

43. ročník matematické olympiády na středních školách

Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Pavel Leischner (editor); Jozef Moravčík (editor); Jaromír Šimša (editor); Pavel Töpfer (editor): 43. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1993/1994. 35. mezinárodní matematická olympiáda. 6. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2016.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/405231>

Terms of use:

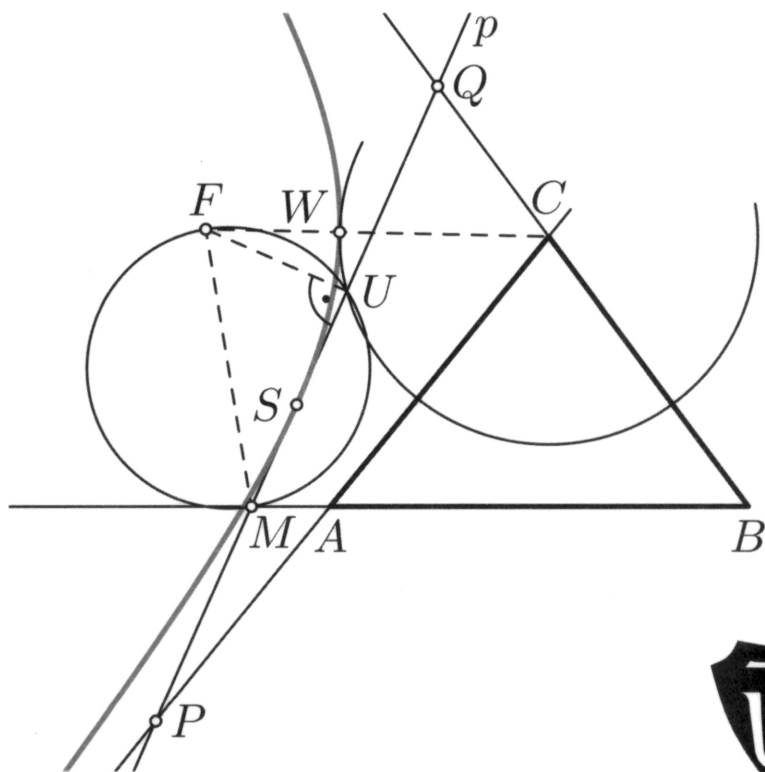
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MO

43. ročník matematické olympiády na středních školách



ČTYŘICÁTÝ TŘETÍ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1993/1994

35. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA
ŠESTÁ MEZINÁRODNÍ OLYMPIÁDA V INFORMATICE



UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Za přispění spolupracovníků zpracovali
doc. RNDr. Leo Boček, CSc., RNDr. Karel Horák, CSc.,
RNDr. Pavel Leischner, PhD., prof. RNDr. Jozef Moravčík, DrSc.,
doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc.

© Karel Horák, editor, 2016

ISBN 978-80-7015-4922-7

Obsah

O průběhu 43. ročníku matematické olympiády	5
Výsledky celostátního kola 43. ročníku MO kategorie A	8
Výsledky celostátního kola 43. ročníku MO kategorie P	9
Nejúspěšnější řešitelé II. kola MO v kategoriích A, B, C a P	10
Kategorie C	21
Texty úloh	21
Řešení úloh	25
Kategorie B	34
Texty úloh	34
Řešení úloh	37
Kategorie A	47
Texty úloh	47
Řešení úloh	51
Kategorie P	69
Texty úloh	69
Přípravná soustředění před 35. MMO	78
Některé úlohy zadané na přípravných soustředěních	79
35. mezinárodní matematická olympiáda	81
Texty soutěžních úloh	84
Řešení soutěžních úloh	85
6. mezinárodní olympiáda v informatice	92
Texty soutěžních úloh	94
První ročník Středoevropské olympiády v informatice	100

O průběhu 43. ročníku matematické olympiády

Soutěž Matematická olympiáda ve školním roce 1993/94 pořádaly pro žáky středních a základních škol Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků a Matematickým ústavem AV ČR. Soutěž řídil ústřední výbor matematické olympiády (ÚV MO) prostřednictvím oblastních a okresních výborů matematické olympiády.

Cílem soutěže je vyhledávání žáků talentovaných v matematice, probouzení jejich hlubšího zájmu o matematiku a rozvíjení jejich matematických schopností. Ve školním roce 1993/94 se uskutečnil její 43. ročník.

Ústřední výbor MO pracoval ve složení, v němž byl jmenován ministerstvy školství ČR a SR na pětileté období při zahájení 39. ročníku. Předsedou ÚV MO byl doc. dr. Leo Boček, CSc., z MFF UK v Praze, tajemníky byli dr. Karel Horák, CSc., z MÚ AV ČR v Praze a dr. Jiří Binder, CSc., z PF UK v Praze.

V průběhu 43. ročníku MO se konala dvě zasedání ÚV MO, první v prosinci 1993 v Brně, druhé 25.–26. dubna 1994 na gymnáziu v Jevíčku při celostátním kole kategorie A. Hodnotil se průběh soutěže, zabezpečení celostátních soustředění úspěšných řešitelů MO včetně soustředění pro přípravu na MMO a organizace dalších kol soutěže a v neposlední řadě i další spolupráce mezi českým a slovenským výborem olympiády.

Pro žáky středních škol byla soutěž organizována ve čtyřech kategoriích A, B, C a P. Kategorie A byla určena žákům 3. a 4. ročníků středních škol, kategorie B byla pro žáky 2. ročníků a v kategorii C soutěžili žáci 1. ročníků. Pro žáky všech tříd středních škol byla určena ještě kategorie P, zaměřená na úlohy z programování a matematické informatiky.

V kategoriích A, B a C má I. kolo dvě části. V první části řeší soutěžící šest úloh doma nebo v matematických kroužcích a mohou se přitom radit se svými učiteli, vedoucími kroužků apod. Druhá část má formu klauzurní práce, v níž řeší žáci tři úlohy v omezeném čase čtyř hodin. Řešitelé, kteří úspěšně projdou prvním kolem, jsou pozváni do druhého (oblastního) kola soutěže, kde řeší čtyři úlohy opět v limitu čtyř hodin.

V kategoriích A a P se koná ještě třetí, celostátní kolo. V něm je vlastní soutěž rozdělena do dvou dnů. V kategorii A řeší soutěžící každý den tři úlohy v časovém limitu čtyř hodin, v kategorii P ve stejném limitu vždy dvě úlohy.

Novinkou letošních celostátních kol MO byla skutečnost, že se poprvé oddělilo pořádání soutěže v České republice a ve Slovenské republice. Výborná spolupráce s našimi slovenskými kolegy však nadále trvá, v obou zemích probíhala všechna kola matematické olympiády ve stejných termínech a se stejnými soutěžními úlohami. Podobnou spolupráci plánujeme i na příští léta. Rozdělení soutěže se promítlo do počtu účastníků a trochu i do kvality soutěže, konkurence v menší zemi je pochopitelně menší.

V letošním školním roce se stejně jako v tom předchozím ukázalo, že v současné době obnovujícího se kapitalismu není snadné získat ochotné organizátory, kteří by byli schopni zajistit finanční prostředky k uspořádání celostátního kola MO, když dotace MŠMT na tuto akci jsou velice skromné. A tak hrozbu, že se 43. celostátní kolo MO vůbec konat nebude, odvrátila stejně jako vloni šlechetná nabídka dr. *Daga Hrubého*, ředitele Gymnázia v Jevíčku, že akci bude možno po roce uspořádat opět v malebném východočeském městě, kterému dřívější titul *královské* udělil Přemysl Otakar II. privilegiem z 6. srpna 1258.

Celostátní kolo 43. ročníku se tak uskutečnilo v Jevíčku od 24. do 27. dubna 1993 (kategorie A) a od 27. do 30. dubna 1994 (kategorie P). Obětaví členové pedagogického sboru tamního gymnázia v čele s dr. Hrubým nejen dobře zabezpečili podmínky pro samotnou soutěž, ale připravili pro soutěžící i členy ÚV MO bohatý doprovodný program.

Vybraná družstva se zúčastnila mezinárodní matematické olympiády i mezinárodní olympiády v informatice. Těmto soutěžím je věnována samostatná kapitola v závěru této ročenky.

K matematické olympiádě vedle vlastní soutěže patří i řada doprovodných akcí pro talentované žáky. Z akcí pořádaných oblastními výbory MO k nim zejména patří semináře pro řešitele MO a instruktáže pro učitele. Pro nejúspěšnější řešitele oblastních kol MO a korespondenčních seminářů byla pořádána (většinou týdenní) soustředění.

Ústřední výbor MO zajišťoval tři celostátní soustředění. Pro žáky nematurujících ročníků to bylo již tradiční soustředění řešitelů úloh MO a FO. Proběhlo ve dnech 13.–24. 6. 1994 v Jevíčku. Další dvě soustředění byla věnována přípravě našeho družstva na mezinárodní matematickou olympiádu a konala se 10.–13. května a 20.–24. června 1994 opět v Jevíčku.

Tabulka 1

Počty žáků středních škol soutěžících v I. kole 43. ročníku MO

Kraj	Kategorie								Celkem	
	A		B		C		P			
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	87	46	62	36	73	47	27	27	249	156
Středočeský	94	30	86	33	119	58	17	12	316	133
Jihočeský	55	37	51	25	63	48	8	7	177	117
Západočeský	57	35	68	33	104	65	15	10	244	143
Jihlava	38	24	42	22	60	30	0	0	140	76
Jihomoravský	55	39	75	33	138	88	15	15	283	175
Moravskoslezský	109	57	104	59	184	68	17	5	414	189
ČR	495	268	488	241	741	404	99	76	1 823	989

Tabulka 2

Počty žáků středních škol soutěžících v II. kole 43. ročníku MO

Kraj	Kategorie								Celkem	
	A		B		C		P			
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	46	28	36	11	47	43	27	12	156	94
Středočeský	29	5	32	3	54	32	10	4	125	44
Jihočeský	32	23	23	8	39	26	6	0	100	57
Západočeský	35	13	32	7	63	50	10	2	140	72
Jihlava	21	7	16	2	22	12	0	0	59	21
Jihomoravský	38	18	27	4	79	66	15	9	159	97
Moravskoslezský	57	24	59	16	68	49	17	5	201	94
ČR	258	118	225	51	372	278	85	32	940	479

S ... počet všech soutěžících

U ... počet úspěšných řešitelů

Výsledky celostátního kola 43. ročníku MO
kategorie A

Vítězové

1.	<i>David Pavlica</i> , 3.r. G M. Koperníka Bílovec	29 b.
2.	<i>Martin Nečesal</i> , 3.r. G Brno, kpt. Jaroše	28 b.
3.	<i>Robert Šámal</i> , 3.r. G Praha 5, Zborovská	27 b.
4.–5.	<i>Petr Kaňovský</i> , 3.r. G Brno, kpt. Jaroše	26 b.
	<i>Libor Mašíček</i> , 3.r. G Brno, kpt. Jaroše	26 b.
6.–7.	<i>Jan Mach</i> , 4.r. G M. Koperníka Bílovec	24 b.
	<i>David Opěla</i> , 2.r. G M. Koperníka Bílovec	24 b.
8.–9.	<i>Filip Krška</i> , 3.r. G Brno, kpt. Jaroše	23 b.
	<i>Jan Vaněk</i> , 4.r. G Praha 5, Zborovská	23 b.
10.	<i>Michal Beneš</i> , 2.r. G Praha 5, Zborovská	21 b.
11.–12.	<i>Michaela Prokešová</i> , 3.r. G Č. Budějovice, Jírovcova	20 b.
	<i>Jan Rychtář</i> , 3.r. G Strakonice	20 b.

Další úspěšní řešitelé

13.–15.	<i>František Šanda</i> , 4.r. GJV Klatovy	18 b.
	<i>Jaroslav Ševčík</i> , 4.r. G Brno, kpt. Jaroše	18 b.
	<i>Karel Výborný</i> , 2.r. G Praha 5, Zborovská	18 b.
16.–19.	<i>Igor Glücksmann</i> , 4.r. G Písek	17 b.
	<i>Stanislav Hencl</i> , 4.r. G Pardubice Dašická	17 b.
	<i>Jitka Nečasová</i> , 4.r. G Praha 5, Zborovská	17 b.
	<i>Petr Vilím</i> , 2.r. G M. Koperníka Bílovec	17 b.
20.–21.	<i>Milan Hokr</i> , 4.r. G Praha 5, Zborovská	16 b.
	<i>Jan Hradil</i> , 4.r. G Brno, kpt. Jaroše	16 b.
22.–24.	<i>Michal Johanis</i> , 4.r. GJKT Hradec Kr., Tylovo nábř.	15 b.
	<i>Daniel Král</i> , 2.r. G Zlín, Lesní čtvrť	15 b.
	<i>Karel Švadlenka</i> , 3.r. G Č. Budějovice, Jírovcova	15 b.
25.–26.	<i>Michal Fabinger</i> , 3.r. G Praha 6, Nad alejí	14 b.
	<i>Pavel Körber</i> , 4.r. G Praha 5, Zborovská	14 b.

Výsledky celostátního kola 43. ročníku MO
kategorie P

Vítězové

1. <i>Robert Špalek</i> , 2.r. G Brno, tř. kpt. Jaroše	31 b.
2. <i>Petr Kaňovský</i> , 3.r. G Brno, tř. kpt. Jaroše	30 b.
3.–4. <i>David Stanovský</i> , 3.r. G Pardubice	28 b.
<i>Daniel Škarda</i> , 4.r. G Praha, Zborovská	28 b.
5. <i>Petr Novák</i> , 4.r. G Brno, tř. kpt. Jaroše	27 b.

Další úspěšní řešitelé

6. <i>Jaroslav Ševčík</i> , 4.r. G Brno, tř. kpt. Jaroše	25 b.
7. <i>Jiří Hájek</i> , 3.r. G Praha 5, Zborovská	24 b.
8.–9. <i>Tomáš Müller</i> , 2.r. G Ml. Boleslav	23 b.
<i>Mikuláš Patočka</i> , 1.r. G Brno, tř. kpt. Jaroše	23 b.
10. <i>Stanislav Hencl</i> , 4.r. G Pardubice	22 b.
11.–13. <i>Jan Kratochvíl</i> , 1.r. G Praha 8, U libeňského zámku	21 b.
<i>Martin Mareš</i> , 3.r. G Praha 8, U libeňského zámku	21 b.
<i>Jiří Valášek</i> , 4.r. G Jablonec n. N.	21 b.
14. <i>Pavel Machek</i> , 3.r. G Praha 5, Zborovská	20 b.

Nejúspěšnější řešitelé II. kola MO

v kategoriách A, B, C a P

Z každého kraje a z každé kategorie jsou dle dostupných výsledků uvedeni všichni úspěšní řešitelé, kteří skončili do desátého místa. Označení G znamená gymnázium.

..... Kraj Praha

Kategorie A

1. *Robert Šámal*, 3M, G Praha 5, Zborovská
2. *Michal Beneš*, 2M, G Praha 5, Zborovská
- 3.–4. *Karel Výbomý*, 2, G Praha 5, Zborovská
Milan Hokr, 4M, G Praha 5, Zborovská
- 5.–6. *Pavel Kuncát*, 3M, G Praha 5, Zborovská
Jan Vaněk, 4M, G Praha 5, Zborovská
7. *Jan Hora*, 4M, G Praha 5, Zborovská
- 8.–10. *Norbert Vaněk*, 3, G Praha 5, Zborovská
Pavel Körber, 4M, G Praha 5, Zborovská
Jitka Nečasová, 4M, G Praha 5, Zborovská

Kategorie B

1. *Jiří Vaněk*, 2D, G Praha 5, Zborovská
2. *Petr Holzhauser*, 2D, G Praha 5, Zborovská
3. *Jan Vodička*, 2D, G Praha 5, Zborovská
4. *Karel Výborný*, 2A, G Praha 5, Zborovská
7. *Tomáš Bárta*, 2D, G Praha 5, Zborovská
Martin Hokeš, 2D, G Praha 5, Zborovská
Petr Honzík, 2D, G Praha 5, Zborovská
- 8.–11. *Michael Frouza*, 2D, G Praha 5, Zborovská
Václav Šubrt, 2D, G Praha 5, Zborovská

Vít Švachouček, 2D, G Praha 5, Zborovská
Martina Fialová, 2A, G Praha 10, Voděradská

Kategorie C

1. *Petr Pudlák*, 1D, G Praha 5, Zborovská
- 2.–3. *Libor Inovecký*, 1D, G Praha 5, Zborovská
Bernard Jaroš, 1D, G Praha 5, Zborovská
- 4.–7. *Jan Spěvák*, 1A, G Praha 1, Hellichova
Martin Rumlena, 1D, G Praha 5, Zborovská
Denisa Chábová, 1C, G Praha 6, Parlérova
Karel Kulhavý, 1D, G Praha 8, U libeňského zámku
- 8.–9. *Vít Hradecký*, 1D, G Praha 6, Arabská
Kristýna Kastlová, 1C, G Praha 1, Štěpánská
- 10.–12. *Stanislav Duben*, 1A, G Praha 3, Sladkovského
Adam Rogalewicz, 1D, G Praha 5, Zborovská
Miroslav Uller, 1D, G Praha 5, Zborovská

Kategorie P

1. *Robert Šamál*, 3.D, G Praha 5, Zborovská
2. *Pavel Machek*, 3.D, G Praha 5, Zborovská
3. *Jan Kratochvíl*, 1.C, G Praha 5, U libeňského zámku
4. *Martin Mareš*, 3.E, G Praha 5, U libeňského zámku
5. *Jiří Hájek*, 3.D, G Praha 5, Zborovská
6. *Martin Veselka*, 4.E, G Praha 5, Zborovská
- 7.–8. *Daniel Škarda*, 4.E, G Praha 5, Zborovská
Milan Vančura, 4.E, G Praha 5, Zborovská
9. *Karel Kulhavý*, 1.D, G Praha 5, U libeňského zámku
10. *Vojtěch Pavlík*, 4.D, G Praha 5, U libeňského zámku

• • • • • Středočeský kraj • • • • •

Kategorie A

1. *Martin Jaroš*, 3, G Benešov
2. *David Sitenský*, 4, G Kladno
3. *Pavel Kučera*, 4, G Mladá Boleslav

4. *Marek Kobera*, 4, G Beroun
5. *Jan Wasserbauer*, 3, G Mladá Boleslav

Kategorie B

1. *Ondřej Crha*, 2, G Mladá Boleslav
- 2.–3. *Jiří Franta*, 2, G Příbram
Veronika štulíková, 2, G Beroun

Kategorie C

- 1.–2. *Vladimír Pilný*, 1, G Český Brod
Petr Sedláček, 1, G Benešov
- 3.–4. *Jiří Lukavský*, 1, Sport. G Kladno
Tomáš Maršík, 1, SOU Mladá Boleslav

Kategorie P

1. *Tomáš Müller*, 2, G Mladá Boleslav
2. *Václav Petříček*, 4, G Mladá Boleslav
- 3.–4. *Pavel Starosta*, 2, G Benešov
Jiří Šraín, kvarta, G Beroun

• • • • • Jihočeský kraj • • • • •

Kategorie A

1. *Jan Rychtář*, 3C, G Strakonice
2. *Roman Otec*, 4A, G České Budějovice, Jírovcova
3. *Karel Švadlenka*, 3A, G České Budějovice, Jírovcova
4. -5. *Ondřej Pangrác*, 4B, G Pelhřimov
Michaela Prokešová, 3A, G České Budějovice, Jírovcova
6. -7. *Igor Glücksmann*, 4D, G Písek
Václav Finěk, 4C, SZeŠ Blatná
8. *Tomáš Mrkvička*, 4A, G Strakonice
9. -10. *M. Andrle*, 4A, České Budějovice, Jírovcova
Ondřej Mareš, 4A, České Budějovice, Jírovcova

Kategorie B

1. *Markéta Elisová*, 2A, G České Budějovice, Jírovcova
- 2.–5. *Jan Hubička*, 2A, G České Budějovice, Jírovcova
Jana Husová, 2C, G Strakonice
Petr Jindra, 2A, G České Budějovice, Jírovcova
Pavel Zeman, 2C, G Tábor
6. *Jan Huml*, 2A, G České Budějovice, Jírovcova
- 7.–8. *Lenka Baborová*, 2C, G Strakonice
Stanislav Mikeš, 2A, G České Budějovice, Jírovcova

Kategorie C

1. *M. Kulhavý*, 1A, G České Budějovice, Jírovcova
- 2.–6. *Karel Carva*, IV, G Tábor
Dušan Kollar, 1A, G České Budějovice, Jírovcova
Vlastimil Kozák, 1, SPSS Tábor
Petr Pruner, IV, G Tábor
Miroslav Šiman, 1A, G České Budějovice, Jírovcova
- 7.–8. *Lukáš Oborský*, 1, G České Budějovice, Jírovcova
Václav Porod, 1, G Týn nad Vltavou
9. *Kamil Novák*, 1A, G Strakonice
- 10.–11. *Jan Radil*, 1A, G Humpolec
Erika Ventluková, 1A, G České Budějovice, Jírovcova

• • • • • **Plzeňský kraj** • • • • •

Kategorie A

1. *Marek Vecka*, 4, G Domažlice
2. *Jitka Lhotská*, 4M, 1. G Plzeň
- 3.–4. *Robert Pelikán*, 4M, 1. G Plzeň
František Šanda, 4, G Klatovy
5. *Michal Škop*, 4M, 1. G Plzeň
- 6.–9. *Miloš Mulač*, 4MF, 2. G Plzeň
Martin Orság, 4, G Klatovy
Jan Pospíšil, 4M, 1. G Plzeň
Tomáš Soukup, 3M, 1. G Plzeň

10. *Petr Písek*, 4M, 1. G Plzeň

Kategorie B

1. *Dalibor Šmíd*, 2M, 1. G Plzeň
- 2.–4. *Kristina Forstová*, 2M, 1. G Plzeň
Vojtěch Ocelík, 2M, 1. G Plzeň
Jakub Slovan, 2M, 1. G Plzeň
- 5.–6. *Michal Jezek*, 2M, 1. G Plzeň
Jan Ludvík, 2M, 1. G Plzeň
7. *Tomáš Suda*, 2, G Klatovy

Kategorie C

1. *Jakub Hendrich*, 1M, 1. G Plzeň
2. *Jiří Houška*, 1M, 1. G Plzeň
- 3.–4. *Robert Janisch*, 1M, 1. G Plzeň
Vlastimil Kulda, 1M, 1. G Plzeň
5. *Martin Moravec*, 1, Svob. chebská škola Cheb
- 6.–7. *Tomáš Ebelendr*, 1MF, 2. G Plzeň
Kamil Řezáč, kvarta, G Klatovy
- 8.–10. *Ondřej Nezdara*, 1, Svob. chebská škola Cheb
Eva Reitspiesová, kvarta, G Klatovy
Jiří Trnka, 1MF, 2. G Plzeň

Kategorie P

1. *Vladimír Kraus*, 3B, 1. G Plzeň
2. *Jan Pospíšil*, 4A, 1. G Plzeň

• • • • • Liberecký kraj • • • • •

Kategorie A

Michal Kaut, 4, G F. X. Šaldy Liberec
Pavel Strnad, 3, G F. X. Šaldy Liberec

Kategorie B

- 1.–2. *Michal Celler*, G F. X. Šaldy Liberec
Čeněk Svoboda, G F. X. Šaldy Liberec

Kategorie C

- 1.–3. *Hynek Bořil*, SPŠSE Liberec
Jan Březina, G F. X. Šaldy Liberec
Petr Šídlof, G F. X. Šaldy Liberec
- 4.–5. *Ondřej Horáček*, G Jablonec nad Nisou
Pavel Rais, G F. X. Šaldy Liberec
- 6.–7. *Jana Brotánková*, G Česká Lípa
Jiří Jón, G Tanvald
- 8.–9. *Patrik Endler*, G Tanvald
Matěj Stránský, G F. X. Šaldy Liberec
10. *Kateřina Jindrová*, G Česká Lípa

• • • • • Východní Čechy • • • • •

Kategorie A

1. *Stanislav Hencl*, 4D, G Pardubice
2. *Alena Pišová*, 3D, G Pardubice
3. *Michal Johanis*, 4A, G J. K. Tyla, Hradec Králové
- 4.–5. *Petr Vodstrčil*, 2A, G Polička
Boris Letocha, 4A, G J. K. Tyla, Hradec Králové
- 6.–8. *Arnošt Komárek*, 3D, G B. Němcové, Hradec Králové
Karel Houfek, 4A, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Petr Doubek, 3D, G Pardubice
- 9.–12. *Michal Řada*, 3A, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Ladislav Ostrý, 4A, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Michal Rössler, 4A, G Česká Třebová
David Stnovský, 3D, G Pardubice

Kategorie B

1. *Petr Vodstrčil*, G Polička

2. *Aleš Král*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
3. *Petr Chocholouš*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
- 4.–6. *Vojtěch Rejtdák*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Vít Žďára, G Polička
Martin Tajovský, G B. Němcové, Hradec Králové

Kategorie C

1. *Petr Lidman*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
- 2.–4. *Tomáš Bílek*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Jiří Zíka, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Zdeňka Broklová, G Polička
- 5.–7. *Jan Fátor*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Jan Petráš, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Petr Luner, G Moravská Třebová
8. *Martin Klíma*, G Havlíčkův Brod
- 9.–12. *Pavel Příhoda*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Lucie Sedláková, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Josef Uchytíl, G Turnov
Aleš Přívětivý, G Pardubice

• • • • • Jihlava • • • • •

Kategorie A

1. *Iveta Tomenendálová*, 4A, G Jihlava
2. *Martina Benešová*, 4A, G Jihlava
3. *František Lavický*, 3D, SPŠ Žďár nad Sázavou
4. *Tomáš Vejchodský*, 3B, G Jihlava
- 5.–7. *Petr Čása*, 3B, G Jihlava
Martin Černý, 2A, G Žďár nad Sázavou
Helena Málková, 4A, G Moravské Budějovice

Kategorie B

- 1.–2. *Jakub Machek*, 2A, G Žďár nad Sázavou
Petr Příplata, 2B, G Jihlava

Kategorie C

1. *Vít Německý*, kv., G Nové Město na Moravě
- 2.–5. *Markéta Hladká*, kv., G Třebíč
David Laštovička, 1B, G Třebíč
Jindřich Makovička, 1B, G Telč
Miroslav Šoukal, 1A, G Velké Meziříčí
6. *Tomáš Tichý*, 1A, G Žďár nad Sázavou
- 7.–9. *Jana Humpolíčková*, 1A, G Jihlava
Inka Píbilová, 1A, G Jihlava
Jiří Roubínek, 1A, G Žďár nad Sázavou
- 10.–12. *Martin Drdla*, 1B, G Žďár nad Sázavou
Lucie Kantorová, 1C, G Žďár nad Sázavou
Daniela Makerová, 1B, G Telč

