, \infty)$.

Jediné dvě funkce, jež vyhovují zadání, jsou funkce (1).

5. Posloupnosti k kroků, které vedou do stavu popsaného v zadání (lampy od 1 po n zapnuté, lampy od $n+1$ po $2n$ vypnuté), nazvěme *vyhovující*. Vyhovující posloupnosti, v nichž navíc ani jednou nezapneme žádnou z lamp od $n+1$ po $2n$, nazvěme *speciální*. Máme tedy N vyhovujících posloupností, z nichž M je speciálních.

V každé vyhovující posloupnosti je každá z lamp $1, \dots, n$ na konci zapnutá, takže celkový počet jejích přepnutí je lichý. Naopak každá z lamp $n+1, \dots, 2n$ je na konci vypnutá, takže počet jejích přepnutí je sudý.

Zřejmě $M > 0$, tj. existuje aspoň jedna speciální posloupnost (stačí jednou zapnout každou z lamp od 1 po n a potom zvolit jednu z nich a přepnout ji $(k-n)$ -krát, což je podle zadání sudé číslo).

Nechť $\mathcal{P}$ je libovolná speciální posloupnost. Zvolme kteroukoli lampu l , kde $1 \leq l \leq n$. Označme k_l celkový počet přepnutí lampy l (jak už jsme zmínili, je k_l liché). Vyberme mezi nimi libovolnou podmnožinu obsahující *sudý* počet přepnutí a nahradme každé z nich přepnutím lampy $n+l$. To můžeme udělat 2^{k_l-1} způsoby, protože každá k_l -prvková množina má $\frac{1}{2}2^{k_l} = 2^{k_l-1}$ podmnožin se sudou mohutností (zřejmě má každá množina stejný počet podmnožin se sudou i s lichou mohutností).

Uvedené změny přepnutí můžeme udělat nezávisle s každou lampou pro $l \in \{1, \dots, n\}$. Protože $k_1 + \dots + k_n = k$, je celkový počet různých posloupností, které dostaneme,

$$2^{k_1-1} \cdot 2^{k_2-1} \cdot \dots \cdot 2^{k_n-1} = 2^{k-n}.$$

V každé vytvořené posloupnosti je počet přepnutí každé z lamp od $n+1$ do $2n$ sudý a počet přepnutí každé z lamp od 1 do n lichý, jedná se proto o vyhovující posloupnost. Z každé speciální posloupnosti $\mathcal{P}$ umíme tudíž takto vytvořit 2^{k-n} vyhovujících posloupností.

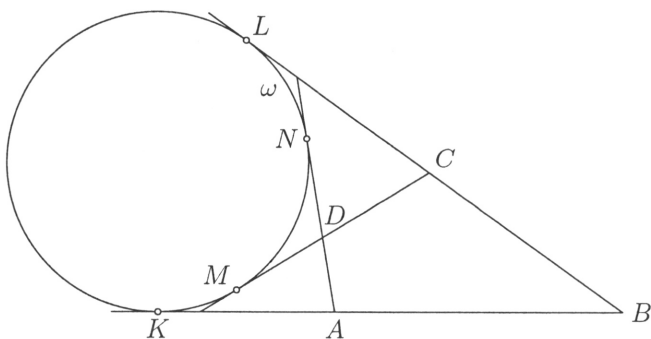
Zřejmě každou vyhovující posloupnost $\mathcal{Q}$ můžeme vytvořit popsáním způsobem. Stačí každé přepnutí lampy l ($l > n$) nacházející se v $\mathcal{Q}$ nahradit přepnutím lampy $l - n$. Ve výsledné posloupnosti $\mathcal{P}$ nebudou lampy od $n + 1$ do $2n$ přepnuty ani jednou. Protože v $\mathcal{Q}$ byl počet přepnutí každé lampy l ($l > n$) sudý, bude počet přepnutí každé lampy l ($l \leq n$) v $\mathcal{P}$ liché, tj. posloupnost $\mathcal{P}$ bude speciální. Jestliže nyní postup obrátíme a vrátíme příslušná přepnutí zpět k lampám od $n + 1$ do $2n$, dostaneme posloupnost $\mathcal{Q}$. Přitom obrácený postup změny $\mathcal{P}$ na $\mathcal{Q}$ probíhá přesně tak, jak jsme popsali výše.

Našli jsme zobrazení z množiny vyhovujících posloupností do množiny speciálních posloupností, přičemž vzor každé speciální posloupnosti při tomto zobrazení obsahuje 2^{k-n} vyhovujících posloupností. Proto $N/M = 2^{k-n}$.

6. Označme dotykové body kružnice ω a přímek BA , BC , CD , AD postupně K , L , M , N (obr. 53). Pro strany daného čtyřúhelníku platí

$$\begin{aligned} |AB| + |AD| &= (|BK| - |AK|) + (|AN| - |DN|), \\ |CB| + |CD| &= (|BL| - |CL|) + (|CM| - |DM|). \end{aligned}$$

Přitom z rovnosti úseků příslušných tečen ke kružnici ω plyne $|BK| = |BL|$, $|DN| = |DM|$, $|AK| = |AN|$ a $|CL| = |CM|$, což po dosazení do předchozích dvou rovností dává $|AB| + |AD| = |CB| + |CD|$.



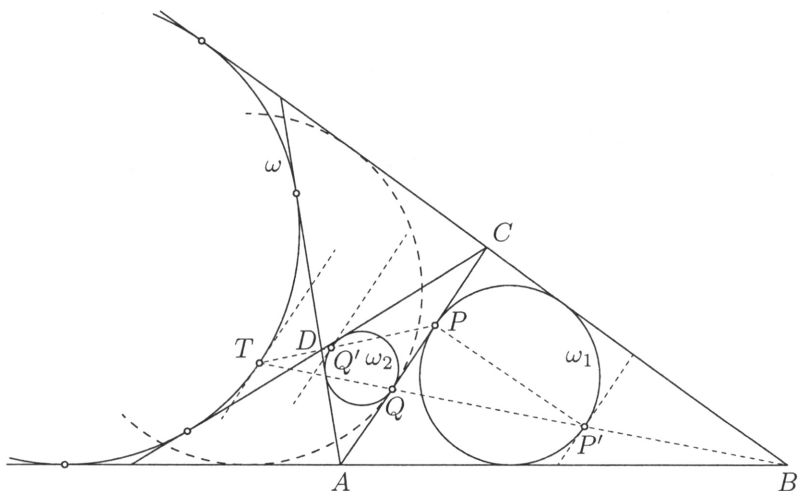
Obr. 53

Označme P a Q odpovídající body, v nichž se vepsané kružnice ω_1 , ω_2 dotýkají strany AC . Podle známých vzorců pro délky úseků mezi vrcholy trojúhelníku a dotykovými body stran a vepsané kružnice vychází

$$|AP| = \frac{1}{2}(|AC| + |AB| - |BC|), \quad |CQ| = \frac{1}{2}(|AC| + |CD| - |AD|).$$

což vzhledem k dokázané rovnosti $|AB| + |AD| = |CB| + |CD|$ dává rovnost $|AP| = |CQ|$.

Jak známo, body dotyku vepsané a připsané kružnice jsou souměrně sdruženy podle středu odpovídající strany. Proto je bod Q zároveň i bodem dotyku kružnice připsané ke straně AC trojúhelníku ABC (obr. 54). Přitom ve stejnolehlosti se středem B , v níž se tato připsaná kružnice zobrazí na kružnici ω_1 , je obrazem bodu Q bod P' , v němž má kružnice ω_1 další tečnu rovnoběžnou s tečnou AC . Zřejmě je PP' průměrem kružnice ω_1 kolmým na AC a body B, P', Q leží v přímce.



Obr. 54

Analogicky je bod P bodem dotyku kružnice připsané ke straně AC trojúhelníku ADC . Navíc $P \neq Q$, neboť $|AB| \neq |BC|$. Je-li QQ' průměr kružnice ω_2 (kolmý na úhlopříčce AC), leží body D, Q', P rovněž v přímce.

Uvažujme průměr kružnice ω , jenž je kolmý na AC , a označme T ten z jeho krajních bodů, který je blíže přímce AC . Ve stejnolehlosti se středem B , která zobrazuje ω_1 na ω , se bod P' zobrazí do bodu T . Podobně ve stejnolehlosti se středem D , která zobrazuje ω_2 na ω , se bod Q' zobrazí do bodu T . To znamená, že bod T je průsečíkem přímk $P'Q$ a PQ' . Protože $PP' \parallel QQ'$, kružnice ω_1, ω_2 s průměry PP', QQ' jsou stejnohlé se středem T . Protože bod T neleží na společné vnitřní tečně AC obou kružnic, je T jejich vnějším středem stejnolehlosti, takže je zároveň průsečíkem vnějších tečen kružnic ω_1, ω_2 , což jsme chtěli dokázat.

2. středoevropská matematická olympiáda

Druhý ročník Středoevropské matematické olympiády se uskutečnil 4.–10. září 2008 v Olomouci pod záštitou rektora Univerzity Palackého prof. RNDr. *Lubomíra Dvořáka*, CSc. Soutěž probíhala v prostorách Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého a zúčastnili se jí 52 studenti středních škol z devíti zemí. Každá země mohla vyslat nejvýše šest soutěžících, kteří se nezúčastnili uplynulé MMO ve Španělsku a v počínajícím školním roce 2008/09 ještě zůstávali studenty středních škol.



Organizací tohoto ročníku Středoevropské olympiády byl Ústřední komisi MO pověřen RNDr. *Jaroslav Švrček*, CSc., z Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci, který celou soutěž jako předseda organizačního výboru řídil. Přípravu a užší výběr úloh z došlých návrhů vzal na svá bedra doc. RNDr. *Jaromír Šimša*, CSc., přičemž definitivní výběr dvou čtveřic úloh pro soutěže jednotlivců i družstev odsouhlasila mezinárodní jury (složená z vedoucích zúčastněných zemí) ještě před zahájením olympiády elektronickou cestou. Jednání mezinárodní jury během soutěže pak řídil a moderoval RNDr. *Karel Horák*, CSc. Mezi vybranými soutěžními úlohami byla také jedna česká úloha, jejímž autorem byl bývalý úspěšný olympionik *Marek Pechal*.

