

[dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie Z

Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor):
[dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády.
Kategorie Z. Sbírka řešených úloh z III. až XXX. ročníku soutěže.
(Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1982.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/405276>

Terms of use:

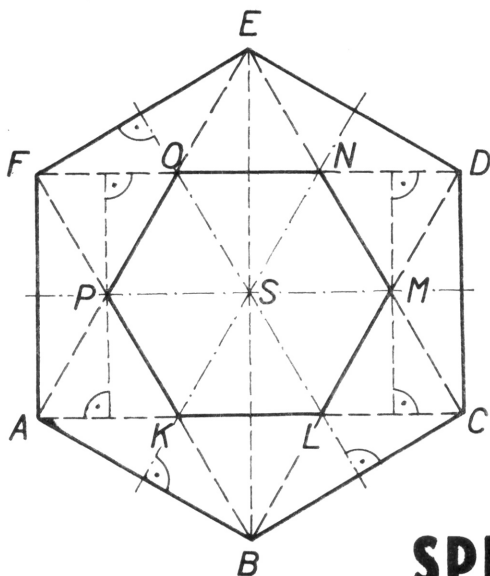
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MO

Vybrané úlohy z matematické olympiády



SPN

Vybrané úlohy z matematické olympiády

KATEGORIE **Z**

Sbírka řešených úloh
z III. až XXX. ročníku soutěže

STÁTNÍ
PEDAGOGICKÉ
NAKLADATELSTVÍ
PRAHA

**Zpracovali doc. Jan Vyšín, CSc., PhDr. Vlastimil Macháček
a RNDr. Jiří Mída, CSc.**

Recenzovali Eduard Janyš a PhDr. Jitka Kučerová

© Doc. Jan Vyšín, CSc. za kolektiv, 1982

Obsah

Předmluva	5
 ARITMETIKA A ALGEBRA	 11
I. Aritmetika přirozených čísel	13
II. Algebra	44
III. Úlohy logického charakteru	69
IV. Úlohy z reality	99
 GEOMETRIE	 133
I. Úlohy na konstrukci čar vzniklých pohybem bodu	135
II. Úlohy na výpočet velikosti obrazců a ploch	153
III. Důkazové úlohy	189
IV. Úlohy s výpočty	215
V. Nerovnosti v geometrii	247
VI. Množiny všech bodů dané vlastnosti	258
VII. Úlohy konstrukční	290
VIII. Stereometrie	343

Předmluva

Dáváme do rukou českým i slovenským čtenářům nové rozšířené a přepracované vydání sbírky řešených soutěžních úloh *matematické olympiády kategorie Z*, tj. úloh určených pro žáky nejvyšších ročníků základních škol.

Při přípravě tohoto nového vydání jsme uvážili zejména to, že nynější žáci 7. a 8. ročníku ZŠ jsou aspoň o rok mladší než žáci dřívějšího nejvyššího ročníku ZDŠ, a tedy jejich matematický fond je podstatně menší. Nejde jenom o matematické vědomosti, ale i o znalost postupů řešení a všeobecně o zkušenosti v řešení úloh. Proto jsme přidali do sbírky hlavně jednodušší úlohy a v řešení jsme se snažili napovídat čtenářům aspoň částečně postup řešení naznačením odpovědí na otázku *»jak na to«*. Zdá-li se vám tato pomoc nedostatečná, uvažte, že jsme byli vázáni zpracovat v podstatě jen úlohy, *které prošly soutěží* a pokud možno je neměnit. Proto jsme upravovali hlavně řešení, v nichž jsme se snažili vyhnout se trikům, kde některé kroky *»padají z nebe«* a které mohou čtenáře znechucovat. Náš názor je, že k řešení úlohy se má dospět postupem *»přirozeným«*, ne pomocí umělých obrátů. K přirozenému postupu patří - zvláště na úrovni kategorie *Z* - *zkoušení, experimentování, vyšetřování speciálních případů, sestavování tabulek*. Velmi často se při řešení tzv. *slovních úloh* podaří pomocí jednoduché tabulky nalézt výrokovou formu potřebnou pro řešení úlohy.

To se osvědčuje zvláště tehdy, když jde o přechod od slovního vyjádření k vyjádření algoritmickému (pomocí matematických symbolů, tzv. sestavování rovnic). Např. máme úlohu s textem:

Jsem dnes tak stár, jako byl můj strýc tehdy, když byl dvakrát tak stár, jako jsem byl já. Jak je dnes stár strýc?

Použijeme pomocné tabulky pro počty let:

	dnes	dříve
já	$2x$	x
strýc		$2x$

Rozdíl stárí strýcova a mého je podle druhého sloupce $2x - x = x$; do prázdného okénka je tedy třeba vepsat $3x$. Úloha má neomezený počet řešení, daný např. tabulkami:

30	15								
45	30	nebo		40	20	nebo		20	10
				60	40			30	20

Musíme uvážít, že žáky zajímají takové úlohy, k jejichž řešení jim sice vystačí jejich školské vědomosti, ale jejichž výsledek jim není předem znám, na který mohou být zvědaví. Uvedeme dvě ukázky toho druhu.

I. Ke každému přirozenému číslu x lze určit jednociferné číslo $\bar{x}$ takto:

Sestrojíme posloupnost přirozených čísel, jejíž první člen je číslo x a každý další člen je ciferný součet předcházejícího čísla; poslední člen posloupnosti je jednociferné číslo $\bar{x}$.

Např. $x = 21\ 594$; $21\ 594 \rightarrow 2 + 1 + 5 + 9 + 4 = 21 \rightarrow 2 + 1 = 3$, $\bar{x} = 3$.

Nebo $x = 835\ 696$; $835\ 696 \rightarrow 8 + 3 + 5 + 6 + 9 + 6 = 37 \rightarrow 10 \rightarrow 1$, $\bar{x} = 1$. Toto číslo $\bar{x}$ budeme nazývat stručně zbytek.

Budeme zkoumat vztah zbytků dvou činitelů ke zbytku jejich součinu. Je např. $354 \cdot 61 = 21\ 594$, $\overline{354} = 3^*$, $\overline{61} = 7$, $\overline{21\ 594} = 3$, $3 \cdot 7 = 21 = 3$. Jiný příklad: $754 \cdot 96 = 72\ 384$, $\overline{754} = 7$, $\overline{96} = 6$, $\overline{72\ 384} = 6$, $7 \cdot 6 = 42 = 6$. Další příklad: $83 \cdot 50 = 4150$, $\overline{83} = 2$, $\overline{50} = 5$, $\overline{4150} = 1$, $2 \cdot 5 = 10 = 1$.

Příklady tohoto druhu nás vedou k domněnce, že platí obecně:

Vypočteme zbytek z_1 součinu dvou čísel;
vypočteme zbytky z_2, z_3 obou činitelů;
vypočteme zbytek z_4 součinu $z_2 \cdot z_3$;

pak platí

$$z_1 = z_4.$$

Pokuste se vyslovit tuto domněnku slovy. Můžete ji objasnit ještě na dalších číselných příkladech.

Mnohé z čtenářů bude asi zajímat odpověď na otázku, *zda*li ta věta opravdu obecně platí a *proč*, tj. otázka odůvodnění věty. Jistě si vzpomenou na aritmetiku, kde ciferný součet souvisí

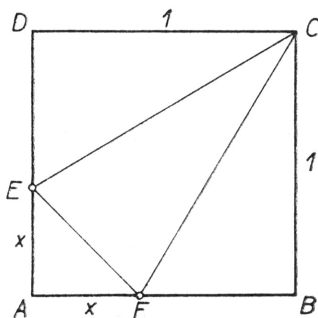
*) Zápis 354 znamená zbytek čísla 354.