• • • • • Jihomoravský kraj • • • • •

Kategorie A

- 1.–2. *Petr Kaňovský*, 3A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Libor Mašíček, 3A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
- 3.–4. *Lenka Baráková*, 4A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Filip Krška, 3A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
- 5.–6. *Mikuláš Piňos*, 4A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Jan Hradil, 4A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
7. *Martin Nečesal*, 3A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
- 8.–9. *Jan Strejček*, 3A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Jaroslav Ševčík, 4A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
- 10.–11. *Petr Novák*, 4A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Aleš Vocílka, 3A, G Brno, tř. kpt. Jaroše

Kategorie B

1. *Robert Špalek*, 4A, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
2. *Richard Štoudek*, 2A, G Blansko
3. *Petr Vejchoda*, 2A, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
4. *Milan Fikar*, 2A, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

Kategorie C

1. *Mikuláš Patočka*, 1A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
- 2.–3. *Vítězslav Karásek*, 1A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Petr Šimeček, 3AG, G Brno, tř. kpt. Jaroše
- 4.–7. *Tomáš Hanžl*, 3AG, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Martin Ježek, 3AG, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Jan Kamelander, 1BMF, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Pavel Šmerk, 1A, G Brno, Vídeňská
- 8.–9. *Jiří Mikulášek*, 1AM, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Karel Zitterbart, 4bg, G Zastávka u Brna
- 10.–12. *Tomáš Brauner*, 1A, G Moravský Krumlov
Jaroslav Černý, 1A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Oldřich Stražovský, 1A, G Brno, tř. kpt. Jaroše

Kategorie P

1. *Petr Kaňovský*, 3A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
- 2.–3. *Pavel Bubák*, 2A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Petr Novák, 4A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
4. *Jaroslav Ševčík*, 4A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
5. *Věroslav Kaplan*, 1A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
6. *Mikuláš Patočka*, 1A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
- 7.–9. *Libor Mašíček*, 3A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Petr Šimeček, 3A, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Robert Špalek, 2A, G Brno, tř. kpt. Jaroše

• • • • • Severomoravský kraj • • • • •

Kategorie A

- 1.–2. *Jaromír Fiurášek*, 4, G Přerov
Jan Mach, 4, G M. Koperníka, Bílovec
3. *David Opěla*, 2, G M. Koperníka, Bílovec
- 4.–5. *Jan Foniok*, 2, G M. Koperníka, Bílovec
David Pavlica, 3, G M. Koperníka, Bílovec
- 6.–8. *Petr Vilím*, 2, G M. Koperníka, Bílovec
Jan Onderek, 3, Matiční G Ostrava

- Petr Dub*, 3, SPŠE Mohelnice
9.–10. *Martin Vaněk*, 4, G Prostějov
Petr Masopust, 4, G M. Koperníka, Bílovec

Kategorie B

1. *David Opěla*, 2C, G M. Koperníka, Bílovec
2. *Václav Hrbáč*, 2C, G M. Koperníka, Bílovec
3. *Petr Škovroň*, 2C, G M. Koperníka, Bílovec
4. *Zbyněk Pawlas*, 2C, G M. Koperníka, Bílovec
5.–6. *Jan Foniok*, 2C, G M. Koperníka, Bílovec
Přemysl Jedlička, 2E, Mendelovo G, Opava
7.–9. *Marian Kechlibarov*, 2A, G Ostrava-Hrabůvka
Pavel Skalický, 2D, Slovanské G, Olomouc
Pavel Komišák, 2B, G J. Wolkera, Prostějov
10.–16. *Jana Erbenová*, 2B, G Bruntál
Michal Batko, 2B, G Nový Jičín
Šárka Černáková, 2F, Mendelovo G, Opava
Vítězslav Stejskal, 2D, G Ostrava-Poruba, Čs. exilu
Ondřej Bláha, 2, G Olomouc, Na vlčinci
Jiří Šimek, 2B, G Jeseník
Tomáš Loun, 2D, Slovanské G, Olomouc

Kategorie C

- 1.–2. *Marek Eliáš*, kvarta, Matiční G Ostrava
Jan Vybíral, 1C, G M. Koperníka, Bílovec
3.–5. *Antonín Navrátil*, 1C, G M. Koperníka, Bílovec
Radim Janda, 1A, G Hlučín
Petr Kolovrat, 8C, ZŠ Opava, Otická
6. *David Kubánek*, 1B, G Havířov, Komenského
7. *Tomáš Blumenstein*, 1B, G J. Wolkera, Prostějov
8.–10. *Jiří Fojtík*, 1C, G M. Koperníka, Bílovec
Ivo Škola, 1C, G M. Koperníka, Bílovec
Ladislav Vondráček, 1B, G Havířov, Komenského

Kategorie P

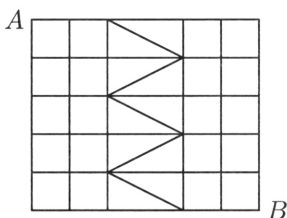
1. *Petr Vilím*, 2C, G M. Koperníka, Bílovec
2. *Zdeněk Románek*, 4C, G Bruntál
3. *Radek Hejbal*, 4F, Opava, Komenského

Kategorie C

Texty úloh

C – I – 1

Pavouk Hubert usoukal pavučinu, jejíž tvar je vyznačen na obr. 1. Po práci se oddal zaslouženému odpočinku v jednom rohu pavučiny (A),



Obr. 1

když tu se najednou v protějším rohu (B) chytla moucha. Kolik cest nejkratší délky spojujících tyto dva rohy má Hubert k dispozici?

(*P. Leischner*)

C – I – 2

Najděte všechny dvojice přirozených čísel m a n , pro které platí

$$m!n! = (mn)^2.$$

(Číslo $m!$ je součin všech přirozených čísel i , $1 \leq i \leq m$, $1! = 1$.)

(*J. Šimša*)

C – I – 3

Šachového turnaje hraného systémem každý s každým se zúčastnili pouze prváci a druháci. Ačkoliv druháků bylo třikrát víc než prváků, získali dohromady pouze o 3 body víc než prváci. Kolik žáků se zúčastnilo turnaje?

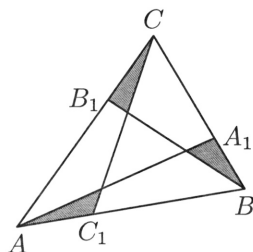
(*P. Černek*)

C – I – 4

V městě Little York je 10 severojižních ulic a 10 východozápadních ulic, které se protínají ve sto křižovatkách. Autobus má po uzavřeném okruhu projet všechny křižovatky. Navrhněte jeho trasu tak, aby počet změn směru jízdy byl co nejmenší. (M. Čadek)

C – I – 5

Na stranách BC , CA , AB trojúhelníku ABC jsou sestrojeny body A_1 , B_1 , C_1 tak, že $|AC_1| = \frac{1}{3}|AB|$, $|BA_1| = \frac{1}{3}|BC|$, $|CB_1| = \frac{1}{3}|AC|$. Nechť P , Q , R jsou vzájemné průsečíky přímk AA_1 , BB_1 a CC_1 . Porovnejte obsah trojúhelníku PQR se součtem obsahů trojúhelníků vyznačených na obr. 2. (J. Dula)



Obr. 2

C – I – 6

Uvažujme trojúhelník ABC , pro jehož průsečík výšek M platí $|AB| = |CM|$. Vypočtete velikost úhlu při vrcholu C trojúhelníku ABC .

C – S – 1

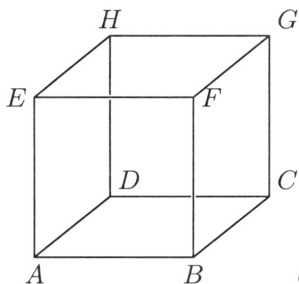
Najděte všechny dvojice přirozených čísel x a y , pro které platí

$$24x^2 = y! - x!.$$

C – S – 2

Na zimu se pavouk Hubert uchýlil do kabinetu matematiky. V něm objevil drátěný model krychle (obr. 3) s délkou hrany 20 cm. Na tomto modelu nejprve napjal vlákna do všech stěnových úhlopříček a pak vlákna pospojoval navzájem všechny středy stěn. Jednou se chtěl rychle dostat

z vrcholu B do vrcholu H . Zvolil si cestu po drátu BF a vláknu FH . Poradte mu v této prolézačce z drátů a vláken kratší cestu zpět z H do B . Určete rovněž počet nejkratších cest z H do B .



Obr. 3

C – S – 3

Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ o obsahu 100 cm^2 . Označme středy stran AB , BC , CD a DA po řadě písmeny E , F , G a H . Vypočtěte součet obsahů trojúhelníků ABF , BCG , CDH a ADE .

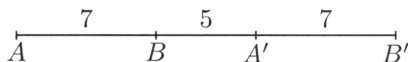
C – II – 1

Určete všechny trojice přirozených čísel x , y a z , pro které platí

$$x! - y! = 5 \cdot z! + 96.$$

C – II – 2

Na zemi leží těžká kovová tyč o délce 7 metrů. Jeden člověk s ní může pohnout jedině tak, že zvedne jeden konec tyče a otáčí tyč kolem druhého konce ležícího na zemi. Kolikrát nejméně musí zvednout a otáčet tyč, aby ji z polohy AB posunul o 12 metrů ve směru polopřímky AB do polohy $A'B'$? (Konec A přejde v A' , konec B v B' .) Popište postup s nejmenším počtem otáčení a ukažte, že menší počet otáčení nestačí. Vzájemná poloha a vzdálenosti bodů A , B , A' , B' jsou uvedeny na obr. 4.



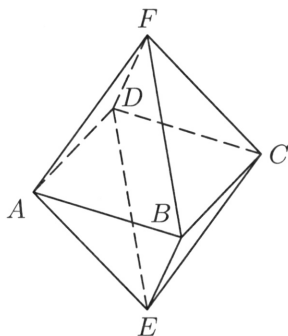
Obr. 4

C – II – 3

Uvnitř obdélníku $ABCD$ leží body X a Y tak, že celý obdélník je rozdělen na dva trojúhelníky ADX , BCY o stejném obsahu a dva konvexní čtyřúhelníky $ABYX$ a $CDXY$ rovněž o stejném obsahu. Dokažte, že potom úsečka XY prochází středem obdélníku.

C – II – 4

Tentokrát si náš starý známý pavouk Hubert vybral ke svým hrám v kabinetě matematiky drátěný model pravidelného osmistěnu. Jeho stěny tvoří 8 rovnostranných trojúhelníků (obr. 5). V každé stěně pospojoval



Obr. 5

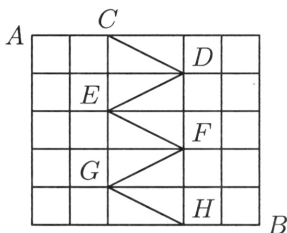
Hubert vlákny středy příslušných hran. Z kolika cest nejkratší délky si může Hubert vybrat, aby se v takto vzniklé síti pavučin a drátů dostal z vrcholu E do vrcholu F ?

(M. Čadek)

Řešení úloh

C – I – 1

Cesty nejkratší délky vedoucí z bodu A do bodu B jsou trojího druhu: **1.** ty, které vedou po úsečce CD , **2.** ty, které vedou po úsečce EF , a **3.** ty, které vedou po úsečce GH (obr. 6). Jestliže počet nejkratších cest mezi



Obr. 6

dvěma body X a Y Hubertovy pavučiny označíme $p(X, Y)$, potom počet cest nejkratší délky mezi A a B je

$$p(A, B) = p(A, C) \cdot p(D, B) + p(A, E) \cdot p(F, B) + p(A, G) \cdot p(H, B).$$

Zbývá nám tak spočítat počet cest nejkratší délky mezi dvěma vrcholy čtvercové sítě. Po chvíli experimentování zjistíme, že každá cesta nejkratší délky z bodu o souřadnicích $[0, 0]$ do bodu o souřadnicích $[m, n]$, $m > 0$, $n > 0$, vede buď přes bod $[m-1, n]$, nebo přes bod $[m, n-1]$. Proto jejich počet je dán součtem $p([0, 0], [m-1, n]) + p([0, 0], [m, n-1])$.

Uplatňujeme-li toto pravidlo postupně na levé třetině pavučiny, dostáváme počty nejkratších cest tak, jak je uvedeno na obr. 7. Proto $p(A, C) = p(H, B) = 1$, $p(A, E) = p(F, B) = 6$, $p(A, G) = p(D, B) = 15$. Celkový počet cest je tedy $1 \cdot 15 + 6 \cdot 6 + 15 \cdot 1 = 66$.

1	3	6	10	15	
1	2	3	4		5
	1	1	1	1	

Obr. 7

C – I – 2

Rovnici po dělení mn upravíme na tvar

$$(m-1)!(n-1)! = mn \quad (1)$$

(klademe $0! = 1$). Všimněme si, že pro každé celé $k \geq 4$ platí $(k-1)! > k$, neboť

$$(k-1)! = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1) \geq 2(k-1) = k + (k-2) > k.$$

Proto nemohou být obě čísla m, n větší než 3: vynásobením nerovností $(m-1)! > m$ a $(n-1)! > n$ bychom dostali spor s rovnicí (1). S ohledem na symetrii můžeme předpokládat, že např. $m \leq 3$. Pro $m = 1$ dostáváme $(n-1)! = n$, což podle předchozího znamená, že $n \leq 3$; probráním možností $n = 1, 2, 3$ zjistíme, že rovnici vyhovuje pouze $n = 1$. Pro $m = 2$ dostáváme $(n-1)! = 2n$, což pro $n \leq 4$ zřejmě nenastane; pro $n \geq 5$ ale platí

$$(n-1)! \geq 2 \cdot 3 \cdot (n-1) = 6(n-1) = 2n + (4n-6) > 2n. \quad (2)$$

Konečně pro $m = 3$ dostáváme $2(n-1)! = 3n$, což v případě $n < 5$ platí pouze pro $n = 4$; pro $n \geq 5$ ale podle (2) platí $2(n-1)! > 4n > 3n$. Hledané dvojice (m, n) jsou $(1, 1)$, $(3, 4)$ a $(4, 3)$.

C – I – 3

Označme n počet prváků, kteří se zúčastnili turnaje. Druháků pak bylo $3n$ a celkový počet žáků byl $4n$. Ti mezi sebou sehráli celkem $\frac{1}{2} \cdot 4n(4n-1)$ zápasů. Protože za vítězství je jeden bod, za remízu půl bodu a za prohru žádný bod, celkový počet rozdaných bodů je roven počtu zápasů. Jestliže tedy prváci získali p bodů a druháci d bodů, pak

$$p + d = 2n(4n-1).$$

Druháci získali jen o tři body více než prváci, tedy

$$p = d - 3.$$

Dosazením z druhé rovnice do první dostaneme

$$d = n(4n-1) + \frac{3}{2}.$$

Počet bodů, které získali druháci, je roven aspoň počtu bodů, které získali ve vzájemných zápasech mezi sebou. Tedy

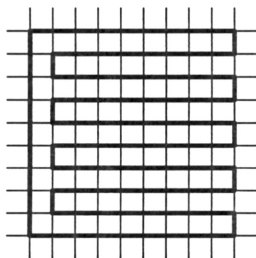
$$n(4n - 1) + \frac{3}{2} \geq \frac{3n(3n - 1)}{2}.$$

Úpravou získáme nerovnost $n + 3 \geq n^2$. V oboru přirozených čísel ji splňují pouze čísla $n = 1$, $n = 2$, neboť pro $n \geq 3$ je $n + 3 \leq 2n < n \cdot n$.

Turnaje se tedy mohli zúčastnit buď 3 druháci a jeden prvák, nebo 6 druháků a 2 prváci. V obou případech se musíme přesvědčit, že turnaj mohl proběhnout tak, aby byly splněny podmínky zadání. V případě čtyř účastníků získal prvák v zápasech s druháky 1,5 bodu. Ti pak získali zbývajících 4,5 bodu. V případě 8 účastníků ve všech zápasech mezi prvákem a druhákem s výjimkou jednoho, který skončil remízou, zvítězil prvák. Prváci tak získali 12,5 bodu a druháci 15,5 bodu.

C – I – 4

Po chvíli experimentování přijdeme na to, že nejmenší možný počet změn směru na okruhu je 20. Jeden z více možných návrhů takového okruhu je znázorněn na obr. 8. Podstatnou částí řešení je však důkaz toho, že na každém okruhu procházejícím přes všechny křižovatky je aspoň 20 změn směru.



Obr. 8

Předpokládejme prvně, že okruh je takový, že autobus jede po každé z deseti severojižních ulic. Vždy, když na nějakou severojižní ulici přijíždí, a vždy, když z ní odbočuje, musí změnit směr. Těchto změn je tedy aspoň $2 \cdot 10 = 20$.

Pokud autobus nejede po některé ze severojižních ulic, musí přes ni projíždět na deseti křižovatkách. Jede tedy po všech deseti východozápadních ulicích. Stejnou úvahou, jakou jsme provedli už dříve, dostáváme, že počet změn směru je aspoň 20.

C – I – 5

Trojúhelník ABC je rozdělen na tři tmavě vyznačené trojúhelníky, tři čtyřúhelníky a trojúhelník PQR . Součet obsahů všech těchto trojúhelníků a čtyřúhelníků je roven obsahu trojúhelníku ABC . Obsahy trojúhelníků ABA_1 , BCB_1 a CAC_1 jsou rovny jedné třetině obsahu trojúhelníku ABC . Proto platí

$$S(ABA_1) + S(BCB_1) + S(CAC_1) = S(ABC).$$

V součtu na levé straně je plocha každého z tmavě vyznačených trojúhelníků započítána dvakrát, plocha čtyřúhelníků je započítána jednou, zatímco plocha trojúhelníku PQR není započítána ani jednou. Odtud plyne, že součet obsahů vyznačených trojúhelníků je roven obsahu trojúhelníku PQR .

Lze ukázat, že obsah trojúhelníku PQR je roven jedné sedmině obsahu trojúhelníku ABC .

C – I – 6

Označme O patu výšky z vrcholu A , P patu výšky z vrcholu B a Q patu výšky z vrcholu C . Trojúhelníky ABP a MCP mají pravé úhly u vrcholu P . V případě, že úhel u vrcholu C je ostrý, shodují se rovněž v úhlech při vrcholech B a C . Pro ostroúhlý trojúhelník (obr. 9) to dokážeme takto:

$$|\sphericalangle ABP| = 90^\circ - |\sphericalangle QMB| = 90^\circ - |\sphericalangle PMC| = |\sphericalangle PCM|.$$

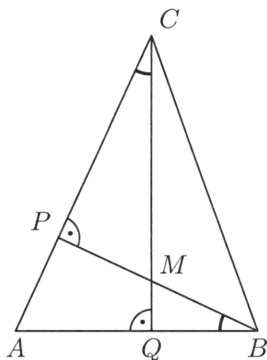
(Důkaz pro trojúhelník s neostrým úhlem při vrcholu A nebo B proveďte sami!) Protože $|AB| = |CM|$, jsou oba trojúhelníky shodné. Speciálně $|CP| = |BP|$, pravoúhlý trojúhelník BCP je rovnoramenný a úhel při vrcholu C je tedy roven 45° .

V případě, že úhel u vrcholu C je tupý (může být pravý?), dokážeme analogicky, že $\triangle ABP \cong \triangle CMP$. (Proveďte podrobně!) Odtud plyne, že $|MP| = |PB|$, a tedy v trojúhelníku BMP je úhel při vrcholu M roven 45° . Úhel při vrcholu C je proto roven 135° , jak se přesvědčíme výpočtem v čtyřúhelníku $COMP$ (obr. 10).

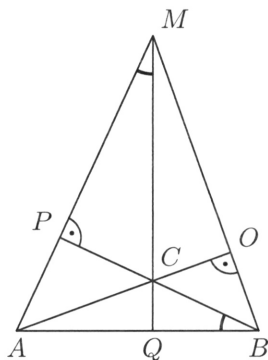
C – S – 1

Levá strana rovnice je kladné číslo, proto $y \geq x + 1$. Odtud plyne, že

$$24x^2 = y! - x! \geq (x+1)! - x! = x!(x+1-1) = x!x.$$



Obr. 9



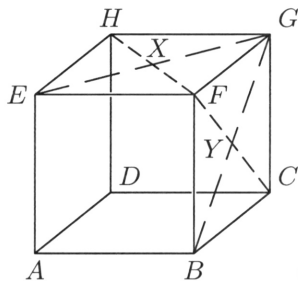
Obr. 10

Po vydělení kladným číslem x^2 dostáváme $24 \geq (x-1)!$. (Zde klademe $0! = 1$.) Tedy $x \leq 5$ a současně má být $y! = 24x^2 + x!$. Dosadíme-li za x čísla 1, 2, 3, 4, 5, zjistíme, že předchozí rovnice má řešení pouze pro $x = 5$, a to $y = 6$.

Řešením rovnice je jediná dvojice $(x, y) = (5, 6)$.

C – S – 2

Cesta z B do H po drátu BF a úhlopříčce FH má délku $20(1 + \sqrt{2})$. Označme X střed stěny $EFGH$ a Y střed stěny $BCGF$ (obr. 11). Každá z úseček HX , XY a YB má délku poloviny úhlopříčky ve stěně krychle, tj. $20 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Proto cesta z H do B po vláknech HX , XY a YB má délku $20 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2} < 20(1 + \sqrt{2})$. Dokážeme, že tato cesta je i cestou nejkratší délky.



Obr. 11

Každá cesta z H do B , která vede přes nějaký vrchol krychle, má délku aspoň $20(1 + \sqrt{2})$. Proto cesty nejkratší délky musí nutně vést přes

středy stěn. Nechť tedy cesta z H vede po půlce úhlopříčky do středu stěny s vrcholem H . Dále mohou nastat tyto možnosti:

1. Cesta vede dále do stěny, jejímž vrcholem není bod B . Potom je její délka větší než $20(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + 1)$.
2. Cesta pokračuje do středu protější stěny a její délka je aspoň $20(\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2})$.
3. Cesta vede do středu stěny s vrcholem B . Vede-li z tohoto středu přímo do B , má délku $20 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

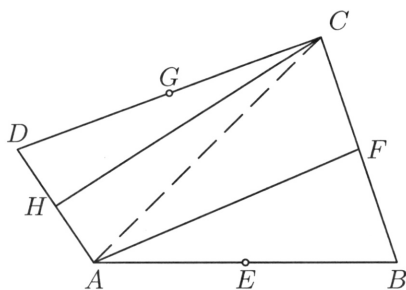
Třetí případ dává popis všech cest z H do B nejkratší délky. Jejich počet je $3 \cdot 2 = 6$. Z bodu H má pro výběr prvního úseku cesty nejkratší délky Hubert 3 možnosti, pro výběr druhého úseku cesty má 2 možnosti a pro výběr posledního úseku pouze jedinou možnost.

C – S – 3

Obsah trojúhelníku XYZ budeme označovat S_{XYZ} , obsah čtyřúhelníku $ABCD$ označíme S . Protože F je středem BC a H je středem AD , platí (obr. 12)

$$S_{ABF} = \frac{1}{2} S_{ABC}, \quad S_{CDH} = \frac{1}{2} S_{ACD}.$$

Tedy



Obr. 12

$$S_{ABF} + S_{CDH} = \frac{1}{2} (S_{ABC} + S_{ACD}) = \frac{1}{2} S.$$

Zcela stejně dokážeme

$$S_{BCG} + S_{ADE} = \frac{1}{2} (S_{BCD} + S_{ABD}) = \frac{1}{2} S.$$

Součet obsahů trojúhelníků ABF , BCG , CDH a ADE je tedy roven obsahu daného čtyřúhelníku, tj. 100 cm^2 .

C – II – 1

Především $x! > 96$, a proto $x \geq 5$. Tedy $x!$ je dělitelné 5 a pravá strana dává při dělení 5 zbytek 1. Proto $y!$ musí dávat po dělení 5 zbytek 4, což je možné pouze pro $y = 4$. Řešme tedy rovnici

$$x! = 5 \cdot z! + 120. \quad (1)$$

Můžeme postupovat dvěma různými způsoby.

1. Z rovnice plyne, že $x \geq z + 1$, tedy $(z + 1)! \leq 5 \cdot z! + 120$ a odtud

$$120 \geq (z + 1)! - 5 \cdot z! = (z - 4) \cdot z!.$$

Proto $z \leq 5$. Prověřením všech pěti možností $z = 1, 2, 3, 4, 5$ zjistíme, že rovnici (1) vyhovuje pouze jediné z , a to $z = 5$. Přitom $x = 6$.

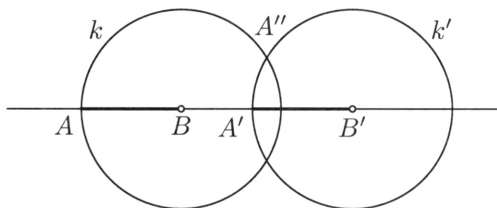
2. Z rovnice (1) plyne, že $x! > 120$, tedy $x \geq 6$. Číslo $x!$ je proto dělitelné 16. Číslo 120 dává po dělení 16 zbytek 8, proto $z!$ nemůže být dělitelné 16, a tedy $z \leq 5$. Dále postupujeme stejně jako v (1).

Úloha má jediné řešení $(x, y, z) = (6, 4, 5)$.

C – II – 2

Při každém otáčení tyče zůstává jeden její konec na místě. Proto k přemístění tyče z polohy AB do polohy $A'B'$ nám jedno otáčení nestačí. Nestačí ani dvě otáčení, protože prvním otáčením nepřemístíme konec A nebo B do bodů A' nebo B' . Ukážeme, jak přemístění provést pomocí tří otáčení.

Uvažujme kružnici k se středem B a kružnici k' se středem B' , obě s poloměrem 7 m (obr. 13). Tyto kružnice se protnou ve dvou bodech.



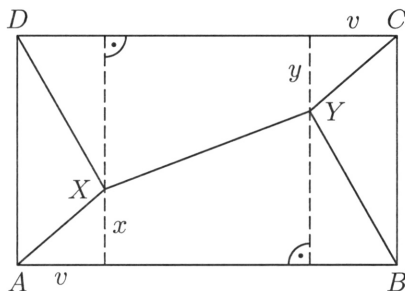
Obr. 13

Libovolný z nich označme A'' . Prvně tyč otočíme kolem bodu B tak, aby konec A padl do bodu A'' . Podruhé otočíme tyč kolem bodu A'' tak, aby

se konec B přemístil do bodu B' . Nakonec otočíme tyč kolem bodu B' tak, aby se druhý konec tyče dostal do bodu A' .

C – II – 3

Nechť $|AB| = a$, $|BC| = b$. Trojúhelníky ADX a BCY mají stejný obsah, a proto vzdálenost bodu X od AD je rovna vzdálenosti bodu Y od BC . Označme tuto vzdálenost v . Dále označme x vzdálenost X od AB a y vzdálenost Y od CD .