Ústřední komise MO vybrala pro Středoevropskou matematickou olympiádu šestici středoškoláků sestavenou z úspěšných řešitelů ústředního kola 57. ročníku MO kategorie A, kteří splňovali podmínky soutěže. České reprezentační družstvo tak v abecedním pořadí tvořili: *David Klačka* (G Brno, tř. Kpt. Jaroše), *Jiří Marek* (G Brno, tř. Kpt. Jaroše), *Van Nhan Nguyen* (G Praha 6, Nad Alejí), *Tomáš Pavlík* (G Jana Keplera, Praha), *Hana Šormová* (G Brno, tř. Kpt. Jaroše) a *Jan Vaňhara* (G L. Jaroše v Holešově). Vedoucím české delegace a jejím zástupcem v jury byl Mgr. *Martin Panák*, Ph.D., z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně.

Vlastní soutěž se konala ve dvou soutěžních dnech, a to v sobotu 6. září (soutěž jednotlivců) a v neděli 7. září (soutěž družstev). Po oba soutěžní dny řešili jednotlivci, resp. reprezentační družstva po 4 úlohách, na jejichž vypracování byl vždy vyhrazen čas 5 hodin. Každá úloha byla přitom hodnocena (podle předem schváleného systému hodnocení) celočíselným počtem bodů v rozpětí od 0 do 8.

Koordinace žákovských řešení probíhala stejným způsobem jako na MMO. Na závěrečném jednání jury 8. září byly stanoveny hranice pro udělení zlatých, stříbrných a bronzových medailí a dále bylo potvrzeno oficiální pořadí v soutěži družstev. Vzhledem k tomu, že pět soutěžících *Bertram Arnold* z Německa, *András Éles*, *Dániel Nagy* a *Gergely Szűcs* z Maďarska a *Jakub Oćwieja* z Polska získalo v soutěži jednotlivců plný počet bodů, bylo o osudu připravených zlatých medailí rozhodnuto. Stříbrné medaile se pak udělovaly za 11–24 bodů a bronzové za 16–23 bodů.

Zisk jedné stříbrné a jedné bronzové našimi účastníky sice nevypadá zle, ale jejich celkové výsledky a zejména pak výsledek v soutěži družstev nás příliš nepotěšily. Jako jednotlivci naši soutěžící dopadli takto:

Umístění	Body za úlohu				Body	Cena
	1	2	3	4		
11.–16. David Klaška	8	8	0	8	24	stříbro
37.–38. Jiří Marek	5	8	0	0	13	HM
45.–47. Van Nhan Nguyen	4	1	0	0	5	
24. Tomáš Pavlík	3	1	8	7	19	bronz
45.–47. Hana Šormová	5	0	0	0	5	
44. Jan Vaňhara	0	7	0	0	7	
Celkem		25	23	8	15	71

Přehled výsledků všech zemí v soutěži jednotlivců je v druhé tabulce. Země jsou v ní seřazeny podle součtu bodů celého družstva podobně jako při neoficiálním pořadí zemí na MMO (číslo v závorce označuje menší počet účastníků).

	I	II	III	body		I	II	III	body
Maďarsko	3	3	0	171	Rakousko	0	0	3	86
Polsko	1	4	1	170	Česká republika	0	1	1	73
Německo	1	3	1	134	Chorvatsko	0	0	3	69
Slovensko	0	0	2	105	Slovinsko (4)	0	0	0	25
Švýcarsko	0	0	3	89					

V soutěži družstev získaly prvenství současně týmy Maďarska, Polska a Německa s plným bodovým ziskem. Tato tři družstva byla o třídu lepší

než ostatní. Vzhledem k tomu, že tak byly rozděleny tři zlaté medaile, stříbrná ani bronzová se už neudělovaly. Český tým skončil se ziskem 22 bodů na 7. místě, což představuje ve srovnání s minulým ročníkem, kdy naše družstvo skončilo na 3. místě, výrazné zhoršení (na první olympiádě ovšem chyběli Němci i Maďaři). Celkové výsledky soutěže družstev jsou uvedeny v následující tabulce.

Umístění	Body za úlohu				Body	Cena
	1	2	3	4		
1.–3. Maďarsko	8	8	8	8	32	zlato
Německo	8	8	8	8	32	zlato
Polsko	8	8	8	8	32	zlato
4. Rakousko	8	2	8	8	26	
5. Slovensko	6	3	8	8	25	
6. Švýcarsko	5	3	8	8	24	
7. Česká republika	8	6	0	8	22	
8. Chorvatsko	3	2	8	8	21	
9. Slovinsko	3	2	4	0	9	

Organizátoři připravili bohatý průvodní program. Během svého pobytu se soutěžící seznámili s pamětihodnostmi Olomouce a blízkého okolí (v pátek navštívili Svatý Kopeček, v pondělí byl pro všechny výlet s prohlídkou zámku a zahrad v Kroměříži a v úterý si mohli účastníci prohlédnout Javoříčské jeskyně a hrad Bouzov).

Slavnostní zakončení soutěže spojené s oceněním nejlepších jednotlivců a družstev se uskutečnilo v reprezentativních prostorách Konviktu Univerzity Palackého v Olomouci za přítomnosti rektora prof. RNDr. Lubomíra Dvořáka, CSc., pověřených zástupců Ministerstva školství a dalších významných představitelů Univerzity Palackého.

Třetí ročník MEMO se bude konat v Polsku v září 2009.

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

Soutěž jednotlivců

1. Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost přirozených čísel taková, že $a_n < a_{n+1}$ pro všechna $n \geq 1$. Předpokládejme, že pro libovolnou čtveřici indexů (i, j, k, l) , kde $1 \leq i < j \leq k < l$ a $i + l = j + k$, platí ostrá nerovnost $a_i + a_l > a_j + a_k$. Určete nejmenší možnou hodnotu členu a_{2008} .

(Rakousko)

2. Uvažujme šachovnici $n \times n$, kde $n > 1$ je přirozené číslo. Kolika způsoby na ni můžeme rozmístit $2n - 2$ identických kamenů (každý kámen leží na jiném poli) tak, že žádné dva kameny neleží na stejné diagonále? (Dva kameny leží na stejné diagonále, jestliže přímka spojující středy odpovídajících polí je rovnoběžná s některou z úhlopříček šachovnice.)
(Švýcarsko)

3. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC s rameny BC a AC . Kružnice mu vepsaná se dotýká stran AB a BC po řadě v bodech D a E . Přímka různá od AE a procházející bodem A protíná kružnici vepsanou v bodech F a G . Přímka AB pak protíná přímky EF a EG po řadě v bodech K a L . Dokažte, že $|DK| = |DL|$.
(Maďarsko)

4. Najděte všechna celá čísla k taková, že čísla $4n + 1$ a $kn + 1$ jsou nesoudělná pro libovolné celé n .
(Maďarsko)

Soutěž družstev

5. Nechť $\mathbb{R}$ značí množinu všech reálných čísel. Nalezněte všechny funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že

$$xf(x + xy) = xf(x) + f(x^2)f(y)$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.
(Švýcarsko)

6. Buď $n \geq 2$ přirozené číslo. Na tabuli je napsáno n čísel. V každém kroku vybereme na tabuli dvě čísla a každé z nich nahradíme jejich součtem. Určete všechna n , pro která vždy můžeme po konečném počtu kroků dostat n stejných čísel.
(Slovensko)

7. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC a body E, D tak, že body B a E leží v opačných polorovinách určených přímkou AC a bod D leží uvnitř úsečky AE . Dále nechť $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle CDE|$, $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle ECD|$ a $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle EBA|$. Dokažte, že body B, C a E leží v přímce.
(Slovinsko)

8. Jestliže je součet kladných dělitelů kladného celého čísla n mocninou čísla 2 s celočíselným mocnitelem, pak je i jejich počet mocninou čísla 2 s celočíselným mocnitelem. Dokažte.
(Česká republika)

Řešení úloh

1. (Podle *Jaromíra Šimši.*) Podle zadání pro každé $n \geq 1$ a čtveřici indexů $(n, n+1, n+1, n+2)$ platí

$$a_{n+2} - a_{n+1} \geq (a_{n+1} - a_n) + 1.$$

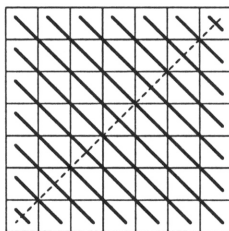
Protože $a_2 - a_1 \geq 1$, jednoduchým použitím matematické indukce dostáváme $a_{n+1} - a_n \geq n$ pro $n \geq 1$. Je tedy $a_{n+1} \geq n + a_n$. Odtud s využitím nerovnosti $a_1 \geq 1$ opět triviální matematickou indukcí odvodíme nerovnost

$$a_n \geq \frac{1}{2}(n^2 - n + 2).$$

Přitom posloupnost $a_n = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$ podmínky zadání splňuje. Nerovnost $a_i + a_l > a_j + a_k$ je totiž pro ni (při rovnosti $i + l = j + k$) ekvivalentní s nerovností $i^2 + l^2 > j^2 + k^2$, která po substituci $i = d - y$, $l = d + y$, $j = d - x$, $k = d + x$ (kde $0 \leq x < y$) přejde ve zřejmou nerovnost $2d^2 + 2y^2 > 2d^2 + 2x^2$.

Závěr. Nejmenší možná hodnota čísla a_{2008} je $\frac{1}{2}(2008^2 - 2008 + 2) = 2015029$.

2. Množinu k políček umístěných od jednoho okraje šachovnice po druhý ve směru některé úhlopříčky (přičemž $1 \leq k \leq n$) nazýváme k -diagonála. Počet disjunktních diagonál v jednom směru je $2n - 1$ (obr. 55), mezi $2n - 2$ zvolenými políčky však nemohou být najednou obě políčka na 1-diagonálách (protože ty jsou obě součástí n -diagonály ve druhém směru). Proto na každé k -diagonále pro $k > 1$ musí být zvoleno právě jedno políčko a právě dvě políčka musejí být zvolena v rozích (ne však v těch protilehlých).



Obr. 55

Uvažujme množinu P všech takových dvojic (z, v) , že z je zvolené políčko a v je *volné* (tedy nezvolené) políčko na téže diagonále jako z .

Na šachovnici je právě $n^2 - 2n + 2$ volných políček, přičemž dvě z nich jsou rohová. Každé ze zbylých $n^2 - 2n$ volných políček v leží na dvou k -diagonálách pro $k > 1$, existují k němu proto právě dvě políčka z taková, že $(z, v) \in P$. Celkový počet p dvojic v množině P je tedy

$$p = 2(n^2 - 2n) + 2 = 2n^2 - 4n + 2, \quad (1)$$

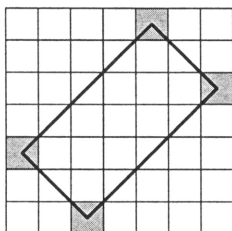
přičemž $+2$ je příspěvek dvou volných rohových políček (každé z nich má jediné příslušné zvolené políčko v protilehlém rohu).

