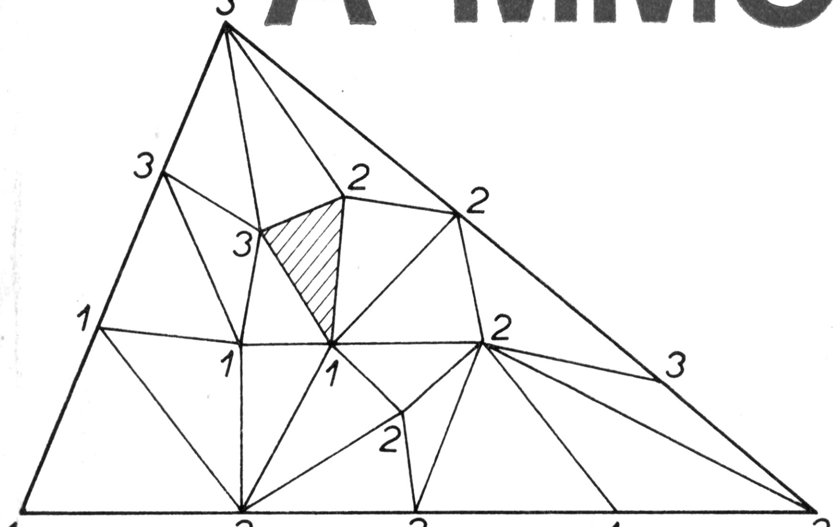
[dokumenty-01] Vybrané úlohy matematické olympiády A + MMO

MO

Vybrané úlohy matematické olympiády

A+MMO



2
8
27
56
61
71

Vybrané úlohy matematické olympiády

KATEGORIE **A + MMO**

Vybrané úlohy matematické olympiády

KATEGORIE **A + MMO**

Miroslav Fiedler
Jaroslav Zemánek

STÁTNÍ
PEDAGOGICKÉ
NAKLADATELSTVÍ
PRAHA

Zpracovali prof. RNDr Miroslav Fiedler DrSc. a Jaroslav Zemánek
Recenzovali doc. RNDr Milan Hejný CSc., RNDr Ivan Korec CSc.
a doc. Jan Vyšín CSc.
Lektorský posudek provedl prof. Emil Kraemer

Předmluva

Vědomosti předpokládané pro porozumění této knížce jsou zcela elementární a v podstatě vlastní všemu živému. Např. pes nebo zajíc utíká za kořistí nebo před nepřítelem vždy pokud možno přímočaře, neboť zajisté zná trojúhelníkovou nerovnost. Také každá liška ví, že když slepice jsou v kurníku a kurník ve dvoře, pak slepice musejí být ve dvoře (transitivita inkluse), a nehledá je jinde. Nejhezčí květy bývají souměrné kolem středu. Onomu podivuhodnému řádu podléhali i starořečtí myslitelé, když prvně studovali řez kuželové plochy rovinou a objevili elipsu. A o dva tisíce let později se ukázalo, že dráhami našeho i jiných světů jsou vlastně elipsy. Tato vzrušující harmonie přírody probouzí v člověku cit, který nazýváme matematikou. A právě pro takového čtenáře, kterého začíná matematika zajímat, je napsána tato knížka.

Na obecně přístupné úrovni pokusili jsme se v ní naznačit jisté charakteristické prvky matematického myšlení. K tomu se výborně hodí některá témata z dosavadních matematických olympiád našich i mezinárodních. Doplnili jsme je ovšem řadou dalších příkladů v podobném duchu. Přesto však si myslíme, že tento delikátní úkol nebyl snadný a samozřejmě mohou se vyskytnout názory na to, jak jsme jej realizovali.

Snažili jsme se, aby byly optimálně zastoupeny všechny složky tzv. elementární matematiky (aritmeticko-algebraická, geometrická, funkční, logická, numerická, kombinatorická, konečná i nekonečná, abstraktní i názorná) a zdůrazněna jejich vzájemná jednota (viz např. řešení úloh 3, 15, 35, 47, 59, 62, 69, 70, 71, 78, 83, 87, 88, 96, 97, 100, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 109, 110, 113 aj.). Rovněž metody důkazů (konstruktivní i existenční, početní i geometrické, čistě logické, přímé či nepřímé atd.) možná začátečníka často překvapí. Toto jsme považovali za důležité, neboť tyto složky či metody jakož i jejich nejrozmanitější kombinace se podivuhodně zobecňují v ohromné a neustálého *vývoje schopné struktuře současné matematiky. Vznikly nové, značně bohatší a zajímavější obory. Není však těžké rozpoznat třeba v těch z nejvýznamnějších původní geometrické ideje. Proto sdílíme přesvědčení, že čtenář, maje na vědomí principy a základy, z nichž matematika začala vyrůstat, bude se moci správněji orientovat v její dnešní budově. Též proto, že mnohé dnes centrální pojmy a metody jsou, jak jsme již naznačili, vlastně přirozeným zobecněním dřívějších představ. Z těchto důvodů (a také s ohledem na ostatní vědy a techniku) pokládáme zvolenou tématiku za zvláště vhodnou a nad jiné osvědčenou na úvod před vyšším studiem.*

Máme však pro to ještě jedno ospravedlnění. Aby nějaká věta mohla zaujmout v matematice významnější místo, musí být nejen pravdivá, ale ještě také užitečná, zajímavá a „krásná“. Jeden z velkých matematiků kdysi prozradil, že se vždy snažil spojovat v matematice pravdu s krásou, ale kdykoli musel volit jednu nebo druhou, volil zpravidla krásu. Skutečně, estetický smysl jakožto výraz všeobecné touhy po harmonii bývá důležitým činitelem v tvůrčí práci. Domníváme se, že se nám podařilo alespoň některými příklady a důkazy vyjádřit hlubokou estetičnost matematického způsobu myšlení. A jestliže si vzpomenete, jak matematika vznikla, pak vám bude jasné, odkud se v ní vzala sama spravedlnost a ještě tolik krásy.

Odtud pramení též obecnější výchovný význam této vědy. A je také nasnadě, jak to přijde, že výsledky matematiky jaksi dobře zapadají do světa, který pozorujeme, a tím přinášejí neocenitelný užitek ostatním snahám člověka.

Chtěli bychom však varovat před idealizováním matematiky. Soudíme, že žádný model pozorovaných skutečností, tedy ani matematika, nemůže dávat věrný obraz světa třeba už jen proto, že zajisté není úplný (neobráží všechny vlastnosti vesmíru). A to je dobře, neboť tak zůstávají neodhalena mnohá tajemství. Na druhé straně však nelze popřít, že již sama analýza zákonitostí v rámci matematiky může leccos napovědět.

Vraťme se k obsahu nynější knížky. Jednotlivými úlohami, které *jsme vybrali, je možno se zabývat celkem v libovolném pořadí. Třicet důmyslnějších jsme označili hvězdičkou. Ke každé jsme připojili nejméně jedno řešení a popř. další poznámky. Čtenářům však doporučujeme, aby se vždy sami snažili najít řešení anebo si alespoň promysleli smysl a problematiku úlohy, dříve než si řešení prohlédnou. Proto také uvádíme nejprve jenom zadání úloh a až potom vše ostatní. Věříme, že pro člověka nejcennější jsou vlastní silou vybojované zápasy a přejeme tudíž čtenáři hodně trpělivosti na obtížnějších místech této knížky.*

V poznámkách, které se bezprostředně po některých úlohách nabízejí, je možno se jakoby mimochodem a v příhodnou chvíli dovědět o širších souvislostech. Zaměřili jsme se zejména na tyto okruhy otázek: konvexní funkce, vlastnosti čtyřstěnů, geometrie mřížových bodů, teorie množin, kombinatorická geometrie, pojem limity a kompaktnosti. Také v nich můžete najít řadu řešitelských triků, jimiž ostatně hýří snad každá stránka a které možná někomu pomohou vyhrát matematickou olympiádu, jestliže se jí zúčastní. V tomto smyslu tedy přehled 113 úloh vytištěných v prvé části nevystihuje plně obsah knížky. Dokonce v poznámce za př. 49 se zmiňujeme o jednom problému, jehož řešení nám není známo. Koho zajímá problém nekonečna, nechť si přečte např. úlohu 107 a poznámky, které následují za jejím řešením.

Existují ovšem i jiné populárně vědecké knížky resp. články vhodné k přemýšlení. Na některé odkazujeme v závěru. Lze totiž předpokládat, že stupeň vyspělosti získaný svědomitým prostudováním alespoň části materiálů, které zde předkládáme, umožní čtenáři přistoupit nikoli bez naději ke studiu další vážnější literatury.

Vybranými příklady nemíníme nikoho učit absolutní dokonalosti v řešení olympijských úloh, poněvadž dosažení takového cíle se nám nezdá reálné a pro další rozvoj mladého člověka ani žádoucí. Prosíme jen, aby čtenář nepodceňoval ideje obsažené v této knížce. Neboť nejmoudřejším mužům našeho tisíciletí pomohla právě euklidovská matematika a z ní plynoucí filosofie *k principiálním objevům, jimž jako žádným jiným vděčíme za možnost vědeckého poznání.*

Pravda, k pochopení soudobých problémů bude čtenář muset později studovat další obory a teorie. Přáli bychom si, aby schopnosti rozvinuté ve hře s naší knížkou usnadnily mu tuto nelehkou cestu.

Praha, leden 1975

Autoři

Úlohy

1. Dokažte, že zlomek

$$\frac{21n + 4}{14n + 3},$$

v němž n je přirozené číslo, nelze zkrátit.

2. Číslo $17^{19} + 19^{17}$ je dělitelné číslem $17 + 19$. Dokažte.

3.* Dokažte, že ke každému celému číslu c existuje nekonečná množina M_c složená z přirozených čísel a taková, že pro každé $m \in M_c$ platí

$$c = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \ldots \pm m^2$$

při vhodné volbě znamének.

4. Najděte všechna přirozená čísla n, pro něž je číslo $2^n - 1$ druhou nebo vyšší mocninou (s celým exponentem) přirozeného čísla.

5. a) Najděte všechna přirozená čísla n, pro něž je číslo $2^n - 1$ dělitelné sedmi.

b) Dokažte, že pro žádné přirozené číslo n není číslo $2^n + 1$ dělitelné sedmi.

6. Najděte všechna přirozená čísla n, která mají tuto vlastnost: Množinu

$$\{n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4, n + 5\}$$

lze rozložit ve dvě podmnožiny bez společného prvku tak, že součin všech prvků jedné z těchto podmnožin je roven součinu všech prvků druhé podmnožiny.

7. Pro které dvojice celých čísel x, y platí, že obě čísla $\frac{1 + x}{y}$, $\frac{1 + y}{x}$ jsou celá? Výsledek znázorněte náčrtkem v rovině pravoúhlých souřadnic x, y.

8. Vyjasněte, zda čtverec některého přirozeného čísla začíná čtyřčíslím 1976.

9. Je dán trojčlen: $2x^2 - x - 36.$

Najděte všechna celá čísla x, pro něž je hodnota daného trojčlenu rovna druhé mocnině prvočísla.

10. Nechť n je přirozené číslo a $f(x)$ mnohočlen jedné proměnné x s celočíselnými koeficienty. Písmenem M označme množinu všech celých čísel x takových, že n dělí $f(x)$. Vyšetřte, zda se počet prvků množiny M může rovnat vašemu oblíbenému číslu.

11. Buď n přirozené číslo. Dokažte, že z čísel $0, 1, 2, \ldots, 3^n - 1$ lze vybrat 2^n různých čísel, z nichž žádné není aritmetickým průměrem jiných dvou vybraných čísel.

12. Přirozená čísla p, q jsou nesoudělná právě tehdy, jsou-li nesoudělná čísla $2^p - 1$, $2^q - 1$. Dokažte.

13. Jsou-li m, n dvě různá přirozená čísla, pak čísla $2^{2^m} + 1$, $2^{2^n} + 1$ jsou nesoudělná. Dokažte a odvoďte z toho, že existuje nekonečně mnoho prvočísel.

14. Zjistěte všechna přirozená čísla, která nelze vyjádřit jako součet aspoň dvou, ale méně než 1976 po sobě následujících přirozených čísel.

15.* Dokažte, že posloupnost

$$\{2^n - 3\} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

obsahuje nekonečně mnoho čísel, z nichž každá dvě jsou nesoudělná.

16. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí nerovnost

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}.$$

17. Zjištěte, pro která reálná čísla x je definována funkce

$$y = \sqrt{1 - \frac{x}{4}|x| + \sqrt{1 - \frac{x}{2}|x|} -}$$

$$\sqrt{- \sqrt{1 - \frac{x}{4}|x|} - \sqrt{1 - \frac{x}{2}|x|}},$$

a sestrojte její graf.

18. Předpisem

$$y = \frac{px}{x^2 + p^2 + 1}$$

je dána funkce reálné proměnné x s reálným parametrem p. Dokažte, že všechny hodnoty, kterých tato funkce nabývá, leží v intervalu $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$.

Vypočtěte parametr p tak, aby funkce měla největší hodnotu $\frac{1}{4}$; v tomto případě vyšetřte její průběh a načrtněte její graf.

19. Je možno rozložit množinu všech přirozených čísel na dvě části tak, aby žádná neobsahovala nekonečnou aritmetickou posloupnost?

20. Najděte všechny reálné kořeny rovnice

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x,$$

kde p je reálný parametr.

21. Dokažte, že ke každému přirozenému číslu n existuje přirozené číslo m takové, že platí

$$(\sqrt{2} + 1)^n = \sqrt{m + 1} + \sqrt{m}$$

a zároveň

$$(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{m + 1} - \sqrt{m}.$$

22. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= a, \\
x^2 + y^2 + z^2 &= b^2, \\
xy &= z^2,
\end{aligned}
$$

kde a, b jsou daná reálná čísla.

Udejte nutné a postačující podmínky pro daná čísla a, b, aby existovalo řešení soustavy skládající se z kladných a navzájem různých čísel.

23. Najděte všechny čtveřice reálných čísel x_1, x_2, x_3, x_4, pro něž platí, že součet každého z těchto čísel se součinem tří zbývajících je roven dvěma.

24. Je dána soustava rovnic

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0, \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

s neznámými x_1, x_2, x_3. Její koeficienty splňují tyto podmínky:

a) a_{11}, a_{22}, a_{33} jsou kladná čísla;
b) všechny ostatní koeficienty jsou záporná čísla;
c) v každé z daných rovnic je součet všech tří koeficientů kladné číslo.

Dokažte, že daná soustava má jediné řešení $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

25. Řešte soustavu

$$
\begin{aligned}
|a_1 - a_2|\, x_2 + |a_1 - a_3|\, x_3 + |a_1 - a_4|\, x_4 &= 1, \\
|a_1 - a_2|\, x_1 + |a_2 - a_3|\, x_3 + |a_2 - a_4|\, x_4 &= 1, \\
|a_1 - a_3|\, x_1 + |a_2 - a_3|\, x_2 + |a_3 - a_4|\, x_4 &= 1, \\
|a_1 - a_4|\, x_1 + |a_2 - a_4|\, x_2 + |a_3 - a_4|\, x_3 &= 1,
\end{aligned}
$$

kde a_1, a_2, a_3, a_4 jsou čtyři daná navzájem různá reálná čísla.

26.* Řešte soustavu rovnic

$$x_5 + x_2 = yx_1, \qquad x_3 + x_5 = yx_4,$$
$$x_1 + x_3 = yx_2, \qquad x_4 + x_1 = yx_5,$$
$$x_2 + x_4 = yx_3,$$

kde y je parametr.

27. Je dáno n kladných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, jejichž součin je 1. Dokažte, že platí

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqq n,$$

přičemž rovnost zde nastává právě tehdy, je-li $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$.

28. Jestliže $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$ a $b_1 \leqq b_2 \leqq \ldots \leqq b_n$, pak platí

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \leqq$$
$$\leqq n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n),$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, je-li buď $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ nebo $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$. Dokažte.

29. Jsou-li d_1, d_2, d_3 kladná čísla taková, že $d_1 \leqq d_2 \leqq d_3$, pak pro libovolná nezáporná čísla c_1, c_2, c_3 platí

$$(c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3)\left(\frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2} + \frac{c_3}{d_3}\right) \leqq$$
$$\leqq (c_1 + c_2 + c_3)^2 \frac{(d_1 + d_3)^2}{4d_1d_3}.$$

Dokažte.

30. Jsou-li x, y kladná čísla a $m > 1$ přirozené, pak platí

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^m \leqq \frac{x^m + y^m}{2}.$$

Dokažte a zjistěte, kdy nastává rovnost.

31. Dokažte, že tvrzení
„Pro libovolná reálná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ platí nerovnost

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\dots(a_1 - a_n) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)\dots$$
$$\dots(a_2 - a_n) + \dots + (a_n - a_1)(a_n - a_2)\dots(a_n - a_{n-1}) \geqq 0\text{“}$$

je pravdivé pro $n = 3$ a $n = 5$ a není pravdivé pro žádné jiné přirozené číslo $n > 2$.

32. Jsou-li koeficienty a, b, c, d mnohočlenu $ax^3 + bx^2 + cx + d$ celá čísla taková, že ad je liché a bc sudé, pak aspoň jeden kořen tohoto mnohočlenu není racionální. Proč?

33. Nechť mnohočlen $p(x)$ s celočíselnými koeficienty nabývá hodnoty 5 pro pět různých celočíselných hodnot x. Dokažte, že $p(x)$ nenabývá hodnoty 8 pro žádné celé x.

34. Po moři (považovaném za rovinu) pluly dvě lodi stálými rychlostmi při stálých kursech. V 9.00 hod. činila jejich vzdálenost 20 mil, v 9.35 hod. 15 mil a v 9.55 hod. 13 mil. Kdy si byly lodě nejblíže a jaká byla při tom jejich vzdálenost?

35.* Komplexní číslo z není reálné nezáporné, právě když lze najít přirozené číslo n a kladná čísla $a_0, a_1, \dots, a_n$ tak, že platí

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = 0.$$

Dokažte.

36. Dokažte, že všechny nerovnosti

$$\sin \alpha \leqq \sin 2\alpha \leqq \sin 3\alpha \leqq \dots$$

platí jen pro čísla tvaru $\alpha = k\pi$, kde k je celé číslo.

37. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1.$$

38. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\cos^n x - \sin^n x = 1,$$

v níž n je dané přirozené číslo.

39. Najděte všechna čísla x z intervalu $0 \leqq x \leqq 2\pi$, která vyhovují nerovnicím

$$2 \cos x \leqq \left| \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} \right| \leqq \sqrt{2}.$$

40. V rovině je dána soustava pravoúhlých souřadnic. Najděte množinu všech bodů, jejichž souřadnice x, y splňují všechny nerovnice

$$0 \leqq x \leqq \pi, \quad 0 \leqq y \leqq \pi,$$
$$1 + |\cos x| \leqq 2 \sin^2 y.$$

41. Buďte dány reálné konstanty $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (kde n je dané přirozené číslo) a funkce

$$f(x) = \cos (a_1 + x) + \frac{1}{2} \cos (a_2 + x) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{2^{n-1}} \cos (a_n + x)$$

reálné proměnné x.

Dokažte tato tvrzení:

1° Existuje číslo x_0 takové, že $f(x_0) = 0$.
2° Jestliže také $f(x_1) = 0$, pak $x_1 = x_0 + m\pi$ pro vhodné celé m.

42. Dokažte, že v každém trojúhelníku platí

$$1 < \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leqq \frac{3}{2},$$

kde α, β, γ jsou velikosti vnitřních úhlů.

43. Jsou-li α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka, potom platí

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geqq \frac{3}{4}.$$

Dokažte. Najděte všechny trojúhelníky, pro něž v předchozím vztahu platí rovnost.

44. Buď x reálné číslo. Které z čísel $\cos \sin x$ a $\sin \cos x$ je větší?

45.* Dokažte, že platí

$$\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

46. V rovině je dáno $n \geqq 3$ bodů, které neleží v jedné přímce.

Potom lze najít kružnici, která obsahuje alespoň tři z daných bodů, přičemž žádný z daných bodů neleží uvnitř této kružnice. Dokažte.

47.* V rovině je dána množina n bodů ($n \geqq 3$), každé dva z nich jsou spojeny úsečkou. Označme d délku nejdelší z těchto úseček. *Průměrem* dané množiny nazveme každou z těchto úseček, která má délku d.

Dokažte, že počet průměrů dané množiny je roven nejvýše číslu n.

48. Konvexní n-úhelník, jehož po sobě následující strany mají délky $a_1, a_2, \ldots, a_n$, má tyto vlastnosti:

a) všechny jeho vnitřní úhly jsou shodné;

b) pro délky jeho stran platí nerovnosti

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n.$$

Pak je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Dokažte.

49.* V rovině je dána konvexní množina K. Její bod E nazveme *ekvichordálním bodem*, jestliže všechny přímky této roviny, které procházejí bodem E, protínají množinu K v úsečce stejné délky.

Dokažte, že množina K nemá více než dva ekvichordální body.

50. V rovině je dána kružnice k o středu S a poloměru 1. Buď ABC libovolný trojúhelník, jemuž je kružnice k vepsána, s označením voleným tak, že

$$SA \leqq SB \leqq SC.$$

Najděte geometrické místo vrcholů A (B, C) všech takových trojúhelníků.

51. V rovině je dán rovnoramenný trojúhelník ABC, jehož základna AB je menší než jeho rameno. Sestrojte uvnitř úseček CA, CB po řadě body X, Y a v polorovině XYC bod Z tak, aby platilo

$$\triangle XYZ \cong \triangle ABC.$$

Najděte geometrické místo bodů Z.

52. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC (v němž $\sphericalangle ACB = 90°$), jsou-li dány délky těžnic t_1, t_2 příslušných k vrcholům A, B. Proveďte diskusi řešitelnosti.

53. V rovině jsou dány dva různé body A, M o vzdálenosti d. Dále je dáno kladné číslo v. V této rovině sestrojte kosočtverec $ABCD$ o výšce v tak, aby bod M byl středem jeho strany BC.

Najděte podmínku řešitelnosti a zjistěte počet řešení úlohy. Může být řešením čtverec?

54. Pouhým kružítkem sestrojte střed úsečky, jejíž krajní body jsou dány.

55. Je dána kružnice k a na ní tři různé body A, B, C. Sestrojte na kružnici k další bod D tak, aby vznikl čtyřúhelník $ABCD$, jemuž lze vepsat kružnici.

56. Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník APQ s přeponou AP. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby přímky BC, CD procházely po řadě body P, Q. Vyjádřete délku strany čtverce $ABCD$ pomocí délky a odvěsny daného trojúhelníku.

57. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC, jehož přepona BC je rozdělena na lichý počet n shodných úseček. Označme α úhel, pod kterým je z bodu A vidět tu ze shodných úseček, která obsahuje střed přepony daného trojúhelníku; dále označme h výšku a a délku přepony daného trojúhelníku.

Dokažte, že potom platí

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)\,a}.$$

58. Do trojúhelníku ABC se stranami o délkách a, b, c vepíšeme kružnici a sestrojíme k ní tři nové tečny rovnoběžné se stranami daného trojúhelníku. Každá z těchto tečen utíná od trojúhelníku ABC po jednom trojúhelníku. Do každého z těchto tří nových trojúhelníků vepíšeme kružnici. Vypočtěte součet obsahů všech čtyř vepsaných kruhů.

59. V rovině je dán konvexní pětiúhelník P_1 s vrcholy A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Označme P_i $(i = 2, 3, 4, 5)$ pětiúhelník, který se dostane z P_1 rovnoběžným posunutím, při němž bod A_1 přejde do bodu A_i $(i = 2, 3, 4, 5)$.

Dokažte, že alespoň dva z pětiúhelníků P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 mají společný vnitřní bod.

60. V rovině leží pět bodů O, A, B, C, D. Pro jejich vzdálenosti platí $OA \leqq OB \leqq OC \leqq OD$.

Dokažte, že pro obsah P konvexního čtyřúhelníku, jehož vrcholy jsou body A, B, C, D, vždy platí

$$P \leqq \frac{1}{2}(OA + OD)(OB + OC).$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost.

61. Uvnitř stran AB, BC, CA trojúhelníku ABC zvolíme po řadě libovolné body K, L, M. Dokažte, že obsah aspoň jednoho z trojúhelníků MAK, KBL, LCM je menší nebo rovný čtvrtině obsahu trojúhelníku ABC.

62. Je dán dutý úhel $\sphericalangle XAY$ a uvnitř něho bod M. Na polopřímkách AX, AY sestrojte po řadě body B, C takové, aby přímka BC procházela bodem M a aby obsah trojúhelníka ABC byl co nejmenší.

63.* Jsou dána kladná čísla a, b, c, d. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$ s $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ tak, aby jeho obsah byl co největší. Zjistěte podmínku řešitelnosti.

64.* Pro každé čtyři body A, B, C, D v rovině platí

$$AB \,.\, CD + AD \,.\, BC \geqq AC \,.\, BD.$$

Rovnost zde nastává, právě když body A, B, C, D leží (v tomto cyklickém pořadí) na kružnici nebo v přímce (v uspořádání A, B, C, D nebo B, C, D, A nebo C, D, A, B nebo D, A, B, C). Dokažte.

65. Je dán tečnový čtyřúhelník. Dokažte, že úsečky spojující dotykové body protějších stran s vepsanou kružnicí procházejí průsečíkem úhlopříček.

66. Na kulové ploše o středu S a poloměru $r = 1$ buďte dány čtyři body A, B, C, D, které jsou vrcholy čtyřstěnu $ABCD$. Jestliže bod S leží uvnitř čtyřstěnu $ABCD$, potom alespoň jedna ze tří hran AB, AC, AD má délku větší než $\sqrt{2}$. Dokažte.

67. V každém čtyřstěnu existuje takový vrchol, že z úseček rovných hranám, které z něho vycházejí, lze sestrojit trojúhelník. Dokažte.

68. Je-li odchylka každých dvou stěn čtyřstěnu ostrý úhel, pak všechny stěny tohoto čtyřstěnu jsou ostroúhlé trojúhelníky. Dokažte.

69.* Nechť $A_1A_2A_3A_4$ je čtyřstěn, φ_{ik} ($i \neq k$, i, $k = 1$, 2, 3, 4) vnitřní úhly stěn, protější k hranám A_iA_k. Potom platí:

a) alespoň jeden z úhlů $\varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{14}$ je ostrý;
b) alespoň jeden z úhlů $\varphi_{13}, \varphi_{14}, \varphi_{23}, \varphi_{24}$ je ostrý;
c) alespoň tři ze šesti úhlů φ_{ik} jsou ostré.

Dokažte a najděte příklad čtyřstěnu, který má právě tři ostré vnitřní úhly.

70.* V prostoru je dáno $n \geqq 3$ různých bodů tak, že žádné tři z nich netvoří trojúhelník s maximálním úhlem menším než 120°. Potom lze tyto body označit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tak, že pro všechna přirozená i, j, k, $1 \leqq i < j < k \leqq n$ platí $\sphericalangle A_iA_jA_k \geqq 120°$. Dokažte.*)

71.* V prostoru je dána konečná množina bodů taková, že každá přímka procházející dvěma jejími body obsahuje ještě alespoň jeden další bod této množiny.

Dokažte, že všechny body dané množiny leží v jedné přímce.

72. V prostoru je dána bodová množina M, jejíž pravoúhlé průměty na všechny roviny jsou kruhy.
Dokažte, že M obsahuje kulovou plochu.

73. Je dán čtyřstěn $ABCD$, jehož hrany AB, BC, CD, DA se dotýkají jisté kulové plochy. Dokažte, že dotykové body leží v jedné rovině.

74. Nutná a postačující podmínka k tomu, aby bylo možno sestrojit kulovou plochu, která by se dotýkala všech hran čtyřstěnu, je, aby součty všech tří dvojic protějších hran si byly rovny. Dokažte.

75. Buď $SABC$ čtyřstěn. Existuje-li pět kulových ploch, z nichž každá se dotýká šesti přímek SA, SB, SC, AB, BC, CA, pak je tento čtyřstěn pravidelný. Obráceně ke každému

---

*) V této úloze výjimečně užíváme značky $\sphericalangle$ nejen pro tzv. duté úhly, ale i pro úhly nulové a přímé.

pravidelnému čtyřstěnu lze sestrojit pět takových kulových ploch.

Dokažte obě tyto věty.

76.* V prostoru je dán bod P a množina bodů M taková, že její průnik s každou rovinou procházející bodem P je kruh. Dokažte, že M je koule.

77. Čtyřstěn $ABCD$ je rozdělen ve dvě tělesa rovinou ε rovnoběžnou s přímkami AB, CD; poměr vzdáleností roviny ε od přímky AB a od přímky CD je roven k. Vypočtěte poměr objemů obou vzniklých těles.

78. Na jaký nejmenší počet čtyřstěnů lze rozřezat krychli?

79. Body $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou právě všechny vrcholy konvexního mnohostěnu,

$$d = \max A_i A_j \qquad \text{pro } i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Dokažte, že vzdálenost každých dvou bodů tohoto tělesa je menší nebo rovna d.

80. Výšky čtyřstěnu $ABCD$ (tj. přímky vedené vrcholy kolmo k rovinám protilehlých stěn) se protínají v jednom bodě právě tehdy, platí-li

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2.$$

Dokažte.

81. V prostoru je dána úsečka AB a přímka $p \perp AB$. Najděte geometrické místo průsečíků výšek trojúhelníků ABX, probíhá-li bod X přímku p.

82. Je dán bod A a úsečka BC. Najděte geometrické místo všech bodů v prostoru, které jsou vrcholy pravých úhlů, jejichž jedno rameno obsahuje bod A a druhé rameno má s úsečkou BC společný aspoň jeden bod.

83.* Je dán čtyřstěn $ABCD$ a jeho vnitřní bod M; objemy čtyřstěnů $MBCD$, $MACD$, $MABD$, $MABC$ označme po řadě V_A, V_B, V_C, V_D. Dokažte, že platí

$$V_A \cdot \overrightarrow{MA} + V_B \cdot \overrightarrow{MB} + V_C \cdot \overrightarrow{MC} + V_D \cdot \overrightarrow{MD} = \vec{0}.$$

84. Čtyřstěn $ABCD$ má vlastnost, že

$$AB = BC = CD = DA = 1.$$

Dokažte, že jeho objem je nejvýše $\frac{2}{27}\sqrt{3}$. Může nastat rovnost?

85.* Má-li jediná hrana čtyřstěnu délku větší než 1, pak je jeho objem menší nebo roven $\frac{1}{8}$. Dokažte.

86.* Je dán čtyřstěn $ABCD$ a bod D_1, který leží uvnitř podstavy ABC. Rovnoběžky k přímce DD_1, vedené vrcholy A, B, C, protínají po řadě roviny BCD, CAD, ABD v bodech A_1, B_1, C_1.

Dokažte, že objem čtyřstěnu $ABCD$ je roven jedné třetině objemu čtyřstěnu $A_1B_1C_1D_1$.

87.* Čtyři body čtyřstěnu, které neleží v jedné rovině, mají stejný součet vzdáleností od rovin jeho stěn. Dokažte, že stěny tohoto čtyřstěnu jsou navzájem shodné trojúhelníky.

88.* Najděte geometrické místo středů všech kruhů o poloměru $\frac{1}{2}$, které lze umístit do dané krychle o hraně 1.

89. Je dán čtyřstěn $ABCD$ a jeho vnitřní bod X. Dokažte, že existuje kladné číslo r takové, že každá koule o poloměru r, která neobsahuje žádný z vrcholů A, B, C, D, neobsahuje ani bod X.

90. Soutěže se zúčastnilo pět žáků A, B, C, D, E. Kdosi předpověděl, že výsledné umístění bude $ABCDE$. Tato předpověď se však nesplnila: žádný soutěžící nebyl na předpověděném místě a žádná dvojice bezprostředně za sebou následujících soutěžících nebyla předpověděna správně.

Kdosi jiný předpověděl umístění *DAECB*. Tato předpověď byla správnější: právě dva soutěžící byli na předpověděných místech a právě dvě dvojice bezprostředně za sebou následujících soutěžících byly předpověděny správně.

Jaké bylo skutečné výsledné umístění?

91. Je dáno $n \geqq 3$ bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce, a množina U skládající se z n (různých) úseček, které spojují vždy dva z daných bodů.

Pak lze z daných n bodů vybrat $k \geqq 3$ bodů $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tak, že všechny úsečky A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{k-1}A_k$, A_kA_1 náležejí množině U. Dokažte.

92.* Sedmnáct osob si navzájem dopisuje, každá z nich se všemi ostatními. V celé korespondenci se objevují celkem jen tři různá témata. Každá dvojice osob si spolu dopisuje pouze o jednom z těchto témat.

Dokažte, že existují alespoň tři osoby, které si navzájem píší o témže tématu.

93. Kolik existuje (navzájem neshodných) trojúhelníků, jejichž délky stran jsou přirozená čísla nepřevyšující dané přirozené číslo n?

94. Na stole leží patnáct časopisů, které jej celý pokrývají. Dokažte, že lze ubrat sedm z nich tak, aby zbývajících osm časopisů zakrývalo alespoň osm patnáctin plochy stolu.

95. Jaký je největší možný počet oblastí, na které rozdělují kruh úsečky spojující n bodů daných na jeho obvodu?

96.* V rovině je dáno 100 bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Uvažujme všechny trojúhelníky, jejichž všechny tři vrcholy jsou některé z daných bodů.

Dokažte, že nejvýše 70 % uvažovaných trojúhelníků jsou trojúhelníky ostroúhlé.

97.* Trojúhelník, jehož vrcholy jsou označeny čísly *1*, *2*, *3*, je rozdělen na konečný počet menších trojúhelníků, z nichž každé dva mohou mít společný pouze vrchol anebo celou stranu. Každý z vrcholů těchto menších trojúhelníků je označen jedním z čísel *1*, *2*, *3*, a to tak, že se na žádné straně základního trojúhelníku neobjevuje číslo jeho protějšího vrcholu; jinak je označení libovolné.

Dokažte, že vrcholy alespoň jednoho z menších trojúhelníků jsou označeny třemi různými čísly *1*, *2*, *3*.

98. Zrcadlením podle průměru ciferníku hodin přejdou ručičky do nových poloh, které mohou být v rozporu s mechanismem hodin, tzn. nemusejí ukazovat možný čas. (např. v pravé poledne nedává obraz ručiček podle průměru 9—3 možný čas.)

Pro které časy a pro které polohy osy souměrnosti vzniká po zrcadlení možný čas?

99. V rovině buď dána soustava kartézských souřadnic s počátkem P. Body, jejichž obě souřadnice jsou celá čísla, nazveme *mřížové body*. Budiž $p > 2$ dané přirozené číslo. Mřížový bod (p, k), kde $1 \leqq k \leqq p - 1$, označme A_k.

Dokažte, že p je prvočíslo, právě když se počet mřížových bodů uvnitř každého z trojúhelníků

$$PA_1A_2, PA_2A_3, \ldots, PA_{p-2}A_{p-1}$$

rovná číslu $\dfrac{1}{2}(p - 1)$.

100.* V rovině je dáno nekonečně mnoho bodů, jejichž všechny vzájemné vzdálenosti jsou přirozená čísla.

Dokažte, že všechny tyto body leží v jedné přímce.

101. Najděte všechna reálná čísla x, pro něž platí

$$1 + x \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cos \frac{1}{x} > 0.$$

102.* Každému reálnému číslu x je přiřazeno reálné číslo $A(x)$. Přitom pro libovolná reálná čísla x, y platí

$$\begin{aligned} A(x+y) &= A(x) + A(y), \\ A(xy) &= A(x) \,.\, A(y). \end{aligned}$$

Dokažte, že je buď $A(x) = x$ pro všechna x anebo $A(x) = 0$ pro všechna x.

103.* Budiž dána posloupnost

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 + a_2 + \ldots + a_8, \\ c_2 &= a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_8^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n &= a_1^n + a_2^n + \ldots + a_8^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_8$ jsou reálná čísla, ne všechna rovná nule. Nechť dále nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{c_n\}$ je rovno nule. Zjistěte všechna přirozená čísla n, pro která je $c_n = 0$.

104. Najděte všechny funkce $f(x)$ definované v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ takové, že pro libovolná čísla x_1, x_2 z tohoto intervalu platí

$$f(x_1) - f(x_2) \leqq (x_1 - x_2)^2.$$

105.* Dokažte, že k libovolné skupině číslic (v níž na prvém místě není nula) existuje přirozená mocnina dvojky, jejíž desítkový zápis začíná touto skupinou.

106.* Vrcholy pravidelného n-úhelníku ($n \geqq 6$) jsou obarveny několika (alespoň dvěma) barvami, každý vrchol jednou barvou. Přitom všechny body téže barvy tvoří vrcholy pravidelného mnohoúhelníku.

Dokažte, že mezi těmito barevnými mnohoúhelníky lze najít dva shodné (a různé).

107.* Každému reálnému číslu x je přiřazeno reálné číslo $f(x)$. Přitom je splněna tato podmínka: Existuje kladná konstanta M tak, že nerovnost

$$\left| \sum_{x \in K} f(x) \right| < M$$

platí pro každou konečnou množinu K reálných čísel.

Dokažte, že pro některé c je $f(c) = 0$.

108. V rovině leží $n \geqq 3$ úseček tak, že každé tři z nich mají společný bod. Dokažte, že lze najít bod společný všem těmto úsečkám.

109.* V rovině je dáno $n \geqq 3$ navzájem rovnoběžných úseček. Přitom pro každé tři z nich existuje přímka, která je všechny protíná.

Dokažte, že některá přímka protíná všech n daných úseček.

110.* Dokažte, že pro každé přirozené číslo m existuje neprázdná konečná množina S bodů v rovině s tou vlastností, že ke každému $A \in S$ lze najít v S právě m bodů, jejichž vzdálenost od A se rovná jedné.

111. Je dána čtvercová tabulka

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}, \end{matrix}$$

sestavená z celých nezáporných čísel, která splňuje tuto podmínku: jakmile $a_{ij} = 0$, pak

$$a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in} + a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{nj} \geqq n.$$

Dokažte, že pro součet s všech čísel dané tabulky platí

$$s \geqq \frac{1}{2} n^2.$$

112. V prostoru jsou dány body $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n = A_0$. Zvolme bod B_0 a sestrojme další body $B_1, B_2, \ldots, B_n$ tak, aby pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$ střed dvojice $B_{k-1} B_k$ splynul se středem dvojice $A_{k-1} A_k$.

Udejte nutné a postačující podmínky pro to, aby $B_n = B_0$.

113.* Nechť M je množina bodů v prostoru taková, že ke každému bodu prostoru lze v množině M najít právě jeden nejvzdálenější bod.

Dokažte, že množina M je jednobodová.

Řešení úloh a poznámky

1

Poněvadž

$$3\,(14n + 3) - 2\,(21n + 4) = 1,$$

je každý společný dělitel čísel $14n + 3$, $21n + 4$ dělitelem 1, takže čitatel a jmenovatel jsou nesoudělná čísla, c. b. d.

2

První řešení. Platí

$17^{19} + 19^{17} = (17^{19} - 17^{17}) + (17^{17} + 19^{17}) = 17^{17}\,(17^2 - 1) + (17 + 19)\,(17^{16} - 17^{15}\,.\,19 + \ldots + 19^{16}) = 17^{17}\,.\,16\,.\,18 + 36\,.\,B = 36\,(A + B)$, kde $A = 17^{17}\,.\,8$, $B = 17^{16} - 17^{15}\,.\,19 + \ldots + 19^{16}$ jsou přirozená čísla. Číslo $17^{19} + 19^{17}$ je tedy dělitelné třiceti šesti, c. b. d.

Druhé řešení. Poněvadž $17 + 19 = 36 = 4\,.\,9$, musíme o čísle $x = 17^{19} + 19^{17}$ dokázat, že je dělitelné oběma nesoudělnými čísly 4 a 9. To je však snadné; platí totiž

$$17^{19} = (16 + 1)^{19} = 16a + 1,$$

$$19^{17} = (20 - 1)^{17} = 20b - 1,$$

odkud

$$x = 4\,(4a + 5b)$$

(a, b jsou přirozená čísla), a podobně

$$17^{19} = (18 - 1)^{19} = 18c - 1,$$

$$19^{17} = (18 + 1)^{17} = 18d + 1,$$

odkud

$$x = 9\,(2c + 2d)$$

(c, d jsou opět přirozená čísla).

Zobecnění. Jsou-li p, q dvě po sobě následující lichá čísla, je číslo $p^q + q^p$ dělitelné číslem $p + q$.

Důkaz. Platí

$$\begin{aligned} p^q + q^p &= (p^q - 1) + (q^p + 1) = \\ &= (p - 1)(p^{q-1} + p^{q-2} + \ldots + 1) + \\ &+ (q + 1)(q^{p-1} - q^{p-2} + \ldots + 1) = \\ &= (p - 1)(2m + 1) + (q + 1)(2n + 1), \end{aligned}$$

neboť čísla $p^{q-1} + p^{q-2} + \ldots + 1$, $q^{p-1} - q^{p-2} + \ldots + 1$ jsou lichá (lichý počet lichých sčítanců). Můžeme předpokládat, že je např. $p < q$, takže $p = q + 2, p - 1 = q + 1$. Pak ale

$$\begin{aligned} p^q + q^p &= 2(p - 1)(m + n + 1) = \\ &= (p - 1 + q + 1)(m + n + 1) = \\ &= (p + q)(m + n + 1), \end{aligned}$$

c. b. d.

3

Můžeme předpokládat, že $c \geqq 0$. Nejdříve dokážeme, že ke každému celému $c \geqq 0$ existuje přirozené číslo m takové, že

$$c = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \ldots \pm m^2 \tag{1}$$

při vhodné volbě znamének. Pro $c = 0, 1, 2, 3$ máme vyjádření

$$0 = 1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2,$$
$$1 = 1^2,\ 2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2,\ 3 = -1^2 + 2^2.$$

Poněvadž dále

$$(m + 1)^2 - (m + 2)^2 - (m + 3)^2 + (m + 4)^2 = 4, \tag{2}$$

plyne naše tvrzení indukcí.

To je zároveň klíč k řešení, neboť podle (2) platí

$$\begin{aligned} &(m + 1)^2 - (m + 2)^2 - (m + 3)^2 + (m + 4)^2 - \\ &- (m + 5)^2 + (m + 6)^2 + (m + 7)^2 - (m + 8)^2 = 0, \end{aligned}$$

takže v (1) můžeme m nahradit čísly $m + 8$, $m + 16$ atd.

4

Číslo $n = 1$ vyhovuje požadavkům úlohy, a proto budeme v dalším předpokládat, že je $n \geqq 2$. Má platit

$$2^n - 1 = a^m, \tag{1}$$

kde $m > 1$, a jsou přirozená čísla. Především je jasné, že číslo a musí být liché a větší než 1; pišme tedy $a = 2k + 1$, kde k je přirozené číslo.

Je-li m sudé, $m = 2p$, dostaneme z (1)

$$\begin{aligned} 2^n - 1 &= (2k + 1)^{2p} \\ 2^n &= [4(k^2 + k) + 1]^p + 1, \\ 2^n &= 4K + 2, \end{aligned}$$

kde K je přirozené číslo. Pak ale

$$2^{n-1} = 2K + 1,$$

což není možné.

Zbývá tedy druhá možnost, že m je liché. Pak z (1) plyne

$$2^n = (a + 1)\,A, \tag{2}$$

kde $A = a^{m-1} - a^{m-2} + \ldots - a + 1$ je součet lichého počtu m lichých sčítanců, přičemž pro přirozená $2 \leqq q \leqq m - 1$ platí $a^q - a^{q-1} = a^{q-1}(a - 1) > 0$. Číslo A je tedy liché a větší než 1, takže ani vztah (2) není možný.

Úloha má jediné řešení $n = 1$.

5

Tabulka

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$2^n - 1$	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023
zbytek	1	3	0	1	3	0	1	3	0	1

vede k domněnce, že hledaná čísla n budou násobky tří. Proto budeme pro zbývající čísla $n > 10$ rozlišovat tři možnosti

$$\alpha)\ n = 3k, \qquad \beta)\ n = 3k + 1, \qquad \gamma)\ n = 3k + 2,$$

kde k je přirozené číslo.

V případě α) platí

$$2^n - 1 = 2^{3k} - 1 = 8^k - 1 = (7 + 1)^k - 1 = 7A,$$

kde A je přirozené číslo; skutečně je tedy $2^n - 1$ dělitelné sedmi.

V případě β) máme

$$2^n - 1 = 2^{3k+1} - 1 = 2 \,.\, 8^k - 1 = 2 \,.\, (7 + 1)^k - 1 = 7B + 1$$

(B přirozené), což znamená, že číslo $2^n - 1$ dává při dělení sedmi zbytek 1.

Konečně v případě γ) lze psát

$$2^n - 1 = 2^{3k+2} - 1 = 4 \,.\, 8^k - 1 = 4 \,.\, (7 + 1)^k - 1 = 7C + 3$$

(C přirozené), takže číslo $2^n - 1$ dává nyní při dělení sedmi zbytek 3.

Řešení úlohy a) jsou tedy právě ta přirozená čísla n, která jsou násobky čísla 3.

b) Poněvadž v žádném z probraných případů nebyl zbytek čísla $2^n - 1$ při dělení sedmi roven číslu 5, nemůže být číslo $2^n + 1$ (které je o 2 větší než $2^n - 1$) dělitelné sedmi pro žádné přirozené n, c. b. d.

6

První řešení. Označme $M = \{n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4, n + 5\}$ a buďte A, B obě hledané podmnožiny. Budiž p prvočinitel čísla $a \in M$; pak je např. $a \in A$, takže existuje aspoň jedno číslo $b \in B$ (tedy $b \neq a$), které je rovněž dělitelné prvočíslem p. Pak i rozdíl $a - b$ je dělitelný prvočíslem p a protože $0 < |a - b| \leq 5$, platí, že

$$p \text{ je buď 2 nebo 3 nebo 5.}$$

Je zřejmé, že 5 může být prvočinitelem jedině čísel n, $n + 5$, (jinak by M neobsahovala dva násobky pěti). Množina

$$N = \{n + 1, n + 2, n + 3, n + 4\}$$

obsahuje tedy jedině čísla tvaru $2^\alpha . 3^\beta$ (α, β celá nezáporná). Množina N však obsahuje dvě čísla sudá a dvě lichá. Obě lichá čísla z N můžeme tedy napsat ve tvaru

$$3^\gamma, 3^\delta$$

s přirozenými exponenty. Avšak $| 3^\gamma - 3^\delta | < 4$, a protože $3^\gamma - 3^\delta$ je číslo sudé, platí $| 3^\gamma - 3^\delta | = 2$. Zvolíme-li označení tak, aby bylo $\gamma > \delta$, bude

$$3^\gamma - 3^\delta = 3k = 2,$$

kde k je přirozené číslo; to však není možné.

Dokázali jsme, že žádné přirozené číslo n nemá vlastnost popsanou v zadání úlohy.

Druhé řešení. Množina $\{n; n + 1; n + 2; n + 3; n + 4; n + 5\}$ se skládá ze šesti po sobě jdoucích přirozených čísel. Předpokládejme, že ji lze rozložit ve dvě podmnožiny požadovaných vlastností. Potom zřejmě součin

$$S_n = n (n + 1) (n + 2) (n + 3) (n + 4) (n + 5)$$

je čtvercem přirozeného čísla. Rozložíme-li tedy součin S_n na prvočinitele

$$S_n = p_1^{r_1} . p_2^{r_2} \ldots p_m^{r_m},$$

kde $p_1, p_2, \ldots, p_m$ jsou navzájem různá prvočísla, budou exponenty $r_1, r_2 \ldots, r_m$ přirozená sudá čísla. Přitom prvočíslem p_i musí být dělitelná aspoň dvě z čísel $n, n + 1, \ldots, n + 5$ (součiny prvků obou podmnožin musí být dělitelné prvočíslem p_i).

Ze šesti po sobě následujících přirozených čísel je aspoň jedno dělitelné pěti. Proto, jak jsme ukázali, aspoň dvě z čísel $n, n + 1, \ldots, n + 5$ musí být dělitelná pěti. Protože čísel n,

$n+1, \ldots, n+5$ je šest, nastane tato možnost jen tehdy, bude-li n dělitelné pěti, tj. když

$$n = 5k, \tag{1}$$

kde k je přirozené číslo.

Protože nejvýše jedno ze šesti po sobě jdoucích čísel je dělitelné sedmi, nemůže být v našem případě žádné z čísel $n, n+1, \ldots, n+5$ dělitelné sedmi. To je možné jen tak, že

$$n = 7l + 1, \tag{2}$$

kde l je celé nezáporné číslo.

Jedna z podmnožin obsahuje číslo n. Součin prvků druhé podmnožiny je tedy dělitelný číslem n. Potom i součin

$$(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) = A \, . \, n + 120$$

je dělitelný číslem n. Poněvadž A je zřejmě celé číslo, je n nutně dělitelem čísla 120. Vzhledem k (1) však přicházejí v úvahu jen tito dělitelé čísla 120:

$$5, 10, 15, 20, 30, 40, 60, 120.$$

Z nich pouze 15 a 120 splňují podmínku (2). Vypočteme-li příslušné součiny S_n, tj.

$$S_{15} = 2^7 \, . \, 3^3 \, . \, 5^2 \, . \, 17 \, . \, 19,$$

$$S_{120} = 2^6 \, . \, 3^2 \, . \, 5^4 \, . \, 11^2 \, . \, 31 \, . \, 41 \, . \, 61,$$

vidíme, že u prvočinitelů obou čísel se vyskytují liché exponenty, takže žádné z čísel S_{15}, S_{120} není čtvercem přirozeného čísla.

Neexistuje tedy žádné číslo n požadovaných vlastností.

7

Čísla x, y jsou nutně různá od nuly.

[1] V případě $x > 0$, $y > 0$ musí být

$$1 + x \geqq y \qquad \text{a} \qquad 1 + y \geqq x$$

neboli

$$x - 1 \leqq y \leqq x + 1.$$

Zde máme tři možnosti:

a) $y = x - 1$. Potom je $\dfrac{1+y}{x} = \dfrac{x}{x} = 1$ celé číslo. Ale

$$\frac{1+x}{y} = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1},$$

a to je celé číslo právě tehdy, je-li $x - 1$ dělitelem 2, tj. vzhledem k $x > 0$ dostáváme $x = 2$ nebo 3; příslušné $y = x - 1 = 1$ nebo 2. Obě nalezené dvojice ($x = 2$, $y = 1$), ($x = 3$, $y = 2$) vyhovují úloze, o čemž se můžeme snadno přesvědčit dosazením.

b) $y = x$. Pak

$$\frac{1+x}{y} = \frac{1+y}{x} = \frac{1+x}{x} = 1 + \frac{1}{x}.$$

Nutně $x = 1$. Dvojice ($x = 1$, $y = 1$) vyhovuje úloze.

c) $y = x + 1$, tj. $x = y - 1$. To je zřejmě obdobné jako v a); výsledek zde dostaneme symetrickým obrazem výsledků z a) podle přímky $y = x$.

V I. kvadrantu je tedy celkem pět řešení (viz obr. 1).

[2] Je-li $x = -1$, pak pro každé celé $y \neq 0$ dostáváme vyhovující dvojici (obr. 1).

V případě $x < -1$, $y > 0$ zřejmě musí platit

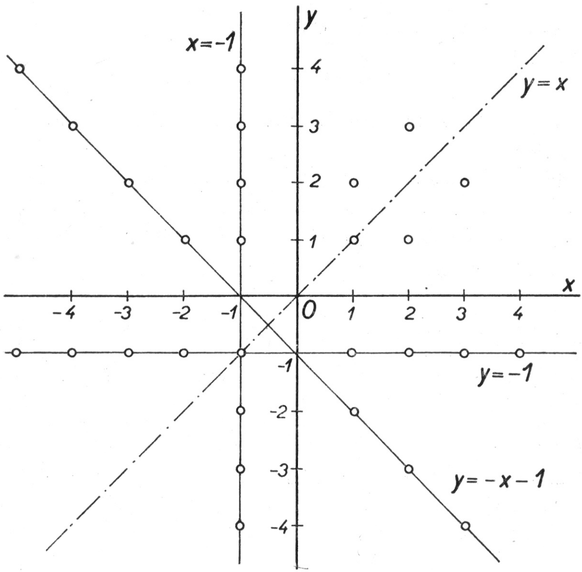
$$-(1 + x) \geqq y \quad \text{a} \quad 1 + y \geqq -x,$$

čili

$$-(1 + x) \leqq y \leqq -(1 + x),$$

tj.

$$y = -x - 1.$$



Obr. 1.

Potom skutečně

$$\frac{1+x}{y} = -\frac{1+x}{1+x} = -1 \text{ je celé číslo}$$

a

$$\frac{1+y}{x} = -\frac{x}{x} = -1 \text{ je rovněž celé číslo.}$$

Nalezené dvojice jsou opět znázorněny na obr. 1.

[3] Případ $y = -1$ je zase snadný (viz obr. 1). Mějme tedy $x < -1$, $y < -1$. Pak musí platit

$$-(1+x) \geqq -y \quad \text{a} \quad -(1+y) \geqq -x$$

neboli

$$x + 1 \leqq y \leqq x - 1,$$

což však není možné, neboť

$$x + 1 > x - 1.$$

V tomto případě nenacházíme tedy žádnou vyhovující dvojici $x, \ y$.

[4] Vzhledem k souměrnosti výsledku podle přímky $y = x$ nemusíme už IV. kvadrant vyšetřovat.

Tím je celá rovina prozkoumána; úloha má nekonečně mnoho řešení (viz obr. 1).

8

Všechna čísla zapisujeme v desítkové soustavě. Buď $\underbrace{abc \ldots f}_{k \text{ cifer}}$ libovolné k-ciferné číslo ($a \neq 0$). Ukážeme, že čtverec některého přirozeného čísla má za prvních k číslic zleva právě $abc \ldots f$.

Vezměme čísla

$$N_1 = \underbrace{abc \ldots f}_{k}\underbrace{00 \ldots 0}_{3k}, \qquad N_2 = \underbrace{abc \ldots f}_{k}\underbrace{99 \ldots 9}_{3k}.$$

Buď n^2 největší čtverec přirozeného čísla, který nepřevyšuje číslo N_1. Všimněme si, že $n < 10^{2k}$. Dále

$$N_1 < (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 < N_1 + 2 \cdot 10^{2k} + 1 <$$
$$< N_1 + 10^{3k} - 1 = N_2.$$

Poněvadž tedy

$$N_1 < (n + 1)^2 < N_2,$$

začíná číslo $(n + 1)^2$ číslicemi $abc \ldots f$ a odpověď na otázku úlohy je kladná.