Obr. 14

Obsah čtyřúhelníku $ABYX$ je roven součtu obsahů dvou pravoúhlých trojúhelníků a lichoběžníku (obr. 14) a rovná se

$$\frac{1}{2} vx + \frac{1}{2} (b - y)v + \frac{1}{2} (x + b - y)(a - 2v) = \frac{1}{2} (a - v)(b + x - y).$$

Stejně spočítáme obsah čtyřúhelníku $CDXY$:

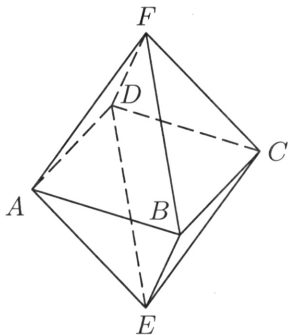
$$\frac{1}{2} vy + \frac{1}{2} (b - x)v + \frac{1}{2} (b - x + y)(a - 2v) = \frac{1}{2} (a - v)(b + y - x).$$

Protože $a > v$, plyne z rovnosti obsahů obou čtyřúhelníků rovnost $b + x - y = b + y - x$ neboli $x = y$. Bod Y je tedy obrazem bodu X při středové souměrnosti podle středu obdélníku. Tím je dokázáno, že úsečka XY prochází středem obdélníku.

C – II – 4

Předpokládejme, že hrany osmistěny mají délku 1. Každá cesta z E do F musí zřejmě vést buď některým z vrcholů A, B, C, D , anebo středem některé z hran AB, BC, CD, DA (obr. 15). Přitom nejkratší cesta z bodu E

do každého z těchto bodů má délku 1. Počet nejkratších cest z bodu E



Obr. 15

do každého z vrcholů A, B, C, D je roven 1 a do každého ze středů hran AB, BC, CD, DA je roven 2. Stejně jsou i počty nejkratších cest z těchto osmi bodů roviny $ABCD$ do bodu F . Proto je počet nejkratších cest z E do F roven

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 20.$$

Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

Pro která reálná čísla a má rovnice

$$x^4 + 6x^3 + ax^2 + 6x + 1 = 0$$

čtyři různé kořeny v oboru reálných čísel?

(*J. Šimša*)

B – I – 2

Jestliže pro kladná reálná čísla a, b, c platí $c > a + b$, potom

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc > 2(a + b)^2c.$$

Dokažte.

(*J. Šimša*)

B – I – 3

Nechť P je mnohočlen s celočíselnými koeficienty a necht' $P(13) = 8046$. Dokažte, že součet koeficientů mnohočlenu P není prvočíslo.

(*P. Černek*)

B – I – 4

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s odvěsnami délek $|AC| = 3$ cm, $|BC| = 4$ cm označme M průsečík osy úhlu ACB a přepony AB . Dokažte, že vzdálenost středů O_1, O_2 kružnic vepsaných trojúhelníkům AMC, BMC je $\frac{1}{7}\sqrt{340 - 170\sqrt{2}}$ cm.

(*P. Leischner*)

B – I – 5

Určete největší možný počet částí, na něž n kružnic rozdělí rovinu (n je přirozené číslo).

(*J. Vinárek*)

B – I – 6

Určete největší možný objem čtyřbokého jehlanu $ABCDV$, jehož základnou je kosočtverec $ABCD$ se stranou délky a a jehož stěnové výšky z vrcholu V na hrany AB , CD mají délku h . (P. Leischner)

B – S – 1

Pro která reálná čísla a mají rovnice

$$\begin{aligned}x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x &= a - 2, \\x^4 - x^3 - 2x^2 - 3x &= 1 - 2a\end{aligned}$$

aspoň jeden společný kořen v oboru reálných čísel? (J. Šimša)

B – S – 2

Určete největší počet dílů, na které lze n polopřímkami rozdělit rovinu. (J. Vinárek)

B – S – 3

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s danými odvěsnami a , b označme D patu výšky z vrcholu C na přeponu AB . Vypočtěte vzdálenost středů O_1 , O_2 kružnic vepsaných trojúhelníkům ACD , BCD . (P. Leischner)

B – II – 1

Určete všechny hodnoty reálných čísel a , b , pro které je řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned}x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 &= 0, \\y^4 + by^3 + ay^2 + by + 1 &= 0\end{aligned}$$

jediná dvojice reálných čísel x , y , přičemž navíc platí $xy < 0$. (P. Černek)

B – II – 2

Rozhodněte, zda existuje přirozené číslo x , pro které platí

$$19^x + 94^x = x^{1994}.$$

(R. Kollár)

B – II – 3

Na přeponě AB pravoúhlého trojúhelníku ABC je dán bod M takový, že kružnice vepsané trojúhelníkům CAM a BCM mají stejný poloměr. Rozhodněte, co je větší: obsah trojúhelníku ABC , nebo obsah čtverce o straně $|CM|$?

B – II – 4

Každý z bodů krychle o hraně délky a obarvíme právě jednou ze tří barev. Dokažte, že pak mezi těmito body existují dva téže barvy, jejichž vzdálenost je větší než $\frac{7}{5}a$.
(*P. Leischner*)

B – I – 1

Rovnice zřejmě nemá kořen 0. Po vydělení obou stran rovnice číslem x^2 upravíme rovnici na tvar

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 6\left(x + \frac{1}{x}\right) + a = 0.$$

Položme $u = x + \frac{1}{x}$, pak $x^2 + \frac{1}{x^2} = u^2 - 2$ a rovnici přepíšeme na tvar

$$u^2 + 6u + a - 2 = 0. \quad (1)$$

Ze substitučního vztahu dostáváme

$$x^2 - ux + 1 = 0. \quad (2)$$

Má-li mít původní rovnice čtyři různé reálné kořeny, pak rovnice (1) musí mít dva různé kořeny (označme je u_1 a u_2), stejně jako každá z obou rovnic (2) pro $u = u_1$, resp. $u = u_2$ musí mít dva různé reálné kořeny, tj. diskriminanty těchto rovnic jsou kladné. To vede na podmínky

$$a < 11 \quad \text{a zároveň} \quad |u_1| > 2 \quad \text{a} \quad |u_2| > 2. \quad (3)$$

Předpokládejme, že u_1, u_2 jsou kořeny rovnice (2), a necht $u_1 < u_2$. Z Viětových vztahů zjistíme, že $2u_1 < u_1 + u_2 = -6$, takže $u_1 < -3$. Pro kořen u_1 tedy platí vztah (3) automaticky, pro druhý kořen musí platit buď $u_2 < -2$, nebo $u_2 > 2$. Představíme-li si graf a kořeny kvadratické funkce $f(u) = u^2 + 6u + a - 2$, pak to znamená, že $f(-2) > 0$, nebo $f(2) < 0$. Odtud $a > 10$, nebo $a < -14$. Tedy $a \in \mathbb{M} = (-\infty, -14) \cup (10, 11)$.

Ukážeme ještě, že pro každé $a \in \mathbb{M}$ má původní rovnice čtyři navzájem různé kořeny. Pro $a \in \mathbb{M}$ má rovnice (1) dva různé kořeny u_1, u_2 , jejichž absolutní hodnoty jsou větší než 2. Proto každá z obou rovnic $x + 1/x = u_i$ má dva různé reálné kořeny x_i a $1/x_i$ ($i = 1, 2$), což jsou kořeny původní rovnice. Mezi čísly $x_1, 1/x_1, x_2, 1/x_2, x_2$ ovšem nemohou být dvě stejná (kdyby $\{x_1, 1/x_1\} \cap \{x_2, 1/x_2\} \neq \emptyset$, pak $\{x_1, 1/x_1\} = \{x_2, 1/x_2\}$ a $u_1 = u_2$).

B – I – 2

Položme $x = c - a - b$. Pak $x > 0$ a $c = a + b + x$. Jednoduchými algebraickými úpravami lze ověřit, že

$$\begin{aligned} F &= a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - 2(a+b)^2c = \\ &= a^3 + b^3 + ((a+b) + x)^3 + 3ab(a+b+x) - 2(a+b)^2(a+b+x) = \\ &= x(a+b)(a+b+3x) + x(x^2 + 3ab) > 0, \end{aligned}$$

neboť všechny členy posledního výrazu jsou kladné. Tím je daná nerovnost dokázána.

Jiné řešení spočívá v tom, že výraz F budeme považovat za mnohočlen s proměnnou c . Dosazením $c = a + b$ se po úpravě přesvědčíme, že $F(a+b) = 0$, tj. $a + b$ je kořenem polynomu, a proto je tento polynom dělitelný kořenovým činitelem $c - (a + b)$ a platí: $F(c) = (c - (a + b))(c^2 + ac + bc - a^2 + ab - b^2)$. Výraz v první závorce je pro $c > a + b$ kladný, výraz v druhé závorce je také kladný, protože $c^2 + (a+b)c - a^2 + ab - b^2 > 2(a+b)^2 - a^2 + ab - b^2 = (a+b)^2 + 3ab > 0$.

B – I – 3

Označme s součet koeficientů daného mnohočlenu. Zřejmě je $s = P(1)$. Pro každá dvě různá celá čísla a, b a libovolný mnohočlen Q s celočíselnými koeficienty platí, že číslo $Q(a) - Q(b)$ je dělitelné číslem $a - b$. Proto $12 \mid (P(13) - P(1))$. Existuje tedy celé číslo k takové, že $8\,046 - s = 12k$, odtud $s = 8\,046 - 12k = 6(1\,341 - 2k)$. Součet koeficientů daného mnohočlenu je dělitelný šesti, a tudíž není prvočíslo.

B – I – 4

Z Pythagorovy věty určíme $|AB| = 5$ cm. Bod M dělí přeponu AB v poměru obsahů trojúhelníků AMC a BMC , a protože bod M má zároveň stejnou vzdálenost od obou odvěsen, je zřejmě $|AM| : |BM| = |AC| : |BC| = 3 : 4$, odtud $|AM| = \frac{3}{7}|AB| = \frac{15}{7}$ cm, $|BM| = \frac{20}{7}$ cm.

V trojúhelníku ABC označme s polovinu obvodu a r poloměr kružnice vepsané. Pro jeho obsah S pak platí $S = sr = \frac{1}{2}|AB||AC| \sin \alpha$.

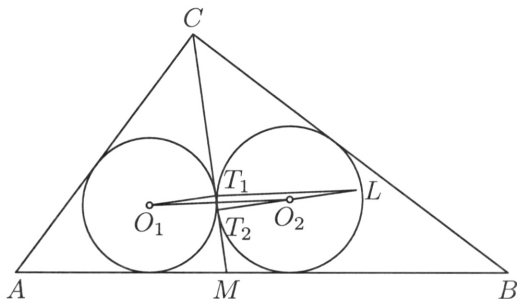
Pro trojúhelníky AMC , BMC označme analogicky S_1, S_2 jejich obsahy, r_1, r_2 poloměry vepsaných kružnic a s_1, s_2 poloviny jejich obvodů. Platí pak $S = \frac{1}{2}|AC||BC| = 6$ cm², $S_1 : S_2 = |AM| : |BM| = 3 : 4$, neboť trojúhelníky AMC , BMC mají stejnou výšku z vrcholu C . Platí

tedy $S_1 = \frac{18}{7} \text{ cm}^2$, $S_2 = \frac{24}{7} \text{ cm}^2$. Ze vztahu $S_1 = \frac{1}{2}|CM||CA|\sin 45^\circ$ vyplývá, že $|CM| = \frac{12}{7}\sqrt{2} \text{ cm}$.

Body, v nichž se kružnice vepsané trojúhelníku ABC dotýká stran AC , AB , BC , označme postupně B_1 , C_1 , A_1 . Pro shodné úseky tečen z jednotlivých vrcholů ke kružnici vepsané trojúhelníku ABC pak platí $|AB_1| = |AC_1| = s - a$, $|BA_1| = |BC_1| = s - b$, $|CA_1| = |CB_1| = s - c$. Ze vzorců pro obsah dále dostáváme

$$r_1 = \frac{S_1}{s_1} = \frac{9 - 3\sqrt{2}}{7} \text{ cm}, \quad r_2 = \frac{S_2}{s_2} = \frac{8 - 2\sqrt{2}}{7} \text{ cm}$$

a $|CT_1| = s_1 - |AM|$, $|CT_2| = s_2 - |BM|$ (obr. 16). Odtud $|T_1T_2| = |CT_2| - |CT_1| = s_2 - s_1 + |AM| - |BM| = \frac{1}{7} \text{ cm}$.



Obr. 16

Označme dále KL obraz úsečky O_1O_2 v posunutí o vektor $\vec{O_1T_1}$ ($K = T_1$). Z pravoúhlého trojúhelníku KT_2L pak máme $|O_1O_2| = |KL| = \sqrt{|T_1T_2|^2 + |LT_2|^2} = \sqrt{|T_1T_2|^2 + (r_1 + r_2)^2} = \frac{1}{7}\sqrt{340 - 170\sqrt{2}} \text{ cm}$.

B – I – 5

Pro $n = 1$ je hledaný počet $P(1) = 2$. Přitom n -tá kružnice protne $n - 1$ kružnic nejvýše v $2(n - 1)$ bodech. Počet dílů roviny se tedy přidáním n -té kružnice zvýší také nejvýš o $2(n - 1)$. Pro počet $P(n)$ dílů roviny dostáváme

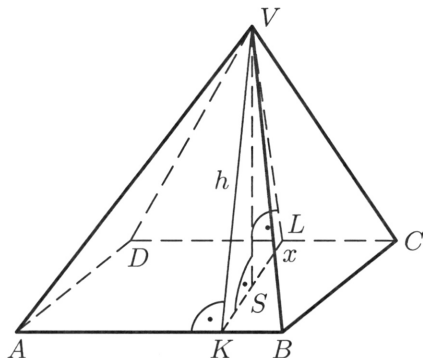
$$\begin{aligned} P(n) &\leq 2(n - 1) + P(n - 1) \leq 2(n - 1) + 2(n - 2) + P(n - 2) \leq \dots \leq \\ &\leq 2(n - 1 + n - 2 + \dots + 1) + P(1) = n(n - 1) + 2. \end{aligned}$$

Vhodným příkladem se přesvědčme, že pro $P(n)$ platí rovnost $P(n) = n(n - 1) + 2$. Nechť k_1 je jednotková kružnice se středem O a nechť

A je pevně zvolený bod této kružnice. Označme k_i obraz kružnice k_1 v posunutí o vektor $\frac{i-1}{n}\mathbf{OA}$, kde $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Pak soustava kružnic $k_1, k_2, \dots, k_n$ dělí rovinu na $n(n-1)+2$ dílů.

B – I – 6

Označme K, L paty kolmic z V na hrany AB, CD . Přímka AB je kolmá na rovinu KLV , protože je kolmá k přímkám KV, LV (obr. 17). Odtud $KL \perp AB$. Výška kosočtverce $ABCD$ je $|KL| = 2x$. Pata výšky jehlanu



Obr. 17

leží v rovině KLC a je zřejmě totožná se středem S úsečky KL . Z pravoúhlého trojúhelníku KSV je tato výška $v = \sqrt{h^2 - x^2}$. Objem jehlanu je tedy

$$V = \frac{2}{3}ax\sqrt{h^2 - x^2} = \frac{2}{3}a\sqrt{x^2h^2 - x^4}.$$

Objem bude maximální, právě když bude maximální výraz pod odmocninou

$$U = x^2h^2 - x^4 = \frac{1}{4}h^4 - \left(x^2 - \frac{1}{2}h^2\right)^2.$$

Maximum hledáme na intervalu $0 < x < \frac{1}{2}a$, protože výška kosočtverce $2x$ je menší než velikost a jeho strany. Kvadratická funkce U proměnné $t = x^2$ nabývá absolutního maxima pro $x = h/\sqrt{2}$, proto závisí další diskuse na tom, zda bod $h/\sqrt{2}$ padne do intervalu $(0, \frac{1}{2}a)$ či nikoliv. Pro $h\sqrt{2} < a$ je tedy maximální objem jehlanu $V_{\max} = \frac{1}{3}ah^2$.

Pro $a \leq h\sqrt{2}$ je kvadratická funkce U v intervalu $(0, \frac{1}{2}h^2)$ rostoucí, a proto objem jehlanu v tomto případě nemá maximum, ale neomezeně se

blíží hodnotě $V_{\max} = \frac{1}{6}a^2\sqrt{4h^2 - a^2}$ (pro $x = \frac{1}{2}a$ dostaneme čtvercovou podstavu — a podle běžně užívané definice čtverec není kosočtverec).

B – S – 1

Z dané dvojice rovnic nejdříve vyloučíme parametr a — např. tak, že první rovnici vynásobíme dvěma a k výsledku přičteme rovnici druhou, dostaneme

$$3x^4 - 7x^3 - 4x^2 - 7x = -3,$$

což je reciproká rovnice, kterou musí splňovat každý společný kořen výchozích rovnic. Po substituci $y = x + 1/x$ dostaneme rovnici $3y^2 - 7y - 10 = 0$ s kořeny $y_1 = \frac{10}{3}$ a $y_2 = -1$. Hodnotě y_1 odpovídají kořeny $x_1 = 3$ a $x_2 = \frac{1}{3}$, zatímco pro $y = y_2$ reálné kořeny neexistují. Pro $x = 3$ a $x = \frac{1}{3}$ vypadá výchozí dvojice rovnic takto:

$$\begin{cases} -15 = a - 2, \\ 27 = 1 - 2a, \end{cases} \quad \text{resp.} \quad \begin{cases} \frac{-71}{81} = a - 2, \\ \frac{-101}{81} = 1 - 2a, \end{cases}$$

odkud snadno určíme hledané hodnoty $a = -13$ a $a = \frac{91}{81}$.

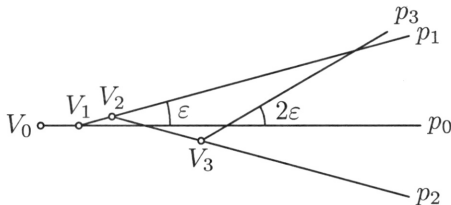
B – S – 2

Označme $p(n)$ hledaný maximální počet. Zřejmě platí $p(1) = 1$ a $p(2) = 2$. Uvažujme jedno takové rozdělení dané roviny n polopřímkami na $p(n)$ částí. Přidáme-li další polopřímku tak, aby protínala každou z n polopřímek, určí vzniklé průsečíky jednu polopřímku a $n - 1$ úseček, z nichž každá může z jedné z dosavadních částí roviny oddělit další. Dostaneme tak nejvýše $p(n) + n$ nových částí, tj. platí

$$p(n+1) \leq p(n) + n.$$

Ukážeme nyní pro dané n konstrukci, která splňuje předchozí „maximální“ požadavky. Zvolme úhel ε tak, aby $n\varepsilon < 90^\circ$ a sestrojme v dané rovině libovolnou polopřímku p_0 s počátkem V_0 . Na polopřímce p_0 zvolme libovolný bod V_1 a v jedné z polorovin určených přímkou V_0V_1 sestrojme polopřímku p_1 s počátkem V_1 , která bude s polopřímkou p_0 svírat úhel ε . Podobně v polorovině opačné k p_1V_0 sestrojíme polopřímku p_2 s počátkem V_2 ležícím na polopřímce p_1 tak, aby svírala s p_0 úhel ε (taková

polopřímka protne obě polopřímky p_0, p_1 , obr. 18). Dále postupujeme tak, že máme-li sestrojeny polopřímky $p_1, p_2, \dots, p_{2k}$ ($2 \leq 2k < n$), přičemž p_k protíná všechny polopřímky p_i ($0 \leq i < k$), zvolíme na polopřímce p_{2k} bod V_{2k+1} tak, aby úsečka $V_{2k}V_{2k+1}$ rovněž protínala všechny polopřímky p_i ($0 \leq i < k$), a sestrojme polopřímku p_{2k+1} s počátkem v bodě V_{2k+1} , která bude ležet v polorovině opačné k $V_{2k-1}V_{2k}V_{2k-2}$ a bude protínat všechny dosud sestrojené polopřímky; k tomu stačí, aby velikost úhlu omezeného polopřímkami p_0 a p_{2k+1} byla $k\varepsilon$. Podobně sestrojíme i polopřímku p_{2k+2} .



Obr. 18

Pro hodnotu $p(n)$ tedy platí

$$\begin{aligned} p(n) &= (n-1) + p(n-1) = (n-1) + (n-2) + p(n-2) = \dots = \\ &= (n-1) + (n-2) + \dots + 1 + p(1) = \frac{1}{2}n(n-1) + 1. \end{aligned}$$

Jiné řešení. Vyřešme nejprve podobnou úlohu pro přímky. Označme $q(n)$ maximální počet částí, na něž rozdělí danou rovinu n přímek. Sestrojíme-li v situaci, kdy je rovina rozdělena n přímkami na $q(n)$ částí, další přímku, jež je s každou z nich různoběžná, rozdělí každou z částí, kterou prochází, na dvě části. Protože n přímek protíná tuto přímku v n bodech, prochází $(n+1)$ -ní přímka celkem $n+1$ částí a pro hodnotu $q(n+1)$ platí

$$q(n+1) = q(n) + n + 1.$$

Je tedy

$$\begin{aligned} q(n) &= n + q(n-1) = n + (n-1) + q(n-2) = \dots = \\ &= n + (n-1) + \dots + 2 + q(1) = \frac{1}{2}n(n+1) + 1. \end{aligned}$$

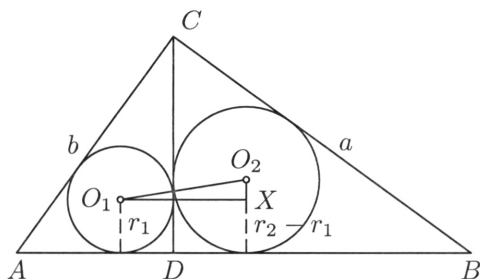
Představme si nyní, že máme n polopřímek, jež rozdělují rovinu na $p(n)$, tedy maximální počet částí. Nahradíme-li polopřímky přímkami,

bude zřejmě rovina rozdělena na $q(n)$ částí. Protože počet průsečíků všech n přímek je konečný, existuje v dané rovině kruh, který obsahuje všechny průsečíky, a tedy i všechny omezené části roviny v uvedeném rozdělení. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že počátky všech n daných polopřímek leží vně uvedeného kruhu. Obě uvažovaná rozdělení (s polopřímkami, resp. s přímkami) se nyní liší jen v počtu neomezených částí vně kruhu, z kterého v prvním případě vychází n polopřímek a n úseček, v druhém pak $2n$ polopřímek. Je tedy

$$p(n) = q(n) - n = \frac{1}{2}n(n+1) + 1 - n = \frac{1}{2}n(n-1) + 1.$$

B – S – 3

Označme r_1, r_2 poloměry obou kružnic vepsaných trojúhelníkům ACD, BCD (obr. 19). Z Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník O_1O_2X ,



Obr. 19

kde X je pravoúhlý průmět bodu O_1 na kolmici bodem O_2 k přeponě AB , pro hledanou vzdálenost plyne

$$|O_1O_2| = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{2} \sqrt{r_1^2 + r_2^2}.$$

Pro poloměr r kružnice vepsané danému trojúhelníku ABC z podobnosti obou trojúhelníků ACD, BCD trojúhelníku ABC vyplývá, že je

$$\frac{r_1}{r} = \frac{b}{c}, \quad \frac{r_2}{r} = \frac{a}{c},$$

čili

$$r_1^2 + r_2^2 = r^2 \left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} \right) = r^2.$$

Proto

$$|O_1O_2| = r\sqrt{2}.$$

Vyjádříme-li obsah trojúhelníku ABC dvěma různými způsoby, dostaneme

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(a+b+c)r,$$

takže

$$\begin{aligned} r &= \frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab(a+b-\sqrt{a^2+b^2})}{(a+b)^2 - (a^2+b^2)} = \\ &= \frac{1}{2}(a+b-c) \end{aligned}$$

Je tedy $|O_1O_2| = \frac{1}{2}\sqrt{2}(a+b-c)$.

B – II – 1

Je-li u kořen některé z obou zadaných rovnic, pak $u \neq 0$ a $1/u$ je kořen téže rovnice. Proto $u = 1/u$, takže $u = \pm 1$. Nechtě tedy číslo 1, resp. -1 je kořenem první, resp. druhé rovnice (jinak vyměníme navzájem čísla a, b). Ze soustavy rovnic

$$1 + a + b + a + 1 = 0 \quad \text{a} \quad 1 - b + a - b + 1 = 0$$

plyne $a = -\frac{6}{5}$ a $b = \frac{2}{5}$. Zkoumané rovnice jsou pak

$$(x-1)^2\left(x^2 + \frac{4}{5}x + 1\right) = 0 \quad \text{a} \quad (x+1)^2\left(x^2 - \frac{8}{5}x + 1\right) = 0,$$

tj. mají jediné reálné kořeny, neboť diskriminanty obou trojčlenů $x^2 + \frac{4}{5}x + 1$ a $x^2 - \frac{8}{5}x + 1$ jsou záporné. Hledané dvojice (a, b) jsou $(-\frac{6}{5}, \frac{2}{5})$ a $(\frac{2}{5}, -\frac{6}{5})$.

B – II – 2

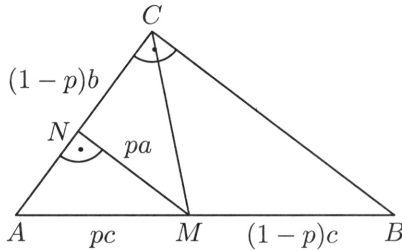
Žádné takové x neexistuje, neboť jak ukážeme, dekadické zápisy obou stran rovnice mají různé poslední číslice, ať je číslo x zvoleno jakkoli. Skutečně, podle toho, zda je x liché či sudé, končí mocnina 19^x číslicí 9 či 1 a mocnina 94^x končí číslicí 4 či 6. Proto je poslední číslice součtu $19^x + 94^x$ rovna 3 nebo 7. Na druhé straně druhá mocnina $(x^{997})^2$ končí jednou z číslic 0, 1, 4, 5, 6 nebo 9. Tím je naše tvrzení dokázáno.

Jiné řešení. Obě čísla 19 i 94 při dělení třemi dávají zbytek 1. Součet obou jejich mocnin tedy dává při dělení třemi zbytek 2. Na druhé straně

druhá mocnina libovolného čísla k dává při dělení třemi buď zbytek 0 (je-li k dělitelné třemi), anebo zbytek 1 (není-li k dělitelné třemi). Proto $(x^{997})^2$ dává při dělení třemi zbytek 0 nebo 1. Uvedenou rovnici tedy nemůže splňovat žádné přirozené číslo x .

B – II – 3

Nechť $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ a $|AM| = pc$, kde $0 < p < 1$ (obr. 20).