úzce s kritériem dělitelnosti devíti. Nebudeme větu dokazovat, prozradíme jen, že důkaz se opírá o vzorec

$$x = \bar{x} + 9n,$$

kde x je přirozené číslo, $\bar{x}$ jednociferné číslo, $9n$ vhodný násobek devíti; je tedy $\bar{x}$ zbytek při dělení čísla x devíti.

II. Druhá ukázka je z geometrie. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky 1 (obr. 1). Jemu je vepsán rovnoramenný trojúhelník EFC ($CE = CF$). Tím se rozdělí čtverec $ABCD$ na čtyři trojúhelníky. Rozdělení je takové, že tři pravouhlé trojúhelníky AEF , CDE , CBF mají obsahy sobě rovné. Jaký obsah má trojúhelník CEF ?



Obr. 1

Tato úloha je problém s algebraickými výpočty. Označíme délky $AE = AF = x$ a vyjádříme obsahy:

$$\triangle AEF = \frac{1}{2} x^2, \quad \triangle CDE = \triangle CBF = \frac{1}{2} (1 - x).$$

Z požadavku úlohy $\triangle AEF = \triangle CDE$ dostaneme pro délku x rovnici:

$$x^2 + x - 1 = 0$$

Na levé straně provedeme *úpravu, která stojí za zapamatování*:

$$(*) \quad (x + \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4} - 1 = 0$$

a dále

$$(**) \quad x = \tfrac{1}{2} (\sqrt{5} - 1).$$

Obsah $\triangle CEF$ dostaneme ze vztahu

$$\triangle CEF = 1 - \tfrac{3}{2}x^2,$$

když do něj dosadíme za x ze vztahu (**).

Úloha je ukázka složitější úpravy algebraických výrazů. Úprava (*) málo přesahuje rámec školské matematiky; ale nezapomeňte, že cíl *MO* není jen soutěžit, ale také se něčemu ne příliš složitému navíc přiučit. Uvažte ještě, že matematika není jen *řešení úloh*, ale je třeba také se seznámit se základními poznatky (pojmy a větami), *které tvoří tzv. teorii*.

Především jsme se však snažili zdůraznit, vyložit a rozvést pracovní metody a postupy, neboť ty jsou pravým klíčem ke studiu matematiky.

Ve sbírce jsme ponechali s malými úpravami rozčlenění na kapitoly podle témat. Má tedy toto vydání 12 kapitol s tímto obsahem:

- Úlohy z aritmetiky přirozených čísel
- Úlohy z algebry
- Úlohy logického charakteru

- Úlohy z reality
- Úlohy na konstrukce čar vzniklých pohybem bodů
- Úlohy na výpočet velikostí obrazců a ploch
- Důkazové úlohy v geometrii
- Geometrické úlohy s výpočty
- Nerovnosti v geometrii
- Úlohy na množiny všech bodů dané vlastnosti
- Konstrukční úlohy
- Stereometrické úlohy

Budou-li se zdát čtenářům některé úlohy příliš těžké, ať uváží, že sbírka je určena žákům, kteří mají zvláštní zájem o matematiku a jistě, třeba minimální schopnosti pro ni. Úlohy rázu školských cvičení by takovým žákům nic nedaly. Jak už jsme řekli, je třeba, aby soutěžní úlohy splnily i své studijní poslání - aby se řešitelé naučili něčemu novému, aspoň pokud jde o způsoby řešení úloh.

Nakonec ještě jedna poznámka k označování (symbolice). V tomto novém vydání byly přizpůsobeny zápisy novému způsobu zavedenému do škol. To se týká hlavně geometrie; tak např. Pythagorův vzorec se místo dřívějšího

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

píše

$$(d(AC))^2 + (d(BC))^2 = (d(AB))^2.$$

Postiženy jsou zejména výpočty týkající se délky úsečky, neboť pro délku úsečky se vyskytují v různých knihách znaky AB , $\overline{AB}$, $|AB|$, $d(AB)$. Velikosti úhlu se tyto změny nedotkly.

Autoři

ARITMETIKA A ALGEBRA

I. Aritmetika přirozených čísel

1. Určete počet všech přirozených čísel menších než 5 000 000, z nichž každé je dělitelné zároveň třemi, pěti a sedmi.

Řešení. Každá dvě z čísel 3, 5, 7 jsou navzájem nesoudělná, tj. mají největšího společného dělitele 1. Číslo n , které je dělitelné zároveň třemi, pěti i sedmi, je dělitelné součinem

$$3 \cdot 5 \cdot 7 = 105. \quad (1)$$

Uvědomte si, že by tento úsudek nebyl správný, kdyby některá dvě z těchto tří čísel byla soudělná. Např. čísla 9, 10, 14 nejsou po dvou nesoudělná; číslo 630 je dělitelné zároveň devíti, deseti i čtrnácti, ale není dělitelné jejich součinem $9 \cdot 10 \cdot 14 = 1\,260$.

Každé z čísel hledaných v naší úloze je tedy dělitelné číslem 105. Obráceně, zřejmě každé číslo dělitelné číslem 105, je podle (1) dělitelné zároveň třemi, pěti a sedmi.

Musíme tedy zjistit počet násobků čísla 105, které jsou menší než 5 000 000; tento počet zjistíme dělením

$$5\,000\,000 : 105 = 47\,619$$

800

650

200

950

5

Provedeme zkoušku dělení násobením:

$$47\,619 \cdot 105 + 5 = 4\,999\,995 + 5 = 5\,000\,000$$

Počet hledaných čísel je tedy 47 619.

2. Někdo znásobil tři bezprostředně po sobě jdoucí přirozená čísla. Aniž známe součin, můžeme o něm tvrdit, že je dělitelný šesti; dokažte.

Řešení. a) Označme nejmenší ze zvolených čísel n ; pak jsou další dvě čísla $n + 1$, $n + 2$. Součin všech tří čísel je

$$s = n(n + 1)(n + 2). \quad (1)$$

Chceme-li dokázat, že s je násobek šesti, musíme dokázat, že s je násobek dvou (tj. číslo sudé) a že je zároveň násobek tří.

Snadno zjistíme, že aspoň jedno z čísel n , $n + 1$, $n + 2$ je sudé: buď je n sudé, nebo je n liché a pak je $n + 1$ sudé.

Snadno také dokážeme, že aspoň jedno z čísel n , $n + 1$, $n + 2$ je násobkem čísla 3. Číslo n dává totiž při dělení třemi zbytek buď nula, nebo jedna, nebo dvě. Dává-li n zbytek nula, je n dělitelné třemi. Dává-li n zbytek 1, pak dává číslo $n + 2$ zbytek nula a $n + 2$ je dělitelné třemi. Dává-li n zbytek 2, pak číslo $n + 1$ dává zbytek nula a $n + 1$ je dělitelné třemi.

Dokázali jsme tedy, že v součinu (1) je aspoň jeden činitel dělitelný dvěma a aspoň jeden činitel dělitelný třemi; součin je tedy vždy dělitelný šesti.

b) Rozřešíme úlohu ještě jedním způsobem, na kterém ukážeme dva typické obraty.