Poznámka. Rozmyslete si, platí-li obdobné tvrzení pro vyšší mocniny než druhé.

9

Pomocí kořenů kvadratické rovnice $2x^2 - x - 36 = 0$, jimiž jsou čísla $\frac{9}{2}$, -4, najdeme rozklad

$$2x^2 - x - 36 = (2x - 9)(x + 4).$$

Nyní musí být buď

[1] $$2x - 9 = \pm 1, \; x + 4 = \pm p^2,$$

nebo

[2] $$x + 4 = \pm 1, \; 2x - 9 = \pm p^2,$$

nebo

[3] $$x + 4 = \pm p, \; 2x - 9 = \pm p,$$

kde p je prvočíslo.

V případě [1] dostaneme z první rovnice buď $x = 5$ nebo $x = 4$, načež druhá rovnice dá buď $p^2 = 9$ nebo $p^2 = -8$. Vychází tedy jedno řešení

$$x = 5.$$

V případě [2] dostaneme z první rovnice buď $x = -3$ nebo $x = -5$, což dosazeno do druhé rovnice dává buď $p^2 = -15$ nebo $p^2 = 19$. To nevede k žádnému dalšímu řešení.

Konečně v případě [3] musí být $x + 4 = 2x - 9$; odtud vychází $x = 13$, $(x + 4)(2x - 9) = 17^2$. Máme tedy druhé řešení

$$x = 13.$$

Úloha je vyřešena; hledaná čísla jsou $x = 5$ a $x = 13$.

10

Buď x celé číslo. Je-li k přirozené číslo, platí

$$(x + n)^k = x^k + n \,.\, C,$$

kde C je celé číslo. Proto také

$$f(x + n) = f(x) + n \,.\, F,$$

kde F je celé číslo. Jakmile tedy $x \in M$, je též $x + n \in M$. Z toho však plyne, že množina M je buď prázdná nebo nekonečná.

11

Představme si všechna čísla $0, 1, 2, \ldots, 3^n - 1$ zapsána v trojkové soustavě. Mezi nimi je právě 2^n čísel, v jejichž trojkovém zápise se neobjevuje číslice 2. Dvojnásobek každého takového čísla nemá tedy ve svém trojkovém zápise číslici 1, zatímco součet dvou různých takových čísel ji má. To znamená, že tato skupina čísel vyhovuje požadavku úlohy.

12

První řešení. Předpokládejme nejprve, že čísla $2^p - 1$, $2^q - 1$ jsou nesoudělná, a dokažme (sporem), že i čísla p, q jsou nesoudělná. Kdyby bylo $p = km$, $q = kn$ (k, m, n přirozená, $k > 1$), měla by čísla $2^p - 1 = (2^k)^m - 1$, $2^q - 1 = (2^k)^n - 1$ společného dělitele $2^k - 1 > 1$, což by byl spor.

Obráceně, buďte p, q nesoudělná čísla a nechť je např. $p > q$ (případ $p = q = 1$ je totiž jasný); dokážeme, že i čísla $2^p - 1$, $2^q - 1$ jsou nesoudělná. Poněvadž pro $q = 1$ to platí, mějme $q > 1$. Předpokládejme naopak, že čísla $2^p - 1$, $2^q - 1$ mají společného dělitele $d > 1$.

Dělme číslo p číslem q a označme r příslušný zbytek: $p = qt + r$, kde t, r jsou přirozená čísla a $0 < r < q$. Čísla q, r jsou tedy také nesoudělná. Z úpravy

$$2^p - 1 = 2^{qt+r} - 1 = 2^r \cdot 2^{qt} - 2^r + 2^r - 1 =$$
$$= 2^r (2^{qt} - 1) + 2^r - 1 = 2^r [(2^q)^t - 1] + (2^r - 1)$$

vyplývá, že d je společným dělitelem i čísel $2^q - 1$, $2^r - 1$, přičemž máme $q > r$.

Opakováním postupu naznačeného v předchozím odstavci (nyní s čísly q, r místo p, q) bychom našli přirozené číslo s, $0 < s < r$ takové, že čísla $2^r - 1$, $2^s - 1$ by měla opět společného dělitele d. Pak bychom provedli tutéž úvahu s čísly r, s místo q, r atd. Poněvadž $p > q > r > s \ldots$, došli bychom po konečném počtu kroků k takovému číslu u této posloupnosti, že $2^u - 1 < d$. Pak by ale d nemohlo být dělitelem čísla $2^u - 1$, což by byl spor.

Čísla $2^p - 1$, $2^q - 1$ jsou tedy nesoudělná a věta je dokázána.

Druhé řešení. Jsou-li čísla p, q soudělná, pak stejně jako v předchozím řešení se dokáže, že i čísla $2^p - 1$, $2^q - 1$ jsou soudělná.

Mějme tedy dvě nesoudělná čísla p, q (např. $p > q$) a pro důkaz sporem předpokládejme, že čísla $2^p - 1$, $2^q - 1$ mají společného dělitele $d > 1$; přitom d je liché.

Vyjádříme-li číslo $2^p - 1$ ve dvojkové soustavě, bude

$$2^p - 1 = 11 \ldots 1, \tag{1}$$

kde na pravé straně je právě p jedniček a žádné nuly; analogický zápis má i číslo $2^q - 1$.

Vezměme nyní nejmenší přirozené číslo, které je dělitelné číslem d a jehož zápis ve dvojkové soustavě se přitom skládá ze samých jedniček; počet těchto jedniček označme m (zřejmě $m > 1$). Jinými slovy, m je nejmenší ze všech přirozených čísel n takových, že $2^n - 1$ je dělitelné číslem d. Je tedy $1 < m \leqq q < p$. Ukážeme, že m je společný dělitel čísel p, q, což bude spor. Dokažme např., že p je násobek m.

Nahraďme ve vyjádření (1) posledních m jedniček nulami, tj. odečtěme od čísla $2^p - 1$ číslo $2^m - 1$. Vzniklý rozdíl bude tedy dělitelný číslem d. Je-li nyní $p - m > m$, nahraďme dalších (v pořadí zprava) m jedniček nulami, čímž vznikne opět číslo dělitelné d (rozdíl dvou čísel dělitelných d). Tak postupujeme dále. Jsou dvě možnosti: buď po několika krocích všechny jedničky zmizí (takže p bude násobkem m, c. b. d.) nebo zbude prvních $k < m$ jedniček, za nimiž bude následovat $p - k$ nul. Poslední číslo je pak rovno $(2^k - 1) \cdot 2^{p-k}$ a je dělitelné číslem d (jak vyplývá z našeho postupu). Poněvadž však d je liché, nutně d dělí $2^k - 1$. To je ale spor s volbou čísla m.

Tvrzení je dokázáno.

13

Budiž např. $m > n$ a pišme $m = n + x$, kde x je přirozené číslo. Kdyby daná dvě čísla byla soudělná, existovala by přirozená čísla $d > 1$, p, q taková, že

$$2^{2^m} + 1 = d \cdot p, \quad \text{tj.} \quad 2^{2^m} = d \cdot p - 1, \tag{1}$$

$$2^{2^n} + 1 = d \cdot q, \quad \text{tj.} \quad 2^{2^n} = d \cdot q - 1. \tag{2}$$

Poněvadž ale

$$2^{2^m} = 2^{2^{n+x}} = 2^{2^n \cdot 2^x} = (2^{2^n})^{2^x},$$

dostali bychom podle (1), (2)

$$d \cdot p - 1 = (d \cdot q - 1)^{2^x},$$

a dále (vzhledem k sudému exponentu na pravé straně)

$$A \cdot d = 2,$$

kde A je přirozené číslo. Z toho plyne, že $d = 1$ nebo 2. Avšak nemůže být $d = 2$, neboť d je dělitel daných lichých čísel. Je tedy nutně $d = 1$, což je ovšem spor s naším předpokladem, že $d > 1$.

Kdyby bylo jenom konečně mnoho prvočísel

$$p_1, p_2, \ldots, p_k,$$

pak by některé z nich muselo být společným prvočinitelem dvou z $k+1$ různých čísel $2^{2^j}+1$, kde $j=1, 2, \ldots, k+1$. To by byl spor s tvrzením dokázaným v předchozím odstavci. Existuje tedy nekonečně mnoho prvočísel.

Poznámka. Čtenáři jistě znají přímější důkaz posledního tvrzení.

14

Pro součet r ($\geqq 2$) po sobě jdoucích přirozených čísel

$$m, m+1, \ldots, m+r-1$$

platí známý vzoreček

$$\sum_{j=0}^{r-1} (m+j) = \frac{1}{2} r(2m+r-1).$$

Z toho především vyplývá, že čísla tvaru $N = 2^\alpha$ (α celé nezáporné) patří mezi hledaná čísla. Nelze je totiž vůbec vyjádřit jako součet alespoň dvou po sobě jdoucích přirozených čísel, neboť číslo $r(2m+r-1)$ má zřejmě lichého dělitele většího než 1.

Hledejme nyní přirozené číslo N vyhovující podmínkám úlohy, které má alespoň jednoho lichého prvočinitele $2k+1$. Můžeme tedy psát

$$N = (2k+1)\,n,$$

kde n je vhodné přirozené číslo. Vezmeme-li posloupnost celých čísel

$$n-k, n-k+1, \ldots, n, n+1, \ldots, n+k, \tag{1}$$

která má právě $2k+1$ členů, bude její součet roven číslu $(2k+1)\,n = N$. Číslo N se nám tedy podařilo vyjádřit jako součet $2k+1$ po sobě jdoucích celých čísel. Několik prvních členů v (1) však mohou být nekladná čísla; vynecháme-li je i s čísly k nim opačnými, zbude posloupnost alespoň dvou po sobě jdoucích přirozených čísel, která má méně než $2k+1$

členů, ale týž součet N (součet vynechaných členů je totiž nula). Z toho vyplývá, že každý lichý prvočinitel hledaného čísla N musí být větší než 1976.

Označme nyní $2l + 1$ součin všech lichých prvočinitelů hledaného čísla N, takže

$$N = (2l + 1)\, s,$$

kde s je (celá nezáporná) mocnina dvojky. Přitom už víme, že $2l + 1 > 1976$, tedy $l > 987$. Je-li $s \geqq l$, je nutně $s \geqq 1024$ (nejbližší mocnina dvojky převyšující číslo 987 je 1024). Je-li $s < l$, vezmeme opět posloupnost celých čísel

$$s - l, s - l + 1, \ldots, s, s + 1, \ldots, s + l,$$

jejíž součet je $(2l + 1)\, s = N$. Z ní však již dovedeme utvořit posloupnost po sobě jdoucích přirozených čísel, která má rovněž součet N. Počet členů této posloupnosti bude

$$(2l + 1) - 2\,(l - s) - 1 = 2s.$$

Proto musí být $2s \geqq 1976$, tedy opět $s \geqq 1024$.

Zatím jsme dokázali, že hledané přirozené číslo N (pokud není mocninou dvojky), musí mít tvar

$$N = 1024 \,.\, 2^c \,.\, M,$$

kde c je celé nezáporné číslo a M je součinem prvočísel větších než 1976.

Dokažme nyní, že právě popsaná čísla N skutečně vyhovují požadavkům úlohy. Proveďme nepřímý důkaz tohoto tvrzení.

Předpokládejme nejprve, že by takové číslo N bylo součtem lichého počtu $2r + 1 < 1976$ $(r \geqq 1)$ po sobě jdoucích přirozených čísel. Označíme-li p prostřední z nich, bude N součtem přirozených čísel

$$p - r, p - r + 1, \ldots, p, p + 1, \ldots, p + r,$$

tj. bude

$$N = (2r + 1)\, p.$$

Číslo $2r + 1$ bude tedy lichým dělitelem čísla N, a proto $2r + 1 > 1976$, což je spor.

Předpokládejme nyní, že by naše číslo N bylo součtem sudého počtu $2r < 1976$ ($r \geqq 1$) po sobě jdoucích přirozených čísel. Označíme-li m prvé z nich, bude

$$N = r\,(2m + 2r - 1).$$

Číslo v závorce je liché, proto platí $r \geqq 1024$, tedy $2r \geqq 2048 > > 1976$, což je opět spor.

Závěr. Hledaná čísla jsou jednak všechny celé nezáporné mocniny čísla 2, jednak všechna čísla, která mají všechny liché prvočinitele větší než 1976 a která jsou zároveň dělitelná číslem 1024.

15

První řešení. Tvrzení dokážeme sestrojením vybrané posloupnosti s uvedenou vlastností užitím matematické indukce. Předpokládejme, že každá dvě z přirozených čísel

$$a_1 = 2^{n_1} - 3,\ a_2 = 2^{n_2} - 3,\ \ldots,\ a_k = 2^{n_k} - 3, \tag{1}$$

kde $2 = n_1 < n_2 < \ldots < n_k$, jsou nesouděná a sestrojme číslo $a_{k+1} = 2^{n_{k+1}} - 3$ nesoudělné s každým z čísel (1) takto:

Označme $s = a_1 a_2 \ldots a_k$. Z $s + 1$ čísel $2^0, 2^1, \ldots, 2^s$ lze vybrat alespoň dvě taková, že při dělení číslem s dávají týž zbytek. Nechť jsou to čísla 2^α, 2^β ($\alpha > \beta$). Pak tedy

$$2^\alpha - 2^\beta = p\,.\,s, \tag{2}$$

kde p je přirozené číslo. Vztah (2) lze psát ve tvaru

$$(2^{\alpha-\beta} - 1)\,2^\beta = p\,.\,s$$

a poněvadž s je liché, plyne odtud, že

$$2^{\alpha-\beta} - 1 = q\,.\,s, \tag{3}$$

kde q je přirozené číslo. Z (3) pak dostaneme

$$2^{\alpha-\beta+2} - 3 = 4\,.\,2^{\alpha-\beta} - 3 = 4\,(qs + 1) - 3 = 4qs + 1.$$

Stačí tedy vzít

$$n_{k+1} = \alpha - \beta + 2, \ a_{k+1} = 4qs + 1.$$

Poněvadž zřejmě platí $a_{k+1} > a_k$, je též $n_{k+1} > n_k$ a v celé konstrukci můžeme neomezeně pokračovat.

Druhé řešení. Budiž

$$a_1, a_2, \ldots, a_k \tag{1}$$

$k \geqq 2$ po dvou nesoudělných členů dané posloupnosti. Nechť

$$p_1, p_2, \ldots, p_r \tag{2}$$

jsou všechna prvočísla, která dělí některé z čísel (1). Prvočísla (2) jsou zřejmě lichá, takže podle Fermatovy věty (pozn. za řešením) platí

$$2^{p_i-1} \equiv 1 \bmod p_i \tag{3}$$

pro každé $i = 1, 2, \ldots, r$. Položme

$$s = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_r - 1).$$

Vhodným umocněním kongruence (3) dostaneme

$$2^s \equiv 1 \bmod p_i \tag{4}$$

pro každé $i = 1, 2, \ldots, r$. Z (4) plyne, že

$$2^{s+1} \equiv 2 \bmod p_i$$

opět pro každé $i = 1, 2, \ldots, r$. Každé p_i tedy dělí číslo $2^{s+1} - 2$ a nedělí tudíž číslo $2^{s+1} - 3$. To znamená, že číslo

$$a_{k+1} = 2^{s+1} - 3 > 1$$

je nesoudělné s každým z čísel (1), takže je také různé od každého z nich. Naznačená konstrukce dokazuje tvrzení.

Poznámka. Jestliže celé číslo a není dělitelné prvočíslem p, pak číslo a^{p-1} dává při dělení prvočíslem p zbytek 1, tj. platí

$$a^{p-1} \equiv 1 \bmod p. \tag{1}$$

To je *Fermatova věta*; můžeme ji dokázat např. takto:

Nechť $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ jsou pořadě zbytky čísel $a, 2a, \ldots, (p-1)\,a$ po dělení prvočíslem p. Každý z těchto zbytků je některé z čísel $1, 2, \ldots, (p-1)$ a platí

$$\begin{aligned} a &\equiv r_1 \mod p,\\ 2a &\equiv r_2 \mod p,\\ &\;\vdots\\ (p-1)\,a &\equiv r_{p-1} \mod p. \end{aligned}$$

Čísla $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ jsou navzájem různá (ověřte nepřímo užitím předpokladu věty). Proto

$$r_1 \,.\, r_2 \,.\, \ldots \,.\, r_{p-1} = 1 \,.\, 2 \,.\, \ldots \,.\, (p-1). \tag{2}$$

Vynásobením uvedených kongruencí dostaneme

$$1 \,.\, 2 \,.\, \ldots \,.\, (p-1) \,.\, a^{p-1} \equiv r_1 \,.\, r_2 \,.\, \ldots \,.\, r_{p-1} \mod p$$

a odtud již plyne (1), neboť součin v (2) není dělitelný prvočíslem p.

16

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} < 1 + \frac{1}{2^3-2} + \frac{1}{3^3-3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n^3-n} = 1 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{(n-1)\,n\,(n+1)} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\,.\,2} - \frac{1}{2\,.\,3} + \frac{1}{2\,.\,3} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3\,.\,4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\,n} - \frac{1}{n\,(n+1)}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n\,(n+1)}\right) = \frac{5}{4} - \frac{1}{2n\,(n+1)} < \frac{5}{4}.$$

17

Nejprve vyšetříme, pro která reálná čísla x má daná funkce smysl.

Především musí platit $1 - \frac{x}{2}|x| \geqq 0$ neboli

$$x|x| \leqq 2.$$

Tuto nerovnici splňuje každé záporné číslo x, neboť levá strana je v tomto případě záporná; pro nezáporná x je $|x| = x$ a nerovnost dává podmínku $x \leqq \sqrt{2}$. V dalším budeme proto předpokládat, že je

$$x \leqq \sqrt{2}. \tag{1}$$

Dále stačí už jen ověřit, zda platí

$$1 - \frac{x}{4}|x| - \sqrt{1 - \frac{x}{2}|x|} \geqq 0;$$

pak totiž i výraz pod prvou odmocninou v definičním předpisu dané funkce bude tím spíše nezáporný. Vzhledem k (1) můžeme však poslední nerovnost ekvivalentně upravit

$$1 - \frac{x}{4}|x| \geqq \sqrt{1 - \frac{x}{2}|x|},$$

$$1 - \frac{x}{2}|x| + \left(\frac{x}{4}|x|\right)^2 \geqq 1 - \frac{x}{2}|x|,$$

$$\left(\frac{x}{4}|x|\right)^2 \geqq 0,$$

čímž je její platnost ověřena.

Definiční obor dané funkce je tedy určen jedinou podmínkou (1).

Položme $c = \frac{x}{4}|x|$, $a = 1 - c$, $b = \sqrt{1 - 2c}$.

Potom

$$y = \sqrt{a+b} - \sqrt{a-b} = \sqrt{(\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b})^2} =$$

$$= \sqrt{a + b - 2\sqrt{a^2 - b^2} + a - b} = \sqrt{2\,(a - \sqrt{a^2 - b^2})} =$$

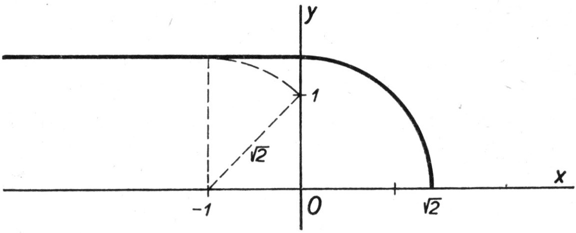
$$= \sqrt{2\,(1 - c - \sqrt{(1-c)^2 - (1-2c)})} = \sqrt{2\,(1 - c - \sqrt{c^2})} =$$

$$= \sqrt{2\,(1 - c - |\,c\,|\,)}.$$

Pro $x < 0$ je $c < 0$ a tedy $y = \sqrt{2\,(1 - c - (-c))} = \sqrt{2}$, zatímco pro $x \geqq 0$ je $c \geqq 0$ a tedy $y = \sqrt{2\,(1 - 2c)} = \sqrt{2 - x^2}$.

Závěr. Pro $x \leqq 0$ je $y = \sqrt{2}$ konstantní a příslušný graf je polopřímka. Pro $0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$ je $y = \sqrt{2 - x^2}$ a grafem je čtvrtkružnice se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{2}$, která leží v prvém kvadrantu.

Graf dané funkce je naznačen na obr. 2.



Obr. 2.

18

Je-li $p = 0$, máme konstantní funkci $y = 0$; v tomto případě je prvá část úlohy samozřejmě splněna a druhá nepřichází v úvahu. Budeme proto v dalším předpokládat, že je $p \neq 0$.

Náleží-li bod $A \equiv [x, y]$ grafu dané funkce, pak na tomto grafu leží i bod $A' \equiv [-x, -y]$, jak je vidět přímo z definičního předpisu. Graf funkce je tedy souměrný podle počátku $O \equiv [0, 0]$ pravoúhlých souřadnic, takže jej stačí vyšetřovat jen pro $x \geqq 0$.

Nejprve máme dokázat, že vždy platí $|y| < \frac{1}{2}$, tj.

$$\left| \frac{px}{x^2 + p^2 + 1} \right| < \frac{1}{2} x$$

neboli

$$\frac{2|p|x}{x^2 + p^2 + 1} < 1.$$

Tuto nerovnost lze ekvivalentně upravit na

$$2|p|x < x^2 + p^2 + 1$$

neboli

$$0 < (x - |p|)^2 + 1,$$

což platí.

Dále máme zvolit p tak, aby pro všechna x platilo $y \leqq \frac{1}{4}$ čili

$$\frac{px}{x^2 + p^2 + 1} \leqq \frac{1}{4} \tag{1}$$

a aby pro některé x nastala v tomto vztahu rovnost. Ekvivalentními úpravami dostaneme

$$4px \leqq x^2 + p^2 + 1,$$
$$0 \leqq (x - 2p)^2 + 1 - 3p^2. \tag{1'}$$

Nemůže být $1 - 3p^2 < 0$, neboť pak by nerovnost nebyla splněna např. pro $x = 2p$. Nemůže být ani $1 - 3p^2 > 0$, neboť pak by pro všechna x platila ostrá nerovnost. Je tedy nutně $1 - 3p^2 = 0$, tj.

$$p = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

V tomto případě vztah (1′) a tedy i (1) platí pro všechna x a rovnost nastane pro $x = 2p$, tj.

$$x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Pro $p = \frac{\sqrt{3}}{3}$ dostáváme funkci

$$y = \frac{\sqrt{3}\,x}{3x^2 + 4} \tag{2}$$

a pro $p = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ funkci

$$y = -\frac{\sqrt{3}\,x}{3x^2 + 4} \tag{3}$$

Poněvadž graf funkce (3) se dostane jako obraz grafu funkce (2) v souměrnosti podle osy x, vyšetříme pouze průběh funkce (2). Dokážeme, že pro

$$0 \leqq x \leqq \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

je funkce (2) rostoucí a pro

$$x \geqq \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

je funkce (2) klesající.

Označme y_1, y_2 hodnoty funkce (2), které přísluší po řadě k hodnotám x_1, x_2, pro něž platí

$$0 \leqq x_1 < x_2 \leqq \frac{2\sqrt{3}}{3} \tag{4}$$

Pak je

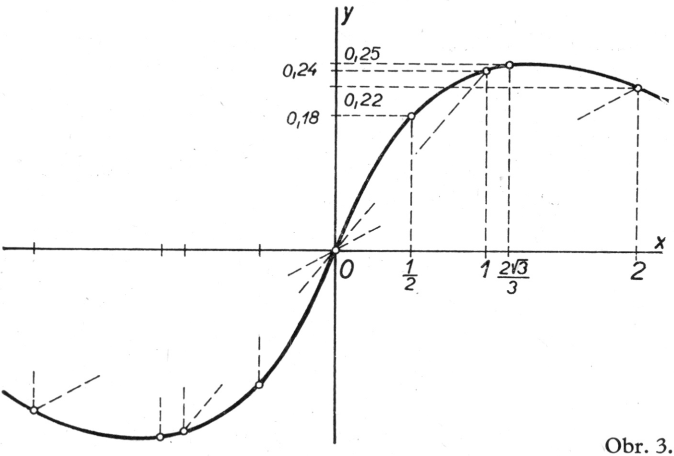
$$y_2 - y_1 = \frac{x_2\sqrt{3}}{3x_2^2 + 4} - \frac{x_1\sqrt{3}}{3x_1^2 + 4} =$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)\sqrt{3}}{(3x_1^2 + 4)(3x_2^2 + 4)}(4 - 3x_1x_2). \tag{5}$$

První činitel (zlomek) výrazu (5) je kladný. Z (4) plyne $x_1x_2 < \frac{4}{3}$, takže $4 - 3x_1x_2 > 0$; je tedy i druhý činitel výrazu (5) kladný a tím i $y_2 - y_1 > 0$ neboli $y_2 > y_1$. Podobně se dokáže, že pro $x \geqq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ je funkce (2) klesající.

Graf funkce (2) sestrojíme užitím této tabulky:

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
y	0	$\frac{2\sqrt{3}}{19} \doteq 0{,}182$	$\frac{\sqrt{3}}{7} \doteq 0{,}247$	$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{\sqrt{3}}{8} \doteq 0{,}216$



Obr. 3.

Dále užijeme středové souměrnosti grafu vzhledem k bodu $O \equiv [0, 0]$; viz obr. 3.

Výsledek. Existují právě dvě funkce

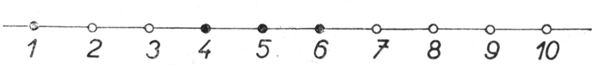
$$y = \frac{\sqrt{3}\,x}{3x^2 + 4}, \qquad y = -\frac{\sqrt{3}\,x}{3x^2 + 4},$$

které splňují druhý požadavek úlohy. První z nich nabývá maxima $\frac{1}{4}$ pro $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ a druhá pro $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$; ostatní hodnoty těchto funkcí jsou menší než $\frac{1}{4}$.

Poznámka. Tento příklad je možno řešit též elementárními metodami diferenciálního počtu.

19

Ano. Stačí sestrojit takový rozklad, aby každá část obsahovala libovolně dlouhé intervaly po sobě jdoucích přirozených čísel. Např. v obr. 4 jsou čísla jedné části rozkladu značena plnými kroužky a zbývající prázdnými; čísla 11, ..., 15 budou tedy vyznačena plnými kroužky, dalších šest čísel 16, ..., 21 prázdnými atd.



Obr. 4.

20

První řešení. Je-li x kořenem dané rovnice, platí

$$\left.\begin{aligned} (\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1})^2 &= x^2, \\ x &\geqq 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

a také obráceně, splňuje-li číslo x vztahy (1), je kořenem dané rovnice. Soustavu (1) upravíme

$$\left.\begin{aligned} 4\sqrt{x^2 - p}\,.\sqrt{x^2 - 1} &= p + 4 - 4x^2, \\ x &\geqq 0\,. \end{aligned}\right\}$$

Tato soustava je ekvivalentní soustavě

$$\left.\begin{aligned} (4\sqrt{x^2 - p}\,.\sqrt{x^2 - 1})^2 &= (p + 4 - 4x^2)^2, \\ x &\geqq 0, \\ p + 4 - 4x^2 &\geqq 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

a dále soustavě

$$\left.\begin{aligned} 16(x^2 - p)(x^2 - 1) &= (p + 4 - 4x^2)^2, \\ x &\geqq 0\,, \\ p + 4 - 4x^2 &\geqq 0\,, \\ x^2 - p &\geqq 0\,, \\ x^2 - 1 &\geqq 0 \end{aligned}\right\}$$

neboli

$$\left.\begin{aligned} 8(2 - p)\,x^2 &= (4 - p)^2, \\ x &\geqq 0\,, \\ x^2 &\leqq \frac{p + 4}{4}\,, \\ x^2 &\geqq p\,, \\ x^2 &\geqq 1\,. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Ukážeme, že při $p \geqq 2$ nemá soustava (3) řešení. Je-li totiž $p \geqq 2$ a $p \neq 4$, pak levá strana v rovnici z (3) je nekladná, kdežto pravá kladná; je-li $p = 4$, pak nutně $x = 0$, což však odporuje poslední podmínce v soustavě (3).

V dalším proto předpokládejme, že je $p < 2$. Pak musí být

$$x^2 = \frac{(4 - p)^2}{8\,(2 - p)}\,.$$

V tomto případě jsou splněny obě poslední podmínky soustavy (3), neboť je lze psát ve tvaru

$$\frac{(3p-4)^2}{8(2-p)} \geqq 0, \qquad \frac{p^2}{8(2-p)} \geqq 0,$$

což platí.

Nerovnost

$$\frac{(4-p)^2}{8(2-p)} \leqq \frac{p+4}{4}$$

je splněna právě tehdy, platí-li

$$\frac{p(3p-4)}{2-p} \leqq 0$$

čili (máme $p < 2$)

$$p(3p-4) \leqq 0,$$

tj.

$$0 \leqq p \leqq \frac{4}{3}. \tag{4}$$

Pro čísla p vyhovující nerovnostem (4) je tedy soustava (3) ekvivalentní soustavě

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{(4-p)^2}{8(2-p)}; \\ x &\geqq 0; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

pro jiná p soustava (3) nemá řešení.

Poněvadž daná rovnice je ekvivalentní soustavě (3), dostáváme z (5) jediné řešení

$$x = \frac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}}$$

za předpokladu (4); nesplňuje-li číslo p podmínky (4), nemá úloha řešení.

Druhé řešení. Nechť x je reálný kořen dané rovnice. Pak platí

$$2\sqrt{x^2-1} = x - \sqrt{x^2-p},$$

a umocníme-li obě strany této rovnice dvěma, dostaneme po úpravě

$$2x^2 + (p - 4) = -2x\sqrt{x^2 - p}.$$

Po dalším umocnění a úpravě vyjde

$$4(4 - 2p)x^2 = (p - 4)^2. \tag{1}$$

Odtud plyne, že $p \neq 2, 4$ (v případě $p = 4$ dá (1) kořen $x = 0$, který však nevyhovuje dané rovnici). Je-li $p \neq 2, 4$, je nutně v (1) $4 - 2p > 0$ neboli $p < 2$. V úvahu pak přichází kořen rovnice (1) daný vzorcem

$$x = \frac{|p - 4|}{2\sqrt{4 - 2p}}, \tag{2}$$

neboť číslo x na pravé straně dané rovnice musí být nezáporné.

Je ovšem třeba ověřit, zda toto x splňuje rovnici úlohy. Vypočteme

$$x^2 - p = \frac{(p - 4)^2}{4(4 - 2p)} - p = \frac{(3p - 4)^2}{4(4 - 2p)},$$

takže

$$\sqrt{x^2 - p} = \frac{|3p - 4|}{2\sqrt{4 - 2p}}.$$

Dále

$$x^2 - 1 = \frac{(p - 4)^2}{4(4 - 2p)} - 1 = \frac{p^2}{4(4 - 2p)}$$

a

$$\sqrt{x^2 - 1} = \frac{|p|}{2\sqrt{4 - 2p}}.$$

Číslo (2) bude tedy kořenem dané rovnice právě tehdy, bude-li platit

$$|3p - 4| + 2|p| = |p - 4|. \tag{3}$$

Při zkoumání rovnice (3) rozlišíme čtyři intervaly:

$$\text{a)}\ p \leqq 0\,,$$

$$\text{b)}\ 0 \leqq p \leqq \frac{4}{3}\,,$$

$$\text{c)}\ \frac{4}{3} \leqq p \leqq 4,$$

$$\text{d)}\ p \geqq 4\,.$$

V případě a) má rovnice (3) tvar $-3p + 4 - 2p = 4 - p$, tj. $p = 0$. V případě b) rovnice (3) zní $-3p + 4 + 2p = 4 - p$ a vyhovuje jí kterékoli p z tohoto intervalu. V případě c) má rovnice (3) tvar $3p - 4 + 2p = 4 - p$ a jediné řešení $p = \frac{4}{3}$. Konečně případ d) vzhledem k výše nalezené podmínce $p < 2$ nemusíme už vyšetřovat.

Výsledek: jediný možný kořen (2) vyhovuje dané rovnici jen v případě $p < 2$ a $0 \leqq p \leqq \frac{4}{3}$. Podmínka řešitelnosti tedy je

$$0 \leqq p \leqq \frac{4}{3}$$

a jediný kořen

$$x = \frac{4 - p}{2\sqrt{4 - 2p}}\,.$$

21

Prostým vynásobením vychází

$$(\sqrt{2} + 1)^n = A\sqrt{2} + B, \tag{1}$$

kde A, B jsou přirozená čísla.

Předpokládejme nejprve, že n je liché. Pak z analýzy předchozí úvahy vyplývá

$$(\sqrt{2} - 1)^n = A\sqrt{2} - B. \tag{2}$$

Znásobením rovností (1), (2) dostaneme

$$1 = 2A^2 - B^2,$$

z čehož

$$B = \sqrt{2A^2 - 1}. \tag{3}$$

Položíme-li $m = 2A^2 - 1$, obdržíme vzhledem k (1), (2), (3) žádaný výsledek

$$(\sqrt{2} \pm 1)^n = \sqrt{m + 1} \pm \sqrt{m}.$$

V případě, kdy n je sudé, platí obdobně

$$(\sqrt{2} - 1)^n = -A\sqrt{2} + B. \tag{4}$$

Znásobením rovností (1), (4) plyne

$$1 = B^2 - 2A^2,$$

odkud

$$B = \sqrt{2A^2 + 1}. \tag{5}$$

Položíme-li nyní $m = 2A^2$, dostaneme vzhledem k (1), (4), (5) opět žádaný výsledek

$$(\sqrt{2} \pm 1)^n = \sqrt{m + 1} \pm \sqrt{m}.$$

Věta je dokázána.

22

Dané rovnice označme postupně znaky (1) až (3). Z (2) a (3) odvodíme, že

$$(x + y)^2 = b^2 + z^2,$$

a z (1) plyne, že

$$(x + y)^2 = (a - z)^2.$$

Porovnáním posledních dvou vztahů dostaneme

$$a^2 - 2az = b^2.$$

Je-li $a = 0$, $b \neq 0$, nemá soustava řešení. V případě $a = b = 0$ nacházíme z (2) jediné řešení $x = y = z = 0$.

Buď tedy $a \neq 0$. Pak

$$z = \frac{a^2 - b^2}{2a}. \tag{4}$$

Dosadíme-li (4) do (1) a (3), vypočteme

$$x + y = \frac{a^2 + b^2}{2a}, \tag{5}$$

$$xy = \frac{(a^2 - b^2)^2}{4a^2}. \tag{6}$$

Poněvadž neznámé x, y vystupují v dané soustavě symetricky, můžeme předpokládat např. $x \geqq y$. Pak z rovnic (5), (6) vypočteme

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a^2 + b^2}{4a} + \frac{\sqrt{10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4}}{4a}, \\ y &= \frac{a^2 + b^2}{4a} - \frac{\sqrt{10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4}}{4a}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

ovšem za předpokladu, že je

$$10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4 \geqq 0; \tag{8}$$

neplatí-li (8), nemá soustava reálná řešení.

Dosazením se lze přesvědčit, že trojice čísel x, y, z daná vztahy (7) a (4) (a též druhá trojice, která vznikne výměnou písmen x, y) skutečně vyhovuje dané soustavě.

Aby kořeny byly kladné, musí být nutně $x + y = \dfrac{a^2 + b^2}{2a} > 0$, odkud $a > 0$, a dále $z = \dfrac{a^2 - b^2}{2a} > 0$, z čehož $a > |b|$. Obráceně, je-li $a > |b|$, pak kořen z je kladný a rovněž kořeny x, y jsou kladné, neboť byly vypočteny ze soustavy rovnic (5), (6) [z (6) plyne, že x, y mají stejná znaménka, podle (5) však x, y nemohou být obě záporná]. Nechť je tedy $a > |b|$.

Nalezené kořeny x, y jsou různé právě tehdy, je-li $10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4 > 0$ neboli $a < |b| \sqrt{3}$. Pak i kořen z je různý od x i od y; kdyby např. $x = z$, plynulo by z rovnice (3) $y = z$, a tedy $x = y$.

Nutná a postačující podmínka k tomu, aby čísla x, y, z splňující danou soustavu rovnic byla kladná a navzájem různá, je

$$|b| < a < |b| \sqrt{3}.$$

23

Žádné z hledaných čísel nemůže být nula; kdyby např. $x_1 = 0$, pak by muselo platit

$$x_2x_3x_4 = 2,$$

$$x_2 = x_3 = x_4 = 2,$$

což není možné. Označíme-li $x_1x_2x_3x_4 = p$, pak pro každé $i = 1, 2, 3, 4$ platí

$$x_i + \frac{p}{x_i} = 2$$

čili

$$x_i^2 - 2x_i + p = 0.$$

Všechna čtyři hledaná čísla jsou tedy kořeny jedné kvadratické rovnice. Proto nejvýše dvě z nich mohou být různá. Vyšetříme tyto tři možnosti:

[1] $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = m$, takže $m + m^3 = 2$. Poněvadž funkce $m + m^3$ je rostoucí, nacházíme jediný reálný kořen $m = 1$.

[2] Nechť např. $x_1 = x_2 = x_3 = m$, $x_4 = n$. Pak máme soustavu rovnic

$$m + m^2n = 2,$$

$$n + m^3 = 2.$$

Odečtením
$$(m - n)(1 - m^2) = 0.$$

Možnosti $m = n$ a $m = 1$ nevedou k ničemu novému. V případě $m = -1$ bude $n = 3$. Tak dostaneme celkem čtyři řešení.

[3] V případě $x_1 = x_2 = m$, $x_3 = x_4 = n$ máme soustavu
$$m + mn^2 = 2,$$
$$n + nm^2 = 2.$$
Odečtením
$$(m - n)(1 - mn) = 0.$$

Opět stačí uvažovat jen možnost $mn = 1$. Pak ale z předchozí soustavy dostaneme $m + n = 2$ a dále $m + \frac{1}{m} = 2$, $m^2 - 2m + 1 = 0$, $(m - 1)^2 = 0$, $m = 1$, $n = 1$. Ale tento případ jsme už dříve probrali.

Závěr. Úloha má celkem pět řešení: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$; jedno z čísel x_i se rovná 3 a ostatní -1.

24

První řešení. Nechť trojice reálných čísel x_1, x_2, x_3 splňuje danou soustavu. Můžeme předpokládat, že aspoň dvě z čísel x_1, x_2, x_3 jsou nezáporná; jinak bychom přešli k trojici $-x_1$, $-x_2$, $-x_3$, která rovněž splňuje danou soustavu. Vhodnou výměnou neznámých a současnou výměnou rovnic dosáhneme toho, že
$$x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0$$

a že koeficienty takto upravené soustavy opět splňují podmínky a) až c). V poslední rovnici dané soustavy pak bude
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leqq 0,$$
a proto
$$a_{33}x_3 \geqq 0, x_3 \geqq 0.$$

Je tedy $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$, $x_3 \geqq 0$. Budiž např. x_1 největší z čísel x_1, x_2, x_3, tj.

$$x_1 \geqq x_2 \geqq 0, \qquad x_1 \geqq x_3 \geqq 0. \tag{1}$$

Vynásobíme nerovnosti (1) po řadě zápornými čísly a_{12}, a_{13}; vyjde

$$a_{12}x_1 \leqq a_{12}x_2, \qquad a_{13}x_1 \leqq a_{13}x_3. \tag{2}$$

Sečteme nerovnosti (2) a přičteme rovnost $a_{11}x_1 = a_{11}x_1$; dostaneme

$$0 \leqq (a_{11} + a_{12} + a_{13})\, x_1 \leqq a_{11}x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}x_3 = 0.$$

Odtud plyne — protože $a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0$ — výsledek $x_1 = 0$ a dále podle (1) $x_2 = x_3 = 0$.

Druhé řešení (předpokládá některé znalosti o determinantech). Označme $s_i = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}$ pro $i = 1, 2, 3$ a vypočtěme determinant D dané soustavy

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_1 & a_{12} & a_{13} \\ s_2 & a_{22} & a_{23} \\ s_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= s_1(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + s_2a_{13}a_{32} + s_3a_{12}a_{23} - s_2a_{12}a_{33} - s_3a_{22}a_{13}.$$

Druhý, třetí, čtvrtý a pátý sčítanec jsou kladná čísla; dokážeme-li, že je $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} > 0$, bude $D > 0$, takže podle známé věty je $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ jediné řešení dané soustavy.

Protože je $a_{31} < 0$, $s_3 > 0$, platí $a_{32} + a_{33} > 0$; vynásobíme-li tuto nerovnost kladným číslem $-a_{23}$ a přičteme-li pak na obou stranách součin $a_{22}a_{33}$, dostaneme $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} - a_{23}a_{33} > a_{22}a_{33}$, neboli

$$a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} > a_{33}(a_{23} + a_{22}).$$

Zde je zase $a_{23} + a_{22} > 0$ (neboť $a_{21} < 0$ a $s_2 > 0$), takže skutečně platí $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} > 0$.

Třetí řešení. Nechť trojice reálných čísel x_1, x_2, x_3 je řešením dané soustavy a nechť $|x_1| \geqq |x_2| \geqq |x_3|$; toho lze vždy dosáhnout vhodnou permutací neznámých a rovnic.

Případ $|x_1| = 0$ je jasný, a proto budeme v dalším předpokládat, že je $|x_1| > 0$. Pak platí

$$a_{11} + a_{12}\frac{x_2}{x_1} + a_{13}\frac{x_3}{x_1} \geqq a_{11} - |a_{12}|\frac{|x_2|}{|x_1|} - |a_{13}|\frac{|x_3|}{|x_1|} \geqq$$

$$\geqq a_{11} - |a_{12}| - |a_{13}| = a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0 .$$

Z prvé rovnice plyne

$$0 = |a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3| = |x_1| \left| a_{11} + a_{12}\frac{x_2}{x_1} + a_{13}\frac{x_3}{x_1} \right| ,$$

avšak druhý činitel v posledním součinu je, jak jsme právě dokázali, kladný. Proto $x_1 = 0$ a z uspořádání $|x_1| \geqq |x_2| \geqq \geqq |x_3|$ pak vyplývá, že i $x_2 = x_3 = 0$.

Tohoto řešení lze užít i v případě analogické soustavy n rovnic o n neznámých.

25

Při současné výměně parametrů a_i, a_k a neznámých x_i, x_k se soustava nezmění. Můžeme tedy předpokládat, že

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4. \tag{1}$$

Pak lze každou absolutní hodnotu $|a_i - a_k|$ $(i < k)$ nahradit rozdílem $a_i - a_k$. Odečteme-li druhou rovnici od první, vyjde

$$(a_1 - a_2)(-x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0. \tag{2}$$

Podobně odečtením třetí rovnice od druhé dostaneme

$$(a_2 - a_3)(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4) = 0. \tag{3}$$

Konečně odečtením čtvrté rovnice od třetí dostaneme

$$(a_3 - a_4)(-x_1 - x_2 - x_3 + x_4) = 0. \tag{4}$$

V rovnicích (2), (3), (4) zkrátíme nenulové koeficienty $(a_1 - a_2)$, $(a_2 - a_3)$, $(a_3 - a_4)$. Takto upravené rovnice (2) a (4) sečteme; vyjde $x_1 = x_4$. Odečtením upravených rovnic (2) a (3) vyjde

$x_2 = 0$, z (2) pak $x_3 = 0$. Z původních rovnic pak dostaneme

$$x_1 = x_4 = \frac{1}{|a_1 - a_4|}.$$

Za předpokladu (1) má tedy daná soustava jediné možné řešení $x_1 = x_4 = \dfrac{1}{|a_1 - a_4|}$, $x_2 = x_3 = 0$. Dosazením je možno se přesvědčit, že je to skutečně řešení dané soustavy.

Podobně lze řešit obdobnou úlohu pro libovolný počet rovnic.

26

Očíslujeme dané rovnice (1) až (5). Prvé tři z nich pišme ve tvaru

$$x_5 = yx_1 - x_2, \tag{1a}$$
$$x_3 = yx_2 - x_1, \tag{2a}$$
$$x_4 = yx_3 - x_2. \tag{3a}$$

Dosazením x_3 z (2a) do (3a) dostaneme po úpravě

$$x_4 = (y^2 - 1)\, x_2 - yx_1. \tag{3b}$$

Do (4) dosaďme nyní z (1a), (2a) a (3b):

$$yx_2 - x_1 + yx_1 - x_2 = y[(y^2 - 1)x_2 - yx_1],$$

čili po úpravě

$$(y^2 + y - 1)\, x_1 - (y - 1)\,(y^2 + y - 1)\, x_2 = 0. \tag{4a}$$

Dále dosaďme do (5) za x_4, x_5 z (3b) a (1a):

$$(y^2 - 1)\, x_2 - yx_1 + x_1 = y\,(yx_1 - x_2),$$

čili po úpravě

$$(y^2 + y - 1)\, x_1 - (y^2 + y - 1)\, x_2 = 0. \tag{5a}$$

Snadno se ověří, že pětice čísel x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 splňuje danou soustavu rovnic tehdy a jen tehdy, platí-li současně (1a), (2a), (3b), (4a), (5a).

Řešme tedy soustavu rovnic (1a), (2a), (3b), (4a), (5a). Přitom rozlišujme dvě možnosti vzhledem k parametru y.

[1] Je-li $y^2 + y - 1 = 0$, tj. $y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, pak rovnice (4a), (5a) jsou splněny pro libovolná čísla x_1, x_2. Vztahy (1a), (2a), (3b) pak již jednoznačně určují zbývající čísla x_5, x_3, x_4. Vychází tedy nekonečně mnoho řešení.

[2] V případě, že $y^2 + y - 1 \neq 0$, lze rovnice (4a), (5a) zjednodušit

$$x_1 - (y - 1)x_2 = 0, \tag{4b}$$

$$x_1 - x_2 = 0. \tag{5b}$$

Je-li nyní $y = 2$, pak nacházíme nekonečně mnoho řešení tvaru

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = a,$$

kde a je libovolné číslo; jiné pětice v tomto případě nevyhovují. Je-li $y \neq 2$, pak z (4b) a (5b) plyne $x_1 = x_2 = 0$ a z (1a), (2a), (3b) pak také $x_3 = x_4 = x_5 = 0$; v tomto případě má soustava jediné řešení.

Úloha je vyřešena.

27

Pro $n = 1$ a 2 je důkaz snadný. Předpokládejme, že tvrzení platí pro přirozené číslo $n \geqq 2$, a dokažme, že platí i pro $n + 1$. Mějme tedy $n + 1$ kladných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ se součinem rovným 1. V případě $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n+1} = 1$ platí rovnost

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} = n + 1.$$

Nejsou-li všechna čísla a_i rovna 1, pak některé z nich musí být menší než 1 (nechť je to např. číslo a_1) a některé musí být větší než 1 (nechť je to např. a_{n+1}). Položíme-li $b_1 = a_1 a_{n+1}$, bude $b_1 a_2 \ldots a_n = 1$. Podle indukčního předpokladu

$$b_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqq n.$$

Potom

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} = (b_1 + a_2 + \ldots + a_n) + \\ + a_{n+1} - b_1 + a_1 \geqq n + a_{n+1} - b_1 + a_1 = \\ = (n + 1) + a_{n+1} - a_1 a_{n+1} + a_1 - 1 = \\ = (n + 1) + (a_{n+1} - 1)(1 - a_1) .$$

Poněvadž $a < 1$, $a_{n+1} > 1$, je $(a_{n+1} - 1)(1 - a_1) > 0$, a tedy

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} > n + 1.$$

Tvrzení je dokázáno.

Poznámka. Buďte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ libovolná kladná čísla. Položme $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = g$. Pak

$$\frac{a_1}{g} \cdot \frac{a_2}{g} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{g} = 1,$$

takže podle věty dokázané v předchozí úloze platí

$$\frac{a_1}{g} + \frac{a_2}{g} + \ldots + \frac{a_n}{g} \geqq n$$

neboli

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

s rovností pouze v případě $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Tak jsme odvodili důležitou *nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem kladných čísel.*

28

Protože pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé, mějme $n > 1$ a pišme

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = S_1 + S_2, \quad (1)$$

kde S_1 je součet n sčítanců tvaru $a_i b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a S_2 je součet $n(n - 1)$ sčítanců tvaru $a_i b_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n,$

$i \neq k$). Součet S_2 se tedy skládá z $\dfrac{n(n-1)}{2}$ částečných součtů tvaru $a_i b_k + a_k b_i$. Přitom platí

$$a_i b_k + a_k b_i = (a_i b_i + a_k b_k) - (a_i - a_k)(b_i - b_k) \leqq a_i b_i + a_k b_k. \tag{2}$$

Součet S_2 je proto menší nebo roven součtu $n(n-1)$ součinů $a_j b_j$, v nichž index j nabývá každé z hodnot $1, 2, \ldots, n$ přesně $(n-1)$-krát. To znamená, že

$$S_2 \leqq (n-1)(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n). \tag{3}$$

S přihlédnutím k (1) a (3) dostáváme nyní žádanou nerovnost

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \leqq$$
$$\leqq n(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n). \tag{4}$$

Je-li $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ nebo $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$, platí zřejmě v (4) znaménko rovnosti. Není-li $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ ani $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$, pak vzhledem k danému uspořádání se najdou indexy i, j takové, že $a_i < a_n$, $b_j < b_n$. Budiž např. $i \leqq j$. Pak je také $b_i < b_n$, takže v (2) při $k = n$ platí ostrá nerovnost. Potom i v (4) nastává ostrá nerovnost.

29

Uvažovaná nerovnost platí právě tehdy, když

$$\frac{4d_1 d_3}{(d_1 + d_3)^2}(c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3)\left(\frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2} + \frac{c_3}{d_3}\right) \leqq$$
$$\leqq (c_1 + c_2 + c_3)^2. \tag{1}$$

Výraz na levé straně nerovnosti (1) je součin dvou činitelů

$$x = \frac{2}{d_1 + d_3}(c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3),$$

$$y = \frac{2d_1d_3}{d_1 + d_3}\left(\frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2} + \frac{c_3}{d_3}\right).$$

Tento rozklad jsme provedli proto, že aritmetický průměr čísel x, y je velmi jednoduchý, jak snadno zjistíme výpočtem:

$$\frac{1}{2}(x + y) =$$

$$= \frac{1}{d_1 + d_3}\left[c_1(d_1 + d_3) + c_3(d_1 + d_3) + \frac{c_2}{d_2}(d_1d_3 + d_2^2)\right],$$

tj.

$$\frac{1}{2}(x + y) = c_1 + c_3 + c_2\frac{d_1d_3 + d_2^2}{(d_1 + d_3)\,d_2}. \tag{2}$$

Snadno dokážeme, že koeficient při c_2 v (2) je menší nebo roven jedné. Skutečně, kdyby bylo

$$\frac{d_1d_3 + d_2^2}{(d_1 + d_3)\,d_2} > 1,$$

platilo by

$$d_1d_3 + d_2^2 > d_1d_2 + d_2d_3,$$

neboli

$$d_1(d_3 - d_2) + d_2(d_2 - d_3) > 0,$$

neboli

$$(d_3 - d_2)(d_1 - d_2) > 0,$$

což je ve sporu s předpoklady $d_1 \leqq d_2 \leqq d_3$. Protože koeficient při c_2 ve vztahu (2) je menší nebo roven jedné, platí

$$\frac{1}{2}(x + y) \leqq c_1 + c_2 + c_3. \tag{3}$$

Poněvadž geometrický průměr dvou nezáporných čísel je menší nebo roven jejich aritmetickému průměru, platí

$$\sqrt{xy} \leqq \frac{1}{2}(x + y). \tag{4}$$

Z (3) a (4) dostaneme po umocnění

$$xy \leqq (c_1 + c_2 + c_3)^2,$$

a to je nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

30

Můžeme předpokládat, že je např. $x \leqq y$. Abychom zmenšili počet parametrů, položíme $z = \frac{y}{x} \geqq 1$ a nerovnost, kterou máme dokázat, nyní je

$$(z + 1)^m \leqq 2^{m-1} (z^m + 1).$$

Tuto nerovnost upravíme

$$\frac{(z + 1)^m}{2^{m-1}} - 1 \leqq z^m,$$

$$\frac{(z + 1)^m - 2^m}{2^{m-1}} \leqq z^m - 1,$$

$$\frac{(z - 1)\,[(z + 1)^{m-1} + 2\,(z + 1)^{m-2} + \ldots + 2^{m-1}]}{2^{m-1}} \leqq$$

$$\leqq (z - 1)\,(z^{m-1} + z^{m-2} + \ldots + z + 1).$$

Je-li $z = 1$ (tj. $x = y$), platí znaménko rovnosti. V případě $z > 1$ dostáváme ekvivalentní nerovnost

$$\left(\frac{z + 1}{2}\right)^{m-1} + \left(\frac{z + 1}{2}\right)^{m-2} + \ldots + \frac{z + 1}{2} + 1 \leqq$$

$$\leqq z^{m-1} + z^{m-2} + \ldots + z + 1,$$

která pro $z > 1$ platí dokonce se znaménkem ostré nerovnosti $\left(\text{je totiž } \frac{z + 1}{2} < z\right)$.

Poznámka 1. Vlastnost funkce

$$g(x) = x^m$$

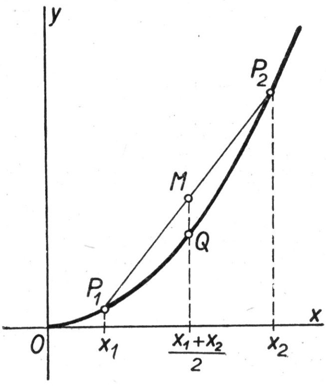
(m přirozené číslo, definiční obor $x > 0$) dokázaná v předchozí úloze, tj. nerovnost

$$g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqq \frac{g(x_1) + g(x_2)}{2} \tag{1}$$

(pro $x_1, x_2 > 0$), má názorný geometrický smysl. Představme si v rovině pravoúhlých souřadnic x, y graf takové funkce $y = g(x)$; viz obr. 5. Na tomto grafu zvolme dva body

$$P_1 \equiv [x_1, g(x_1)],$$

$$P_2 \equiv [x_2, g(x_2)]$$



Obr. 5.