Obr. 20

Trojúhelníky CAM a BCM mají obsahy v poměru $p : (1-p)$, tj. jsou rovny $\frac{1}{2}pab$, resp. $\frac{1}{2}(1-p)ab$, takže rovnost poloměrů příslušných vepsaných kružnic lze zapsat takto:

$$\frac{pab}{b + pc + x} = \frac{(1-p)ab}{a + (1-p)c + x},$$

kde jsme označili $x = |CM|$. Odtud po úpravě plyne

$$pa - (1-p)b = (1-2p)x. \quad (1)$$

Na druhé straně podle Pythagorovy věty pro trojúhelník CMN platí

$$x^2 = p^2a^2 + (1-p)^2b^2.$$

Proto z (1) plyne umocněním na druhou

$$(pa - (1-p)b)^2 = (1-2p)^2(p^2a^2 + (1-p)^2b^2),$$

odkud po roznásobení a úpravě dostaneme

$$2p(1-p)[p^2a^2 + (1-p)^2b^2] = p(1-p)ab.$$

Protože $p(1-p) \neq 0$ a výraz v hranaté závorce je x^2 , dostáváme rovnost $x^2 = \frac{1}{2}ab$, která znamená, že čtverec o straně x má stejný obsah jako trojúhelník ABC .

Poznámka. Hodnotu p není nutno určovat. Je to kořen kvadratické rovnice

$$p^2a^2 + (1-p)^2b^2 = \frac{ab}{2},$$

která má ovšem obecně dva kořeny. Vybrat ten „pravý“ je možné na základě diskuse o znaménkách obou stran rovnosti (1). (Rovnost (1) jsme dále použili umocněnou, tedy po neekvivalentní úpravě.)

B – II – 4

Označme vrcholy dané krychle obvyklým způsobem A, B, C, D, E, F, G, H . Je-li vrchol A obarven jednou ze tří barev a některý z vrcholů C, F, H má tutéž barvu, jsme hotovi, neboť $|AC| = |AF| = |AH| = a\sqrt{2} > 1,41a > \frac{7}{5}a$. V opačném případě musí být uvedené tři vrcholy rovnostranného trojúhelníku CFH obarveny nejvýše dvěma různými barvami, takže aspoň dva z bodů C, F, H mají tutéž barvu. Jejich vzdálenost je větší než $\frac{7}{5}a$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Kategorie A

Texty úloh

A – I – 1

Přirozené číslo $m > 1$ nazveme k -násobným dělitelem přirozeného čísla n , pokud platí rovnost $n = m^k q$, kde q je celé číslo, které není násobkem čísla m . Určete, kolik sedminásobných dělitelů má číslo $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 100$.
(J. Šimša)

A – I – 2

Základnou trojbokého hranolu $ABCA'B'C'$ je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s odvěsnami AB , AC dané délky a . Boční hrany AA' , BB' , CC' svírají s rovinami základů úhel 60° . Úhlopříčka BC' boční stěny $BCC'B'$ má délku $a\sqrt{6}$ a je kolmá na hranu AC . Určete objem hranolu.
(P. Leischner)

A – I – 3

Je dán trojúhelník ABC , jehož úhel ACB má velikost 140° . Označme X průsečík osy úhlu ABC se stranou AC a Y bod strany AB , pro který má úhel YCB velikost 100° . Určete velikost úhlu YXB .
(P. Černek)

A – I – 4

Pro která celá $n > 2$ existují racionální čísla p a q taková, že $\sqrt[3]{n} = p + q\sqrt[3]{2}$?
(J. Šimša)

A – I – 5

Najděte nejmenší reálné číslo p , při kterém nerovnost

$$a + b - p \cdot \sqrt{ab} \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

platí pro libovolnou dvojici kladných čísel a , b .

(J. Šimša)

A – I – 6

Zjistěte všechna čísla, která jsou cifernými součty druhých mocnin přirozených čísel (zapsaných v desítkové soustavě). (P. Černek)

A – S – 1

Udejte příklad přirozeného čísla n , pro které má číslo 2^n právě 1993 různých 1994-násobných dělitelů. (Přirozené číslo $m > 1$ nazýváme k -násobným dělitelem přirozeného čísla n , pokud platí rovnost $n = m^k q$, kde q je přirozené číslo, které není násobkem čísla m .) (J. Šimša)

A – S – 2

Je dán trojúhelník ABC a bod M na polopřímce opačné k polopřímce AB . Bodem M vedte přímku $p \neq AB$ tak, aby její průsečíky P , Q s přímkami AC , BC určily trojúhelník PQC , který má stejný obsah jako trojúhelník ABC . (J. Vinárek)

A – S – 3

V rovině je nakreslen konvexní n -úhelník ($n \geq 3$) a některé jeho úhlopříčky tak, že žádné dvě vyznačené úhlopříčky se neprotínají. Dokažte, že jeho vrcholy je možno obarvit pomocí tří barev tak, že žádné dva vrcholy spojené stranou nebo nakreslenou úhlopříčkou nemají stejnou barvu. (P. Hliněný)

A – II – 1

Najděte nejmenší přirozené číslo, které má právě pět dvojnásobných dělitelů. (Přirozené číslo $m > 1$ nazýváme k -násobným dělitelem přirozeného čísla n , pokud platí rovnost $n = m^k q$, kde q je přirozené číslo, které není násobkem čísla m .) (J. Šimša)

A – II – 2

Uvažujme trojúhelník ABC s úhlem 100° při vrcholu A a označme po řadě D , E průsečíky os úhlů při vrcholech B , C s protějšími stranami. Určete všechny možné velikosti úhlu ABC , víte-li, že $|BE| = |CD|$.

A – II – 3

V rovině uvažujme systém n navzájem různých přímek $p_1, p_2, \dots, p_n$. Každý bod, kterým procházejí právě tři z těchto přímek, obarvíme červeně a označíme a_i počet červených bodů na přímce p_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Rozhodněte, zda existuje systém

- a) 4 přímek, pro nějž $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 1, 2, 2)$.
- b) 6 přímek, pro nějž $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = (2, 2, 2, 2, 2, 2)$,
- c) 9 přímek, pro nějž $(a_1, a_2, \dots, a_9) = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3)$,
- d) 9 přímek, pro nějž $(a_1, a_2, \dots, a_9) = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3)$.

(J. Kratochvíl)

A – II – 4

Rozhodněte, zda existuje kubická rovnice

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

s celočíselnými koeficienty p, q a r , která má v oboru reálných čísel jediný kořen $x_0 = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

(J. Šimša)

A – III – 1

Nechť $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je libovolná funkce na množině přirozených čísel, která splňuje nerovnost

$$f(x) + f(x+2) \leq 2f(x+1)$$

pro každé přirozené číslo x . Dokažte, že potom v rovině existuje přímka, na které leží nekonečně mnoho bodů s kartézskými souřadnicemi $[n, f(n)]$.

(P. Hliněný)

A – III – 2

V kvádru o objemu V je umístěn konvexní mnohostěn M . Kolmý průmět mnohostěnu M do každé stěny kvádru je totožný s touto stěnou. Jaký nejmenší objem může mít M ?

(P. Leischner)

A – III – 3

V rovině je nakreslen konvexní 1994-úhelník M a některé jeho úhlopříčky tak, že z každého vrcholu vychází právě jedna nakreslená úhlopříčka.

Délkou úhlopříčky rozumíme počet stran mnohoúhelníku M , které tato úhlopříčka od M odřezává (minimum dvou možných čísel). Označme $(d_1, d_2, \dots, d_{997})$ délky nakreslených úhlopříček, uspořádané sestupně podle velikosti. Rozhodněte, zda je možno úhlopříčky nakreslit tak, aby

$$\text{a) } (d_1, d_2, \dots, d_{997}) = (\underbrace{3, \dots, 3}_{991}, \underbrace{2, 2, 2, 2, 2, 2}_6),$$

$$\text{b) } (d_1, d_2, \dots, d_{997}) = (\underbrace{8, 8, 8, 8}_4, \underbrace{6, \dots, 6}_{985}, \underbrace{3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3}_8).$$

(J. Kratochvíl)

A – III – 4

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost přirozených čísel taková, že pro každé n je číslo $(a_n - 1)(a_n - 2) \dots (a_n - n^2)$ celým kladným násobkem čísla n^{n^2-1} . Potom pro každou konečnou množinu prvočísel P platí nerovnost

$$\sum_{p \in P} \frac{1}{\log_p a_p} < 1.$$

Dokažte.

(J. Kratochvíl)

A – III – 5

Označme A_1, B_1, C_1 paty výšek ostroúhlého trojúhelníku ABC a V jejich průsečík. Jestliže trojúhelníky AC_1V, BA_1V, CB_1V mají stejný obsah, plyne odtud, že trojúhelník ABC je rovnostranný? (J. Šimša)

A – III – 6

Dokažte, že z každé čtveřice různých čísel ležících v intervalu $(0, 1)$ lze vybrat dvě čísla $a \neq b$ tak, aby platila nerovnost

$$\sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)} > \frac{a}{2b} + \frac{b}{2a} - ab - \frac{1}{8ab}.$$

(J. Vinárek)

Řešení úloh

A – I – 1

Odvodíme nejprve obecný vzorec pro počet $P_k(n)$ všech k -násobných dělitelů čísla n s rozkladem $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_N^{a_N}$, kde p_i jsou navzájem různá prvočísla a exponenty a_i jsou přirozená čísla. Platí $m^k \mid n$, právě když m je tvaru $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_N^{b_N}$, kde celá b_i splňují $0 \leq b_i \leq a_i/k$ pro každé i . Proto je takových čísel m právě $\prod_{i=1}^N \left(1 + \left\lfloor \frac{a_i}{k} \right\rfloor\right)$. Hodnotu $P_k(n)$ určíme, když od počtu čísel m s vlastností $m^k \mid n$ odečteme počet těch z nich, pro které dokonce platí $m^{k+1} \mid n$, takže

$$P_k(n) = \prod_{i=1}^N \left(1 + \left\lfloor \frac{a_i}{k} \right\rfloor\right) - \prod_{i=1}^N \left(1 + \left\lfloor \frac{a_i}{k+1} \right\rfloor\right). \quad (1)$$

Nyní určíme rozklad čísla $100! = 2^{a_1} 3^{a_2} 5^{a_3} \dots$. Snadno uvážíme, že prvočíslo p má v rozkladu čísla $n!$ exponent rovný

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^4} \right\rfloor + \dots \quad (2)$$

(pouze konečný počet sčítanců je nenulových). Takto můžeme stanovit prvočíselný rozklad $100! = 2^{97} 3^{48} 5^{24} 7^{16} 11^9 13^7 17^5 \dots$, kde tečky vyznačují další prvočísla, jejichž exponenty jsou menší než 7, a tedy neovlivní hodnotu

$$\begin{aligned} P_7(100!) &= \\ &= \left(1 + \left\lfloor \frac{97}{7} \right\rfloor\right) \left(1 + \left\lfloor \frac{48}{7} \right\rfloor\right) \left(1 + \left\lfloor \frac{24}{7} \right\rfloor\right) \left(1 + \left\lfloor \frac{16}{7} \right\rfloor\right) \left(1 + \left\lfloor \frac{9}{7} \right\rfloor\right) \left(1 + \left\lfloor \frac{7}{7} \right\rfloor\right) - \\ &\quad - \left(1 + \left\lfloor \frac{97}{8} \right\rfloor\right) \left(1 + \left\lfloor \frac{48}{8} \right\rfloor\right) \left(1 + \left\lfloor \frac{24}{8} \right\rfloor\right) \left(1 + \left\lfloor \frac{16}{8} \right\rfloor\right) \left(1 + \left\lfloor \frac{9}{8} \right\rfloor\right) = \\ &= 14 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 - 13 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4704 - 2184 = 2520. \end{aligned}$$

A – I – 2

Objem našeho hranolu je $V = \frac{1}{2}a^2v$, kde v je neznámá vzdálenost jeho podstav. Obě přímky BC' a AB , a tedy i rovina ABC' jsou kolmé na přímkou AC . Je-li P kolmý průmět bodu C' na přímku AB , pak obě přímky AB a AC , a tedy i rovina ABC , jsou kolmé na přímkou $C'P$.

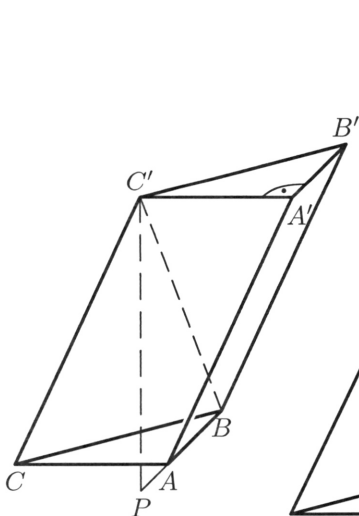
Hledaná vzdálenost v je proto rovna $|C'P|$ a oba úhly CPC' , APC' jsou pravé. Navíc $|\sphericalangle PCC'| = 60^\circ$, takže $v = |CP|\sqrt{3}$. Označme x souřadnici bodu P na přímce AB v soustavě, ve které $A = [0]$ a $B = [-a]$ (tedy $x = \pm|AP|$, kde znaménko $-$, resp. $+$ vezmeme podle toho, zda P padne na polopřímku AB či na polopřímku opačnou.) Pak z trojúhelníku ACP plyne $|CP|^2 = a^2 + x^2$, takže $v^2 = 3(a^2 + x^2)$. Protože $|BC'| = a\sqrt{6}$, má Pythagorova věta pro trojúhelník BPC' tvar $6a^2 = (a+x)^2 + 3(a^2 + x^2)$. Tato rovnice má dva kořeny $x_1 = \frac{1}{2}a$, $x_2 = -a$. Podmínky úlohy proto splňují dva hranoly (obr. 21 a obr. 22) o výškách

$$v_1 = \sqrt{3\left(a^2 + \frac{a^2}{4}\right)} = \frac{a\sqrt{15}}{2},$$

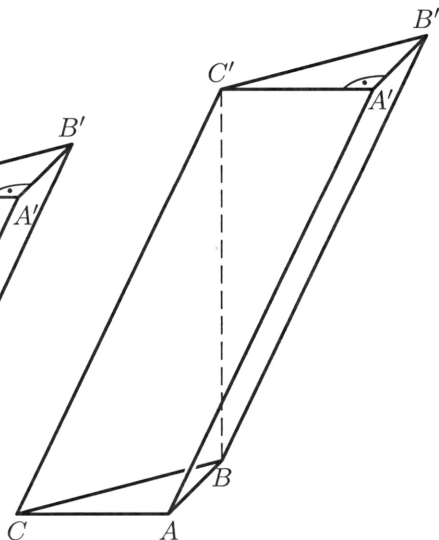
respektive

$$v_2 = \sqrt{3(a^2 + a^2)} = a\sqrt{6}.$$

Jejich objemy jsou $V_1 = \frac{1}{4}a^3\sqrt{15}$, respektive $V_2 = \frac{1}{2}a^3\sqrt{6}$.



Obr. 21

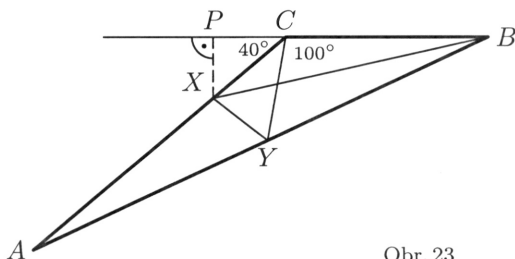


Obr. 22

A – I – 3

Nechť P značí kolmý průmět bodu X na přímku BC (obr. 23). Protože platí $|\sphericalangle XCY| = 40^\circ = |\sphericalangle XCP|$, leží bod X nejen na ose úhlu ABC , ale

také na ose úhlu YCP . Proto má bod X stejnou vzdálenost od tří přímk AB , BC a CY , takže leží i na ose úhlu AYC , tj. $|\sphericalangle AYX| = \frac{1}{2}|\sphericalangle AYC|$. Označíme-li $\beta = |\sphericalangle ABC|$, pak $|\sphericalangle CYB| = 80^\circ - \beta$, $|\sphericalangle AYC| = 100^\circ + \beta$ a $|\sphericalangle AYX| = 50^\circ + \frac{1}{2}\beta$, tedy $|\sphericalangle XYB| = 130^\circ - \frac{1}{2}\beta$. Z trojúhelníku XYB konečně plyne, že $|\sphericalangle YXB| = 180^\circ - (130^\circ - \frac{1}{2}\beta) - \frac{1}{2}\beta = 50^\circ$.



Obr. 23

A - I - 4

Umocněním na třetí dostaneme ekvivalentní rovnost

$$n = (p^3 + 2q^3) + 3p^2q\sqrt[3]{2} + 3pq^2\sqrt[3]{4}. \quad (1)$$

Zabývejme se nejdříve případem $n = 4$. Je-li $\sqrt[3]{4} = p + q\sqrt[3]{2}$, pak z (1) plyne

$$4 = (p^3 + 2q^3) + 3p^2q\sqrt[3]{2} + 3pq^2(p + q\sqrt[3]{2}) \quad (2)$$

neboli $4 - p^3 - 2q^3 - 3p^2q^{\frac{1}{3}} - 3pq^2(p + q^{\frac{1}{3}}) = 0$. Protože $\sqrt[3]{2}$ je iracionální číslo, je poslední rovnost možná, jen když $4 - p^3 - 2q^3 - 3p^2q^{\frac{1}{3}} = 0$ a $3pq(p + q^{\frac{1}{3}}) = 0$. Z druhé rovnice plyne $p = 0$, $q = 0$ nebo $p = -q^2$, dosazením do první pak po řadě $q^3 = 2$, $p^3 = 4$, resp. $q^6 + q^3 - 2 = 0$. Protože čísla p a q jsou racionální, je z poslední trojice splnitelná jen třetí podmínka, která znamená, že $q^3 = -2$, nebo $q^3 = 1$. Dostáváme tak jedinou dvojici $(p, q) = (-1, 1)$, pro kterou sice platí (2), ne však $\sqrt[3]{4} = p + q\sqrt[3]{2}$. Proto poslední rovnost nesplňují žádná racionální p a q .

V obecném případě ukážeme, že platí-li (1) pro některá racionální n , p a q , pak koeficient $3pq^2$ u členu $\sqrt[3]{4}$ musí být roven nule. Jinak by totiž šlo z (1) vyjádřit

$$\sqrt[3]{4} = \frac{n - p^3 - 2q^3}{3pq^2} - \frac{p}{q} \cdot \sqrt[3]{2},$$

což by byl spor s tím, že číslo 4 není řešením. Proto platí $3pq^2 = 0$, tj. $p = 0$ nebo $q = 0$. Pak ovšem $n = p^3$ nebo $n = 2q^3$. Je-li navíc číslo n celé, musí být v posledních dvou rovnostech i čísla p , q celá.

Odpoověď: $n = k^3$ nebo $n = 2k^3$, kde $k > 1$ je celé číslo.

A – I – 5

Dosadíme-li do (1) $a = b = 1$, dostaneme nutnou podmínku na číslo p : $p \geq 2 - \sqrt{2}$ (> 0). Ukažme, že pro $p = 2 - \sqrt{2}$ nerovnost (1) platí. Pro $p > 0$ lze nerovnost $a + b \leq p \cdot \sqrt{ab} + \sqrt{a^2 + b^2}$ ekvivalentně umocnit na druhou, po úpravě dostaneme $(2 - p^2)ab \leq 2p\sqrt{ab(a^2 + b^2)}$. Dosadíme-li sem $p = 2 - \sqrt{2}$, dostaneme (po dělení dvěma) nerovnost $2(\sqrt{2} - 1)ab \leq (2 - \sqrt{2})\sqrt{ab(a^2 + b^2)}$. Protože $2 - \sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)$, je možné poslední nerovnost po dělení kladným výrazem $(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2ab}$ zjednodušit na $\sqrt{2ab} \leq \sqrt{a^2 + b^2}$. Tato nerovnost platí pro libovolná kladná a, b , neboť je ekvivalentní s $2ab \leq a^2 + b^2$ neboli $0 \leq (a - b)^2$. Hledané nejmenší p je tedy rovno $2 - \sqrt{2}$.

A – I – 6

Ciferný součet $S(n)$ každého čísla n dává při dělení devíti týž zbytek jako samo číslo n . Protože číslo n^2 je tvaru $9k$ nebo $3k + 1$ (podle toho, zda $3 \mid n$, či nikoliv), leží každé číslo $S(n^2)$ v množině $\{9, 18, 27, \dots\} \cup \{1, 4, 7, 10, \dots\}$. Nyní je třeba zjistit, pro která k mají rovnice $S(n^2) = 9k$, resp. $S(n^2) = 3k + 1$ aspoň jedno řešení n . Ukážeme, že je tomu tak pro každé k . Předně $S(1^2) = 1$. Dále pozorujeme příklady

$$3^2 = 9, \quad 33^2 = 1089, \quad 333^2 = 110889, \quad 3333^2 = 11108889, \quad \dots$$

$$2^2 = 4, \quad 32^2 = 1024, \quad 332^2 = 110224, \quad 3332^2 = 11102224, \quad \dots$$

Označme e_k číslo zapsané k jedničkami a vyslovme hypotézu, že $S(n^2) = 9k$ pro $n = 3e_k$ a $S(n^2) = 3k + 1$ pro $n = 3e_k - 1$. K jejímu důkazu stačí ověřit rovnosti

$$\begin{aligned} (3e_k)^2 &= \underbrace{11 \dots 1}_{k-1} \underbrace{088 \dots 8}_{k-1} 9 = 10^{k+1}e_{k-1} + 80e_{k-1} + 9, \\ (3e_k - 1)^2 &= \underbrace{11 \dots 1}_{k-1} \underbrace{022 \dots 2}_{k-1} 4 = 10^{k+1}e_{k-1} + 20e_{k-1} + 4. \end{aligned} \tag{1}$$

I když rovnosti (1) je možné ověřit dosazením formulí $e_m = \frac{1}{9}(10^m - 1)$ pro $m = k$ a $m = k - 1$, je možný i jiný postup: Protože $9e_k = 10^k - 1$, platí $9e_k^2 = (10^k - 1)e_k$, a tedy

$$\begin{aligned} (3e_k)^2 &= 10^k e_k - e_k, \\ (3e_k - 1)^2 &= 9e_k^2 - 6e_k + 1 = 10^k e_k - 7e_k + 1. \end{aligned} \tag{2}$$

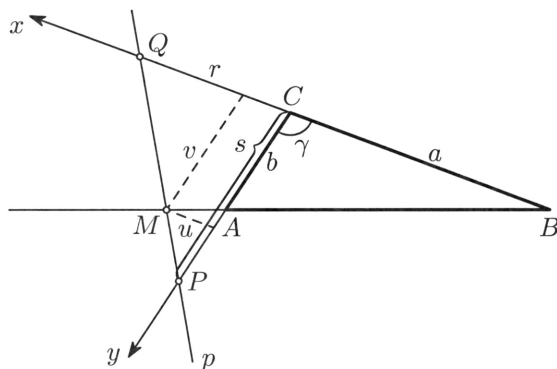
Odtud již plyne konstrukce. Protože přímka BP je obrazem přímky AQ ve stejnolehlosti o středu M a koeficientu $|MB|/|MA|$ a bod Q leží na přímce BC , leží bod P na obraze přímky BC v této stejnolehlosti. Vlastní konstrukci můžeme provést např. tak, že bodem B vedeme přímku q rovnoběžnou s AC , její průsečík s přímkou MC označíme D . Bodem D poté vedeme přímku r rovnoběžnou s BC a její průsečík s přímkou AC označíme P . Z podobnosti trojúhelníků MAC , MBD plyne $|MA|/|MB| = |MC|/|MD|$ a z podobnosti trojúhelníků MCQ , MDP plyne $|MC|/|MD| = |MQ|/|MP|$, odkud již porovnáním vyplývá $|MA|/|MB| = |MQ|/|MP|$, a tedy $AQ \parallel PB$. Za uvedeného předpokladu má úloha vždy jediné řešení.

Přejdeme nyní k obtížnějšímu řešení obecné situace, zmíněné v úvodní poznámce pod čarou. Příklad, kdy hledaná přímka p protíná prodloužení strany AC za vrchol C jsme již úplně vyřešili. Kdyby proťala samotnou stranu AC , byl by trojúhelník PQC částí trojúhelníku ABC , tudíž by měl menší obsah. Budeme se proto v dalším zabývat zbylou možností, kdy přímka p protíná prodloužení strany AC za vrchol A . Označme obvyklým způsobem a , b délky stran trojúhelníku ABC a γ velikost úhlu při vrcholu C . Poloha přímky p pak bude určena délkami $r = |CQ|$ a $s = |CP| > b$ (obr. 25) a rovnost obsahů trojúhelníků ABC a PQC zapíšeme vztahem

$$\frac{1}{2}rs \sin(180^\circ - \gamma) = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

neboli

$$rs = ab. \quad (1)$$



Obr. 25

Budeme nyní počítat v kosoúhlé souřadnicové soustavě s počátkem v bodě C a osami CQ , CP (již vyznačenými na obr. 25), ve které známe body $A[0, b]$, $B[-a, 0]$ a $M[u, v]$ s kladnými parametry a, b, u, v , zatímco body $P[0, s]$ a $Q[r, 0]$ hledáme. K výpočtu neznámých r a s (připomeňme, že $r > 0$ a $s > b$) kromě rovnice (1) ještě využijeme rovnici

$$\frac{u}{r} + \frac{v}{s} = 1,$$

která vyjadřuje, že bod M leží na přímce PQ . Po jejím vynásobení hodnotou rs dostaneme s ohledem na (1) rovnici

$$vr + us = ab. \quad (2)$$

Před vlastním řešením soustavy rovnic (1) a (2) poznamenejme, že každé její řešení (r, s) s vlastností $r > 0$ a $s > b$ zřejmě odpovídá některé přímce PQ , jež je řešením původní úlohy a má polohu jako na obr. 25.

Rozšíříme-li rovnici (1) činitelem uv , můžeme vzhledem ke (2) pro násobky vr , us neznámých r, s rovnou napsat kvadratickou rovnici

$$z^2 - abz + uvab = 0 \quad (3)$$

s diskriminantem $D = ab(ab - 4uv)$. Z jejích dvou kořenů tak dostáváme následující řešení soustavy rovnic (1) a (2):

$$r = \frac{ab \pm \sqrt{D}}{2v}, \quad s = \frac{ab \mp \sqrt{D}}{2u}, \quad (4)$$

přitom v obou vzorcích je třeba brát současně buď horní, nebo dolní znaménko. Je nabíledni, že výsledné hodnoty r, s lze ze zadaných hodnot a, b, u, v podle vzorců (4) pomocí pravítka a kružítka sestrojiti.

Ještě ukážeme, že vyhovující přímka p v poloze z obr. 25 existuje, právě když (kladné) souřadnice u, v zadaného bodu M splňují podmínku

$$uv \leq \frac{1}{4}ab, \quad (5)$$

přitom v případě rovnosti je taková přímka p jediná, zatímco v případě nerovnosti jsou takové přímky (právě) dvě.