Za prvé: Poněvadž jde o tři po sobě bezprostředně násle-

dující přirozená čísla, označíme prostřední z nich n ; nejmenší je pak $n - 1$ a největší $n + 1$; jejich součin se dá vyjádřit v poměrně jednoduchém tvaru

$$s = (n - 1)n(n + 1) = n(n^2 - 1) = n^3 - n. \quad (2)$$

Za druhé: Protože máme zkoumat dělitelnost čísla s šesti a protože číslo s je vyjádřeno vzorcem (2) pomocí n , vyjádříme číslo n pomocí zbytku po dělení šesti takto:

$$n = 6k + z, \quad (3)$$

kde k je nula nebo číslo přirozené a zbytek z je některé z čísel 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Z (3) dosadíme do (2) a dostaneme po úpravě

$$s = 216k^3 + 108k^2z + 18kz^2 - 6k + z^3 - z. \quad (4)$$

Každý z prvních čtyř sčítanců v (4) je zřejmě dělitelný šesti; vypočteme ještě rozdíl $z^3 - z$ pro $z = 0, 1, 2, 3, 4, 5$:

z	0	1	2	3	4	5
$z^3 - z$	0	0	6	24	60	120

Poněvadž v druhém řádku tabulky (5) jsou vesměs násobky šesti, je podle (4) každý součin s dělitelný šesti a věta je dokázána.

3. Dělíme-li druhou mocninu přirozeného čísla dvanácti, může být zbytek jenom jedno z určitých čtyř přirozených čísel. Zjistěte tato čtyři čísla.

Řešení. Při dělení přirozeného čísla dvanácti je zbytek z některé z čísel

$$0, 1, 2, \dots, 10, 11. \quad (1)$$

Přirozené číslo n , které dává při dělení dvanácti zbytek z , lze napsat ve tvaru

$$n = 12k + z.$$

Jeho druhá mocnina je

$$n^2 = 144k^2 + 24kz + z^2 = 12(12k^2 + 2kz) + z^2. \quad (2)$$

Z rovnosti (2) vyplývá, že zbytek při dělení čísla n^2 dvanácti je týž jako zbytek při dělení čísla z^2 dvanácti.

Vypočteme tedy druhé mocniny všech dvanácti zbytků (1) a zjistíme, jaké zbytky dávají čísla z^2 při dělení dvanácti.

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
z^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
Zbytek při dělení z^2 dvanácti	0	1	4	9	4	1	0	1	4	9	4	1

Hledaný zbytek je tedy některé z čísel 0, 1, 4, 9.

4. Jsou dána celá čísla a, b , jejichž aritmetický průměr je celé číslo dělitelné třemi. Dokažte, že pak číslo

$$a(3a^2 + b^2) (a^3 - 2b^3)^3$$

je násobkem čísla 108.

Řešení. Podle textu úlohy je $\frac{1}{2}(a + b) = 3k$, kde k je celé číslo. Odtud plyne $b = 6k - a$ a dále

$$3a^2 + b^2 = 3a^2 + 36k^2 - 12ak + a^2 = 4(a^2 - 3ak + 9k^2),$$

$$a^3 - 2b^3 = a^3 - 2(216k^3 - 108k^2a + 18ka^2 - a^3) =$$

$$= 3(a^3 - 12ka^2 + 72k^2a - 144k^3);$$

z toho

$$a(3a^2 + b^2) (a^3 - 2b^3)^3 =$$

$$= 4 \cdot 3^3 a(a^2 - 3ak + 9k^2) (a^3 - 12ka^2 + 72k^2a - 144k^3)^3,$$

což je násobek 108, jak jsme měli dokázat.

5. Představte si, že napíšete všechna přirozená čísla od 1 do 5 555. Kolik devítek přitom napíšete?

Řešení. Uvažujme takto: Devítky se budou vyskytovat jednak na místě jednotek, jednak na místě desítek, jednak na místě stovek (na místě tisícovek už ne). Označme:

x počet devítek na místě jednotek,
 y počet devítek na místě desítek,
 z počet devítek na místě stovek.

V každé desítce se vyskytuje jedna devítka na základním místě. Číslo 5 555 obsahuje 555 celých desítek a »načatou« desítku

5 551, 5 552, 5 553, 5 554, 5 555.

Je tedy

$$x = 555. \quad (1)$$

V každé stovce se vyskytuje 10 devítek na místě desítek; je to u čísel

.90, .91, .92, ..., .99.

Číslo 5 555 obsahuje 55 celých stovek a »načatou« stovku

5 501 až 5 555.

Je tedy

$$y = 55 \cdot 10 = 550. \quad (2)$$

V každé tisícovce se vyskytuje 100 devítek na místě stovek; je to u čísel

.900, .901, .902, ..., .999.

Číslo 5 555 obsahuje 5 celých tisícovek a »načatou« tisícovku

5 001 až 5 555.

Je tedy

$$z = 5 \cdot 100 = 500. \quad (3)$$

Z (1), (2), (3) plyne $x + y + z = 1\,605$.

Napíšete tedy celkem 1 605 devítek.

6. Napíšme za sebou přirozená čísla

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ \dots; \quad (1)$$

tak dostaneme jistý sled číslic. Která číslice stojí v tomto sledu na milióntém místě?

Řešení. Kdybychom chtěli tento sled skutečně napsat až k milióntému místu a kdybychom počítali na napsání jedné cifry a konstatování jejího místa jen jednu sekundu, trvala by nám tato práce při osmihodinovém pracovním dni asi 35 pracovních dní. Je tedy vidět, že se vyplatí přemýšlet, jak rozřešit úlohu obratněji.

Máme devět jednociferných čísel (1 až 9), která zaujmou devět míst sledu číslic. Dvojciferná čísla počínají číslem 10 a končí číslem 99; je jich 90 a spotřebují $2 \cdot 90 = 180$ míst. Troj-
ciferná čísla počínají číslem 100 a končí číslem 999; je jich 900 a spotřebují $3 \cdot 900 = 2\,700$ míst. Obdobně je 9 000 čtyřciferných čísel (1 000 až 9 999) a zaujmou $4 \cdot 9\,000 =$

$= 36\,000$ míst; pěticiferných čísel je $90\,000$ ($10\,000$ až $99\,999$) a zaujmou $5 \cdot 90\,000 = 450\,000$ míst. Jednociferná až pěticiferná čísla spotřebují celkem

$$9 + 180 + 2\,700 + 36\,000 + 450\,000 = 488\,889$$

míst. Protože $900\,000$ šesticiferných zaujme $6 \cdot 900\,000 = 5\,400\,000$ dalších míst, náleží miliónté místo některému šesticifernému číslu.

Šesticiferná čísla zaujmou v sledu (1), napsanému až po milióntou cifru, celkem

$$1\,000\,000 - 488\,889 = 511\,111$$

míst. Na tato místa se vejde x šesticiferných čísel a část $(x + 1)$ ního čísla. Číslo x zjistíme dělením:

$$\begin{array}{r} 511\,111 : 6 = 85\,185 \\ 1 \end{array}$$

Je tedy $x = 85\,185$ a na milióntém místě stojí první cifra $(x + 1)$ ního čísla.

První šesticiferné číslo je

$$100\,000 = 100\,000 + (1 - 1),$$

druhé šesticiferné číslo je $100\,000 + (2 - 1) = 100\,001$, třetí šesticiferné číslo je

$$100\,002 = 100\,000 + (3 - 1);$$

$(x + 1)$ ní šesticiferné číslo je

$$100\,000 + (x + 1 - 1) = 100\,000 + x.$$

Pro $x = 85\,185$ je to tedy číslo $185\,185$. Jeho první cifra je 1 a to je cifra stojící na miliónovém místě sledu (1) .