(nechť je např. $x_1 < x_2$). Třetí bod Q nechť odpovídá hodnotě v bodě $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, tj.

$$Q \equiv \left[\frac{x_1 + x_2}{2}, \quad g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right].$$

Označme ještě M střed úsečky P_1P_2, tj.

$$M \equiv \left[\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{g(x_1) + g(x_2)}{2}\right].$$

Naše nerovnost (1) nyní říká, že bod Q leží „pod“ bodem M (viz obr. 5). Dalo by se dokázat, že celá úsečka P_1P_2 leží „nad“ grafem funkce $g(x)$ v intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$.

Mají-li každé dva body P_1, P_2 grafu funkce $f(x)$ popsanou vlastnost, říkáme, že funkce $f(x)$ je *konvexní*. V předchozí úloze jsme tedy v podstatě dokázali, že tzv. mocninné funkce $g(x) = x^m$ (m přirozené) jsou konvexní v oboru $x > 0$.

Poznámka 2. Všimněme si nyní jednoho důsledku nerovnosti (1). Dokážeme tuto větu:

Jestliže funkce $f(x)$, definovaná v jistém intervalu, splňuje nerovnost

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \tag{1}$$

pro libovolná čísla x_1, x_2 z toho intervalu, pak platí nerovnost

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leqq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} \tag{2}$$

pro libovolná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z uvažovaného intervalu. Jestliže přitom v (1) *nastává rovnost právě tehdy, když $x_1 = x_2$, pak rovnost v* (2) *nastává právě tehdy, když $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.*

Důkaz. Nerovnost (2) dokážeme (indukcí) nejprve v případě, že n je přirozenou mocninou čísla 2. Pro $n = 2$ nerovnost (2) splývá s předpokladem (1), takže není co dokazovat. Předpokládejme nyní, že (2) platí pro jisté $n = k$ a dokažme nerovnost (2) pro n rovné nejbližší vyšší mocnině čísla 2, tj. pro $n = 2k$. Platí

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2k-1} + x_{2k}}{2k}\right) =$$

$$= f\left(\frac{\dfrac{x_1 + x_2}{2} + \ldots + \dfrac{x_{2k-1} + x_{2k}}{2}}{k}\right), \tag{3}$$

kde čísla $\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \ldots, \dfrac{x_{2k-1} + x_{2k}}{2}$ leží opět v uvažovaném intervalu, takže na základě indukčního předpokladu máme

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2k}}{2k}\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) + \ldots + f\left(\dfrac{x_{2k-1} + x_{2k}}{2}\right)}{k}, \tag{4}$$

z čehož užitím (1) plyne (2) pro $n = 2k$. Nerovnost (2) tedy platí pro každé n tvaru 2^m (m přirozené).

Buď nyní $n > 1$ přirozené číslo, které není mocninou čísla 2. Pak tedy existuje přirozené m tak, že

$$2^{m-1} < n < 2^m.$$

Rozdíl $2^m - n$ označme p, čili $n + p = 2^m$. Položme nyní

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_{n+p} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

(toto číslo opět leží v uvažovaném intervalu). Poněvadž $n + p$ je přirozená mocnina čísla 2, platí podle již dokázaného nerovnost

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+p}}{n + p}\right) \leqq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n+p})}{n + p}. \tag{5}$$

Avšak argument na levé straně v (5) je

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+p}}{n + p} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + p \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}}{n + p} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

a pravou stranu (5) lze psát

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n+p})}{n + p} =$$

$$= \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) + p \, . \, f\left(\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)}{n + p},$$

takže nerovnost (5) říká, že

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) + p \, . \, f\left(\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)}{n + p},$$

odkud

$$(n + p) \, . \, f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leqq$$

$$\leqq f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) + p \, . \, f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right),$$

a tedy

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leqq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}.$$

Nerovnost (2) je dokázána pro všechna přirozená čísla n. Nejsou-li si všechna čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ navzájem rovna, platí v (2) ostrá nerovnost. Vyplývá to z ostré nerovnosti v (4), která je zřejmá, uspořádáme-li v (3) sčítance $x_1, x_2, \ldots, x_{2k}$ tak, aby různí sčítanci x_i, x_j tvořili jednu dvojici, a užijeme-li pak našeho předpokladu o rovnosti v (1).

Věta je dokázána.

31

Pro $n = 3$ máme

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) =$$
$$= (a_1 - a_2)^2 + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_1a_2 -$$
$$- a_2a_3 - a_3a_1 = \frac{1}{2}[(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2],$$

a to je vždy nezáporné.

Pro $n = 5$ dostaneme na levé straně uvažované nerovnosti výraz

$$\begin{aligned} &(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5) + \\ &+ (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5) + \\ &+ (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5) + \\ &+ (a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)(a_4 - a_5) + \\ &+ (a_5 - a_1)(a_5 - a_2)(a_5 - a_3)(a_5 - a_4). \end{aligned}$$

Poněvadž v něm čísla a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 vystupují rovnocenně, můžeme předpokládat např. uspořádání $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq a_4 \geqq \geqq a_5$. Pak platí $a_1 - a_2 = -(a_2 - a_1) \geqq 0$, $a_1 - a_3 \geqq a_2 - a_3 \geqq 0$, $a_1 - a_4 \geqq a_2 - a_4 \geqq 0$, $a_1 - a_5 \geqq a_2 - a_5 \geqq 0$, takže

$$\begin{aligned} &(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5) + \\ &+ (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5) \geqq 0. \end{aligned}$$

Obdobně

$$\begin{aligned} &(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)(a_4 - a_5) + \\ &+ (a_5 - a_1)(a_5 - a_2)(a_5 - a_3)(a_5 - a_4) \geqq 0. \end{aligned}$$

Zbývající sčítanec

$$(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5)$$

je, jakožto součin dvou nekladných a dvou nezáporných čísel, nezáporný. Z toho už vyplývá správnost uvedeného tvrzení i pro $n = 5$.

Abychom dokázali nesprávnost daného tvrzení pro ostatní přirozená $n > 2$, stačí najít n-tici reálných čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ tak, že výraz na levé straně bude záporný.

Pro $n = 4$ stačí vzít např. $a_1 = a_2 = a_3 > a_4$. Obdobně pro $n \geqq 6$ stačí zvolit např. $a_1 = a_2 = a_3 > a_4 > a_5 = \dots a_n$ při n sudém a $a_1 = a_2 = a_3 < a_4 < a_5 = \dots = a_n$ při n lichém; uvažovaný výraz má pak hodnotu $(a_4 - a_1)^3 (a_4 - a_5)^{n-4}$, což je v obou případech záporné číslo.

32

Pro důkaz sporem předpokládejme, že všechny kořeny x_i $(i = 1, 2, 3)$ daného mnohočlenu jsou racionální čísla. Čísla $y_i = ax_i$ jsou pak zřejmě racionální kořeny mnohočlenu $y^3 + by^2 + acy + a^2d$. Snadno se zjistí, že každý racionální kořen mnohočlenu s celočíselnými koeficienty, kde koeficient při nejvyšší mocnině je 1, je celé číslo. Proto čísla y_i jsou celá a každé z nich zřejmě dělí prostý člen a^2d, což je liché číslo. Z toho plyne, že čísla y_i jsou lichá, takže také čísla

$$y_1 + y_2 + y_3 = -b,$$
$$y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = ac$$

jsou lichá. To je však spor s předpokladem, že bc je sudé.

33

Buďte $a_0, a_1, \dots, a_n$ (n celé nezáporné) celočíselné koeficienty daného mnohočlenu, tzn.

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \tag{1}$$

pro každé x. Nechť pro pět navzájem různých celých čísel x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 platí

$$p(x_i) = 5 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5). \tag{2}$$

Předpokládejme, že pro nějaké celé číslo z je

$$p(z) = 8. \tag{3}$$

Odečtením (2) od (3) dostaneme

$$p(z) - p(x_i) = 3 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5). \tag{4}$$

Z vyjádření (1) je však patrné, že

$$p(z) - p(x_i) = (z - x_i) \,.\, C_i\,, \tag{5}$$

kde C_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ jsou vhodná celá čísla. Z (4) a (5) nyní vyplývá

$$3 = (z - x_i) \,.\, C_i.$$

Každé z pěti různých čísel $z - x_i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ se tedy musí rovnat některému ze čtyř čísel $3, 1, -1, -3$. To však není možné.

34

Zvolme počátek času 9.00 hod. a časovou jednotku 5 min. Vzdálenost lodí v okamžiku t označme $S(t)$. Užitím analytické geometrie se lehce vypočítá, že $S^2(t)$ je kvadratická funkce času, tj.

$$S^2(t) = at^2 + bt + c.$$

Podle předpokladů

$$400 = c,$$
$$225 = 49a + 7b + c,$$
$$169 = 121a + 11b + c.$$

Odtud

$$a = 1, \quad b = -32, \quad c = 400,$$

takže

$$S^2(t) = t^2 - 32t + 400 = (t - 16)^2 + 144.$$

Lodě si byly nejblíže v 10.20 hod. ($t = 16$) a jejich vzdálenost v tu chvíli činila 12 mil.

35

Především je jasné, že nezáporné číslo z nemůže být kořenem mnohočlenu se všemi koeficienty kladnými.

Buď tedy z libovolné komplexní číslo, které není reálné nezáporné. Je-li $\operatorname{Re} z < 0$, pak můžeme položit

$$a_0 = z\bar{z}, \quad a_1 = -(z + \bar{z}), \quad a_2 = 1,$$

a číslo z splňuje rovnici

$$z^2 + a_1 z + a_0 = 0,$$

v níž všechny tři koeficienty jsou kladné.

V případě $\operatorname{Re} z \geqq 0$ můžeme předpokládat, že $\operatorname{Im} z > 0$ (jinak bychom přešli k číslu $\bar{z}$, které rovněž musí být kořenem hledaného mnohočlenu). Pak obraz čísla z leží v prvém kvadrantu roviny komplexních čísel, nikoli na reálné ose. Proto (vzhledem k Moivrově větě) pro vhodné přirozené číslo n bude $\operatorname{Re} z^n < 0$. Podobně jako v předchozím odstavci najdeme kladná čísla a, b taková, že platí

$$z^{2n} + az^n + b = 0.$$

Pak samozřejmě platí i

$$(z^{2n} + az^n + b)(z + 1)^n = 0.$$

Úpravou levé strany (tj. postupným násobením trojčlenu $z^{2n} + az^n + b$ výrazy $z + 1$ a sloučením stejných mocnin čísla z) se dostane mnohočlen (stupně $3n$), jehož všechny koeficienty budou kladné.

Věta je dokázána.

36

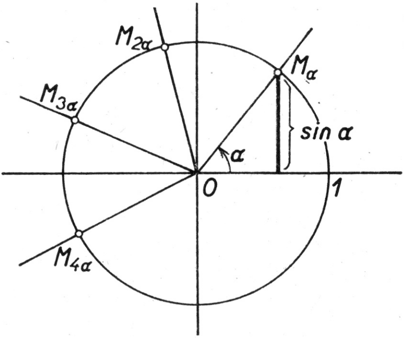
Pro čísla tvaru $\alpha = k\pi$ (k celé) platí

$$\sin \alpha \leqq \sin 2\alpha \leqq \sin 3\alpha \leqq \ldots, \tag{1}$$

neboť všechny členy jsou nulové.

Nechť α není tvaru $k\pi$ (k celé). Představme si příslušný bod M_α na jednotkové kružnici v rovině kartézských souřadnic (tzn. α je velikost orientovaného úhlu s vrcholem v počátku, jehož prvé rameno prochází bodem $[1; 0]$ a druhé bodem M_α). Přitom M_α neleží na prvé souřadnicové ose a druhá souřadnice bodu M_α je podle definice právě $\sin \alpha$ (viz obr. 6). Nyní je jasné, že druhé souřadnice bodů

$$M_\alpha, M_{2\alpha}, M_{3\alpha}, \ldots$$



Obr. 6.

nemohou tvořit monotónní posloupnost, tj. nemohou platit všechny nerovnosti (1). (Na obr. 6 jsme předpokládali, že M_α leží v prvém kvadrantu, ale podobnou úvahu lze provést i pro ostatní možné polohy bodu M_α.)

37

Přirozeně se nabízí úprava

$$\sin x + \cos x = 1 - \sin x \cos x,$$
$$(\sin x + \cos x)^2 = (1 - \sin x \cos x)^2,$$

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 - 2\sin x \cos x + \\ + \sin^2 x \cos^2 x,$$

$$(4 - \sin x \cos x)\sin x \cos x = 0.$$

Odtud vyplývá, že je buď $\sin x = 0$ nebo $\cos x = 0$. Dosadíme-li tyto dvě možnosti do dané rovnice, najdeme všechna řešení úlohy:

$$x = 2k\pi \quad \text{a} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

kde k je libovolné celé číslo.

38

V případě $n = 1$ rovnice zní

$$\cos x - \sin x = 1$$

a z grafů funkcí kosinus a sinus nacházíme řešení

$$x = 2k\pi \quad \text{nebo} \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \tag{1}$$

kde k je libovolné celé číslo.

V případě $n = 2$ máme rovnici

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1,$$

která se velmi zjednoduší, dosadíme-li za 1 na pravé straně $\cos^2 x + \sin^2 x$. Po malé úpravě vyjde

$$\sin^2 x = 0.$$

Jediná řešení jsou nyní

$$x = k\pi, \tag{2}$$

kde k je libovolné celé číslo.

Pro zbývající $n > 2$ zkusme psát danou rovnici opět v ekvivalentním tvaru

$$\cos^n x - \sin^n x = \cos^2 x + \sin^2 x$$

neboli

$$(1 - \cos^{n-2} x) \cos^2 x + (1 + \sin^{n-2} x) \sin^2 x = 0.$$

Oba sčítanci na levé straně jsou nezáporní, takže rovnice je splněna právě tehdy, platí-li

$$(1 - \cos^{n-2} x) \cos^2 x = 0$$

a zároveň

$$(1 + \sin^{n-2} x) \sin^2 x = 0.$$

Rozebráním jednotlivých možností, které se zde nabízejí, se zjistí, že pro n liché jsou řešení stejná jako v případě $n = 1$ [tj. (1)] a pro n sudé vycházejí táž řešení jako v případě $n = 2$ [tj. (2)].

39

Zabývejme se nejprve pravou nerovnicí

$$\left| \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} \right| \leqq \sqrt{2},$$

kterou lze psát v ekvivalentním tvaru

$$(\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x})^2 \leqq 2.$$

Umocníme-li, dostaneme po malé úpravě nerovnici

$$-2 \sqrt{1 + \sin 2x} \sqrt{1 - \sin 2x} \leqq 0,$$

jíž vyhovuje každé číslo x z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Řešme nyní levou nerovnici

$$2 \cos x \leqq \left| \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} \right|. \tag{1}$$

Tuto nerovnici splňuje především každé x, pro něž platí $\cos x \leqq 0$, čili

$$\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{3\pi}{2}. \tag{2}$$

Z ostatních čísel intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ splňují pak nerovnici (1) právě ta x, o nichž platí

$$4 \cos^2 x \leqq (\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x})^2$$

neboli po úpravě

$$2 \cos^2 x \leqq 1 - |\cos 2x| .$$

Poněvadž víme, že $2 \cos^2 x - 1 = \cos 2x$, můžeme poslední nerovnici ještě přepsat

$$\cos 2x \leqq - |\cos 2x| .$$

To je splněno právě tehdy, je-li $\cos 2x \leqq 0$, tj. $\frac{\pi}{2} \leqq 2x \leqq \frac{3\pi}{2}$ nebo $\frac{5\pi}{2} \leqq 2x \leqq \frac{7\pi}{2}$, čili

$$\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{3\pi}{4} \quad \text{nebo} \quad \frac{5\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{7\pi}{4} . \tag{3}$$

Sjednocením výsledků (2), (3) nacházíme všechna řešení nerovnice (1); jsou to čísla x, pro něž platí

$$\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{7\pi}{4} .$$

To jsou také všechna řešení této úlohy.

40

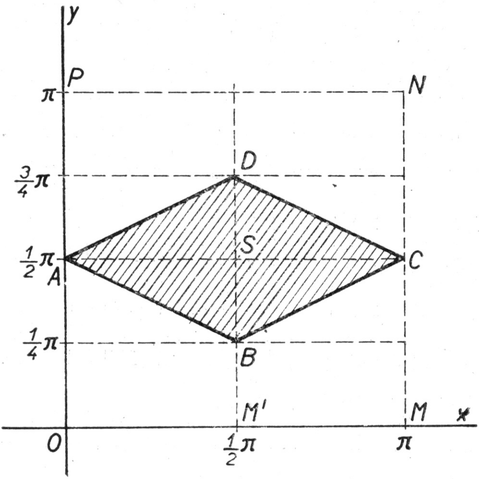
Máme najít všechny body čtverce $OMNP$ (viz obr. 7), jejichž souřadnice x, y vyhovují nerovnici

$$1 + |\cos x| \leqq 2 \sin^2 y. \tag{1}$$

Všimněme si nejprve, není-li vyšetřovaná množina třeba souměrná; tím by se mohl zmenšit obor proměněných x, y a zjednodušit další úvahy. Skutečně, náleží-li bod o souřadnicích x_0, y_0 hledané množině, pak jí náleží i bod o souřadnicích $\pi - x_0, y_0$ (díky tomu, že se $\cos x$ vyskytuje v (1) s absolutní hodnotou) a také bod o souřadnicích $x_0, \pi - y_0$ (neboť $\sin y_0 = \sin(\pi - y_0)$). To však znamená, že naše množina má dokonce dvě osy souměrnosti; jsou to přímky

$$x = \frac{\pi}{2}, \qquad y = \frac{\pi}{2}.$$

Stačí tedy zkoumat např. jen tu část uvažované množiny, která leží ve čtverci



Obr. 7.

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2} \tag{2}$$

(na obr. 7 je to čtverec $OM'SA$).

V tomto menším čtverci podmínka (1) zní

$$1 + \cos x \leqq 2 \sin^2 y.$$

Vzhledem ke vzorečku $2 \sin^2 y - 1 = -\cos 2y$ ji můžeme psát ve tvaru

$$\cos x \leqq -\cos 2y$$

neboli

$$\cos x \leqq \cos (\pi - 2y). \tag{3}$$

Jak číslo x, tak i číslo $\pi - 2y$ leží v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, v němž je funkce kosinus klesající. Proto nerovnice (3) je splněna právě tehdy, platí-li

$$x \geqq \pi - 2y$$

čili

$$y \geqq -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Průnikem čtverce (2) a poloroviny (4) je trojúhelník ABS s vrcholy

$$A \equiv \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad B \equiv \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right], \quad S \equiv \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

(viz obr. 7).

V důsledku zmíněných souměrností je hledaná množina bodů kosočtverec $ABCD$ se středem S (viz obr. 7).

41

Podle vzorce pro kosinus součtu platí

$$f(x) = A \cos x - B \sin x,$$

kde

$$A = \cos a_1 + \frac{\cos a_2}{2} + \ldots + \frac{\cos a_n}{2^{n-1}},$$

$$B = \sin a_1 + \frac{\sin a_2}{2} + \ldots + \frac{\sin a_n}{2^{n-1}}$$

jsou pevná čísla. Ukážeme, že aspoň jedno z čísel A, B je nenulové. Kdyby totiž $A = B = 0$, pak by pro všechna x platilo $f(x) = 0$. Snadno však najdeme bod, v němž má daná funkce např. kladnou hodnotu. Stačí položit $x = -a_1$ a dokázat, že $f(-a_1) > 0$. V tomto případě je totiž první sčítanec v definičním předpisu dané funkce roven 1 (tedy největší možný). Pro součet zbývajících sčítanců (vzhledem k tomu, že vždy $\cos \alpha \geqq -1$) platí

$$\frac{1}{2} \cos (a_2 + x) + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \cos (a_n + x) \geqq$$

$$\geqq -\left(\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} - 1.$$

Celkem pak máme

$$f(-a_1) \geqq \frac{1}{2^{n-1}} > 0.$$

Nyní už tvrzení 1° snadno plyne.

Nechť nyní $f(x_0) = f(x_1) = 0$ neboli

$$A \cos x_0 - B \sin x_0 = 0,$$
$$A \cos x_1 - B \sin x_1 = 0.$$

Je-li $A = 0$, pak nutně $B \neq 0$ a z podmínek $\sin x_0 = \sin x_1 = 0$ vyplývá, že $x_1 - x_0 = m\pi$, kde m je celé číslo. Je-li $A \neq 0$, pak první ze vztahů (1) násobíme číslem $A \sin x_1$ a druhý číslem $-A \sin x_0$, načež sečtením dostaneme

$$A^2 \sin (x_1 - x_0) = 0.$$

Odtud vyplývá tvrzení 2°.

42

Poněvadž $\cos \gamma = -\cos (\alpha + \beta)$, můžeme levou nerovnost psát ve tvaru

$$1 + \cos (\alpha + \beta) < \cos \alpha + \cos \beta.$$

Užijeme-li nyní známých vzorců, dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} < 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

neboli $\left(\text{poněvadž}\ \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} > 0\right)$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} < \cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Tato nerovnost však platí, neboť čísla $\dfrac{\alpha+\beta}{2} > \left|\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right|$ leží v intervalu $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, v němž je funkce kosinus klesající; přitom víme, že $\cos x = \cos(-x)$.

Pravou nerovnost dokážeme vhodnou úpravou součtu

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) =$$
$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + 1 \leqq$$
$$\leqq 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + 1 =$$
$$= \frac{3}{2} - 2\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 \leqq \frac{3}{2}.$$

Přitom rovnost zde nastane právě tehdy, když $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} = 1$ a zároveň $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{1}{2}$; snadno se zjistí, že tyto podmínky splňuje jedině rovnostranný trojúhelník.

43

Nejprve upravíme levou stranu dané nerovnosti. Dosadíme

$$\cos^2\gamma = \cos^2(\alpha+\beta) = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2 =$$
$$= \cos^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta =$$

$$\begin{aligned} &= \cos^2\alpha\cos^2\beta + (1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta) - \\ &\quad - 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta = \\ &= 1 + 2\cos^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \\ &\quad - 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta. \end{aligned}$$

Platí tedy

$$\begin{aligned} &\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \\ &= 1 + 2\cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta = \\ &= 1 + 2\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = \\ &= 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma. \end{aligned}$$

Pro tupoúhlé nebo pravoúhlé trojúhelníky je $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqq 0$, takže podle předchozí úpravy máme dokonce nerovnost

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geqq 1.$$

Budeme se proto v dalším zabývat už jen ostroúhlým trojúhelníkem. Vzhledem k tomu, že

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

můžeme danou nerovnost psát ve tvaru

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqq \frac{1}{8}.$$

Zde s výhodou užijeme vzorce

$$\cos\alpha\,.\,\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)],$$

neboť $\cos(\alpha-\beta) \leqq 1$ a $\cos(\alpha+\beta) = -\cos\gamma$, takže

$$\cos\alpha\,.\,\cos\beta \leqq \frac{1}{2}(1-\cos\gamma).$$

Poněvadž $\cos\gamma > 0$, platí dále

$$\cos\alpha\,.\,\cos\beta\,.\,\cos\gamma \leqq \frac{1}{2}(1-\cos\gamma)\cos\gamma.$$

Nyní již jen vhodně upravíme pravou stranu:

$$\frac{1}{2}(1 - \cos\gamma)\cos\gamma = \frac{1}{2}(\cos\gamma - \cos^2\gamma) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4} - \left(\cos\gamma - \frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\left(\cos\gamma - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Skutečně tedy platí

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqq \frac{1}{8},$$

jak jsme chtěli dokázat.

Z dosavadního postupu vyplývá, že rovnost v daném vztahu může nastat jen pro nějaký ostroúhlý trojúhelník, a to takový, v němž $\cos\dfrac{\alpha - \beta}{2} = 1$ a zároveň $\cos\gamma = \dfrac{1}{2}$. Tyto podmínky splňuje jedině rovnostranný trojúhelník.

Poznámka. Nerovnost

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqq \frac{1}{8},$$

která je pro tupoúhlý i pravoúhlý trojúhelník zřejmá, lze pro ostroúhlý trojúhelník dokázat též na základě výsledku úlohy 42, užijeme-li známé nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem kladných čísel (viz pozn. za řešením úlohy 27). V tomto případě totiž platí

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqq \left(\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3}\right)^3 \leqq \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{1}{8};$$

přitom rovnost zde nastává právě tehdy, je-li $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$, tj. v rovnostranném trojúhelníku.

44

Abychom mohli užitím známých vzorečků vypočítat rozdíl daných dvou čísel, pišme

$$\sin\cos x = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \cos x\right).$$

Pak

$$\cos\sin x - \sin\cos x = \cos\sin x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \cos x\right) =$$

$$= 2\cos\frac{\frac{\pi}{2} + \cos x + \sin x}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2} + \cos x - \sin x}{2}. \quad (1)$$

Avšak

$$|\cos x \pm \sin x| = \sqrt{\cos^2 x \pm 2\cos x\sin x + \sin^2 x} =$$
$$= \sqrt{1 \pm \sin 2x} \leqq \sqrt{2}.$$

Poněvadž $\sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$, platí

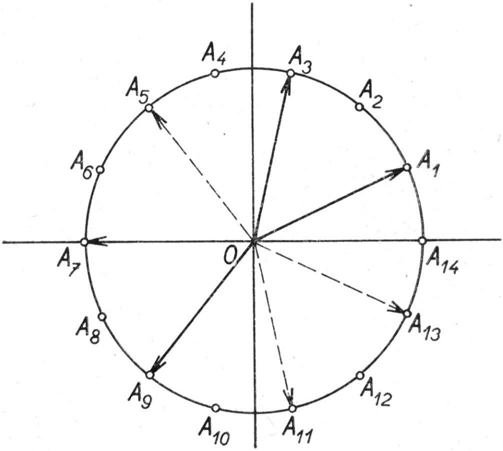
$$0 < \frac{\frac{\pi}{2} + \cos x \pm \sin x}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Proto je součin (1) kladný, takže vždy platí

$$\cos\sin x > \sin\cos x.$$

45

První řešení. Představme si na jednotkové kružnici v rovině kartézských souřadnic tři body A_1, A_2, A_3, jejichž argumenty jsou pořadě $\frac{\pi}{7}$, $\frac{2\pi}{7}$, $\frac{3\pi}{7}$ (obr. 8). Tyto tři body jsou vrcholy pravidelného čtrnáctiúhelníku $A_1A_2A_3 \dots A_{14}$ vepsaného do jednotkové kružnice ($A_{14} \equiv [1; 0]$), který je zřejmě souměrný podle počátku O. Číslo



Obr. 8.

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}$$

je součet velikostí průmětů vektorů $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_9}$, $\overrightarrow{OA_3}$ na prvou souřadnicovou osu. To je však totéž jako velikost průmětu (vektorového) součtu těchto tří vektorů. Týž průmět má i součet vektorů $\overrightarrow{OA_{13}}$, $\overrightarrow{OA_5}$, $\overrightarrow{OA_{11}}$ (viz obr. 8). Kdyby se nám podařilo dokázat, že

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_5} + \overrightarrow{OA_7} + \overrightarrow{OA_9} + \overrightarrow{OA_{11}} + \overrightarrow{OA_{13}} = 0, \tag{1}$$

pak by pro velikost průmětu platilo

$$2\left(\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\right) - 1 = 0$$

a byli bychom hotovi.

Všimněme si však, že body $A_1, A_3, A_5, A_7, A_9, A_{11}, A_{13}$ jsou vrcholy pravidelného sedmiúhelníku. Otočíme-li soustavu sedmi vektorů $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_3}, \ldots, \overrightarrow{OA_{13}}$ kolem počátku o úhel $\frac{2\pi}{7}$, obdržíme tutéž množinu vektorů, která tudíž bude mít i stejný součet. Součet našich sedmi vektorů je tedy takový vektor, který se nezmění, otočíme-li jej o jistý úhel různý od $2k\pi$ (k celé). Tuto vlastnost má jedině nulový vektor. Platí tedy (1) a úloha je rozřešena.

Druhé řešení. Upravme levou stranu takto:

$$L = \left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\frac{2\pi}{7} = 2\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} -$$

$$- 2\cos^2\frac{\pi}{7} + 1 = 2\cos\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7}\right) + 1 =$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right) + 1 =$$

$$= 4\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + 1.$$

Poněvadž argumenty $\frac{\pi}{7}$, $\frac{2\pi}{7}$ a $\frac{4\pi}{7}$ tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem 2, provedeme další úpravu užitím vzorečku $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$:

$$L = \frac{4\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} + 1 =$$

$$= \frac{2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} + 1 =$$

$$= \frac{\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} + 1 = \frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} + 1 =$$

$$= -\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} + 1 = \frac{1}{2}, \text{ c. b. d.}$$

Třetí řešení. Užitím vzorce $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$ dostaneme

$$2L\cos\frac{\pi}{14} = \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{14} - \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{\pi}{14} + \cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{14} =$$

$$= \cos\frac{3\pi}{14} + \cos\frac{\pi}{14} - \cos\frac{5\pi}{14} - \cos\frac{3\pi}{14} + \cos\frac{7\pi}{14} +$$

$$+ \cos\frac{5\pi}{14} = \cos\frac{\pi}{14},$$

z čehož $\left(\text{neboť } \cos\frac{\pi}{14} \neq 0\right)$

$$L = \frac{1}{2}, \text{ c. b. d.}$$

Čtvrté řešení. Položme

$$z = \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}.$$

Pak $\bar{z} = \cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}$, takže $z + \bar{z} = 2\cos\frac{\pi}{7}$, odkud

$$\cos\frac{\pi}{7} = \frac{z + \bar{z}}{2}.$$

Avšak $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$, čili

$$\cos\frac{\pi}{7} = \frac{z^2 + 1}{2z}.$$

Poněvadž $z^2 = \cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ a $z^3 = \cos\dfrac{3\pi}{7} + i\sin\dfrac{3\pi}{7}$, platí obdobně

$$\cos\frac{2\pi}{7} = \frac{z^4 + 1}{2z^2}, \qquad \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{z^6 + 1}{2z^3}.$$

Označíme-li

$$S = \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7},$$

bude

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{z^2 + 1}{z} - \frac{z^4 + 1}{z^2} + \frac{z^6 + 1}{z^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{z^4 + z^2 - z^5 - z + z^6 + 1}{z^3} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + z^6) + z^3}{z^3} =$$

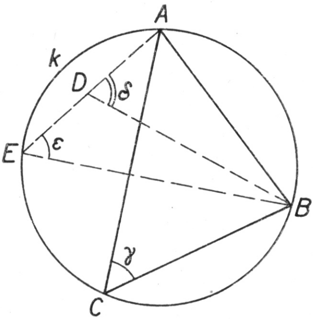
$$= \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{z^7 + 1}{z + 1} + z^3}{z^3}.$$

Zde však máme $z^7 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$, proto skutečně

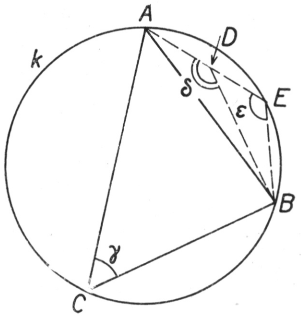
$$S = \frac{1}{2}.$$

46

P r v n í ř e š e n í. Buďte A, B ($A \neq B$) takové dva z daných bodů, jejichž vzdálenost není větší než vzdálenost kterékoli dvojice z daných n bodů (jsou-li M, N dva libovolné různé body dané n-tice, platí tedy $MN \geqq AB$). Označme U množinu všech těch daných bodů, které neleží na přímce AB. Množina U je konečná a neprázdná. Je-li X bod množiny U, vzniká trojúhelník ABX s ostrým úhlem $\xi \equiv \sphericalangle\, AXB$, neboť žádná ze stran AX, BX není menší než strana AB. Označme γ ten (popř. jeden z těch) úhlů ξ, který není menší než kterýkoli zbývající; příslušný bod X nazvěme C. Buď k kružnice opsaná trojúhelníku ABC. Uvnitř úsečky AB neleží žádný z daných bodů (proč?). Ani uvnitř kružnice k neleží žádný z daných bodů. To dokážeme sporem: Je-li D bod množiny U, který padne dovnitř kružnice k, platí $\sphericalangle\, ADB > \gamma$. Toto tvrzení je patrné z obr. 9, pokud bod D leží v polorovině ABC (o vnějším úhlu $\delta \equiv \equiv \sphericalangle\, ADB$ trojúhelníku BDE platí $\delta > \varepsilon = \gamma$). Leží-li bod D v polorovině opačné k polorovině ABC (obr. 10), je $\delta > \varepsilon = = 180° - \gamma > 90°$ (protější úhly v tětivovém čtyřúhelníku), tj. $\delta > 90°$, což však vzhledem k tomu, že zorné úhly ξ jsou



Obr. 9.



Obr. 10.

ostré, nemůže vůbec nastat. Tím je důkaz podán, a žádný z daných n bodů tedy nepadne dovnitř kružnice k.

Druhé řešení. Představme si přímku p procházející (alespoň) dvěma z daných bodů (označme je A, B) a takovou, že všechny uvažované body leží v jedné polorovině určené přímkou p a žádný neleží mezi A a B. Snadno ukážeme, že taková přímka p skutečně existuje: Zajisté můžeme zvolit „dostatečně vzdálenou“ přímku q takovou, aby všech n bodů leželo po téže straně přímky q. Mezi danými body najdeme bod A, který je nejblíže přímce q, a vedeme jím rovnoběžku $q' \parallel q$. Leží-li na přímce q' ještě další body dané množiny, stačí za p vzít q'. V opačném případě můžeme zřejmě přímku q' pootočit kolem bodu A tak, aby vznikla přímka p, jež prochází (kromě bodu A) dalším bodem B dané skupiny, přičemž ostatní uvažované body leží v jedné polorovině určené touto přímkou p a žádný z nich neleží mezi A a B.

Ze všech trojúhelníků ABX, kde X probíhá dané body neležící na přímce p, vezmeme pak ten (popř. jeden z těch), jehož úhel $\sphericalangle AXB$ je co největší. Nyní je jasné, že kružnice opsaná takovému trojúhelníku vyhovuje požadavkům úlohy.

Poznámka. Ze všech kružnic, z nichž každá prochází alespoň třemi danými body, vezměme tu popř. ty, jejichž poloměr je co nejmenší. Můžete si rozmyslet, zda některá z těchto nejmenších kružnic vyhovuje úloze.

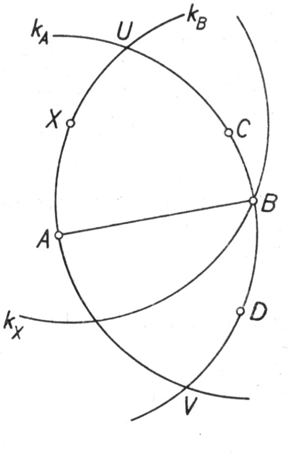
47

Především je jasné, že věta platí pro $n = 3$. Předpokládejme proto, že věta platí pro některé přirozené číslo $n \geqq 3$, a zkusme dokázat, že platí i pro $n + 1$. Mějme tedy množinu M_{n+1} skládající se z $n + 1$ bodů.

Může se stát, že v této množině existuje bod A, z něhož vychází nejvýše jeden průměr množiny M_{n+1}. Odstraníme-li tento bod, dostaneme množinu M_n o n bodech, která má podle indukčního předpokladu nejvýše n průměrů; přitom si uvědomme, že buď žádný anebo všechny z těchto průměrů jsou též průměry množiny M_{n+1}. Vzhledem k volbě bodu A máme v tomto případě dokázáno, že počet průměrů množiny M_{n+1} je skutečně nejvýše $n + 1$.

V opačném případě, který zbývá prozkoumat, vycházejí z každého bodu množiny M_{n+1} alespoň dva průměry (viz např. pět úhlopříček pravidelného pětiúhelníku). Stačilo by nyní dokázat, že z každého bodu vycházejí přesně dva průměry; pak by počet všech průměrů množiny M_{n+1} byl roven $n + 1$. (Kdyby tato domněnka nebyla pravdivá, nemohlo by platit ani tvrzení úlohy.)

Pro důkaz sporem tedy předpokládejme, že existuje bod A, z něhož vycházejí tři různé průměry AB, AC, AD množiny M_{n+1}. Pak všechny tři body B, C, D leží na kružnici $k_A \equiv (A; d)$; označení zvolme tak, aby polopřímka AB náležela úhlu $\sphericalangle CAD$, jehož velikost je zřejmě $\leq 60°$. V našem případě vychází z bodu B kromě průměru BA ještě alespoň jeden další průměr BX množiny M_{n+1}. Bod X ($\not\equiv A$) leží tedy na kružnici $k_B \equiv (B; d)$, avšak nemůže ležet vně kružnice k_A, neboť by bylo $AX > d$. Kružnice k_A, k_B se protínají ve dvou bodech U, V (viz obr. 11) a nechť bod X leží např. na oblouku AU. Pak je ale zřejmé, že D je vnějším bodem kružnice $k_X \equiv (X; d)$ (viz obr. 11), tj. $XD > d$, což je spor.



Obr. 11.

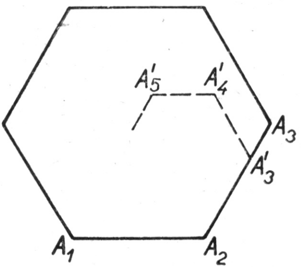
Tím je úloha vyřešena; je možno též ukázat, že pro libovolné přirozené číslo $n \geqq 3$ existuje (v rovině) množina o n bodech mající právě n průměrů.

48

První řešení. Potřebujeme dokázat, že daný n-úhelník je pravidelný. Vezměme proto pravidelný n-úhelník $A_1A_2 \ldots A_n$, který má s daným n-úhelníkem $A_1'A_2' \ldots A_n'$ společnou stranu $A_1A_2 \equiv A_1'A_2'$, přičemž oba leží v téže polorovině určené přímkou A_1A_2. Velikost vnitřních úhlů je u obou mnohoúhelníků nutně stejná.

Předpokládejme, že by bylo např. $a_1 > a_2$. Pak by bod A_3' ležel uvnitř strany A_2A_3 (obr. 12) a z podmínek úlohy by vyplývalo, že všechny vrcholy $A_4', \ldots, A_n'$ leží uvnitř pravidelného mnohoúhelníku $A_1A_2 \ldots A_n$ (obr. 12). Speciálně i bod A_n' by ležel uvnitř našeho pravidelného mnohoúhelníka, takže by platilo

$$\sphericalangle A_n'A_1A_2 < \sphericalangle A_nA_1A_2,$$



Obr. 12.

což by byl spor. Kdyby nastala ostrá nerovnost pro jinou dvojici sousedních stran daného n-úhelníku, důkaz by byl oddobný. Pouze v případě $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} > a_n$ by bylo $A_n' \equiv A_n$, ale pak by nemohlo platit $A_1' \equiv A_1$, jak od začátku předpokládáme.

Druhé řešení. Buď $A_1A_2 \ldots A_n$ daný n-úhelník, v němž $A_1A_2 = a_1$, $A_1A_n = a_n$. Předpokládejme nejprve, že n je liché

$(n = 2k + 1)$, a sestrojme osu p vnitřního úhlu při vrcholu A_1. Z podmínky, že všechny vnitřní úhly n-úhelníku $A_1A_2 \dots A_n$ jsou shodné, vyplývá, že přímka p je kolmá na stranu $A_{k+1}A_{k+2}$.

Promítněme nyní (pravoúhle) na přímku p lomené čáry $A_1A_2 \dots A_{k+1}$ a $A_1A_n \dots A_{k+2}$. Jejich průměty musí být stejně dlouhé. Přitom strany A_iA_{i+1} a $A_{n-i+2}A_{n-i+1}$ $(1 \leqq i \leqq k$, rozumí se $A_{n+1} \equiv A_1)$ mají stejnou odchylku od přímky p. Proto průmět úsečky A_iA_{i+1} není menší než průmět úsečky $A_{n-i+2}A_{n-i+1}$. Kdyby v posloupnosti $a_1 \geqq a_2 \geqq \dots \geqq a_n$ platila alespoň jedna ostrá nerovnost, bylo by $a_1 > a_n$, tj. $A_1A_2 > > A_1A_n$. Průmět lomené čáry $A_1A_2 \dots A_{k+1}$ by pak byl delší než průmět lomené čáry $A_1A_n \dots A_{k+2}$, což není možné. Proto platí $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Je-li n sudé, vezmeme za přímku p, na niž promítáme, opět osu úhlu $\sphericalangle A_2A_1A_n$. Strany daného n-úhelníku můžeme nyní seskupit ve dvojice úseček majících vždy stejné odchylky od přímky p. Pak lze provést obdobnou úvahu jako v předchozím odstavci.

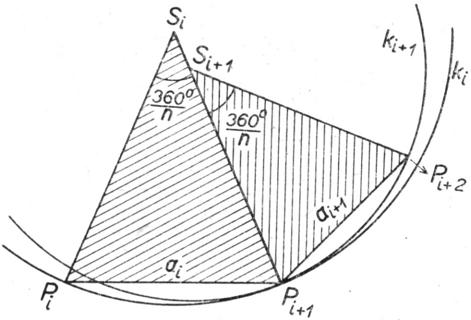
Třetí řešení. Označme $P_1P_2 \dots P_{n-1}P_n$ daný konvexní n-úhelník, v němž $P_iP_{i+1} = a_i$ pro $i = 1, 2, \dots, n$ $(P_{n+1} \equiv \equiv P_1)$. Kdyby byl pravidelný (jak potřebujeme dokázat), bylo by možno opsat mu kružnici. Myšlenka tohoto řešení spočívá v tom, že se pokoušíme sestrojit kružnici opsanou danému n-úhelníku, a to tak, že vycházíme postupně ze všech jeho stran. Tak dostaneme obecně n kružnic a za předpokladu, že tvrzení úlohy neplatí, najdeme pak spor v jejich vzájemných polohách.

Nad stranou P_iP_{i+1} jako základnou sestrojíme rovnoramenný trojúhelník $P_iP_{i+1}S_i$ tak, aby úhel $\sphericalangle P_iS_iP_{i+1}$ proti základně měl velikost $360°/n$; trojúhelník sestrojíme v té polorovině s hranicí P_iP_{i+1}, v níž leží daný n-úhelník (podle předpokladu konvexní). Kružnice $k_i \equiv (S_i;\ S_iP_i)$ by měla být kružnicí n-úhelníku opsanou.

Vyšetříme vzájemnou polohu kružnic k_i, k_{i+1} ($i = 1, 2, \ldots, n$, $k_{n+1} \equiv k_1$). Je-li $a_i = a_{i+1}$ neboli $P_iP_{i+1} = P_{i+1}P_{i+2}$, splynou body S_i, S_{i+1} a tedy i kružnice k_i, k_{i+1}.

Je-li $a_i > a_{i+1}$, leží bod S_{i+1} mezi S_i, P_{i+1} (viz obr. 13), kružnice k_i, k_{i+1} mají pak vnitřní dotyk v bodě P_{i+1}, přičemž k_{i+1} leží (s výjimkou bodu P_{i+1}) uvnitř k_i.

Nyní provedeme nepřímý důkaz. Nechť ve vztazích $a_1 \geqq \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n$ platí aspoň jedna ostrá nerovnost. Pak z předchozí úvahy vyplývá, že kruh k_n leží uvnitř k_1 s možnou výjimkou jediného bodu P_n. To znamená, že bod $P_1 \not\equiv P_n$ leží zároveň na kružnici k_1 a zároveň uvnitř k_1 (na k_n). To není možné. Proto platí $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, jak jsme měli dokázat.



Obr. 13.

49

Předpokládejme, že množina K má tři různé ekvichordální body

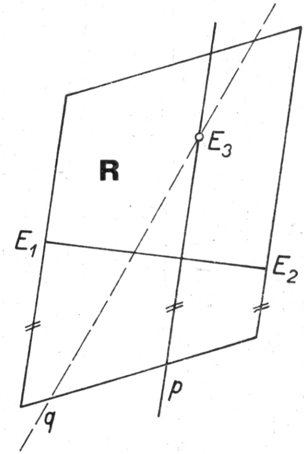
$$E_1, E_2, E_3 \tag{1}$$

a uvědomme si, že každá přímka procházející kterýmkoliv z bodů (1) vytíná v množině K tětivu stejné délky d.

Buď p přímka, která prochází jedním z bodů (1) a odděluje zbývající dva; rozmyslete si, že taková přímka existuje. Nechť přímka p prochází např. bodem E_3 a protíná úsečku E_1E_2 v jejím vnitřním bodě (obr. 14). Rovnoběžky s přímkou p vedené body E_1, E_2 vytínají v množině K dvě tětivy délky d a tyto dvě tětivy jsou protějšími stranami rovnoběžníku R, jehož všechny body náležejí konvexní množině K.

Přímka q naznačená na obr. 14 však vytíná již v rovnoběžníku R (a tím spíše v množině K) úsečku větší délky než d, což je spor s tím, že E_3 je ekvichordální bod. Nakreslete si sami obdobný obrázek pro případ, že E_3 leží (na p) mimo R.

Věta je dokázána.

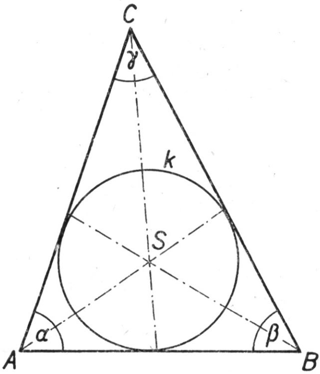


Obr. 14.

Poznámka. Kruh má zřejmě jediný ekvichordální bod — svůj střed. Není těžké ukázat, že např. konvexní mnohoúhelník nemá žádný ekvichordální bod. Pozoruhodná je však otázka, zda nějaká konvexní množina v euklidovské rovině může mít dva ekvichordální body.

50

Označme α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC při vrcholech A, B, C. Pak (obr. 15)



$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{SA},$$

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{1}{SB},$$

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{SC},$$

Obr. 15.

a poněvadž $SA \leqq SB \leqq SC$, platí

$$\sin\frac{\alpha}{2} \geqq \sin\frac{\beta}{2} \geqq \sin\frac{\gamma}{2} > 0.$$

Úhly $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$ jsou ostré, proto

$$90^\circ > \frac{\alpha}{2} \geqq \frac{\beta}{2} \geqq \frac{\gamma}{2} > 0,$$

tj.

$$180^\circ > \alpha \geqq \beta \geqq \gamma > 0. \tag{1}$$

Vzhledem k tomu, že $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, dostaneme z (1) nerovnosti

$$\alpha + \beta + \gamma \leqq 3\alpha, \qquad \alpha + \beta + \gamma \geqq 3\gamma,$$
$$180^\circ \leqq 3\alpha, \qquad 180^\circ \geqq 3\gamma,$$

čili

$$\alpha \geqq 60°, \quad \gamma \leqq 60°.$$

Odtud $\dfrac{\alpha}{2} \geqq 30°$ a tedy

$$SA = \frac{1}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} \leqq \frac{1}{\sin 30°} = 2.$$

Pro každý vrchol A platí $1 < SA \leqq 2$.

Poněvadž dále $\dfrac{\gamma}{2} \leqq 30°$, je

$$SC = \frac{1}{\sin\dfrac{\gamma}{2}} \geqq \frac{1}{\sin 30°} = 2.$$

Pro úhel β máme interval

$$0° < \beta < 90°,$$

tj. $0° < \dfrac{\beta}{2} < 45°$. Pak

$$SB = \frac{1}{\sin\dfrac{\beta}{2}} > \frac{1}{\sin 45°} = \sqrt{2}.$$

Pro každý vrchol B platí $SB > \sqrt{2}$.

Ve všech třech případech platí i obrácené tvrzení: Vyhovuje-li délka úsečky SA (SB, SC) uvedeným podmínkám, je bod A (B, C) vrcholem jistého trojúhelníku ABC, jemuž je kružnice k vepsána a v němž platí $SA \leqq SB \leqq SC$. Důkaz lze přenechat čtenáři.

51

V trojúhelníku ABC označme $AC = BC = a$, $AB = c$, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \alpha$, $\sphericalangle C = \gamma$; je tedy

$$a > c, \quad \alpha > \gamma, \quad \alpha < 90°, \quad \gamma < 90°,$$

$$\alpha + \gamma = 180° - \alpha > 90°.$$

Je-li XYZ trojúhelník splňující požadavky úlohy, platí

$$ZX = ZY = a, \quad XY = c, \quad \sphericalangle X = \sphericalangle Y = \alpha, \quad \sphericalangle Z = \gamma.$$

Body X, Y, Z, C jsou navzájem různé a platí $\sphericalangle XCY = \sphericalangle ACB = \gamma$. Podle textu úlohy leží body C, Z v téže polorovině určené přímkou XY a platí $\sphericalangle XCY = \sphericalangle XZY$; proto body C, Z leží na větším oblouku jisté kružnice k, která prochází body X, Y. Jsou tedy X, Y, Z, C vrcholy jistého tětivového čtyřúhelníku, přičemž mohou nastat dva případy:

a) Body X, Z jsou odděleny přímkou BC (obr. 16).

b) Body X, Z padnou do téže poloroviny vyťaté přímkou BC, a protože v tětivovém čtyřúhelníku každá úhlopříčka odděluje jeden pár jeho protějších vrcholů, jsou nutně body Y, Z odděleny přímkou $AC \equiv XC$. Budiž p osa úsečky AB (obr. 17). Označme $Y'X'CZ'$ obraz uvažovaného tětivového čtyřúhelníku $XYCZ$ v souměrnosti podle osy p. Potom X, Y' a Y, X' jsou dvojice souměrně sdružených bodů a CA, CB souměrně sdružené přímky. Tu body X', Y' po řadě padnou dovnitř úseček CA, CB, trojúhelník $X'Y'Z'$ patří k případu a) a body X', Z' (což jsou obrazy bodů Y, Z) jsou odděleny přímkou BC. Tím je případ b) převeden na případ a). Postačí tedy omezit se v dalším na případ a) a na výsledky užít souměrnosti vzhledem k přímce p.

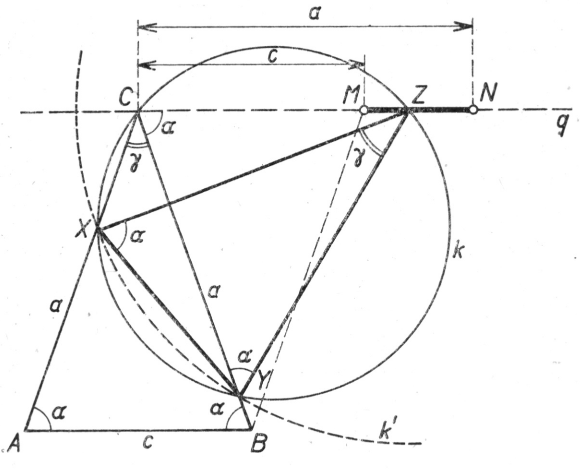
Bod Z čtyřúhelníku $XYZC$ leží v polorovině opačné k polorovině BCA. Úhly obvodové $\sphericalangle YXZ = \alpha$, $\sphericalangle YCZ$ v kružnici k leží v téže polorovině vyťaté přímkou YZ, takže jsou shodné, a proto jsou shodné i střídavé úhly $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle YCZ$; odtud plyne, že je $CZ \parallel AB$ a že bod Z leží na polopřímce q s počátkem C. Označme M ten bod polopřímky q, pro nějž platí

$$CM = c.$$

To znamená, že čtyřúhelník $ABMC$ je rovnoběžník. Dále sestrojíme na polopřímce CM bod N tak, aby platilo

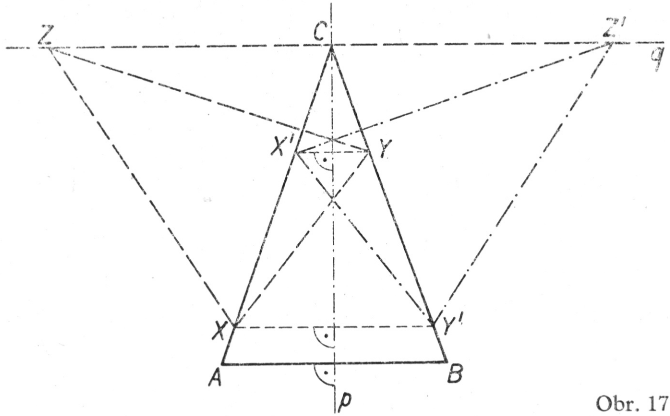
$$CN = a;$$

bod M tedy leží uvnitř úsečky CN (obr. 16).



Obr. 16.

Dokážeme, že každý bod Z hledaného geometrického místa padne dovnitř úsečky MN (obr. 16). Důkaz provedeme sporem.

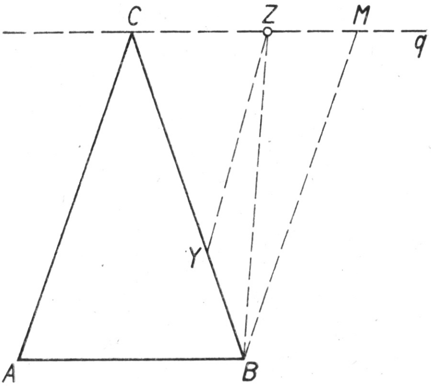


Obr. 17.

Předpokládejme nejprve, že bod Z náleží úsečce CM (obr. 18). Víme, že $Z \not\equiv C$. Je-li $Z \equiv M$, pak kružnice $k' \equiv (Z; a)$ má s úsečkou BC jediný společný bod B, tj. $Y \equiv B$ proti předpokladu. Leží-li bod Z mezi body C, M, je zřejmě $ZB < CB = a$; celá úsečka BC pak leží uvnitř kružnice k', což není možné.

Předpokládejme za druhé, že bod Z náleží prodloužení úsečky CN za bod N. Je-li $Z \equiv N$, prochází kružnice k' bodem C a je $X \equiv C$ proti předpokladu. Je-li $Z \not\equiv N$, pak pro všechny body X ležící uvnitř strany AC platí $ZX > ZC > a$ (úhel $\sphericalangle ZCA$ je totiž tupý) a kružnice k' nemá s úsečkou AC vůbec žádný společný bod.