Jestliže zvolené políčko z leží na průniku k_1 -diagonály a k_2 -diagonály pro $k_1, k_2 > 1$, je počet volných políček v takových, že $(z, v) \in P$, roven $k_1 + k_2 - 2$. Totéž platí i pro rohová políčka, pro která $\{k_1, k_2\} = \{1, n\}$. Zřejmě pro každé zvolené políčko z platí $k_1 + k_2 \geq n + 1$, přičemž rovnost nastane, právě když se políčko nalézá na kraji šachovnice. Počet takových volných políček v , že $(z, v) \in P$, je tedy aspoň $n - 1$. Odtud

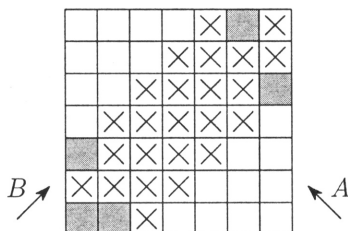
$$p \geq (2n - 2)(n - 1) = 2n^2 - 4n + 2.$$

Podle (1) víme, že v předešlé nerovnosti platí rovnost, proto všechna zvolená políčka musejí ležet na kraji šachovnice.

Jestliže zvolíme libovolná políčka (třeba i žádná) z první řady šachovnice, zbylá okrajová políčka (ležící mimo první řadu), která musíme zvolit, jsou jednoznačně určena. Pro rohová políčka je to zřejmé, pro zbylá políčka stačí pro každé $k = 2, 3, \dots, n-1$ uvažovat obdélník tvořený dvěma k -diagonálami v jednom směru a $(n+1-k)$ -diagonálami v druhém směru (v každém takovém obdélníku musejí být mezi zvolenými políčky dva protilehlé rohy, obr. 56). Celkový počet různých výběrů políček je tedy stejný jako počet různých podmnožin n -prvkové množiny (tvořené políčky první řady), tedy 2^n .



Obr. 56



Obr. 57

Jiné řešení. (Podle *Bernda Mulanského*, Německo.) Dva různé směry diagonál označme A a B . Z úvodu prvního řešení víme, že na každé k -diagonále pro $k > 1$ je zvoleno právě jedno políčko a právě dvě políčka jsou zvolena v neprotilehlých rozích. Každý vyhovující výběr políček můžeme vytvořit následujícím postupem sestávajícím z n kroků:

- ▷ Krok 1: Zvolíme políčko na jedné ze dvou 1-diagonál směru A .
- ▷ Krok k ($2 \leq k \leq n-1$): Zvolíme dvě políčka, každé na jedné ze dvou k -diagonál směru A .
- ▷ Krok n : Zvolíme políčko na n -diagonále směru A .

Zřejmě pro každé $m = 1, 2, \dots, n-1$ po m krocích (takových, že žádná dvě zvolená políčka nejsou na téže diagonále směru B) se na každé mezi $2m-1$ nejdelšími k -diagonálami směru B (tj. $k \geq n+1-m$) nalézají zvolené políčko (obr. 57). Jestliže $m < n-1$, v následujícím kroku $m+1$ musejí být obě políčka zvolena na kraji obou $(m+1)$ -diagonál směru A (zbylá políčka těchto dvou diagonál leží na už „obsazených“ diagonálách směru B), což se dá udělat právě dvěma způsoby. Podobně je to v případě $m+1 = n$. Máme tedy dvě možnosti v každém z n kroků a celkový počet různých vyhovujících výběrů je 2^n .

Jiné řešení. (Podle *Pavla Novotného*, Slovensko.) Obarvíme políčka šachovnice jako obvykle, přičemž levý horní roh bude černý. Z podobné úvahy jako v úvodu prvního řešení plyne, že musíme zvolit $n-1$ bílých a $n-1$ černých políček. Počet p_n všech vyhovujících výběrů $2n-2$ políček na šachovnici $n \times n$ se rovná součinu $b_n \cdot c_n$, přičemž b_n a c_n jsou počty vyhovujících výběrů $n-1$ bílých, resp. černých políček. Zřejmě $b_2 = b_3 = 2$, $c_2 = 2$ a $c_3 = 4$. Snadno ukážeme, že pro každé $n \geq 4$ platí $b_n = 2b_{n-2}$,¹ $c_n = 2c_{n-2}$,² takže $p_n = b_n c_n = 4b_{n-2}c_{n-2} = 2c_{n-1}b_{n-1} = 2p_{n-1}$, odkud už triviálně plyne $p_n = 2^n$.

3. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $|AF| < |AG|$. Rozeberme nejprve situaci, kdy je G na kratším oblouku DE .

Označme J dotkový bod vepsané kružnice se stranou AC . Z vlastností souhlasných, úsekového a obvodových úhlů máme $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CJE| = |\sphericalangle JDE| = |\sphericalangle JFE|$ (obr. 58), takže $AJFK$ je tětíkový čtyřúhelník. Proto z obvodových, vrcholových a úsekového úhlu dostá-

¹ Odstraníme dvě bílé 2-diagonály v jednom směru a dvě bílé $(n-1)$ -diagonály v druhém směru; zbylá bílá políčka vytvářejí stejné diagonály jako bílá políčka šachovnice $(n-2) \times (n-2)$.

² Odstraníme jednu černou n -diagonálu; zbylá černá políčka vytvářejí stejné diagonály jako bílá políčka šachovnice $(n-1) \times (n-1)$.

Z mocnosti bodu A k vepsané kružnici (ta je díky symetrii stejná jako mocnost bodu B) plyne $|AF| \cdot |AG| = |AD|^2$, odkud dohromady se zřejmými rovnostmi $|AD| = |BD| = |BE|$ máme $|AF| \cdot |AG| = |BE|^2$. Spojením s (2) dostáváme

$$|AK| \cdot |AL| = |KB| \cdot |LB|.$$

V závislosti na poloze bodu G leží body K a L buď oba uvnitř, anebo vně úsečky AB . Podle toho pro některé znaménko plus nebo minus platí

$$|AK| \cdot (|AB| \pm |BL|) = |AK| \cdot |AL| = |KB| \cdot |LB| = (|AB| \pm |AK|) \cdot |BL|.$$

V obou případech vyjde po úpravě $|AK| = |BL|$, což je ekvivalentní s rovností $|DK| = |DL|$.

4. Protože číslo $4n + 1$ je liché, z rovnosti $k - 4 = k(4n + 1) - 4(kn + 1)$ vidíme, že $4n + 1$ a $kn + 1$ jsou nesoudělná, jestliže $k - 4$ nemá žádného lichého dělitele $p > 1$, tj. jestliže $k - 4 = \pm 2^m$ pro nějaké nezáporné celé číslo m .

Na druhé straně jestliže $k - 4$ má lichého dělitele $p > 1$, snadno najdeme násobek p tvaru $4n + 1$ (je jím například číslo p^2 anebo jednoduše jedno z dvojice čísel $p, 3p$). Pro každé číslo $4n + 1$, které je násobkem p , z rovnosti uvedené na začátku řešení plyne $p \mid kn + 1$, tedy $4n + 1$ a $kn + 1$ nejsou nesoudělná.

Odpověď. Hledanými čísly jsou $k = 4 \pm 2^m$, přičemž $m = 0, 1, 2, \dots$

5. Dosazením $x = y = 0$ do dané rovnosti

$$xf(x + xy) = xf(x) + f(x^2)f(y) \quad (1)$$

dostaneme $f(0) = 0$. Po dosazení $y = -1$ do (1) tak máme

$$xf(x) + f(x^2)f(-1) = 0. \quad (2)$$

Rozeberme postupně případy $f(-1) = 0$ a $f(-1) \neq 0$.

Nechť $f(-1) = 0$. Z (2) potom plyne $f(x) = 0$ pro všechna $x \neq 0$. Protože už víme, že i $f(0) = 0$, dostáváme konstantní nulovou funkci $f(x) = 0$, která zřejmě vyhovuje.

Nechť $f(-1) \neq 0$. Dosazením $x = -1$ do (2) dostáváme $f(1) = 1$. Díky tomu po dosazení $x = 1$ do (2) máme $f(-1) = -1$, takže (2) můžeme přepsat na

$$xf(x) = f(x^2). \quad (3)$$

Dosadme nyní do dané rovnosti (1) $y = x - 1$. Dostaneme

$$xf(x^2) = xf(x) + f(x^2)f(x-1)$$

a po dosazení z (3) získáme po úpravě rovnost

$$f(x^2)(f(x-1) - (x-1)) = 0. \quad (4)$$

Předpokládejme, že $f(a) = 0$ pro nějaké $a \neq 0$. Potom podle (3) máme $f(a^2) = 0$, takže po dosazení $x = a$ do dané rovnosti (1) dostaneme $af(a+ay) = 0$, tedy $f(a+ay) = 0$. Protože y může být libovolné, nutně i $f(-1) = 0$, což odporuje případu, který právě rozebíráme. Proto pro každé $x \neq 0$ platí $f(x) \neq 0$ a zároveň i $f(x^2) \neq 0$. Ze (4) pak vychází $f(x-1) = x-1$ pro každé $x \neq 0$, takže $f(x) = x$ pro každé $x \neq -1$. Protože z předchozího víme, že i $f(-1) = -1$, dostáváme funkci $f(x) = x$, která zřejmě rovněž vyhovuje.

Závěr. Hledanými funkcemi jsou $f(x) = 0$ a $f(x) = x$.

6. Jestliže začneme s n -ticí $(2, 2, 1, 1, \dots, 1)$, přičemž $n \geq 3$, v každé n -tici, kterou z ní po libovolném počtu kroků dostaneme, bude počet členů nabývajících maximální hodnotu *sudý*. Proto nevyhovuje žádná lichá hodnota $n \geq 3$.