Podmínka (5) je zřejmě ekvivalentní s nerovností $D \geq 0$, navíc je $D < a^2b^2$, takže obě hodnoty ve (4) jsou vždy kladné. Zbývá proto už jen zjistit, kolik dvojic (r, s) určených vzorci (4) splňuje i podmínku $s > b$.

Pro nezáporný diskriminant $D = ab(ab - 4uv)$ ovšem podle nerovnosti mezi geometrickým a aritmetickým průměrem platí $\sqrt{D} \leq ab - 2uv$, proto pro menší z obou možných hodnot s máme $s = (ab - \sqrt{D})/2u \geq v > b$, neboť bod M dle zadání leží na polopřímce opačné k polopřímce AB . Tím je výše uvedené tvrzení o existenci a počtu vyhovujících přímk p z obr. 25 dokázáno.

Poznámka. Všimněme si, že bod M leží na přímce AB , takže jeho souřadnice splňují rovnici

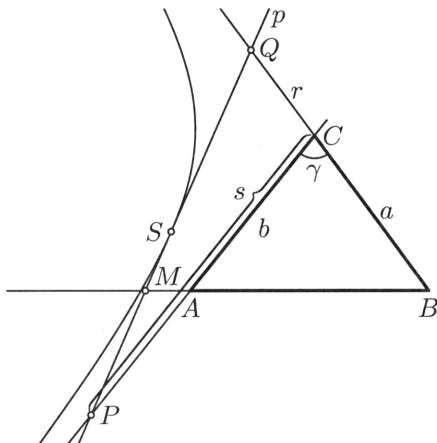
$$-\frac{u}{a} + \frac{v}{b} = 1 \quad \text{neboli} \quad \frac{u}{a} = \frac{v}{b} - 1.$$

S využitím hraniční podmínky (5) tak pro poměr $\lambda = |AM|/|AB|$ odtud dostáváme

$$\lambda^2 = \frac{u}{a} \left(\frac{v}{b} - 1 \right) = \frac{uv}{ab} - \frac{u}{a} = \frac{1}{4} - \lambda,$$

což vede na kvadratickou rovnici $\lambda^2 + \lambda - \frac{1}{4} = 0$, jež má jediný kladný kořen $\lambda = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$. Odtud plyne, že další řešení existuje, právě když $|AM| \leq \lambda|AB|$. Existence dalších řešení tedy vůbec nezávisí na poloze vrcholu C , tudíž ani na délkách a, b , které v podmínce (5) vystupují.

Jiný přístup. Rovnost (1) napovídá, že střed S hledané úsečky PQ bude ležet na jisté hyperbole. Označíme-li totiž $(x, y) = (\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}s)$ souřadnice bodu S v kosoúhlé souřadnicové soustavě, zavedené v předchozí části, bude platit $xy = \frac{1}{4}ab$ (obr. 26).



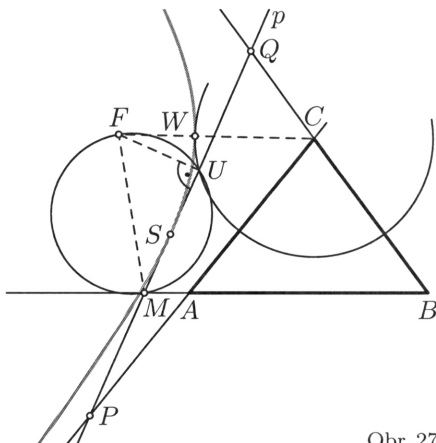
Obr. 26

Ukážeme ještě, že přímka PQ musí být tečnou nalezené hyperboly. Souřadnice obecného bodu přímky PQ mají totiž vyjádření $x = tr$ a $y = (1 - t)s$, kde t je reálný parametr; protože pro každé t platí $t(1 - t) \leq \frac{1}{4}$ s rovností jedině pro $t = \frac{1}{2}$, pro součin souřadnic obecného bodu přímky PQ dostáváme díky (1) odhad

$$xy = t(1 - t)rs \leq \frac{1}{4}rs = \frac{1}{4}ab,$$

přičemž rovnost $xy = \frac{1}{4}ab$ nastane pouze pro hodnotu $t = \frac{1}{2}$, které odpovídá střed S úsečky PQ . Ten je proto jediným společným bodem dané hyperboly s přímkou PQ , která je tudíž skutečně její tečnou.

Převodli jsme tak tuto část úlohy na sestrojení tečny k větvi hyperboly $xy = \frac{1}{4}ab$ daným bodem $M[u, v]$ (ten samozřejmě musí ležet v její vnější oblasti, takže jeho souřadnice musejí splňovat nerovnost (5)). Vrchol W i ohnisko F leží na ose vnějšího úhlu při vrcholu C daného trojúhelníku a pro souřadnice vrcholu $W[w, w]$ uvedené větve hyperboly pak platí $w = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$, pročez $|FC| = 2w = \sqrt{ab}$. Tím známe vše potřebné ke standardní konstrukci tečny z daného bodu M k hyperbole. Pata U kolmice z ohniska F na hledanou tečnu p totiž leží na Thaletově kružnici nad průměrem MF a zároveň (jak je z teorie kuželoseček známo) na vrcholové kružnici $k(C, |CW|)$ (obr. 27).



Obr. 27

Dospěli jsme tak k nové konstrukci řešení z druhé části úlohy bez užití vzorců (4). Vidíme přitom, že takové řešení je právě jedno, pokud daný bod M leží v průsečíku uvedené hyperboly s přímkou AB , anebo jsou dvě, leží-li bod M mezi zmíněným průsečíkem a bodem A .

A – S – 3

Tvrzení úlohy dokážeme indukcí podle počtu vyznačených úhlopříček. Není-li vyznačena žádná, barvíme vrcholy $1-2-1-2-\dots-1-2$ pro n sudé a $1-2-1-2-\dots-1-2-3$ pro n liché. Pokud je nakreslena alespoň jedna úhlopříčka, vybereme libovolnou z nich a podle ní rozdělíme daný n -úhelník na dva menší mnohoúhelníky, které mají dohromady vyznačenu o jednu úhlopříčku méně než původní mnohoúhelník. Jejich vrcholy obarvíme podle indukčního předpokladu. Podstatné je, že koncové vrcholy dělicí úhlopříčky dostanou v každém z obou obarvení různé barvy, takže po případné permutaci barev lze tato obarvení sjednotit do obarvení celého n -úhelníku.

Jiné řešení. Tvrzení stačí dokázat pro případ, kdy nakreslené úhlopříčky dělí vnitřek n -úhelníku na trojúhelníky (takový n -úhelník se nazývá triangulovaný, každý systém neprotínajících se úhlopříček lze doplnit na triangulaci). Poté dokazujeme opět indukcí. Vybereme vrchol, ze kterého nevychází žádná úhlopříčka (takový musí existovat, jinak by se některé úhlopříčky protínaly). Po odebrání tohoto vrcholu zbývá $(n-1)$ -úhelník, jehož vrcholy je podle indukčního předpokladu možno obarvit třemi barvami. Odebraný vrchol má pouze dva sousedy, takže vždy pro něj zbývá alespoň jedna volná barva, kterou jej obarvíme.

A – II – 1

Podle vzorce odvozeného v řešení úlohy A–I–1 budeme hledat nejmenší číslo x s prvočíselným rozkladem

$$x = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_N^{a_N},$$

které splňuje podmínku

$$\prod_{k=1}^N \left(1 + \left\lfloor \frac{a_k}{2} \right\rfloor\right) - \prod_{k=1}^N \left(1 + \left\lfloor \frac{a_k}{3} \right\rfloor\right) = 5. \quad (1)$$

Jistě můžeme předpokládat, že $a_k \geq 2$ pro každé k ; v případě $a_k = 1$ bychom totiž mohli činitel $p_k^{a_k}$ v rozkladu čísla x vynechat, aniž bychom narušili podmínku (1). Dále rozlišíme případy $N = 1$, $N = 2$ a $N \geq 3$.

V případě $N = 1$ má (1) tvar (pro jednoduchost píšme a místo a_1)

$$\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor = 5. \quad (2)$$

Je-li $a = 6r + s$, kde $r \geq 0$ a $0 \leq s \leq 5$ jsou celá čísla, pak

$$\left[\frac{a}{2}\right] - \left[\frac{a}{3}\right] = r + \left[\frac{s}{2}\right] - \left[\frac{s}{3}\right] \leq r + 1.$$

Proto z (2) plyne $r \geq 4$, tj. $a \geq 24$. Nyní už rychle najdeme nejmenší řešení rovnice (2) $a = 26$. V případě $N = 1$ je tedy nejmenší x rovno 2^{26} .

V případě $N = 2$ vypíšeme několik nejmenších čísel x a u každého v závorce připojíme počet jeho dvojnásobných dělitelů:

$$\begin{aligned} 2^2 3^2 (3), \quad 2^2 3^3 (2), \quad 2^2 3^4 (4), \quad 2^2 3^5 > 2^3 3^4, \\ 2^3 3^2 (2), \quad 2^3 3^3 (0), \quad 2^3 3^4 > 2^6 3^2, \\ 2^4 3^2 (4), \quad 2^4 3^3 (2), \quad 2^4 3^4 > 2^3 3^4, \\ 2^5 3^2 (4), \quad 2^5 3^3 > 2^3 3^4, \\ 2^6 3^2 = 576 (5). \end{aligned}$$

Každé další x je alespoň $2^7 3^2$ nebo $2^3 3^4$, tedy větší než 576.

V případě $N \geq 3$ je každé x alespoň $2^3 3^2 5^2 = 900$, tedy číslo větší než 576.

Shrňme naše úvahy: protože platí $2^{26} > 576$, je hledané nejmenší x rovno 576. (Jeho dvojnásobní dělitelé jsou právě čísla 3, 6, 8, 12 a 24.)

A – II – 2

Označme $a = |BC|$, $b = |AC|$ a $c = |AB|$. Protože osa úhlu dělí protější stranu v poměru velikostí přilehlých stran, je

$$\begin{aligned} |AE| &= \frac{bc}{a+b}, & |BE| &= \frac{ac}{a+b}, \\ |AD| &= \frac{bc}{a+c}, & |CD| &= \frac{ab}{a+c} \end{aligned}$$

a rovnost $|BE| = |CD|$ je ekvivalentní s rovností

$$\frac{ab}{a+c} = \frac{ac}{a+b},$$

kteřou lze upravit na tvar

$$a(a+b+c)(b-c) = 0.$$

Protože $a(a + b + c) > 0$, je $|BE| = |CD|$, právě když $b = c$, to jest právě když je trojúhelník ABC rovnoramenný se základnou BC . Úhel při vrcholu B má tedy jednoznačně určenou velikost 40° .

Jiné řešení. Označme $|BE| = |CD| = s$, a protože BD a CE jsou osy příslušných vnitřních úhlů, platí

$$\begin{aligned}\frac{s}{|AD|} &= \frac{|BC|}{|AB|}, & \frac{s}{|AE|} &= \frac{|BC|}{|AC|}, \\ s &= \frac{|AD||BC|}{|AB|} = \frac{|AE||BC|}{|AC|}, \\ \frac{|AC|}{|AB|} &= \frac{|AE|}{|AD|}.\end{aligned}$$

Odtud ovšem plyne, že je $|AC| > |AB|$, právě když $|AE| > |AD|$, a tudíž i $|AB| - s = |AE| > |AD| = |AC| - s$ neboli $|AB| > |AC|$. Vzhledem k tomuto sporu nemůže platit ani nerovnost $|AC| > |AB|$, ani nerovnost obrácená, musí proto být $|AC| = |AB|$, trojúhelník ABC je rovnoramenný a snadno dopočteme, že úhel při vrcholu B má velikost 40° .

A – II – 3

Označme M množinu všech červených bodů a $D = \{(x, i) : x \in M \wedge x \in p_i\}$ a počítejme prvky množiny D dvěma způsoby: každý bod z množiny M leží na třech přímkách, takže $|D| = 3|M|$, pro každou přímkou p_i je v D právě a_i dvojic neboli $|D| = \sum_{i=1}^n a_i$. Odtud plyne

$$(i) \sum_{i=1}^n a_i \equiv 0 \pmod{3},$$

$$(ii) |M| = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n a_i.$$

Pokud by existovaly čtyři přímky podle zadání a), byl by podle (ii) celkový počet červených bodů roven dvěma a dvě z přímek by procházely stejnými dvěma body, byly by tedy totožné. To je ve sporu se zadáním a odpověď v případě a) je NE.

Případ ze zadání b) je realizován např. stranami a těžnicemi trojúhelníku, též stranami a úhlopříčkami čtverce. Odpověď je v tomto případě ANO.

Případ ze zadání c) je realizován např. stranami pravidelného šestiúhelníku a úhlopříčkami protínajícími jeho střed. Odpověď je opět ANO.

V případě d) je odpověď NE, protože součet $\sum_{i=1}^9 a_i = 20$ není dělitelný třemi (viz (i)).

A – II – 4

Postupně spočteme

$$x_0^2 = 5 + 4\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}, \quad x_0^3 = 19 + 15\sqrt[3]{2} + 12\sqrt[3]{4}.$$

Dosazením do dané rovnice tak po úpravě dostaneme podmínku

$$(19 + 5p + q + r) + (15 + 4p + q)\sqrt[3]{2} + (12 + 3p + q)\sqrt[3]{4} = 0,$$

kteřá je splněna, pokud jsou rovna nule všechna tři čísla $19 + 5p + q + r$, $15 + 4p + q$ a $12 + 3p + q$. (Podle úlohy A–I–4 je to nejen postačující, ale i nutná podmínka.) Snadným výpočtem zjistíme jedinou trojici $(p, q, r) = (-3, -3, -1)$. Zbývá dokázat, že rovnice

$$x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$$

má jediný reálný kořen. To lze provést více způsoby (asi nepřiliš schůdné by bylo dělení kořenovým dvojčlenem $x - x_0$), například takto: protože $3x^2 + 3x + 1 > 0$ pro každé reálné x , je každý kořen rovnice $x^3 = 3x^2 + 3x + 1$ kladný; ze zápisu

$$1 = \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}$$

plyne, že tento kořen je nejvýše jeden (pravá strana je totiž pro kladná x klesající).

Jiné řešení. Platí

$$x_0 = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} = \frac{1^3 - (\sqrt[3]{2})^3}{1 - \sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1},$$

takže $\frac{1}{x_0} = \sqrt[3]{2} - 1$. Proto je x_0 řešením rovnice

$$\left(\frac{1}{x} + 1\right)^3 = 2,$$

přičemž je jasné, že tato rovnice má v oboru reálných čísel *jediný* kořen. Pro $x \neq 0$ je ovšem tato rovnice ekvivalentní s $(1 + x)^3 = 2x^3$, což je po roznásobení hledaná rovnice.

A – III – 1

Označme $d(x) = f(x+1) - f(x)$. Podle zadání úlohy je funkce $d: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ nerostoucí. Funkce d je ale také nezáporná: Kdyby totiž pro některé k bylo $d(k) \leq -1$, byla by f ostře klesající pro $x \geq k$, a bylo by

$$\begin{aligned} f(k + f(k) + 1) &= f(k) + \sum_{i=0}^{f(k)} d(k+i) \leq \\ &\leq f(k) + d(k)(f(k) + 1) \leq f(k) - (f(k) + 1) = -1 < 0. \end{aligned}$$

Je tedy $d(1) \geq d(2) \geq \dots \geq 0$ a existuje $c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $x \geq n_0$ je $d(x) = c$ neboli $f(x) = f(n_0) + c(x - n_0)$. Pak ale všechny body $[x, f(x)]$, $x \geq n_0$, leží v jedné přímce.

A – III – 2

Označme vrcholy jedné podstavy kváдру A, B, C, D a vrcholy ve druhé podstavě E, F, G, H (tak, že AE, BF, CG, DH tvoří hrany). Průnik mnohostěnu M s každou hranou kváдру musí být neprázdný. Vyberme tedy na každé hraně kváдру jeden bod patřící mnohostěnu M a označme M' konvexní obal těchto 12 (ne nutně různých) bodů. Mnohostěn M' vznikne z kváдру odříznutím osmi rohových čtyřstěnů, jejichž objemy odhadneme po seskupení do dvojic podle hran AE, BF, CG, DH .

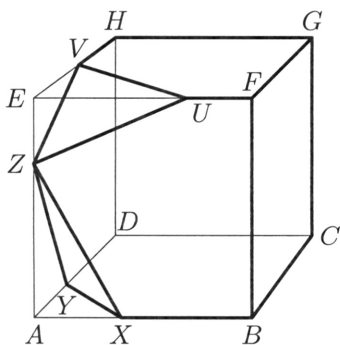
Nechť X, Y, Z, U, V jsou po řadě vrcholy mnohostěnu M' ležící na hranách AB, AD, AE, EF, EH (obr. 28). Označme $x = |AX|$, $y = |AY|$, $z = |AZ|$, $u = |EU|$, $v = |EV|$, $w = |EZ|$ a $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |AE|$. Přitom $x, u \leq a$, $y, v \leq b$ a $z + w = c$. Potom dostáváme

$$\begin{aligned} V(AXYZ) + V(EUVZ) &= \frac{1}{6}(xyz + uvw) \leq \\ &\leq \frac{1}{6}(abz + abw) = \frac{1}{6}ab(z + w) = \frac{1}{6}abc = \frac{1}{6}V. \end{aligned}$$

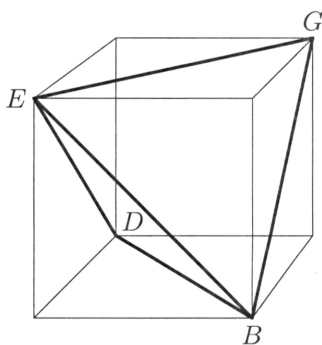
Protože M' vznikl odříznutím čtyř takovýchto dvojic rohových čtyřstěnů, je

$$V(M) \geq V(M') \geq V - \frac{4}{6}V = \frac{1}{3}V.$$

Hodnoty $\frac{1}{3}V$ nabývá např. objem čtyřstěnu $BDEG$ (obr. 29). Tudíž $V_{\min} = \frac{1}{3}V$.



Obr. 28



Obr. 29

A – III – 3

Dokážeme následující tvrzení: *Nechť v $2n$ -úhelníku je vyznačeno n úhlopříček tak, že z každého vrcholu vychází právě jedna. Potom počet úhlopříček sudé délky je sudý.*

DŮKAZ: Obarvěme vrcholy $2n$ -úhelníku střídavě bíle a černě, máme tedy n bílých a n černých vrcholů, každá strana $2n$ -úhelníku spojuje jeden bílý a jeden černý vrchol. Úhlopříčky sudé délky spojují vrcholy stejné barvy, úhlopříčky liché délky spojují vrcholy různých barev. Přitom bílo-bílých úhlopříček je stejně jako černo-černých (po odstranění vrcholů spojených bílo-černými úhlopříčkami zůstane stejný počet černých i bílých bodů). Jednobarevných úhlopříček je tedy sudý počet.

JINÝ DŮKAZ. Označme úhlopříčky $u_1, u_2, \dots, u_n$. Protože nám jde o kombinatorické vlastnosti, můžeme předpokládat, že žádné tři úhlopříčky neprocházejí jedním bodem. Označme ještě a_i počet úhlopříček, které protínají úhlopříčku u_i , a počítejme celkový počet P průsečíků vyznačených úhlopříček. Z počítání dvěma způsoby plyne $2P = \sum_{i=1}^n a_i$ a nutně počet úhlopříček s lichým a_i je sudý. Přitom úhlopříčka u_i délky d_i odřezává $d_i - 1$ vrcholů, z nichž vychází celkem $d_i - 1$ úhlopříček. Ty z nich, které neprotínají u_i , využijí každá právě dva z $d_i - 1$ vrcholů. Je tedy $a_i \equiv d_i - 1 \pmod{2}$, tj. a_i je liché, právě když d_i je sudé.

V případě b) se požaduje 985 úhlopříček délky 6 a čtyři úhlopříčky délky 8, to je celkem 989 úhlopříček sudé délky, a proto je v tomto případě odpověď NE.

Pro případ a) je odpověď ANO. Označme vrcholy 1994-úhelníku po řadě $X_1, X_2, \dots, X_{1994}$ a vyznačme úhlopříčky:

X_1X_3, X_2X_5, X_4X_6 (jedna délky 3 a dvě délky 2);
 $X_7X_9, X_8X_{10}, X_{11}X_{13}, X_{12}X_{14}$ (čtyři úhlopříčky délky 2);
 $X_{9+6i}X_{12+6i}, X_{10+6i}X_{13+6i}, X_{11+6i}X_{14+6i}, i = 1, 2, \dots, 330$ (990 úhlo-
příček délky 3).

A – III – 4

Nechť $n = p$ je prvočíslo. Z čísel $a_p - 1, a_p - 2, \dots, a_p - p^2$ je právě p dělitelných číslem p . Z toho pro $p - 1$ čísel je p^1 nejvyšší mocnina p , která je dělí. Právě jedno z čísel $a_p - 1, a_p - 2, \dots, a_p - p^2$ je dělitelné p^2 , ovšem toto číslo (označme je např. $a_p - i, a_p - i > 0$) může být dělitelné i vyšší mocninou p . Nechť x je takové přirozené číslo, že $p^x \mid a_p - i$ a $p^{x+1} \nmid a_p - i$. Nejvyšší mocninou p , která dělí součin $(a_p - 1)(a_p - 2) \dots (a_p - p^2)$, je tedy p^{x+p-1} .

Protože podle zadání je číslo $(a_p - 1)(a_p - 2) \dots (a_p - p^2)/p^{p^2-1}$ celé a kladné, je nutně $p^2 - 1 \leq x + p - 1$, a tedy $x \geq p^2 - p$. Je tedy též $a_p > a_p - i \geq p^x \geq p^{p^2-p}$. Proto pro každé prvočíslo p je $\log_p a_p > p^2 - p$.

Pro konečnou množinu prvočísel P označme k její největší prvek. Po-
tom máme

$$\begin{aligned} \sum_{p \in P} \frac{1}{\log_p a_p} &< \sum_{p \in P} \frac{1}{p^2 - p} \leq \\ &\leq \sum_{i=2}^k \frac{1}{i^2 - i} = \sum_{i=2}^k \frac{1}{i(i-1)} = \sum_{i=2}^k \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i} \right) = 1 - \frac{1}{k} < 1. \end{aligned}$$

A – III – 5

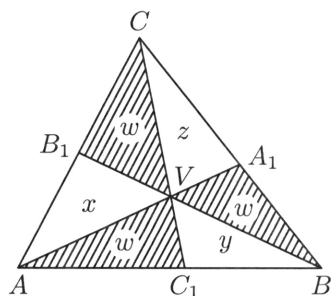
Ano. Platí totiž toto tvrzení: *Jestliže se příčky AA_1, BB_1, CC_1 protínají v bodě V a trojúhelníky AC_1V, BA_1V, CB_1V mají stejný obsah, je V těžiště trojúhelníku ABC .* A trojúhelník, jehož těžnice splývá s výškou, je zřejmě rovnoramenný. Trojúhelník ABC , jehož dvě těžnice jsou zároveň výškami, je tudíž rovnostranný.

K důkazu uvedeného tvrzení označme po řadě w, x, y, z obsahy trojúhelníků VBA_1, VAB_1, VBC_1 a VCA_1 (obr. 30). Platí

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{w}{y} = \frac{2w + z}{w + y + z},$$

odkud po úpravě získáme rovnost

$$w(w + z) = y(w + x).$$



Obr. 30

Podobně platí (stačí použít cyklickou záměnu $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$)

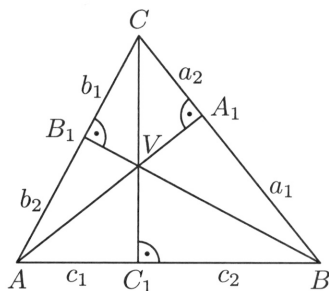
$$w(w+x) = z(w+y) \quad \text{a} \quad w(w+y) = x(w+z).$$

Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $x \geq y, x \geq z$. Protože $w+z \leq w+y$, z první rovnosti $w(w+z) = y(w+x)$ plyne $w \geq y$. Podobně z druhé rovnosti $w(w+x) = z(w+y)$ plyne $w \leq z$. Dohromady tak máme $y \leq w \leq z \leq x$, takže z třetí rovnosti $w(w+y) = x(w+z)$ plyne $w \geq x$, a je tedy $x = y = z = w$. V tom případě jsou ale body A_1, B_1, C_1 středy stran trojúhelníku ABC a V je jeho těžiště.

Jiné řešení. (Podle *Karla Švadlenky*, G České Budějovice, Jírovceva.) Označme jednotlivé úseky podle obr. 31. Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků $AVB_1 \sim BVA_1, BVC_1 \sim CVB_1, CVA_1 \sim AVC_1$ máme

$$\frac{|VA_1|}{a_1} = \frac{|VB_1|}{b_2}, \quad \frac{|VB_1|}{b_1} = \frac{|VC_1|}{c_2}, \quad \frac{|VC_1|}{c_1} = \frac{|VA_1|}{a_2}. \quad (1)$$

Z předpokládané rovnosti obsahů $S(B_1VC) = S(C_1VA) = S(A_1VB)$



Obr. 31

plyne

$$|VB_1| \cdot b_1 = |VC_1| \cdot c_1 = |VA_1| \cdot a_1,$$

což ve spojení s (1) postupně dává $a_1^2 = b_1 b_2$, $b_1^2 = c_1 c_2$, $c_1^2 = a_1 a_2$, a tudíž

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2. \quad (2)$$

Konečně sečtením tří Pythagorových rovností $|VA_1|^2 + a_1^2 = |VC_1|^2 + c_2^2$, $|VB_1|^2 + b_1^2 = |VA_1|^2 + a_2^2$, $|VC_1|^2 + c_1^2 = |VB_1|^2 + b_2^2$ pro dvojice pravoúhlých trojúhelníků se společnými přeponami VB , VC a VA dostaneme

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2. \quad (3)$$

Vtipnou kombinací obou rovností (2) a (3) získáváme rovnost

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 2a_1 a_2 + 2b_1 b_2 + 2c_1 c_2,$$

jež je ekvivalentní rovností $(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2 = 0$. A ta platí, právě když $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$. Všechny výšky tedy půlí protější stranu, což je možné jen v rovnostranném trojúhelníku.

A – III – 6

Každé číslo z intervalu $(0, 1)$ je tvaru $\cos \alpha$, kde $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$. Proto z každé čtveřice takových různých čísel můžeme vybrat $a = \cos \alpha$ a $b = \cos \beta$ tak, aby bylo $0 < |\alpha - \beta| < \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{6}\pi$. Nerovnost $\cos(\alpha - \beta) > \frac{1}{2}\sqrt{3}$ můžeme přepsat do tvaru

$$ab + \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)} > \frac{\sqrt{3}}{2},$$

odkud po umocnění na druhou a úpravě dostaneme

$$2ab\sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)} > a^2 + b^2 - 2a^2 b^2 - \frac{1}{4},$$

odkud po dělení číslem $2ab$ vyjde dokazovaná nerovnost.