Dokážeme nyní, že každý bod Z ležící mezi body M, N je vrcholem jednoho z vyšetřovaných trojúhelníků XYZ (obr. 16). Sestrojíme opět kružnici $k' \equiv (Z; a)$; pro ni je vrchol C bodem vnitřním, neboť $ZC < NC = a$. Vrchol A je pro kružnici k' bodem vnějším; trojúhelník ACZ je totiž tupoúhlý ($\sphericalangle ACZ > 90°$), proto je $ZA > AC = a$. Kružnice k' protne tedy úsečku AC v jejím vnitřním bodě X. Trojúhelníku XCZ



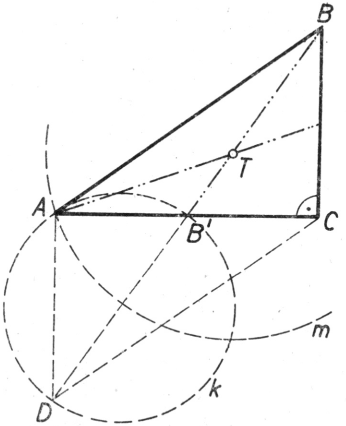
Obr. 18.

opišme kružnici k; polopřímka CB prochází vnitřkem úhlu $\sphericalangle XCZ$, protíná úsečku XZ v jejím vnitřním bodě, a tudíž i kružnici k v jistém bodě $Y \neq C$. Body X, Y, Z, C kružnice k jsou navzájem různé a jsou vrcholy tětivového čtyřúhelníku; přitom X, Z jsou přímkou BC odděleny; vznikne tedy čtyřúhelník $XYZC$, takže C, Z jsou sousední vrcholy tohoto čtyřúhelníku. Proto je $\sphericalangle XZY = \sphericalangle XCY = \gamma$ (obvodové úhly v kružnici k nad tětivou XY); stejně platí $\sphericalangle YXZ = \sphericalangle YCZ = \alpha$. Je tedy $YZ = a$, $\sphericalangle YXZ = \alpha$, $\sphericalangle XZY = \gamma$, a proto platí $\triangle XYZ \cong \triangle ABC$. Odtud plyne $ZY = CB = a$, takže bod Y leží na kružnici k'. Bod B je však vnějším bodem kružnice k'; protože $\sphericalangle BZN > \sphericalangle BMN > 90°$, je $ZB > BM = a$. Trojúhelník XYZ je tedy skutečně jedním z vyšetřovaných trojúhelníků.

Závěr. Hledaným geometrickým místem bodů Z jsou vnitřky dvou úseček MN, $M'N'$. Tyto úsečky jsou souměrně sdružené podle osy úsečky AB a konstrukce úsečky MN je výše popsána.

52

Předpokládejme, že jsme našli trojúhelník ABC, který splňuje požadavky úlohy (obr. 19). Označme T těžiště tohoto trojúhelníku a sestrojme rovnoběžník $ABCD$; jeho střed B' je zároveň středem odvěsny AC. Tu platí



$$TA = \frac{2}{3} t_1,$$

$$TD = \frac{4}{3} t_2,$$

$$B'D = t_2,$$

$$TB' = \frac{1}{3} t_2.$$

Obr. 19.

Ze souměrnosti rovnoběžníku $ABCD$ podle jeho středu B' plyne, že

$$\sphericalangle B'AD = \sphericalangle B'CB = 90^\circ.$$

Bod A leží proto na Thaletově kružnici opsané nad úsečkou DB' jako průměrem, přičemž je $TA = \frac{2}{3} t_1$.

Sestrojíme tedy úsečku BD délky $2t_2$, její střed B' a dále bod T ležící mezi B', B a takový, že $B'T = \frac{1}{3} t_2$. Nechť kružnice $m \equiv \left(T, \frac{2}{3} t_1\right)$ protíná kružnici k opsanou nad průměrem

$B'D$ ve dvou různých bodech A a A'. Potom $A \neq B'$, $A \neq D$. Bod souměrně sdružený s bodem A podle B' označme C. Pak trojúhelník ABC vyhovuje úloze.

Z provedené konstrukce vyplývá, že $BB' = t_2$ je těžnice a T těžiště trojúhelníku ABC. Délka těžnice příslušné vrcholu A je $\frac{3}{2} AT = t_1$ a úhel $\sphericalangle ACB$ je pravý, neboť trojúhelníky $B'AD$, $B'CB$ jsou zřejmě shodné.

Řešitelnost úlohy závisí pouze na vzájemné poloze kružnic k, m. Řešení existuje právě tehdy, když se kružnice k a m protínají ve dvou různých bodech, tj. (obr. 19)

$$\frac{2}{3} t_1 - \frac{1}{2} t_2 < \frac{5}{6} t_2 < \frac{2}{3} t_1 + \frac{1}{2} t_2,$$

neboli $t_1 < 2t_2$ a zároveň $t_2 < 2t_1$. Z bodu A' se dostane trojúhelník souměrně sdružený s ABC podle přímky BD.

Každá z daných těžnic musí být menší než dvojnásobek druhé z nich. Jedině za tohoto předpokladu má úloha řešení, a to jediné; jinak úloha řešení nemá.

53

Předpokládejme, že hledaný kosočtverec existuje a označme K patu kolmice spuštěné z bodu M na přímku AB. Pak vzniká pravoúhlý trojúhelník AKM s přeponou $AM = d$ a odvěsnou $MK = \frac{v}{2}$. Všimněme si ještě poměru

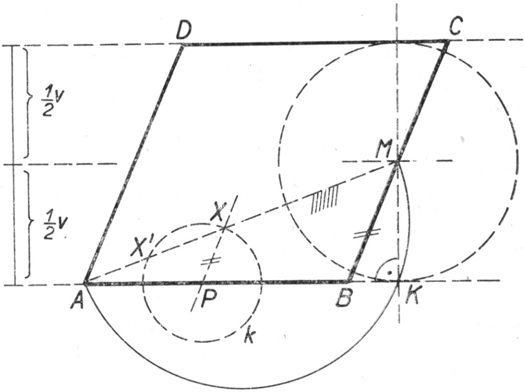
$$\frac{BM}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Nejprve tedy v jedné z polovin určených přímkou AM sestrojíme pravoúhlý trojúhelník AKM s přeponou $AM = d$

a odvěsnou $MK = \dfrac{v}{2}$; podmínkou proveditelnosti této konstrukce je nerovnost

$$v < 2d. \tag{1}$$

Bod B nyní najdeme užitím stejnolehlosti takto: Uvnitř polopřímky AK zvolme bod P a opišme kružnici $k \equiv \left(P, \varrho = \frac{1}{2} AP\right)$; označme $X \neq A$ jeden ze společných bodů polopřímky AM s kružnicí k. Pak je $\dfrac{PX}{AP} = \dfrac{1}{2}$, takže bod B bude průsečík polopřímky AK s přímkou procházející bodem M a rovnoběžnou s PX (obr. 20).

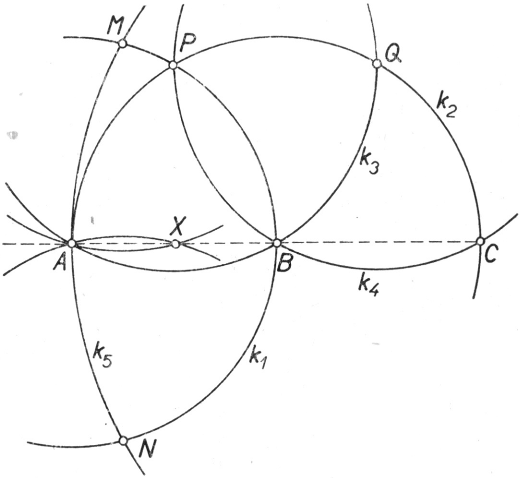


Obr. 20.

Počet řešení úlohy závisí [při splnění podmínky (1)] na vzájemné poloze kružnice k a polopřímky AM. Úhel $\sphericalangle MAK$ je ostrý; vzdálenost bodu P od přímky AM označme x. Zřejmě platí $\dfrac{x}{2\varrho} = \dfrac{v}{2d}$ čili $\dfrac{x}{\varrho} = \dfrac{v}{d}$. Je-li tedy $v > d$ (tj. $x > \varrho$), nemá úloha řešení. Je-li naopak $v \leq d$, je již splněna i podmínka (1) a naše konstrukce dává dvě nebo jedno řešení.

Má-li být $ABCD$ čtverec, musí podle Pythagorovy věty platit $d = \frac{1}{2} v \sqrt{5}$. Platí-li tento vztah, je již $d > v$ a jedním ze dvou sestrojených řešení je čtverec (neboť v tomto případě může být $B \equiv K$).

Závěr. Při konstrukci bodu K jsme se omezili na jednu z opačných polorovin o hranici AM; souměrností podle přímky AM dospějeme z právě popsaných řešení k dalším řešením. Pro $v = d$ jsou tedy celkem dvě řešení, pro $v < d$ celkem čtyři řešení (popřípadě včetně dvou čtverců); pro $v > d$ není žádné řešení.



Obr. 21.

54

Konstrukci naznačuje obr. 21, kde kružnice sestrojujeme v tomto pořadí: $k_1 \equiv (A; AB)$, $k_2 \equiv (B; BA)$, $k_3 \equiv (P; PA)$, $k_4 \equiv (Q; QB)$, $k_5 \equiv (C; CA)$. Bod X je průsečík oblouků opsaných kolem středů M, N s poloměry $MA = NA$.

Body A, X, B, C leží zřejmě v přímce a z podobnosti rovnoramenných trojúhelníků AMX, ACM (mají společný vnitřní úhel) plyne

$$\frac{AX}{AM} = \frac{AM}{AC},$$

odkud

$$AX = \frac{AM^2}{AC} = \frac{AB^2}{2AB} = \frac{AB}{2}.$$

Hledaný bod je X.

55

Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník vyhovující požadavkům úlohy. Poněvadž mu lze vepsat kružnici, platí

$$AB + CD = AD + BC. \tag{1}$$

Můžeme předpokládat, že je $AB \leqq BC$ (jinak bychom vyměnili označení bodů A, C). Potom

$$CD - AD = BC - AB \geqq 0. \tag{2}$$

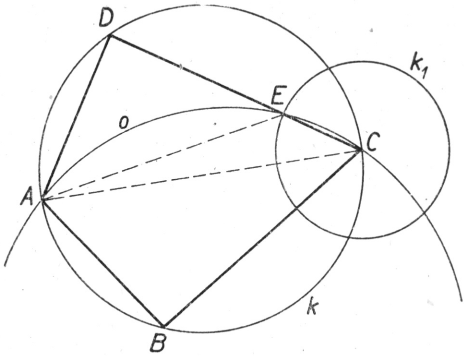
V případě $AB = BC$ je nutně i $AD = CD$ a bod D ($\neq B$) najdeme jako průsečík osy tětivy AC s kružnicí k. Vzniklému deltoidu $ABCD$ je pak zřejmě možno vepsat kružnici.

Je-li $AB < BC$, pak podle (2) platí $AD < CD$. Na úsečce CD můžeme tedy sestrojit takový bod E, že $DE = AD$ neboli $CE = CD - AD = BC - AB$ (obr. 22). Poněvadž $\sphericalangle ADC = 180° - \sphericalangle ABC$, je $\sphericalangle AEC = 90° + \frac{1}{2} \sphericalangle ADC = 180° - \frac{1}{2} \sphericalangle ABC$ (vnější úhel rovnoramenného trojúhelníku ADE).

Na základě tohoto rozboru provedeme konstrukci.

V polorovině opačné k polorovině ACB sestrojíme (známým způsobem) oblouk AC kružnice o, z jehož bodů je vidět úsečku AC pod úhlem velikosti $180° - \frac{1}{2} \sphericalangle ABC$. Tento oblouk protneme kružnicí $k_1 \equiv (C, BC - AB)$. Průsečík E (obr. 22) vždy existuje, neboť podle trojúhelníkové nerovnosti platí $BC - AB < AC$. Polopřímka CE pak protne oblouk AC kružnice k, který neobsahuje bod B, v bodě $D \neq A, C$. Ve čtyřúhelníku $ABCD$ podle naší konstrukce platí vztah (1), takže tento čtyřúhelník je (viz pozn.) tečnový.

Úloha má jediné řešení.



Obr. 22.

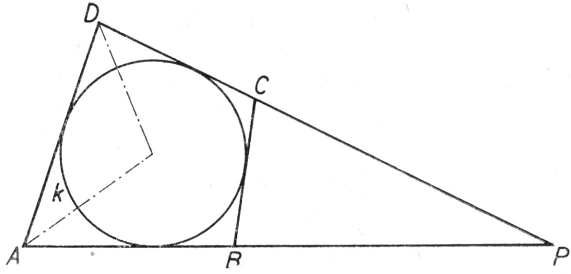
Poznámka. Buď $ABCD$ konvexní čtyřúhelník takový, že platí

$$AB + CD = AD + BC. \tag{1}$$

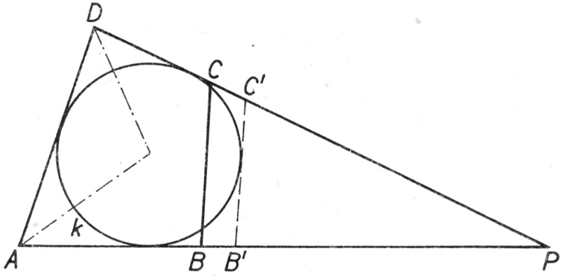
Dokážeme, že tomuto čtyřúhelníku lze vepsat kružnici.

Je-li $ABCD$ rovnoběžník, pak vzhledem k (1) je to kosočtverec a lze mu vepsat kružnici.

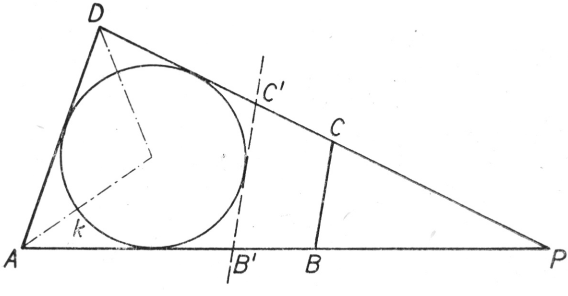
Nechť tedy např. strany AB, CD nejsou rovnoběžné. Pak se přímky AB, CD protínají v jistém bodě P a z konvexity čtyřúhelníku $ABCD$ plyne, že bod P neleží na úsečce AB. Můžeme předpokládat, že např. bod B leží mezi body A, P (jinak by byl důkaz obdobný). Trojúhelníku ADP vepíšeme kružnici k (obr. 23a, b, c).



Obr. 23a.



Obr. 23b.



Obr. 23c.

Je-li přímka BC tečnou kružnice k, je zřejmě kružnice k vepsána čtyřúhelníku $ABCD$ (obr. 23a).

Je-li přímka BC sečnou kružnice k, můžeme v polorovině BCP sestrojit přímku $B'C'$ rovnoběžnou s BC a dotýkající se kružnice k (obr. 23b). Pak platí

$$AB < AB', \quad DC < DC', \quad B'C' < BC,$$

takže

$$AB + CD < AB' + C'D = AD + B'C' < AD + BC,$$

což je spor s (1).

Obdobně postupujeme i v případě, že přímka BC neprotíná kružnici k. V polorovině BCA sestrojíme tečnu $B'C'$ (obr. 23c). Pak bude

$$AB' < AB, \quad DC' < DC, \quad BC < B'C',$$

takže

$$AD + BC < AD + B'C' = AB' + DC' < AB + CD,$$

což je zase spor s (1).

Důkaz je hotov.

56

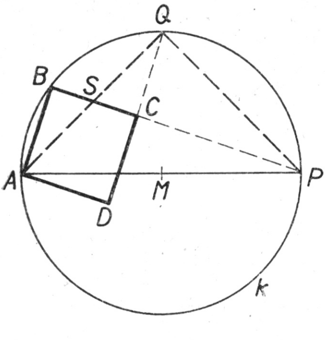
Označme $k \equiv (M, MA)$ kružnici opsanou danému trojúhelníku APQ. Hledaný bod B zřejmě leží na této kružnici (obr. 24a, b), a to buď

[1] uvnitř poloroviny APQ

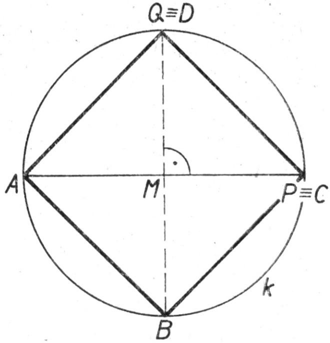
anebo

[2] uvnitř poloroviny opačné k polorovině APQ. Zabývejme se odděleně těmito dvěma možnostmi.

P ř í p a d [1] (obr. 24a). Bod B musí ležet uvnitř čtvrtkružnice AQ, neboť jinak by přímka CD nemohla procházet bodem Q. Bod C pak zřejmě leží uvnitř úsečky BP. Označme S společný bod úseček AQ, BP. V pravoúhlém trojúhelníku PSQ je C pata výšky QC, takže $\sphericalangle SQC = \sphericalangle SPQ$, načež $\triangle AQD \cong \triangle QPC$ (usu), neboť $AQ = QP = a$. Z toho plyne, že



Obr. 24a.



Obr. 24b.

$AD = QC = b$. Dále též $CD = b$, neboť $ABCD$ je čtverec. To znamená, že bod C je středem úsečky QD. Poněvadž $CS \parallel AD$, je CS střední příčka v trojúhelníku AQD, takže S je střed úsečky AQ.

Odtud vyplývá tato konstrukce: Sestrojme střed S úsečky AQ a označme $B \not\equiv P$ průsečík polopřímky PS s kružnicí k. Buď C obraz bodu B v souměrnosti o středu S. Trojúhelník ABC (v němž $\sphericalangle ABC = 90°$) doplníme na pravoúhelník $ABCD$, o němž hned dokážeme, že vyhovuje požadavkům úlohy.

Především je jasné, že přímka BC prochází bodem P a že platí $\triangle ABS \cong \triangle QCS$ (sus); je tedy $\sphericalangle QCS = 90°$ a přímka CD prochází bodem Q. Dále je $CQ = AB$, tedy i

$$CQ = CD. \tag{1}$$

Avšak $\triangle AQD \cong \triangle QPC$ (usu), takže

$$CQ = DA. \tag{2}$$

Z (1) a (2) plyne

$$CD = DA.$$

Pravoúhelník $ABCD$ je tedy čtverec.

Případ [1] dává tedy jediné řešení úlohy. Z pravoúhlého trojúhelníku ABS, který má přeponu $AS = \frac{1}{2}a$ a odvěsny $AB = b$, $BS = \frac{1}{2}b$, užitím Pythagorovy věty vypočteme

$$b = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

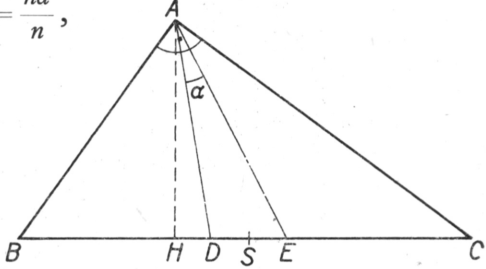
Případ [2] (obr. 24b). Poněvadž bod D musí ležet v polorovině BPA (čili BPQ), musí polopřímka CD procházet bodem Q. To znamená, že $\sphericalangle ACP = 45°$, takže bod C leží na větším oblouku AQ kružnice k. Zároveň bod $C \not\equiv B$ leží na přímce BP. Proto je nutně $C \equiv P$. Pak ovšem $D \equiv Q$ a bod B je obrazem bodu Q v souměrnosti o středu M. I v tomto případě nacházíme tedy jediné řešení; strana čtverce má délku a.

Závěr. Úloha má dvě řešení.

57

Střed přepony BC označme S a krajní body prostřední shodné úsečky buďte D, E. Pata H výšky spuštěné na přeponu nechť leží např. na úsečce BS (obr. 25). Dvojím vyjádřením obsahu trojúhelníku DAE dostaneme rovnost

$$AD \,.\, AE \,.\, \sin \alpha = \frac{ha}{n},$$



Obr. 25.

a z kosinové věty

$$\left(\frac{a}{n}\right)^2 = AD^2 + AE^2 - 2AD \,.\, AE \,.\, \cos\alpha.$$

Z posledních dvou rovností vyplývá

$$\frac{AD \,.\, AE \,.\, \sin\alpha}{2AD \,.\, AE \,.\, \cos\alpha} = \frac{ha}{n\left[AD^2 + AE^2 - \left(\frac{a}{n}\right)^2\right]}$$

čili

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2ha}{n\left[AD^2 + AE^2 - \left(\frac{a}{n}\right)^2\right]}. \qquad (1)$$

Položíme-li $HS = x$, pak (obr. 25)

$$AD^2 = \left(x - \frac{a}{2n}\right)^2 + h^2, \qquad AE^2 = \left(x + \frac{a}{2n}\right)^2 + h^2,$$

takže

$$AD^2 + AE^2 = 2x^2 + 2h^2 + \frac{1}{2}\,\frac{a^2}{n^2}.$$

Přitom

$$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - h^2,$$

tedy

$$AD^2 + AE^2 = \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right).$$

Dosadíme-li tento výsledek do (1), dostaneme po malé úpravě vzorec

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4nh}{a\,(n^2 - 1)}.$$

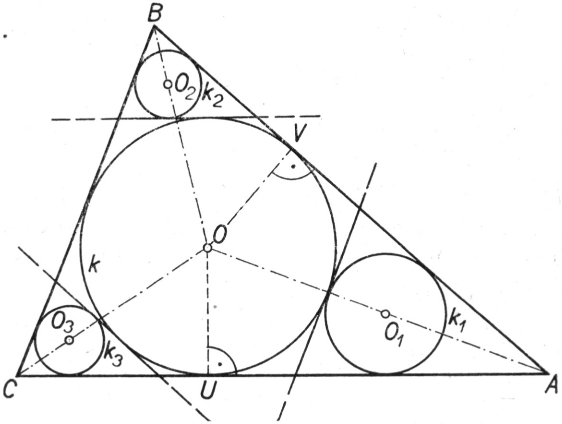
Označme po řadě ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 poloměry kružnic k, k_1, k_2, k_3 (viz obr. 26). Máme vypočítat číslo

$$\check{C} = \pi(\varrho^2 + \varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2). \tag{1}$$

Pro výpočet poloměrů užijme vzorců

$$\varrho = \frac{P}{s}, \quad \varrho_1 = \frac{P_1}{s_1}, \quad \varrho_2 = \frac{P_2}{s_2}, \quad \varrho_3 = \frac{P_3}{s_3},$$

Obr. 26.



kde P, P_1, P_2, P_3 jsou po řadě obsahy trojúhelníku ABC a tří trojúhelníků oddělených při vrcholech A, B, C, a s, s_1, s_2, s_3 jsou jejich poloviční obvody. Z podobnosti trojúhelníku ABC a každého ze tří oddělených trojúhelníků vyplývá

$$\frac{P_1}{s_1^2} = \frac{P_2}{s_2^2} = \frac{P_3}{s_3^2} = \frac{P}{s^2}.$$

Proto

$$\varrho_1 = \frac{P}{s^2} \cdot s_1, \quad \varrho_2 = \frac{P}{s^2} \cdot s_2, \quad \varrho_3 = \frac{P}{s^2} \cdot s_3.$$

Dosazením do (1) dostaneme

$$\check{C} = \frac{\pi P^2}{s^4}(s^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2). \tag{2}$$

Z vlastností tečen snadno zjistíme, že obvod trojúhelníku AB_1C_1 je $AB_1 + AC_1 + B_1C_1 = AB_1 + AC_1 + B_1T + C_1T = AU + AV = 2AU$ a dále zřejmě $AU = s - a$. Je tedy

$$s_1 = s - a, \qquad s_2 = s - b, \qquad s_3 = s - c.$$

Podle (2) pak platí

$$\check{C} = \frac{\pi P^2}{s^4}(s^2 + (s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2),$$

neboli po úpravě

$$\check{C} = \frac{\pi P^2}{s^4}(a^2 + b^2 + c^2),$$

přičemž P lze vyjádřit pomocí čísel a, b, c Heronovým vzorcem. Tím je úloha vyřešena.

Poznámka. Z uvedeného řešení vyplývá, že

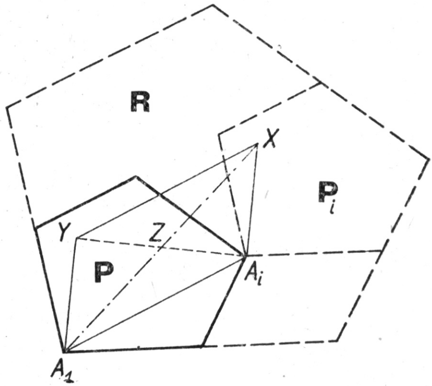
$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = \frac{P}{s^2}(s_1 + s_2 + s_3) = \frac{P}{s^2}(3s - a - b - c) = \\ = \frac{P}{s^2} \cdot s = \frac{P}{s} = \varrho.$$

59

Označme R pětiúhelník, který se dostane z P_1 stejnolehlostí se středem A_1 a koeficientem 2. Dokážeme, že pro každé $i = 1, \ldots, 5$ platí $P_i \subset R$.

Pro $i = 1$ je to jasné. Buď X bod pětiúhelníka P_i ($i = 2, \ldots, 5$). Bod X je tedy obrazem jistého bodu $Y \in P_1$ v příslušném rovnoběžném posunutí. Potom střed Z úsečky A_1X náleží P_1, neboť zřejmě půlí vzdálenost mezi A_i a Y (obr. 27), což jsou

Obr. 27.



body konvexního útvaru P_1. To však znamená, že $X \in R$, jak jsme chtěli dokázat.

Všech pět pětiúhelníků $P_1, \ldots, P_5$ má týž obsah p, obsah pětiúhelníka R je zřejmě $4p$. Kdyby se žádné dva z pětiúhelníků $P_1, \ldots, P_5$ nepřekrývaly, byl by obsah R větší nebo roven $5p$, tj. $4p \geqq 5p$, což není možné.

Poznámka. Obdobná věta platí i v n-rozměrném prostoru ($n \geqq 3$) pro konvexní mnohostěny s $2^n + 1$ nebo více vrcholy.

60

Pokusíme se odhadnout (shora) obsah uvažovaného konvexního čtyřúhelníku pomocí součinu jeho úhlopříček. Každou úhlopříčku pak nahradíme (podle trojúhelníkové nerovnosti) součtem vzdáleností bodu O od jejích krajních bodů. Tak dojdeme k jistému výsledku podobnému tomu, který se vyskytuje v tvrzení úlohy; umístění bodů A, B, C, D bude popř. jiné, neboť předem nevíme, v jakém pořadí jsou tyto body vrcholy konvexního čtyřúhelníku. Nakonec však ukážeme, že vzhledem k danému uspořádání vzdáleností lze nalezený odhad ještě převýšit tak, abychom dostali žádaný výsledek.

Uvažujme proto libovolný konvexní čtyřúhelník $KLMN$ a označme Q průsečík jeho úhlopříček KM a LN. Pro obsah trojúhelníku KLM platí

$$P_{KLM} \leqq \frac{1}{2} KM \,.\, LQ,$$

neboť úsečka LQ není kratší než výška trojúhelníku KLM příslušná straně KM. Podobně

$$P_{KMN} \leqq \frac{1}{2} KM \,.\, NQ.$$

Z posledních dvou nerovností vyplývá, že pro obsah čtyřúhelníku $KLMN$ vždy platí

$$P_{KLMN} \leqq \frac{1}{2} KM \,.\, LN,$$

přičemž rovnost nastane pouze v případě $KM \perp LN$.

Buď R libovolný bod roviny $KLMN$. Podle trojúhelníkové nerovnosti platí $KM \leqq KR + MR$ a $LN \leqq LR + NR$, takže

$$P_{KLMN} \leqq \frac{1}{2} (KR + MR)\,(LR + NR).$$

Rovnost v tomto vztahu nastane právě tehdy, leží-li bod R jak mezi body K a M, tak i mezi body L a N (tzn. $R \equiv Q$) a jsou-li přitom úhlopříčky KM a LN navzájem kolmé (viz závěr předchozího odstavce).

Konvexní čtyřúhelník s vrcholy A, B, C, D má úhlopříčky buď AB a CD, nebo AC a BD, anebo AD a BC. Podle naší úvahy platí v prvém případě

$$P \leqq \frac{1}{2} (AO + BO)\,(CO + DO),$$

v druhém případě

$$P \leqq \frac{1}{2}(AO + CO)(BO + DO)$$

a ve třetím případě

$$P \leqq \frac{1}{2}(AO + DO)(BO + CO),$$

přičemž rovnost nastane vždy právě tehdy, je-li bod O průsečíkem navzájem kolmých úhlopříček.

Poněvadž $AO \leqq BO \leqq CO \leqq DO$, platí

$$\begin{aligned}&(AO + DO)(BO + CO) - (AO + BO)(CO + DO) = \\ &= AO \,.\, BO + BO \,.\, DO + AO \,.\, CO + CO \,.\, DO - AO \,.\, CO - \\ &- AO \,.\, DO - BO \,.\, CO - BO \,.\, DO = AO \,.\, BO + CO \,.\, DO - \\ &- AO \,.\, DO - BO \,.\, CO = (DO - BO)(CO - AO) \geqq 0,\end{aligned}$$

takže

$$(AO + BO)(CO + DO) \leqq (AO + DO)(BO + CO)$$

a rovnost zde nastane právě tehdy, je-li buď $DO = BO$ nebo $CO = AO$. Podobně též

$$\begin{aligned}(AO + DO)(BO + CO) - (AO + CO)(BO + DO) &= \\ = (DO - CO)(BO - AO) &\geqq 0,\end{aligned}$$

takže platí

$$(AO + CO)(BO + DO) \leqq (AO + DO)(BO + CO)$$

s rovností právě tehdy, je-li buď $DO = CO$ nebo $BO = AO$.

Dokázali jsme tedy, že vždy platí

$$P \leqq \frac{1}{2}(AO + DO)(BO + CO);$$

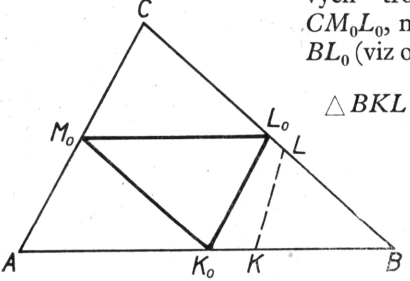
podmínky pro rovnost jsou patrné z uvedeného řešení.

61

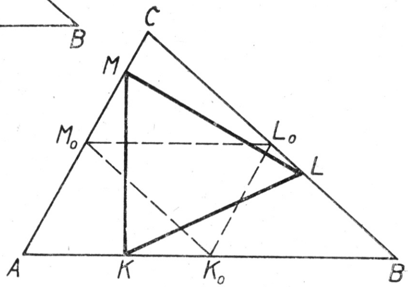
Označíme K_0, L_0, M_0 po řadě středy úseček AB, BC, CA (obr. 28); pak úsečky K_0L_0, L_0M_0, M_0K_0 rozdělí trojúhelník ABC ve čtyři části téhož obsahu $\frac{1}{4} \triangle ABC$.

Leží-li dva z bodů K, L, M na obvodu některého z „rohových“ trojúhelníků AK_0M_0, L_0BK_0, CM_0L_0, např. K, L na úsečkách BK_0, BL_0 (viz obr. 28), pak je

$$\triangle BKL \leqq \triangle BK_0L_0 = \frac{1}{4} \triangle ABC.$$



Obr. 28.



Obr. 29.

Stačí tedy zabývat se případem, kdy žádné dva z bodů K, L, M nemají od téhož vrcholu trojúhelníku ABC vzdálenosti menší nebo rovné polovinám délek příslušných stran.

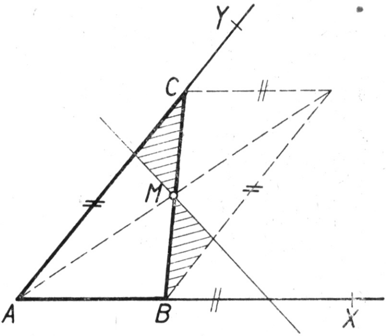
Nechť např. bod K leží mezi A, K_0, dále bod L mezi B, L_0 a bod M mezi C, M_0 (obr. 29). Pro obsahy trojúhelníků platí:

$$\triangle KLM \geqq \triangle KLM_0 \geqq \triangle KL_0M_0 = \triangle K_0L_0M_0 = \frac{1}{4} \triangle ABC.$$

Odtud již ihned vyplývá tvrzení úlohy.

62

Bod M musí být středem hledané úsečky BC, neboť jinak by bylo možno malým otočením přímky BC kolem bodu M obsah trojúhelníka ABC zmenšit. Obr. 30 naznačuje konstrukci a zároveň ukazuje, že toto je jediné řešení.



Obr. 30.

63

Nutnou podmínkou, aby existoval vůbec nějaký čtyřúhelník daných rozměrů, je, aby největší z čísel a, b, c, d bylo menší než součet tří zbývajících. Budeme proto předpokládat, že tato podmínka je splněna (a nakonec uvidíme, že je i postačující pro existenci hledaného čtyřúhelníku). Máme tedy

$$\left.\begin{aligned} a &< b + c + d, \\ b &< a + c + d, \\ c &< a + b + d, \\ d &< a + b + c, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

(jedna z těchto nerovností právě vyjadřuje naši podmínku a zbývající tři jsou pak triviálně splněny).

Předpokládejme, že $ABCD$ je čtyřúhelník daných rozměrů; označme S jeho obsah, α resp. γ velikost jeho vnitřního úhlu při vrcholu A resp. C, $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$. Pak platí

$$S = \frac{1}{2}(ad \sin \alpha + bc \sin \gamma),$$

$$4S = 2(ad \sin \alpha + bc \sin \gamma). \tag{2}$$

Z dvojího vyjádření BD^2 podle kosinové věty plyne

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2ad \cos \alpha - 2bc \cos \gamma. \tag{3}$$

Vztahy (2), (3) umocníme dvěma

$$16S^2 = 4a^2d^2 \sin^2 \alpha + 8abcd \sin \alpha \sin \gamma + 4b^2c^2 \sin^2 \gamma,$$

$$(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = \\ = 4a^2d^2 \cos^2 \alpha - 8abcd \cos \alpha \cos \gamma + 4b^2c^2 \cos^2 \gamma$$

a pak sečteme

$$16S^2 = 4a^2d^2 + 4b^2c^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 8abcd \cos (\alpha + \gamma).$$

Dosadíme sem $\cos (\alpha + \gamma) = 2 \cos^2 \dfrac{\alpha + \gamma}{2} - 1$ a dostaneme

$$16S^2 = 4(ad + bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 16abcd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Upravíme

$$4(ad + bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = (a^2 + d^2 - b^2 - c^2 + \\ + 2ad + 2bc) . (-a^2 - d^2 + b^2 + c^2 + 2ad + 2bc) = \\ = [(a + d)^2 - (b - c)^2] . [(b + c)^2 - (a - d)^2] = \\ = (a + d + b - c)(a + d - b + c)(b + c + a - d) . \\ . (b + c - a + d) = 16(p - a)(p - b)(p - c)(p - d).$$

Odvodili jsme tedy vzorec

$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2}}. \tag{4}$$

Úloha bude rozřešena, sestrojíme-li za předpokladů (1) tětivový čtyřúhelník $ABCD$ s $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ a dokážeme-li, že existuje jediný takový tětivový čtyřúhelník. V něm bude $\alpha + \gamma = 180^\circ$, takže podle (4) bude jeho obsah větší než obsah každého jiného (tedy netětivového) čtyřúhelníka daných rozměrů.

Sestrojme $\triangle ABD$ s

$$AB = a,\ AD = d,\ BD = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}}$$

(dvojím užitím kosinové věty snadno plyne, že úhlopříčka BD tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ musí mít tuto velikost). Je zřejmé, že úsečku BD lze sestrojit euklidovskými konstrukcemi, neboť platí

$$BD = \sqrt{\frac{\left(\frac{ab}{j} + \frac{cd}{j}\right)\left(\frac{ac}{j} + \frac{bd}{j}\right)}{\frac{ad}{j} + \frac{bc}{j}}}\, j,$$

kde j je velikost pomocné úsečky. Musíme však ověřit trojúhelníkové nerovnosti. To provedeme metodou ekvivalentních úprav:

$$a + d > \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}},$$

$$(a^2 + 2ad + d^2)(ad + bc) > (ab + cd)(ac + bd),$$

$$a^3d + 2a^2d^2 + ad^3 + a^2bc + 2abcd + bcd^2 >$$
$$> a^2bc + ac^2d + ab^2d + bcd^2,$$

$$a^2 + 2ad + d^2 + 2bc > b^2 + c^2,$$

$$(a + d)^2 - (b - c)^2 > 0,$$

$$(a + b - c + d)(a - b + c + d) > 0,$$

což podle (1) platí. Podobně

$$|a - d| < \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}},$$

$$(a^2 - 2ad + d^2)(ad + bc) < (ab + cd)(ac + bd),$$

$$a^3d - 2a^2d^2 + ad^3 + a^2bc - 2abcd + bcd^2 <$$
$$< a^2bc + ac^2d + ab^2d + bcd^2,$$

$$a^2 - 2ad + d^2 - 2bc < c^2 + b^2,$$

$$0 < (b + c)^2 - (a - d)^2,$$

$$0 < (a + b + c - d)(-a + b + c + d),$$

což opět platí podle (1).

Nakonec v polorovině opačné k BDA sestrojíme trojúhelník BCD s $BC = b$, $CD = c$; jeho existence plyne analogicky z (1).

Podle kosinové věty vypočteme

$$\cos\alpha = \frac{1}{2ad}\left[a^2 + d^2 - \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}\right] =$$

$$= \frac{1}{2ad} \cdot \frac{a^3d + ad^3 + a^2bc + bcd^2 - a^2bc - ac^2d - ab^2d - bcd^2}{ad + bc} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc};$$

analogicky

$$\cos\gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{ad + bc}.$$

Je tedy $\cos\alpha = -\cos\gamma$, takže $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník.

Dokázali jsme, že úloha má jediné řešení, jakmile je splněna podmínka vyslovená na začátku.

Cvičení 1. Ze všech čtyřúhelníků, které mají daný obvod, největší obsah má čtverec.

Cvičení 2. Jestliže jedna úhlopříčka tětivového čtyřúhelníka je průměrem opsané kružnice, pak pravoúhlé průměty protějších stran na druhou úhlopříčku jsou shodné.

Poznámka. Buď $ABCD$ tětivový čtyřúhelník. Ze vzorce pro délku úhlopříčky BD, o němž jsme se zmínili v našem řešení, a z obdobného vzorce pro úhlopříčku AC plyne Ptolemaiova rovnost

$$AB \,.\, CD + AD \,.\, BC = AC \,.\, BD.$$

Obráceně, splňují-li délky stran a úhlopříček čtyřúhelníku $ABCD$ Ptolemaiovu rovnost, je tento čtyřúhelník tětivový. Toto tvrzení je obsaženo v následující úloze. Dříve si však připomeneme pojem tzv. *kruhové inverze*, který budeme v řešení další úlohy potřebovat.

V rovině ϱ budiž dána kružnice $k \equiv (S; r)$. Definujeme zobrazení φ takto: je-li X libovolný bod roviny ϱ různý od bodu S, je bod $X' = \varphi(X)$ takový (jediný) bod na polopřímce SX, že $SX \,.\, SX' = r^2$; obraz bodu S nedefinujeme. Čtenář nechť si rozmyslí, že zobrazení φ, nazývané kruhová inverze vzhledem ke kružnici k, má tyto vlastnosti:

a) Je-li $X' = \varphi\,(X)$, pak $X = \varphi\,(X')$, tj. bodu X' odpovídá v kruhové inverzi opět původní bod X.

b) Probíhá-li bod X kružnici neprocházející bodem S, pak bod $\varphi\,(X)$ probíhá také kružnici neprocházející bodem S.

c) Probíhá-li bod X kružnici procházející bodem S (s výjimkou bodu S samého), pak bod $\varphi\,(X)$ probíhá přímku neprocházející bodem S. Probíhá-li bod X přímku neprocházející bodem S, pak $\varphi\,(X)$ probíhá kružnici procházející bodem S (s výjimkou bodu S).

d) Probíhá-li bod X polopřímku vycházející z bodu S (s výjimkou bodu S), probíhá bod $\varphi\,(X)$ touž polopřímku, ale v opačném smyslu.

e) Jsou-li X, Y dva body, oba různé od S, pak o vzdálenosti obrazů $X' = \varphi\,(X)$ a $Y' = \varphi\,(Y)$ platí

$$X'Y' = \frac{r^2}{SX \,.\, SY}\, XY.$$

64

Splynou-li alespoň dva z bodů A, B, C, D, nerovnost platí, a to s rovností, jak je uvedeno.

Nechť tedy dále jsou všechny body A, B, C, D navzájem různé. Proveďme na body A, B, C kruhovou inverzi (viz pozn. za řešením úlohy 63) φ vzhledem ke kružnici o středu D a poloměru 1. Pro obrazy $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$ a $C' = \varphi(C)$ platí

$$A'C' \leqq A'B' + B'C'. \tag{1}$$

Podle e) je však

$$A'C' = \frac{AC}{AD \,.\, CD},$$

$$B'C' = \frac{BC}{BD \,.\, CD},$$

$$A'B' = \frac{AB}{AD \,.\, BD},$$

takže

$$\frac{AC}{AD \,.\, CD} \leqq \frac{AB}{AD \,.\, BD} + \frac{BC}{BD \,.\, CD}.$$

Po vynásobení číslem $AD \,.\, BD \,.\, CD$ dostáváme žádanou nerovnost.

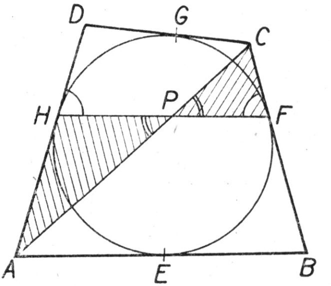
Rovnost nastane, právě když nastane rovnost v (1), tj. když bod B' leží uvnitř úsečky $A'C'$. Neprochází-li přímka $A'C'$ bodem D, leží podle a) a c) body A, B, C na kružnici $\varkappa$ procházející bodem D. Přitom dvojice A, C „odděluje" dvojici B, D na kružnici $\varkappa$, protože při jednom proběhnutí kružnice $\varkappa$ (s vyňatým bodem D) od bodu D se právě proběhne přímka $A'C'$, a protože bod B' leží uvnitř $A'C'$, leží B na druhém oblouku AC než je bod D. Prochází-li přímka $A'C'$ bodem D, leží všechny body A, B, C, D v přímce. Je-li nyní D na opačné polopřímce k polopřímce $A'C'$, je uspořádání bodů A, B, C, D. Je-li D uvnitř úsečky $A'B'$, je uspořádání B, C, D, A. Je-li D

uvnitř úsečky $B'C'$, je uspořádání C, D, A, B; je-li D na polopřímce opačné k $C'A'$, je uspořádání D, A, B, C. Protože postup lze obrátit, jsou podmínky pro rovnost nutné i postačující.

65

Buď $ABCD$ daný čtyřúhelník a E, F, G, H dotykové body vepsané kružnice se stranami (obr. 31, 32). Průsečík úhlopříčky AC s úsečkou HF označme P (obr. 31). Všimněme si trojúhelníků APH, CPF, které jsou na obr. 31 vyšrafovány. Tyto trojúhelníky mají při vrcholu P shodné úhly, proto poměr jejich obsahů je roven poměru součinů stran svírajících ty úhly, tj.

$$\frac{\text{obsah} \triangle APH}{\text{obsah} \triangle CPF} = \frac{PA \,.\, PH}{PC \,.\, PF} \,. \qquad (1)$$



Obr. 31.

Všimněme si dále, že úhly těchto trojúhelníků při vrcholech H, F se doplňují do 180°, neboť úsekové úhly $\sphericalangle PHD$, $\sphericalangle PFC$ jsou shodné. Proto $\sin \sphericalangle AHP = \sin \sphericalangle PFC$, takže

$$\frac{\text{obsah} \triangle APH}{\text{obsah} \triangle CPF} = \frac{AH \,.\, PH}{PF \,.\, CF} \,. \qquad (2)$$

Porovnáním výsledků (1), (2) dostáváme

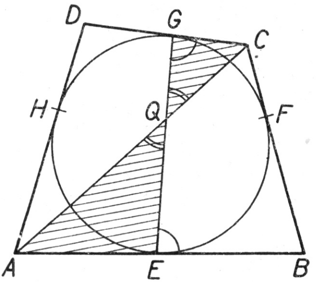
$$\frac{PA \,.\, PH}{PC \,.\, PF} = \frac{AH \,.\, PH}{PF \,.\, CF}$$

a odtud

$$\frac{PA}{PC} = \frac{AH}{CF}. \tag{3}$$

Označme nyní Q průsečík úhlopříčky AC s úsečkou EG (obr. 32). Provedeme-li s trojúhelníky AQE, CQG obdobnou úvahu jako v předchozím odstavci, obdržíme rovnost

$$\frac{QA}{QC} = \frac{AE}{CG}. \tag{4}$$



Obr. 32.

Vzhledem k tomu, že $AH = AE$ a $CF = CG$, vyplývá z (3) a (4) vztah

$$\frac{PA}{PC} = \frac{QA}{QC}.$$

To však znamená, že body P, Q musí splynout. Tak jsme dokázali, že úhlopříčka AC prochází průsečíkem úseček EG, HF. Poněvadž totéž lze zřejmě dokázat i o úhlopříčce BD, je tím úloha rozřešena.

66

Označme ϱ rovinu proloženou bodem S kolmo k přímce SA. Kdyby všechny tři body B, C, D ležely v poloprostoru ϱA, nemohl by S být vnitřním bodem čtyřstěnu $ABCD$. Proto např. bod B leží uvnitř poloprostoru opačného k ϱA

(a zároveň na dané kulové ploše). Takový bod B však zřejmě leží vně kulové plochy o středu A a poloměru $\sqrt{2}$, takže vzdálenost AB je větší než $\sqrt{2}$.

67

Mějme libovolný čtyřstěn. Jeho vrcholy označme písmeny A, B, C, D tak, aby hrana AB byla nejdelší (popř. jedna z nejdelších). Pro stěny ABC, ABD čtyřstěnu platí trojúhelníkové nerovnosti

$$AC + BC > AB,$$
$$AD + BD > AB.$$

Sečtením dostaneme nerovnost

$$AC + BC + AD + BD > 2AB,$$

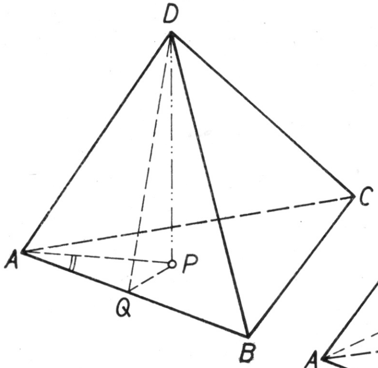
kterou můžeme psát též takto

$$(AC + AD - AB) + (BC + BD - AB) > 0.$$

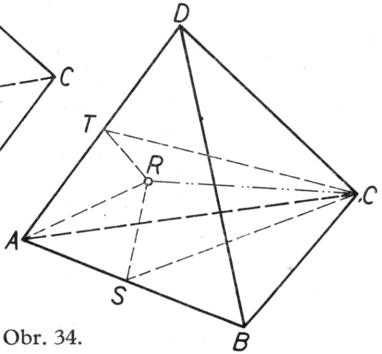
Nutně tedy platí buď $AC + AD > AB$ anebo $BC + BD > AB$. Protože hrana AB je nejdelší, je možné buď z úseček AC, AD, AB anebo z úseček BC, BD, BA sestrojit trojúhelník.

68

Buď $ABCD$ daný čtyřstěn a nechť P je pata kolmice spuštěné z vrcholu D na rovinu ABC (obr. 33). Poněvadž stěnové úhly $D(AB)C$, $D(AC)B$ jsou ostré, leží bod P uvnitř úhlu $\sphericalangle BAC$. Ze dvou úhlů $\sphericalangle PAB$, $\sphericalangle PAC$ je zajisté alespoň jeden ostrý; nechť je to např. $\sphericalangle PAB$ (v opačném případě by další úvaha byla obdobná). Potom pata Q kolmice spuštěné z bodu P na přímku AB padne dovnitř polopřímky AB (obr. 33). Bod Q je však zároveň pravoúhlým průmětem bodu D na přímku AB; přímka AB je totiž kolmá na DQ, neboť je kolmá



Obr. 33.



Obr. 34.

na rovinu DPQ, jak vyplývá z konstrukce bodů P, Q. Poněvadž tedy pravoúhlý průmět Q vrcholu D na přímku AB leží uvnitř polopřímky AB, je úhel $\sphericalangle BAD$ ostrý.

Z vrcholu C nyní spusťme kolmici na rovinu ABD a označme R její patu (obr. 34). Z předpokladů úlohy opět vyplývá, že R leží uvnitř úhlu $\sphericalangle BAD$, o němž však již víme, že je ostrý. Proto jsou ostré i oba úhly $\sphericalangle RAB$, $\sphericalangle RAD$. Pata S resp. T kolmice spustěné z bodu R na přímku AB resp. AD padne tudíž dovnitř polopřímky AB resp. AD (obr. 34). Opět se snadno uváží, že S resp. T je též pravoúhlý průmět vrcholu C na přímku AB resp. AD. To znamená, že úhly $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle CAD$ jsou ostré.

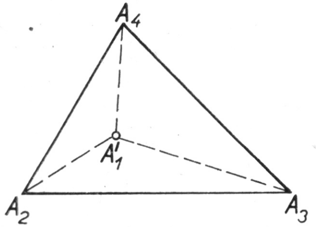
Dokázali jsme tedy, že všechny tři úhly při vrcholu A jsou ostré. Poněvadž pro ostatní vrcholy lze užít téže myšlenky, je tím úloha vyřešena.

Poznámka 1. Úloha 68 je speciální případ obdobné věty z geometrie n-rozměrného euklidovského prostoru.

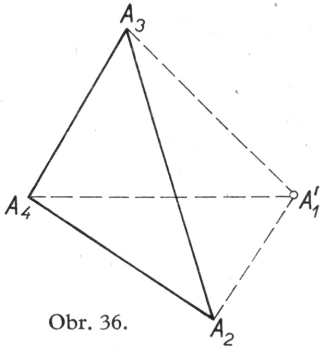
Poznámka 2. V obecném čtyřstěnu ovšem nemusejí být všechny vnitřní úhly ostré, jako tomu bylo v této úloze. V další úloze se proto budeme zabývat rozložením ostrých úhlů ve čtyřstěnu a mj. dokážeme, že alespoň tři vnitřní úhly čtyřstěnu jsou vždy ostré. Budeme však potřebovat jednoduchou pomocnou větu, kterou uvádíme v této poznámce.

Začněme příkladem v rovině. V trojúhelníku $A_1A_2A_3$ platí známé vztahy o délkách stran, které označíme p_1 $(= A_2A_3)$, p_2 $(= A_3A_1)$, p_3 $(= A_1A_2)$ a vnitřních úhlech φ_{12} $(= \sphericalangle A_1A_3A_2)$, φ_{23} $(= \sphericalangle A_2A_1A_3)$, φ_{13} $(= \sphericalangle A_3A_2A_1)$:

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 \cos\varphi_{12} - p_3 \cos\varphi_{13} &= 0, \\ -p_1 \cos\varphi_{12} + p_2 \qquad\quad - p_3 \cos\varphi_{23} &= 0, \\ -p_1 \cos\varphi_{13} - p_2 \cos\varphi_{23} + p_3 \qquad\quad &= 0. \end{aligned}$$



Obr. 35.



Obr. 36.

První vztah např. znamená, že délka p_1 je součet (popř. rozdíl) délek průmětů $p_2 \,|\cos\varphi_{12}|$ a $p_3 \,|\cos\varphi_{13}|$ stran p_2 a p_3 na p_1, s vhodnými znaménky podle toho, jsou-li oba úhly φ_{12}, φ_{13} ostré, nebo jeden pravý popř. tupý.

Obdobné vztahy platí o čtyřstěnu $A_1A_2A_3A_4$. Označíme-li po řadě p_1, p_2, p_3, p_4 obsahy stěn $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$ a φ_{12}, φ_{13}, φ_{14}, φ_{23}, φ_{24}, φ_{34} vnitřní úhly stěn (např.

φ_{12} úhel stěn $A_1A_3A_4$ a $A_2A_3A_4$, tedy úhel „proti" hraně A_1A_2, jako tomu bylo v předchozím trojúhelníku $A_1A_2A_3$), pak lze opět odvodit vztahy o průmětech:

$$\left.\begin{array}{rrrrl} p_1 & -p_2\cos\varphi_{12} & -p_3\cos\varphi_{13} & -p_4\cos\varphi_{14} & =0,\\ -p_1\cos\varphi_{12} & +p_2 & -p_3\cos\varphi_{23} & -p_4\cos\varphi_{24} & =0,\\ -p_1\cos\varphi_{13} & -p_2\cos\varphi_{23} & +p_3 & -p_4\cos\varphi_{34} & =0,\\ -p_1\cos\varphi_{14} & -p_2\cos\varphi_{24} & -p_3\cos\varphi_{34} & +p_4 & =0. \end{array}\right\}\quad(1)$$

První vztah v případě ostrých úhlů φ_{12}, φ_{13}, φ_{14} odpovídá v rovině $A_2A_3A_4$ rozkladu z obr. 35, v případě ostrých úhlů φ_{12} a φ_{13} a tupého úhlu φ_{14} situaci v obr. 36, kde $\triangle A_2A_3A_4 = \triangle A_1'A_2A_4 + \triangle A_1'A_3A_4 - \triangle A_1'A_2A_3$. Přitom A_1' značí vždy pravoúhlý průmět bodu A_1 na rovinu $A_2A_3A_4$.