Matematickou indukcí dokážeme, že každé sudé $n \geq 2$ vyhovuje. Pro $n = 2$ je to zřejmé. Jestliže je $n \geq 4$ sudé, podle indukčního předpokladu umíme libovolnou n -tici po konečném počtu kroků změnit na $(a, a, \dots, a, b, b)$. Jestliže $a \neq b$, opakovaně uděláme některou z následujících sérií kroků, které vždy vedou na n -tici tvaru

$$\underbrace{(a, \dots, a)}_k, \underbrace{(b, \dots, b)}_{n-k}$$

(v ní může mít k i jinou hodnotu než počáteční $k = n - 2$, stále však bude *sudý*):

$$\text{série } \alpha: \underbrace{(a, \dots, a)}_k, \underbrace{(b, \dots, b)}_{n-k} \rightarrow \underbrace{(2a, \dots, 2a)}_k, \underbrace{(b, \dots, b)}_{n-k},$$

$$\text{série } \beta: \underbrace{(a, \dots, a)}_k, \underbrace{(b, \dots, b)}_{n-k} \rightarrow \underbrace{(a, \dots, a)}_k, \underbrace{(2b, \dots, 2b)}_{n-k},$$

$$\text{série } \gamma_1 \ (k \leq n - k): \underbrace{(a, \dots, a)}_k, \underbrace{(b, \dots, b)}_{n-k} \rightarrow \underbrace{(a+b, \dots, a+b)}_{2k}, \underbrace{(b, \dots, b)}_{n-2k},$$

$$\text{série } \gamma_2 \ (k \geq n - k): \underbrace{(a, \dots, a)}_k, \underbrace{(b, \dots, b)}_{n-k} \rightarrow \underbrace{(a, \dots, a)}_{2k-n}, \underbrace{(a+b, \dots, a+b)}_{2(n-k)}.$$

Kvůli dalším úvahám zavedme pro libovolné přirozené číslo c označení $c = 2^{P(c)}N(c)$, přičemž $P(c) \geq 0$ a $N(c)$ je liché. Na n -tici

$$(\underbrace{a, \dots, a}_k, \underbrace{b, \dots, b}_{n-k}), \quad a \neq b,$$

použijeme

- ▷ sérii α , jestliže $P(a) < P(b)$,
- ▷ sérii β , jestliže $P(a) > P(b)$,
- ▷ sérii γ_1 nebo γ_2 , jestliže $P(a) = P(b)$ (a tedy $N(a) \neq N(b)$).

Při použití sérií α a β se čísla $N(a)$, $N(b)$ nemění, zatímco při použití γ_1 a γ_2 se změní právě jedno z nich, konkrétně

$$N(b) \rightarrow \frac{N(a) + N(b)}{2^m}, \quad \text{anebo} \quad N(b) \rightarrow \frac{N(a) + N(b)}{2^m},$$

přičemž $m = P(N(a) + N(b)) \geq 1$, a tedy

$$\frac{N(a) + N(b)}{2^m} \leq \frac{N(a) + N(b)}{2} < \max(N(a), N(b))$$

(připomínáme, že $N(a) \neq N(b)$). Z uvedených úvah plyne, že hodnota $\max(N(a), N(b))$ nikdy neroste, takže po konečném počtu kroků začne být konstantní. Od toho okamžiku musíme mít stále buď $N(a) \geq N(b)$, anebo $N(a) \leq N(b)$. To vylučuje z dalšího použití buď sérii γ_1 , anebo sérii γ_2 . Všechny další změny parametru k jsou potom buď $k \rightarrow 2k$, anebo $(n-k) \rightarrow 2(n-k)$. Protože toto můžeme zopakovat jen r -krát, kde $2^r \leq n$, musíme nakonec dostat n -tici $(a, \dots, a, b, \dots, b)$, kterou (pokud $a \neq b$) můžeme měnit už jen sériemi α a β . Použitím série α nebo β právě $|P(a) - P(b)|$ -krát dostaneme n -tici $(a', \dots, a', b', \dots, b')$, v níž $P(a') = P(b')$. Protože použití γ_1 , γ_2 jsme už vyloučili, nutně $a' = b'$, čímž je indukční krok ukončen.

Jiné řešení. (Upravené řešení německého družstva.) Dokážeme *bez* matematické indukce, že vyhovuje každé sudé $n = 2k$. Nejdříve v počáteční $2k$ -tici $(a_1, \dots, a_{2k})$ nahradíme každou dvojici (a_{2i-1}, a_{2i}) (pro $i = 1, \dots, k$) dvojicí $(a_{2i-1} + a_{2i}, a_{2i-1} + a_{2i})$. Odted' budeme mít na $(2i-1)$ -té a $2i$ -té pozici vždy stejná čísla. Proto kvůli přehlednosti budeme dále pracovat jen s k -ticemi $(x, y, z, \dots)$ místo $2k$ -tic $(x, x, y, y, z, z, \dots)$. S k -ticemi můžeme dělat následující změny:

- ▷ zvolíme dvě čísla x , y a nahradíme každé z nich jejich součtem (to odpovídá dvěma krokům $(\dots, x, x, \dots, y, y, \dots) \rightarrow (\dots, x+y, x+y, \dots$,

$x + y, y, \dots) \rightarrow (\dots, x + y, x + y, \dots, x + y, x + y, \dots)$ provedeným na původní $2k$ -tici);

- ▷ zvolíme jedno číslo x a vynásobíme ho dvěma (to odpovídá jednomu kroku $(\dots, x, x, \dots) \rightarrow (\dots, x + x, x + x, \dots)$);
- ▷ vydělíme všechna čísla dvěma (to samozřejmě nemá na výsledek vliv; formálně si můžeme pamatovat, kolikrát jsme dělení dvěma provedli a na konci můžeme všechna čísla vynásobit příslušnou mocninou dvou).

Naším cílem je dostat k stejných čísel. Získáme je opakováním následujícího algoritmu:

1. Dokud existují aspoň dvě různá lichá čísla, najdeme nejmenší a největší liché číslo a nahradíme každé z nich jejich (sudým) součtem.
2. Jestliže po skončení prvního kroku zůstane v k -tici jedno liché číslo, vynásobíme ho dvěma.
3. Vydělíme všechna čísla dvěma.

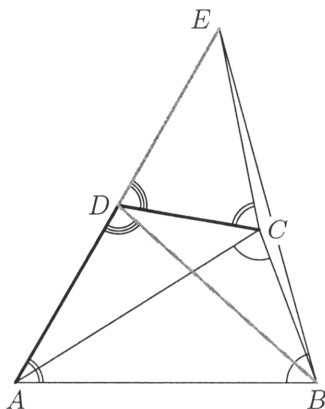
Zřejmě po každém provedení celého algoritmu se největší číslo mezi všemi k čísly buď zmenší, anebo zůstane stejné. Protože tímto maximem je stále přirozené číslo, přestane se po konečném počtu opakování algoritmu měnit. Jeho hodnotu označme M a dále označme N počet čísel M v naší k -tici.

Číslo M je zřejmě liché (jinak by se v třetím kroku algoritmu zmenšilo). Kdyby bylo $N < k$, našli bychom v k -tici aspoň jedno číslo m menší než M . Je-li m liché, po provedení algoritmu se N zmenší. Protože N se nemůže nikdy zvětšit, po konečném počtu kroků už musí zůstat konstantní a všechna čísla v k -tici menší než M musejí být sudá. Ale každé sudé m se po provedení algoritmu zmenší na polovinu a po několika provedeních algoritmu by se nutně objevilo liché číslo menší než M . Proto v k -tici nemohou existovat čísla menší než M , což jsme chtěli dokázat.

7. Podmínka $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle CDE|$ nabádá zobrazit bod B v osově souměrnosti podle přímky AE do bodu B' (obr. 60). Potom leží body C , D a B' v přímce a $|\sphericalangle EAB'| = |\sphericalangle EAB| = |\sphericalangle ECD| = |\sphericalangle ECB'|$, takže $B'ACE$ je tětíkový čtyřúhelník. Odtud $|\sphericalangle ECA| = 180^\circ - |\sphericalangle EB'A| = 180^\circ - |\sphericalangle EBA| = 180^\circ - |\sphericalangle ACB|$, tedy $|\sphericalangle ECA| + |\sphericalangle ACB| = 180^\circ$, a tudíž body B , C , E leží v přímce.

Poznámky. Stejně dobře můžeme zobrazit bod C v osově souměrnosti podle AE do C' ležícího na jedné přímce s B , D . Tětíkový je potom čtyřúhelník $ABEC'$ a dále $|\sphericalangle ECA| = |\sphericalangle EC'A| = 180^\circ - |\sphericalangle EBA| = 180^\circ - |\sphericalangle ACB|$, tj. opět $|\sphericalangle ECA| + |\sphericalangle ACB| = 180^\circ$.

Jiné řešení. (Podle *Karla Horáka*.) Z daných rovností velikostí úhlů plyne, že trojúhelníky ABD a CED jsou podobné (obr. 62). Z toho oka-



Obr. 62

mžité dostáváme, že i trojúhelníky ACD a BED jsou podobné (podle *sus*; stejně velký úhel při společném vrcholu D a úměrné strany). Z rovnosti úhlů BED a ACD potom plyne, že součet velikostí tří sousedních úhlů BCA , ACD a DCE je roven součtu velikostí úhlů v trojúhelníku ABE , body E , C a B jsou tedy kolineární.

8. Nechť prvočíselný rozklad čísla n je $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_k^{s_k}$, přičemž $p_1, \dots, p_k$ jsou různá prvočísla a $s_i \geq 1$ pro každé i . Předpokládejme, že součet všech kladných dělitelů čísla n , který se dá vypočítat jako

$$(1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{s_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \dots + p_2^{s_2}) \dots (1 + p_k + p_k^2 + \dots + p_k^{s_k}),$$

je mocninou dvou. Potom každý z činitelů

$$f_i = 1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{s_i}$$

musí být též netriviální mocninou dvou, což znamená, že p_i i s_i jsou lichá. Je-li $s_i > 1$, je

$$f_i = (1 + p_i)(1 + p_i^2 + p_i^4 + \dots + p_i^{s_i-1}).$$

Protože f_i nemá žádného lichého dělitele většího než 1, sudé celé číslo $s_i - 1$ (o němž předpokládáme, že je kladné) musí být tvaru $4k + 2$, a proto můžeme provést další rozklad

$$f_i = (1 + p_i)(1 + p_i^2)(1 + p_i^4 + p_i^8 + \dots + p_i^{s_i-3}).$$

Obě čísla $1 + p_i$ a $1 + p_i^2$ jsou mocniny dvou, takže $1 + p_i \mid 1 + p_i^2$. To však není možné, např. proto, že by pak muselo být číslo $1 + p_i$ dělitelem i čísla $2 = 1 + p_i^2 + (1 + p_i)(1 - p_i)$. Proto pro každé i platí $s_i = 1$ a počet dělitelů čísla n je roven 2^k .

Poznámka. Uvedené řešení lze ukončit i bez pozorování, že $1 + p_i$ a $1 + p_i^2$ nemohou být současně mocninami dvou. Opakováním postupných rozkladů na součin totiž dostaneme

$$f_i = (1 + p_i)(1 + p_i^2)(1 + p_i^4) \dots (1 + p_i^{2^{t_i}}),$$

takže pro každé i je $s_i = 2^{t_i+1} - 1$ pro nějaké vhodné $t_i \geq 0$, proto počet dělitelů čísla n je roven $2^{k+t_1+t_2+\dots+t_k}$. (Z uvedeného řešení však víme, že $t_i = 0$ pro každé i .)