Kategorie P

Texty úloh

P – I – 1

Souvislý úsek v posloupnosti celých čísel nazveme hladkým úsekem, jestliže se libovolná dvojice čísel, která do něj patří, liší nejvýše o 1.

Je dáno celé číslo N ($N \geq 1$) a posloupnost N celých čísel. Napište program, který určí délku maximálního hladkého úseku v dané posloupnosti čísel. Počet čísel N není předem shora omezen a může být velmi vysoký. Při návrhu programu se zaměřte na dosažení co největší rychlosti výpočtu.

Příklad. Pro $N = 10$ a posloupnost čísel 2 1 2 3 3 4 3 4 6 4 bude výsledkem číslo 5, neboť nejdelší hladký úsek 3 3 4 3 4 je tvořen pěti čísly (další hladké úseky, např. 2 1 2 nebo 2 3 3, jsou kratší).

P – I – 2

V zemi je N měst označených čísly od 1 do N . Mezi městy je vybudována silniční síť. Každá silnice spojuje vždy dvojici měst a je známa její délka v kilometrech. Všechny silnice jsou obousměrné. Mezi některými dvojicemi měst přímá silnice nevede, ale z každého města je možné dojet po silnicích do libovolného jiného města (třeba i více různými způsoby). Všechna případná křížení silnic mimo města jsou mimoúrovňová (pomocí mostů) a neumožňují vozidlům přejet z jedné silnice na druhou.

Při velké sněhové bouři byly všechny silnice zaváty sněhem. Napište program, který určí minimální celkovou délku silnic, z nichž je třeba odklidit sníh, aby byla všechna města v zemi navzájem pospojována sjízdnými silnicemi.

Vstupem programu je počet měst N a dále seznam všech silnic vedoucích mezi městy. Každá silnice je určena trojicí čísel: čísla obou měst silnicí spojených a délka silnice.

P – I – 3

Na hromádce je připraven předem známý počet N zápalek. Dva hráči hrají hru, při které z hromádky střídavě odebírají zápalky. Hráč, který je na řadě, musí v jednom tahu odebrat buď 3, nebo 5 zápalek. Prohrává ten hráč, který nemůže provést svůj tah, neboť na hromádce již zbývá méně než 3 zápalky.

a) Určete, pro jaké hodnoty N má při správné hře zajištěnu výhru ten hráč, který je právě na tahu. Jak musí během hry postupovat, aby této výhry dosáhl? Své tvrzení zdůvodněte.

b) Řešte stejnou úlohu pro případ, že hráč smí v jednom tahu odebrat z hromádky buď 3 nebo 7 zápalek.

P – I – 4

Sekvenční stroj (studijní text)

Konečný sekvenční stroj je speciální výpočetní zařízení. Má řídicí jednotku, čte několik vstupních sledů a vytváří jeden výstupní sled. Počet vstupních sledů k je pro každý sekvenční stroj pevně dán. Sledem zde rozumíme konečnou posloupnost znaků z předem dané konečné množiny (tzv. abecedy). Každý vstupní sled je čten postupně znak po znaku zleva doprava, žádný znak ze vstupního sledu nemůže být přečten vícekrát.

Řídicí jednotka má konečnou paměť; říkáme, že se může nacházet v jednom z konečně mnoha stavů. Programem stroje je sada přechodových pravidel, která každému vnitřnímu stavu a k -tici vstupních znaků (z každého vstupního sledu jeden znak) přiřazují nový vnitřní stav a výstupní znak.

Výpočet stroje probíhá po krocích. Na začátku výpočtu je stroj v počátečním stavu a z každého vstupního sledu bude číst první znak. V jednom kroku stroj přečte z každého vstupního sledu po jednom znaku, podle vhodného přechodového pravidla (tj. podle svého programu) změní svůj vnitřní stav a запиše nejvýše jeden znak na výstup. Výpočet končí v okamžiku, kdy neexistuje přechodové pravidlo, podle něhož by výpočet mohl pokračovat.

Nyní popíšeme sekvenční stroj ještě jednou formálněji. Konečný sekvenční stroj s k vstupy je uspořádaná pětice (V, Y, Q, δ, q_0) , kde V, Y, Q jsou konečné množiny, $q_0 \in Q$ a δ je parciální zobrazení $Q \times (V \cup \varphi)^k \rightarrow Q \times (Y \cup \varphi)$. Slovo parciální znamená, že δ nemusí být definováno pro všechny kombinace stavů a vstupních symbolů (tzn. v ta-

kové situaci není určeno, jak má výpočet pokračovat). Množina V se nazývá vstupní abeceda, Y výstupní abeceda, Q je množina stavů, q_0 je počáteční stav a δ jsou přechodová pravidla. Speciální hodnota φ použitá v definici přechodových pravidel znamená, že v příslušném vstupním sledu už není žádný znak (celý vstupní sled už byl přečten), resp. že se do výstupního sledu v tomto kroku nic nezapiše.

Výpočet stroje začíná ve stavu q_0 a vstupní sledy jsou nastaveny pro čtení prvních znaků. V každém kroku výpočtu stroj přečte po jednom znaku z těch vstupních sledů, které ještě nebyly přečteny do konce, vypíše jeden (případně žádný) znak do vytvářeného výstupního sledu a změní svůj vnitřní stav. Označme q momentální stav stroje a $a_1, a_2, \dots, a_k$ právě čtené znaky ve vstupních sledech (je-li některý vstupní sled již celý přečten, bude čteným znakem φ). V přechodových pravidlech se vyhledá hodnota $\delta(q, a_1, a_2, \dots, a_k) = (q', y)$. Pokud je nalezena, stroj do výstupního sledu zapíše znak y a přejde do stavu q' . Pokud odpovídající přechodové pravidlo neexistuje, výpočet stroje končí.

Pomocí sekvenčních strojů budeme zpracovávat zápisy celých nezáporných čísel. Zápisem celého nezáporného čísla C v binární (dvojkové) poziční soustavě je sled znaků $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ z abecedy $\{0, 1\}$ takový, že platí:

1. buď $n = 0$ (tj. zápis je tvořen jediným znakem), nebo $n > 0$ a přitom $a_n = 1$ (víceznakový zápis začíná vždy znakem 1);
- 2.

$$C = \sum_{j=0}^n a_j 2^j.$$

Jednotlivým znakům zápisu říkáme binární cifry. Takovýto zápis čísla je strojem čten nebo je vytvářen postupně od nejvyšších řádů (a_n) k nejnižším (a_0). Zápisem pozpátku rozumíme zápis cifer v opačném pořadí. Čísla zapsaná pozpátku tedy stroj čte v pořadí od nejnižších řádů (a_0) k nejvyšším (a_n).

Příklad. Sestavte konečný sekvenční stroj s jedním vstupem, který vytiskne S , pokud je dané číslo sudé, a L , pokud je liché. Předpokládejte, že vstupní sled obsahuje jedno číslo zapsané v binární soustavě.

ŘEŠENÍ: Sudost nebo lichost vstupního čísla je dána tím, jaká je jeho poslední cifra. Sekvenční stroj bude proto velmi jednoduchý, postačí pouze tři vnitřní stavy. Pomocí dvou z nich bude rozlišovat, jakou cifru naposledy přečetl, zbývajícím třetím vnitřním stavem bude sloužit k ukončení výpočtu (nebude pro něj definováno žádné přechodové pravidlo). Během

čtení čísla stroj nebude nic zapisovat na výstup. Až po přečtení celého čísla podle svého momentálního vnitřního stavu vypíše výsledek.

Stav stroje po přečtení nuly označíme N , stav po přečtení jedničky pojmenujeme J . Stav sloužící k ukončení výpočtu nazveme K . Počáteční stav bude N , protože nula je také sudé číslo. Program stroje je určen následujícími přechodovými pravidly:

$$\begin{aligned}\delta(N, 0) &= (N, \varphi), & \delta(J, 0) &= (N, \varphi), \\ \delta(N, 1) &= (J, \varphi), & \delta(J, 1) &= (J, \varphi), \\ \delta(N, \varphi) &= (K, S), & \delta(J, \varphi) &= (K, L).\end{aligned}$$

Pro zvýšení přehlednosti zapisujeme přechodová pravidla sekvenčního stroje obvykle do tvaru tabulky. Právě popsanému sekvenčnímu stroji odpovídá tato tabulka přechodových pravidel:

stav	čtený symbol		
	0	1	φ
N	N/φ	J/φ	K/S
J	N/φ	J/φ	K/L
K	—	—	—

Příklad. Sestavte konečný sekvenční stroj se dvěma vstupy, který vytiskne znak P , je-li zápis prvního čísla delší, znak S , jsou-li zápisy obou čísel stejně dlouhé, a znak D , je-li zápis druhého čísla delší.

ŘEŠENÍ: Stroj bude číst souběžně obě vstupní čísla. Nerozlišuje nuly a jedničky na vstupu, pouze sleduje, kdy které číslo skončí. Podle toho vytiskne výsledek a skončí svou práci. Navrhovaný stroj má dva stavy, označíme je C a X . Počátečním stavem stroje bude stav C . V tomto stavu stroj setrvává tak dlouho, dokud některé ze vstupních čísel neskončí. Potom přejde do stavu X , který slouží k ukončení výpočtu.

stav	čtené symboly								
	00	01	10	11	0 φ	1 φ	φ 0	φ 1	$\varphi\varphi$
C	C/φ	C/φ	C/φ	C/φ	X/P	X/P	X/D	X/D	X/S
X	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Soutěžní úloha.

a) Sestavte konečný sekvenční stroj se dvěma vstupy, který porovná vstupující čísla podle velikosti. Vytiskne S , pokud jsou stejná, P pokud je první větší, a D , pokud je druhé větší.

- b) Řešte úlohu a) pro případ, kdy jsou čísla zapsána pozpátku.
- c) Sestavte konečný sekvenční stroj se dvěma vstupy, který vytiskne součet vstupujících čísel.
- d) Řešte úlohu c) pro případ, kdy jsou čísla zapsána pozpátku.
- e) Sestavte konečný sekvenční stroj s jedním vstupem, který určí, zda je vstupní číslo dělitelné třemi. Výstupem bude znak A , pokud je dělitelné třemi, v opačném případě bude výstupem znak N .
- f) Sestavte konečný sekvenční stroj s jedním vstupem, který spočítá celočíselný podíl při dělení vstupujícího čísla třemi.

Ve všech úlohách předpokládejte, že čísla jsou ve vstupních sledech zapsána v binární poziční soustavě. Pokud dospějete k názoru, že některý ze strojů nelze sestavit, své tvrzení zdůvodněte.

P – II – 1

Souvislý úsek v posloupnosti celých čísel nazveme K -hladkým úsekem, jestliže se libovolná dvojice čísel, která do něj patří, liší nejvýše o K .

Jsou dána dvě kladná celá čísla N , K a posloupnost N celých čísel. Napište program, který určí délku maximálního K -hladkého úseku v dané posloupnosti čísel. Počet čísel N není předem shora omezen a může být velmi vysoký, naproti tomu hodnota K je rovna nejvýše 10. Při návrhu programu se zaměřte na dosažení co největší rychlosti výpočtu.

Příklad. Pro $N = 10$, $K = 2$ a posloupnost čísel 2 1 2 3 3 4 3 4 6 4 bude výsledkem číslo 6, neboť nejdelší 2-hladký úsek 2 3 3 4 3 4 je tvořen šesti čísly (další 2-hladké úseky, např. 2 1 2 3 3 nebo 4 6 4, jsou kratší).

P – II – 2

V zemi je N měst označených čísly od 1 do N . Mezi městy je vybudována silniční síť. Každá silnice spojuje vždy dvojici měst. Všechny silnice jsou obousměrné. Mezi některými dvojicemi měst přímá silnice nevede, ale z každého města je možné dojet po silnicích do libovolného jiného města (třeba i více různými způsoby). Všechna případná křížení silnic mimo města jsou mimoúrovňová (pomocí mostů) a neumožňují vozidlům přejet z jedné silnice na druhou.

Napište program, který určí, zda je možné rozdělit města do dvou skupin tak, aby každá dvojice měst patřících do stejné skupiny byla spojena přímkou silnicí (tzn. uvnitř každé skupiny vede přímá silnice mezi každými dvěma městy). Nezáleží přitom na velikosti jednotlivých skupin

(jedna ze skupin může být případně i prázdná), ale každé město musí být do některé skupiny zařazeno.

Vstupem programu je počet měst N a dále seznam všech silnic vedoucích mezi městy. Každá silnice je zadána dvojicí čísel měst, mezi nimiž vede.

P – II – 3

Na hromádce je připraven předem známý počet N zápalek. Dva hráči hrají hru, při které z hromádky střídavě odebírají zápalky. Hráč, který je na řadě, musí v jednom tahu odebrat takový počet zápalek, který je celočíselnou mocninou dvou (tzn. lze ho vyjádřit ve tvaru $2K$ pro vhodné celé nezáporné číslo K). Vyhrává ten hráč, který vezme z hromádky poslední zápalku.

a) Určete, pro jaké hodnoty N má při správné hře zajištěnu výhru ten hráč, který je právě na tahu. Jak musí během hry postupovat, aby této výhry dosáhl? Své tvrzení zdůvodněte.

b) Řešte stejnou úlohu pro případ, že počet zápalek odebíraných v jednom tahu musí být tvaru $3K$ pro nějaké celé nezáporné číslo K .

P – II – 4

Pomocí sekvenčních strojů (definici najdete v úloze P–I–4) budeme nyní zpracovávat zápisy celých čísel v tzv. doplňkovém kódu. K zápisu čísel budeme používat abecedu $\{0, 1\}$. Celá nezáporná čísla budeme zapisovat v obvyklé binární poziční soustavě s jedinou drobnou úpravou — zápis čísla musí začínat číslicí 0. Toho lze snadno dosáhnout doplněním jedné nebo více nul zleva k zápisu čísla. Každé celé nezáporné číslo má tedy nekonečně mnoho různých zápisů, které se liší pouze počtem úvodních nul.

Zápisy záporných čísel získáme následujícím postupem. Ze zápisu absolutní hodnoty čísla (v binární soustavě s vedoucí nulou) nejprve odečteme jedničku a potom zaměníme každou 0 za 1 a každou 1 za 0. Zápisy záporných čísel tedy začínají číslicí 1. I každé záporné číslo má více možných zápisů, ty se liší pouze počtem úvodních jedniček.

Příklad zápisu čísel v doplňkovém kódu:

+3 lze zapsat jako 011, 0011 nebo také 000000000011,

–3 lze zapsat jako 101, 1101 nebo také 111111111101.

Soutěžní úloha.

- a) Sestavte konečný sekvenční stroj se dvěma vstupy, který vytiskne součet vstupujících čísel.
- b) Řešte úlohu a pro případ, kdy jsou čísla zapsaná pozpátku.
- c) Sestavte konečný sekvenční stroj s jedním vstupem, který určí, zda je vstupní číslo dělitelné třemi. Výstupem bude znak A pokud je dělitelné třemi, v opačném případě bude výstupem znak N .
- d) Sestavte konečný sekvenční stroj s jedním vstupem, který spočítá celočíselný podíl při dělení vstupujícího čísla třemi.

Ve všech úlohách předpokládejte, že čísla jsou ve vstupních sledech zapsána v doplňkovém kódu. Pokud dospějete k názoru, že některý ze strojů nelze sestavit, své tvrzení zdůvodněte.

P – III – 1

Souvislý úsek v posloupnosti celých čísel nazveme vybalancovaným úsekem, jestliže počet kladných a počet záporných čísel v úseku se sobě rovnají.

Je dáno celé číslo N ($1 \leq N \leq 1000$) a posloupnost N celých čísel. Napište program, který určí délku maximálního vybalancovaného úseku v dané posloupnosti čísel. Při návrhu programu se zaměřte na dosažení co největší rychlosti výpočtu.

Příklad. Pro $N = 10$ a posloupnost čísel $8\ 6\ 4\ 7\ -5\ -3\ 2\ 0\ -1\ 9$ bude výsledkem číslo 7 , neboť nejdelší vybalancovaný úsek $4\ 7\ -5\ -3\ 2\ 0\ -1$ (případně jiný stejně dlouhý vybalancovaný úsek $7\ -5\ -3\ 2\ 0\ -1\ 9$) je tvořen sedmi čísly.

P – III – 2

V zemi je N měst označených čísly od 1 do N . Mezi městy je vybudována silniční síť. Každá silnice spojuje vždy dvojici měst. Všechny silnice jsou obousměrné. Mezi některými dvojicemi měst přímá silnice nevede, ale z každého města je možné dojet po silnicích do libovolného jiného města (třeba i více různými způsoby). Všechna případná křížení silnic mimo města jsou mimoúrovňová (pomocí mostů) a neumožňují vozidlům přejet z jedné silnice na druhou.

Silnici nazveme nepostradatelnou, pokud by se jejím zničením úplně přerušilo silniční spojení mezi některou dvojicí měst.

Napište program, který vyhledá a vypíše všechny nepostradatelné silnice. Vstupem programu je počet měst N a dále seznam všech silnic vedoucích mezi městy. Každá silnice je zadána dvojicí čísel měst, mezi nimiž vede.

P – III – 3

Na hromádce je připraven předem známý počet N zápalek, kde N je liché číslo. Dva hráči hrají hru, při které z hromádky střídavě odebírají zápalky. Hráč, který je na řadě, musí v jednom tahu odebrat 1, 2 nebo 3 zápalky. Hra skončí, když je celá hromádka zápalek rozebraná. Vyhrává ten hráč, který z hromádky celkově odebral sudý počet zápalek.

a) Určete, pro jaké hodnoty N má při správné hře zajištěnu výhru ten hráč, který je právě na tahu. Jak musí během hry postupovat, aby této výhry dosáhl? Své tvrzení zdůvodněte.

b) Řešte stejnou úlohu pro případ, že hráč smí v jednom tahu odebrat z hromádky 1, 2, 3 nebo 4 zápalky.

P – III – 4

Pomocí sekvenčních strojů (definici najdete v úloze P–I–4) budeme zpracovávat zápisy celých čísel. Zápisem celého čísla C v poziční soustavě o základu (-2) je sled znaků $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ z abecedy $\{0, 1\}$ takový, že

$$C = \sum_{j=0}^n a_j (-2)^j$$

Jednotlivým znakům zápisu říkáme cifry. Takovýto zápis čísla je strojem čten nebo je vytvářen postupně od nejvyšších řádů (a_n) k nejnižším (a_0). Zápisem pozpátku rozumíme zápis cifer v opačném pořadí. Čísla zapsaná pozpátku tedy stroj čte v pořadí od nejnižších řádů (a_0) k nejvyšším (a_n).

Uvědomte si, že popsáním způsobem lze zapsat libovolné celé číslo, a to až na úvodní nuly právě jedním způsobem.

Příklad zápisu čísel v poziční soustavě o základu -2 :

$+3$ lze zapsat jako 111, 0111 nebo také 000000000111,

-3 lze zapsat jako 1101, 01101 nebo také 0000000001101.

Soutěžní úloha.

a) Sestavte konečný sekvenční stroj se dvěma vstupy, který porovná vstupující čísla podle velikosti. Vytiskne S , pokud jsou stejná, P pokud je první větší, a D , pokud je druhé větší.

b) Řešte úlohu a) pro případ, kdy jsou čísla zapsaná pozpátku.

c) Sestavte konečný sekvenční stroj se dvěma vstupy, který vytiskne součet vstupujících čísel.

d) Řešte úlohu c) pro případ, kdy jsou čísla zapsaná pozpátku.

e) Sestavte konečný sekvenční stroj s jedním vstupem, který určí, zda je vstupní číslo dělitelné třemi. Výstupem bude znak A , pokud je dělitelné třemi, v opačném případě bude výstupem znak N .

f) Sestavte konečný sekvenční stroj s jedním vstupem, který spočítá celočíselný podíl při dělení vstupujícího čísla třemi.

Ve všech úlohách předpokládejte, že čísla jsou ve vstupních sledech zapsána v poziční soustavě o základu (-2) . Pokud dospějete k názoru, že některý ze strojů nelze sestavit, své tvrzení zdůvodněte.

Přípravná soustředění před 35. MMO

V průběhu 43. ročníku byla uspořádána dvě výběrová soustředění pro přípravu na mezinárodní matematickou olympiádu. Na první soustředění, které se konalo v dobře známém internátu při gymnáziu v Jevíčku od 10. do 13. května 1994, bylo pozváno všech 12 vítězů celostátního kola kategorie A, z nichž se jeden omluvil.

Soustředění bylo zaměřeno na řešení obtížných úloh v omezeném čase (v soutěžních podmínkách). Po odpolední relaxaci byl proveden detailní rozbor opravených řešení. Úspěšnost jednotlivých studentů ukazuje následující tabulka:

Libor Mašíček	3 G Brno, kpt. Jaroše	69
David Opěla	2 GMK Bílovec, 17. listopadu	67
David Pavlica	3 GMK Bílovec, 17. listopadu	66
Robert Šámal	3 G Praha 5, Zborovská	65
Martin Nečesal	3 G Brno, kpt. Jaroše	60
Petr Kaňovský	3 G Brno, kpt. Jaroše	63
Filip Krška	3 G Brno, kpt. Jaroše	62
Michal Beneš	2 G Praha 5, Zborovská	57
Jan Mach	4 GMK Bílovec, 17. listopadu	56
Michaela Prokešová	3 G Č. Budějovice, Jírovceva	51
Jan Rychtář	3 G Strakonice, Máchova	48

Druhé soustředění bylo už určeno pouze vybraným reprezentantům České republiky na 35. MMO v Hongkongu včetně dvou náhradníků a konalo se opět v Jevíčku od 20. do 24. června 1994. Výsledky jednotlivých studentů ukazuje další tabulka:

Robert Šámal	3 G Praha 5,	30,5
David Pavlica	3 GMK Bílovec, listopadu	28,5
Petr Kaňovský	3 G Brno, Jaroše	25
Libor Mašíček	3 G Brno, Jaroše	22
Filip Krška	3 G Brno, Jaroše	20
Jan Mach	4 GMK Bílovec, listopadu	20
Martin Nečesal	3 G Brno, Jaroše	19
David Opěla	2 GMK Bílovec, listopadu	18

Jednotlivé semináře vedli a úlohy připravili:

dr. Jaroslav Švrček (20. 6. a 21. 6.),

dr. Miroslav Engliš (22. 6.),

dr. Karel Horák (23. 6.).

Některé úlohy zadané na přípravných soustředěních

1. Necht AB a CD jsou vzájemně kolmé tětivy téže kružnice k a necht P_1, P_2, P_3, P_4 označují v cyklickém pořadí obsahy čtyř částí, na něž je kruh s hraniční kružnicí k oběma tětivami rozdělen. Určete, jaké největší a nejmenší hodnoty nabývá výraz

$$\frac{P_1 + P_3}{P_2 + P_4}.$$

2. Určete všechny funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\frac{1}{2}f(xy) + \frac{1}{2}f(xz) - f(x)f(yz) \geq \frac{1}{4}$$

pro libovolná reálná x, y, z .

3. Dokažte, že součet velikostí šesti úhlů, pod nimiž vidíme hrany libovolného čtyřstěnu z jeho libovolného vnitřního bodu, je větší než 540° .

4. Uvažujme tři kružnice vně připsané danému trojúhelníku ABC a trojúhelník $A'B'C'$ takový, že tyto tři kružnice leží uvnitř trojúhelníku $A'B'C'$, přičemž strany trojúhelníku $A'B'C'$ jsou společnými tečnami každých dvou z těchto kružnic. Dokažte, že platí

$$P_{A'B'C'} \geq 25P_{ABC},$$

kde P_{XYZ} značí obsah trojúhelníku XYZ .

5. Necht $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je daná funkce a necht dále pro každá dvě reálná čísla x, y platí

a) $f(2x) = f\left(\sin\left(\frac{1}{2}\pi x + \frac{1}{2}\pi y\right)\right) + f\left(\sin\left(\frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{2}\pi y\right)\right),$

b) $f(x^2 - y^2) = (x + y)f(x - y) + (x - y)f(x + y).$

Určete

$$f(1994 + 1994^{1/2} + 1994^{1/3}).$$

6. V trojúhelníku ABC jsou zvoleny body $K \in \overline{BC}$, $L \in \overline{AC}$, $M \in \overline{AB}$, $N \in \overline{LM}$, $R \in \overline{MK}$, $F \in \overline{KL}$. Jestliže $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ a Q značí po řadě obsahy trojúhelníků $AMR, CKR, BKF, ALF, BNM, CLN$ a ABC , pak platí

$$Q \geq 8(Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6)^{1/6}.$$

Dokažte.

7. Dokažte, že na kružnici se středem v $[0, 0]$ a poloměrem 5^{55} leží aspoň 5^5 bodů s celočíselnými souřadnicemi.

8. Jsou-li X, Y dva body roviny, pak $z(XY)$ je zobrazení roviny na sebe vzniklé složením osově souměrnosti podle XY a posunutí o vektor $\overrightarrow{XY}$. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$; kdy je $z(AB) \cdot z(BC) \cdot z(CD) \cdot z(DA)$ identita?

9. V rovině jsou dány dva různé body A, B spojené lomenou čarou l . Tětivou budeme rozumět úsečku rovnoběžnou s AB , jejíž oba krajní body leží na l . Dokažte, že pokud neexistuje tětiva délky a ani tětiva délky b , tak neexistuje ani tětiva délky $a + b$.

10. V rovině je dán rovnostranný trojúhelník ABC . Zjistěte, ve kterých bodech X dosahuje funkce

$$f(X) = |XA| + |XB| - |XC|$$

svého minima.

11. Dokažte, že pro každé přirozené n začínají čísla 1994^n a $1994^n + 2^n$ vždy stejným dvojčíslem.

12. Na stranách A_1A_2 a A_2A_3 pravidelného $2n$ -úhelníku $A_1A_2 \dots A_{2n}$ jsou dány body K, N takové, že $\sphericalangle K A_{n+2} N = \pi/2n$. Dokažte, že NA_{n+2} je osou úhlu $KN A_3$.

13. Na povrchu koule jsou dány body A, B, C, A', B', C' takové, že tětivy AA', BB', CC' se protínají v bodě P uvnitř, ale neleží v jedné rovině. Přitom kulové plochy určené body A, B, C, P a A', B', C', P se dotýkají. Dokažte, že $|AA'| = |BB'| = |CC'|$.