7. Domy ve větších obcích bývají označeny nejen popisnými čísly, ale ještě tzv. orientačními čísly, a to takto: V každé ulici jsou označeny domy po jedné její straně po řadě čísla $2, 4, 6, \dots$ a po druhé straně $1, 3, 5, \dots$. Kolik domů má ulice, jestliže na každé její straně je právě n domů, jejichž orientační číslo obsahuje aspoň jednu číslici 4 ? Úlohu řešte a) pro $n = 6$, b) pro $n = 9$.

Řešení. a) Necht' $n = 6$. Na straně sudých čísel jsou »čtyřkové« domy

$$4, 14, 24, 34, 40, 42.$$

Na straně lichých čísel jsou »čtyřkové« domy

$$41, 43, 45, 47, 49, 141.$$

Na obou stranách je tedy $21 + 71 = 92$ domů.

b) Necht' $n = 9$. Na straně sudých čísel jsou »čtyřkové« domy

$$4, 14, 24, 34, 40, 42, 44, 46, 48.$$

Dům č. 48 však nemusí být poslední, za ním může být ještě dům č. 50 a popřípadě č. 52. Na straně lichých čísel jsou »čtyřkové« domy

$$41, 43, 45, 47, 49, 141, 143, 145, 147.$$

Na obou stranách je tedy $24 + 74 = 98$ domů, nebo $25 + 74 = 99$ domů, nebo $26 + 74 = 100$ domů.

8. Určete nejmenší přirozené číslo, jehož ciferný součet je 1 977.

Řešení. Hledané číslo n je nejmenší ze všech přirozených čísel, která mají ciferný součet 1 977. Odtud plyne, že číslo n má zápis s nejmenším možným počtem cifer, tj. že v jeho zápise jsou všechny cifry nenulové a největší možný počet z nich jsou devítky.

Z rovnosti

$$1\,977 = 9 \cdot 219 + 6$$

plyne, že číslo n má ve svém zápise 219 devítek a jednu šestku. Protože n je nejmenší ze všech dvousetdvaceticiferných přirozených čísel, v jejichž zápise je jedna cifra 6 a ostatní jsou 9, platí

»devítky«

$$n = \underbrace{699 \dots 9}_{\text{celkem 219 devítek}}$$

celkem 219 devítek

Poznámka. Nalezené číslo n lze psát také ve tvaru

$$7 \cdot 10^{219} - 1.$$

9. Dokažte, že rozdíl každých dvou kladných čísel, která jsou v desítkové soustavě trojciferná a jsou v ní napsána týmiž číslicemi, ale v opačném pořadí, je násobek devíti i jedenácti.

Řešení. Zapišeme obě čísla:

$$100a + 10b + c, 100c + 10b + a.$$

Předpokládáme, že je $a \geq c$, aby rozdíl vyšel nezáporný. Rozdíl je

$$\begin{aligned} 100a + 10b + c - 100c - 10b - a &= 99a - 99c = \\ &= 9 \cdot 11 \cdot (a - c) \geq 0. \end{aligned}$$

Tím je věta dokázána.

10. Najděte všechna přirozená čísla dělitelná osmi, jejichž ciferný součet (v desítkové soustavě) je roven sedmi a ciferný součin*) je roven šesti.

Řešení. Při řešení této úlohy nebudeme vycházet z vyjádření čísla jako mnohočlenu v mocninách deseti, protože nevíme, kolikaciferné je hledané číslo.

Protože hledané číslo N je násobkem osmi, je sudé - jeho poslední cifra (vpravo) je některá z cifer 0, 2, 4, 6, 8. Protože

*) Ciferný součin čísla 572 je $5 \cdot 7 \cdot 2 = 70$; ciferný součin čísla 503 je $5 \cdot 0 \cdot 3 = 0$.

N má ciferný součin 6, není poslední cifra ani 0, ani 4, ani 8 (číslo šest není dělitelné ani čtyřmi, ani osmi). Poslední cifra je tedy buď 6, nebo 2.

Číslo N neobsahuje ve svém zápisu žádnou nulu (ciferný součin je 6). Protože ciferný součet je 7, máme dvě možnosti:

- a) Číslo N je dvojciferné s ciframi 1, 6.
- b) Číslo N je čtyřciferné s ciframi 2, 3, 1, 1.

Případ a): Úloze vyhovuje číslo 16.

Případ b): Možná řešení jsou čísla

3 112, 1 312, 1 132.

Z těchto tří čísel jsou jen první dvě násobky osmi, třetí nikoli.

Úloha má tedy tři řešení:

16, 3 112, 1 312.

11. Nejmenší přirozené číslo x , pro které je $1\,260x$ třetí mocninou přirozeného čísla, je

- a) 1 470, b) $1\,260^2$, c) 7 350.

Rozhodněte, která z odpovědí a), b), c) je správná.

Řešení. Číslo 1 260 rozložíme v součin prvočinitelů; platí

$$1\,260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

Hledané číslo $1\,260x$ tedy bude mít ve svém rozkladu jen prvočísla 2, 3, 5, 7; to vyplývá z požadavku, aby bylo x co nejmenší. Z téhož požadavku vyplývá, že číslo $1\,260x$ má ve svém rozkladu co nejmenší mocniny prvočísel 2, 3, 5, 7, tj. $2^3, 3^3, 5^3, 7^3$; je tedy

$$x = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 150 \cdot 49 = 7\,350.$$

Správná je odpověď c).

12. Najděte nejmenší přirozené číslo x takové, aby každé z čísel x , 616, 700, 924 bylo dělitelem součinu ostatních tří.

Řešení. Necht' x je takové přirozené číslo, že každé z čísel x , 616, 700, 924 dělí součin zbývajících tří. Platí

$$616 = 2^3 \cdot 7 \cdot 11,$$

$$700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7, \tag{1}$$

$$924 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11.$$

Z (1) plyne, že číslo 924 dělí součin $616 \cdot 700 \cdot x$, právě když existuje takové přirozené číslo a , že

$$x = 3a. \tag{2}$$

Dále podle (1) platí, že číslo 700 dělí součin $616 \cdot 924 \cdot x$, právě když

$$x = 5^2 \cdot b, \tag{3}$$

kde b je přirozené číslo.

Číslo 616 dělí součin $700.924 \cdot x$, jak vyplývá z (1), pro každé přirozené číslo x .

Nejmenší přirozené číslo x vyhovující zároveň podmínkám (2) a (3) a dělící přitom součin $616.700.924$ je zřejmě číslo

$$3 \cdot 5^2 = 75.$$

13. Představme si, že jsme znásobili všechna přirozená čísla od 1 do 1 976. Kolika nulami končí zápis výsledku v desítkové soustavě?

Řešení. Představme si, že číslo $N = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 1\,976$ vyjádříme jako součin prvočinitelů; provede se to tak, že každé z čísel 2, 3, ..., 1 976 se rozloží v součin prvočinitelů (např. $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$, $22 = 2 \cdot 11$, $1000 = 2^3 \cdot 5^3$). Ze všech těchto prvočinitelů nás zajímají jen prvočinitele rovné 2 a 5, neboť $2 \cdot 5 = 10$; kolik dvojic 2, 5 vytvoříme v součinu N , toliko nulami bude končit číslo N v desítkovém zápisu.