15. stredoevropská olympiáda v informatice

Ve dnech 6.–12. 7. 2008 se konal v německém městě Drážďany 15. ročník Středoevropské olympiády v informatice (CEOI 2008 — Central European Olympiad in Informatics). Soutěže se zúčastnilo 36 studentů — čtyřčlenná družstva ze všech 7 zemí středoevropského regionu a navíc jako hosté družstva Izraele a pořádající spolkové země Sasko.



Reprezentační družstvo České republiky bylo sestaveno na základě výsledků dosažených soutěžícími v ústředním kole 57. ročníku Matematické olympiády — kategorie P (programování). Zatímco čtyři nejlepší řešitelé ústředního kola MO kategorie P pojedou soutěžit na celosvětovou soutěž IOI 2008 v srpnu do Egypta, pro účast na CEOI 2008 bylo jako obvykle vybráno družstvo složené z dalších úspěšných řešitelů naší národní olympiády, kteří letos ještě nebudou maturovat a na CEOI tak mohou získat cenné zkušenosti, které jistě uplatní v různých programátorských soutěžích v průběhu dalšího školního roku. České družstvo pro 15. stredoevropskou olympiádu v informatice mělo následující složení:

František Hejl, student Gymnázia Jana Nerudy v Praze,
Hynek Jemelík, student Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně,
David Kláška, student Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně,
Libor Plucnar, student Gymnázia Petra Bezruče ve Frýdku-Místku.

Vedoucími české delegace byli jmenováni doc. RNDr. *Pavel Töpfer*, CSc., a Bc. *Zbyněk Falt*, oba z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Naši studenti měli možnost připravit se na soutěž nejen samostatným studiem odborné literatury, ale v červnu se zúčastnili společně s reprezentanty vybranými na IOI i týdenního přípravného soustředění. Toto tradiční společné česko-polsko-slovenské přípravné soustředění před IOI a CEOI (CPSPC — Czech-Polish-Slovak Preparation Camp) v letošním roce uspořádali slovenští organizátoři programátorské olympiády v objektu UPJŠ Košice v obci Danišovce.

Vlastní soutěž CEOI 2008 byla jako obvykle rozdělena do dvou soutěžních dnů, v každém z nich studenti řešili tři soutěžní úlohy a na práci měli vymezen čas 5 hodin. Každý soutěžící pracuje na přiděleném osobním počítači s nainstalovaným soutěžním prostředím, které umožňuje vyvíjet a testovat programy a odesílat je k vyhodnocení. Výsledné programy jsou testovány pomocí připravené sady testovacích dat a se stanovenými časovými limity. Tím je zajištěna nejen kontrola správnosti výsledků, ale pomocí časových limitů se také odliší kvalita použitého algoritmu. Při testování každé úlohy se používají sady testovacích dat různé velikosti, takže teoreticky správné řešení založené na neefektivním algoritmu zvládne dokončit výpočet pouze pro některé, menší testy. Takové řešení je potom ohodnoceno částečným počtem bodů.

Pořadatelé olympiády připravili soutěžní úlohy velmi pečlivě, takže celý proces přípravy úloh, upřesnění jejich formulací a překladu zadání úloh do národních jazyků večer před soutěží probíhal velmi rychle. Soutěžící měli jen minimum dotazů k zadání úloh a neobjevily se ani žádné oprávněné protesty proti hodnocení. Soutěžní úlohy byly dobře navrženy, byly věcně zajímavé, byly ovšem o něco obtížnější než obvykle.

Pro všechny účastníky CEOI připravují pořadatelé vždy také doprovodný program. Absolvovali jsme prohlídku Drážďan a místních historických památek, navštívili jsme některá zdejší muzea i provozy firmy AMD zabývající se výrobou mikroprocesorů, celodenní turistický výlet mířil do oblasti skalních měst v Saském Švýcarsku.

Večer před odjezdem se konalo slavnostní zakončení soutěže spojené s vyhlášením výsledků. Každá ze soutěžních úloh byla hodnocena maximálně 100 body, takže celkově bylo možné získat až 600 bodů. To se ovšem vzhledem k náročnosti úloh nikomu nepodařilo, celkový vítěz dosáhl 524 bodů. Podle pravidel CEOI obdrží na závěr soutěže lepší polovina účastníků některou z medailí, přičemž zlaté, stříbrné a bronzové medaile se udělují přibližně v poměru 1 : 2 : 3 (pochopitelně s ohledem na to, aby soutěžící se stejným bodovým ziskem získali stejnou medaili). Letos byly uděleny 3 zlaté, 6 stříbrných a 11 bronzových medailí. Z našich reprezentantů získal bronzovou medaili pouze *David Klačka*, který se umístil na 14. místě:

14. David Klačka	237 bodů	bronzová medaile
24. František Hejl	158 bodů	
33. Hynek Jemelík	91 bodů	
36. Libor Plucnar	34 bodů	

Zlaté medaile získali reprezentanti Chorvatska, Polska a Rumunska. Středoevropská olympiáda v informatice je soutěží jednotlivců, žádné pořadí zúčastněných zemí v ní není vyhlašováno.

Veškeré informace o soutěži, texty soutěžních úloh i podrobné výsledky všech účastníků lze nalézt na Internetu na adrese

<http://www.ceoi2008.de>.

Následující, v pořadí 16. ročník CEOI se bude konat v červenci 2009 v Rumunsku. Tamní organizátoři již nyní pozvali všechny země zúčastněné na CEOI v Německu k účasti v příštím ročníku soutěže.

20. mezinárodní olympiáda v informatice



Jubilejní 20. ročník Mezinárodní olympiády v informatice (IOI) se uskutečnil ve dnech 16.–23. srpna 2008 v egyptském hlavním městě Káhiře. Soutěže se zúčastnilo 283 soutěžících ze 78 zemí celého světa; nově vyslali své soutěžní týmy Alžírsko a Ghana. Většina zemí využila možnosti vyslat na IOI maximální povolený počet čtyř soutěžících, z několika nově se zúčastňujících zemí přijely reprezentace menší.

Reprezentační družstvo České republiky bylo sestaveno na základě výsledků dosažených soutěžícími v ústředním kole 57. ročníku Matematické olympiády – kategorie P (programování), které se uskutečnilo v dubnu 2008 v Českých Budějovicích. Naše družstvo pro IOI 2008 mělo následující složení:

Miroslav Klimoš, student gymnázia M. Koperníka v Bílovci,
Jan Matějka, student gymnázia Jírovcova v Českých Budějovicích,
Roman Smrž, absolvent gymnázia E. Krásnohorské v Praze,
Vojtěch Tůma, absolvent gymnázia J. Masaryka v Jihlavě.

Vedoucími české delegace byli jmenováni RNDr. *Daniel Král*, Ph.D., a Bc. *Tomáš Gavenčiak*, oba z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Vedle této oficiální šestičlenné delegace se 20. mezinárodní olympiády v informatice zúčastnil z České republiky ještě Mgr. *Martin Mareš*, Ph.D., rovněž pracovník MFF UK v Praze, a to jako člen Mezinárodního vědeckého výboru IOI.

Naši studenti měli možnost připravit se na soutěž nejen samostatným studiem, ale i účastí na přípravném soustředění, které tradičně pořádáme společně s polskými a slovenskými organizátory (CPSPC — Czech-Polish-Slovak Preparation Camp). Letos toto přípravné soustředění uspořádalo vedení slovenské olympiády v informatice ve slovenských Danišovcích. Soustředění se zúčastnili R. Smrž, V. Tůma a vybraní účastníci CEOI 2008; zbylí dva studenti vybraní pro účast na IOI 2008 se soustředění nemohli zúčastnit z časových důvodů.

Pořadatelé letošní Mezinárodní olympiády v informatice bylo egyptské ministerstvo školství a ministerstvo informačních a komunikačních technologií. Čestnou záštitu nad soutěží převzal egyptský prezident Husny Mubarak. Ubytování a stravování soutěžních týmů bylo zajištěno ve vzdělávacím komplexu Mubarak Education City v nově budované čtvrti káhirské metropole 6 October City. V tomto komplexu proběhla samotná soutěž i oficiální zahájení a ukončení soutěže, kterých se zúčastnili egyptský ministr školství a egyptský ministr informačních a komunikačních technologií.

Dnem příjezdu účastníků na soutěž byla stanovena sobota 16. srpna 2008. Český tým odlétal z Prahy kolem poledne a přiletěl do Káhiry v jedenáct hodin večer. Na místním letišti pořadatelé jednotlivé týmy očekávali a zajistili jim transport na místo soutěže. Soutěžními dny bylo pondělí 18. srpna 2008 a středa 20. srpna 2008. Zbylé dny pak byly vyhrazeny pro výběr úloh, zasedání mezinárodní jury a doprovodný společenský a kulturní program. V každém soutěžním dni byla účastníkům předložena sada tří úloh, na jejichž vyřešení měl každý soutěžící vymezen čas 5 hodin. Mezinárodní olympiáda v informatice je soutěží jednotlivců a tak každý soutěžící pracoval na přiděleném osobním počítači s předem oznámeným soutěžním prostředím. Vyhlášení soutěže proběhlo netradičně již ve čtvrtek 21. srpna 2008, neboť pátek a sobota jsou podle islámské tradice volné dny. Dnem odjezdu dle programu soutěže pak byla sobota 23. srpna 2008; česká delegace využila jeden z prvních ranních letů z Káhiry, který umožnil mimopražským účastníkům soutěže bezproblémový odjezd domů.

Během Mezinárodní olympiády v informatice proběhla na zasedání jury drobná revize pravidel soutěže. Jako nové pravidlo bylo schváleno, že student může reprezentovat na soutěži buď zemi, kde studuje střední školu, nebo (nově) zemi, jejímž je občanem. Vedoucí týmů byli informováni o výdajích na propagaci soutěže. Registrační poplatek na soutěž byl ponechán ve stejné výši, která je 200 EUR nebo 300 USD. Podstatná část vybraných poplatků je čerpána na rozvoj webových stránek soutěže, které jsou spravovány na kanadské University of Waterloo, workshopy určené k testování nových typů soutěžních úloh a podporu konference o mezinárodních soutěžích v informatice, jejíž druhý ročník se uskutečnil letos společně s Mezinárodní olympiádou v informatice.