14. Nechť mnohočlen p s komplexními koeficienty má stupeň nejvýše 1994 a vesměs různé kořeny. Dokažte, že existují komplexní čísla $a_1, a_2, \dots, a_{1994}$ taková, že $p(z)$ dělí mnohočlen

$$(\dots((z - a_1)^2 - a_2)^2 - \dots - a_{1993})^2 - a_{1994}.$$

35. mezinárodní matematická olympiáda



Po loňském poměrně úspěšném vystoupení jak českého, tak i slovenského družstva na 34. MMO v tureckém Istanbulu jsme letos odjížděli na olympiádu s vědomím, že naše vyhlídky jsou tentokrát poněkud slabší, zvláště když vítězové III. kola kategorie A nedosáhli v republikovém finále více než 69 % možných bodů. Nicméně dva z našich studentů získali na 35. MMO druhou cenu, dva se museli spokojit s třetí cenou a dva zůstali bez ceny.

Vedoucím naší výpravy byl dr. *Karel Horák* z Matematického ústavu AV ČR, pedagogickým vedoucím družstva byl doc. *Jaromír Šimša* z brněnské pobočky téhož ústavu.

Výsledky našich žáků:

Umístění	Body za úlohu						Cena
	1	2	3	4	5	6	
78.–87. Petr Kaňovský	7	7	7	7	0	3	31 II.
193.–204. Filip Krška	0	7	6	2	3	0	18
205.–213. Jan Mach	0	7	5	2	3	0	17
126.–131. Libor Mašíček	0	7	7	7	4	0	25 III.
102.–113. David Pavlica	0	7	7	7	2	5	28 III.
49.–57. Robert Šámal	0	7	7	7	7	7	35 II.
Celkem	7	42	39	32	19	15	154

Vedoucím slovenské delegace byl doc. RNDr. *Tomáš Hecht*, CSc., z MFF UK v Bratislavě a pedagogickým vedoucím bývalý úspěšný reprezentant *Richard Kollár*, nyní student MFF UK v Bratislavě. Že Slovensko jede na MMO se dvěma výrazně lepšími borci, jsme věděli už ze srovnání výsledků obou celostátních kol v Bratislavě a Jevíčku. A to ve slovenském družstvu ještě chyběl vítěz III. kola, který dal přednost účasti na MFO v Pekingu. A tak nakonec mezi slovenskými studenty nejvíce zazářil *Andrej Zlatoš* ze 4. ročníku Gymnázia Grösslingová v Bratislavě, který získal za všechna svá řešení plný počet bodů a zařadil se tak mezi 22 absolutních vítězů 35. MMO.

Umístění	Body za úlohu						Body	Cena
	1	2	3	4	5	6		
284.–297. Ivan Cimrák	1	5	0	1	4	0	11	
154.–164. Patrik Horník	7	7	0	2	6	0	22	III.
268.–283. Michal Kovár	0	7	0	1	4	0	12	
114.–119. Peter Macák	3	7	5	7	5	0	27	III.
44.–48. Martin Niepel	7	7	7	7	7	1	36	II.
1.–22. Andrej Zlatoš	7	7	7	7	7	7	42	I.
Celkem	25	40	19	25	33	8	150	

Výběr úloh lze stručně charakterizovat tak, že nebylo téměř z čeho vybírat. Problémová komise, přestože byla vedena velmi zkušeným Kanadanem čínského původu *Andym Liu*, se patrně rozhodla učinit letošní olympiádu jednou z nejlehčích za posledních 10 let. Výběr 24 úloh, které dostala jury, téměř neobsahoval opravdu obtížné úlohy, jež by pak více rozvrstvily početné pole soutěžících (v naší situaci jsme samozřejmě stáli o úlohy spíše těžší, protože naši dva nejlepší studenti, jak se ostatně potvrdilo, neměli na suverénní vyřešení všech úloh, nicméně jsem přesvědčen, že stejného výsledku by dosáhli i při těžších úlohách; a pro slabší žáky je menší ostuda, když pohoří na těžších úlohách). Navíc jediné dvě úlohy, jež snad odpovídaly náročností mezinárodní olympiádě, byly nakonec staženy po nejasném prohlášení trenéra jedné ze zúčastněných zemí, že podobné či stejné úlohy byly použity během jejich přípravy. Tak se nakonec nejtěžší úlohou 1. dne stala 1. úloha, za kterou jsme získali jen 7 bodů. Druhý den byla bez konkurence poněkud nestandardní úloha 6.

Překvapivě nejlepšího výsledku dosáhli naši studenti ve 2. úloze, která byla geometrická (a přestože to byla úloha natolik jednoduchá, že téměř neodpovídala nárokům na úlohy MMO, a umožňovala jak trigonometrické, tak i nepříliš složité analytické řešení, potěšila i ta skutečnost, že mezi našimi šesti řešeními byla tři velmi pěkná řešení syntetická), zatímco 1. úloha, mezi členy jury všeobecně považovaná za nejlehčí z předložené šestice, dopadla nejhůře, jak již bylo zmíněno.

Že letošní úlohy byly poměrně lehké, je vidět i z počtu bodů nutných pro získání příslušné medaile: První cena se udělovala za 40–42 bodů, druhá za 30–39 a třetí za 19–29 bodů. Žádná z úloh nebyla taková, že by se dalo očekávat nějaké zvlášť elegantní či překvapivé řešení. Proto nebyla udělena ani žádná zvláštní cena.

Suverénně nejlepší byli tentokrát Američané (v čínském družstvu údajně doplatili tři studenti na špatný překlad 6. úlohy do čínštiny) —

všichni získali plný počet bodů. Značný byl letos i počet úspěšných dívek; Rakušanka *Theresia Eisenköbllová* měla dokonce plný počet bodů a nejméně devět dalších defilovalo během slavnostního zakončení ještě před naším nejlepším *Robertem Šámalem*. V íránském družstvu jich byla přesně polovina. Ve výsledkové listině se však dívčí jména obtížně určují.

Neoficiální pořadí první třetiny zúčastněných zemí (olympiády se zúčastnilo 385 žáků z 69 zemí):

	I	II	III	body		I	II	III	body
USA	6	0	0	252	Itálie	0	0	2	102
ČLR	3	3	0	229	Nizozemsko	0	0	2	99
Rusko	3	2	1	224	Lotyšsko	0	0	3	98
Bulharsko	3	2	1	223	Brazílie (5)	0	2	0	95
Maďarsko	1	5	0	221	Gruzie	0	0	2	95
Vietnam	1	5	0	207	Švédsko	0	0	1	92
Velká Británie	2	2	2	206	Řecko	0	0	1	91
Írán	2	2	2	203	Chorvatsko	0	0	2	90
Rumunsko	0	5	1	198	Estonsko (5)	0	0	1	82
Japonsko	1	2	3	180	Norsko	0	1	1	80
Německo	1	2	3	175	Makao	0	1	0	75
Austrálie	0	2	3	173	Litva	0	0	1	73
Korea	0	2	4	170	Finsko	0	0	0	70
<i>Polsko</i>	2	0	3	170	Irsko	0	0	0	68
Tchaj-wan	0	4	1	170	Makedonie (4)	0	0	1	67
Indie	0	3	3	168	Mongolsko	0	1	0	65
Ukrajina	1	1	2	163	Trinidad a Tobago	0	0	0	63
Hongkong	0	2	4	162	Filipíny	0	0	0	53
Francie	1	1	3	161	Chile (2)	0	1	0	52
Argentina	0	3	1	159	Moldavsko	0	0	1	52
<i>Česká republika</i>	0	2	2	154	Portugalsko	0	0	0	52
<i>Slovensko</i>	1	1	2	150	Dánsko (4)	0	0	2	51
Bělorusko	0	1	4	144	Kypr	0	0	0	48
Kanada	1	0	3	143	Slovinsko (5)	0	0	0	47
Izrael	0	1	4	143	Indonésie	0	0	0	46
Kolumbie	0	2	2	136	Bosna a Hercegovina (5)	0	0	1	44
JAR	0	0	3	120	Španělsko	0	0	0	41
Turecko	0	0	4	118	Švýcarsko (3)	0	0	1	35
Nový Zéland	0	0	4	116	Lucembursko (1)	0	1	0	32
Singapur	0	2	0	116	Island (4)	0	0	0	29
Rakousko	1	0	0	114	Mexiko	0	0	0	29
Arménie (5)	0	0	4	110	Kyrgyzstán	0	0	0	24
Thajsko	0	0	3	106	Kuba (1)	0	0	0	12
Belgie	0	0	2	105	Kuvajt (5)	0	0	0	12
Maroko	0	0	2	105					

Příští, 36. MMO se bude konat v roce 1995 v kanadském Torontu. Vzhledem k tomu, že mezi našimi letošními reprezentanty byl jen jeden maturant, mohlo by se nám podařit do příští olympiády připravit docela solidní a zkušené mužstvo, které by se určitě mělo pokusit o návrat do první čtvrtiny, ne-li dokonce do první desítky nejlepších zemí.

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Necht m a n jsou kladná celá čísla a necht $a_1, a_2, \dots, a_m$ jsou různé prvky množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ s následující vlastností: jestliže pro nějaká i, j , $1 \leq i \leq j \leq m$, je $a_i + a_j \leq n$, pak existuje k , $1 \leq k \leq m$, že $a_i + a_j = a_k$. Dokažte, že

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}.$$

(*Francie*)

2. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC s rameny $|AB| = |AC|$. Dále předpokládáme, že

- (i) M je střed úsečky BC a O bod přímky AM takový, že přímky OB a AB jsou navzájem kolmé;
- (ii) Q je libovolný bod úsečky BC různý od bodů B a C ;
- (iii) bod E leží na přímce AB a bod F na přímce AC tak, že E, Q a F jsou tři různé body ležící v přímce.

Dokažte, že $OQ \perp EF$, právě když $|QE| = |QF|$. (*Arménie, Austrálie*)

3. Pro libovolné kladné celé číslo k označme $f(k)$ počet všech prvků množiny $\{k+1, k+2, \dots, 2k\}$, v jejichž dvojkovém zápise jsou právě tři jedničky.

- (a) Dokažte, že pro každé kladné celé číslo m existuje aspoň jedno kladné celé číslo k takové, že $f(k) = m$.
- (b) Určete všechna kladná celá čísla m , pro něž existuje právě jedno k takové, že $f(k) = m$. (*Rumunsko*)

4. Určete všechny uspořádané dvojice (m, n) kladných celých čísel, pro něž je číslo

$$\frac{n^3 + 1}{mn - 1}$$

celé.

(*Austrálie*)

5. Necht S je množina všech reálných čísel větších než -1 . Najděte všechny funkce $f: S \rightarrow S$, jež splňují následující dvě podmínky:

- (i) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ pro všechna $x, y \in S$;
- (ii) funkce $f(x)/x$ je rostoucí v každém z intervalů $-1 < x < 0$ a $0 < x$.

(*Velká Británie*)

6. Ukažte, že existuje množina A kladných celých čísel s následující vlastností: Pro libovolnou nekonečnou množinu S prvočísel existuje $k \geq 2$ a dvě kladná celá čísla $m \in A$, $n \notin A$, jež jsou součinem k různých prvků množiny S . (Finsko)

Řešení soutěžních úloh

1. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a_1 < a_2 < \dots < a_m$. Uvažujme libovolné dva prvky a_i, a_j takové, že $a_i + a_j \leq n$. V takovém případě je podle předpokladu $a_i + a_1 = a_{k_1} < \dots < a_i + a_j = a_{k_j}$ rostoucí posloupnost j prvků uvažované množiny $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, přičemž odpovídající indexy $k_1, \dots, k_j$ patří do množiny $\{i + 1, \dots, m\}$, takže platí $j \leq m - i$. Dokázali jsme tak, že jakmile $a_i + a_j \leq n$, pak $i + j \leq m$. Pro každé $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ tedy platí $a_i + a_{m+1-i} \geq n + 1$. Sečtením všech m takových nerovností dostáváme

$$2(a_1 + a_2 + \dots + a_m) \geq m(n + 1)$$

neboli

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m} \geq \frac{n + 1}{2}.$$

Jiné řešení. Označme h nejmenší prvek množiny $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ a uvažme rozklad množiny A na podmnožiny A_k podle zbytků modulo h , kde $A_k = \{a \in A : a \equiv k \pmod{h}\}$, $0 \leq k \leq h - 1$. Pokud je množina A_k neprázdná, označme h_k její nejmenší prvek, takže bude $A_k = \{h_k, h_k + h, \dots, h_k + j_k h\}$, kde j_k je největší celé číslo takové, že $h_k + j_k h \leq n$. Protože prvky z A_k tvoří aritmetickou posloupnost, je jejich aritmetický průměr roven průměru nejmenšího a největšího prvku a ten splňuje nerovnosti

$$\frac{h_k + (h_k + j_k h)}{2} \geq \frac{h_k + (j_k + 1)h}{2} \geq \frac{n + 1}{2}.$$

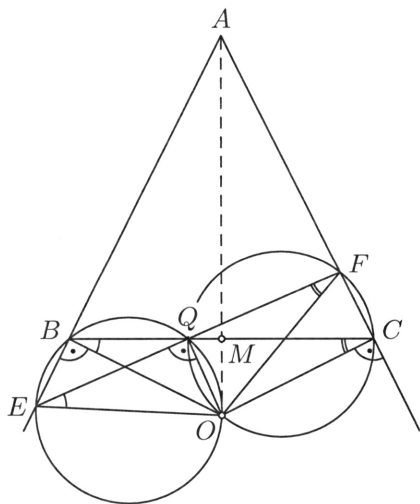
Protože výsledná nerovnost platí pro všechny neprázdné množiny A_k , platí stejná nerovnost i pro aritmetický průměr prvků množiny A .

2. Protože trojúhelník ABC je osově souměrný podle osy AO , můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že bod Q leží uvnitř úsečky BM , což zřejmě znamená, že bod E musí ležet na polopřímce AB za bodem B . Dodejme, že pro $Q = M$ je tvrzení úlohy zřejmé.

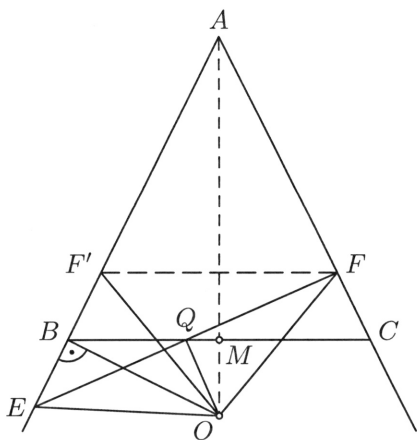
Necheť $OQ \perp EF$. Podle předpokladu je úhel EBO pravý, proto body O, Q, B, E leží na kružnici s průměrem EO . Obdobně dostáváme, že

bodů O, Q, C, F leží na kružnici s průměrem FO . Z rovnosti odpovídajících obvodových úhlů nad společnou tětivou OQ obou kružnic tak plyne (obr. 32) podobnost trojúhelníků $EOF \sim BOC$. Trojúhelník BOC je však rovnoramenný, je tudíž rovnoramenný i trojúhelník EOF a Q jakožto pata jeho výšky půlí základnu EF .

Nechť $|QE| = |QF|$. Opišme kružnice trojúhelníkům EBQ, FCQ a další průsečík obou kružnic označme X . Jelikož trojúhelník ABC je rovnoramenný, platí $|\sphericalangle EBQ| = 180^\circ - |\sphericalangle QCF|$. Odtud plyne, že shodným tětivám EQ a FQ v každé z obou opsaných kružnic přísluší též středový úhel. Jsou to tudíž shodné kružnice, a tak je také $|\sphericalangle QEX| = |\sphericalangle QFX|$. Trojúhelník EFX je tudíž rovnoramenný a QX je jeho výška, takže $QX \perp EF$. To však znamená, že EX a FX jsou průměry uvažovaných kružnic, a proto (podle Thaletovy věty) $|\sphericalangle EBX| = |\sphericalangle FCX| = 90^\circ$. Vidíme, že bod X je totožný s bodem O , proto $OQ \perp EF$.



Obr. 32



Obr. 33

Jiné řešení. Předpokládejme opět, že bod Q leží uvnitř úsečky BM a nechť $|QE| = |QF|$. Uvažujme bod F' souměrně sručený s bodem F podle osy AM (obr. 33). Je tedy $|OF| = |OF'|$, $FF' \parallel BQ$, a protože Q je střed strany EF , je BQ střední příčka trojúhelníku $F'FE$, tudíž $|EB| = |BF'|$, a tak je OB výška rovnoramenného trojúhelníku EOF' . Vidíme, že $|EO| = |OF'| = |OF|$, takže i trojúhelník EOF je rovnoramenný a OQ je tím pádem jeho výška, tedy $OQ \perp EF$, jak jsme chtěli dokázat.

K důkazu opačné implikace si stačí uvědomit, že daným bodem Q prochází jediná přímká q kolmá na QO a jediná přímká p taková, že polopřímky AB , AC na ní vytínají shodné úseky QE , QF (takový bod $F \in AC$ musí ležet na obrazu přímky AB ve středové souměrnosti podle Q). A z důkazu první implikace víme, že $p = q$.

Poznámka. Předchozí argument samozřejmě nezávisí na tom, kterou ze dvou implikací dokážeme jako první. Uvedme ještě hezký argument v případě, že jsme nejdříve dokázali implikaci $QO \perp EF \Rightarrow |QE| = |QF|$. Za předpokladu $|QE| = |QF|$ vedme bodem Q kolmici ke QO . Ta protne polopřímky AB , AC v bodech E' , F' , pro něž tedy rovněž platí $|QE'| = |QF'|$. Bod Q je tak společným středem úseček EF a $E'F'$. Kdyby byly úsečky EF a $E'F'$ různé, byl by $EE'FF'$ rovnoběžník, což není možné, protože AB , AC jsou různoběžky.

3. (a) Podívejme se, jak se mění hodnota funkce f při přechodu od k ke $k+1$. Označme T množinu všech čísel, jejichž dvojkový zápis obsahuje právě tři jedničky. Hodnota $f(k)$ pak udává počet čísel $z \in T$ v množině $\{k+1, k+2, \dots, 2k\}$, zatímco $f(k+1)$ počet čísel $z \in T$ v množině $\{k+2, \dots, 2k, 2k+1, 2k+2\}$. Všimněme si, že počet jedniček v dvojkovém zápisu čísel $k+1$ a $2k+2 = 2(k+1)$ je stejný, proto o případné změně hodnoty $f(k+1)$ oproti $f(k)$ rozhoduje jen číslo $2k+1$, tudíž

$$f(k+1) - f(k) = \begin{cases} 1, & \text{kdýž } 2k+1 \in T, \\ 0, & \text{kdýž } 2k+1 \notin T. \end{cases} \quad (1)$$

Dvojkový zápis čísla $2k+1$ dostaneme z dvojkového zápisu čísla k přidáním jedničky na konec, proto platí, že

$$f(k+1) - f(k) = 1, \quad \text{právě kdýž dvojkový zápis čísla } k \text{ obsahuje právě dvě jedničky.} \quad (2)$$

Posloupnost $f(1), f(2), \dots$ začíná nulou, a protože čísel, jejichž dvojkový zápis obsahuje právě dvě jedničky, je nekonečně mnoho, obsahuje uvažovaná posloupnost všechna přirozená čísla.

(b) Z (1) vidíme, že funkce f je po částech konstantní. Má-li tedy funkce f nabýt nějaké hodnoty m pro jediné k , musí jednotkový skok nastat v $k-1$ i v k , což podle (2) nastane, právě kdýž obě čísla k i $k-1$ mají ve svém dvojkovém zápisu právě dvě jedničky. Číslo $k-1$ zřejmě musí být liché, protože jinak by jeho dvojkový zápis končil nulou a k by pak nutně mělo o jedničku víc. Jako liché číslo, jehož dvojkový zápis

obsahuje právě dvě jedničky, musí číslo $k - 1$ začínat a končit jedničkou, mezi nimiž je skupina nul. Ta však nemůže být prázdná, protože jinak bychom z $(11)_2$ dostali $(100)_2$. Číslo $k - 1$ proto musí být tvaru $2^r + 1$, kde $r \geq 2$, neboli

$$k = 2^r + 2, \quad r \geq 2.$$

Obráceně pro každé takové k mají jak k , tak $k - 1$ ve svém dvojkovém zápisu právě dvě jedničky. Zbývá vyčíslit příslušnou hodnotu $m = f(k)$.

Pro $k = 2^r$ je $2k = 2^{r+1}$, takže množina $\mathbb{T} \cap \{k + 1, k + 2, \dots, 2k\}$ je tvořena čísly, jejichž dvojkový zápis začíná jedničkou a na zbývajících r místech má právě dvě jedničky. Pro jejich výběr máme $\binom{r}{2}$ možností, proto

$$f(2^r) = \binom{r}{2}.$$

Protože pro každé $r \geq 2$ má číslo 2^r ve svém dvojkovém zápisu jednu jedničku a číslo $2^r + 1$ dvě jedničky, je podle (2)

$$f(2^{r+1}) - f(2^r) = 0 \quad \text{a} \quad f(2^r + 2) - f(2^r + 1) = 1.$$

Sečtením obou rovností dostáváme

$$m = f(2^r + 2) = f(2^r) + 1 = \binom{r}{2} + 1, \quad r \geq 2.$$

To jsou všechny hledané hodnoty, pro něž má rovnice $f(k) = m$ právě jedno řešení.

Jiné řešení. (a) Označme t funkci, jež je rovna jedné právě pro všechna přirozená čísla, jejichž zápis v dvojkové soustavě obsahuje právě tři jedničky, a jinak je nulová. Z rozdílu množin $\{k + 2, \dots, 2k, 2k + 1, 2k + 2\}$ a $\{k + 1, k + 2, \dots, 2k\}$ vyplývá, že

$$f(k + 1) = f(k) - t(k + 1) + t(2k + 1) + t(2k + 2).$$

Protože dvojkové zápisy čísel n a $2n$ se liší jen přidanou nulou na konci druhého z nich, je $t(2k + 2) = t(k + 1)$, a proto

$$f(k + 1) - f(k) = t(2k + 1). \quad (3)$$

Funkce f je tedy neklesající, její přírůstek je nejvýše 1, $f(1) = 0$ a navíc funkce f není shora omezená, protože $f(2^r) = \binom{r}{2}$ (to jsme už zdůvodnili

v předchozím řešení). Funkce f tedy nabývá všech nezáporných celočíselných hodnot.

(b) Vzhledem k uvedeným vlastnostem bude mít rovnice $f(k) = m$ jediné řešení k , právě když bude f v hodnotě k rostoucí, tj. když bude platit

$$f(k) - f(k-1) = f(k+1) - f(k) = 1,$$

což nastane, právě když bude

$$t(2k-1) = t(2k+1) = 1.$$

Protože dvojkový zápis lichého čísla $2k-1 = 2(k-1) + 1$ končí jedničkou, musí mít $2(k-1)$, a tedy i $k-1$ ve svém dvojkovém zápisu právě dvě jedničky. Dvojkový zápis čísla $k-1$ ovšem nemůže končit nulou, neboť pak by číslo $2(k-1)$ končilo dvěma nulami, tudíž dvojkový zápis čísla $2k+1 = 2(k-1) + 3$ by celkem obsahoval čtyři jedničky. Vychází tak, že dvojkový zápis čísla $k-1$ je sestaven ze dvou jedniček a případné skupiny nul mezi nimi, tudíž $k-1 = 2^r + 1$ neboli $k = 2^r + 2$. Pro takové k pak vychází $2k+1 = 2^{r+1} + 5$, což je číslo se třemi jedničkami v dvojkové soustavě, právě když $r \geq 2$.

Pro odpovídající hodnoty $m = f(k)$ tak podle (3) máme

$$\begin{aligned} m &= f(2^r + 2) = f(2^r + 1) + t(2^{r+1} + 3) = \\ &= f(2^r) + t(2^{r+1} + 1) + t(2^{r+1} + 3) = \\ &= \binom{r}{2} + 1, \quad r \geq 2, \end{aligned}$$

protože pro $r \geq 2$ je $t(2^{r+1} + 1) = 0$ a $t(2^{r+1} + 3) = 1$. Tím je hledaná množina popsána.

4. Všimněme si, že čísla $mn-1$ a m^3 jsou nesoudělná. Číslo $mn-1$ proto dělí $n^3 + 1$, právě když $mn-1$ dělí $m^3(n^3 + 1) = m^3n^3 - 1 + m^3 + 1$ neboli $mn-1$ dělí $m^3 + 1$. Ačkoli to nebylo na první pohled zjevné, je úloha vůči neznámým m a n symetrická, proto budeme dál bez újmy na obecnosti předpokládat, že $m \geq n$.

V případě $m = n$ dostáváme

$$\frac{m^3 + 1}{mn - 1} = \frac{n^3 + 1}{n^2 - 1} = n + \frac{1}{n-1}.$$

To je číslo celé, právě když $n = 2$.

Nechť je nyní $m > n$. Pokud $n = 1$, má být číslo $\frac{n^3 + 1}{mn - 1} = \frac{2}{m - 1}$ celé, což nastane jen pro $m = 2$ nebo $m = 3$.

Zbývá rozebrat případ $m > n \geq 2$. Je však $n^3 + 1 \equiv 1 \pmod{n}$, zatímco $mn - 1 \equiv -1 \pmod{n}$. Proto pro případný celočíselný podíl musí platit

$$\frac{n^3 + 1}{mn - 1} = kn - 1$$

pro vhodné celé k . Pak ovšem

$$kn - 1 < \frac{n^3 + 1}{n^2 - 1} = n + \frac{1}{n - 1}$$

neboli

$$(k - 1)n < 1 + \frac{1}{n - 1}.$$

Odtud plyne, že $k = 1$, a tedy $n^3 + 1 = (mn - 1)(n - 1)$. Máme tak

$$mn = \frac{n^3 + 1}{n - 1} + 1 = \frac{n^3 + n}{n - 1} \quad \text{neboli} \quad m = n + 1 + \frac{2}{n - 1},$$

což je celé jen pro $n = 2$ nebo $n = 3$. V obou případech vychází $m = 5$.

Úloha má tedy celkem devět řešení $(2, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(5, 2)$, $(5, 3)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 5)$ a $(3, 5)$, přičemž poslední čtyři jsme získali díky symetrii mezi m , n .

5. Z podmínky (ii) v zadání plyne, že rovnice $f(x) = x$ může mít nejvýše tři řešení, jedno na intervalu $(-1, 0)$, jedno rovné 0 a jedno na intervalu $(0, \infty)$. Dokažme sporem, že rovnice ani v jednom z uvedených intervalů $(-1, 0)$ či $(0, \infty)$ řešení nemá.

Nechť $u \in (-1, 0) \cup (0, \infty)$ je takové, že $f(u) = u$. Dosadíme-li $x = u = y = u$ do dané funkcionální rovnice, dostaneme $f(u^2 + 2u) = u^2 + 2u$. Kvadratická funkce $u^2 + 2u$, jak se lze snadno přesvědčit, zobrazuje každý z intervalů $(-1, 0)$ a $(0, \infty)$ do sebe. Proto musí platit $u^2 + 2u = u$. Ovšem ani jeden z kořenů 0 a -1 této kvadratické rovnice ve sjednocení obou intervalů neleží. Jediné řešení rovnice $f(x) = x$ tudíž může být $x = 0$.