69

K důkazu užijeme vztahů (1) z předchozí poznámky. Kdyby žádný z úhlů φ_{12}, φ_{13}, φ_{14} nebyl ostrý, platilo by $\cos\varphi_{12} \leqq 0$, $\cos\varphi_{13} \leqq 0$, $\cos\varphi_{14} \leqq 0$ a první ze vztahů (1) by neplatil. (Je to ostatně zřejmé i geometricky.) Abychom dokázali tvrzení b), předpokládejme, že žádný z úhlů φ_{13}, φ_{14}, φ_{23}, φ_{24} není ostrý. Pak $\cos\varphi_{13} \leqq 0$, $\cos\varphi_{14} \leqq 0$, $\cos\varphi_{23} \leqq 0$, $\cos\varphi_{24} \leqq 0$. Násobíme-li první ze vztahů (1) číslem p_1, druhý číslem p_2 a sečteme, dostaneme

$$p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos\varphi_{12} - (p_1p_3\cos\varphi_{13} + p_1p_4\cos\varphi_{14} + \\ + p_2p_3\cos\varphi_{23} + p_2p_4\cos\varphi_{24}) = 0.$$

Avšak $|2p_1p_2\cos\varphi_{12}| < 2p_1p_2 \leqq p_1^2 + p_2^2$, takže součet prvních tří členů je kladný. Výraz v závorce je podle našich předpokladů nekladný, což celkem dává, že levá strana je kladná. Tento spor dokazuje tvrzení b).

Dokažme nyní z a) a b) tvrzení c). Podle a) je alespoň jeden z úhlů φ_{12}, φ_{13}, φ_{14} ostrý. Případným přečíslováním lze dosáhnout toho, že φ_{12} je ostrý. Z tvrzení a) také plyne, že alespoň jeden z úhlů φ_{13}, φ_{23}, φ_{34} je ostrý. Je-li to úhel φ_{13} nebo φ_{23}, pak třetí (popř. dokonce čtvrtý) ostrý úhel najdeme opět podle a) mezi úhly φ_{14}, φ_{24}, φ_{34} a tvrzení c) platí. Není-li ani úhel φ_{13}, ani φ_{23} ostrý, je ostrý úhel φ_{34}. Třetí ostrý úhel pak najdeme z tvrzení b), neboť alespoň jeden z úhlů φ_{13}, φ_{14}, φ_{23}, φ_{24} (tedy alespoň jeden z úhlů φ_{14}, φ_{24}) je ostrý.

Tím je důkaz proveden. Příkladem čtyřstěnu s právě třemi ostrými úhly je čtyřstěn vzniklý odříznutím jednoho „rohu" kvádru. Přímý důkaz tvrzení c) předkládáme v pozn. 2.

Poznámka 1. Rozložení ostrých, pravých a tupých vnitřních úhlů stěn čtyřstěnu si můžeme názorněji vyznačit takto: Je-li úhel φ_{ik} $(i \neq k)$ ostrý, „obarvíme" hranu A_iA_k *červeně*; je-li φ_{ik} tupý, obarvíme A_iA_k *modře*; je-li φ_{ik} pravý, obarvíme A_iA_k *bíle*. Rozložení ostrých, tupých a pravých vnitřních úhlů tedy odpovídá obarvení všech šesti hran čtyřstěnu, každé jednou z barev červená, modrá, bílá. Ukažme, že množina červených hran je „souvislá množina spojující všechny vrcholy A_1, A_2, A_3, A_4", tj., že *po červených hranách se dostaneme z každého vrcholu čtyřstěnu do každého jiného vrcholu.*

Nechť toto neplatí. Pak se z vrcholu A_1 nedostaneme do některého dalšího vrcholu (jinak bychom se z každého vrcholu dostali do každého přes vrchol A_1) po červených hranách. Tedy množina M složená z vrcholu A_1 a z těch vrcholů, do nichž se dostaneme z A_1 po červených hranách, má nejvýše tři prvky. Má-li jeden prvek, je to jen vrchol A_1 a žádná z hran A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 není červená. To však odporuje tvrzení a) z úlohy. Má-li dva prvky, nechť to jsou A_1 a (po vhodném přečíslování vrcholů A_2, A_3, A_4) A_2. Hrana A_1A_2 je tedy červená, ale žádná z hran A_1A_3, A_1A_4, A_2A_3, A_2A_4 už není červená, což odporuje tvrzení b) úlohy. Má-li tři prvky a chybí-li v M např. vrchol A_4, pak žádná z hran A_1A_4, A_2A_4, A_3A_4 není červená, což odporuje tvrzení a) (užitému na vrchol A_4).

Lze ukázat, že uvedené obarvení hran není kromě nalezené souvislosti červených hran vázáno žádnou další podmínkou.

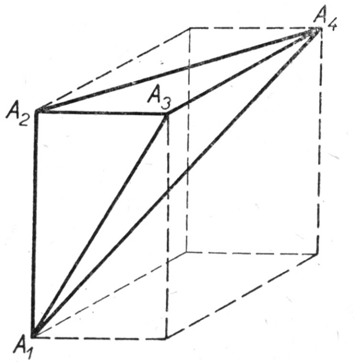
Platí totiž: *Obarvíme-li šest hran pomocného čtyřstěnu* $A_1A_2A_3A_4$ *červeně, modře a bíle tak, aby množina červených hran byla souvislá, pak tento čtyřstěn můžeme zdeformovat tak, že proti červeným hranám leží ostré, proti modrým hranám tupé a proti bílým hranám pravé vnitřní úhly.*

Ověřte si sami, že obdobné vlastnosti má i trojúhelník (souvislost červených hran i to, že toto je jediná podmínka). A lze to dokázat pro obdobný útvar v n-rozměrném prostoru.

Snad nejzajímavější je obarvení hran čtyřstěnu třemi červenými a třemi bílými hranami. Aby červené hrany tvořily souvislou množinu „nad" vrcholy A_1, A_2, A_3, A_4, nesmí tvořit trojúhelník (čtvrtý vrchol by byl „isolovaný"). Jsou proto možné v podstatě dva případy:

1. případ. A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 jsou červené, ostatní bílé. Tento případ odpovídá zřejmě „rohu kvádru", tj. úsečky A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 jsou po dvou navzájem kolmé.

2. případ. A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 jsou červené, ostatní bílé. Lze ukázat, že v tomto případě jsou úsečky A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 po dvou navzájem kolmé, tj. že čtyřstěn vznikne (obr. 37) z kvádru. Jsou tedy vlastně dva typy „pravoúhlých" čtyřstěnů (tj. čtyřstěnů se třemi pravými vnitřními úhly).



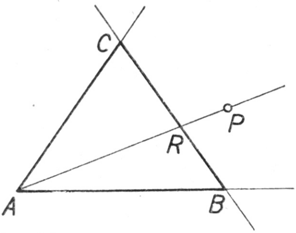
Poznámka 2. Podáme nyní bezprostřední důkaz tvrzení c) úlohy 69. Buď $ABCD$ daný čtyřstěn. Chceme dokázat, že alespoň tři jeho vnitřní úhly jsou ostré.

Obr. 37.

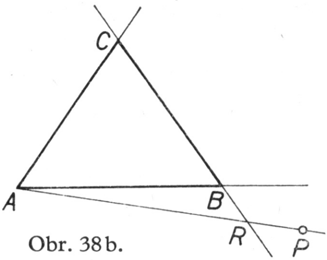
Důkaz. Vezměme tu stěnu daného čtyřstěnu, která má největší obsah (má-li více stěn maximální obsah, zvolíme libovolnou z nich). Nechť je to např. trojúhelník ABC. Ze vzorečku pro objem čtyřstěnu pak vyplývá, že výška v spuštěná z vrcholu D na rovinu ABC je nejkratší (popř. jedna z nejkratších). Označme P patu této výšky.

Padne-li bod P dovnitř trojúhelníku ABC (čili dovnitř každé ze tří polorovin ABC, BCA, CAB), jsou všechny vnitřní úhly čtyřstěnu přilehlé ke stěně ABC ostré a není co dokazovat.

Nepadne-li bod P dovnitř trojúhelníku ABC, můžeme předpokládat, že leží např. v polorovině opačné k polorovině BCA. Přímka AP pak protíná přímku BC v jistém bodě R (obr. 38a, b) a úhel $\sphericalangle ARD$ je zřejmě pravý nebo tupý (neboť R náleží úsečce AP a $\sphericalangle APD$ je pravý). V trojúhelníku ARD je tedy strana AD nejdelší, a proto výška w k ní příslušná je nejkratší, jak plyne ze vzorečku pro obsah trojúhelníku, zejména tedy platí $w < v$.



Obr. 38a.



Obr. 38b.

Vzdálenost r bodu R od roviny ACD je popřípadě ještě menší než w, neboť bod R má již od přímky AD, která v této rovině leží, vzdálenost rovnou w. Celkem tedy máme $r \leqq w < v$. Obdobně též vzdálenost bodu R od roviny ABD je $\leqq w < v$.

Ukážeme nyní, že bod R leží uvnitř úsečky BC. Kdyby tomu tak nebylo, ležel by bod R např. na prodloužení úsečky BC

za bod B (obr. 38b). Vzdálenost bodu B od roviny ACD by pak byla $\leqq$ než vzdálenost bodu R od této roviny, tj. $\leqq r$. Výška čtyřstěnu $ABCD$ spuštěná z vrcholu B na rovinu ACD by tedy byla kratší než v, a to by byl spor s naším předpokladem. Proto bod R leží uvnitř úsečky BC (obr. 38a).

Bod P tudíž leží uvnitř úhlu $\sphericalangle BAC$ (obr. 38a), což znamená, že vnitřní úhly $D(AB)C$, $D(AC)B$ jsou ostré. Úhel $D(BC)A$ v našem případě není ostrý, avšak třetím ostrým úhlem musí být buď $A(BD)C$ nebo $A(CD)B$, neboť všechny tři vnitřní úhly přilehlé ke stěně BCD zřejmě nemohou být neostré [viz též tvrzení a) úlohy 69].

V každém případě jsme tedy našli (alespoň) tři ostré vnitřní úhly daného čtyřstěnu.

70

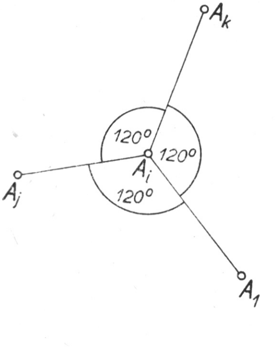
Mezi body dané soustavy existují dva, které mají největší vzdálenost (je-li takových dvojic víc, zvolíme některou z nich). Označme tyto body A_1 a A_n. Ukažme nyní: Jsou-li P a Q dva různé body soustavy, různé od A_1, pak úhel $\sphericalangle PA_1Q < 120°$. Pro $P \not\equiv A_n \not\equiv Q$ je totiž $\sphericalangle A_1PA_n \geqq 120°$, $\sphericalangle A_1QA_n \geqq 120°$ (ať bod P resp. Q leží na přímce A_1A_n či nikoli), takže zřejmě $\sphericalangle PA_1A_n < 60°$, $\sphericalangle QA_1A_n < 60°$. Odtud plyne (viz pozn. 1 za řešením), že $\sphericalangle PA_1Q \leqq \sphericalangle PA_1A_n + \sphericalangle QA_1A_n < 120°$, jak jsme chtěli ukázat. Pro $P \equiv A_n$ nebo $Q \equiv A_n$ je rovněž $\sphericalangle PA_1Q < 120°$. To však znamená, že $A_1P \neq A_1Q$, neboť jinak by (tři různé) body A_1, P, Q tvořily rovnoramenný trojúhelník s maximálním úhlem menším než 120°, což je spor s předpokladem. Jsou tedy vzdálenosti každých dvou bodů soustavy od bodu A_1 různé, takže zbylé body můžeme označit $A_2, \ldots, A_{n-1}$ tak, že

$$A_1A_2 < A_1A_3 < A_1A_4 < \ldots < A_1A_{n-1} < A_1A_n.$$

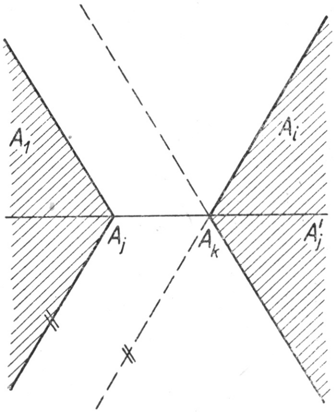
Dokažme nyní, že pro $1 \leqq i < j < k \leqq n$ platí

$$\sphericalangle A_i A_j A_k \geqq 120^\circ. \qquad (1)$$

Pro $i = 1$, $k = n$ je (1) správná. Nechť $i = 1$, $k \neq n$. Protože $\sphericalangle A_j A_1 A_k < 120^\circ$ a $A_j A_1 < A_1 A_k$, platí $\sphericalangle A_1 A_j A_k \geqq 120^\circ$, tj. (1). Buď tedy $i \neq 1$. Už víme, že $\sphericalangle A_1 A_i A_j \geqq 120^\circ$, stejně tak $\sphericalangle A_1 A_j A_k \geqq 120^\circ$, $\sphericalangle A_1 A_i A_k \geqq 120^\circ$. Předpokádejme, že $\sphericalangle A_i A_j A_k < 120^\circ$. Potom je buď $\sphericalangle A_k A_i A_j \geqq 120^\circ$ anebo $\sphericalangle A_j A_k A_i \geqq 120^\circ$. Nastane-li první možnost, svírají každé dvě z polopřímek $A_i A_1$, $A_i A_k$, $A_i A_j$ úhel alespoň 120°. To je možné jen tak (pozn. 2), že všechny tři leží v rovině a svírají úhel právě 120°. Potom však (obr. 39) $\sphericalangle A_1 A_j A_k = \sphericalangle A_1 A_j A_i + \sphericalangle A_i A_j A_k < 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$, což je spor. Zbývá tedy možnost $\sphericalangle A_j A_k A_i \geqq 120^\circ$. Potom, označíme-li A'_j některý bod opačné polopřímky k polopřímce $A_k A_j$, platí $\sphericalangle A'_j A_k A_i \leqq 60^\circ$, dále vzhledem k $\sphericalangle A_1 A_i A_k \geqq 120^\circ$ platí $\sphericalangle A_1 A_k A_i < 60^\circ$, tj. $\sphericalangle A'_j A_k A_1 < 120^\circ \leqq \sphericalangle A_k A_j A_1$. Protože toto není možné (obr. 40), platí $\sphericalangle A_i A_j A_k \geqq 120^\circ$ a věta je dokázána.



Obr. 39.

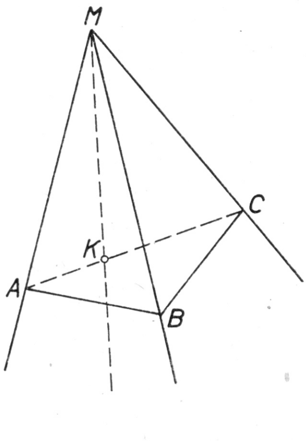


Obr. 40.

Poznámka 1. V předchozím řešení jsme užili tohoto tvrzení: Jsou-li MA, MB, MC polopřímky, pak každý z úhlů $\sphericalangle AMB$, $\sphericalangle BMC$, $\sphericalangle CMA$ je menší nebo roven součtu dvou zbývajících. Důkaz zřejmě stačí provést jen pro případ, že dané polopřímky neleží v rovině a že právě jeden z těchto tří úhlů má největší velikost (ostatní případy jsou totiž snadné).

Na obr. 41 jsou znázorněny tři polopřímky MA, MB, MC v prostoru takové, že $\sphericalangle AMC$ je větší než oba zbývající. Pak uvnitř úsečky AC existuje takový bod K, že $\sphericalangle KMC = \sphericalangle BMC$. O bodu B můžeme zřejmě předpokládat, že platí $MB = MK$. Pak také $BC = CK$. Poněvadž $AC < AB + BC$, máme $AK < AB$. Trojúhelníky AMK, AMB mají tedy dvě dvojice shodných stran, avšak pro třetí strany platí nerovnost $AK < AB$. Proto pro úhly ležící proti těmto stranám platí nerovnost

$$\sphericalangle AMK < \sphericalangle AMB,$$



Obr. 41.

z níž plyne (vzhledem k tomu, že $\sphericalangle KMC = \sphericalangle BMC$)

$$\sphericalangle AMK + \sphericalangle KMC < \sphericalangle AMB + \sphericalangle BMC,$$

tj.

$$\sphericalangle AMC < \sphericalangle AMB + \sphericalangle BMC.$$

Zbývající dvě nerovnosti jsou zřejmé vzhledem k tomu, že úhel $\sphericalangle AMC$ je největší.

Poznámka 2. Buďte opět MA, MB, MC tři polopřímky, které neleží v rovině, takže $MABC$ je čtyřstěn. Užitím výsledku pozn. 1 dokážeme, že součet

$$S = \sphericalangle AMB + \sphericalangle BMC + \sphericalangle CMA$$

je menší než 360°. Platí totiž

$$\sphericalangle BAC < \sphericalangle BAM + \sphericalangle CAM,$$
$$\sphericalangle ABC < \sphericalangle ABM + \sphericalangle CBM,$$
$$\sphericalangle BCA < \sphericalangle BCM + \sphericalangle ACM.$$

Sečtením těchto tří nerovností dostaneme

$$180° < 3 \,.\, 180° - S$$

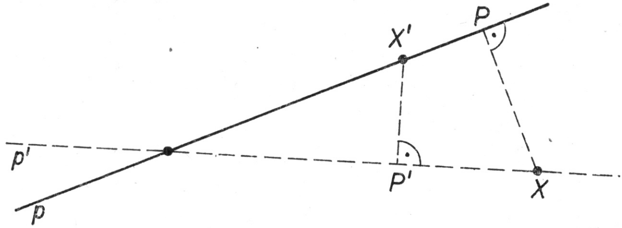
a odtud skutečně

$$S < 360°.$$

71

Nechť tvrzení neplatí. Pak ke každé přímce procházející alespoň dvěma z uvažovaných bodů lze najít v dané množině bod, který na této přímce neleží. Ze všech dvojic (p, X), kde p je přímka procházející alespoň dvěma z daných bodů a X je bod dané množiny, který neleží na přímce p, vyberme tu (popř. jednu z těch), pro niž je vzdálenost bodu X od přímky p co nejmenší. To můžeme, neboť uvažovaných dvojic je konečný počet. Buď (p, X) zvolená dvojice.

Písmenem P označme pravoúhlý průmět bodu X na přímku p. Bod P rozděluje přímku p na dvě uzavřené polopřímky. Na každé z nich může ležet nejvýše jeden bod dané množiny, jak ukazuje obr. 42, kde $X'P' < XP$. Proto na celé přímce p leží nejvýše (vlastně právě) dva body dané množiny, a to odporuje předpokladu úlohy. Věta je dokázána.



Obr. 42.

Poznámka. Úloha 71 je elementárním příkladem jedné obecnější teorie.

Cvičení. V prostoru je dáno $n\,(\geqq 3)$ bodů, které neleží v jedné přímce. Pak existuje alespoň n různých přímek, z nichž každá prochází nejméně dvěma z daných bodů.

72

Všechny kruhy, o nichž se mluví v úloze, mají týž poloměr r. K objasnění tohoto tvrzení stačí vzít dvě různoběžné roviny a promítnout množinu M pravoúhle na jejich průsečnici; vzniklý průmět bude zřejmě zároveň pravoúhlým průmětem obou příslušných kruhů na tuto průsečnici. Proto oba kruhy mají stejné průměry. Rozmyslete si také, že kolmice vztyčené ve středech všech uvažovaných kruhů procházejí společným bodem S.

Sestrojme nyní kulovou plochu $\varkappa \equiv (S; r)$. Kdyby některý bod X množiny M ležel vně této kulové plochy, pak by pravoúhlý průmět množiny M na libovolnou rovinu obsahující přímku SX nemohl být kruh o středu S a poloměru r. Proto celá množina M leží v kouli s hranicí $\varkappa$. Kdyby některý bod Y kulové plochy $\varkappa$ nepatřil množině M, pak by zase pravoúhlý průmět množiny M na libovolnou rovinu proloženou přímkou SY nemohl být kruh o středu S a poloměru r, neboť v tečné rovině plochy $\varkappa$ vedené bodem Y podle předchozího neleží žádný bod množiny M.

Množina M tedy obsahuje všechny body kulové plochy $\varkappa$ (a je celá obsažena v kouli, kterou tato plocha určuje).

Poznámka. Kdybychom v úloze předpokládali navíc konvexitu množiny M, platilo by, že M je koule.

73

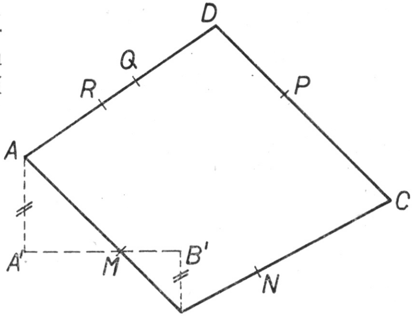
První řešení. Dotykové body kulové plochy s hranami AB, BC, CD, DA označme po řadě M, N, P, Q. Z vlastností tečen kulové plochy nacházíme vztahy

$$AM = AQ,\ BM = BN,\ CN = CP,\ DP = DQ, \tag{1}$$

pomocí nichž dokážeme, že body M, N, P, Q leží v jedné rovině.

Rovina MNP neobsahuje žádný z bodů A, B, C, D, neboť jinak by musela obsahovat všechny vrcholy čtyřstěnu, což není možné. Body A, B leží proto uvnitř opačných poloprostorů určených touto rovinou. Totéž platí i o vrcholech B, C a C, D. Z toho vyplývá, že vrcholy A, D jsou odděleny rovinou MNP, takže tato rovina protíná úsečku AD v jejím vnitřním bodě R. Potřebujeme dokázat, že $R \equiv Q$.

Označme A', B', C', D' (pravoúhlé) průměty bodů A, B, C, D na rovinu MNP. Pak zřejmě platí (obr. 43)



Obr. 43.

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AA'}{BB'}, \frac{BN}{CN} = \frac{BB'}{CC'}, \frac{CP}{DP} = \frac{CC'}{DD'}, \frac{DR}{AR} = \frac{DD'}{AA'},$$

tedy

$$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{DP} \cdot \frac{DR}{AR} = \frac{AA'}{BB'} \cdot \frac{BB'}{CC'} \cdot \frac{CC'}{DD'} \cdot \frac{DD'}{AA'} = 1.$$

Vzhledem k (1) odtud dostáváme

$$\frac{AM}{DP} \cdot \frac{DR}{AR} = 1.$$

Poněvadž $AM = AQ$, $DP = DQ$, vyplývá z poslední rovnosti, že

$$AQ \,.\, DR = DQ \,.\, AR.$$

Dosaďme sem $DR = AD - AR$, $DQ = AD - AQ$, takže bude

$$AQ\,(AD - AR) = (AD - AQ)\,AR,$$

z čehož

$$AQ = AR.$$

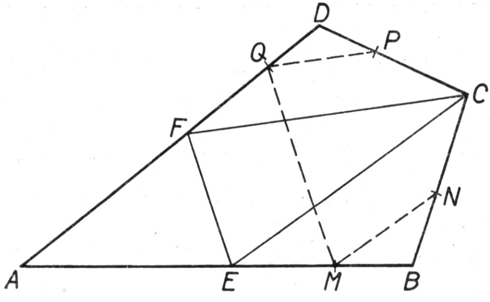
Tím je dokázáno, že $R \equiv Q$.

D r u h é ř e š e n í. Označení zvolme stejně jako v předchozím řešení, takže opět platí rovnosti (1). Rozlišujme nyní dva případy:

[1] Může se stát, že $AM = CN$. Pak též $AQ = CP$. Trojúhelník ABC je pak rovnoramenný ($BA = BC$) a platí $MN \parallel AC$. Obdobně je $QP \parallel AC$. Z toho vyplývá $MN \parallel QP$, takže body M, N, P, Q leží v jedné rovině.

[2] V případě $AM \neq CN$ předpokládejme např., že je $AM > CN$, takže též $AQ > CP$. Rovnoběžka s MN vedená bodem C protíná úsečku AB v jistém bodě E (ležícím mezi A, M) a obdobně rovnoběžka s PQ vedená bodem C protíná úsečku AD v jistém bodě F (ležícím mezi A, Q); viz obr. 44. Poněvadž $BM = BN$ a $DP = DQ$, je $EM = CN = CP = QF$; to znamená, že v rovině ABD platí $MQ \parallel EF$.

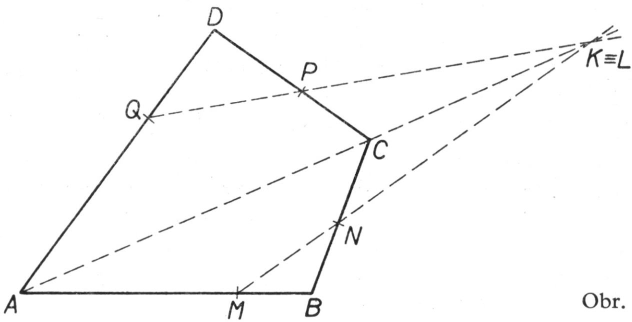
Obr. 44.



Přímky PQ, QM, MN jsou tedy rovnoběžné po řadě s přímkami CF, FE, EC, a proto jsou obě roviny PQM i QMN rovnoběžné s rovinou CFE. Poněvadž však tyto dvě roviny mají společnou přímku QM, jsou totožné. To znamená, že body M, N, P, Q leží v jedné rovině, c. b. d.

Třetí řešení. Dotykové body dané kulové plochy s hranami AB, BC, CD, DA označme opět M, N, P, Q. Je-li $AM =$ $= CN$, provedeme tutéž úvahu jako na začátku druhého řešení.

Jestliže $AM \neq CN$, můžeme předpokládat, že je např. $AM > CN$ a tedy též $AQ > CP$. V rovině ABC jsou pak přímky AC, MN různoběžné a protínají se v jistém bodě K, který zřejmě leží na polopřímce opačné k polopřímce CA (obr. 45).



Obr. 45.

Přímka QP protíná přímku AC v jistém bodě L, který leží také na polopřímce CK. Dokážeme-li, že je $K \equiv L$, budou přímky MN, PQ různoběžné a body M, N, P, Q budou ležet v jedné rovině (určené těmito dvěma různoběžkami). K tomu stačí ukázat, že platí $CK = CL$.

Přímka MN protíná přímky AB, BC, CA po řadě v bodech M, N, K, takže podle Menelaovy věty (pozn. za řešením) platí

$$AM \,.\, BN \,.\, CK = BM \,.\, CN \,.\, AK.$$

Poněvadž zřejmě $BN = BM$ a $AK = AC + CK$, je

$$AM \,.\, CK = CN\,(AC + CK)$$

a odtud

$$CK = \frac{CN \,.\, AC}{AM - CN}\,. \tag{1}$$

Obdobně z trojúhelníku ACD proťatého přímkou PQ vypočteme

$$CL = \frac{CP \,.\, AC}{AQ - CP}\,. \tag{2}$$

Ve vzorcích (1), (2) je však $CN = CP$, $AM = AQ$, takže skutečně platí

$$CK = CL,$$

jak jsme chtěli dokázat.

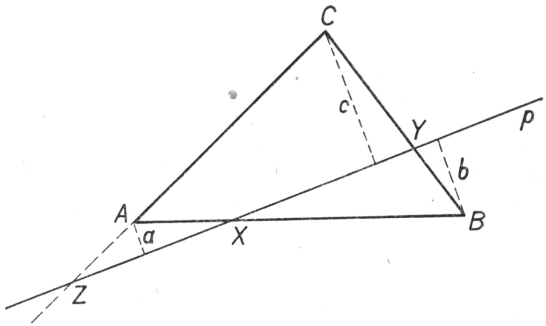
Poznámka. *Menelaova věta*, kterou jsme užili ve třetím řešení zní takto:

Nechť je dán trojúhelník ABC a přímka p, která protíná přímky AB, BC, CA po řadě v bodech X, Y, Z. Pak platí

$$AX \,.\, BY \,.\, CZ = BX \,.\, CY \,.\, AZ. \tag{1}$$

Důkaz. Prochází-li přímka p jedním nebo dvěma vrcholy trojúhelníku ABC, jsou obě strany v (1) rovny nule. Neprochází-li přímka p žádným vrcholem trojúhelníku ABC, označme vzdálenosti vrcholů A, B, C od přímky p po řadě písmeny a, b, c (obr. 46).

Obr. 46.



Pak zřejmě platí

$$\frac{AX}{BX} = \frac{a}{b}, \quad \frac{BY}{CY} = \frac{b}{c}, \quad \frac{CZ}{AZ} = \frac{c}{a}.$$

Vynásobením těchto rovností dostaneme

$$\frac{AX}{BX} \cdot \frac{BY}{CY} \cdot \frac{CZ}{AZ} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = 1$$

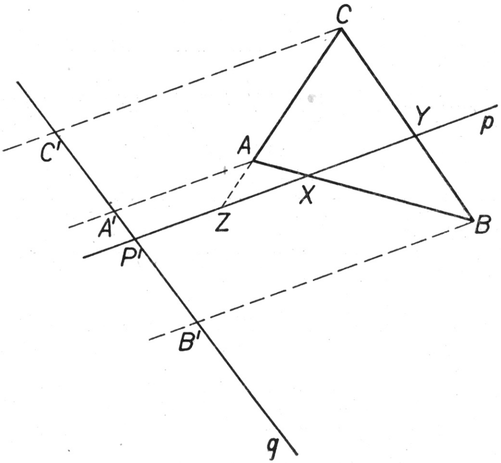
a odtud již bezprostředně vyplývá rovnost (1).

Jiný důkaz (již jen pro případ, že přímka p neprochází žádným vrcholem trojúhelníku ABC). Sestrojme v rovině ABC přímku q různoběžnou s danou přímkou p. Rovnoběžné průměty bodů A, B, C na přímku q ve směru daném přímkou p označme po řadě A', B', C'; při tomto promítání bude obrazem bodů X, Y, Z jediný bod P', různý od bodů A', B', C' (obr. 47). Pak o úsečkách a jejich průmětech platí vztahy

$$\frac{AX}{BX} = \frac{A'P'}{B'P'}, \quad \frac{BY}{CY} = \frac{B'P'}{C'P'}, \quad \frac{CZ}{AZ} = \frac{C'P'}{A'P'}.$$

Vynásobením těchto rovností opět plyne (1).

Obr. 47.



74

Nechť existuje kulová plocha, která se dotýká všech hran čtyřstěnu $ABCD$. Dotykové body rozdělují každou hranu na dvě úsečky a každé tři z těchto dvanácti úseček, které vycházejí z jednoho vrcholu čtyřstěnu, jsou stejně dlouhé. Délky tečen vycházejících z vrcholů A, B, C, D označme po řadě a, b, c, d. Pak $AB = a + b$, $CD = c + d$, takže $AB + CD = a + b + c + d$. Podobně se dokáže, že také $AC + BD = AD + BC = a + b + c + d$.

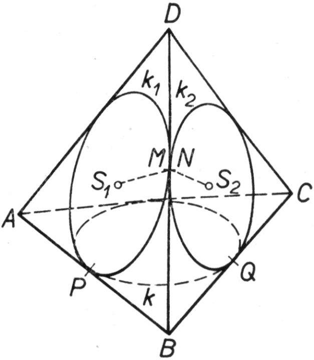
Předpokládejme nyní, že čtyřstěn $ABCD$ splňuje podmínku

$$AB + CD = AC + BD = AD + BC, \tag{1}$$

a ukažme, že je možno sestrojit kulovou plochu, která se dotýká všech jeho hran.

Hledaná kulová plocha musí protínat každou stěnu v kružnici jí vepsané; přitom kružnice vepsané libovolným dvěma stěnám se budou dotýkat společné hrany v témž bodě (je to dotykový bod kulové plochy s touto hranou). Dokažme proto především, že z předpokladu (1) vyplývá toto tvrzení: Kružnice vepsané libovolným dvěma stěnám čtyřstěnu $ABCD$ se dotýkají společné hrany v témž bodě (obr. 48).

Vepišme trojúhelníkům ABD, BCD kružnice k_1, k_2 a označme M, N jejich dotykové body se společnou stranou BD; viz obr. 48, kde S_1, S_2 jsou středy těchto kružnic a P, Q dotykové body se stranami AB, BC. Z trojúhelníku ABD vypočteme



Obr. 48.

$$BM = \frac{1}{2}(AB + BD - AD)$$

a z trojúhelníku BCD

$$BN = \frac{1}{2}(BC + BD - CD).$$

Podle (1) však platí $AB - AD = BC - CD$, takže

$$BM = BN.$$

To ale znamená, že $M \equiv N$. Obdobně lze důkaz provést i pro ostatní dvojice stěn.

Rovina S_1MS_2 je kolmá k přímce BD, neboť obě různoběžky S_1M, S_2M jsou kolmé ke společné tečně BD kružnic k_1, k_2. Proto je rovina S_1MS_2 kolmá i k rovinám ABD, BCD. V rovině S_1MS_2 leží tedy kolmice k rovinám ABD, BCD vztyčené v bodech S_1, S_2. Tyto dvě kolmice nejsou rovnoběžné (neboť roviny

ABD, BCD nejsou rovnoběžné), takže se protínají v jistém bodě S. Bod S má od bodů kružnic k_1, k_2 stejnou vzdálenost, rovnou délce SM. Kulová plocha $\varkappa$ o středu S a poloměru SM prochází tedy kružnicemi k_1, k_2 a dotýká se hran AB, BC, CD, BD, AD v jejich vnitřních bodech.

Zbývá dokázat, že se dotýká i hrany AC. Kulová plocha $\varkappa$ protíná rovinu ABC v jisté kružnici k, která se dotýká přímek AB, BC v bodech P, Q. Z našeho pomocného tvrzení o kružnicích vepsaných stěnám čtyřstěnu $ABCD$ nyní vyplývá, že kružnice k musí být totožná s kružnicí vepsanou trojúhelníku ABC. Dotýká se tedy i úsečky AC ve vnitřním bodě a důkaz je hotov.

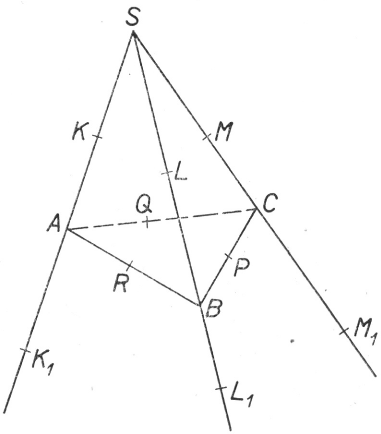
75

Buď Ω jedna z pěti daných kulových ploch. Kulová plocha Ω protíná rovinu každé stěny čtyřstěnu $SABC$ v kružnici, která je buď vepsána nebo vně vepsána příslušnému trojúhelníku. Přitom každé dvě z těchto čtyř kružnic se dotýkají průsečnice svých rovin v témž bodě (je to dotykový bod této průsečnice s kulovou plochou Ω). Nyní jsou myslitelné dva případy:

[1] Kulová plocha Ω se dotýká všech hran v jejich vnitřních bodech. Pak Ω prochází body P, Q, R, v nichž se dotýká kružnice vepsaná trojúhelníku ABC jeho stran, a dále dotykovým bodem K strany SA s kružnicí vepsanou trojúhelníku SAB (obr. 49). Body P, Q, R neleží v přímce a bod K neleží v rovině PQR. Čtyřmi body P, Q, R, K, které neleží v jedné rovině, prochází jediná kulová plocha. Proto nejvýše jedna z pěti daných kulových ploch patří k případu [1].

[2] Alespoň jeden dotykový bod kulové plochy Ω s přímkami obsahujícími hrany čtyřstěnu leží vně příslušné hrany. Pro určitost např. předpokládejme, že se kulová plocha Ω dotýká přímky SA v bodě K_1, který leží na prodloužení úsečky SA za bod A (obr. 49). Pak Ω protíná rovinu SAB v kružnici k_1

Obr. 49.



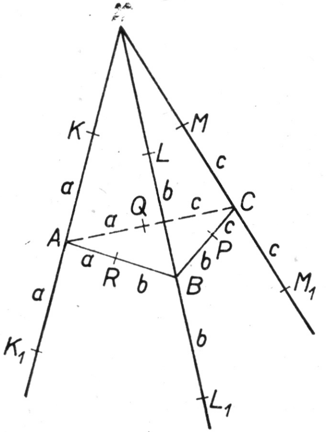
vně vepsané trojúhelníku SAB, a to ke straně AB. Proto se kružnice k_1 dotýká úsečky AB v jistém vnitřním bodě a dále polopřímky SB v bodě L_1, který je od bodu S oddělen bodem B (obr. 49). Kružnice k_2 v rovině SAC pak také obsahuje bod K_1 (neboť, jak jsme na začátku řešení poznamenali, kružnice k_1, k_2 se musí dotýkat přímky SA v témž bodě) a je tedy vně vepsána trojúhelníku SAC, a to ke straně AC. Rovněž kružnice k_3 v rovině SBC musí být vně vepsána trojúhelníku SBC ke straně BC. Z toho vyplývá, že kulová plocha Ω protíná rovinu ABC v kružnici vepsané trojúhelníku ABC a dotýká se tedy hran BC, CA, AB po řadě v bodech P, Q, R (obr. 49). Ostatní tři roviny protíná kulová plocha Ω v kružnicích vně vepsaných příslušným trojúhelníkům a dotýká se přímek SA, SB, SC po řadě v bodech K_1, L_1, M_1 (obr. 49). Čtyřstěnu $PQRK_1$ lze opsat jedinou kulovou plochu, proto existuje nejvýše jedna sféra Ω, která má vlastnosti popsané v tomto odstavci. Celkem pak existují nejvýše čtyři kulové plochy patřící k případu [2].

Poněvadž v předpokladu úlohy je dáno pět kulových ploch, z nichž každá se dotýká šesti přímek SA, SB, SC, AB, BC, CA, existuje podle provedeného rozboru jedna kulová plocha prvého typu a čtyři kulové plochy druhého typu.

Všimněme si nejprve kulové plochy prvého typu a její dotykové body s hranami čtyřstěnu $SABC$ označme podle obr. 50.

Pak platí

$$SK = SL = SM = s, \quad AK = AQ = AR = a,$$
$$BL = BP = BR = b, \quad CM = CP = CQ = c.$$



Obr. 50.

Vezměme nyní kulovou plochu druhého typu příslušnou stěně ABC a dotykové body označme opět podle obr. 50. Pak také

$$AK_1 = a, \quad BL_1 = b, \quad CM_1 = c$$

a dále $SK_1 = SL_1 = SM_1$, tj.

$$2a + s = 2b + s = 2c + s$$

čili

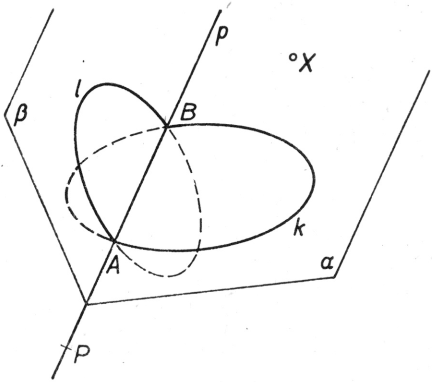
$$a = b = c.$$

To však znamená, že trojúhelník ABC je rovnostranný (obr. 50). Provedeme-li obdobnou úvahu i se třemi zbývajícími kulovými plochami, dokážeme, že i stěny SAB, SBC, SCA jsou rovnostranné trojúhelníky. Daný čtyřstěn $SABC$ je tedy pravidelný.

Obráceně, nechť $SABC$ je pravidelný čtyřstěn. Označme T jeho střed (těžiště). Pak kulová plocha o středu T, která prochází středem jedné hrany, bude procházet i středy ostatních hran a bude se dotýkat všech hran čtyřstěnu $SABC$ (tj. bude prvého typu). Stejnolehlostí se středem S a koeficientem 3 přejde tato sféra v kulovou plochu druhého typu příslušnou stěně ABC. Obdobně sestrojíme další tři sféry. Celkem tedy existuje pět kulových ploch, jak jsme měli dokázat.

76

Veďme bodem P přímku p, která protíná množinu M v jisté úsečce AB; uvědomte si, že taková přímka p existuje. Přímkou p proložme dvě různoběžné roviny α, β. Každá z nich podle předpokladu protíná množinu M v kruhu; hraniční kružnice k, l těchto dvou kruhů mají společnou tětivu AB. Kružnicemi k, l prochází jediná kulová plocha; kouli, kterou ohraničuje, označme K. Ukážeme, že $M = K$.



Obr. 51.

Buď X libovolný bod množiny M, který neleží v rovině α ani β. Dokážeme, že X náleží kouli K. Rovina ω proložená bodem P a přímkou, která prochází bodem X a obsahuje dva různé vnitřní body kruhů o hranicích k, l — rozmyslete si (obr. 51), že taková přímka existuje — protíná kružnice k, l alespoň ve třech různých bodech T_1, T_2, T_3. Průnik množiny M s rovinou ω je (podle předpokladu) jistý kruh s hranicí m, který pochopitelně obsahuje body T_i ($i = 1, 2, 3$). Kdyby některý z bodů T_i ($i = 1, 2, 3$) ležel uvnitř tohoto kruhu, pak by byl vnitřním bodem tětivy, kterou by v tomto kruhu vytínala rovina α nebo β (totiž ta, v níž T_i leží). Celá tato tětiva náleží množině M (podle definice kružnice m) a tudíž leží v kruhu určeném kružnicí k (v α) nebo l (v β). Bod T_i by pak nemohl ležet na hranici příslušného kruhu. Proto body T_1, T_2, T_3 leží na kružnici m. To znamená, že kružnice m leží na povrchu koule K, načež celý kruh touto kružnicí určený (tj. průnik roviny ω s množinou M) náleží kouli K. Zejména také bod X leží v K, jak jsme chtěli dokázat.

Zatím tedy víme, že platí $M \subset K$. Předpokládejme, že některý bod Y z K nepatří do M. Rovina ABY protíná kouli K v kruhu a množinu M také v kruhu (neboť P leží na AB). Tyto dva kruhy mají společnou tětivu, takže kdyby nebyly totožné, obsahoval by každý z nich body nepatřící druhému (nakreslete si obrázek); některé body množiny M by pak ležely vně koule K, což, jak už víme, není možné. Proto oba uvažované kruhy splývají a Y patří do M. Platí tedy rovnost $M = K$ a věta je dokázána.

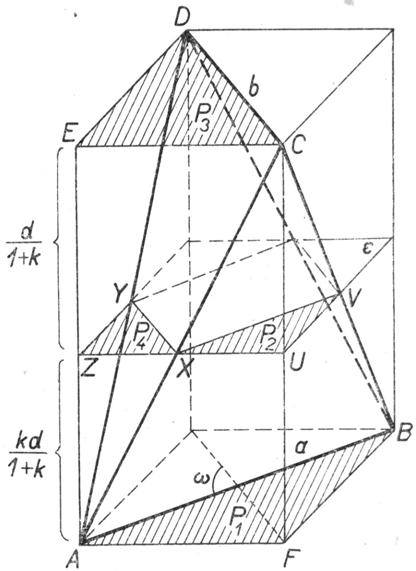
77

Označme délky hran $AB = a$, $CD = b$, d vzdálenost a ω odchylku mimoběžek AB, CD. Čtyřstěn $ABCD$ doplníme na rovnoběžnostěn, jak ukazuje obrázek 52; výsledný rovnoběžnostěn ovšem nemusí být kolmý. Hrany AB, CD čtyřstěnu jsou úhlopříčkami jeho podstav, rovina ε dělí rovnoběžnostěn ve dva rovnoběžnostěny; objem dolního (horního) označíme V_1 (V_2). Protože jejich výšky jsou po řadě $\dfrac{kd}{1+k}$, $\dfrac{d}{1+k}$ a protože oba rovnoběžnostěny mají podstavu téhož obsahu

$\frac{1}{2}ab \sin \omega$, platí

$$V_1 = \frac{kabd}{2(1+k)} \sin \omega,$$

$$V_2 = \frac{abd}{2(1+k)} \sin \omega.$$



Obr. 52.

Rovina ε rozdělí čtyřstěn $ABCD$ na dvě části; dolní dostaneme, když od dolního rovnoběžnostěnu oddělíme dva jehlany a dva komolé jehlany. Výška jehlanů je $\frac{kd}{1+k}$ a jejich podstavy mají týž obsah P_4; je to obsah trojúhelníku XYZ. Poněvadž trojúhelníky XYZ, CDE jsou stejnolehlé podle středu A $\left(\text{koeficient stejnolehlosti je } \frac{k}{1+k}\right)$, platí

$$P_4 = \left(\frac{k}{1+k}\right)^2 . P_3.$$

Součet objemů jehlanů je tedy

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{kd}{1+k} \left(\frac{k}{1+k}\right)^2 . P_3 = \frac{2}{3} d . \left(\frac{k}{1+k}\right)^3 . P_3. \qquad (1)$$

Oba komolé jehlany mají také výšku $\dfrac{kd}{1+k}$; jejich podstavy mají obsahy P_1 ($\triangle ABF$) a P_2 ($\triangle XVU$). Protože trojúhelníky XVU, ABF jsou stejnolehlé podle středu C $\left(\text{koeficient stejnolehlosti je } \dfrac{1}{1+k}\right)$, platí

$$P_2 = \left(\frac{1}{1+k}\right)^2 . P_1.$$

Součet objemů obou komolých jehlanů je tedy

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{kd}{1+k} \left[P_1 + \left(\frac{1}{1+k}\right) P_1 + \left(\frac{1}{1+k}\right)^2 P_1\right] =$$

$$= \frac{2d}{3} \cdot \frac{k(k^2 + 3k + 3)}{(1+k)^3} \cdot P_1. \qquad (2)$$

Objem V_1' dolní části dostaneme, odečteme-li od V_1 obě čísla (1), (2). Uvážíme-li, že

$$P_1 = P_3 = \frac{1}{4} ab \sin \omega,$$

bude

$$V_1' = \frac{2kd}{1+k} \cdot P_1 - \frac{2}{3} d \cdot \frac{k^3}{(1+k)^3} \cdot P_1 -$$

$$- \frac{2}{3} d . \frac{k(k^2 + 3k + 3)}{(1+k)^3} P_1 = \frac{2k^2 (k+3)}{3(1+k)^3} dP_1. \qquad (3)$$

Objem V_2' horní části dostaneme zřejmě, nahradíme-li ve výsledku (3) číslo k číslem $\frac{1}{k}$; po úpravě vyjde

$$V_2' = \frac{2(1+3k)}{3(1+k)^3}\, dP_1. \tag{4}$$

Z (3), (4) plyne

$$\frac{V_1'}{V_2'} = \frac{k^2(k+3)}{1+3k},$$

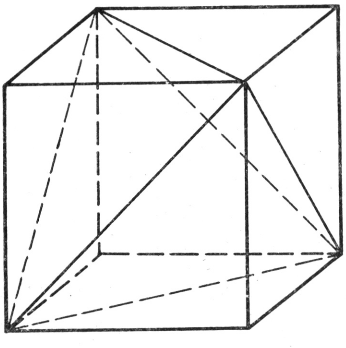
a to je poměr, který bylo třeba vypočítat.

Poznámka. Pro $k = 1$ dává výsledek úlohy 77 toto tvrzení: Rovina, která prochází středy dvou mimoběžných hran a středem jedné další hrany čtyřstěnu, dělí tento čtyřstěn na dvě části o stejném objemu.

78

Obr. 53 naznačuje rozklad krychle na pět čtyřstěnů. Dokážeme, že toto je nejmenší možný počet.

Nechť je krychle rozřezána na čtyřstěny. Žádná stěna krychle nemůže náležet jedinému z těchto čtyřstěnů a žádné dvě stěny čtyřstěnu nemohou ležet v rovnoběžných rovinách. Proto čtyřstěny jsou alespoň čtyři; dva s podstavami náležejícími jedné stěně krychle a dva s podstavami náležejícími protější stěně krychle. Lehce se však nahlédne, že součet objemů těchto čtyř čtyřstěnů



Obr. 53.

není větší než dvě třetiny objemu krychle. Existuje tedy ještě další — pátý — čtyřstěn.

P o z n á m k a. Všimněte si podobného triku v řešení úlohy 59.

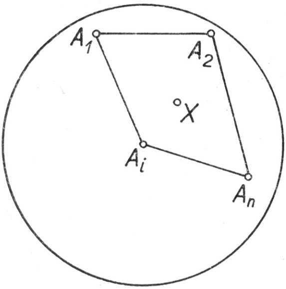
79

Buď X bod daného tělesa. Koule o středu A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) a poloměru d obsahuje všechny vrcholy a tudíž i bod X (proč?) — viz obr. 54. Pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ tedy platí

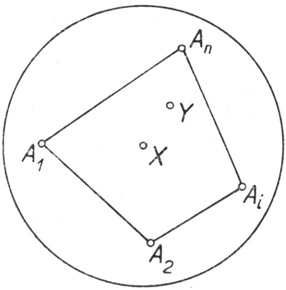
$$XA_i \leqq d. \tag{1}$$

Buďte nyní X, Y libovolné dva body daného tělesa. Koule o středu X a poloměru d obsahuje podle (1) všechny vrcholy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a tím i celé těleso, včetně bodu Y. Proto platí

$$XY \leqq d.$$



Obr. 54.



Obr. 55.

80

a) Nejprve si odvodíme p o m o c n o u v ě t u, kterou budeme v dalším potřebovat: Buď dán trojúhelník PQR. Potom množina všech bodů X v prostoru, pro něž platí

$$PX^2 + QR^2 = QX^2 + PR^2, \tag{1}$$

je rovina ϱ procházející bodem R a kolmá k přímce PQ.

Při důkazu této věty užijeme metody souřadnic. V prostoru zvolíme kartézskou soustavu tak, aby $P \equiv [0;\ 0;\ 0]$, $Q \equiv \equiv [t;\ 0;\ 0]$ $(t > 0)$, $R \equiv [r;\ s;\ 0]$, $X \equiv [x;\ y;\ z]$. Podmínku (1) pak vyjádříme ve tvaru

$$x^2 + y^2 + z^2 + (r - t)^2 + s^2 = \\ = (x - t)^2 + y^2 + z^2 + r^2 + s^2 \tag{2}$$

neboli

$$x = r. \tag{2'}$$

To znamená, že každý bod X, který splňuje podmínku (1), leží v rovině ϱ. Obráceně, každý bod $X \equiv [x;\ y;\ z]$ této roviny ϱ splňuje podmínku (2′) čili (2), tedy i (1). Pomocná věta je dokázána.

b) Nechť se nyní výšky čtyřstěnu $ABCD$ protínají v jednom bodě. Pak pravoúhlým průmětem vrcholu D na rovinu ABC je zřejmě průsečík výšek trojúhelníku ABC. Platí tedy $CD \perp \perp AB$ a přímkou CD lze proložit rovinu kolmou k přímce AB. Podle odst. a) splňuje bod D rovnost

$$AD^2 + BC^2 = BD^2 + AC^2.$$

Obdobně se dokáže, že také

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2. \tag{3}$$

Obráceně, platí-li (3), pak např. vrchol D leží v rovině procházející bodem A (B, C) a kolmé k přímce BC (CA, AB), tj. každé dvě mimoběžné hrany čtyřstěnu $ABCD$ jsou kolmé. To znamená, že pravoúhlý průmět bodu D na rovinu ABC leží na všech třech výškách trojúhelníku ABC a je to tedy průsečík výšek trojúhelníku ABC. Z toho vyplývá, že výšky čtyřstěnu $ABCD$, které procházejí vrcholy A, B, C, protínají výšku vedenou vrcholem D. Poněvadž označení vrcholů není v naší úloze podstatné, platí, že každé tři výšky čtyřstěnu $ABCD$ protínají jeho čtvrtou výšku. Čtyřstěn $ABCD$ je tedy ortocentrický (tzn. jeho výšky se protínají v jednom bodě).

Poznámka 1. Čtenář si možná všiml, že v našem řešení je vlastně obsažen i důkaz této věty: Čtyřstěn $ABCD$ je ortocentrický právě tehdy, platí-li $AB \perp CD$ a $AC \perp BD$; každé dvě mimoběžné hrany ortocentrického čtyřstěnu jsou navzájem kolmé. Dále, čtyřstěn je ortocentrický, právě když pravoúhlý průmět některého jeho vrcholu na rovinu protější stěny splývá s průsečíkem výšek této stěny. K tomu, aby čtyřstěn byl ortocentrický, zřejmě stačí (a je ovšem nutné), aby tři jeho výšky měly společný bod.

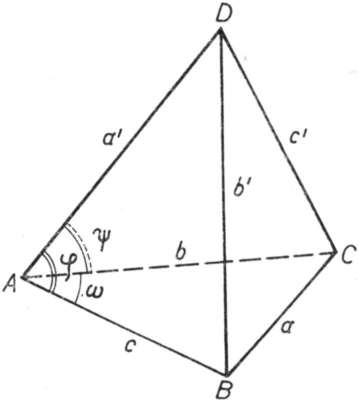
Poznámka 2. *Čtyřstěn je ortocentrický, právě když středy všech jeho hran leží na kulové ploše.* Střední příčky liboolnéhoí čtyřstěnu (tj. úsečky spojující středy protějších hranv)úmaj totiž vždy společný střed, neboť každé dvě z nich jsou hlopříčkami jistého rovnoběžníku. Je-li tedy čtyřstěn ortocentrický, jsou tyto tři rovnoběžníky pravoúhelníky, jak plyne z kolmosti mimoběžných hran, a každé dva z nich mají společnou úhlopříčku. Proto vrcholy těchto pravoúhelníků, tj. středy šesti hran čtyřstěnu, leží na kulové ploše. Obráceně, leží-li středy všech hran čtyřstěnu na kulové ploše, pak zmíněné tři rovnoběžníky jsou pravoúhelníky (neboť každý rovnoběžník, jemuž lze opsat kružnici, je pravoúhelník) a z toho plyne kolmost mimoběžných hran; podle pozn. 1 je pak takový čtyřstěn ortocentrický.

Poznámka 3. Buď dán ortocentrický čtyřstěn. Kulová plocha z pozn. 2 protíná rovinu každé stěny v tzv. kružnici devíti bodů příslušného trojúhelníku, neboť prochází středy jeho stran. Proto na této kulové ploše leží také paty výšek všech stěnových trojúhelníků a body, které půlí vzdálenosti vrcholů každé stěny od průsečíku výšek této stěny. Podle pozn. 2 a 4 je středem této kulové plochy těžiště čtyřstěnu.