Označme a počet těch prvočinitelů čísla N , které se rovnají 2. Protože každé sudé číslo $\leq 1\,976$ obsahuje aspoň jednoho prvočinitele rovného 2, je

$$a \geq \frac{1}{2} \cdot 1\,976 = 988. \quad (1)$$

Označme b počet těch prvočinitelů čísla N , jež se rovnají 5. Prvočinitel 5 se vyskytuje aspoň jednou u všech přirozených čísel $\leq 1\,976$, která jsou násobky pěti, tj. u čísel 5, 10, 15, 20, ..., 1 975; dále se vyskytuje aspoň dvakrát u násobků čísla 25, tj. 25, 50, 75, 100, ..., 1 975; dále se vyskytuje aspoň třikrát u násobků čísla 125, tj. 125, 250, 375, 500, ..., 1 875; konečně se vyskytuje aspoň čtyřikrát u násobků čísla 625,

tj. 625, 1 250, 1 875. Žádné přirozené číslo $\leq 1\,976$ není násobkem 5^5 , neboť $5^5 = 3\,125$.

Mezi čísla 1, 2, ..., 1 976 je 395 násobků pěti, neboť $1\,976 = 5 \cdot 395 + 1$; obdobně se zjistí, že je mezi nimi 79 násobků dvaceti pěti, 15 násobků čísla 125 a tři násobky čísla 625.

Ve vyjádření čísla N jako součinu prvočinitelů se vyskytuje tedy prvočíslo pět b -krát, kde

$$b = 395 + 79 + 15 + 3 = 492. \quad (2)$$

Podle (1), (2) je $a > b$, takže číslo $b = 492$ udává počet nul, které má číslo N v dekadickém vyjádření na konci.

14. Najděte všechna celá nezáporná čísla n , pro která je podíl

$$1\,260 : (3n + 1)$$

přirozené číslo.

Řešení. Jde o to najít všechny kladné dělitele čísla 1 260, které lze vyjádřit ve tvaru $3n + 1$, tj. dělitele, které při dělení třemi dávají zbytek 1. Předně je to číslo 1 (pro $n = 0$); je-li $n > 0$, je $3n + 1 > 1$ a číslo $3n + 1$ je vytvořeno pomocí prvočinitelů čísla 1 260. Vyjádříme tedy číslo 1 260 jako součin prvočinitelů

$$1\,260 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

a k jednotlivým prvočinitelům připseme zbytky při dělení třemi:

Prvočinitel	2	2	3	3	5	7
Zbytek	2	2	0	0	2	1

Utvoříme ty dělitele čísla 1 260, jež nejsou násobky tří, a připíšeme k nim zbytky při dělení třemi (násobek tří nelze totiž napsat ve tvaru $3n + 1$):

Dělitel	2	5	7	2.2	2.5	2.7	5.7	2.2.5	2.2.7	2.5.7	2.2.5.7
Zbytek	2	2	1	1	1	2	2	2	1	1	2

Dostáváme tedy spolu s $n = 0$ tato řešení:

$3n + 1$	1	4	7	10	28	70
n	0	1	2	3	9	23

15. Součet druhých mocnin tří po sobě jdoucích lichých čísel je čtyřciferné číslo, jehož všechny číslice (v dekadickém vyjádření) jsou stejné. Najděte všechny takové trojice lichých čísel.

Řešení. Chceme-li vyjádřit tři za sebou následující členy aritmetické posloupnosti, pak se zpravidla osvědčuje jejich »symetrický«
zápis pomocí prostředního z nich, tj. zápis

$$a - d, a, a + d.$$

Tento obrat použijeme i při řešení této úlohy.

Je-li x prostřední číslo hledané trojice, pak další dvě čísla jsou $x - 2$ a $x + 2$. Platí:

$$(x - 2)^2 + x^2 + (x + 2)^2 = 3x^2 + 8$$

Číslo $3x^2 + 8$ je liché kladné, a proto se musí rovnat některému z čísel

$$1\ 111, 3\ 333, 5\ 555, 7\ 777, 9\ 999,$$

tj. číslo $3x^2$ se rovná některému z čísel

$$1\ 103, 3\ 325, 5\ 547, 7\ 769, 9\ 991.$$

Z nich pouze číslo 5 547 je dělitelné třemi, takže

$$3x^2 = 5\ 547,$$

tedy

$$x^2 = 1\ 849 = 43^2,$$

tj.

$$|x| = 43.$$

Poněvadž

$$41^2 + 43^2 + 45^2 = 1\ 681 + 1\ 849 + 2\ 025 = 5\ 555,$$

má úloha právě dvě řešení; jsou to trojice 41, 43, 45 a -41, -43, -45.

16. Dokažte, že každé přirozené číslo $n \geq 6$ lze vyjádřit jako součet dvou přirozených čísel, z nichž jedno je prvočíslo a druhé číslo složené.

Řešení. Každé sudé přirozené číslo větší nebo rovné 4 je složené. Jediné sudé prvočíslo je 2, ostatní prvočísla jsou lichá. Nejmenší liché prvočíslo je 3. Z těchto vlastností prvočísel již plyne řešení:

a) Necht' přirozené číslo $n \geq 6$ je sudé, pak je lze psát jako součet

$$n = 2 + (n - 2),$$

kde číslo $n - 2 \geq 4$ je sudé, a tedy složené.

b) Necht' přirozené číslo $n \geq 6$ je liché. Potom je vyjádříme jako součet

$$n = 3 + (n - 3),$$

kde číslo $n - 3 \geq 3$ je sudé, takže je složené.

17. a) Vyšetřte, kterou číslicí končí zápis druhé mocniny prvočísla v desítkové soustavě.

b) Je-li p prvočíslo větší než 3, pak čísla $p^2 + 14$ a $p^2 - 14$ nejsou obě zároveň prvočísla. Dokažte.

Řešení. a) Pro prvočíslo 2 máme $2^2 = 4$, a tedy poslední číslice je 4. Zvláštní postavení v našem vyšetřování má též prvočíslo 5. Platí $5^2 = 25$ a poslední číslice je tedy 5. Každé jiné prvočíslo končí některou z číslic 1, 3, 7, 9. Končí-li číslicí 1, pak druhá mocnina též končí číslicí 1. Končí-li číslicí 3, je poslední číslice druhé mocniny 9. Končí-li číslicí 7, poslední

číslice je též 9. Konečně končí-li číslicí 9, druhá mocnina má na konci 1.

Můžeme shrnout: Zápis druhé mocniny prvočísla v desítkové soustavě končí jedinečně některou z číslic 1, 4, 5, 9. (Přitom, je-li prvočíslo větší než 5, pak jeho druhá mocnina končí jedinečně číslicí 1 nebo 9.)

b) Nyní ke druhé otázce. Je-li $p = 5$, pak $p^2 + 14 = 39$, což není prvočíslo. Zvolíme-li libovolné prvočíslo p větší než 5, pak p^2 končí buď číslicí 1, nebo 9. Končí-li číslicí 1, pak číslo $p^2 + 14$ končí číslicí 5 a je větší než 5. Tedy je $p^2 + 14$ složené. Končí-li p^2 číslicí 9, pak $p^2 - 14$ končí číslicí 5 a je větší než 5. Proto $p^2 - 14$ je číslo složené. Tím je důkaz podán.

18. Dokažte, že existuje jediné takové prvočíslo p , že p , $p + 2$, $p + 4$ jsou prvočísla.

Řešení. Je-li $p = 2$, nejsou čísla p , $p + 2$, $p + 4$ prvočísla. Je-li $p = 3$, jsou p , $p + 2 = 5$, $p + 4 = 7$ prvočísla. Zbývá tedy dokázat, že kromě trojice 3, 5, 7 jiná trojice daných vlastností neexistuje. Každé číslo $p > 3$ lze vyjádřit ve tvaru

$$p = 3x, p = 3x + 1, p = 3x + 2,$$

kde x je přirozené číslo > 1 . Vyplníme tabulku:

p	$3x$	$3x + 1$	$3x + 2$
$p + 2$	$3x + 2$	$3(x + 1)$	$3(x + 1) + 1$
$p + 4$	$3(x + 1) + 1$	$3(x + 1) + 2$	$3(x + 2)$

Zarámovaná čísla jsou složená. Proto úloha nemá řešení mimo trojici 3, 5, 7.