Mezinárodní výbor soutěže, který nad celou soutěží bdí, pak vedoucí týmů informoval o problémech s reprezentací Chile na soutěži, neboť chilské ministerstvo školství oficiálně na soutěž vyslalo jiný tým, než který se

soutěže zúčastnil. Celou situaci řeší mezinárodní výbor soutěže ve spolupráci s prezidentem soutěže. Vedoucí delegací byly též informováni, že Mezinárodní olympiáda v informatice se v roce 2012 uskuteční v Itálii, která jako jediná země projevila zájem olympiádu v tomto roce uspořádat.

Vraťme se nyní k průběhu soutěže. Jak již bylo zmíněno, soutěžící řešili v každém soutěžním dni sadu tří úloh, na jejichž vyřešení byl stanoven časový limit 5 hodin. Letošní sada úloh, na jejichž přípravě se letos výraznou měrou podíleli členové Mezinárodního vědeckého výboru soutěže, byla velmi obtížná, o čemž svědčí fakt, že pouze 15 soutěžících (z 283) získalo více než 400 bodů z možných 600 bodů. Úlohy však byly připraveny velmi kvalitně a jejich popis byl velmi výstižný. Během soutěže se k zadání úloh vyskytlo méně než 10 dotazů (počet dotazů bývá obvykle v řádu desítek). Řešení odevzdaná soutěžícími byla testována pomocí softwaru vyvinutého pro polskou olympiádu v informatice na předem připravených testovacích datech se stanovenými časovými limity. Použití časových limitů umožňuje odlišit kvalitu (rychlost) použitého algoritmu. Zadání úloh zaručuje, že i neoptimální řešení získají jisté množství bodů. Proti vyhodnocení úloh se neobjevily žádné protesty.

Podle pravidel Mezinárodní olympiády v informatice obdrží polovina soutěžících medaili a počty zlatých, stříbrných a bronzových medailí se určí tak, aby jejich počet byl v poměru 1 : 2 : 3. Letos tedy bylo uděleno 24 zlatých, 47 stříbrných a 70 bronzových medailí. O již zmiňované obtížnosti úloh svědčí fakt, že k získání bronzové medaile stačilo pouhých 127 bodů ze 600 možných a 26 soutěžících nezískalo vůbec žádný bod. I přes zmiňovanou obtížnost úloh se dvěma našim soutěžícím podařilo získat stříbrné medaile. Výsledky našich studentů byly následující:

47.	Miroslav Klimoš	267 bodů	stříbrná medaile
71.	Roman Smrž	229 bodů	stříbrná medaile
197.	Jan Matějka	53 bodů	
219.	Vojtěch Tůma	33 bodů	

Mezinárodní olympiáda v informatice je soutěží jednotlivců; žádné oficiální pořadí zemí se neurčuje. Z hlediska počtu a kvality získaných medailí bychom se v hodnocení národních delegací umístili přibližně v druhé čtvrtině zúčastněných zemí; nejúspěšnějšími zeměmi byly již tradičně ČLR a Polsko (se třemi zlatými a jednou stříbrnou medailí) a Rusko

a USA (se dvěma zlatými a dvěma stříbrnými medailemi). Soutěžícím ze Slovenska se tentokrát vedlo o něco lépe než nám, získali v soutěži dvě stříbrné a dvě bronzové medaile. Výsledky našich soutěžících napovídají, že předchozí zkušenosti účastníků soutěže mají výrazný vliv na jejich umístění (M. Klimoš a R. Smrž se soutěže IOI zúčastnili již vloni). Podrobnější informace o soutěži, texty soutěžních úloh a celkové výsledky všech účastníků lze nalézt na Internetu na adrese

<http://www.ioi2008.org/>.

Následující, v pořadí 21. ročník IOI se bude konat v srpnu 2008 v bulharském Plovdivu. Tamní organizátoři již vyzvali všechny země zúčastněné na IOI v Egyptě k účasti v příštím ročníku soutěže. Byla též stanovena i místa konání několika dalších ročníků IOI: 2010 Kanada, 2011 Thajsko a 2012 Itálie.

Texty soutěžních úloh

1. Jednorozměrná zahrada

Faraón Ramses II. se právě vrátil z další prohrané bitvy. Na věčnou připomínku své čestné porážky se rozhodl postavit smuteční zahradu, která spojí jeho palác v Luxoru s chrámem v Karnaku. V zahradě budou pěstovány pouze květy lotosu a papyrové rákosí, tedy rostliny, které symbolizují Horní a Dolní Egypt.

Zahrada bude rozdělena na N částí a v každé z nich se bude pěstovat jedna ze dvou vybraných rostlin. Jako symbol rovného postavení Horního a Dolního Egypta musí být zahrada *vyvážená* v následujícím smyslu: v každé posloupnosti po sobě následujících částí zahrady se počet částí s lotosovými květy liší od počtu částí s papyrovým rákosím nejvýše o 2.

Osazení jednotlivých částí zahrady rostlinami lze reprezentovat jako řetězec N písmen ‚L‘ a ‚P‘, která představují části osazené lotosovými květy a papyrovým rákosím. Pro $N = 5$ existuje celkem 14 *vyvážených* osazení zahrady: LLPLP, LPPL, LPLL, LPLPL, LPLPP, LPPLL, LPPLP, PLLPL, PLLPP, PLPLL, PLPLP, PLPPL, PPLL a PPLPL.

Řetězce kódující *vyvážená* osazení zahrady rostlinami lze seřadit abecedně a poté očíslovat celými čísly od 1. Např. pro $N = 5$ má řetězec PLPPL pořadové číslo 12.

Úkol: Vaším úkolem je napsat program, který pro zadaný počet N částí zahrady a zadaný řetězec představující osazení zahrady rostlinami

vypočte *zbytek* pořadového čísla tohoto řetězce *po dělení* zadaným číslem M . Hodnota čísla M nemá žádný vliv na řešení úlohy kromě zjednodušení výpočtů.

Omezení:

$1 \leq N \leq 1\,000\,000$ počet částí zahrady

$7 \leq M \leq 10\,000\,000$ číslo M

Bodování: U testovacích vstupů v hodnotě alespoň 40 bodů je počet N částí zahrady nejvýše 40.

Popis vstupu: Váš program načte ze standardního vstupu data v následujícím tvaru:

- ▷ První řádek obsahuje celé číslo N , které udává počet částí zahrady.
- ▷ Druhý řádek obsahuje celé číslo M .
- ▷ Třetí řádek obsahuje řetězec N znaků ‚L‘ (lotos) a ‚P‘ (papyrus), který představuje *vyvážené* osazení zahrady.

Popis výstupu: Váš program zapíše na standardní výstup jedno celé číslo mezi 0 a $M - 1$ (včetně), které je *zbytek* pořadového čísla zadaného řetězce *po vydělení* číslem M .

Příklad 1:

Vzorový vstup 1 *Vzorový výstup 1*

5 5

7

PLPPL

Číslo přiřazené řetězci PLPPL je 12 a jeho zbytek po dělení 7 je 5.

Příklad 2:

Vzorový vstup 2 *Vzorový výstup 2*

12 39

10000

LPLLPLPPLPLL

2. Ryby

Čtyřicáté druhé noci princezna Šeherezáda vyprávěla pohádku o dalekém jezeře uprostřed pouště, ve kterém žilo F vzácných ryb. Z nejvzácnějších drahokamů světa bylo vybráno K různých druhů a každá z ryb spolkla jeden drahokam. Vyprávěla, že druhů drahokamů (K) možná bylo méně než ryb v jezeře (F), a tak více různých ryb mohlo spolknout tentýž druh drahokamu.

Jak čas běžel, větší ryby pozřely některé z menších ryb v jezeře. Ryba může sníst jinou rybu právě tehdy, když je alespoň dvakrát delší (ryba A

může sníst rybu B , právě když $L_A \geq 2L_B$). Kromě tohoto pravidla není vzájemné požírání ryb nijak omezeno. Jedna ryba může postupně sníst několik menších ryb nebo také nemusí sníst žádnou rybu, ačkoliv by mohla. Pokud větší ryba sní menší, její délka se nezmění a drahokamy, které byly původně v žaludku menší ryby, přibudou k těm v žaludku větší ryby.

Šeherezáda vyprávěla, že kdokoliv najde toto jezero, může z něj jednu rybu vylovit a obsah jejího žaludku si ponechat. Rádi byste také zkusili své štěstí, ale ještě než se vydáte na cestu, by vás zajímalo, kolik různých kombinací drahokamů může být v žaludku vylovené ryby.

Úkol: Vaším úkolem je napsat program, který ze znalosti délek ryb, které v jezeře původně žily, a obsahu jejich žaludků určí *počet různých kombinací drahokamů, které se mohou vyskytnout v žaludku nějaké ryby, modulo zadané celé číslo M* . Kombinace drahokamů je jednoznačně popsána počtem drahokamů každého z K druhů. Druhy drahokamů jsou vzájemně neporovnatelné jak krásou tak hodnotou a drahokamy téhož druhu jsou nerozlišitelné.

Omezení:

$1 \leq F \leq 500\,000$	počet ryb, které původně žily v jezeře
$1 \leq K \leq F$	počet druhů drahokamů
$2 \leq M \leq 30\,000$	číslo M

Popis vstupu: Váš program načte ze standardního vstupu data v následujícím tvaru:

- ▷ První řádek obsahuje celé číslo F , které udává původní počet ryb.
- ▷ Druhý řádek obsahuje celé číslo K , které určuje počet druhů drahokamů. Druhy drahokamů jsou očíslovány čísly od 1 do K (včetně).
- ▷ Třetí řádek obsahuje číslo M .
- ▷ Každý z následujících F řádků popisuje jednu z původních ryb. Řádek obsahuje dvě celá čísla oddělená jednou mezerou. První udává délku ryby a druhé určuje druh drahokamu, který ryba na začátku pohádky spolkla.

Poznámka: Je zaručeno, že pro každý z K druhů drahokamů existuje ryba, která ho má ve svém žaludku.

Popis výstupu: Váš program zapíše na standardní výstup jedno číslo mezi 0 a $M - 1$ (včetně), které je *zbytkem po dělení* počtu možných kombinací drahokamů v žaludku vylovené ryby číslem M . Hodnota čísla M nemá na řešení úlohy žádný vliv kromě zjednodušení výpočtů.

Bodování: U testovacích vstupů v hodnotě alespoň 70 bodů hodnota K nepřekročí 7 000. A také u testovacích vstupů v hodnotě alespoň 25 bodů hodnota K nepřekročí 20.