Poznámka 4. Není těžké dokázat, že v libovolném čtyřstěnu je společný střed středních příček, o němž jsme se zmínili v pozn. 2, vždy zároveň těžištěm tohoto čtyřstěnu (každá přímka, která spojuje tento bod s vrcholem čtyřstěnu, protíná totiž každou těžnici protější stěny). Toto tvrzení má i zřejmý fyzikální smysl.

Poznámka 5. Ortocentrický čtyřstěn, s nímž jsme se seznámili v úloze 80, má řadu dalších zajímavých vlastností. Všimněme si zde např. rozložení případných neostrých úhlů jeho stěnových trojúhelníků. Platí: *V ortocentrickém čtyřstěnu všechny neostré úhly stěnových trojúhelníků leží při jednom vrcholu čtyřstěnu.*

Důkaz (obr. 56). Označíme-li $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $AD = a'$, $BD = b'$, $CD = c'$, platí podle předpokladu (resp. podle úlohy 80)



Obr. 56.

$$a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2. \tag{1}$$

Vyšetřujeme velikosti úhlů $\sphericalangle BAD = \varphi$, $\sphericalangle CAD = \psi$, $\sphericalangle BAC = \omega$. Podle kosinové věty platí

$$2a'c \cos \varphi = a'^2 + c^2 - b'^2, \tag{2}$$
$$2a'b \cos \psi = a'^2 + b^2 - c'^2, \tag{3}$$
$$2bc \cos \omega = b^2 + c^2 - a^2. \tag{4}$$

Z (1) však vyplývá

$$a'^2 - b'^2 + c^2 = b^2 + c^2 - a^2,$$
$$a'^2 - c'^2 + b^2 = b^2 + c^2 - a^2.$$

To znamená, že všechna čísla na pravých stranách ve vztazích (2), (3), (4) jsou stejná. Všechna tři čísla $\cos \varphi$, $\cos \psi$, $\cos \omega$ jsou tedy současně buď kladná nebo záporná nebo rovná nule. Všechny tři úhly φ, ψ, ω jsou proto současně buď ostré nebo tupé nebo pravé. Stejný výsledek platí i pro vrcholy B, C, D.

Má-li tedy některá stěna tupý resp. pravý vnitřní úhel, mají i ostatní dvě stěny při tomto vrcholu tupý resp. pravý úhel, načež všechny úhly při zbývajících vrcholech musejí být ostré. Z toho též vyplývá, že vždy buď jediná anebo všechny stěny ortocentrického čtyřstěnu jsou ostroúhlé trojúhelníky.

Poznámka 6. *Čtyřstěn $ABCD$ je ortocentrický, právě když existují čísla a, b, c, d tak, že*

$$AB^2 = a + b, \qquad AC^2 = a + c, \qquad AD^2 = a + d,$$
$$BC^2 = b + c, \qquad BD^2 = b + d, \qquad CD^2 = c + d.$$

Dokažme to pomocí výsledku úlohy 80. Nechť čtyřstěn $ABCD$ je ortocentrický. Položme $a = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$,

$b = \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 - AC^2)$, $c = \frac{1}{2}(AC^2 + BC^2 - AB^2)$,

$d = AD^2 - a$. Pak jsou splněny vztahy $AB^2 = a + b$, $AC^2 = a + c$, $BC^2 = b + c$, $AD^2 = a + d$. Zbylé dva vztahy pak plynou z toho, že podle úlohy 80 $BD^2 = AD^2 + BC^2 - AC^2 = a + d + b + c - a - c = b + d$, $CD^2 = AD^2 + BC^2 - AB^2 = a + d + b + c - a - b = d + c$.

Jsou-li obráceně splněny vztahy $AB^2 = a + b$ atd., pak $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 = a + b + c + d$ a podle výsledku úlohy 80 je čtyřstěn $ABCD$ ortocentrický.

Je zajímavé, že i *průsečíku výšek V ortocentrického čtyřstěnu $ABCD$ lze přiřadit číslo v tak, že navíc $AV^2 = a + v$, $BV^2 = b + v$, $CV^2 = c + v$, $DV^2 = d + v$.* Body A, B, C, D, V tedy vystupují „symetricky“, totiž v tom smyslu, že každý z nich je ortocentrem čtyřstěnu s vrcholy v ostatních čtyřech, pokud ovšem tyto čtyři body neleží v rovině. Lze dokázat, že z čísel a, b, c, d, v nejvýše jedno je rovné nule. Jsou-li všechna nenulová, je právě jedno záporné a ostatní kladná, a

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{v}=0.$$

81

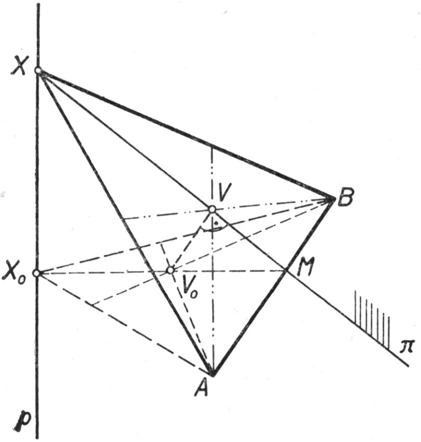
První řešení. Jsou-li přímky p, AB různoběžky, je hledaným geometrickým místem zřejmě buď celá přímka p s výjimkou průsečíku s přímkou AB (neprochází-li přímka p bodem A ani bodem B) anebo pouze bod A resp. B (jestliže jím přímka p prochází). V dalším budeme proto předpokládat, že přímky p, AB jsou mimoběžné.

Poněvadž platí $p \perp AB$, můžeme přímkou p proložit rovinu π kolmou k přímce AB; příslušný průsečík označme M. Je-li $M \equiv A$ nebo $M \equiv B$, jsou všechny vyšetřované trojúhelníky ABX pravoúhlé a hledané geometrické místo se skládá z jediného bodu M.

Nechť tedy platí $A \not\equiv M \not\equiv B$. Na přímce p můžeme zvolit (jediný) bod X_0 takový, že rovina ABX_0 je kolmá k přímce p. Průsečík V_0 výšek trojúhelníku ABX_0 náleží hledanému geometrickému místu a leží zřejmě v rovině π, nesplývá však s bodem M.

Vezměme nyní libovolný bod X přímky p různý od X_0 a označme V průsečík výšek trojúhelníku ABX (obr. 57). Výška trojúhelníku ABX spuštěná z vrcholu X je kolmá na přímku AB a leží proto v rovině π. To znamená, že i hledané geometrické místo bodů V leží v rovině π a je zřejmě souměrné podle roviny ABX_0. Bude-li se bod X vzdalovat po přímce p od bodu X_0, bude se bod V vzdalovat od bodu V_0. Bude-li však bod X již hodně daleko, budou úhly $\sphericalangle XAB$, $\sphericalangle XBA$ blízké pravým a bod V se bude zřejmě blížit (v rovině π)

k bodu M. Potřebujeme tedy zjistit, jakou dráhu v rovině π opisují body V. Vzhledem k názorné představě, kterou jsme právě naznačili, mohla by touto dráhou být např. kružnice nad průměrem V_0M — ovšem bez bodu M. Budeme se proto zajímat o úhel $\sphericalangle V_0VM$.



Především je jasné, že

$$V_0V \perp AB, \qquad (1)$$

neboť přímka V_0V leží v rovině π kolmé k přímce AB. Dále si všimněme, že přímka AV_0 je kolmá k přímce BX_0 a i k přímce p.

Obr. 57.

Proto je přímka AV_0 kolmá na rovinu pB a tudíž i na přímku BX, která v této rovině leží. Platí tedy

$$BX \perp AV_0. \qquad (2)$$

Z trojúhelníku ABX samozřejmě dostáváme, že

$$BX \perp AV. \qquad (3)$$

Ze vztahů (2) a (3) plyne, že přímka BX je kolmá na rovinu AV_0V, tedy i na přímku V_0V, tj.

$$V_0V \perp BX. \qquad (4)$$

Vztahy (1) a (4) však říkají, že přímka V_0V je kolmá na rovinu ABX. Odtud vychází

$$\sphericalangle V_0VM = 90°,$$

jak jsme očekávali.

Tím je dokázáno, že každý bod hledaného geometrického místa leží na kružnici k sestrojené v rovině π nad průměrem V_0M; bod M však leží na přímce AB a není tedy průsečíkem výšek žádného z vyšetřovaných trojúhelníků ABX (je totiž $A \neq M \neq B$).

Obráceně, zvolme na této kružnici k libovolný bod V různý od bodu M. Pak přímka MV protne přímku p v jistém bodě X. Rovina ABX nesplývá s rovinou π a proto kružnice k neleží v rovině ABX. Z toho plyne, že rovina ABX má s kružnicí k společné pouze dva body — V a M. Průsečík výšek trojúhelníku ABX leží v rovině ABX a podle předchozího též na kružnici k, přičemž je různý od bodu M. To znamená, že průsečíkem výšek trojúhelníku ABX musí být právě bod V.

Hledaným geometrickým místem jsou tedy všechny body kružnice k různé od bodu M.

D r u h é ř e š e n í (již jen pro případ, že přímky p, AB jsou mimoběžky). Stejně jako v prvém řešení sestrojíme body M, X_0. Předpokládejme, že platí $A \neq M \neq B$ (opačný případ je totiž snadný). Buď X libovolný bod přímky p, V průsečík výšek trojúhelníku ABX (obr. 57). Pro pravoúhlé trojúhelníky AMX, VMB platí

$$XM \perp BM, \quad XA \perp BV.$$

Proto $\sphericalangle AXM = \sphericalangle VBM$ a

$$\triangle AMX \sim \triangle VMB.$$

Z této podobnosti plyne

$$\frac{AM}{VM} = \frac{XM}{BM}$$

čili

$$MX \,.\, MV = MA \,.\, MB = k, \tag{1}$$

kde k je kladná konstanta. Speciálně i pro trojúhelník ABX_0, označíme-li jeho ortocentrum V_0, platí

$$MX_0 \,.\, MV_0 = k. \tag{1_0}$$

Budiž nyní $X \neq X_0$. Porovnáním výsledků (1), (1_0) dostaneme

$$\frac{MX}{MX_0} = \frac{MV_0}{MV}. \tag{2}$$

Leží-li bod M mezi body A, B (obr. 57), mají všechny vyšetřované trojúhelníky při vrcholech A, B ostré úhly. Bod V resp. V_0 leží proto v polorovině ABX resp. ABX_0, tj. na polopřímce MX resp. MX_0. Trojúhelníky XMX_0, V_0MV mají tedy při vrcholu M společný vnitřní úhel, takže z (2) plyne podobnost

$$\triangle XMX_0 \sim \triangle V_0MV.$$

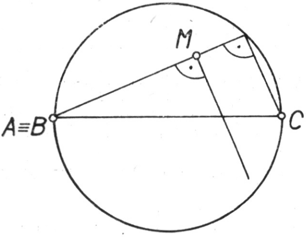
Poněvadž první z těchto trojúhelníků je pravoúhlý, je i druhý trojúhelník pravoúhlý a zřejmě platí

$$\sphericalangle V_0VM = 90°. \tag{3}$$

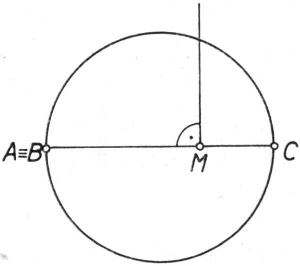
Padne-li bod M mimo úsečku AB, jsou všechny vyšetřované trojúhelníky tupoúhlé s tupým úhlem při vrcholu A nebo B (podle toho, zda bod M leží na prodloužení úsečky AB za bod A nebo B). Bod V resp. V_0 pak leží v polorovině opačné k polorovině ABX resp. ABX_0 a obdobně jako v předchozím odstavci se zjistí, že platí vztah (3).

Závěr se provede stejně jako v prvém řešení.

Vyšetřujeme nejdříve zvláštní případ, kdy bod A splývá s některým z bodů B, C, např. $A \equiv B$. Proložme přímkou BC libovolnou rovinu a hledejme v ní množinu všech bodů M, které jsou vrcholy pravých úhlů, jejichž jedno rameno prochází bodem $A \equiv B$ a druhé má s úsečkou BC společný aspoň jeden bod (obr. 58a, b). Vzhledem k Thaletově větě je touto množinou kruh sestrojený nad průměrem BC. Hledané geometrické místo bodů v prostoru dostaneme pak rotací tohoto kruhu kolem přímky BC; vyjde koule nad průměrem BC. Stejný výsledek bude i v případě $A \equiv C$.



Obr. 58a.



Obr. 58b.

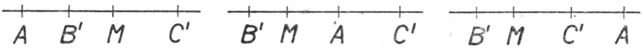
Až do konce řešení budeme tedy předpokládat, že bod A nesplývá s žádným z bodů B, C. Označíme Z — hledané geometrické místo bodů v prostoru; K_1 — kouli nad průměrem AB; K_2 — kouli nad průměrem AC; U — množinu těch bodů koulí K_1 a K_2, které neleží současně uvnitř obou koulí.

a) Dokážeme, že každý bod množiny Z náleží množině U. Bod A náleží množině Z i množině U. Nechť M je bod množiny Z různý od bodu A. Pak existuje pravý úhel s vrcholem M a ramenem MA, jehož druhé rameno prochází jistým bodem úsečky BC (který může splývat s bodem M). Označme B', C' pravoúhlé průměty bodů B, C na přímku AM. Bod B' leží na povrchu koule K_1, neboť buď splývá s některým z bodů A, B anebo je vrcholem pravého úhlu $\sphericalangle AB'B$, jehož ramena procházejí krajními body průměru AB koule K_1. Obdobně bod C' leží na povrchu koule K_2.

Je-li $B' \equiv C'$, pak celá úsečka BC se promítá do jediného bodu a je také $M \equiv B' \equiv C'$. To však znamená, že bod M patří do množiny U.

Jestliže $B' \not\equiv C'$, pak bod M náleží úsečce $B'C'$. Je-li $A \equiv C'$, pak M je bodem koule K_1, neboť náleží tětivě AB' této koule, ale není vnitřním bodem koule K_2, neboť úsečka $B'C'$ je kolmá k průměru AC koule K_2, takže má s ní jediný společný bod $C' \equiv A$; bod M tedy opět patří do množiny U. Obdobně se vyřídí případ $A \equiv B'$. Je-li konečně bod A různý od B' i C', pak úsečka AB' je tětiva koule K_1 a úsečka AC' je tětiva koule K_2. Bod M úsečky $B'C'$ leží buď na úsečce AB' nebo na úsečce AC', avšak nemůže ležet současně uvnitř obou těchto úseček (obr. 59a, b, c). Proto bod M náleží množině U.

Tím jsme dokázali inkluzi $Z \subset U$.



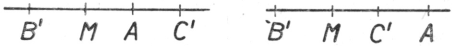
Obr. 59a, b, c.

b) Dokažme nyní obrácenou inkluzi $U \subset Z$. Již jsme řekli, že bod A patří do U i do Z. Vezměme tedy libovolný bod M množiny U, který je různý od bodu A. Pak bod M leží např. v kouli K_1, takže náleží jisté tětivě AB' této koule. Bod B' je pravoúhlým průmětem bodu B na přímku AM, neboť není-li přímo $B' \equiv B$, je úhel $\sphericalangle BB'A$ pravý podle Thaletovy věty. Pravoúhlý průmět bodu C na přímku AM označme C'; bod C' leží na povrchu koule K_2.

Je-li $C' \equiv A$, pak bod M úsečky $B'C'$ je pravoúhlým průmětem nějakého bodu úsečky BC.

Jestliže $C' \neq A$, pak bod M neleží uvnitř obou úseček AB', AC', neboť jinak by ležel uvnitř K_1 i K_2. Z toho vyplývá (obr. 60a, b), že bod M (úsečky AB') leží na úsečce $B'C'$ a je tedy opět pravoúhlým průmětem nějakého bodu úsečky BC (rozumí se, že promítáme stále na přímku AM).

Z a), b) plyne, že bodové množiny Z a U jsou totožné. Tím je úloha vyřešena.



Obr. 60a, b.

83

Obr. 61. Veďme bodem A přímku $p \parallel MB$ a označme X její průsečík s rovinou MCD. Buďte A_1, B_1 pravoúhlé průměty bodů A, B na rovinu MCD. Zřejmě platí

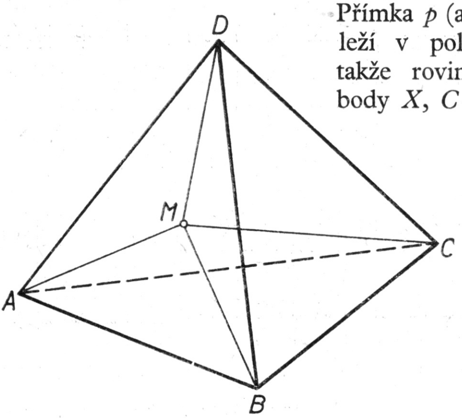
$$\frac{AX}{BM} = \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{V_B}{V_A}.$$

Poněvadž rovina MCD odděluje body A, B, jsou vektory $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{MB}$ souhlasně rovnoběžné a máme

$$\overrightarrow{AX} = \frac{V_B}{V_A} \cdot \overrightarrow{MB}. \qquad (1)$$

Veďme dále bodem X přímku $q \parallel MC$ a označme Y její průsečík s rovinou MBD. Buďte C_1, X_1, A_2 pravoúhlé průměty bodů C, X, A na rovinu MBD; poněvadž $AX \parallel MB$, máme $XX_1 = AA_2$. Nyní platí

$$\frac{XY}{CM} = \frac{XX_1}{CC_1} = \frac{AA_2}{CC_1} = \frac{V_C}{V_A}.$$



Přímka p (a tedy i její bod X) leží v poloprostoru $MBDA$, takže rovina MBD odděluje body X, C a můžeme psát

Obr. 61.

$$\overrightarrow{XY} = \frac{V_C}{V_A} \cdot \overrightarrow{MC}. \tag{2}$$

Přímka q leží v rovině MCD, neboť v této rovině leží její bod X a je $q \parallel MC$. Proto i bod Y (přímky q) leží v rovině MCD. Avšak (podle konstrukce) Y leží také v rovině MBD. Z toho plyne, že Y leží na přímce MD. Označme nyní D_1, Y_1, X_2, A_3 pravoúhlé průměty bodů D, Y, X, A na rovinu MBC. Protože body X, Y leží na přímce $q \parallel MC$, máme $YY_1 = XX_2$, a protože $p \equiv AX \parallel MB$, je také $XX_2 = AA_3$; z toho vyplývá, že $YY_1 = AA_3$. Poněvadž body Y, M, D leží na jedné přímce, platí

$$\frac{YM}{DM} = \frac{YY_1}{DD_1} = \frac{AA_3}{DD_1} = \frac{V_D}{V_A}.$$

Jelikož vektory $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{MB}$ jsou souhlasně rovnoběžné, leží oba body X, B v témž poloprostoru určeném rovinou MAC, tj. v $MACB$. Proto i přímka $q \parallel MC$ (a procházející bodem X) leží v tomto poloprostoru, takže její bod Y (o němž už víme, že leží na přímce MD) je oddělen bodem M od bodu D. Tak můžeme psát

$$\overrightarrow{YM} = \frac{V_D}{V_A} \cdot \overrightarrow{MD}. \tag{3}$$

Vzhledem k výsledkům (1), (2), (3) nakonec dostáváme

$$V_A \,.\, \overrightarrow{MA} + V_B \,.\, \overrightarrow{MB} + V_C \,.\, \overrightarrow{MC} + V_D \,.\, \overrightarrow{MD} =$$

$$= V_A \,.\, \left(\overrightarrow{MA} + \frac{V_B}{V_A} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{V_C}{V_A} \cdot \overrightarrow{MC} + \frac{V_D}{V_A} \cdot \overrightarrow{MD} \right) =$$

$$= V_A \,.\, (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YM}).$$

Vektor v poslední závorce je však zřejmě nulový.

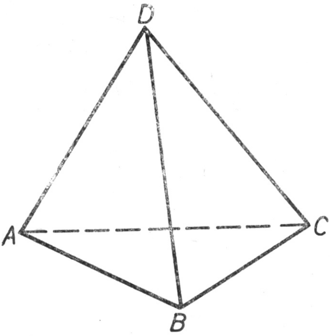
Poznámka. Čtenáře znající základy geometrie n-rozměrného euklidovského prostoru E_n upozorňujeme na analogické tvrzení pro n-rozměrný simplex (místo čtyřstěnu nebo trojúhelníku). Jedna věta z teorie konvexity umožňuje i rychlejší důkaz indukcí vzhledem k n.

84

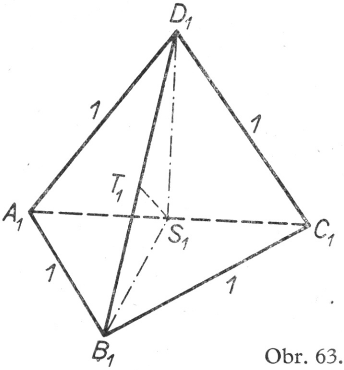
Abychom se mohli stručněji vyjadřovat, budeme každý čtyřstěn, jehož čtyři hrany, z nichž žádné tři neleží v rovině, mají délku 1, nazývat jednotkový.

Ukažme nejprve, že má-li nějaký jednotkový čtyřstěn tu vlastnost, že odchylka stěn proti některé z obou zbývajících hran není rovna 90°, pak existuje jednotkový čtyřstěn, který má větší objem.

Nechť tedy ve čtyřstěnu $ABCD$ platí $AB = BC = CD = DA = 1$ a nechť např. úhel proti hraně AC (tj. úhel rovin ABD, CBD) není pravý (obr. 62). Objem tohoto čtyřstěnu je $\frac{1}{3} Pv$, kde P je obsah trojúhelníku ABD a v výška spuštěná



Obr. 62.



Obr. 63.

z vrcholu C na stěnu ABD. Otočme rovinu CBD okolo přímky BD do polohy kolmé k rovině ABD. Při tomto otočení přejde bod C v bod C', jehož vzdálenost v' od roviny ABD je větší než v. Čtyřstěn $ABC'D$ je opět jednotkový a jeho objem je $\frac{1}{3}Pv' > \frac{1}{3}Pv$, což jsme chtěli ukázat.

Předpokládejme, že ve čtyřstěnu $A_1B_1C_1D_1$ platí $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1A_1 = 1$ a přitom úhly proti zbývajícím hranám A_1C_1, B_1D_1 jsou pravé (obr. 63). Označme S_1 střed hrany A_1C_1 a T_1 střed hrany B_1D_1. Nyní B_1S_1 je výška rovnoramenného trojúhelníku $A_1B_1C_1$ a je tedy kolmá na jeho základnu A_1C_1 (obr. 63). Obdobně D_1S_1 je výška rovnoramenného trojúhelníku $A_1D_1C_1$ kolmá na jeho základnu A_1C_1. Protože tyto dva trojúhelníky jsou zřejmě shodné, platí $B_1S_1 = D_1S_1$, a poněvadž roviny $A_1C_1B_1$, $A_1C_1D_1$ jsou navzájem kolmé, je $\sphericalangle B_1S_1D_1 = 90°$. Trojúhelník $B_1S_1D_1$ je tedy pravoúhlý a rovnoramenný (s pravým úhlem při vrcholu S_1) a úsečka S_1T_1 je jeho výška. Podobně se ukáže, že úsečka S_1T_1 je také výška pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku $A_1T_1C_1$ (s pravým úhlem při vrcholu T_1). Z toho vyplývá, že úsečky A_1S_1, S_1T_1,

T_1B_1 jsou stejně dlouhé a po dvou navzájem kolmé. Protože podle Pythagorovy věty

$$1 = A_1B_1 = \sqrt{A_1S_1^2 + S_1T_1^2 + T_1B_1^2} = A_1S_1\sqrt{3},$$

je

$$A_1S_1 = S_1T_1 = T_1B_1 = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

a rovněž

$$C_1S_1 = D_1T_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Je ihned zřejmé, že jsou-li obráceně p, q kolmé mimoběžky, jejichž nejkratší (ke každé z nich kolmá) příčka S_2T_2 (kde S_2 je na p, T_2 na q) má délku $\frac{\sqrt{3}}{3}$, pak body A_2, C_2 ležící ve vzdálenosti $\frac{\sqrt{3}}{3}$ od bodu S_2 na p a body B_2, D_2 ležící ve vzdálenosti $\frac{\sqrt{3}}{3}$ od bodu T_2 na q tvoří vrcholy jednotkového čtyřstěnu, proti jehož zbylým hranám A_2C_2, B_2D_2 jsou pravé úhly.

Z provedené analýzy vyplývá, že skutečně existuje čtyřstěn $A_1B_1C_1D_1$ s vlastnostmi popsanými na začátku předchozího odstavce, a je až na polohu v prostoru určen jednoznačně. Zbývá vypočítat jeho objem (obr. 63). Obsah trojúhelníku $B_1S_1D_1$ je $B_1T_1 \,.\, S_1T_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}$. Poněvadž úsečka $A_1S_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ je zřejmě kolmá na rovinu $B_1S_1D_1$, je objem čtyřstěnu $A_1B_1S_1D_1$ roven číslu $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{27}$. Objem čtyřstěnu $A_1B_1C_1D_1$ je pak zřejmě dvojnásobný, tj. $\frac{2}{27}\sqrt{3}$.

Úloha je rozřešena.

Budiž $ABCD$ čtyřstěn, jehož hrany mají délky $AB = 2x \leqq 1$, $AC \leqq 1$, $AD \leqq 1$, $BC \leqq 1$, $BD \leqq 1$, $CD > 1$. Označme u, v délky výšek trojúhelníků ABC, ABD, spuštěných na stranu AB.

V rovině stěny ABC náleží vrchol C průniku jednotkových kruhů se středy A, B; tato oblast je znázorněna na obr. 64.

Zavedeme-li označení bodů podle obr. 64, bude

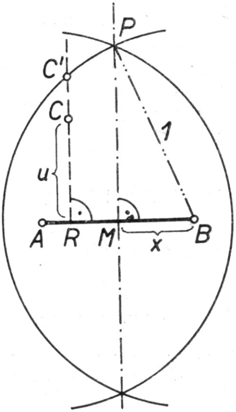
$$u = CR \leqq C'R \leqq PM = \sqrt{1 - x^2},$$

tedy

$$u \leqq \sqrt{1 - x^2}. \qquad (1)$$

Obdobně z trojúhelníku ABD odvodíme, že

$$v \leqq \sqrt{1 - x^2}. \qquad (2)$$



Obr. 64.

Protože výška čtyřstěnu $ABCD$ spuštěná z vrcholu D má nejvýše velikost v, platí pro objem y čtyřstěnu $ABCD$ odhad

$$y \leqq \frac{1}{3} xuv.$$

Užitím (1) a (2) dostaneme

$$y \leqq \frac{1}{3}(x - x^3). \qquad (3)$$

Vyšetřujme funkci $\frac{1}{3}(x - x^3)$ pro $0 < x \leqq \frac{1}{2}$. Vezměme dvě čísla $x_1 < x_2$ z uvažovaného intervalu a porovnejme příslušné funkční hodnoty:

$$\frac{1}{3}(x_2 - x_2^3) - \frac{1}{3}(x_1 - x_1^3) =$$

$$= \frac{1}{3}(x_2 - x_1)(1 - x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2) \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{3}(x_2 - x_1)\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{12}(x_2 - x_1) > 0,$$

takže

$$\frac{1}{3}(x_2 - x_2^3) > \frac{1}{3}(x_1 - x_1^3).$$

Tím jsme dokázali, že pravá strana (3) je v uvažovaném intervalu $0 < x \leqq \frac{1}{2}$ rostoucí funkce. Její největší hodnotu dostaneme pro $x = \frac{1}{2}$; vyjde právě $\frac{1}{8}$. To znamená, že vždy platí

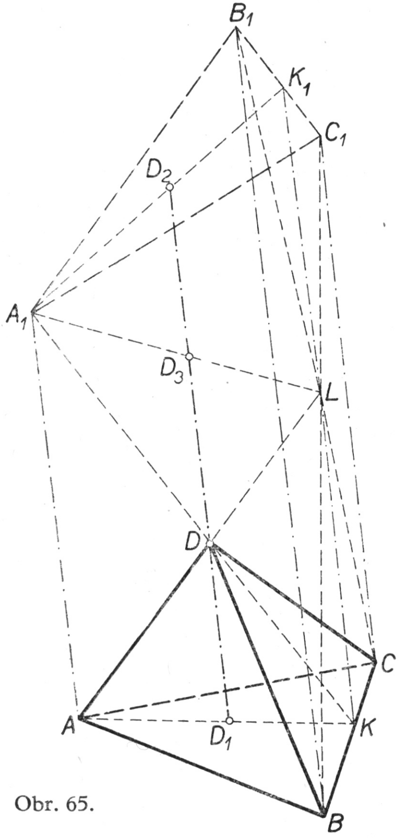
$$y \leqq \frac{1}{8}.$$

Čtyřstěn, jehož hrany mají délky $AB = AC = AD = BC = BD = 1$ a jehož stěny ABC, ABD jsou navzájem kolmé, má objem $\frac{1}{8}$ a jeho hrana CD má délku $\frac{\sqrt{6}}{2} > 1$.

Tvrzení vyslovené v úloze je dokázáno a zároveň je ověřeno, že existuje čtyřstěn maximálního objemu $\frac{1}{8}$.

Cvičení. Řešte obdobnou metodou příkl. 84 (označte $AC = 2x$, φ odchylku rovin ACB, ACD).

První řešení. Sestrojme si nejprve náčrtek (obr. 65). Vztahy, jichž si přitom všimneme, pomohou nám potom dokázat tvrzení úlohy. Jak sestrojíme bod A_1? Podle zadání úlohy leží tento bod jednak na rovnoběžce s DD_1 vedené bodem A, tedy též v rovině AD_1D, jednak v rovině BCD. Bod A_1 proto leží na průsečnici rovin AD_1D, BCD a touto průsečnicí je zřejmě přímka DK, kde K je bod, v němž přímka AD_1 protíná úsečku BC. Bod A_1 najdeme tedy jako průsečík přímky DK s rovnoběžkou s DD_1 vedenou bodem A. Zároveň je vidět, že bod D odděluje body A_1, K, neboť bod D_1 odděluje body A, K a je $AA_1 \parallel DD_1$. Obdobně sestrojíme i body B_1, C_1; tyto konstrukce nejsou v obr. 65 naznačeny, aby bylo možno lépe sledovat další úvahy. Body A_1, B_1, C_1 leží tedy uvnitř poloprostoru $ABCD$, nikoli v jedné přímce (neboť je $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$), takže skutečně vzniká čtyřstěn $A_1B_1C_1D_1$. Přímka D_1D



Obr. 65.

protíná rovinu $A_1B_1C_1$ v jistém bodě D_2. Tato přímka leží v rovině ADK, proto bod D_2 najdeme jako průsečík přímky D_1D s přímkou A_1K_1, kde K_1 je průsečík roviny ADK s úsečkou B_1C_1, tj. takový bod úsečky B_1C_1, že platí $KK_1 \parallel D_1D$. Bod D_2 leží tedy uvnitř trojúhelníku $A_1B_1C_1$.

Trojúhelníky AD_1D_2, $A_1D_2D_1$ mají týž obsah, neboť mají společnou stranu D_1D_2 a platí $AA_1 \parallel D_1D_2$. Oba trojúhelníky leží v jedné rovině a body B, B_1 mají od této roviny stejnou vzdálenost, neboť přímka BB_1 je s touto rovinou rovnoběžná. Proto čtyřstěny ABD_1D_2 a $A_1B_1D_2D_1$ mají stejný objem. Rovněž čtyřstěny BCD_1D_2, $B_1C_1D_2D_1$ a také CAD_1D_2, $C_1A_1D_2D_1$ mají stejné objemy. Sjednocením čtyřstěnů ABD_1D_2, BCD_1D_2, CAD_1D_2 vznikne čtyřstěn $ABCD_2$ a sjednocením čtyřstěnů $A_1B_1D_2D_1$, $B_1C_1D_2D_1$, $C_1A_1D_2D_1$ je čtyřstěn $A_1B_1C_1D_1$. Objem čtyřstěnu $A_1B_1C_1D_1$ se proto rovná objemu čtyřstěnu $ABCD_2$.

Stačilo by dokázat, že objem daného čtyřstěnu $ABCD$ je roven jedné třetině objemu čtyřstěnu $ABCD_2$. Tyto dva čtyřstěny mají společnou podstavu ABC a body D_1, D, D_2 leží v přímce. Proto se poměr jejich objemů rovná poměru délek úseček D_1D a D_1D_2. Potřebovali bychom tedy dokázat, že platí $D_1D_2 = 3 \,.\, D_1D$.

Čtyřúhelník BCC_1B_1 je lichoběžník nebo rovnoběžník (platí $BB_1 \parallel CC_1$) a úsečka KK_1 je jeho příčka rovnoběžná se stranami BB_1, CC_1. Úhlopříčka BC_1 leží (podle konstrukce bodu C_1) v rovině ABD a druhá úhlopříčka CB_1 leží v rovině ACD. Průsečík L úhlopříček BC_1, CB_1 náleží tudíž průsečnici AD těchto rovin. Přímka AD však protíná rovinu čtyřúhelníku BCC_1B_1 v bodě, který náleží přímce KK_1 (obr. 65). Z toho plyne že příčka KK_1 prochází průsečíkem úhlopříček, který ji tudíž půlí (to je známá vlastnost lichoběžníku resp. rovnoběžníku). Bod L je tedy středem úsečky KK_1, takže úsečka A_1L je těžnicí v trojúhelníku KA_1K_1. Příčka DD_2 tohoto trojúhelníku je rovnoběžná se stranou KK_1, a proto její střed D_3 leží na těžnici A_1L, tj. $DD_3 = D_3D_2$.

Všimněme si dále, že čtyřúhelník $AKLA_1$ je také lichoběžník nebo rovnoběžník (platí $AA_1 \parallel KL$) a průsečíkem jeho úhlopříček je bod D (obr. 65). Proto je bod D středem příčky D_1D_3, která jím prochází a je rovnoběžná se stranami AA_1, KL. Platí tedy $DD_1 = DD_3$.

Ze závěrů posledních dvou odstavců vyplývá, že skutečně platí $D_1D_2 \doteq 3 \,.\, D_1D$.

Druhé řešení. Stejně jako na začátku prvého řešení sestrojíme body A_1, B_1, C_1, D_2 a ověříme, že čtyřstěn $A_1B_1C_1D_1$ skutečně existuje.

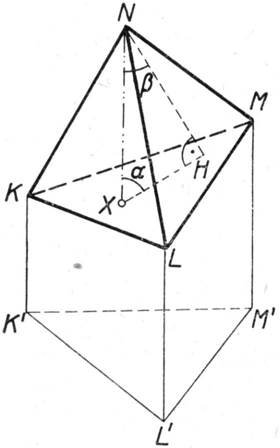
Poněvadž platí $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, mají trojúhelníky ABC a $A_1B_1C_1$ týž pravoúhlý průmět na rovinu kolmou k přímce DD_1. Poměr objemů čtyřstěnů $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ je pak roven poměru délek úseček DD_1, D_1D_2, jak vyplývá z tohoto tvrzení:

Buď $KLMN$ čtyřstěn a X libovolný bod roviny KLM. Pak objem tohoto čtyřstěnu je roven jedné třetině součinu délky úsečky NX a obsahu pravoúhlého průmětu $K'L'M'$ trojúhelníku KLM na rovinu kolmou k přímce NX.

Důkaz (obr. 66). Objem

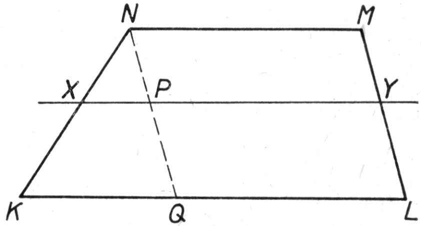
$$KLMN = \frac{1}{3} \,.\, \text{obsah } KLM \,.$$

$NX \,.\, \sin\alpha$, kde α je odchylka přímky NX od roviny KLM ($NX \,.\, \sin\alpha$ je totiž délka výšky NH čtyřstěnu $KLMN$). Dále obsah $K'L'M'$ = obsah KLM . $\cos\beta$, kde β je odchylka rovin KLM, $K'L'M'$. Tento vzorec je zřejmý, je-li jedna strana troj-



Obr. 66.

úhelníku KLM rovnoběžná s rovinou $K'L'M'$; není-li tomu tak, můžeme (dokažte!) trojúhelník KLM rozdělit rovinou rovnoběžnou s $K'L'M'$ a procházející jedním jeho vrcholem na dva trojúhelníky, takže každý z nich bude mít jednu stranu rovnoběžnou s rovinou $K'L'M'$ a sjednocením jejich průmětů tude trojúhelník $K'L'M'$. Odchylka rovin KLM, $K'L'M'$ se však rovná odchylce přímek NH, NX k nim kolmých. Proto $\cos \beta = \sin \alpha$ a platí, že objem $KLMN = \frac{1}{3} \,.\, NX \,.$ obsah $K'L'M'$.



Obr. 67.

V dalším budeme potřebovat ještě toto **pomocné tvrzení** (obr. 67): Nechť $KLMN$ je lichoběžník nebo rovnoběžník ($KL \parallel MN$) a XY jeho příčka rovnoběžná se stranami KL, MN (X leží mezi vrcholy K, N). Pak platí

$$XY = \frac{KX \,.\, NM + NX \,.\, KL}{KN}.$$

Tento vzorec plyne z úměry $XP : KQ = NX : NK$ vyjadřující podobnost trojúhelníků NXP, NKQ; na obr. 67 je $PQ \parallel LM$.

Potřebujeme nyní vypočítat poměr úseček DD_1 a D_1D_2. Zaveďme označení bodů podle obr. 68. Z lichoběžníku resp. rovnoběžníku PP_1C_1C užitím vzorečku odvozeného v předchozím odstavci vypočteme

$$D_1D_2 = \frac{D_1C \,.\, PP_1 + D_1P \,.\, CC_1}{PC}. \tag{1}$$

Obdobně ze čtyřúhelníku AA_1B_1B dostaneme

$$PP_1 = \frac{PB \, . \, AA_1 + PA \, . \, BB_1}{AB}. \tag{2}$$

Dosaďme z (2) do (1):

$$D_1D_2 = \frac{D_1C \, . \, PB}{PC \, . \, AB} \cdot AA_1 + \frac{D_1C \, . \, PA}{PC \, . \, AB} \cdot BB_1 + \frac{D_1P}{PC} \cdot CC_1. \tag{3}$$

Ze stejnolehlých trojúhelníků MAA_1 a MD_1D vypočteme

$$AA_1 = \frac{AM}{D_1M} \, . \, D_1D$$

a obdobně platí

$$BB_1 = \frac{BN}{D_1N} \, . \, D_1D, \qquad CC_1 = \frac{CP}{D_1P} \, . \, D_1D.$$

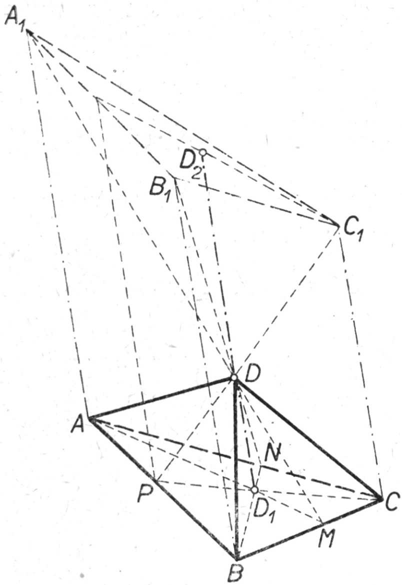
Dosadíme-li tyto tři výsledky do (3), obdržíme vztah

$$\frac{D_1D_2}{D_1D} = \frac{D_1C \, . \, PB \, . \, AM}{PC \, . \, AB \, . \, D_1M} + \frac{D_1C \, . \, PA \, . \, BN}{PC \, . \, AB \, . \, D_1N} + \frac{D_1P \, . \, CP}{PC \, . \, D_1P}. \tag{4}$$

Každý ze tří sčítanců na pravé straně v (4) se však rovná 1. Pro první a druhý výraz to plyne z Menelaovy věty (viz pozn. za řešením úlohy 73) užité pro trojúhelník D_1PA a přímku BC, resp. pro trojúhelník D_1PB a přímku AC (obr. 68); pro třetí výraz je to zřejmé. Platí tedy

$$\frac{D_1D_2}{D_1D} = 3$$

a úloha je rozřešena.



Zabývejme se nejprve zvláštním případem, kdy uvažované čtyři body jsou vrcholy daného čtyřstěnu $ABCD$. Předpoklad úlohy v tomto případě znamená, že všechny čtyři výšky našeho čtyřstěnu jsou stejně dlouhé. Ze vzorce pro objem potom vyplývá, že všechny stěny čtyřstěnu $ABCD$ mají týž obsah.

Pokusme se tedy dokázat toto tvrzení: Mají-li stěny čtyřstěnu $ABCD$ týž obsah, pak jsou to shodné trojúhelníky.

Obr. 68.

Důkaz (obr. 69). Proložme přímkou AB rovinu α rovnoběžnou s přímkou CD. Jsou-li C_1, D_1 pravoúhlé průměty bodů C, D na rovinu α, platí

$$CC_1 = DD_1. \tag{1}$$

Označme dále C_2, D_2 pravoúhlé průměty bodů C, D na přímku AB. Poněvadž trojúhelníky ABC, ABD mají týž obsah a společnou stranu AB, platí

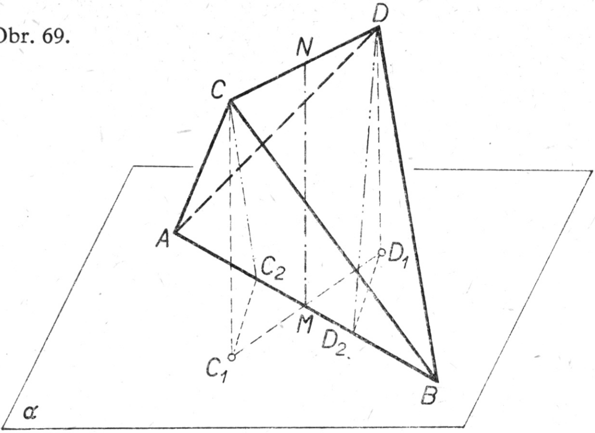
$$CC_2 = DD_2. \tag{2}$$

Z (1) a (2) vyplývá (obr. 69), že také

$$C_1C_2 = D_1D_2. \tag{3}$$

To znamená, že body C_1, D_1 mají stejnou vzdálenost od přímky AB a leží tedy uvnitř dvou navzájem opačných polorovin

Obr. 69.



vyťatých v rovině α přímkou AB (jinak by totiž bylo $AB \parallel C_1D_1 \parallel CD$, což není možné). Z (3) pak vyplývá, že střed M úsečky C_1D_1 leží na přímce AB.

Představme si nyní rovinu γ proloženou přímkou CD rovnoběžně s přímkou AB. Označme N střed úsečky CD a A_1, B_1 pravoúhlé průměty bodů A, B na rovinu γ. Úsečka MN je střední příčka v pravoúhelníku CC_1D_1D (obr. 69), a je proto kolmá k oběma rovnoběžným rovinám α, γ. Pravoúhlým průmětem bodu M na rovinu γ je tedy bod N. Obdobně jako v předchozím odstavci lze dokázat, že přímky A_1B_1 a CD mají jediný společný bod — střed úsečky A_1B_1. Avšak jediný bod přímky AB, jehož průmět padne na přímku CD, je zřejmě bod M. Proto je bod N středem úsečky A_1B_1 a z pravoúhelníku AA_1B_1B plyne, že M je střed úsečky AB.

Poněvadž tedy bod M je středem úsečky AB, platí

$$AC_2 = BD_2; \tag{4}$$

není-li totiž přímo $C_2 \equiv D_2 \equiv M$, je bod M středem úsečky C_2D_2, jak je vidět z rovnoběžníku $C_1C_2D_1D_2$ (obr. 69).

Vzhledem k (2) a (4) dostáváme rovnost

$$AC = BD$$

(obr. 69). Obdobně lze dokázat rovnosti

$$AB = CD,\ AD = BC$$

a tím i naše tvrzení.

Buďte nyní A_1, B_1, C_1, D_1 čtyři body daného čtyřstěnu $ABCD$, které neleží v jedné rovině a které mají stejný součet vzdáleností od rovin

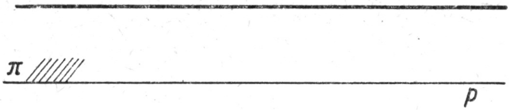
$$ABC, BCD, CDA, DAB. \tag{5}$$

Má-li být tvrzení úlohy pravdivé, musí mít všechny čtyři výšky čtyřstěnu $ABCD$ tutéž délku, jak vyplývá ze vzorce pro objem. Naopak, kdyby se nám podařilo ukázat, že z předpokladů úlohy plyne rovnost výšek daného čtyřstěnu, byla by úloha vzhledem k prvé části řešení dokázána. K tomu je však třeba si uvědomit, jak se mění vzdálenost bodu od daných rovin, pohybuje-li se tento bod po nějaké přímce.

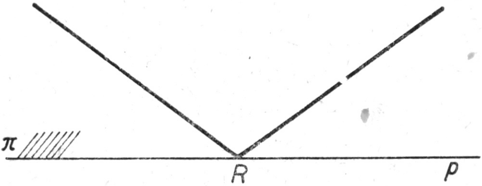
Nechť tedy p je daná přímka. Představme si polorovinu π s hraniční přímkou p. V této polorovině budeme znázorňovat vzdálenosti resp. součty vzdáleností bodů přímky p od daných rovin.

Vezměme nejprve jednu rovinu ϱ. Je-li $p \parallel \varrho$, mají všechny body přímky p stejnou vzdálenost od roviny ϱ; příslušným grafem v polorovině π je rovnoběžka s přímkou p (obr. 70a). Je-li však přímka p různoběžná s rovinou ϱ, bude naším grafem v polorovině π zřejmě lomená čára, jak ukazuje obr. 70b, kde R je průsečík přímky p s rovinou ϱ; přitom obě polopřímky této lomené čáry svírají s přímkou p týž ostrý úhel.

Přidejme nyní další rovinu σ a sestrojme v polorovině π opět graf vzdáleností bodů přímky p od roviny σ. Dostaneme zase buď rovnoběžku s přímkou p nebo lomenou čáru složenou ze dvou polopřímek a s vrcholem v bodě S — průsečíku přímky p s rovinou σ.



Obr. 70a.



Obr. 70b.

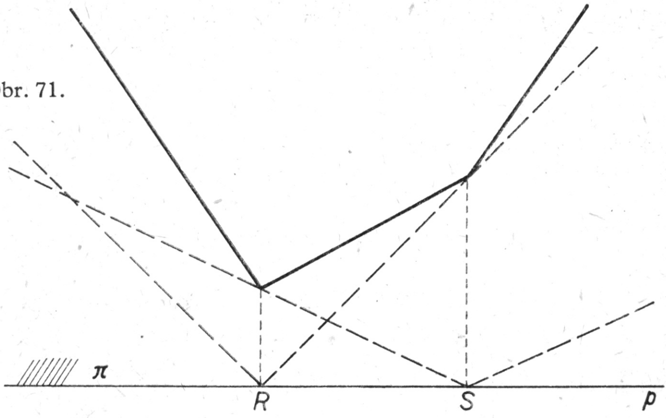
Co bude grafem součtu vzdáleností bodů přímky p od rovin ϱ, σ? Z posledních dvou odstavců vyplývají čtyři možnosti:

a) je-li $p \parallel \varrho \parallel \sigma$, bude grafem rovnoběžka s přímkou p;
b) je-li $p \parallel \varrho$, ale $p \,.\, \sigma \equiv S$, bude grafem lomená čára složená ze dvou polopřímek a s vrcholem „nad“ bodem S;
c) případ $p \,.\, \varrho \equiv R$, $p \parallel \sigma$ je podobný případu b);
d) konečně v případě $p \,.\, \varrho \equiv R$, $p \,.\, \sigma \equiv S$ bude grafem opět lomená čára složená ze dvou polopřímek a jedné (je-li $R \not\equiv S$) resp. žádné (je-li $R \equiv S$) úsečky a vrcholy této lomené čáry zase odpovídají bodům R, S, viz např. obr. 71.

Obdobně, přidáme-li další roviny, bude grafem součtu vzdáleností bodů přímky p od všech těchto rovin buď rovnoběžka s přímkou p anebo lomená čára složená ze dvou polopřímek a konečného počtu úseček. Vrcholy této lomené čáry odpovídají průsečíkům přímky p s danými rovinami. Z toho zejména vyplývá toto tvrzení: Jestliže krajní body některé úsečky přímky p nejsou odděleny žádnou z daných rovin (takže „mezi nimi“ není žádný vrchol lomené čáry), pak grafem součtu vzdáleností bodů této úsečky od daných rovin je jistá úsečka.

Důsledek: Mají-li dva různé body takové úsečky přímky p stejný součet vzdáleností od uvažovaných rovin, pak všechny body této úsečky mají týž součet vzdáleností od těchto rovin.

Obr. 71.



Všechny body ležící na hranách čtyřstěnu $A_1B_1C_1D_1$ mají tedy stejný součet vzdáleností od rovin (5), neboť žádná z těchto rovin neodděluje žádné dva ze čtyř bodů A_1, B_1, C_1, D_1. Dále všechny body ležící na povrchu čtyřstěnu $A_1B_1C_1D_1$ mají týž součet vzdáleností od rovin (5), neboť každý takový bod náleží nějaké úsečce, jejíž krajní body leží na hranách čtyřstěnu $A_1B_1C_1D_1$ a nejsou tudíž odděleny žádnou z rovin (5). Nakonec se podobně dokáže, že vůbec všechny body čtyřstěnu $A_1B_1C_1D_1$ mají týž součet vzdáleností od rovin (5).

Nyní již snadno zjistíme součet vzdáleností vrcholu A od rovin (5). Tento vrchol můžeme totiž spojit přímkou p s nějakým vnitřním bodem čtyřstěnu $A_1B_1C_1D_1$, takže přímka p protíná čtyřstěn $A_1B_1C_1D_1$ v jisté úsečce KL ($K \neq L$). Druhý průsečík přímky p s povrchem čtyřstěnu $ABCD$ označme M. Body A, M nejsou odděleny žádnou z rovin (5) a přitom dva různé body K, L úsečky AM mají stejný součet vzdáleností od rovin (5). Proto všechny body úsečky AM, speciálně i bod A, mají týž součet vzdáleností od rovin (5). Téže myšlenky lze užít i pro vrcholy B, C, D.

Dokázali jsme, že všechny výšky čtyřstěnu $ABCD$ mají stejnou délku a vzhledem k první části řešení je všechno hotovo.

Poznámka 1. Mají-li všechny stěny čtyřstěnu týž obsah (což je, jak z našeho řešení vyplývá, ekvivalentní se shodností těchto stěn), pak všechny body tohoto čtyřstěnu mají konstantní součet vzdáleností od rovin jeho stěn. Je-li totiž X libovolný bod takového čtyřstěnu a jsou-li x_1, x_2, x_3, x_4 jeho vzdálenosti od rovin stěn, pak zřejmě platí

$$\frac{1}{3}x_1P + \frac{1}{3}x_2P + \frac{1}{3}x_3P + \frac{1}{3}x_4P = V,$$

kde V je objem čtyřstěnu a P (stejný) obsah jeho stěn. Z této rovnosti plyne, že součet

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{3V}{P}$$

je konstantní.

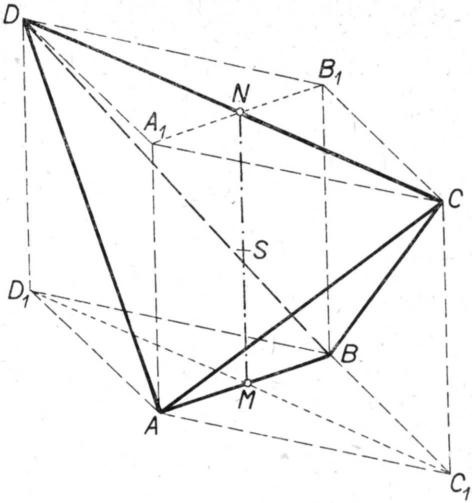
Věta z úlohy 87 je tedy odpověď na přirozenou otázku, zda také obráceně konstantní součet vzdáleností (pro všechny body čtyřstěnu) zajišťuje rovnost obsahů stěn. Ukazuje se, že ano a že dokonce stačí předpokládat stejný součet vzdáleností pouze pro čtyři body čtyřstěnu, které neleží v jedné rovině. Čtenář nechť si rozmyslí, že obdobný předpoklad pouze pro tři body nestačí, a v řešení úlohy 87 nechť si vyhledá místo, kde se podstatně užilo předpokladu, že body A_1, B_1, C_1, D_1 neleží v rovině.

Poznámka 2. Je možno řešit i obdobnou planimetrickou úlohu.

Poznámka 3. Všimněme si ještě některých dalších vlastností čtyřstěnu $ABCD$, v němž platí

$$AB = CD, AC = BD, AD = BC.$$

V našem řešení jsme mj. dokázali, že každá střední příčka takového čtyřstěnu je kolmá k těm jeho hranám, které půlí. Lze tedy sestrojit kvádr tak, že v každé stěně tohoto kvádru jedna ze stěnových úhlopříček splývá s jednou hranou čtyř-



Obr. 72.

stěnu $ABCD$ (obr. 72). Střed S úsečky MN je pak středem kvádru $AC_1BD_1A_1CB_1D$, takže je také středem kulové plochy opsané tomuto kvádru, tedy i čtyřstěnu $ABCD$. Střed S kulové plochy opsané čtyřstěnu $ABCD$ je tedy vnitřním bodem tohoto čtyřstěnu, neboť je to střed jeho (libovolné) střední příčky.

Bod S je zároveň středem kulové plochy vepsané čtyřstěnu $ABCD$. Poněvadž již víme, že je jeho vnitřním bodem, stačí ukázat, že má stejné vzdálenosti od rovin stěn. Skutečně, např. roviny ABC, ABD protínají opsanou kulovou plochu ve dvou kružnicích, které mají společnou tětivu AB. Přitom ze shodnosti trojúhelníků ABC, BAD plyne rovnost obvodových úhlů $\sphericalangle ACB$ a $\sphericalangle ADB$. Proto jsou tyto dvě kružnice shodné a jejich roviny mají tudíž od středu S opsané kulové plochy stejnou vzdálenost, c. b. d.