19. Ciferný součet kladného trojciferného prvočísla p_1 je dvojciferné prvočíslu p_2 . Ciferný součet prvočísla p_2 je jedno-ciferné prvočíslu $p_3 > 2$. Najděte všechny takové trojice prvo-čísel p_1, p_2, p_3 .

Řešení. Úlohu lze řešit experimentálně, ovšem velmi ne-obratně. Nahlédli bychom do tabulky prvočísel a našli bychom v ní všechna trojciferná prvočísla; je jich 143. Pak bychom vypočetli jejich ciferné součty a vybrali mezi nimi všechna dvojciferná prvočísla. Opět bychom vypočetli jejich ciferné součty a mezi nimi našli ty, které jsou jednocifernými prvo-číslu. Úloha by tak byla vyřešena, ovšem řešení by bylo časově velmi náročné. S uvedeným postupem kontrastuje řešení, v němž použijeme dedukci.

Ciferný součet trojciferného čísla je nejvýše $3 \cdot 9 = 27$. Mezi přirozenými čísly do 27 je jen pět dvojciferných prvočísel; jejich ciferné součty ukazuje tabulka:

Prvočíslu	11	13	17	19	23
Jeho ciferný součet	2	4	8	10	5

Mezi nimi je jen jedno prvočíslu větší než 2; je to 5. Našli jsme tak $p_2 = 23, p_3 = 5$.

Nyní je třeba najít ještě prvočíslu p_1 . Nejprve musíme rozložit číslu 23 na součet tří kladných celočíselných sčítanců.

Zřejmě není možné, aby největší sčítanec byl 7, neboť $3 \cdot 7 = 21$. Rozklady obsahující sčítanec 9 jsou tři:

$$9 + 9 + 5$$

$$9 + 8 + 6$$

$$9 + 7 + 7$$

Rozklad obsahující jako největší sčítanec číslo 8 je jen jeden:

$$8 + 8 + 7$$

Nyní najdeme všechna možná trojčíselná čísla, která odpovídají těmto součtům. Následující tabulka uvádí přehledně všechny možnosti.

Rozklad čísla 23	Trojčíselná čísla	p_1
$9 + 9 + 5$	995, 959, 599	599
$9 + 8 + 6$	986, 968, 896, 869, 698, 689	
$9 + 7 + 7$	977, 797, 779	977, 797
$8 + 8 + 7$	887, 878, 788	887

Při vyplňování posledního sloupce tabulky jsme užili tabulku prvočísel, která je uvedena např. v Matematických, fyzikálních a chemických tabulkách pro ZŠ. (Všechna čísla nemusíme v tabulce prvočísel hledat. Pokud jsou sudá nebo končí 5, pak nejsou zřejmě prvočísla.)

Úloha má čtyři řešení: 599, 23, 5; 797, 23, 5; 887, 23, 5; 977, 23, 5.

20. Přirozená čísla $1, 2, 3, \dots, n$ napsaná v nějakém pořadí označíme $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Je-li n číslo liché, je součin

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \dots (a_n - n)$$

dělitelný dvěma. Dokažte.

Řešení. Mezi čísly $1, 2, \dots, n$ je lichých čísel o jedno víc než sudých, neboť n je liché. Proto v uspořádání $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ stojí aspoň jedno liché číslo a_k na »lichém« místě k ; sudých míst je totiž o jedno méně. Rozdíl $a_k - k$ je pak dělitelný dvěma, a tedy i součin $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \dots (a_n - n)$ je dělitelný dvěma.

21. V zápise dělení dvou přirozených čísel chybějí některé cifry. Nahraďte chybějící cifry tak, aby zápis byl správný.

Zápis zní:

$$12a76 : 23b = c2;$$

každé z písmen a, b, c značí jednu cifru.

Řešení. Zápis dělení ukazuje, že jde o dělení beze zbytku. Použijeme postup, kterým provádíme zkoušku dělení: platí

$$(23b) \cdot (c2) = (12a76). \quad (1)$$

Všechna tři čísla v rovnici (1) přepíšeme jako dvojčleny; vyjde

$$(230 + b) \cdot (10c + 2) = 12\,076 + 100a. \quad (2)$$

Rovnice (2) obsahuje sice tři neznámé a , b , c , avšak každé z čísel a , b , c je celé číslo, které je větší nebo rovné nule a menší nebo rovné devíti.

Vynásobíme oba dvojčleny na levé straně (2); po úpravě dostaneme:

$$2\,300c + 10bc - 100a = 11\,616 - 2b. \quad (3)$$

Číslo na levé straně (3) je násobek deseti; proto jím musí být také číslo na pravé straně (3). Odtud vyplývají jen dvě možnosti pro b ; $b = 3$ nebo $b = 8$.

1. Zkusíme dosadit do (3) $b = 3$; po krácení deseti vyjde:

$$233c - 10a = 1\,161$$

a odtud

$$233c = 1\,161 + 10a. \quad (4)$$

Protože je $0 \leq a \leq 9$, plyne z (4)

$$1\,161 \leq 233c \leq 1\,251. \quad (5)$$

Z nerovností (5) dostaneme odhady

$$5 \leq c \leq 5,$$

tj. $c = 5$. Avšak $233.52 = 12\,116$, takže pro žádné a neplatí rovnost (1).

2. Zkusíme nyní druhou možnost $b = 8$; z (3) dostaneme po krácení deseti

$$238c = 1\,160 + 10a. \quad (6)$$

Číslo na pravé straně (6) je násobek deseti; proto je tomu tak i na levé straně (6). Protože je $0 \leq c \leq 9$, je buď $c = 0$, nebo $c = 5$.

Zkusíme $c = 0$; z (6) vyjde $116 + a = 0$, což je nemožné (je $0 \leq a \leq 9$). Je tedy $c = 5$ a z (6) vypočteme $a = 3$.

Skutečně je

$$12\,376 : 238 = 52.$$

22. Udejte všechny pravoúhelníky, jejichž strany mají délky vyjádřené celými čísly (v centimetrech), které mají tu vlastnost, že jejich obvod (v cm) je roven jejich obsahu (v cm^2).

Řešení. Jsou-li a, b velikosti stran hledaného pravoúhelníka, pak podle podmínky úlohy platí

$$2a + 2b = ab. \quad (1)$$

Přepíšeme-li tuto rovnici v tvaru

$$ab - 2a - 2b + 4 = 4,$$

vyplývá odtud

$$(a - 2)(b - 2) = 4.$$

Čísla $a - 2$, $b - 2$ jsou tedy sdruženými děliteli čísla 4. Výsledky sestavíme do tabulky:

$a - 2$	4	2	1	-4	-2	-1
$b - 2$	1	2	4	-1	-2	-4
a	6	4	3	-2	0	1
b	3	4	6	1	0	-2

Geometrický význam mají jen kladné hodnoty. Hledané pravoúhelníky jsou dva: obdélník o stranách velikosti 3 cm a 6 cm a čtverec, jehož strana má velikost 4 cm.

Poznámka. Při hledání dvojic přirozených čísel a , b , které splňují rovnici (1), lze také postupovat následujícím způsobem. Z (1) plyne

$$a = \frac{2b}{b-2} = \frac{2(b-2) + 4}{b-2} = 2 + \frac{4}{b-2}.$$

Číslo $b - 2$ je tedy dělitelem čísla 4. Na základě toho dojdeme tedy k obdobné tabulce jako v uvedeném řešení. Bude ovšem mít jen tři řádky, a to pro $b - 2$, b , a .