Příklad:

<i>Vzorový vstup</i>	<i>Vzorový výstup</i>
----------------------	-----------------------

5	4
---	---

3	
---	--

7	
---	--

2 2	
-----	--

5 1	
-----	--

8 3	
-----	--

4 1	
-----	--

2 3	
-----	--

Existuje celkem 11 kombinací drahokamů, které by se mohly vyskytnout v žaludku vylovené ryby. Váš program by tedy měl vypsát číslo 4, které je zbytkem 11 po dělení 7. Možné kombinace jsou následující: [1] [1, 2] [1, 2, 3] [1, 2, 3, 3] [1, 3] [1, 3, 3] [2] [2, 3] [2, 3, 3] [3] a [3, 3], kde např. [2, 3, 3] znamená, že žaludek vylovené ryby obsahuje jeden drahokam druhu č. 2 a dva drahokamy druhu č. 3.

Popišme si, jak je lze tyto kombinace dosáhnout:

- ▷ [1]: Je možné, že vylovíte druhou nebo čtvrtou rybu před tím, než sní nějakou jinou.
- ▷ [1, 2]: Je možné, že vylovíte druhou rybu poté, co snědla první.
- ▷ [1, 2, 3]: Jednou z možností je vylovit třetí rybu, potom co snědla čtvrtou rybu, která už před tím snědla první.
- ▷ [1, 2, 3, 3]: Čtvrtá sní první, třetí sní čtvrtou, třetí sní pátou a vylovíte třetí (a sníte ji).
- ▷ [1, 3]: Chytíte třetí, která snědla čtvrtou.
- ▷ [1, 3, 3]: Třetí sní čtvrtou a pátou.
- ▷ [2]: První ryba.
- ▷ [2, 3]: Třetí sní první.
- ▷ [2, 3, 3]: Třetí sní první a pátou.
- ▷ [3]: Třetí ryba.
- ▷ [3, 3]: Třetí sní pátou.

3. Ostrovy

Rozhodli jste se navštívit zábavný zábavní park rozkládající se na N ostrovech. Při budování parku začali z každého ostrova stavět je-

den most na některý jiný ostrov. Po dokončení stavby je tedy v parku N mostů a na některé ostrovy vede více mostů. Délka mostu stavěného z i -tého ostrova je L_i . Každý z mostů lze používat v obou směrech. Kromě toho v parku také funguje mezi každou dvojicí ostrovů přívoz.

Protože jste velmi rychle zjistili, že nejzábavnější atrakcí v parku je chůze po dlouhatánských mostech, rádi byste po nich v parku ušli co největší vzdálenost. Při vašem pohybu v parku se však chcete řídit následujícími pravidly:

- ▷ Svou návštěvu můžete začít na vámi vybraném ostrově.
- ▷ Žádný ostrov nenavštívíte více než jednou.
- ▷ Z ostrova A se můžete (přímo) přesunout na ostrov B , který jste dosud nenavštívili, a to jedním ze dvou následujících způsobů:
 - ▷ Chůzí po mostě, pokud mezi ostrovy A a B vede most. V tomto případě je délka tohoto mostu (v případě dvou souběžných mostů délka delšího z nich) je přičtena k celkové vzdálenosti, kterou jste už ušli po mostech.
 - ▷ Přívozem, pokud ostrov B není dosažitelný z ostrova A pomocí mostů a přívozů, které jste již během své návštěvy parku použili. (Při rozhodování o dosažitelnosti ostrova B z A uvažujte i cesty vedoucí přes již navštívené ostrovy.)

Vášim úkolem není navštívit všechny ostrovy. Podobně nemusí být možné projít přes všechny mosty.

Úkol: Vaším úkolem je napsat program, který z popisu N mostů v parku určí nejdelší možnou vzdálenost, kterou lze po mostech ujít při dodržení výše uvedených podmínek.

Omezení:

- | | |
|---------------------------------|---|
| $2 \leq N \leq 1\,000\,000$ | počet ostrovů v parku |
| $1 \leq L_i \leq 100\,000\,000$ | délka mostu vystavěného z i -tého ostrova |

Popis vstupu: Váš program načte ze standardního vstupu data v následujícím tvaru:

- ▷ První řádek obsahuje celé číslo N , které udává počet ostrovů v parku. Ostrovy jsou očíslovány čísly od 1 do N (včetně).
- ▷ Každý z následujících N řádků popisuje jeden z mostů; i -tý z těchto řádků obsahuje dvě celá čísla oddělená jednou mezerou a popisuje most vystavěný z ostrova číslo i . První z těchto dvou čísel je číslo ostrova, kam most vede, druhé je jeho délka L_i . Můžete předpokládat, že každý most spojuje dva různé ostrovy.

Popis výstupu: Váš program zapíše na standardní výstup (na jedi-

ném řádku) jedno číslo, které udává největší možnou vzdálenost, kterou můžete v parku po mostech ujít.

Poznámky: 1. Pro některé testovací vstupy výsledná hodnota překročí rozsah 32bitového celočíselného typu a k získání plného počtu bodů za tuto úlohu může být nutné použít 64bitové typy (`int64` v Pascalu a `long long` v C/C++).

2. Programy v jazyce Pascal, které používají k načtení vstupu 64bitové datové typy, jsou výrazně pomalejší než stejné programy používající 32bitové typy a to i tehdy, když načítané hodnoty nepřekročí rozsah 32bitových celočíselných typů. Doporučujeme tedy k načtení vstupu používat pouze 32bitové celočíselné typy.

Bodování: U testovacích vstupů v hodnotě alespoň 40 bodů hodnota N nepřekročí 4 000.

Příklad:

Vzorový vstup

7

3 8

7 2

4 2

1 4

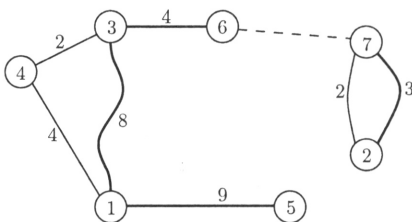
1 9

3 4

2 3

Vzorový výstup

24



$N = 7$ mostů v příkladu spojuje dvojice ostrovů (1–3), (2–7), (3–4), (4–1), (5–1), (6–3) a (7–2). Povšimněte si, že ostrovy 2 a 7 jsou spojeny dvěma různými (souběžnými) mosty.

Jedna z možností, jak ujít maximální možnou vzdálenost, je:

- ▷ Začněte na ostrově 5.
- ▷ Přejděte po mostě délky 9 na ostrov 1.
- ▷ Přejděte po mostě délky 8 na ostrov 3.
- ▷ Přejděte po mostě délky 4 na ostrov 6.
- ▷ Použijte přívoz z ostrova 6 na ostrov 7.
- ▷ Přejděte po mostě délky 3 na ostrov 2.

Svou cestu zakončíte na ostrově 2 a celkem jste po mostech ušli $9 + 8 + 4 + 3 = 24$. Jediný nenavštívený ostrov má číslo 4. Všimněte si, že na konci cesty už tento ostrov navštívit nemůžete:

- ▷ Nelze se na něj z ostrova 2 dostat přímo po mostě.

- ▷ Nesmíte na něj přejet přívozem, neboť ostrov 4 je *dosažitelný* z ostrova 2 následujícím způsobem: Přešli byste zpět po mostě na ostrov 7, pak byste pokračovali již jednou použitým přívozem na ostrov 6 a odtud byste došli po mostech na ostrov 4.

4. Knihtisk

Je potřeba vytisknout N slov pomocí starého jednořádkového knihařského lisu. Tento typ lisu používá k tisku kovové litery, tj. malé kousky kovu každý s jedním písmenem. Litery se skládají za sebou a vytvoří tak jedno slovo, které lze pak pomocí lisu obtisknout na papír. Litery lze do lisu přidávat a odebírat pouze na konci vytvářeného slova. S vytvářeným slovem je tedy možné provádět pouze následující *operace*:

- ▷ přidání jednoho písmene (litery) na konec slova v lisu,
- ▷ odebrání jednoho písmene (litery) z konce slova v lisu,
- ▷ vytištění slova v lisu.

Na začátku lis neobsahuje žádné litery. Na konci tisku je možné v lisu zanechat libovolné množství liter. Zadaná slova můžete vytisknout v libovolném pořadí.

Snažíte se vytisknout všechna zadaná slova co nejrychleji, tedy pomocí nejmenšího možného počtu výše uvedených *operací*.

Úkol: Vaším úkolem je napsat program, který pro zadaných N slov, určí nejmenší možný počet *operací* nutných k vytištění zadaných slov a jednu takovou posloupnost *operací* vypíše.

Omezení: $1 \leq N \leq 25\,000$ maximální možný počet zadaných slov

Popis vstupu: Váš program načte ze standardního vstupu data v následujícím tvaru:

- ▷ První řádek obsahuje celé číslo N , které udává počet zadaných slov
- ▷ Každý z následujících N řádků obsahuje jedno zadané slovo. Slovo se skládá pouze z malých písmen anglické abecedy ($a^{\prime}, z^{\prime}$) a jeho délka je alespoň 1 a nejvýše 20.

Všechna zadaná slova jsou navzájem různá.

Popis výstupu: Váš program запиše své výsledky na standardní výstup v následujícím tvaru:

- ▷ První řádek bude obsahovat jedno celé číslo M , které udává nejmenší možný počet *operací* potřebných k vytištění zadaných slov.
- ▷ Každý z následujících M řádků bude obsahovat právě jeden znak, který odpovídá jedné z *operací* následujícím způsobem:

- ⇒ Přidání písmene na konec slova v lisu je reprezentováno přidávaným písmenem (malé anglické abecedy),
- ⇒ Odebrání posledního písmene slova v lisu je reprezentováno znakem `,-` (mínus, ASCII kód 45)
- ⇒ *Operace* vytištění slova v lisu je reprezentována znakem `,P` (velké písmeno p).

Posloupnost *operací* na výstupu musí mít délku M a vést k vytištění všech zadaných slov.

Bodování: U testovacích vstupů v hodnotě alespoň 40 bodů hodnota N nepřekročí 18.

Příklad:

Vzorový vstup	Vzorový výstup
3	20
print	t
the	h
poem	e
	P
	-
	-
	-
	p
	o
	e
	m
	P
	-
	-
	-
	r
	i
	n
	t
	P

5. Teleporty

Účastníte se velkého závodu napříč Egyptem podél rovnoběžky směrem ze západu na východ. Závod má jen dvě pravidla: musíte se pohybovat pouze po rovnoběžce, a to vždy pouze na východ.