Z pozn. 4 za úlohou 80 víme, že bod S je zároveň těžištěm čtyřstěnu $ABCD$.

P o z n á m k a 4. Buď $ABCD$ čtyřstěn. Písmeny S, O, V označme po řadě střed čtyřstěnu (tj. průsečík jeho středních příček čili těžiště), střed kulové plochy čtyřstěnu opsané a vepsané. *Jestliže některé dva z bodů S, O, V splývají, pak všechny tyto body splývají a platí*

$$AB = CD, AC = BD, AD = BC. \quad (1)$$

Důkaz. Nechť $S \equiv O$. Pak např. trojúhelník ASB je rovnoramenný, takže střední příčky čtyřstěnu $ABCD$ jsou kolmé k těm hranám, které půlí. Každými dvěma mimoběžnými hranami lze tedy proložit dvě spolu rovnoběžné roviny, které jsou kolmé na společnou střední příčku. Stejně jako v řešení úlohy 87 se pak dokáže, že platí (1). V důsledku pozn. 3 je potom též $S \equiv O \equiv V$.

Nechť $S \equiv V$. Vzdálenost těžiště S od roviny stěny se rovná čtvrtině příslušné výšky. Je-li tedy $S \equiv V$, mají všechny čtyři výšky tutéž délku a z toho, jak již víme, plyne (1). Vzhledem k pozn. 3 pak opět platí $S \equiv O \equiv V$.

Nechť $O \equiv V$. Pak opsaná kulová plocha protíná rovinu každé stěny v kružnici opsané příslušnému trojúhelníku. Středem této kružnice je pata kolmice spuštěné z bodu $O \equiv V$ na rovinu stěny, čili dotykový bod vepsané kulové plochy s touto stěnou; tento bod zřejmě leží uvnitř stěny. Všechny stěny jsou tedy ostroúhlé trojúhelníky a jejich roviny mají stejnou vzdálenost od bodu O. Proto platí např. $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$ apod. Všechny čtyři stěny jsou tedy navzájem shodné trojúhelníky a platí (1), z čehož zase plyne $S \equiv O \equiv V$.

88

Úlohu si zjednodušíme touto úvahou: Třemi rovinami procházejícími středem krychle a rovnoběžnými se stěnami se krychle rozdělí na osm menších krychlí. Je zřejmé, že výsledné geometrické místo je souměrné podle každé z uvedených tří rovin, takže stačí najít geometrické místo jen v jedné z osmi malých krychlí o hraně $\frac{1}{2}$.

Zvolme si nyní pravoúhlou soustavu souřadnic x, y, z tak, aby původní krychle byla určena nerovnicemi $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, $0 \leqq z \leqq 1$, a zvolená menší krychle K nerovnicemi $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$, $0 \leqq y \leqq \frac{1}{2}$. $0 \leqq z \leqq \frac{1}{2}$. Je-li nyní k kruh o poloměru $\frac{1}{2}$, celý obsažený v dané krychli a se středem v krychli K, pak je kruh k celý obsažen v oktantu $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$. Je-li obráceně kruh o poloměru $\frac{1}{2}$ celý obsažen v oktanu $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$, a má-li střed v krychli K, je obsažen v původní krychli, neboť vzdálenost jeho středu od ostatních stěn $x = 1, y = 1, z = 1$ je vždy větší nebo rovna $\frac{1}{2}$. Je proto ta část hledaného geometrického místa, která je obsažena v K, totožná s geometrickým místem středů všech kruhů obsažených v oktantu $x \geqq 0, y \geqq 0$, $z \geqq 0$ a majících střed v K.

Ukážeme, že toto je průnik krychle K a vnějšku kulové plochy ω se středem v počátku $(0, 0, 0)$ a poloměrem $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (včetně této kulové plochy).

Nechť tedy předně je bod $S \equiv (x_0, y_0, z_0)$ z K středem kruhu k s poloměrem $\frac{1}{2}$ obsaženého v oktantu $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$.

Je-li rovina ϱ kruhu k rovnoběžná s některou stěnou oktantu, např. se stěnou $z = 0$, platí zřejmě o vzdálenostech bodu S od zbylých dvou stěn $x_0 \geqq \frac{1}{2}$, $y_0 \geqq \frac{1}{2}$, tj. $x_0^2 + y_0^2 \geqq \frac{1}{2}$ a bod S leží na ploše ω nebo vně. Tento případ vždy nastane, leží-li bod S sám v některé ze stěn oktantu. Zbývá nám tedy případ, že S má všechny tři souřadnice kladné: $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, $z_0 > 0$, a přitom rovina ϱ není rovnoběžná s žádnou ze stěn oktantu. Je-li

$$a (x - x_0) + b (y - y_0) + c (z - z_0) = 0$$

rovnice roviny ϱ, je proto nejvýše jedno z čísel a, b, c rovno nule, takže ϱ protíná stěny $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ pořadě v přímkách

$$\begin{aligned} p_1 &\equiv b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) - ax_0 = 0, \\ p_2 &\equiv a\,(x - x_0) + c\,(z - z_0) - by_0 = 0, \\ p_3 &\equiv a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) - cz_0 = 0. \end{aligned}$$

Ukažme nyní, že patu P_1 kolmice z bodu S na přímku p_1 dostaneme, najdeme-li nejprve patu Q_1 kolmice k_1 z bodu S na rovinu $x = 0$ a pak patu P_1' kolmice $\bar{k}_1$ z bodu Q_1 na p_1. Přímka p_1 je totiž kolmá ke k_1 i $\bar{k}_1$, tedy i k $P_1'S$, tj. $P_1' \equiv P_1$. Je pak (pro $Q_1 \not\equiv P_1$ podle Pythagorovy věty)

$$P_1S^2 = P_1Q_1^2 + Q_1S^2. \tag{1}$$

Vzdálenost bodu Q_1 od P_1 je stejná jako vzdálenost bodu Q_1 od přímky p_1. Protože $Q_1 = (0, y_0, z_0)$, je podle známého vzorce pro vzdálenost bodu od přímky (používáme jej v rovině y, z)

$$P_1Q_1 = \frac{|\,ax_0\,|}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Dále je $Q_1S = x_0$ a $P_1S \geqq \dfrac{1}{2}$, takže z (1) plyne

$$\frac{a^2x_0^2}{b^2 + c^2} + x_0^2 \geqq \frac{1}{4}$$

neboli

$$(a^2 + b^2 + c^2)\, x_0^2 \geqq \frac{1}{4}\,(b^2 + c^2). \tag{2}$$

Obdobně dostaneme, užijeme-li stejné úvahy pro vzdálenost bodu S od přímek p_2 a p_3, že

$$(a^2 + b^2 + c^2)\, y_0^2 \geqq \frac{1}{4}\,(a^2 + c^2), \tag{3}$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)\, z_0^2 \geqq \frac{1}{4}\,(a^2 + b^2). \tag{4}$$

Z nerovností (2), (3) a (4) plyne sečtením

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \geqq \frac{1}{2},$$

což znamená, že bod S leží na ploše ω nebo vně.

Obráceně nechť bod $S \equiv (x_0, y_0, z_0)$ leží na ploše ω nebo vně, a zároveň v krychli K. Ukažme, že existuje kruh o středu S a poloměru $\frac{1}{2}$, který je obsažen v oktantu $x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0$. To je zřejmé, je-li některé z čísel x_0, y_0, z_0 rovné nule $\Big($alespoň dvě jsou vždy nenulová, neboť $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \geqq \frac{1}{2}$, $x_0^2 \leqq \frac{1}{4}$, $y_0^2 \leqq \frac{1}{4}$, $z_0^2 \leqq \frac{1}{4}$; je-li některé rovno nule, např. $x_0 = 0$, jsou nutně ostatní rovna $\frac{1}{2}$ tj. $y_0 = z_0 = \frac{1}{2}\Big)$. Jsou-li všechna tři čísla x_0, y_0, z_0 kladná, pak existuje nezáporné řešení a^2, b^2, c^2 soustavy nerovnic (2), (3), (4), např.

$$\begin{aligned} a^2 &= -x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \\ b^2 &= x_0^2 - y_0^2 + z_0^2, \\ c^2 &= x_0^2 + y_0^2 - z_0^2. \end{aligned}$$

Je totiž

$$-x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2x_0^2 \geqq$$
$$\geqq \frac{1}{2} - 2x_0^2 = 2\left(\frac{1}{4} - x_0^2\right) \geqq 0$$

a obdobně pro ostatní pravé strany. Rovina

$$\sqrt{-x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}\,(x - x_0) + \sqrt{x_0^2 - y_0^2 + z_0^2}\,(y - y_0) +$$
$$+ \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - z_0^2}\,(z - z_0) = 0$$

protíná pak roviny stěn v přímkách, od nichž má bod S stejnou vzdálenost, rovnou podle dřívější úvahy $\sqrt{\frac{1}{2}(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)}$, což je číslo větší nebo rovné $\frac{1}{2}$.

Závěr. Hledaným geometrickým místem je množina těch bodů dané krychle, které mají od každého z jejích vrcholů vzdálenost alespoň rovnou $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Poznámka. Z řešení předchozí úlohy vyplývá, že geometrické místo středů kružnic o daném poloměru r, které se dotýká všech tří stěn pravoúhlého trojhranu, je část kulové plochy se středem ve vrcholu trojhranu a poloměrem $r\sqrt{2}$.

Považujeme-li nyní kružnici za pevnou a pravoúhlý trojhran za „proměnný“, lze usoudit, že *geometrické místo vrcholů pravoúhlých trojhranů, jejichž všechny tři stěny se dotýkají pevné kružnice o poloměru r, je kulová plocha o poloměru $r\sqrt{2}$, jejímž středem je střed kružnice k a z níž je vyjmut rovník ležící v rovině kružnice k.* Toto je jakési zobecnění známé Thaletovy věty.

89

Nechť koule K obsahuje bod X, ale neobsahuje žádný z bodů A, B, C, D. Označíme-li α (β, γ, δ) rovinu, která půlí úsečku AX (BX, CX, DX) a je k ní kolmá, pak střed S koule K leží uvnitř poloprostoru αX (βX, γX, δX). Z názoru se zdá být zřejmé, že průnikem T těchto čtyř poloprostorů je jistý čtyřstěn; abychom mohli nyní dokončit myšlenku řešení, odložme zatím důkaz této domněnky.

Ze čtyř soustředných kulových ploch, které mají střed A a procházejí po řadě vrcholy čtyřstěnu T, vyberme tu, která má největší poloměr d. Pak vně této kulové plochy neleží žádný bod čtyřstěnu T. To vyplývá z toho, že koule je konvexní množina: především je jasné, že vrcholy čtyřstěnu T

leží v kouli určené největší kulovou plochou, proto i hrany čtyřstěnu T náleží této kouli, dále i všechny stěny, neboť každý bod stěny čtyřstěnu je obsažen v nějaké úsečce, jejíž krajní body leží na obvodu té stěny, a nakonec se podobně dokáže, že i celý čtyřstěn T leží v naší kouli. Jinak řečeno, dokázali jsme toto tvrzení: Existuje vrchol čtyřstěnu T, jehož vzdálenost d od bodu A není menší než vzdálenost libovolného jiného bodu tohoto čtyřstěnu. Zvolme nyní $r > d$.

Kdyby nějaká koule K o poloměru r obsahovala bod X, ale neobsahovala žádný z bodů A, B, C, D, náležel by její střed S čtyřstěnu T (dokonce by byl jeho vnitřním bodem). Pak by platilo $AS \leq d < r$, takže bod A by byl vnitřním bodem koule K, což by byl spor.

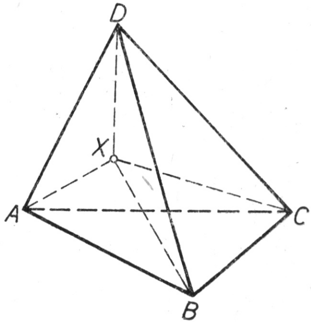
Zbývá tedy dokázat, že T je skutečně čtyřstěn. Každé tři ze čtyř rovin α, β, γ, δ se protínají v jediném bodě — je to střed kulové plochy opsané jednomu ze čtyřstěnů $BCDX$, $ACDX$, $ABDX$, $ABCX$ (obr. 73). Označme tedy S_a, S_b, S_c, S_d středy kulových ploch opsaných po řadě čtyřstěnům $BCDX$, $ACDX$, $ABDX$, $ABCX$ a ukažme, že T je čtyřstěn s vrcholy S_a, S_b, S_c, S_d. Především je jasné, že všechny body S_a, S_b, S_c, S_d jsou navzájem různé (jinak by totiž bod X musel ležet na kulové ploše opsané čtyřstěnu $ABCD$, což není možné, neboť X je vnitřní bod čtyřstěnu $ABCD$ a leží tedy uvnitř této kulové plochy — dokažte podrobně!).

Body S_b, S_c, S_d leží v rovině α; ukažme, že neleží na jedné přímce. Body S_c, S_d leží také v rovině β a proto platí

$$XB \perp S_c S_d;$$

obdobně je

$$CX \perp S_b S_d, \quad XD \perp S_b S_c.$$



Obr. 73.

Kdyby body S_b, S_c, S_d ležely v jedné přímce s, byly by k této přímce kolmé tři přímky XB, XC, XD, takže by tyto tři přímky musely ležet v jedné rovině (procházející bodem X a kolmé k přímce s), což však odporuje předpokladu úlohy. Žádné tři z bodů S_a, S_b, S_c, S_d neleží tedy v přímce. Ukažme ještě, že tyto čtyři body neleží v jedné rovině. Kdyby např. bod S_a ležel v rovině α, měl by stejnou vzdálenost od všech pěti bodů A, B, C, D, X; před chvílí jsme však poznamenali, že těmito pěti body nemůže procházet kulová plocha. Body S_a, S_b, S_c, S_d jsou tedy skutečně vrcholy čtyřstěnu.

Množina T je průnik poloprostorů αX, βX, γX, δX a čtyřstěn $S_aS_bS_cS_d$ je průnik poloprostorů αS_a, βS_b, γS_c, δS_d. Stačilo by tedy již jen dokázat že např. rovina α neodděluje body X, S_a. Kdyby je oddělovala, pak by body A, S_a ležely uvnitř téhož poloprostoru určeného rovinou α (opačného k αX), takže bod A by ležel uvnitř kulové plochy o středu S_a a poloměru S_aX. Tato kulová plocha by (podle definice bodu S_a) procházela také body B, C, D. Pak by zřejmě (dokažte!) všechny body čtyřstěnu $ABCD$, až na vrcholy B, C, D, ležely uvnitř této kulové plochy; dostali bychom spor s polohou bodu X. Množina T je tedy totožná s množinou všech bodů čtyřstěnu $S_aS_bS_cS_d$.

90

První řešení. Vyjdeme z druhé předpovědi, podle níž jsou v pořadí $DAECB$ právě dvě místa správně obsazena. V úvahu tedy přichází deset možností:

(1) *DA---*, (6) *-A-C-*,
(2) *D-E--*, (7) *-A--B*,
(3) *D--C-*, (8) *--EC-*,
(4) *D---B*, (9) *--E-B*,
(5) *-AE--*, (10) *---CB*.

V každém z těchto deseti případů se pokusíme doplnit tři volná místa tak, aby byly splněny podmínky úlohy; ukáže se, že to je možné v jediném případě (10). Předpoklady úlohy jsou čtyři:

V_1: v pořadí $ABCDE$ není správně obsazeno žádné místo;

V_2: v pořadí $ABCDE$ není správně určena žádná dvojice bezprostředně za sebou následujících prvků;

W_1: v pořadí $DAECB$ jsou právě dvě místa správně obsazena;

W_2: v pořadí $DAECB$ jsou právě dvě dvojice bezprostředně za sebou následujících prvků správně určeny.

(1) V tomto případě písmeno E nemůže stát na místě třetím (W_1) ani pátém (V_1), takže pro něj zbývá jedině čtvrté místo. Pak ale písmeno C musí být páté, neboť nemůže být třetí (podle V_1), a tudíž pro B zbývá třetí místo. Pořadí $DABEC$ však není možné vzhledem k podmínce V_2 (dvojice AB).

(2) Z V_1 a W_1 vyplývá, že B musí být čtvrté a pak A nutně páté; pro C zbývá druhé místo. Umístění $DCEBA$ však odporuje předpokladu W_2.

(3) Z V_1 a W_1 vyplývá, že E musí být druhé. Podle V_2 však E nemůže následovat bezprostředně po D.

(4) Z V_1 a W_1 vyplývá, že C musí být druhé, pak E čtvrté a tudíž A třetí. Dostáváme pořadí $DCAEB$, které však nevyhovuje podmínce W_2.

(5) V tomto případě z V_1 a W_1 vyplývá, že D musí být páté. Podle V_2 pak C nemůže být čtvrté (dvojice CD), takže musí být první, načež B je čtvrté. Umístění $CAEBD$ opět nesplňuje W_2.

(6) Podle V_1 a W_1 musí být E první. Podle V_2 nemůže být B třetí (dvojice AB) a podle W_1 ani páté. Tento případ je tedy opět nemožný.

(7) Z V_1 a W_1 vyplývá, že C musí být první a D třetí, načež E čtvrté. Pořadí $CADEB$ však odporuje předpokladu V_2 (dvojice DE).

(8) Z V_1 a W_1 zase vyplývá, že A musí být páté a B první, tedy D třetí. V pořadí $BDECA$ pak E následuje bezprostředně po D, což je ve sporu s V_2.

(9) Podle V_1 a W_1 musí být A čtvrté, což opět odporuje podmínce V_2 (dvojice AB).

(10) Konečně v tomto posledním případě z V_1 a W_1 zase vyplývá, že A musí být třetí, D druhé, tedy E první. Nacházíme umístění $EDACB$, o němž lze lehko dokázat, že vyhovuje podmínkám úlohy.

Výsledek soutěže byl $EDACB$.

Druhé řešení. Vyjdeme opět z druhé předpovědi. Z pořadí $DAECB$ můžeme utvořit čtyři dvojice

$$DA,\ AE,\ EC,\ CB,$$

z nichž právě dvě jsou správné. Tyto dvě správné dvojice nemohou mít společné písmeno. Jinak bychom totiž obdrželi správnou trojici bezprostředně za sebou následujících písmen a obě správně předpověděná místa by tudíž musela ležet mimo tuto trojici. To by ale znamenalo, že druhá předpověď dává výsledné umístění, což není pravda.

V úvahu tedy přicházejí tyto tři dvojice:

$$(DA,\ EC);\ (DA,\ CB);\ (AE,\ CB).$$

Je zřejmé, že jedna ze dvou správně předpověděných dvojic musí obsahovat obě správně předpověděná místa a druhá žádné. Tak dostáváme celkem čtyři možnosti: $DABEC$, $DACBE$, $EDACB$, $AEDCB$. Z nich však jenom pořadí $EDACB$ vyhovuje podmínkám úlohy.

91

Důkaz provedeme matematickou indukcí vzhledem k číslu n. Pro $n = 3$ je vše jasné. Předpokládejme tedy, že věta platí pro nějaké přirozené číslo $n \geqq 3$ a vezměme podle zadání úlohy $n + 1$ bodů s $n + 1$ úsečkami.

Najde-li se v naší skupině takový bod, z nějž vychází nejvýše jedna úsečka, pak jej odstraníme (popř. i s příslušnou úsečkou) a pro zbylou skupinu n bodů a n úseček (z případných $n + 1$ úseček můžeme jednu vynechat) užijeme indukčního předpokladu.

V opačném případě vycházejí z každého bodu alespoň dvě úsečky. Vyjdeme-li tedy z jednoho bodu, můžeme se po některé úsečce dostat do druhého bodu, z něj pak do třetího atd. Poněvadž počet bodů je konečný, musíme se při tomto postupu vrátit do některého bodu, jímž jsme už dříve prošli. Tak obdržíme hledaný cyklus.

92

Označme jednu ze sedmnácti osob A. Osoba A si podle podmínky úlohy dopisuje se šestnácti jinými osobami o nejvýše třech tématech. Proto existuje (alespoň) šest osob, s nimiž si osoba A dopisuje o jednom tématu (označme ho I).

Dopisují-li si některé dvě z těchto šesti osob také o tématu I, máme nalezeny tři osoby, které si píší o témže tématu (I).

V opačném případě si žádné dvě z uvažovaných šesti osob nepíší o tématu I. Osoba B, libovolně vybraná z těchto šesti osob, si tedy píše s pěti ostatními nejvýše o dvou tématech. Proto (alespoň) se třemi z nich si dopisuje o jednom tématu II.

Dopisují-li si nyní některé dvě z těchto tří osob o tématu II, nacházíme opět tři osoby píšící si o témže tématu (II).

V posledním možném případě si uvažované tři osoby navzájem dopisují o tématu III, takže tvrzení úlohy je opět splněno.

Poznámka. Obdobné tvrzení neplatí pro méně než sedmnáct osob.

93

Nechť uvažovaný trojúhelník má největší stranu $x = p$, kde $p \leqq n$ je zvolené přirozené číslo. Uvažujme nejprve tyto případy:

Je-li druhá strana $y = p$, pak třetí strana z se rovná některému z čísel

$$p, p - 1, p - 2, \ldots, 1;$$

to je celkem p trojúhelníků.

Je-li druhá strana $y = p - 1$, pak třetí strana $z \leqq y$ se rovná některému z čísel

$$p - 1, p - 2, \ldots, 2$$

(nemůže být $z = 1$, neboť platí $x < y + z$); to je celkem $p - 2$ trojúhelníků.

Je-li druhá strana $y = p - 2$, pak třetí strana z se rovná některému z čísel

$$p - 2, p - 3, \ldots, 3;$$

to je celkem $p - 4$ trojúhelníků.

Proveďme tedy obecnou úvahu: Je-li druhá strana $y = p - k$, kde k je přirozené číslo menší než $\frac{p}{2}$ (aby byla splněna podmínka $x < y + z$), pak třetí strana z se rovná některému z čísel

$$p - k, p - k - 1, \ldots, k + 1 = p - (p - k - 1);$$

to je celkem $p - 2k$ trojúhelníků.

Označme nyní s_p počet všech trojúhelníků, jejichž jedna strana má délku p a délky ostatních dvou stran jsou přirozená čísla nepřevyšující p. Je-li p sudé, pak

$$s_p = p + (p - 2) + (p - 4) + \ldots + 2 = \frac{1}{2}(p + 2)\frac{p}{2} =$$
$$= \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p}{2}.$$

Je-li p liché, pak

$$s_p = p + (p - 2) + (p - 4) + \ldots + 1 = \left(\frac{p + 1}{2}\right)^2.$$

Nechť S_n je počet všech trojúhelníků, které vyhovují podmínkám úlohy. Podle předchozího platí

$$S_n = s_1 + s_2 + \ldots + s_n.$$

Je-li n sudé, máme

$$S_n = 1^2 + (1^2 + 1) + 2^2 + (2^2 + 2) + \ldots + \left(\frac{n}{2}\right)^2 +$$

$$+ \left[\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n}{2}\right] =$$

$$= 2\left[1^2 + 2^2 + \ldots + \left(\frac{n}{2}\right)^2\right] + \left[1 + 2 + \ldots + \frac{n}{2}\right] =$$

$$= 2 \,.\, \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} + 1\right)(n + 1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} + 1\right)$$

a po malé úpravě

$$S_n = \frac{1}{24}\, n\,(n + 2)\,(2n + 5). \tag{1}$$

Pro n liché a větší než 1 lze psát $S_n = S_{n-1} + s_n$, tedy

$$S = \frac{1}{24}(n - 1)\,(n + 1)\,(2n + 3) + \frac{1}{4}(n + 1)^2;$$

po úpravě

$$S_n = \frac{1}{24}(n + 1)\,(n + 3)\,(2n + 1) \tag{2}$$

a tento vzorec platí i pro $n = 1$ (neboť $S_1 = 1$).

Vzorec (1) (pro n sudé) a (2) (pro n liché) dávají odpověď na otázku úlohy.

P o z n á m k a. Všimněte si, že výsledky (1), (2) lze vyjádřit jediným vzorcem

$$S_n = \frac{1}{24}\left[2n^3 + 9n^2 + 10n + \frac{3}{2} - (-1)^n \,.\, \frac{3}{2}\right].$$

94

První řešení. Pro důkaz sporem předpokládejme, že každých osm časopisů zakrývá část stolu o ploše menší než $\frac{8}{15}S$, kde S je plocha celého stolu. Takových osmic je $\binom{15}{8}$ a každý časopis vystupuje v $\binom{14}{7}$ z nich. Všechny tyto osmice dohromady pokryjí tedy nejméně $\binom{14}{7}$-krát celý stůl; přitom však součet ploch, které celkem na stole zakryjí, bude menší než $\binom{15}{8} \cdot \frac{8}{15} S$. Proto platí

$$\binom{14}{7} S < \binom{15}{8} \cdot \frac{8}{15} S,$$

ale $1 < 1$ není možné.

Druhé řešení. Poznamenejte si na každý časopis velikost plochy, kterou na stole bezprostředně zakrývá. Pak uberte ty časopisy, na nichž je zapsáno sedm nejmenších hodnot.

95

Mějme na kružnici m různých bodů $A_1, A_2, \ldots, A_m$; označení volíme tak, aby indexy vzrůstaly proti směru hodinových ručiček. Označme z_m množinu všech úseček, které spojují dvojice těchto bodů, a u_m počet oblastí vzniklých v daném kruhu. Na oblouku mezi A_m a A_1 přidejme další bod A_{m+1}. Úsečka $A_{m+1}A_k$ $(k = 1, \ldots, m)$ roztíná ve dvě části právě tolik oblastí, na kolik částí ji rozdělují úsečky množiny z_m. Úsečka $A_{m+1}A_k$ obsahuje vnitřní body právě těch úseček A_iA_j, kde $i = 1, \ldots, k - 1$ a $j = k + 1, \ldots, m$. Takových úseček je tedy $(k - 1)(m - k)$ a dělících bodů, které vzniknou na úsečce $A_{m+1}A_k$, je stejně tolik nebo méně; poslední případ může nastat pouze tehdy, když alespoň tři úsečky množiny z_{m+1} mají společný vnitřní bod. Při sestrojení úsečky $A_{m+1} A_k$ se tedy počet oblastí u_m zvětšil nejvýše o číslo $1 + (k - 1)(m - k)$.

Úsečky $A_{m+1} A_k$ $(k = 1, \ldots, m)$ mohou protínat ve vnitřních bodech pouze úsečky původní množiny z_m, a nikoli samy sebe navzájem. Proto při sestrojení každé úsečky $A_{m+1} A_k$ $(k = 1, \ldots, m)$ se počet existujících oblastí zvětšuje nejvýše o číslo $1 + (k - 1)(m - k)$. Po sestrojení všech úseček $A_{m+1} A_1, \ldots, A_{m+1} A_m$ bude tedy

$$u_{m+1} \leqq u_m + \sum_{k=1}^{m} [1 + (k - 1)(m - k)] =$$

$$= u_m + m + m \sum_{1=k}^{m} (k - 1) - \sum_{k=1}^{m} k (k - 1)$$

čili po úpravě

$$u_{m+1} \leqq u_m + m + \frac{m (m - 1)(m - 2)}{6} .$$

Poněvadž $u_1 = 1$, dostaneme sečtením nalezených nerovností (pro $m = 1, \ldots, n - 1$) odhad

$$u_n \leqq 1 + \frac{n (n - 1)}{2} + \frac{n (n - 1)(n - 2)(n - 3)}{24} ;$$

při úpravě pravé strany jsme užili vzorce

$$\sum_{m=1}^{n-1} m (m - 1)(m - 2) = \frac{1}{4} n (n - 1)(n - 2)(n - 3),$$

jehož správnost je možno snadno ověřit indukcí podle n.

Z předchozích úvah však také vyplývá, že nemají-li žádné tři úsečky dané množiny z_n společný vnitřní bod, pak

$$u_n = 1 + \frac{n (n - 1)}{2} + \frac{n (n - 1)(n - 2)(n - 3)}{24} . \qquad (1)$$

Stačí ukázat, že taková konfigurace skutečně existuje (pro každé n). Dokažme toto tvrzení indukcí podle n. Pro $n = 1$, 2, 3, 4 je to jasné.

Buďte $A_1, \ldots, A_n$ ($n \geqq 4$) takové body na obvodu daného kruhu, že žádné tři úsečky příslušné množiny z_n nemají společný vnitřní bod. Každý z bodů $A_1, \ldots, A_n$ spojme přímkami se všemi průsečíky úseček množiny z_n a sestrojme všechny průsečíky těchto přímek s danou kružnicí. Tak na naší kružnici vznikne konečný počet bodů, takže na ní můžeme zajisté zvolit další bod A_{n+1} různý od všech těchto bodů. Body $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ pak zřejmě tvoří hledanou konfiguraci pro $n + 1$.

Odpověď na otázku úlohy je dána vzorcem (1).

96

Označme T_n počet všech trojúhelníků daných systémem n bodů ($n \geqq 3$), z nichž žádné tři neleží na přímce, a O_n počet všech ostroúhlých trojúhelníků daných týmž systémem. Dokážeme lemma: *Jestliže pro každý takový systém n bodů platí nerovnost $O_n \leqq cT_n$, kde c je pevné číslo, pak je také vždy $O_{n+1} \leqq cT_{n+1}$.*

Ze systému $n + 1$ bodů vynecháme po řadě první, druhý až $(n + 1)$-ní bod; příslušné počty všech trojúhelníků (ostroúhlých trojúhelníků) v těchto $n + 1$ systémech o n bodech označíme T_{nk} resp. O_{nk} ($k = 1, 2, \ldots, n + 1$). Pak platí

$$T_{n+1} = \frac{T_{n1} + T_{n2} + \ldots + T_{n,n+1}}{n-2}, \tag{1}$$

$$O_{n+1} = \frac{O_{n1} + O_{n2} + \ldots + O_{n,n+1}}{n-2}, \tag{2}$$

neboť každý trojúhelník (ostroúhlý trojúhelník) je zahrnut do $(n + 1) - 3 = n - 2$ systémů. Podle indukčního předpokladu platí

$$O_{nk} \leqq cT_{nk} \quad (k = 1, 2, \ldots, n + 1).$$

Sečtením těchto nerovností a užitím vzorců (1), (2) nyní dostaneme vztah

$$O_{n+1} \leqq cT_{n+1},$$

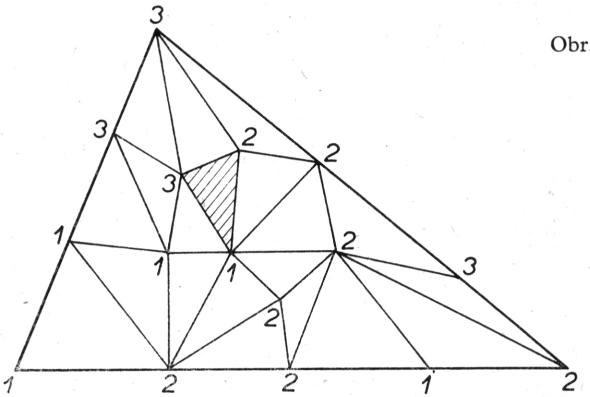
který jsme chtěli dokázat.

Protože je $T_4 = 4$, $O_4 \leqq 3$, platí $O_4 \leqq 0{,}75 \,.\, T_4$. Podle lemmatu je pak také $O_5 \leqq 0{,}75\, T_5$. Avšak $T_5 = 10$, tedy $O_5 \leqq 7{,}5$. Poněvadž O_5 je *přirozené* číslo, platí $O_5 \leqq 7$ (líbí se vám tento krok?). Tak dostáváme vztah $O_5 \leqq \frac{7}{10} T_5$. Z lemmatu potom vyplývá, že pro každé přirozené $n \geqq 5$ (tedy i pro $n = 100$) platí

$$\frac{O_n}{T_n} \leqq \frac{7}{10}\,.$$

97

Obr. 74. Buď X počet malých trojúhelníků, které mají jedinou stranu *12* (tj. jejichž vrcholy jsou označeny třemi různými čísly *1*, *2*, *3*), a Y počet malých trojúhelníků, které



Obr. 74.

mají dvě strany *12*; žádný trojúhelník nemůže mít tři strany *12*. Potřebujeme dokázat, že $X \neq 0$.

V součtu $X + 2Y$ všech stran *12* malých trojúhelníků mohou být některé strany počítány dvakrát (neboť ty z nich, které zasahují dovnitř základního trojúhelníku, jsou společné dvěma malým trojúhelníkům), zatímco každá strana *12* ležící na obvodu základního trojúhelníku je zde počítána jenom jednou.

Označíme-li tedy U počet malých stran *12*, které zasahují dovnitř základního trojúhelníku, a V počet malých stran *12* ležících na jeho obvodu, bude

$$X + 2Y = 2U + V.$$

Avšak číslo V je zřejmě liché (obr. 74), a proto X musí být liché. Dokázali jsme tedy poněkud více, než bylo třeba.

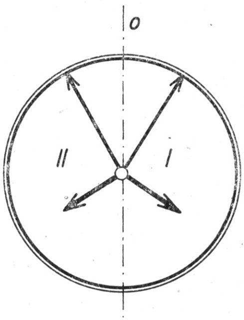
P o z n á m k a. Obdobná věta platí i pro čtyřstěny a též ve vícerozměrných prostorech.

98

Předpokládejme, že existují dva stavy I a II, souměrné podle nějakého průměru o ciferníku hodin (obr. 75a).

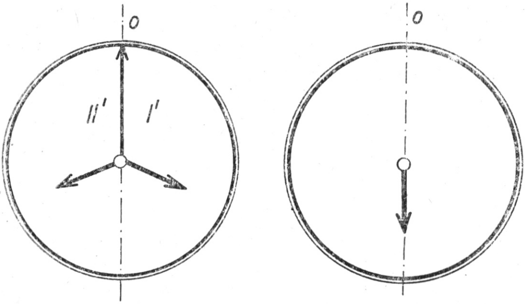
Pak je jasné, že jsou možné i časy, při nichž velké ručičky splývají na našem průměru o a polohy malých ručiček jsou (v souladu s mechanismem hodin) opět souměrné podle osy o (obr. 75b).

Poněvadž I' a II' jsou možné časy, musí po určité době uplynulé od okamžiku I' nastat stav II'. Z toho, že po-



Obr. 75a.

Obr. 75b, c.

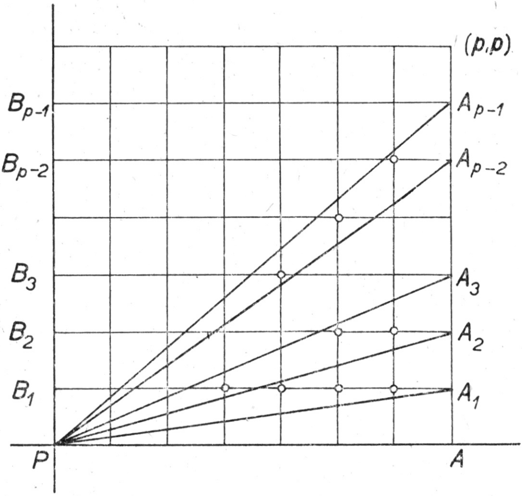


lohy velkých ručiček v I' a II' splývají, plyne, že tato doba je celý počet h hodin. Přitom z naší symetrie je vidět, že přesně za $\frac{h}{2}$ hodin bude malá ručička na ose o (obr. 75c). Jelikož $\frac{h}{2}$ je číslo buď *celé* anebo *celé* $+\frac{1}{2}$, bude velká ručička v té chvíli opět na ose o (buď se bude krýt s malou, anebo bude na opačné straně od ní).

Tak jsme dokázali, že průměr o má tuto vlastnost: Existuje okamžik, v němž obě ručičky leží v ose o. Nakonec se snadno uváží, že zrcadlový obraz každého možného času podle takové osy o je opět možný čas. Rozmyslete si sami, kolik je celkem takových os a jak se najdou.

99

Předpokládejme nejprve, že $p > 2$ je prvočíslo (na obr. 76 je $p = 7$). Uvnitř úsečky PA_k neleží žádný mřížový bod. Kdyby tam totiž ležel mřížový bod $M \equiv (x, y)$, pak by platilo $1 \leq x < p$, $\frac{k}{p} = \frac{y}{x}$ (směrnice přímky PA_k), což není možné, neboť



Obr. 76.

zlomek $\dfrac{k}{p}$, jehož jmenovatel je prvočíslo, nelze zkrátit.

Počet mřížových bodů uvnitř obdélníku PAA_kB_k je roven číslu $(p - 1)(k - 1)$. Protože uvnitř úsečky PA_k není žádný mřížový bod, je počet mřížových bodů ležících uvnitř trojúhelníku PAA_k poloviční, tj.

$$\frac{1}{2}(p - 1)(k - 1). \tag{1}$$

Uvažujeme nyní trojúhelník PA_jA_{j+1} (pro $j = 1, 2, \ldots, p - 2$). Uvnitř tohoto trojúhelníka je $\frac{1}{2}(p - 1)(j + 1 - 1) - \frac{1}{2}(p - 1)(j - 1) = \frac{1}{2}(p - 1)$ mřížových bodů, jak plyne z výsledku (1) a z toho, že vnitřek trojúhelníka PA_jA_{j+1} dostaneme, jestliže od vnitřku trojúhelníku PAA_{j+1} ubereme trojúhelník PAA_j. Tím je jedna část úlohy dokázána.

Předpokládejme naopak, že $p > 2$ je liché číslo a že uvnitř každého z trojúhelníků PA_1A_2, PA_2A_3, . . ., $PA_{p-2}A_{p-1}$ leží právě $\frac{1}{2}(p-1)$ mřížových bodů. To máme celkem $\frac{1}{2} \cdot (p-1)(p-2)$ mřížových bodů; všechny leží uvnitř trojúhelníku PAA_{p-1}.

Uvnitř úsečky PA_{p-1} není žádný mřížový bod, neboť zlomek $\frac{p-1}{p}$ nelze zkrátit. Uvnitř trojúhelníku PAA_{p-1} je proto podle téhož úsudku jako v první části řešení právě $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ mřížových bodů. Přitom žádný z nich zřejmě nenáleží trojúhelníku PAA_1.

Z posledních dvou odstavců vyplývá, že počet mřížových bodů uvnitř trojúhelníku PAA_{p-1} se rovná celkovému počtu mřížových bodů uvnitř trojúhelníků $PA_1A_2, PA_2A_3, \ldots, PA_{p-2}A_{p-1}$. Proto uvnitř úseček PA_1, PA_2, PA_3, . . . , PA_{p-2} neleží žádný mřížový bod. Odtud však již plyne, že p je prvočíslo. Kdyby totiž bylo $p = ab$, kde $1 < a \leqq b < p$ jsou přirozená čísla, ležel by uvnitř úsečky PA_a mřížový bod $(b, 1)$. Tím je dokázána i druhá část úlohy.

100

Buďte O, P, Q tři z daných bodů, které neleží v přímce. Je-li A další bod dané množiny, pak z nerovností

$$|AP - AO| \leqq PO, \quad |AQ - AO| \leqq QO$$

plyne, že rozdíly $AP - AO$, $AQ - AO$ mohou nabývat jenom konečného počtu hodnot. Avšak při daných hodnotách obou rozdílů

$$AP - AO = k, \quad AQ - AO = l$$

máme pro bod A jenom konečný počet možných poloh (průsečíky dvou „hyperbol“); můžete se o tom přesvědčit i jinak (např. přímým výpočtem kosoúhlých souřadnic bodu A v soustavě OPQ při vhodném užití kosinové věty). To je spor s nekonečností dané množiny.

Poznámka. Užitím kruhové inverze (pozn. za př. 63) lze snadno ukázat, že *ke každému přirozenému číslu n existuje n bodů ležících na kružnici, jejichž všechny vzájemné vzdálenosti jsou přirozená čísla*. Je však zajímavé, že *tyto body lze dokonce považovat za mřížové* (viz text př. 99). To si nyní objasníme.

V rovině kartézských souřadnic x, y vezměme jednotkovou kružnici se středem v počátku a zvolme na ní body

$$P_k = (\cos 2k\alpha, \sin 2k\alpha),\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

kde α je takový ostrý úhel, že

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} \text{ neboli } \cos \alpha = \frac{3}{5}.$$

Z trigonometrických vzorců je zřejmé, že obě souřadnice každého bodu P_k jsou racionální čísla a že i všechny vzdálenosti

$$P_kP_l = 2\,|\sin (l - k)\,\alpha\,|$$

jsou racionální.

Ukažme ještě, že

$$\sin k\alpha \neq 0 \quad \text{pro } k = 1, 2, \ldots.$$

Položíme-li (pro $k = 1, 2, \ldots$)

$$t_k = 5^k \sin k\alpha,$$

pak vzhledem k tomu, že

$$\sin (k + 2)\alpha = 2 \sin (k + 1)\alpha \cos \alpha - \sin k\alpha,$$

máme

$$t_{k+2} = 6t_{k+1} - 25t_k.$$

Poněvadž ale

$$t_1 = 4, \quad t_2 = 24,$$

nemůže být žádné t_k dělitelné pěti a proto $t_k \neq 0$.

Pro $k \neq l$ pak platí

$$P_k P_l > 0,$$

takže množina všech bodů P_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ je nekonečná. Odtud již snadno plyne slíbené tvrzení.

Cvičení. Množinu všech bodů roviny, jejichž obě souřadnice x, y jsou racionální čísla, lze rozložit ve dvě podmnožiny, z nichž prvá je konečná na každé rovnoběžce s osou x a druhá je konečná na každé rovnoběžce s osou y.

101

Číslo $x = 0$ úloze nevyhovuje. V dalším proto bude $x \neq 0$. Dokážeme, že platí

$$1 + x \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cos \frac{1}{x} > 0 \tag{1}$$

pro každé $x \neq 0$. Vzhledem k tomu, že hodnota levé strany v (1) je pro čísla x a $-x$ stejná, stačí se omezit jen na kladná x.

Buď tedy x libovolné kladné číslo. Platí nerovnosti

$$-1 \leqq \sin \frac{1}{x}, \qquad \cos \frac{1}{x} \leqq 1,$$

z nichž plyne

$$-x \leqq x \sin \frac{1}{x}, \qquad -\frac{1}{2} \leqq -\frac{1}{2} \cos \frac{1}{x}.$$

Sečtením dostáváme

$$-\frac{1}{2} - x \leqq x \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cos \frac{1}{x}$$

a přičtením čísla 1 vychází nerovnost

$$\frac{1}{2} - x \leqq 1 + x \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cos \frac{1}{x}.$$

Přitom pro každé $x < \frac{1}{2}$ je $\frac{1}{2} - x > 0$, takže (1) platí. Pro $x \geqq \frac{1}{2}$ máme

$$0 < \frac{1}{x} \leqq 2 < \pi.$$

Z toho je však ihned patrné, že (1) platí. V součtu nalevo v (1) jsou totiž první dva sčítanci kladní a dávají součet větší než 1. Od nich se odčítá číslo $\frac{1}{2} \cos \frac{1}{x}$, které je buď dokonce záporné $\left(\text{v případě } \frac{\pi}{2} < \frac{1}{x} \leqq 2\right)$, čímž se levá strana ještě zvětší, anebo nezáporné $\left(\text{a ovšem menší než } \frac{1}{2}\right)$, takže levá strana v (1) bude i v tomto případě kladná.

Nerovnost (1) tedy platí pro všechna reálná čísla x různá od nuly. Je možno též dokázat, že pro všechna taková x platí dokonce nerovnost

$$1 + x \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cos \frac{1}{x} > \varepsilon,$$

kde ε je jisté kladné číslo.

102

Poněvadž

$$A(0) = A(0 + 0) = A(0) + A(0),$$

je

$$A(0) = 0.$$

Dále

$$A(1) = A(1 . 1) = A(1) . A(1),$$

proto

$$\text{buď } A(1) = 0 \qquad \text{anebo } A(1) = 1.$$

V případě, že $A(1) = 0$, máme $A(x) = A(1 . x) = A(1) . A(x) = 0$ pro každé x.

Zabývejme se tedy případem $A(1) = 1$ a dokažme, že pro každé reálné x platí $A(x) = x$.

Všimněme si nejprve průběhu funkce $A(x)$. Pro nezáporná x platí

$$A(x) = A(\sqrt{x} . \sqrt{x}) = [A(\sqrt{x})]^2 \geqq 0.$$

Jsou-li tedy $x \geqq y$ libovolná reálná čísla, je

$$A(x) \geqq A(y),$$

neboť

$$A(x) = A[y + (x - y)] = A(y) + A(x - y) \geqq A(y).$$

Buďte nyní m, n přirozená čísla. Ukážeme, že

$$A\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}.$$

Skutečně,

$$1 = A(1) = A\left[\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] = A\left(\frac{1}{n}\right) + A\left(1 - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= A\left(\frac{1}{n}\right) + A\left(\frac{1}{n}\right) + A\left(1 - \frac{2}{n}\right) = \ldots =$$

$$= A\left(\frac{1}{n}\right) + A\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots + A\left(\frac{1}{n}\right) = nA\left(\frac{1}{n}\right),$$

takže

$$A\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n},$$

a dále obdobně

$$A\left(\frac{m}{n}\right) = A\left(\frac{1}{n} + \frac{m-1}{n}\right) = A\left(\frac{1}{n}\right) + A\left(\frac{m-1}{n}\right) = \ldots =$$

$$= mA\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n}.$$

Pro kladná racionální čísla r tedy platí $A(r) = r$.

Předpokládejme, že by pro nějaké kladné (neracionální) číslo x bylo $A(x) \neq x$. Nechť např. $A(x) > x$. Vezměme racionální číslo r takové, že $x < r < A(x)$. Pak $A(r) = r < A(x)$, ačkoliv $x < r$. To odporuje průběhu funkce $A(x)$. Platí tedy $A(x) = x$ pro každé $x \geqq 0$ a zbývá vyšetřit případ $x < 0$. Vzhledem k tomu, že

$$0 = A(0) = A(x - x) = A(x) + A(-x),$$

dostáváme

$$A(-x) = -A(x).$$

Je-li tedy x záporné (čili $-x$ kladné), platí podle předchozího

$$A(x) = -A(-x) = -(-x) = x.$$

Tím je vše dokázáno.

103

Pro sudá n je $c_n > 0$. Ukážeme, že $c_n = 0$ pro všechna n lichá. Budiž I množina těch indexů i, pro něž $a_i > 0$, $\mathcal{J}$ množina těch j, pro něž $a_j < 0$. Obě množiny jsou neprázdné a pro lichá n je $c_n = 0$ právě když

$$\sum_{i \in I} a_i^n = \sum_{j \in \mathcal{J}} b_j^n, \tag{1}$$

kdež $b_j = -a_j$ jsou kladná. Podle předpokladu rovnost (1) platí pro $n \in N$, kdež N je jistá nekonečná množina (lichých) čísel.

Budiž c největší z čísel a_i $(i \in I)$, b_j $(j \in \mathcal{J})$; nechť např. $c = a_i$ pro některé $i \in I$. Pak existuje $j \in \mathcal{J}$ takové, že $a_i = b_j$. Skutečně, kdyby $b_j < c$ pro všechna $j \in \mathcal{J}$, pak rovnost (1) neboli

$$\sum_{i \in I} \left(\frac{a_i}{c}\right)^n = \sum_{j \in \mathcal{J}} \left(\frac{b_j}{c}\right)^n$$

by nemohla platit pro nekonečně mnoho exponentů n; pro všechna dostatečně velká n je totiž pravá strana téměř nula (rozmyslete si!), zatímco levá je vždy alespoň 1.

Odtud plyne, že v (1) můžeme na obou stranách ubrat po jednom sčítanci. Obdržíme rovnost platnou zase pro všechna $n \in N$. Zopakujeme tedy úvahu předchozího odstavce. Po konečném počtu takových kroků se sčítanci na obou stranách v (1) vyčerpají. To ale znamená, že $c_n = 0$ pro všechna lichá n, a úloha je rozřešena.

104

První řešení. Předběžná úvaha. Vyměníme-li čísla x_1 a x_2, dostaneme

$$f(x_2) - f(x_1) \leqq (x_1 - x_2)^2,$$

neboli celkem

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqq (x_1 - x_2)^2$$

pro všechna x_1, x_2 z intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Odtud plyne, že pro $x_1 \neq x_2$ je

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leqq x_2 - x_1. \tag{1}$$

Číslo $[f(x_2) - f(x_1)]/(x_2 - x_1)$ je směrnice přímky v rovině (x, y), která prochází body $[(x_1, f(x_1)]$ a $[x_2, f(x_2)]$. Číslu $|f(x_2) - f(x_1)| / |x_2 - x_1|$ budeme říkat *absolutní směrnice* funkce $f(x)$ mezi body x_1 a x_2.

Jsou-li tedy body x_1 a x_2 různé, ale dosti blízké, tj. $|x_2 - x_1|$ malé, pak z (1) plyne, že absolutní směrnice hledané funkce mezi x_1 a x_2 je malá. Z toho lze předběžně usuzovat, že hledané funkce budou funkce konstantní v celém intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

K vlastnímu řešení budeme ještě potřebovat tuto pomocnou větu:

Pomocná věta. Nechť a_1, b_1 ($a_1 < b_1$) jsou body z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Nechť $f(x)$ je funkce definovaná na intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Pak existují v intervalu $\langle a_1, b_1 \rangle$ body a_2, b_2 $(a_2 < b_2)$ tak, že

$$|b_2 - a_2| = \frac{1}{2} |b_1 - a_1|,$$

a přitom

$$|f(b_2) - f(a_2)| \geqq \frac{1}{2} |f(b_1) - f(a_1)|.$$

Důkaz. Označme $c = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$, takže $|c - a_1| = |c - b_1| = \frac{1}{2} |b_1 - a_1|$. Protože $|f(b_1) - f(a_1)| = |(f(b_1) - f(c)) + (f(c) - f(a_1))| \leqq |f(b_1) - f(c)| + |f(c) - f(a_1)|$, je splněna alespoň jedna z nerovností

$$|f(b_1) - f(c)| \geqq \frac{1}{2} |f(b_1) - f(a_1)|, \tag{2}$$

$$|f(c) - f(a_1)| \geqq \frac{1}{2} |f(b_1) - f(a_1)|. \tag{3}$$

Je-li splněna nerovnost (2), položíme $b_2 = b_1$, $a_2 = c$; není-li, je splněna nerovnost (3) a položíme $b_2 = c$, $a_2 = a_1$. Důkaz je hotov.

Vlastní řešení. Každá funkce konstantní v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ vyhovuje úloze. Ukážeme, že žádná jiná funkce úloze nevyhovuje.

Nechť tedy $f(x)$ je funkce definovaná v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, splňující danou podmínku, a tedy též (1), která není v celém intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ konstantní. Pak existují v $\langle 0, 1 \rangle$ body x a z, $x < z$, takové, že $f(x) \neq f(z)$. Podle pomocné věty užité na dvojici x, z existují body x_1, z_1 v intervalu $\langle x, z \rangle$, tedy i v $\langle 0, 1 \rangle$, tak, že

$$|z_1 - x_1| = \frac{1}{2} |z - x|,$$

$$|f(z_1) - f(x_1)| \geqq \frac{1}{2} |f(z) - f(x)|.$$

Podle téže pomocné věty užité na dvojici x_1, z_1 existují body x_2, z_2 v $\langle x_1, z_1 \rangle$, tedy i v $\langle 0, 1 \rangle$, tak, že

$$|z_2 - x_2| = \frac{1}{2} |z_1 - x_1| = \frac{1}{4} |z - x|,$$

a přitom

$$|f(z_2) - f(x_2)| \geqq \frac{1}{2} |f(z_1) - f(x_1)| \geqq \frac{1}{4} |f(z) - f(x)|.$$

Obecně se indukcí snadno ukáže, že pro každé $n \geqq 1$ existují body x_n, z_n v $\langle 0, 1 \rangle$ tak, že

$$|z_n - x_n| = \frac{1}{2^n} |z - x|,$$

a přitom

$$|f(z_n) - f(x_n)| \geqq \frac{1}{2^n} |f(z) - f(x)|.$$

Protože podle předpokladu o funkci $f(x)$ platí

$$|f(z_n) - f(x_n)| \leqq |z_n - x_n|^2,$$

dostáváme odtud

$$|f(z) - f(x)| \leqq 2^n |f(z_n) - f(x_n)| \leqq 2^n |z_n - x_n|^2 = \frac{1}{2^n} |z - x|^2.$$

Protože však $|f(z) - f(x)| \neq 0$ a posloupnost $\frac{1}{2^n} |z - x|^2$ je nulová, existuje n tak, že $|f(z) - f(x)| > \frac{1}{2^n} |z - x|^2$, což je spor s předchozí nerovností.

Závěr. Úloze vyhovují jenom funkce konstantní v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Druhé řešení. Jestliže pro $0 \leq a < b \leq 1$ platí $f(a) \neq \neq f(b)$, pak lze najít přirozené číslo n takové, že $|f(a) - - f(b)| > \frac{1}{n}$. Položme $x_i = a + \frac{i}{n}(b - a)$ pro $i = 0, 1, \ldots, n$. Platí

$$|f(a) - f(b)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_i) - f(x_{i+1})| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n},$$

a to je spor. Výsledek je tedy stejný jako v předchozím řešení.

Poznámka. Pro čtenáře, který zná počátky diferenciálního počtu, byla tato úloha zajisté velmi snadná.