23. Určete všechny dvojice celých čísel x , y , pro které platí

$$4x^2 - 4x - y^2 = 20. \quad (1)$$

Řešení. Rovnici (1) upravíme na tvar

$$(2x - 1)^2 - y^2 = 21. \quad (2)$$

Levou stranu poslední rovnice rozložíme pomocí vzorce pro rozdíl druhých mocnin. Dostáváme

$$(2x + y - 1)(2x - y - 1) = 21.$$

Číslo 21 lze rozložit v tyto součiny celých čísel:

$$1 \cdot 21 = 3 \cdot 7 = (-1) \cdot (-21) = (-3) \cdot (-7).$$

Sestavíme tabulku:

$2x + y - 1$	1	21	-1	-21	3	7	-3	-7
$2x - y - 1$	21	1	-21	-1	7	3	-7	-3
x	6	6	-5	-5	3	3	-2	-2
y	-10	10	10	-10	-2	2	2	-2

Každá z 8 dvojic čísel x, y je řešením úlohy, jak se přesvědčíme zkouškou.

24. Určete všechny dvojice přirozených čísel x, y , pro které platí

$$8x^3 - y^3 = 387. \quad (1)$$

Řešení. Platí $8x^3 - y^3 = (2x)^3 - y^3 = (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$, tj. rovnice (1) zní

$$(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) = 387.$$

Zřejmě je $4x^2 + 2xy + y^2 > 0$, $2x - y > 0$, $2x > y$. Rozložíme číslo 387 v součin prvočinitelů: $387 = 3 \cdot 3 \cdot 43$. Sestavíme tabulku:

$2x - y$	1	3	43	9	129	387
$4x^2 + 2xy + y^2$	387	129	9	43	3	1
$(2x - y)^2$	1	9	1 849	81	$129^2 > 3$	$387^2 > 1$
$4x^2 + 2xy + y^2 - (2x - y)^2 = 6xy$	386	120	záporné	záporné	záporné	záporné
xy	není celé	20	—	—	—	—
x	—	4	—	—	—	—
y	—	5	—	—	—	—

Rozložíme číslo 20 v součin dvou činitelů: $20 = 1 \cdot 20 = 2 \cdot 10 = 4 \cdot 5$; kladné rozdíly $2x - y$ jsou $2 \cdot 20 - 1 = 39$,

$2 \cdot 10 - 2 = 18$, $2 \cdot 5 - 4 = 6$, $2 \cdot 4 - 5 = 3$. Vyhovuje jen poslední; proto do tabulky (sloupec 2) doplníme $x = 4$, $y = 5$. Skutečně je $8x^3 - y^3 = 8 \cdot 64 - 125 = 512 - 125 = 387$.

Jiné řešení. Položíme-li $2x = z$, dostáváme

$$z^3 - y^3 = 387. \quad (2)$$

$1^3 = 1$ Úloha zní: Určete dvě přirozená čísla z, y , přičemž
 $2^3 = 8$ z je sudé, aby rozdíl jejich třetích mocnin byl 387.
 $3^3 = 27$ Z rovnosti (2) plyne, že pro sudé číslo z platí
 $4^3 = 64$ $z^3 > 387$,
 $5^3 = 125$ takže z tabulky třetích mocnin přirozených čísel
 $6^3 = 216$ snadno zjistíme, že
 $7^3 = 343$ $z \geq 8$. (3)
 $8^3 = 512$ Z této tabulky lze také odhadnout, že sudé číslo z
 $9^3 = 729$ nemůže být větší než 10, tj. musí být
 $10^3 = 1\,000$ $z \leq 10$. (4)
 $11^3 = 1\,331$ Odečteme-li totiž od třetí mocniny libovolného su-
 $12^3 = 1\,728$ dého čísla $z > 10$ třetí mocninu největšího čísla,
 $13^3 = 2\,197$ které přichází v úvahu jako číslo y , tj. třetí mocninu
 $14^3 = 2\,744$ čísla $z - 1$, potom, jak se zdá z tabulky, dostaneme
 • vždy číslo větší než 387. Pravdivost tohoto odhadu
 • snadno dokážeme. Každé sudé přirozené číslo
 • $z > 10$ lze psát ve tvaru $12 + n$, kde n je celé ne-
 záporné číslo. Platí:

$$\begin{aligned}
 & (12 + n)^3 - [(12 + n) - 1]^3 = \\
 = & (12 + n)^3 - (12 + n)^3 + 3(12 + n)^2 - 3(12 + n) + 1 = \\
 & = 397 + n^2 + 69n > 387.
 \end{aligned}$$

Ze vztahů (3) a (4) plyne, že sudé číslo z je buď 8 nebo 10. Z tabulky třetích mocnin zjistíme, že úloha má jediné řešení $z = 8$ a $y = 5$, tj. $x = 4$ a $y = 5$.

25. Zlomek $\frac{178}{39}$ vyjádřete jako součet dvou kladných zlomků se jmenovateli 3, 13 a s celočíselnými čitateli. Najděte všechna řešení úlohy.

Řešení. Podle textu úlohy je

$$\frac{178}{39} = \frac{x}{3} + \frac{y}{13}, \quad (1)$$

kde x, y jsou přirozená čísla. Rovnici (1) upravíme na tvar

$$13x + 3y = 178$$

a dále

$$y = 59 + \frac{1 - 13x}{3}. \quad (2)$$

Protože y musí být přirozené číslo, musí být podle (2) číslo

$$\frac{1 - 13x}{3} = \frac{1 - x}{3} - 4x > -59$$

a zároveň celé. Těmto podmínkám vyhovují jediné čísla $x = 1, 4, 7, 10, 13$. Sestavíme tabulku:

x	1	4	7	10	13
$\frac{1}{3}(1-13x)$	-4	-17	-30	-43	-56
y	55	42	29	16	3

Zkouška ukáže, že všech pět dvojic $\begin{bmatrix} 1 & 55 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & 42 \end{bmatrix}$,
 $\begin{bmatrix} 7 & 29 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 10 & 16 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 13 & 3 \end{bmatrix}$ jsou řešení úlohy.

Jiné řešení. Odvodíme opět rovnici

$$13x + 3y = 178. \quad (3)$$

Každé její celočíselné řešení x, y má tu vlastnost, že x se dá vyjádřit v jednom z tvarů $3z, 3z + 1, 3z + 2$, kde z je vhodné číslo celé. Snadno vyloučíme tvar $3z$ (178 není násobek 3) a tvar $3z + 2$ ($178 - 26 = 152$ také není násobek 3). Je tedy

$$x = 3z + 1$$

a z (3) plyne

$$y = 55 - 13z.$$

Sestavíme tabulku:

z	5	4	3	2	1	0	-1
y	-10	3	16	29	42	55	68
x	16	13	10	7	4	1	-2

Pro $z > 5$ je $y < 0$, pro $z < 0$ je $x < 0$. Pět zarámovaných sloupců udává tedy jako předtím všechna řešení úlohy.

II. Algebra

26. Jsou dány výrazy

$$U = \frac{\frac{1}{p-3} - \frac{1}{p+3}}{\frac{1}{p-3} + \frac{1}{p+3}} - \frac{p+3}{p},$$

$$V = \frac{\frac{1}{p^2-9} - \frac{1}{p^2+9}}{\frac{1}{p^2-9} + \frac{1}{p^2+9}} - \frac{p^2+9}{p^2}.$$

Zjistěte, pro která p mají oba výrazy význam, a dokažte, že pro tato p je $U = V$.