Na trati je umístěno N teleportů. Každý teleport má dva konce. Jakmile dorazíte k jednomu z jeho konců, teleport vás okamžitě nasosne a přenese na svůj druhý konec. Teleport vás přemístí směrem na východ nebo na západ podle toho, ke kterému jeho konci dorazíte. Přesuny teleportem směrem na západ neodporují pravidlům závodu. Po teleportaci však musíte pokračovat dál na východ, jak určují pravidla závodu. Teleportaci se nemůžete nijak vyhnout. Na každém místě trasy závodu se vyskytuje konec nejvýše jednoho z teleportů; každý teleport spojuje dvě různá místa na trase. Konce teleportů jsou pouze mezi startem a cílem závodu (mimo start a cíl).

Pokaždé, když se teleportujete, získáte jeden bod. Cílem závodu je získat největší možný počet bodů. Abyste získali co nejvíce bodů, smíte před začátkem závodu postavit na trasu závodu M nových teleportů. Konce těchto teleportů můžete umístit kamkoliv mezi start a cíl závodu (mimo start a cíl) tak, aby se stále na každém místě nacházel nejvýše jeden konec teleportu a každý teleport spojoval dvě různá místa. Konce nových teleportů mohou být i v *neceločíselných* vzdálenostech od startu. Body získáte i za použití nově postavených teleportů.

Je zaručeno, že se vždy dostanete do cíle závodu, ať se děje, co se děje, tj. po jakémkoliv přidání M nových teleportů se chůzí na východ dostanete ze startu závodu do jeho cíle.

Úkol: Vaším úkolem je napsat program, který pro N zadaných teleportů a zadaný největší počet M teleportů, které můžete postavit, vypočte největší možný počet bodů, které můžete během závodu získat.

Omezení:

- | | |
|--|--|
| $1 \leq N \leq 1\,000\,000$ | původní počet teleportů na trase závodu |
| $1 \leq M \leq 1\,000\,000$ | největší možný počet teleportů,
které můžete postavit |
| $1 \leq W_i \leq E_i \leq 2\,000\,000$ | vzdálenosti konců i -tého teleportu od startu |

Popis vstupu: Váš program načte ze standardního vstupu data v následujícím tvaru:

- ▷ První řádek obsahuje celé číslo N , které udává původní počet teleportů.
- ▷ Druhý řádek obsahuje celé číslo M , které určuje počet teleportů, které můžete postavit.
- ▷ Každý z následujících N řádků popisuje jeden z původních teleportů. Řádek obsahuje dvě celá čísla W_i a E_i oddělená jednou mezerou. Tato čísla udávají polohu západního a východního konce teleportu

jako vzdálenost od startu závodu. První z těchto dvou čísel je vždy menší než druhé.

Je zaručeno, že žádné dva konce teleportů nemají stejnou vzdálenost od startu. Start závodu se nachází na pozici 0 a cíl je ve vzdálenosti 2 000 001 od startu závodu.

Popis výstupu: Váš program zapíše na standardní výstup jedno celé číslo, které udává největší možný počet bodů, které můžete v závodě získat.

Bodování: Pro testovací vstupy v hodnotě alespoň 30 bodů platí, že $N \leq 500$ a $M \leq 500$.

Příklad 1:

Vzorový vstup 1

3

1

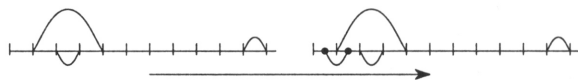
10 11

1 4

2 3

Vzorový výstup 1

6



Na obrázku vlevo je počáteční úsek trati závodu s původními teleporty a vpravo je tentýž úsek s nově postaveným teleportem, který spojuje místa ve vzdálenosti 0,5 a 1,5 od startu závodu.

Po přidání nového teleportu způsobem znázorněným na obrázku bude vaše cesta ze startu do cíle vypadat takto:

- ▷ Začnete na pozici 0 (start) a vydáte se na východ.
- ▷ Ve vzdálenosti 0,5 od startu vás nově postavený teleport přenese do vzdálenosti 1,5 a tím získáte jeden bod.
- ▷ Pokračujete na východ a dosáhnete konce teleportu ve vzdálenosti 2 od startu. Teleport vás přenese do vzdálenosti 3 od startu a získáte druhý bod.
- ▷ Po dosažení konce teleportu ve vzdálenosti 4 od startu, jste teleportováni do vzdálenosti 1. Získali jste třetí bod.
- ▷ Ve vzdálenosti 1,5 od startu vás nově postavený teleport přenese do vzdálenosti 0,5 a máte již 4 body.
- ▷ Ve vzdálenosti 1 od startu jste teleportováni do vzdálenosti 4. Získali jste už 5 bodů.
- ▷ Ve vzdálenosti 10 od startu jste teleportováni do vzdálenosti 11. Nyní máte 6 bodů.
- ▷ Pokračujete na východ až do cíle závodu. Celkem jste získali 6 bodů.

Příklad 2:

Vzorový vstup 2

Vzorový výstup 2

3

12

3

5 7

6 10

1999999 2000000

6. Stavba pyramid

Veliký faraón Ramses XLII. vás pověřil nalezením co největšího stavebního pozemku pro jeho pyramidu. K dispozici vám jeho úředníci dali územní plány, které popisují krajinu jako mřížku M krát N čtvercových polí. Základna pyramidy musí být čtvercová oblast bez překážek se stranami rovnoběžnými s hranami mřížky.

V plánu je vyznačeno P překážek spolu s cenami za odstranění každé z nich. Odstranění i -té překážky stojí C_i . Každá z těchto překážek je obdélník se stranami rovnoběžnými s mřížkou. Překážky se mohou navzájem překrývat. Každá překážka zabírá celou plochu všech polí, na kterých leží. Základnu pyramidy je možné umístit pouze na políčka bez překážek. Kdykoli se rozhodnete odstranit překážku, musíte ji odstranit celou, tj. není možné odstranit pouze část překážky. Odstranění jedné překážky nijak neovlivní ostatní překážky (ani ty, které se s odstraňovanou překážkou překrývají).

Stavebního materiálu i pracovní síly na stavbu pyramidy má faraón dostatek, avšak odstranění překážek a úprava terénu jsou často velmi nákladné. Faraón proto určil, že celkový rozpočet na odstranění překážek nesmí přesáhnout B .

Úkol: Vaším úkolem je napsat program, který ze znalosti umístění P překážek a parametrů M , N a B určí největší možnou velikost strany základny pyramidy, na kterou si můžete dovolit vyčistit stavební pozemek.

Omezení a bodování: Váš program bude spuštěn na třech sadách testovacích vstupů. Ve všech testech budou splněna následující omezení:

$1 \leq M, N \leq 1\,000\,000$ rozměry mřížky

$1 \leq C_i \leq 7\,000$ cena za odstranění i -té překážky

$1 \leq X_{i1} \leq X_{i2} \leq M$ x -ové souřadnice krajních polí i -té překážky

$1 \leq Y_{i1} \leq Y_{i2} \leq N$ y -ové souřadnice krajních polí i -té překážky

V první sadě testovacích vstupů v hodnotě 35 bodů platí:

$B = 0$ váš rozpočet (nesmíte odstranit žádné překážky)
 $1 \leq P \leq 1\,000$ počet překážek

Ve druhé sadě testovacích vstupů v hodnotě 35 bodů platí:

$0 \leq B \leq 2\,000\,000\,000$ váš rozpočet
 $1 \leq P \leq 30\,000$ počet překážek

Ve třetí sadě testovacích vstupů v hodnotě 30 bodů platí:

$B = 0$ váš rozpočet (nesmíte odstranit žádné překážky)
 $1 \leq P \leq 400\,000$ počet překážek

Popis vstupu: Váš program ze standardního vstupu načte data v následujícím tvaru:

- ▷ První řádek obsahuje dvě celá čísla M a N oddělená jednou mezerou.
- ▷ Druhý řádek obsahuje celé číslo B , které udává váš rozpočet.
- ▷ Třetí řádek obsahuje počet překážek P .
- ▷ Každý z následujících P řádků popisuje jednu překážku. Na i -tém z těchto řádků se nachází pět celých čísel oddělených od sebe jednou mezerou: X_{i1} , Y_{i1} , X_{i2} , Y_{i2} a C_i (v tomto pořadí). Udávají postupně souřadnice nejnižšího nejlevějšího pole překážky, nejhornějšího nejpravějšího pole překážky a cenu odstranění překážky.

Pole v levém dolním rohu mřížky má souřadnice $(1, 1)$ a pole v pravém horním rohu má souřadnice (M, N) .

Popis výstupu: Váš program na standardní výstup vypíše jediný řádek obsahující jedno celé číslo. Toto číslo je největší možná délka strany základny pyramidy, pro kterou je možné připravit pozemek bez překážek při dodržení stanoveného rozpočtu. Pokud není možné postavit žádnou pyramidu, váš program vypíše 0.

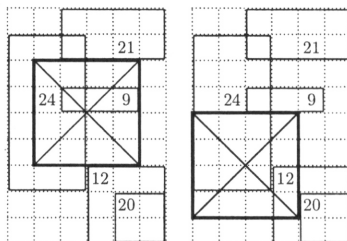
Příklad 1:

Vzorový vstup 1

```
6 9
42
5
4 1 6 3 12
3 6 5 6 9
1 3 3 8 24
3 8 6 9 21
5 1 6 2 20
```

Vzorový výstup 1

4



Na obrázku vidíte dvě možná umístění základny pyramidy, v obou případech o délce strany 4.

Příklad 2:

Vzorový vstup 2

13 5

0

8

8 4 10 4 1

4 3 4 4 1

10 2 12 2 2

8 2 8 4 3

2 4 6 4 5

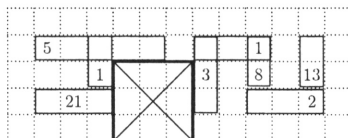
10 3 10 4 8

12 3 12 4 13

2 2 4 2 21

Vzorový výstup 2

3



Na obrázku vidíte jediné možné umístění základny pyramidy o délce strany 3.

RNDr. Karel Horák, CSc., RNDr. Daniel Král, Ph.D., Mgr. Martin Mareš,
Mgr. Peter Novotný, doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.,
RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc.,

**PADESÁTÝ SEDMÝ ROČNÍK
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH**

Vydala Jednota českých matematiků a fyziků,
Žitná 25, 117 10 Praha 1
jako svou publikaci č. 57-552-10
Sazbu programem $\text{\TeX}$ připravil Karel Horák
Vytisklo Polygrafické středisko
Univerzity Palackého v Olomouci
1. vydání
Praha 2010

ISBN 978-80-7015-006-1

**matematická
olympiáda**

MO
M

ISBN 978-80-7015-006-1

ISBN 978-80-7015-006-1



9 788070 150061