105

Buď M dané přirozené číslo. Potřebujeme dokázat, že pro vhodné přirozené číslo n a celé nezáporné číslo k platí nerovnosti

$$M \cdot 10^k \leq 2^n < (M + 1) \cdot 10^k$$

neboli

$$\log M + k \leq n \log 2 < \log (M + 1) + k$$

(uvažujeme desítkové logaritmy). Všechny polouzavřené intervaly

$$\langle \log M + k,\ \log (M + 1) + k),$$

kde k probíhá celá nezáporná čísla, mají touž délku

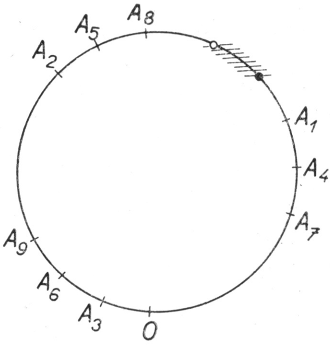
$$\log (M + 1) - \log M = \log \frac{M + 1}{M} = \log \left(1 + \frac{1}{M}\right)$$

a vzniknou z intervalu

$$\langle \log M,\ \log (M + 1))$$

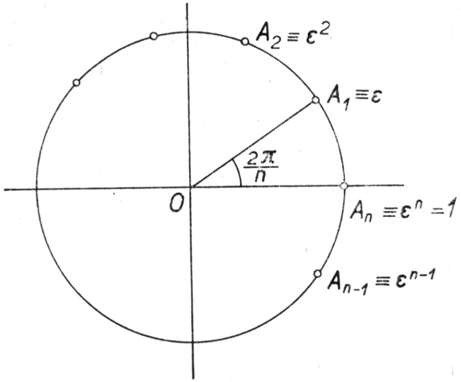
posunutím o 1, 2, 3, ... Čísla $\log 2, 2\log 2, 3\log 2, \ldots, n\log 2, \ldots$ tvoří aritmetickou posloupnost; chceme dokázat, že některý její člen padne do některého z uvažovaných intervalů.

K tomu bude užitečné si představit, že polopřímka nezáporných čísel je navinuta na kružnici o délce 1 $\left(\text{tj. o poloměru } \frac{1}{2\pi}\right)$. Potom obrazy dvou čísel na této kružnici splynou právě tehdy, když jejich rozdíl je celé číslo; zejména také splynou všechny uvažované intervaly (obr. 77). Pokud jde o obrazy $A_1, A_2, A_3, \ldots$ čísel $\log 2$, $2\log 2$, $3\log 2, \ldots$, žádné dva z nich nesplynou, neboť $\log 2$ je iracionální (ověřte sporem). V nekonečné posloupnosti bodů $A_1, A_2, A_3, \ldots$ lze najít dva, nechť jsou to A_p a A_{p+q}, jejichž oblouková vzdálenost je menší než délka oblouku vyznačeného na obr. 77, tj. $\log\left(1 + \frac{1}{M}\right)$.



Obr. 77.

Poněvadž každé dva sousední členy nekonečné posloupnosti $A_p, A_{p+q}, A_{p+2q}, A_{p+3q}, \ldots$ mají zřejmě stejnou obloukovou vzdálenost, a to menší než $\log\left(1 + \frac{1}{M}\right)$, je jasné, že některý z nich musí padnout od uvažovaného intervalu. To jsme chtěli dokázat.



Obr. 78

106

Vrcholy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pravidelného n-úhelníku si představme v rovině komplexních čísel jako n-té odmocniny z 1. To znamená, že bod A_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ zobrazuje číslo ε^k, kde

$$\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + \mathrm{i} \sin \frac{2\pi}{n},$$

takže $\varepsilon^n = 1$ (obr. 78).

Těchto n bodů je rozděleno do q $(\geqq 2)$ skupin příslušných jednotlivým barvám. Počet vrcholů patřících do j-té skupiny $(j = 1, 2, \ldots, q)$ označme m_j; každé m_j je zřejmě dělitelem čísla n. Skupiny si seřaďme tak, aby bylo

$$m_1 \leqq m_2 \leqq \ldots \leqq m_q. \tag{1}$$

V každé skupině najdeme vrchol s nejmenším kladným argumentem; nechť mu odpovídá číslo ε^{r_j}, kde r_j (pro $j = 1, 2, \ldots, q$) je přirozené číslo. Položíme-li $\varepsilon_j = \varepsilon^{\frac{n}{m_j}}$, můžeme všechny vrcholy j-té skupiny zapsat ve tvaru $\varepsilon^{r_j} . \varepsilon_j^l$, kde $l = 1, 2, \ldots, m_j$.

Označme

$$S = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^{km_1}.$$

Poněvadž zřejmě $S \,.\, \varepsilon^{m_1} = S$ a $\varepsilon^{m_1} \neq 1$, je

$$S = 0 \tag{2}$$

(viz též obdobnou úvahu v prvém řešení úlohy 45). Každé ε^k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ je však rovno některému $\varepsilon^{r_j} \varepsilon_j^l$ $(j = 1, 2, \ldots, q;\ l = 1, 2, \ldots, m_j)$ a také obráceně, každé takové $\varepsilon^{r_j} \varepsilon_j^l$ je rovno některému ε^k. Proto

$$S = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^{km_1} = \sum_{j=1}^{q} \sum_{l=1}^{m_j} (\varepsilon^{r_j} \varepsilon_j^l)^{m_1} = \sum_{j=1}^{q} \left(\varepsilon^{r_j m_1} \sum_{l=1}^{m_j} \varepsilon_j^{l m_1} \right). \tag{3}$$

Pro $j = 1$ máme

$$\sum_{l=1}^{m_1} \varepsilon_1^{l m_1} = \sum_{l=1}^{m_1} \varepsilon^{nl} = \sum_{l=1}^{m_1} 1^l = m_1.$$

První sčítanec v (3) je tedy

$$m_1 \varepsilon^{r_1 m_1}.$$

Pokusíme se nyní ukázat, že $m_1 = m_2$. Předpokládejme, že platí $m_1 < m_2$. Pak pro $j = 2$ máme

$$\sum_{l=1}^{m_2} \varepsilon_2^{l m_1} = \sum_{l=1}^{m_2} \varepsilon^{\frac{n}{m_2} \,.\, m_1 \,.\, l} = 0,$$

neboť $\dfrac{n}{m_2} \cdot m_1$ je přirozené číslo menší než n, takže $\varepsilon^{\frac{n}{m_2} \,.\, m_1} \neq 1$ a lze užít téhož obratu jako v (2). Obdobně se dokáže, že i další sčítanci v (3) (pro $j = 3, \ldots, q$) se [vzhledem k (1)] rovnají nule.

Z předpokladu $m_1 < m_2$ tedy vyplynulo, že pro součet (3) platí

$$S = m_1 \varepsilon^{r_1 m_1} \neq 0. \tag{4}$$

Výsledky (2) a (4) si však odporují.

Skutečně tedy $m_1 = m_2$ a věta je dokázána (dokonce v poněkud silnějším znění). Představte si např. v pravidelném dvanáctiúhelníku dva rovnostranné trojúhelníky a jeden pravidelný šestiúhelník.

107

Zvolme přirozené číslo n a označme A_n množinu všech reálných čísel x, pro něž platí

$$|f(x)| > \frac{1}{n}.$$

Tato množina A_n obsahuje jenom konečný počet prvků. Kdyby totiž A_n byla nekonečná, pak by alespoň jedna z nerovností

$$f(x) > \frac{1}{n}, \qquad f(x) < -\frac{1}{n}$$

platila pro nekonečně mnoho reálných čísel x, takže by zřejmě nemohla být splněna podmínka vyslovená v zadání úlohy. Počet prvků množiny A_n je tedy jisté přirozené číslo m_n.

Sestrojíme nyní posloupnost reálných čísel

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\} \tag{1}$$

takto: Vezmeme nejprve množinu A_1; ta má m_1 prvků, takže za prvních m_1 členů posloupnosti (1) můžeme vzít čísla množiny A_1 v nějakém (celkem libovolném) pořadí. Tím máme určeno prvních m_1 hodnot posloupnosti (1). Potom vezmeme množinu A_2, která má m_2 prvků, a za dalších m_2 členů posloupnosti (1) (tj. členů s indexy $m_1 + 1, \ldots, m_1 + m_2$) vezmeme čísla množiny A_2 (v nějakém pořadí). Tímto postupem můžeme definovat x_n pro každé přirozené n.

Posloupnost (1), jak jsme ji právě popsali, obsahuje všechna reálná čísla x, pro něž $f(x) \neq 0$, a žádná jiná. Je-li totiž $f(x) \neq 0$, pak pro dostatečně velké přirozené číslo n platí

$\frac{1}{n} < |f(x)|$, takže toto x patří do A_n, a je tedy členem posloupnosti (1). Naopak každé číslo x z posloupnosti (1) patří do některé množiny A_n, takže $f(x) \neq 0$.

Hledané číslo c musí proto ležet mimo posloupnost (1). Potřebovali bychom tedy dokázat, že posloupnost (1) nevyčerpává všechna reálná čísla, čili sestrojit reálné číslo c, které nepatří do (1). To provedeme pomocí dekadického rozvoje.

Každé reálné číslo r má, jak známo, svůj nekonečný dekadický rozvoj

$$r = \pm (p_1 p_2 \ldots p_s,\ q_1 q_2 q_3 \ldots),$$

kde $p_1, p_2, \ldots, p_s, q_1, q_2, q_3, \ldots$ jsou číslice. Obráceně každá taková posloupnost číslic spolu se znaménkem $+$ nebo $-$ a polohou desetinné čárky určuje reálné číslo. Přitom dva takové dekadické rozvoje, které se liší na některém místě (majícím v každém rozvoji stejný index), mohou dávat totéž číslo jen tehdy, když jeden končí samými nulami a druhý samými devítkami, např.

$$0{,}248 = 0{,}248\,00000\ldots = 0{,}247\,99999\ldots$$

Při konstrukci čísla c se tedy budeme snažit o to, aby se číslo c lišilo od každého z členů posloupnosti (1) na některém místě a aby se v jeho rozvoji (pokud možno) nevyskytovaly nuly ani devítky.

Každé číslo z (1) si představme v nekonečném dekadickém rozvoji a aby tento rozvoj byl jednoznačný, nebudeme např. připouštět na konci samé devítky.

Nyní je už vše jasné. Vezmeme nejprve číslo x_1 a všimneme si jeho první číslice za desetinnou čárkou; za c_1 pak zvolíme nějakou číslici různou od této číslice i od 0 a 9 (to je možno učinit, neboť číslic je deset, takže se zajisté můžeme vyhnout třem resp. dvěma případům). Pak si všimneme druhé číslice za desetinnou čárkou v rozvoji čísla x_2 a zvolíme číslici c_2 tak, aby byla různá od této číslice i od 0 a 9. Dále zvolíme číslici

c_3 tak, že se vyhneme nule, devítce a třetí číslici za desetinnou čárkou v rozvoji čísla x_3. Obdobně najdeme pro každé přirozené n vhodné c_n (dokonce cítíme značnou volnost při volbě číslic c_n).

Reálné číslo

$$c = 1, c_1 c_2 c_3 \ldots$$

se pak liší od každého členu posloupnosti (1) na některém desetinném místě (totiž od x_n alespoň na n-tém místě za desetinnou čárkou) a poněvadž nekončí samými nulami ani devítkami (vůbec žádné totiž ve svém rozvoji nemá), je jistě různé od všech členů posloupnosti (1). Pro toto c tedy platí $f(c) = 0$ a úloha je rozřešena.

Poznámka 1. V řešení úlohy 107 jsme dospěli k závažnému poznatku, když jsme ukázali, že reálných čísel je „tak mnoho", že žádná (nekonečná) posloupnost je nemůže všechna vyčerpat. Povězme si tedy o „počtu prvků" (čili mohutnostech) množin a o tom, jak velké „nekonečno" si vlastně můžeme představit. Budeme proto porovnávat dvě množiny A, B co do početnosti.

Jsou-li obě množiny konečné, je to snadné. V tomto případě můžeme prostě spočítat prvky každé množiny a porovnat výsledky. Je však myslitelný i jiný přístup. Představme si kupř. dvě dosti velké hromádky kaštanů (množiny A a B), takže nelze na první pohled určit počet prvků; navíc bychom se při jejich počítání mohli splést. Jde-li nám pouze o porovnání počtu kaštanů („kdo nasbíral víc"), bude asi pohodlnější a jistější ubírat z každé hromádky po jednom kaštanu — tvořit dvojice. Tak přiřadíme každému kaštanu z jedné skupiny kaštan z druhé skupiny. Jestliže se tímto kaštany v obou skupinách vyčerpají, je jasné, že obě hromádky měly stejný počet kaštanů. Jinými slovy, dvě konečné množiny mají stejný počet prvků, právě když lze definovat *prosté zobrazení* (které různým vzorům přiřazuje různé obrazy) jedné množiny *na* druhou (viz dvojice kaštanů).

Je přirozené považovat tuto vlastnost dvou množin za projev jejich stejné početnosti (*mohutnosti*), a to i v případě nekonečných množin. (Je samozřejmé, že tento vztah „rovnopočetnosti" je symetrický: druhou množinu lze zobrazit na prvou inverzním zobrazením.) V tomto smyslu můžeme např. říci, že všech přirozených čísel je „stejně tolik" jako všech sudých čísel; příslušné prosté zobrazení mezi těmito dvěma množinami lze definovat velice jednoduše: každému přirozenému číslu n přiřadíme sudé číslo $2n$. Můžete si sami najít např. prosté zobrazení množiny všech přirozených čísel na množinu všech racionálních čísel, takže i množina všech racionálních čísel je „stejně početná" jako množina všech přirozených čísel.

V řešení úlohy 107 jsme však v podstatě dokázali toto tvrzení: *Ať na množině přirozených čísel definujeme jakoukoli (tedy i prostou) posloupnost reálných čísel, vždy se najdou reálná čísla, která nejsou členy této posloupnosti.* Množinu všech přirozených čísel je tedy možno prostě zobrazit do množiny všech reálných čísel, avšak nikoli *na* ni. Je tedy přirozené říci, že množina všech reálných čísel má „větší mohutnost" než množina všech přirozených čísel.

Obecně lze pak tuto vlastnost dvou množin (totiž, že jednu lze prostě zobrazit do druhé, ale nikoli na ni) považovat za projev *„větší mohutnosti"* druhé množiny. V tomto smyslu je tedy např. množina všech reálných čísel „početnější" než množina všech přirozených čísel. Rozmyslete si též, že množina všech těch čísel c, která splňují tvrzení úlohy 107 [tj. pro něž $f(c) = 0$] je nejenom nekonečná (což bylo možno tušit už z našeho důkazu), ale dokonce má větší mohutnost než množina všech přirozených čísel.

Poznámka 2. Poznali jsme dvě nekonečné množiny (přirozená čísla a reálná čísla), z nichž druhá je „početnější" než prvá. Vzniká tedy otázka, zda může být ještě „mohutnější" množina než je množina všech reálných čísel. Kladná odpověď na tuto otázku vyplývá z následujícího zajímavého příkladu:

Buď M množina (např. všech reálných čísel). *Představme si soustavu* $\mathbf{S}$ *všech podmnožin množiny* M. ($\mathbf{S}$ je tedy množina, jejímiž prvky jsou podmnožiny M). *Pak* $\mathbf{S}$ *má větší mohutnost než* M.

Důkaz. Množinu M můžeme zajisté prostě zobrazit do $\mathbf{S}$: každému prvku $m \in M$ přiřadíme jednobodovou množinu $\{m\}$. Toto zobrazení pochopitelně nevyčerpává všechny prvky z $\mathbf{S}$, neboť např. prázdná množina (která jakožto podmnožina M je prvkem $\mathbf{S}$) není při našem zobrazení přiřazena žádnému prvku z M. Z toho však ještě neplyne, že by se při nějakém jiném zobrazení definovaném na M nemohla vyčerpat celá množina $\mathbf{S}$. Zatím můžeme jenom říci, že množina $\mathbf{S}$ má mohutnost „větší nebo rovnou" než M.

Dokažme nyní, že $\mathbf{S}$ má skutečně větší mohutnost než M, tzn. že ať vezmeme jakékoli prosté zobrazení f množiny M do $\mathbf{S}$, pak některý prvek z $\mathbf{S}$ nebude obrazem žádného prvku z M.

Za hledanou podmnožinu $Z \subset M$ (tj. prvek $\mathbf{S}$) můžeme totiž vzít množinu všech těch prvků x z M, pro něž platí $x \notin f(x)$ [$f(x)$ je prvek z $\mathbf{S}$, čili podmnožina M]. Ukažme, že pro každé x z M platí $f(x) \neq Z$.

Pro důkaz sporem předpokládejme, že pro některé x_0 z M je

$$f(x_0) = Z. \tag{1}$$

Zkusme zjistit, zda prvek x_0 patří do Z či nikoliv. Jestliže $x_0 \in Z$, pak podle naší definice množiny Z platí $x_0 \notin f(x_0)$; podle (1) však $x_0 \in f(x_0)$. To je spor a proto musí platit, že $x_0 \notin Z$. Potom ale podle definice množiny Z platí $x_0 \notin f(x_0)$ a podle (1) $x_0 \in Z$, což je zase spor. Předpoklad (1) vede ke sporu a věta je dokázána.

Poznámka 3. Rozřešme si ještě jeden zajímavý problém: *Jestliže mohutnost množiny A je menší nebo rovna mohutnosti množiny B* (tj. existuje-li prosté zobrazení f množiny A do B)

a jestliže zároveň mohutnost množiny B je menší nebo rovna mohutnosti množiny A (tj. existuje-li prosté zobrazení g množiny B do A), *pak množiny A, B mají stejnou mohutnost (tj. existuje prosté zobrazení h množiny A na B).*

Tato věta je celkem zřejmá v případě, kdy A, B jsou konečné množiny. Jinak však vyžaduje důkaz, který zde podáme. Označení ponechme tak, jak jsme je právě zavedli. Musíme sestrojit zobrazení h.

V dalším odstavci rozložíme množiny A a B na jisté třídy prvků. Přitom budeme užívat této úmluvy: prvek x (z A nebo B) nazveme *předchůdcem* prvku y (z A nebo B), jestliže se y dostane z x, provedeme-li několikrát (střídavě) zobrazení f a g (resp. g a f).

Rozložme nyní množinu A ve tři po dvou disjunktní množiny, a to vzhledem k celkovému počtu všech předchůdců (v $A \cup B$) jednotlivých prvků z A: A_S bude množina všech těch bodů z A, které mají sudý (tedy i nulový) počet předchůdců; A_L bude množina všech těch bodů z A, které mají lichý počet předchůdců; A_N bude množina všech těch bodů z A, které mají nekonečně mnoho předchůdců. Obdobně i množinu B rozložíme na disjunktní třídy B_S, B_L, B_N.

Všimněme si nyní, že f zobrazuje A_S na B_L, A_N na B_N a že g^{-1} zobrazuje A_L na B_S. Proto pro x z A_S nebo A_N položíme $h(x) = f(x)$ a pro x z A_L položíme $h(x) = g^{-1}(x)$. Pak h je prosté zobrazení množiny A na množinu B.

Poznámka 4. Nebudeme zde již prodlužovat tuto tematiku; čtenářka resp. čtenář se dozví více při dalším studiu matematiky.

108

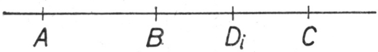
Poněvadž každé tři z daných úseček mají společný bod, mají i každé dvě z nich společný bod. Připusťme, že mezi danými úsečkami $u_1, u_2, \ldots, u_n$ jsou dvě, např. u_1 a u_2, které neleží v jedné přímce, takže mají pouze jeden společný bod A. Je-li u_k kterákoli ze zbývajících úseček, pak trojice u_1, u_2, u_k má podle předpokladu společný bod; proto úsečka u_k musí obsahovat bod A. V tomto případě tedy bod A náleží všem úsečkám $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Nenastane-li případ uvažovaný v předchozím odstavci, pak všechny dané úsečky leží na jedné přímce. V tomto případě však platí silnější tvrzení:

Jestliže úsečky $u_1, u_2, \ldots, u_n$ $(n \geqq 2)$ leží v přímce a každé dvě z nich mají společný bod, pak všechny tyto úsečky mají společný bod.

Důkaz tohoto tvrzení provedeme matematickou indukcí vzhledem k n. Pro $n = 2$ je vše jasné. Předpokládejme, že naše tvrzení platí pro přirozené číslo $n \geqq 2$ a ukažme, že platí i pro $n + 1$. Vezměme tedy $n + 1$ úseček $u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}$, které splňují předpoklady věty (tj. leží v přímce a každé dvě z nich mají společný bod). Podle indukčního předpokladu mají úsečky $u_1, u_2, \ldots, u_n$ společný bod A. Krajní body úsečky u_{n+1} označme B, C. Náleží-li bod A úsečce BC, náleží všem úsečkám $u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}$ a je to hledaný bod. V opačném případě leží bod A mimo úsečku BC, např. na jejím prodloužení za bod B (obr. 79). Pak je hledaným bodem bod B. Každá úsečka u_i (kde $i = 1, 2, \ldots, n$) totiž obsahuje bod A a — podle předpokladu — i jistý bod D_i úsečky BC; tato úsečka u_i musí proto obsahovat celou úsečku AD_i a tedy i bod B. Obdobně postupujeme i v případě, že A leží na prodloužení úsečky BC za bod C (pak hledaným bodem bude C).

Poznámka 1. Věta o úsečkách, kterou jsme právě dokázali, vyplývá též z důležité obecnější tzv. *Hellyovy věty* o kon-

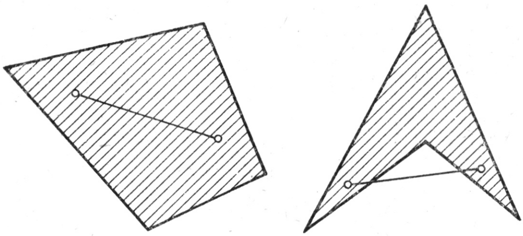


Obr. 79.

vexních množinách. Připomeňme, že množina bodů (na přímce, v rovině nebo v prostoru) se nazývá *konvexní*, jestliže s každými dvěma svými body obsahuje i celou úsečku je spojující. Tak např. na obr. 80a je nakreslena konvexní množina, kdežto obr. 80b ukazuje příklad množiny, která konvexní není. Dalšími příklady konvexních množin jsou kruh, koule, trojúhelník, bod, přímka, polopřímka, úsečka, prázdná množina apod.; naproti tomu např. kružnice není konvexní.

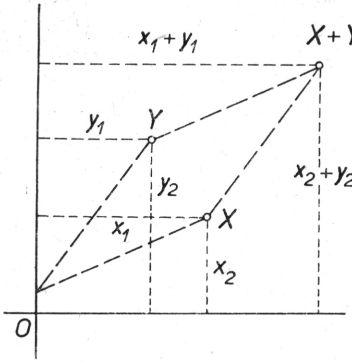
Uvědomte si, že průnikem konvexních množin je zase konvexní množina. Tento průnik může být popřípadě prázdný. Zajímavá Hellyova věta však udává přirozenou postačující podmínku, která zajišťuje neprázdnost průniku většího počtu konvexních množin. Věta zní takto:

Je-li v n-rozměrném prostoru ($n = 1, 2, 3$) *dán konečný počet konvexních množin, jichž je alespoň* $n + 1$ *a z nichž každých* $n + 1$ *má společný bod, pak všechny tyto množiny mají společný bod.*

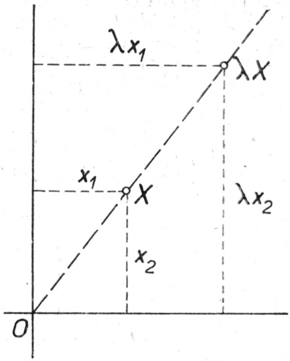


Obr. 80 a, b.

V úloze 108 jsme tedy řešili zvláštní případ této věty (pro úsečky); věta platí dokonce pro každé přirozené číslo n (případy $n = 1, 2, 3$ jsme vyznačili pouze pro větší názornost). S jedním z možných důkazů se zde seznámíme. Obecnou myšlenku vyložíme v rovinném případě, tj. pro $n = 2$. Dříve si však vysvětlíme několik jednoduchých pojmů a tvrzení, které budeme potřebovat.



Obr. 81.



Obr. 82.

Poznámka 2. V rovině zvolme kartézskou soustavu souřadnic. Jsou-li $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$ dva body této roviny, pak jejich součtem míníme bod

$$X + Y = (x_1 + y_1, \ x_2 + y_2)$$

(obr. 81). Obdobně λ-násobkem (kde λ je reálné číslo) bodu $X = (x_1, x_2)$ míníme bod

$$\lambda X = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

(obr. 82). Jsou-li tedy např. λ, μ reálná čísla a $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$ body roviny, pak

$$\lambda X + \mu Y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \ \lambda x_2 + \mu y_2).$$

Položíme-li $Z = X + Y$, pak platí např. $\lambda Z = \lambda X + \lambda Y$, dále $\lambda (\mu X) = (\lambda \mu) X$, $(-1) X = -X$ apod.

Nyní můžeme jednoduše zapsat množinu všech bodů úsečky XY: jsou to právě všechny body tvaru $\lambda X + \mu Y$, kde λ, μ jsou nezáporná čísla a platí $\lambda + \mu = 1$. Představte si jednotlivé souřadnice těchto bodů.

Poznámka 3. Buď A libovolná množina bodů v naší rovině. Tato množina pochopitelně nemusí být konvexní, avšak zajisté existují konvexní množiny, které ji obsahují (např. celá rovina). Průnik všech konvexních množin obsahujících danou množinu A (tj. „nejmenší“ konvexní množinu obsahující A) nazýváme *konvexním obalem* množiny A a značíme *conv* A. Lehko se dokáže, že *conv* A je skutečně konvexní množina (ostatně jsme se o tom již zmínili v pozn. 1). Je-li A konvexní, pak zřejmě *conv* $A = A$. Je-li $B \subset A$, kde A je konvexní, pak *conv* $B \subset A$ (přímo podle definice *conv* B).

Tak např. konvexním obalem kružnice je kruh touto kružnicí určený, konvexním obalem dvou různých bodů je úsečka je spojující.

Představme si v naší rovině m (ne nutně různých) bodů $X_1, X_2, \ldots, X_m$ (m je přirozené číslo). Pak každý bod tvaru

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_m X_m,$$

kde koeficienty $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ jsou nezáporná čísla a $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = 1$, nazveme *konvexní kombinací* bodů $X_1, X_2, \ldots, X_m$.

Není těžké dokázat, že *konvexní obal množiny A vždy splývá s množinou všech konvexních kombinací utvořených od všech konečných podmnožin množiny A.* Proveďte to!

Poznámka 4. Pomocná věta: *V rovině (resp. n-rozměrném prostoru) buď dána konečná množina M skládající se z $m \geqq 4$ (obecně $m \geqq n + 2$) různých bodů. Pak lze množinu M rozložit ve dvě neprázdné a disjunktní podmnožiny X a Y, jejichž konvexní obaly conv X a conv Y mají společný bod.*

Rozmyslete si smysl této věty pro $m = 4$ (při $n = 2$); jestliže dokážete tento speciální případ, můžete vynechat zbytek této poznámky a číst až pozn. 5 a 6. Všimněte si též, že v případě $n = 1$, $m = 3$ věta říká, že ze tří bodů přímky leží jeden mezi oběma zbývajícími.

Důkaz pomocné věty. V rovině můžeme zvolit kartézskou soustavu souřadnic tak, aby žádný z bodů množiny M neležel na souřadnicové ose. Jednotlivé body množiny M zapišme:

$$A_1 = (x_1, y_1), \quad A_2 = (x_2, y_2), \quad \ldots, \quad A_m = (x_m, y_m),$$

takže všechna čísla $x_1, y_1, x_2, \ldots, y_m$ jsou různá od nuly.

Uvažujme soustavu tří rovnic o m neznámých $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_m x_m = 0, \tag{1}$$
$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_m y_m = 0, \tag{2}$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = 0. \tag{3}$$

Poněvadž počet neznámých je alespoň o jednu větší než počet (lineárních) rovnic, lze najít čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, která vyhovují naší soustavě a nejsou všechna rovna nule. Rozmyslete si podrobně tento krok: můžete se nejprve zabývat rovnicemi (1), (2) a dokázat, že existují dvě řešení soustavy (1), (2) taková, že pro vhodné dva indexy $i \neq j$ je v prvém řešení $\lambda_i = 0$, $\lambda_j = 1$ a v druhém naopak $\lambda_i = 1$, $\lambda_j = 0$; z těchto dvou řešení pak utvořte hledané řešení soustavy (1), (2), (3).

Budiž tedy $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ takové řešení soustavy rovnic (1), (2), (3). Poněvadž všechna čísla λ_i nejsou rovna nule, jsou mezi nimi — vzhledem k (3) — čísla kladná i záporná a popř. i nuly. Písmenem I označme (neprázdnou) množinu všech těch indexů i, pro něž platí $\lambda_i > 0$; obdobně J bude (neprázdná) množina těch j, pro něž je $\lambda_j < 0$. Pak

$$c = \sum_{i \in I} \lambda_i > 0$$

a vzhledem k (3)

$$\sum_{j \in J} \lambda_j = -c.$$

Všimněme si ještě, že — v souladu s pozn. 2 — můžeme soustavu rovnic (1), (2) zapsat jedinou rovnicí

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_m A_m = 0. \tag{4}$$

Naše řešení $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ splňuje tedy podmínku (4). Vzhledem k označení, které jsme zavedli v předchozím odstavci, můžeme podmínku (4) psát ve tvaru

$$\sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{c} A_i = \sum_{j \in J} \left(\frac{-\lambda_j}{c} \right) A_j. \tag{5}$$

Všechny koeficienty v (5) jsou nezáporná (vlastně kladná) čísla a na každé straně dávají součet 1. Vztah (5) tedy říká, že konvexní obaly bodů A_i (pro $i \in I$) a A_j (pro $j \in \mathcal{J}$) mají společný bod (viz poslední odstavec v pozn. 3).

Množina X složená právě ze všech bodů A_i, kde $i \in I$, a množina Y složená ze všech zbývajících bodů množiny M (sem tedy zařazujeme i ty body A_k, pro jejichž indexy k mohlo být $\lambda_k = 0$) tvoří pak požadovaný rozklad množiny M. Pomocná věta je dokázána.

Poznámka 5. Nyní jsme již připraveni uvést slíbený důkaz Hellyovy věty. Důkaz provedeme indukcí podle m (počtu daných konvexních množin). Nejmenší m, které přichází v úvahu, je $m = 3$ (obecně $m = n + 1$). V tomto případě tvrzení věty splývá s předpokladem a není co dokazovat.

Předpokládejme, že věta platí pro každou soustavu skládající se z $m \geqq 3$ (obecně $m \geqq n + 1$) konvexních množin. Vezměme $m + 1$ konvexních množin

$$K_1, K_2, \ldots, K_m, K_{m+1} \tag{*}$$

takových, že každé tři ($n + 1$) z nich mají společný bod.

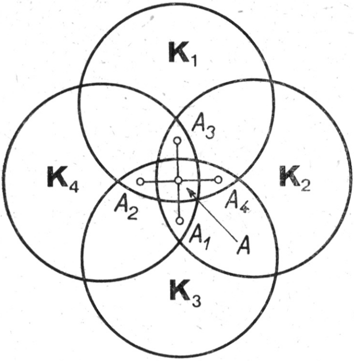
Ubereme-li z (*) množinu K_i ($i = 1, 2, \ldots, m + 1$), pak zbylých m množin má podle indukčního předpokladu společný bod, který označíme A_i (je-li více společných bodů, zvolíme libovolný z nich). Jestliže pro některé dva indexy $i \neq j$ platí $A_i \equiv A_j$, pak tento bod náleží všem množinám (*) a jsme hotovi. Nechť jsou tedy všechny body $A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}$ navzájem různé.

Písmenem M označíme množinu bodů $A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}$. Počet jejích prvků je $m + 1 \geqq 4$ (obecně $\geqq n + 2$), takže lze užít pomocné věty z pozn. 4. Množinu M lze rozložit ve dvě neprázdné a disjunktní části X, Y tak, že existuje bod

$$A \in conv\ X \cap conv\ Y.$$

Tento bod A zřejmě náleží všem množinám (*) — viz obr. 83 pro čtyři množiny, kde $X = \{A_1, A_3\}$, $Y = \{A_2, A_4\}$. Tím je věta dokázána.

Obr. 83.



Poznámka 6. V rovinném případě (tj. pro $n = 2$) je možno obecnou myšlenku důkazu, kterou jsme právě naznačili, ještě trochu zjednodušit. Všimněte si, že pomocnou větu z pozn. 4 stačí vždy dokázat pro nejmenší možné m (tj. pro $m = 4$ resp. $m = n + 1$); pro větší m je pak ihned zřejmá. A to lze v rovinném případě provést čistě geometricky, bez řešení rovnic. Potom se dokáže Hellyova věta tak, jako v pozn. 5. Proveďte to!

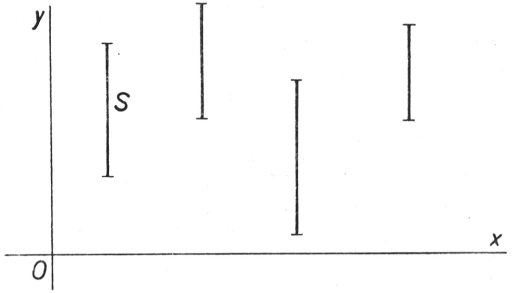
Jsou ovšem myslitelné i jiné důkazy této zajímavé věty. Nebudeme je zde už popisovat, zato si všimneme některých důsledků.

109

Můžeme předpokládat, že každé dvě úsečky, které leží v přímce, mají společný bod; jinak by všechny úsečky ležely v jedné přímce a byli bychom hotovi. Pak všechny úsečky ležící v jedné přímce mají společný bod (viz řešení úlohy 108).

Zvolme v rovině kartézskou soustavu souřadnic x, y tak, aby (všechny) dané úsečky byly rovnoběžné s osou y (obr. 84). Je-li S jedna z nich, označme C_S množinu všech takových bodů (α, β) naší roviny, že přímka $y = \alpha x + \beta$ má s úsečkou S společný bod. Pak C_S je (neprázdná) konvexní množina bodů v rovině (ověřte!). Přitom každé tři takové množiny mají společný bod (utvořený z koeficientů přímky, která není rovnoběžná s osou y a protíná příslušné tři úsečky; uvědomte si, že taková

Obr. 84.

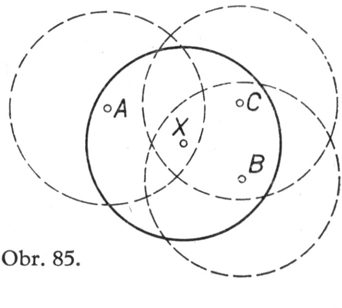


přímka vždy existuje). Proto podle Hellyovy věty (viz předchozí poznámky) existuje bod (α_0, β_0) společný všem množinám C_S a přímka $y = \alpha_0 x + \beta_0$ protíná všechny dané úsečky.

Poznámka 1. Dalším důsledkem Hellyovy věty je např. toto tvrzení: *V rovině je dáno $n \geqq 3$ bodů, z nichž každé tři leží v nějakém kruhu o poloměru r. Pak všechny tyto body leží v kruhu o poloměru r.*

Důkaz. Potřebujeme dokázat, že v naší rovině existuje takový bod O, od něhož má každý z daných bodů vzdálenost $\leqq r$. Jinak řečeno, ptáme se, zda existuje bod O společný všem n kruhům, které mají středy v daných bodech a poloměry vesměs rovné r.

Podle Hellyovy věty stačí ověřit, že každé tři z uvažovaných n kruhů mají společný bod. To je však jasné, neboť za tento společný bod (X) lze vzít střed kruhu, který obsahuje zvolené tři body (A, B, C) a má poloměr r (takový kruh existuje podle předpokladu tvrzení). Viz obr. 85.



Obr. 85.

Poznámka 2. Na základě pozn. 1 nyní snadno dokážeme toto tvrzení: *V rovině je dáno $n \geqq 3$ bodů. Vzdálenost žádných dvou z nich nepřevyšuje kladné číslo d. Pak všechny tyto body leží v jistém kruhu o poloměru* $\frac{d}{\sqrt{3}}$.

Důkaz. Vzhledem k výsledku pozn. 1 stačí dokázat, že každé tři z daných n bodů jsou obsaženy v některém kruhu o poloměru $\frac{d}{\sqrt{3}}$. Buďte tedy A, B, C tři z našich bodů. Leží-li v přímce anebo jsou-li vrcholy neostroúhlého trojúhelníka, lze sestrojit dokonce kruh o poloměru $\frac{d}{2} < \frac{d}{\sqrt{3}}$, který je obsahuje.

Předpokládejme proto, že trojúhelník ABC je ostroúhlý. Alespoň jeden z jeho vnitřních úhlů je $\geqq 60°$. Nechť je to např. $\alpha = \sphericalangle BAC$. Pro poloměr r kružnice opsané trojúhelníku ABC platí

$$r = \frac{BC}{2\sin\alpha} \leqq \frac{d}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

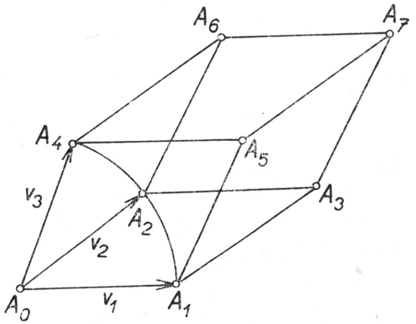
Každé tři z daných n bodů jsou tedy obsaženy v jistém kruhu o poloměru $\frac{d}{\sqrt{3}}$, a tím je vše dokázáno.

Obdobnou větu (a nejen pro konečné množiny) lze vyslovit i v n-rozměrném euklidovském prostoru.

Předběžná úvaha. Pro $m = 1$ stačí zvolit dva body o vzdálenosti 1, pro $m = 2$ trojici vrcholů rovnostranného trojúhelníka o straně 1 nebo čtveřici vrcholů kosočtverce o straně 1, který nemá úhel 60°. Pro $m = 3$ je asi nejjednodušším řešením soustava osmi bodů $A_0, \ldots, A_7$ naznačených na obr. 86, kde všechny nakreslené rovnoběžníky s vrcholy v těchto bodech jsou kosočtverce o straně 1 bez úhlu 60°. Označme si vektory

$$v_1 = \overrightarrow{A_0A_1},\ v_2 = \overrightarrow{A_0A_2},\ v_3 = \overrightarrow{A_0A_4}.$$

Obr. 86.



Je pak

$$A_1 = A_0 + v_1,\quad A_2 = A_0 + v_2,$$
$$A_3 = A_0 + v_1 + v_2,\quad A_4 = A_0 + v_3,$$
$$A_5 = A_0 + v_1 + v_3,\quad A_6 = A_0 + v_2 + v_3,$$
$$A_7 = A_0 + v_1 + v_2 + v_3.$$

Všechny tyto body A_k jsou tedy tvaru

$$A_0 + \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \varepsilon_3 v_3,$$

kde ε_1, ε_2, ε_3 jsou čísla rovná nule nebo jedné (jak souvisí tato čísla s dvojkovým vyjádřením indexu k?). Podrobnější vyšetření tohoto případu $m = 3$ vede k obecnému řešení.

Vlastní řešení. Při $m = 1$ stačí vzít dva body o vzdálenosti 1. V dalším tedy bude $m \geqq 2$ dané přirozené číslo. V rovině existuje soustava vektorů $v_1, v_2, \dots, v_m$ těchto vlastností ($|v|$ značí délku vektoru v):

$$|v_i| = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m); \tag{1}$$

$$0 \neq |c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_m v_m| \neq 1 \tag{2}$$

pro libovolná $c_1, c_2, \dots, c_m$, která nabývají jen některých z hodnot $-1, 0, 1$, ale aspoň dvě z nich jsou nenulová. Toto tvrzení je možno lehko ověřit matematickou indukcí vzhledem k m ($\geqq 2$).

Ukážeme, že požadované vlastnosti má množina S skládající se z 2^m bodů tvaru

$$A = A_0 + \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \dots + \varepsilon_m v_m,$$

kde A_0 je libovolný pevně zvolený bod v naší rovině a ε_i ($i = 1, 2, \dots, m$) jsou čísla rovná nule nebo jedné.

Buď A bod množiny S odpovídající skupině čísel $\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \dots, \tilde{\varepsilon}_m$ rovných nule nebo jedné. Z (1) a (2) plyne, že v S existuje právě m bodů, jejichž vzdálenost od A je 1. Jsou to totiž právě ty body, jejichž příslušné skupiny čísel $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ se liší od $\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \dots, \tilde{\varepsilon}_m$ právě na jednom místě, tj. $|\tilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1| + |\tilde{\varepsilon}_2 - \varepsilon_2| + \dots + |\tilde{\varepsilon}_m - \varepsilon_m| = 1$.

111

Utvořme součty všech čísel v jednotlivých řádcích a sloupcích a označme p nejmenší z těchto součtů. Je-li $p \geqq \frac{n}{2}$, pak

$$s \geqq np \geqq \frac{1}{2} n^2$$

a jsme hotovi.

Zbývá tedy prozkoumat možnost $p < \frac{n}{2}$. Abychom mohli lépe vyjádřit myšlenku důkazu, předpokládejme např., že právě prvý řádek má součet p a že právě na prvních q místech v něm jsou kladná čísla; jinak by byla úvaha obdobná. V našem případě se součet všech čísel v posledních $n - q$ sloupcích rovná alespoň číslu $(n - p)(n - q)$, zatímco součet všech čísel v prvních q sloupcích bude nejméně pq. Platí tedy

$$s \geqq (n - p)(n - q) + pq = n^2 - n(p + q) + 2pq =$$
$$= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}(n - 2p)(n - 2q) > \frac{1}{2}n^2,$$

neboť $n > 2p \geqq 2q$.

Úloha je rozřešena.

112

Představme si v prostoru kartézskou soustavu souřadnic, takže body můžeme sčítat a násobit čísly „po souřadnicích", tj. tak, jak je to naznačeno v pozn. 2 za řešením úlohy 108. Zápis

$$A_{k-1} + A_k = B_{k-1} + B_k, \tag{1}$$

kde $k = 1, 2, \ldots, n$, pak vyjadřuje předpoklad úlohy, že dvojice $A_{k-1}A_k$ a $B_{k-1}B_k$ mají společný střed.

Píšíce rovnosti (1) se střídavými znaménky, dostaneme po sečtení

$$A_0 + A_n = B_0 + B_n, \quad \text{je-li } n \text{ liché,}$$

a

$$A_0 - A_n = B_0 - B_n, \quad \text{je-li } n \text{ sudé.}$$

V prvém případě tedy $B_n = B_0$ jedině pro $B_0 = A_0$, zatímco v druhém $B_n = B_0$ vždy.

P ř e d b ě ž n á   p o z n á m k a. Při řešení této zajímavé úlohy budeme potřebovat některé základní pojmy z matematické analýzy. Bude proto užitečné, když si je nejdříve připomeneme.

Buď Z množina bodů v prostoru. Bod A nazýváme *hromadným bodem* množiny Z, jestliže v libovolné jeho blízkosti se hromadí body množiny Z, čili přesněji, když každá koule o středu A obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny Z. Množinu Z spolu se všemi jejími hromadnými body nazýváme uzávěrem Z a značíme *uz* Z.

Říkáme, že bod A je *limitou posloupnosti* bodů $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže každá koule o středu A obsahuje všechny členy této posloupnosti, až na konečný počet. V tomto případě též říkáme, že posloupnost *konverguje* (k bodu A). Všimněte si, že posloupnost může mít nejvýše jednu limitu a že uvedená definice je přirozeným zobecněním známé definice limity číselné posloupnosti.

Buď Z zdola omezená neprázdná množina reálných čísel (tzn., že pro každé $z \in Z$ platí $z \geqq c$, kde c je konstanta). Pak existuje největší dolní mez množiny Z, tj. takové číslo r, že pro každé $z \in Z$ platí $z \geqq r$ a pro každé $\varepsilon > 0$ lze najít takové $z \in Z$, že $r + \varepsilon > z \geqq r$. Toto číslo r, které je zřejmě jediné, nazýváme *infimem* množiny Z. Obdobně mají shora omezené neprázdné množiny reálných čísel tzv. *supremum*.

Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *omezená posloupnost reálných čísel* (tj. taková, že pro všechna přirozená n platí $|a_n| \leqq C$, kde C je konstanta). Tato posloupnost nemusí mít limitu, jak ukazuje příklad $a_n =$ $= (-1)^n$. Je však svrchovaně důležité, že *lze vybrat podposloupnost* $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ (kde $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ jsou přirozená čísla), *která už limitu má.* Tuto větu lze celkem jednoduše dokázat postupným půlením intervalu $(-C, C)$ resp. těch jeho částí (podintervalů), které obsahují nekonečně mnoho členů dané posloupnosti; přitom víme, že každá monotónní posloupnost (při důkazu vytvoří krajní body zmenšujících se intervalů dvě takové posloupnosti) má limitu (totiž své infimum resp. supremum).

Obdobně z každé omezené posloupnosti bodů $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ v prostoru (tj. takové, která je obsažena v nějaké kouli), lze vybrat konvergentní podposloupnost. Toto tvrzení lze dokázat trojím užitím věty z předchozího odstavce pro kartézské souřadnice členů dané posloupnosti.

Doporučujeme čtenářům, aby si důkladně rozmysleli pojmy naznačené v této poznámce.

Vlastní řešení. Především je jasné, že daná množina M je omezená, tzn. soubor X všech koulí, které ji obsahují, je neprázdný. Budiž r infimum poloměrů všech koulí z X. Je-li $r = 0$, není co dokazovat. Buď tedy $r > 0$ a nechť $K_n = (S_n, r_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, jsou koule z X takové, že (nerostoucí) posloupnost poloměrů $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu r (z definice infima). Posloupnost bodů $\{S_n\}$ je omezená, neboť je obsažena např. v kouli o poloměru r_1, která má střed v libovolném bodě množiny M. Proto lze vybrat podposloupnost $\{S_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergující k jistému bodu S; příslušná posloupnost poloměrů $\{r_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ pak ovšem opět konverguje k číslu r. Koule $K = (S, r)$ obsahuje množinu M (kdyby některý bod z M neležel v K, pak by neležel ani v K_n pro velké n — nakreslete si obrázek) a žádná jiná koule o menším poloměru tuto vlastnost nemá (jak plyne z minimality r).

Podle předpokladu úlohy lze k bodu S najít v množině M (jediný) nejvzdálenější bod P, který musí, jak vyplývá z předchozího, ležet na povrchu koule K. Kdyby množina *uz* M neměla na povrchu K již žádný další bod (kromě P), bylo by možno kouli K posunout ve směru $\overrightarrow{SP}$ tak, aby množina M ležela celá uvnitř této posunuté koule (rozmyslete podrobně!), načež by bylo možno sestrojit soustřednou kouli o menším poloměru, která by také obsahovala M. To však není možné, a proto na povrchu koule K leží ještě další bod Q ($\neq P$) množiny uz M. Označme R bod souměrně sdružený s bodem Q podle středu S. Pak

$$2r = RQ > RY$$

pro každé $Y \in M$ ($\subset K$), $Y \neq Q$. Avšak k bodu R musí v množině M existovat nejvzdálenější bod a z vlastností bodu Q vyplývá, že právě on musí být tímto nejvzdálenějším bodem (nakreslete si obrázek). Nutně tedy $Q \in M$. Pak ale k bodu S máme v množině M dva různé nejvzdálenější body P, Q. Tento spor jsme odvodili z předpokladu $r > 0$. Platí tedy $r = 0$ a věta je dokázána.

Užitá literatura

a) Časopisecká

M. Fiedler: Geometrie simplexu v E_n, Časopis pro pěstování matematiky, Praha; roč. 79 (1954), str. 297—320; roč. 80 (1955), str. 462—476; roč. 81 (1956), str. 182—223.
M. Fiedler: Über qualitative Winkeleigenschaften der Simplexe, Čech. mat. žurnal 7, Praha 1957, str. 463—478.
V. L. Klee: The use of research problems in high school geometry, Educ. St. Math. 3 (1971), str. 482—489.
C. M. Petty, J. M. Crotty: Characterizations of spherical neighbourhoods, Can. J. Math. XXII (1970), str. 431—435.
25-ja matematičeskaja olimpiada, Sbornik podgotoviteľnych zadač, Moskva 1962, str. 9.
Gazeta matematică, seria B, București 1971, str. 30.
Középiskolai Matematikai Lapok Budapest, XXVII (1963), str. 1.
Matematická olympiáda, Praha; XIX. ročník (1969), str. 6; XX. ročník (1970), str. 8; XXI. ročník (1971), str. 5 a 7.
Matematika v škole, Moskva; roč. 1970, No. 5, str. 70—71; roč. 1971, No. 5, str. 76.
Pokroky MFA, roč. XV, Praha 1970, str. 266 a 272.
Rozhledy matematicko-fyzikální, Praha; roč. 50 (1971—72), str. 35 a 79.

b) Knižní

S. Budurov, V. Florov: Sbornik ot zadači za matematičeski olimpiadi, Sofia 1966.
L. Danzer, B. Grünbaum, V. Klee: Helly's theorem and its relatives, from Convexity, Amer. Math. Soc. 1963.
E. B. Dynkin, S. A. Molčanov, A. L. Rozentaľ: Matematičeskije sorevnovanija, Moskva 1970.

E. B. Dynkin, S. A. Molčanov, A. L. Rozental', A. K. Tolpygo: Matematičeskije zadači, Moskva 1965.
A. M. Jaglom, I. M. Jaglom: Neelementarnyje zadači v elementarnom izloženii, Moskva 1954.
I. M. Jaglom, V. G. Boltjanskij: Vypuklyje figury, Moskva 1951.
J. L. Kelley: Obščaja topologija, Moskva 1968.
E. A. Morozova, I. S. Petrakov: Meždunarodnyje matematičeskije olimpiady, Moskva 1971.
W. Sierpiński: 200 zadań z elementarnej teorii liczb, Warszawa 1964.
W. Sierpiński: Z pogranicza geometrii i arytmetyki, Warszawa 1959.
S. Straszewicz: Zadania z olimpiad matematycznych, Warszawa 1956.
S. Straszewicz: Zadania z olimpiad matematycznych, tom II, Warszawa 1961.
S. Straszewicz: Czternasta olimpiada matematyczna, Warszawa 1964.
S. Straszewicz: Piętnasta olimpiada matematyczna, Warszawa 1965.
D. O. Škljarskij, N. N. Čencov, I. M. Jaglom: Izbrannyje zadači i teoremy elementarnoj matematiki, časť 1, Moskva 1954.
F. A. Valentine: Convex Sets, New York 1964.
N. B. Vasiljev, A. A. Jegorov: Sbornik podgotoviteľnych zadač k Vserossijskoj olimpiade junych matematikov, Moskva 1963.
n-tý ročník matematické olympiády ($n = 2, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18$), Praha 1954—1970; za přispění spolupracovníků zpracovali *V. Macháček, J. Mída, J. Moravčík, J. Vyšín, R. Zelinka, F. Zítek;* vydalo SPN.

Některá další doporučená literatura

I. Białecki: Funkcjonowanie olimpiad matematycznych, Ossolineum, Wrocław 1975.

M. Born: Moja žizn' i vzgljady, Progress, Moskva 1973.

B. Grünbaum: Etjudy po kombinatornoj geometrii i teorii vypuklych tel, Nauka, Moskva 1971.

J. Hadamard: Psychologia odkryć matematycznych, PWN, Warszawa 1964.

K. Havlíček a kol.: Cesty moderní matematiky, Orbis, Praha 1960.

C. Iwaniszewska: Astronomie Mikuláše Koperníka, Orbis (edice Pyramida), Praha 1972.

M. Kac, S. Ulam: Matematika i logika (retrospektiva i perspektivy), Mir, Moskva 1971.

J. Kepler: Tajemnica kosmosu, Ossolineum, Wrocław 1972.

J. E. Littlewood: Matematičeskaja smes', Fizmatgiz, Moskva 1962.

V. N. Komarov: Po sledam beskonečnosti, Znanije, Moskva 1974.

B. Pascal: Rozprawy i listy, PAX, Warszawa 1962.

R. Pétérová: Hry s nekonečnom, Osveta Martin 1958.

G. Pólya: Matematičeskoje otkrytije, Nauka, Moskva 1970.

B. Pospíšil: Nekonečno v matematice, Praha 1949.

A. Rényi: Ars mathematica, Magvetö Könyvkiadó, Budapest 1973.

W. W. Sawyer: Preljudija k matematike, Prosveščenije, Moskva 1972.

J. Sedláček: Nebojte se matematiky, SNTL — Práce, Praha 1969.

R. Sikorski: Matematyka — nauka dziwna, Matematyka XVI (1963), str. 177—180.

H. Steinhaus: Zadači i razmyšlenija, Mir, Moskva 1975.

S. Straszewicz, J. Browkin, J. Rempała: 25 lat Olimpiady Matematycznej, wybór zadań, WSiP, Warszawa (v tisku).

D. J. Struik: Dějiny matematiky, Orbis, Praha 1963.
I. S. Šklovskij: Vselennaja, žizn', razum, Nauka, Moskva 1973.
R. Thom: Sovremennaja matematika — suščestvujet li ona?, Matematika v škole (No. 1), Moskva 1973.
R. Thom: Matematyka „nowoczesna": pomyłka pedagogiczna i filozoficzna? Wiadomości Matematyczne 18 (1974), str. 113—129.
N. J. Vilenkin: Vyprávění o množinách, SPN, Praha 1973.
A. N. Whitehead: Matematika a dobro a jiné eseje, Mladá fronta (edice Váhy), Praha 1970.
Cesta k vědění, edice nakladatelství Academia, Praha.
Dvacet let matematické olympiády v ČSSR, Praha 1971.
Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Academia, Praha.
Rozhledy matematicko-fyzikální, SPN, Praha.
Škola mladých matematiků, edice Mladé fronty, Praha.
Vesmír, Academia, Praha.
G. Polya: Matematika i pravdopodobnyje rassuždenija, Nauka, Moskva 1975 (dodáno v korektuře).

OBSAH

EDICE POMOCNÉ KNIHY PRO ŽÁKY

Zpracovali prof. RNDr Miroslav Fiedler DrSc., a Jaroslav Zemánek

VYBRANÉ ÚLOHY MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

KATEGORIE A + MMO

Obálku a vazbu navrhl Jaromír Jarkovský. Vydání 1. – Praha 1976 – Počet stran 248. Odpovědný redaktor: Stanislav Horák. Výtvarná redaktorka: Milada Slaninová. Technická redaktorka: Jitka Jeníková. Vytisklo Rudé právo, tiskařské závody, Brno. AA 9,96 (8,70 AA textu, 1,26 AA grafiky) – VA 10,40. Náklad 2000 výtisků. Tematická skupina a podskupina 03/2. Cena brožovaného výtisku Kčs 12,50 505/21, 825

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze jako svou publikaci č. 65-0-141.

14–381–76 Kčs 12,50

matematická
olympiáda

MO

SPN 65-0-141

14-381-76
03/2 Kčs 12,50