Dosazením $x = y$ do dané funkcionální rovnice však pro všechna $x \in S$ dostáváme

$$f(x + (x + 1)f(x)) = x + (1 + x)f(x).$$

Proto musí platit $x + (1 + x)f(x) = 0$ neboli

$$f(x) = -\frac{x}{x + 1}. \quad (1)$$

Ještě ověříme zkouškou, že nalezená funkce vyhovuje zadaným podmínkám. Funkce (1) je evidentně rostoucí na S a pro všechna $x, y \in S$ splňuje

$$y + (1 + y)f(x) = y - \frac{x(1 + y)}{x + 1} = \frac{y - x}{x + 1}$$

a

$$f(x + (1 + x)f(y)) = f\left(\frac{x - y}{y + 1}\right) = -\frac{\frac{x - y}{y + 1}}{1 + \frac{x - y}{y + 1}} = \frac{y - x}{x + 1}.$$

6. Necht A je množina všech přirozených čísel tvaru $x = q_1 q_2 \dots q_{q_1}$, kde $q_1 < q_2 < \dots < q_{q_1}$ jsou jakákoli prvočísla v libovolném (tedy prvočíselném) počtu q_1 . Jinými slovy

$$A = \{2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, \dots\} \cup \{3 \cdot 5 \cdot 7, 3 \cdot 5 \cdot 11, \dots\} \cup \\ \cup \{5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17, \dots\} \cup \dots$$

Snadno se přesvědčíme, že pro libovolnou nekonečnou množinu prvočísel $S = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$, kde $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$, splňuje množina A podmínky úlohy. Stačí zvolit $k = p_1 \geq 2$, $m = p_1 p_2 \dots p_k$ a $n = p_2 p_3 \dots p_{k+1}$.

Jiné řešení. Vytvořme množinu A následovně: Pro každé přirozené $k \geq 2$ zařadíme do A právě ta přirozená čísla x , pro která $x = p_1 p_2 \dots p_k$, kde $p_1, p_2, \dots, p_k$ je k navzájem různých prvočísel, jejichž součet je dělitelný k . Pro libovolnou nekonečnou množinu prvočísel S označme $q = \min S$. Protože množina S je nekonečná, určitě v ní najdeme q prvočísel $p_1, p_2, \dots, p_q$ se stejným zbytkem mod q (podle Dirichletova principu stačí v množině S probrat $q(q - 1) + 1$, nebo dokonce jen $(q - 1)^2 + 1$ čísel, poněvadž žádné další prvočíslu už nemá nulový zbytek mod q).

Nyní stačí vzít $k = q$, $m = p_1 p_2 \dots p_k$ a $n = q p_1 p_2 \dots p_{k-1}$. Zřejmě $m \in A$, protože q čísel se stejným zbytkem mod q má součet dělitelný q , a $n \notin A$, protože součet $q - 1$ čísel se stejným nenulovým zbytkem dělitelný číslem q být nemůže.

Poznámka. Všimněme si, že úloha se týká jen čísel, jež ve svém rozkladu na prvočinitele postrádají vyšší mocninu nějakého prvočísla. Kam budou patřit ostatní složená čísla, nehraje žádnou roli. Je asi zřejmé, že počet možností, jak požadovanou množinu A sestavit, není omezen.

6. mezinárodní olympiáda v informatice



Šestá mezinárodní olympiáda v informatice IOI'94 (International Olympiad in Informatics) se konala od 3. do 10. července 1994 ve městě Haninge nedaleko hlavního města Švédska Stockholmu. Olympiády se zúčastnilo celkem 189 soutěžících (z toho 6 dívek) ze 49 zemí.

Mezinárodní olympiáda v informatice je organizována jako soutěž jednotlivců, každá země na ni může vyslat delegaci tvořenou dvěma vedoucími a nejvýše čtyřmi soutěžícími. Vedoucí delegace se automaticky stává členem mezinárodní jury, jeho zástupce se po dobu soutěže stará o soutěžní družstvo. Soutěžícími jsou studenti středních škol, případně čerství absolventi v příslušném školním roce, ale ve věku do 19 let. Soutěž je řízena mezinárodním výborem IOI a je pořádána pod patronací UNESCO.

Naši soutěžící se zúčastnili všech předchozích ročníků soutěže a po každé dosáhli velmi dobrých výsledků. Společné československé družstvo nás reprezentovalo na prvních čtyřech ročnících IOI v letech 1989–92, loni jelo na IOI'93 do Argentiny poprvé samostatné české a samostatné slovenské družstvo. Reprezenační družstvo pro mezinárodní olympiádu v informatice je každoročně vybíráno na základě výsledků, kterých studenti dosáhli v kategorii P příslušného ročníku matematické olympiády. Pro účast na IOI může být vybrán pouze úspěšný řešitel celostátního kola. Při výběru ovšem nerozhoduje pouze dosažené absolutní pořadí v celostátním kole. Ústřední výbor matematické olympiády přihlíží i k tomu, jakých výsledků jednotliví soutěžící dosáhli při řešení těch úloh 2. a 3. kola kategorie P, které jsou zaměřeny na tvorbu programů a jsou tedy bližší charakteru úloh, jaké se zadávají na IOI. Dále se při výběru berou v úvahu také výsledky dosažené v loňském ročníku MO kategorie P, případně na loňské IOI.

České reprezenační družstvo pro IOI'94 odcestovalo do Švédska v následujícím složení: *Martin Mareš*, student 3. ročníku gymnázia U libeňského zámku v Praze 8, *Daniel Škarda*, absolvent gymnázia Zborovská v Praze 5, *Robert Špalek*, student 2. ročníku gymnázia na tř. kpt. Jaroše v Brně, a *Petr Novák*, absolvent gymnázia na tř. kpt. Jaroše v Brně.

Vedoucím delegace byl jmenován doc. RNDr. *Václav Sedláček*, CSc., z přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně, jeho zástupcem RNDr. *Pavel Töpfer*, CSc., z matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Vlastní soutěž byla již tradičně soustředěna do dvou dnů. V každém soutěžním dnu byly studentům zadány k řešení tři úlohy. Soutěžní úlohy byly zvoleny vždy v den jejich řešení mezinárodní porotou složenou z vedoucích delegací všech zúčastněných států. Soutěžící pracovali samostatně u přidělených osobních počítačů typu PC 486, v každém soutěžním dnu měli na práci 5 hodin čistého času. Mohli používat některý ze čtyř předem oznámených programovacích jazyků, jimiž byly Turbo Pascal, Borland C++, LCN Logo a Quick Basic. Výsledné programy pak byly za přítomnosti studenta a vedoucího delegace testovány koordinátory. Hodnotila se jak jejich správnost, tak také rychlost výpočtu pro různá testovací data. Příliš pomalé programy, které nedokázaly vyřešit úlohu ve stanoveném a předem známém časovém limitu, byly hodnoceny jako nevyhovující. Letos bylo poprvé využito automatické testování a hodnocení studentských programů pomocí testovacích a vyhodnocovacích programů připravených předem organizátory soutěže. Na základě výsledků těchto testů byla řešení úloh obodována. Každý den mohl soutěžící získat maximálně 100 bodů. Celkové výsledky byly stanoveny jako součet bodových zisků získaných v obou soutěžních dnech.

Letošní soutěžní úlohy se ukázaly být velmi obtížné a stanovený způsob hodnocení vytvořených programů byl značně přísný. Průměrná dosažená bodová ohodnocení jednotlivých úloh byla proto o dost nižší než v minulých letech. Prvních 101 soutěžících z přítomných 189 bylo oceněno některou z medailí. Celkově bylo uděleno 16 zlatých medailí (za bodový zisk 195–148 bodů), 35 stříbrných medailí (za 145–96 bodů) a 50 bronzových medailí (za 95–65 bodů). Naši studenti navázali na dobrou tradici a opět dosáhli vynikajících výsledků. *Martin Mareš* získal zlatou medaili (162 bodů), *Robert Špalek* (121 bodů) a *Daniel Škarda* (101 bodů) získali medaile stříbrné a *Petr Novák* medaili bronzovou (72 bodů). Soutěž družstev nebyla na IOI vyhlášena a ani žádné pořadí družstev nebylo publikováno. Naše výsledky v soutěži nás ale opět řadí mezi několik nejlepších družstev na světě. Všichni naši reprezentanti byli oceněni některou z medailí.

Mimo vlastní soutěž připravili organizátoři pro všechny účastníky bohatý doprovodný program. K nejzajímavějším akcím patřila vyhlídková

plavba lodí Stockholmem, prohlídka muzea historické lodi Vasa a celodenní výlet parníkem na ostrov Utö.

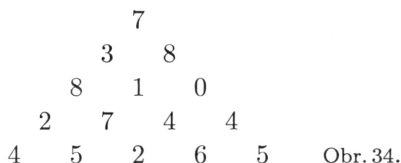
Celá olympiáda byla švédskými organizátory velmi pečlivě připravena, počínaje jejím slavnostním zahájením ve výukovém středisku stockholmské university Riksäpplet a konče slavnostním předáváním medailí vítězům soutěže na stockholmské radnici v sále, ve kterém jsou každoročně udělovány Nobelovy ceny nejlepším vědcům světa.

Příští, v pořadí sedmá mezinárodní olympiáda v informatice se bude konat ve dnech 26.6.–3.7. 1995 v Nizozemí ve městě Eindhoven. Přítomní zástupci organizátorů příštího ročníku IOI pozvali na tuto olympiádu všechny země zúčastněné v letošním ročníku. Pořadatelé počítají s rozšířením počtu členů soutěžních družstev na pět studentů a dva vedoucí. Podmínkou účasti pátého soutěžícího je nominace alespoň jedné dívky do družstva. Další ročníky IOI uspořádají postupně Maďarsko v roce 1996, Jihoafrická republika v roce 1997, Portugalsko v roce 1998, Turecko v roce 1999, Čína v roce 2000, USA nebo Thajsko nebo Irsko v roce 2001 a Korea v roce 2002. Nejbližší ročník středoevropské regionální olympiády v informatice uspořádá v květnu 1995 Maďarsko.

Účast na takovéto světové soutěži představuje pro každého nejen náročný úkol reprezentovat co nejlépe naši zemi v zahraničí, ale je také příležitostí podívat se někam do světa, poznat mnoho zajímavých míst i lidí a třeba také vyhrát některou z hodnotných cen. Každý ze současných i budoucích studentů středních škol, kdo se více zajímá o programování, má možnost dostat se za rok nebo v některém z dalších let na IOI. Stačí jenom začít řešit úlohy kategorie P matematické olympiády, věnovat přípravě na olympiádu potřebné úsilí a část svého volného času a pak také mít trochu štěstí, jako ostatně v každé soutěži. Zcela bez šance je ale jenom ten, kdo to vůbec nezkusí.

Texty soutěžních úloh

1. Trojúhelník Obrázek 34 znázorňuje trojúhelník čísel. Napište program, který spočítá maximální součet čísel podél cesty začínající v horním vrcholu trojúhelníku a končící někde na jeho spodní základně.



Obr. 34.

- ▷ V každém kroku cesty můžete jít šikmo dolů směrem doleva nebo šikmo dolů směrem doprava.
- ▷ Počet řádků v trojúhelníku je větší než 1 a menší nebo roven 100.
- ▷ Všechna čísla v trojúhelníku jsou celá z rozmezí od 0 do 99.

Vstupní data. Vstupní soubor `INPUT.TXT` obsahuje v prvním řádku počet řádků trojúhelníku. Na dalších řádcích souboru jsou uvedena čísla tvořící jednotlivé řádky trojúhelníku. Pro výše uvedený příklad trojúhelníku má vstupní soubor `INPUT.TXT` následující tvar:

```

5
7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

```

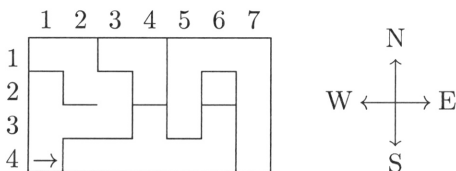
Výstupní data. Do výstupního souboru `OUTPUT.TXT` je zapsáno jedno celé číslo udávající nalezený maximální součet. Pro náš příklad bude výstupní soubor `OUTPUT.TXT` obsahovat:

30

2. Hrad Obrázek 35 znázorňuje plánec hradu. Napište program, který určí

- 1) kolik má hrad místností,
- 2) jak velká je největší místnost,
- 3) která jedna zeď hradu se má odstranit, aby vznikla co největší místnost.

Hrad se skládá ze sítě mn ($m \leq 50, n \leq 50$) jednotkových čtvercových modulů. Každý z těchto modulů může mít žádnou, jednu, dvě, tři nebo čtyři zdi.



Obr. 35.

Vstupní data. Plánek je uložen ve vstupním souboru `INPUT.TXT` a je zakódován pomocí čísel. Každému modulu odpovídá jedno číslo.

- ▷ V souboru je uložen v prvním řádku počet modulů ve směru sever-jih a ve druhém počet modulů ve směru západ-východ.

- ▷ V následujících řádcích je každý modul zakódován jedním číslem z rozmezí od 0 do 15. Toto číslo je rovno součtu kódů stěn ohraničujících modul:

1 = západní stěna
 2 = severní stěna
 4 = východní stěna
 8 = jižní stěna.

Vnitřní zdi jsou tedy uvedeny dvakrát; například jižní stěna modulu 1,1 je zároveň severní stěnou modulu 2,1.

- ▷ Zadaný hrad má vždy nejméně dvě místnosti.

Vstupní soubor **INPUT.TXT** pro příklad z obr. 2:

```

4
7
11 6 11 6 3 10 6
7 9 6 13 5 15 5
1 10 12 7 13 7 5
13 11 10 8 10 12 13

```

Výstupní data. Výstupní soubor **OUTPUT.TXT** obsahuje tři řádky. Na prvním řádku je uveden počet místností, na druhém je velikost největší místnosti (měřena počtem jednotkových modulů) a na třetím je návrh, kterou zeď je třeba odstranit. Odstraňovaná zeď je určena takto: nejprve řádek modulu, potom sloupec modulu a nakonec světová strana udávající stěnu v modulu pomocí anglické zkratky světové strany (viz obr. 2).

V našem příkladě bude výstupní soubor **OUTPUT.TXT** obsahovat:

```

5
9
4 1 E

```

Poznámka: „4 1 E“ je jednou z více možností správného řešení.

3. Prvočísla Na obr.36 je znázorněn čtverec složený z pěti řádků a pěti sloupců, přičemž v každém políčku čtverce je zapsána jedna dekadická číslice. Každý řádek, každý sloupec a každou z hlavních diagonál čtverce budeme číst jako pěticiferné prvočíslu. Řádky čtverce se čtou zleva doprava. Sloupce se čtou shora dolů. Obě diagonály se čtou zleva doprava.

1	1	3	5	1
3	3	2	0	3
3	0	3	2	3
1	4	0	3	3
3	3	3	1	1

Obr. 36

Napište program, který na základě dat obsažených ve vstupním souboru `INPUT.TXT` vytváří takové čtverce.

- ▷ Všechna prvočísla musí mít stejný ciferný součet (v našem příkladě je to 11).
- ▷ Číslice v levém horním rohu čtverce je předem pevně dána (v našem příkladě je to 1).
- ▷ Stejně prvočíslo může být v jednom čtverci obsaženo vícekrát.
- ▷ Má-li úloha více řešení, program musí nalézt všechna řešení.
- ▷ Pěticiferné prvočíslo nemůže začínat vedoucími nulami, tzn. 00003 není pěticiferné prvočíslo.

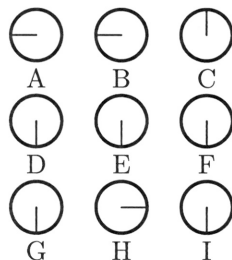
Vstupní data. Program čte data ze vstupního souboru `INPUT.TXT`, který obsahuje dva řádky. Na prvním je uveden ciferný součet prvočísel, na druhém řádku je číslice z levého horního rohu čtverce. Můžete předpokládat, že pro daná testovací data vždy existuje řešení. Pro náš příklad vypadá vstupní soubor `INPUT.TXT` takto:

```
11
1
```

Výstupní data. Program zapíše pro každé nalezené řešení pět řádků do výstupního souboru `OUTPUT.TXT`. Každý řádek řešení je tvořen pěti ciframi prvočísla. Výše uvedený příklad má tři řešení, takže soubor `OUTPUT.TXT` bude obsahovat (prázdné řádky mezi jednotlivými řešeními jsou nepovinné):

```
1 1 3 5 1
1 4 0 3 3
3 0 3 2 3
5 3 2 0 1
1 3 3 1 3
1 1 3 5 1
3 3 2 0 3
3 0 3 2 3
1 4 0 3 3
3 3 3 1 1
1 3 3 1 3
1 3 0 4 3
3 2 3 0 3
5 0 2 3 1
1 3 3 3 1
```

4. Hodiny Na obr. 37 je devět ciferníků hodin uspořádaných ve tvaru tabulky 3×3 . Cílem je, aby všechny ukazovaly 12 hodin. Máte 9 dovolených způsobů (budeme je nazývat tahy) na změnu nastavení polohy ručiček. V každém kroku si zvolíte tah určený číslem 1 až 9. Pokud si ciferníky po řádcích zleva doprava označíme A, B, C, D, E, F, G, H, I, pak tahem 1 až 9 přiřadíme tato otočení:



Obr. 37

- | | | |
|---------|----------|---------|
| 1: ABDE | 2: ADG | 3: DEGH |
| 4: ABC | 5: BDEFH | 6: GHI |
| 7: BCEF | 8: CFI | 9: EFHI |

Podle takto zvoleného čísla pootočíte o 90 stupňů (ve směru otáčení hodinových ručiček) ručičky těch ciferníků, které jsou označeny.

Vstupní údaje. Ze souboru `INPUT.TXT` přečtete 9 čísel. Tato čísla udávají výchozí pozici na cifernících: 0 znamená 12 hodin, 1 znamená 3 hodiny, 2 znamená 6 hodin a 3 znamená 9 hodin.

Výstupní údaje. Do výstupního souboru `OUTPUT.TXT` napište nějakou nejkratší posloupnost tahů, která nastaví všechny ciferníky na 12 hodin. Pokud má úloha více řešení, vypište pouze jedno z nich.

5. Autobusy Na autobusové zastávce staví několik autobusových linek. Člověk přijel na zastávku přesně ve 12:00 hod. Zůstal zde od 12:00 do 12:59 hod. a zaznamenával si časy příjezdů všech autobusů na zastávku.

- ▷ Autobusy každé linky přijíždějí na zastávku po celou dobu od 12:00 do 12:59 v pravidelných intervalech.
- ▷ Časy příjezdů jsou dány v celých minutách jako celá čísla od 0 do 59.
- ▷ Autobusy každé linky staví na zastávce v uvažovaném časovém intervalu alespoň dvakrát.
- ▷ Počet autobusových linek v testovacích příkladech bude nejvýše 17.
- ▷ Autobusy různých linek mohou přijet na zastávku současně.
- ▷ Více autobusových linek může mít stejný čas prvního příjezdu na zastávku anebo stejný interval. I když mají dvě autobusové linky stejný čas prvního příjezdu a stejný interval, jedná se o odlišné linky a obě musí být uvedeny.

Určete nejmenší počet autobusových linek, které musí zastavovat na autobusové zastávce, aby řešení vyhovovalo vstupním datům. Pro každou autobusovou linku vypište čas prvního příjezdu autobusu na zastávku a interval mezi příjezdy.

Vstupní data. Vstupní soubor `INPUT.TXT` obsahuje nejprve číslo N ($N \leq 300$), které udává, kolik autobusů přijelo na zastávku. Následují časy příjezdů všech N autobusů ve vzestupném pořadí. Příklad:

17

0 3 5 13 13 15 21 26 27 29 37 39 39 45 51 52 53

Výstupní data. Výstupní soubor `OUTPUT.TXT` obsahuje údaje o každé autobusové lince. Na jednom řádku jsou uvedeny údaje vždy o jedné lince. Každý z těchto řádků obsahuje čas příjezdu prvního autobusu na zastávku a interval mezi příjezdy autobusů této linky v minutách. Nezáleží na tom, v jakém pořadí budou jednotlivé autobusové linky na výstupu uvedeny. Pokud existuje více řešení, uveďte pouze jedno z nich. Pro výše uvedený příklad vstupních dat bude výstupní soubor obsahovat:

0 13

3 12

5 8

6. Kruh Máte kruh rozdělen do sektorů. Jsou dány tři čísla: n ($n \leq 6$), m ($m \leq 20$) a k ($k \leq 20$), kde n je počet sektorů. Napište program, který vybere a umístí celá čísla do každého sektoru; tato čísla mají být větší nebo rovno k . Po naplnění sektorů můžete vytvářet nová čísla použitím čísel z jednoho sektoru nebo sečtením čísel ze dvou nebo více sousedních sektorů.

Z nově vytvořených čísel máte vytvořit souvislou posloupnost všech celých čísel mezi m a i (tj. $m, m+1, m+2, \dots, i$). Úkolem programu je vybrat čísla do sektorů tak, aby největší číslo posloupnosti (i) bylo největší možné.

Vstupní údaje. Vstupní soubor `INPUT.TXT` obsahuje tři celá čísla (n, m, k).

Výstupní údaje. Výstupní soubor `OUTPUT.TXT` musí obsahovat:

- ▷ největší číslo v posloupnosti (i), které může být vygenerované,
- ▷ všechny uspořádání čísel do kruhových sektorů, které vytvářejí posloupnost od m do i (do každého řádku jedno). Uspořádání čísel запиšte jako seznam začínající nejmenším číslem (které nemusí být pouze jedno).

Uvědomte si, že pokud by (1123) bylo řešením, musíte vypsát i seznamy (1321), (1231) a (1132).

První ročník Středoevropské olympiády v informatice

Na základě velmi dobrých zkušeností s Mezinárodní olympiádou v informatice (International Olympiad in Informatics — IOI) se v roce 1993 zainteresovaní pracovníci ze střední a jižní Evropy rozhodli pořádat navíc regionální olympiádu v informatice. Její charakter odpovídá duchu IOI. Jde tedy o soutěž jednotlivců. Účastní se jí z každého pozvaného státu oficiální delegace, složená z vedoucího, jeho zástupce a 4 soutěžících. Přitom je ponecháno na rozhodnutí pozvané strany, zda na olympiádu vyšle studenty určené pro daný ročník IOI, nebo dá příležitost dalším talentovaným studentům. Organizace prvního ročníku se iniciativně ujali organizátoři z Rumunska.

První ročník regionální olympiády se konal na Institutu informatiky v rumunské Cluji ve dnech 26. května až 1. června 1994. Soutěžící z České republiky byli vybráni na základě výsledků letošního celostátního kola matematické olympiády v kategorii programování s tím, že naši nejlepší studenti byli nominováni na VI. ročník IOI do Stockholmu. Naše družstvo tak bylo složeno z perspektivních mladších studentů, kteří se mohou účastnit příštích ročníků IOI a tvořilo tak jistou rezervu, která jela na regionální olympiádu pro zkušenosti. Vedoucím družstva byl MŠMT ČR jmenován doc. RNDr. *Václav Sedláček*, CSc., z Masarykovy university a jeho zástupkyní RNDr. *Miroslava Kozubíková*, profesorka gymnázia na tř. kpt. Jaroše v Brně.

Regionální olympiády, pečlivě připravené rumunskými organizátory, se zúčastnila oficiální družstva z osmi zemí: České republiky, Chorvatska, Maďarska, Polska, Jugoslávie, Moldávie, Turecka a pořádajícího Rumunska. Většina z nich sem vyslala studenty, kteří se zúčastní i letošního IOI, a tato soutěž byla považována z jejich strany za formu přípravy. Pořadatelé využili výhody domácího prostředí a nominovali další tři neoficiální družstva.

Regionální soutěž v informatice byla organizována za přispění celé řady sponzorů. Oficiální zahájení i slavnostní vyhlášení výsledků proběhlo na městské radnici za přítomnosti primátora. Celý její průběh byl

sledován místními sdělovacími prostředky. Pracovníci katedry informatiky z university v Cluji pracovali ve vědeckém výboru olympiády, který garantuje její odbornou úroveň a učitelé informatiky z rumunských středních škol s nevšedním zájmem působili jako hodnotitelé studentských softwarových produktů.

Každý soutěžící řešil 6 úloh, z nichž každá byla hodnocena maximálně 100 body. Na základě počtu dosažených bodů, udělených podle výsledků testů vytvořených softwarových produktů na počítači, pak mezinárodní porota, složená z vedoucích družstev, udělila 3 zlaté, 7 stříbrných a 8 bronzových medailí. Soutěžící z České republiky dosáhli následujících výsledků: *Jiří Hájek*, student gymnázia ve Zborovské ulici v Praze, získal druhý nejvyšší počet bodů 522 a zlatou medaili. *David Stanovský*, student gymnázia v Pardubicích, získal s 372 body bronzovou medaili. Soutěže se dále zúčastnili *Jan Kratochvíl* z gymnázia U libeňského mostu v Praze a *Petr Kaňovský* z gymnázia na tř. kpt. Jaroše v Brně.

S ohledem na přípravný charakter soutěže z naší strany lze výsledky hodnotit jako dobré. Pokud budeme chtít v budoucnu lépe uspět na podobných soutěžích, bude nezbytné zvýšit zainteresovanost učitelů středních škol na přípravě studentů a nespoléhat pouze na talent a píli doslova několika jedinců.

Účastníci olympiády jednoznačně ocenili přínos této olympiády a rozhodli o konání jejího příštího ročníku. Bude uspořádán v podobném termínu jako letos v Maďarsku, které v roce 1996 bude organizátorem i 8. ročníku IOI.

V průběhu olympiády byl zorganizován seminář o studijních plánech informatiky a o přípravě učitelů informatiky pro střední školy. Příspěvek o přípravě učitelů informatiky v České republice byl vyslechnut s velkým zájmem. Systém výchovy a výuky informatiky na středních školách v Rumunsku je dle našeho názoru na velice solidní úrovni. Vybavenost škol výpočetní technikou je mimo jiné i díky nadaci Soros překvapivě dobrá.

doc. RNDr. Leo Boček, CSc., RNDr. Karel Horák, CSc.,
RNDr. Pavel Leischner, PhD., prof. RNDr. Jozef Moravčík, DrSc.,
doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc.

**ČTYŘICÁTÝ TŘETÍ ROČNÍK
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH**

Vydala Univerzita Palackého v Olomouci,
Biskupské nám. 1, 771 11 Olomouc
Sazbu programem $\text{\TeX}$ připravil Karel Horák
Vytisklo Polygrafické středisko
Univerzity Palackého v Olomouci
1. vydání
Olomouc 2016

ISBN 978-80-244-4922-7

matematická olympiáda

MO

ISBN 978-80-244-4922-7



9 788024 449227