Řešení. U i V má smysl právě tehdy, je-li $p \neq 0$, $p \neq \pm 3$; pak je i $p^2 \neq \pm 9$. Upravíme U i V :

$$\begin{aligned} U &= \frac{p+3 - (p-3)}{p+3 + p-3} - \frac{p+3}{p} = \frac{6}{2p} - \frac{p+3}{p} = \\ &= \frac{3 - p - 3}{p} = -1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{p^2 + 9 - (p^2 - 9)}{p^2 + 9 + p^2 - 9} - \frac{p^2 + 9}{p^2} = \frac{18}{2p^2} - \frac{p^2 + 9}{p^2} = \\
 &= \frac{9 - p^2 - 9}{p^2} = -1.
 \end{aligned}$$

27. Dokažte tyto dvě věty:

a) Platí-li pro dvě různá čísla a, b vztah

$$a - a^2 = b - b^2, \quad (1)$$

pak pro ně platí

$$a + b = 1. \quad (2)$$

b) Platí-li pro dvě čísla a, b vztah (2), pak pro ně platí i (1).

Uveďte příklad takových čísel a, b .

Řešení. a) Z (1) plyne

$$a - b = a^2 - b^2 \quad (3)$$

neboli

$$a - b = (a - b) (a + b). \quad (3')$$

Protože je $a \neq b$, tj. $a - b \neq 0$, plyne z (3') po dělení číslem $a - b$ vztah (2).

b) Rovnost (2) znásobíme číslem $a - b$ a dostaneme (3). Z (3) odvodíme (1).

Zvolme $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$ (podle (2)). Pak je

$$a - a^2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{6 - 4}{9} = \frac{2}{9},$$

$$b - b^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{3 - 1}{9} = \frac{2}{9}.$$

28. Je dán výraz

$$a^2 + b^2 + \left(\frac{ab}{a - b} \right)^2.$$

a) Dosadíme-li $a = 5$, $b = 7$, dostaneme zlomek, jehož čísel i jmenovatel jsou druhé mocniny přirozených čísel. Přesvědčte se o tom.

b) Dokažte, že vlastnost z úlohy a) mají každá dvě různá celá čísla a , b .

Řešení. a) Pro $a = 5$, $b = 7$ vypočteme

$$74 + \left(-\frac{35}{2} \right)^2 = \frac{1\,521}{4} = \frac{39^2}{2^2}.$$

b) Důkaz záleží v úpravě daného výrazu. Jakýsi »vtip« důkazu je v tom, že nebudeme provádět všechny naznačené výkony, ale že budeme stále »hlídat«, zda se nám při výpočtu neobjeví v čitateli druhá mocnina mnohočlenu.

Daný výraz můžeme napsat ve tvaru

$$\frac{1}{(a - b)^2} \cdot [(a^2 + b^2)(a - b)^2 + a^2b^2].$$

Stačí upravit výraz v lomených závorkách takto:

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - 2ab) + a^2b^2 &= \\ &= (a^2 + b^2)^2 - 2ab(a^2 + b^2) + a^2b^2.\end{aligned}$$

Při pozorném pohledu vidíme, že poslední výraz je druhou mocninou dvojčlenu

$$(a^2 + b^2) - ab, \tag{1}$$

o němž lze dokázat, že pro každá dvě různá celá čísla a, b je roven přirozenému číslu. Zřejmě stačí pouze dokázat, že dvojčlen (1) je pro každá dvě různá čísla kladný. Nechť $ab \leq 0$. Pro $a \neq b$ je $a^2 + b^2 > 0$, a tedy

$$a^2 + b^2 - ab > 0. \tag{2}$$

Nechť $ab > 0$. Z podmínky $a \neq b$ dostáváme

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab > 0.$$

Odtud již vyplývá nerovnost (2), neboť pro $ab > 0$ je $2ab > ab$.

Pro každá dvě různá celá čísla a, b tedy platí

$$a^2 + b^2 + \left(\frac{ab}{a - b} \right)^2 = \frac{(a^2 + b^2 - ab)^2}{|a - b|^2},$$

kde $|a - b|$ a $a^2 + b^2 - ab$ jsou přirozená čísla.

29. Rozložte v součin dvojčlenů 1. stupně výraz

$$V = (x - 1)(x - 2)(x - 3) + (x - 1)(x - 2) - x + 1.$$

Výsledek ověřte pro $x = -1$.

Řešení. Vytýkáním.

$$\begin{aligned} V &= (x - 1)(x - 2)[(x - 3) + 1] - x + 1 = \\ &= (x - 1)(x - 2)(x - 2) - (x - 1) = \\ &= (x - 1)[(x - 2)^2 - 1] = \\ &= (x - 1)(x - 2 + 1)(x - 2 - 1) = \\ &= (x - 1)(x - 1)(x - 3) = \\ &= (x - 1)^2(x - 3) \end{aligned}$$

30. Součinem dvou kvadratických trojčlenů $x^2 + ax + b$, $x^2 + cx + d$ je dvojčlen $x^4 + 4$. Určete koeficienty a, b, c, d .

Řešení. Podkladem řešení je věta, že dvě polynomické funkce (mnohočleny s jednou proměnnou x) jsou si rovny právě tehdy, když koeficienty při týchž mocninách x jsou si rovny.

V našem případě vypočteme

$$\begin{aligned} &(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = \\ &= x^4 + (a + c)x^3 + (b + d + ac)x^2 + (ad + bc)x + bd. \end{aligned}$$

Tento mnohočlen má být roven $x^4 + 4$. Je tedy

$$a + c = 0, \tag{1}$$

$$d = a^2 - b, \tag{2}$$

$$a^3 - 2ab = 0, \quad (3)$$

$$a^2b - b^2 = 4. \quad (4)$$

Z (4) plyne $a \neq 0$. Z (3) plyne $b = \frac{a^2}{2}$, neboť můžeme dělit číslem a . Z (2) plyne $d = \frac{a^2}{2}$. Z (1) plyne $c = -a$. Z (4) plyne $\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4} = 4$, tj. $a = 2$ nebo $a = -2$. Hledané koeficienty jsou $a = 2, b = 2, c = -2, d = 2$, resp. $a = -2, b = 2, c = 2, d = 2$.

Správnost ověříme zkouškou.

31. Určete všechny takové dvojice čísel a, b , pro něž je trojčlen $x^4 + ax^2 + b$ možno vyjádřit jako součin trojčlenů 2. stupně, z nichž jeden je $x^2 + ax + b$.

Řešení. Podle věty, kterou jsme užili při řešení úlohy 30, platí $x^4 + ax^2 + b = x^4 + (a + c)x^3 + (b + d + ac)x^2 + (ad + bc)x + bd$ a odtud

$$(1) \quad a + c = 0,$$

$$(2) \quad b + d + ac = a,$$

$$(3) \quad ad + bc = 0,$$

$$(4) \quad bd = b.$$

Vzhledem k (4) jsou 2 možnosti:

$$\text{I. } b = 0,$$

$$\text{II. } b \neq 0, d = 1.$$

V případě I je podle (3) buď $a = 0$, nebo $d = 0$. Je-li $a = 0$, $b = 0$, je podle (2) $d = 0$ a podle (1) $c = 0$. Je-li $b = 0$, $d = 0$, je podle (1), (2) $-a^2 = a$, tj. buď $a = 0$, nebo $a = -1$.

V případě II je $c = -a$, $b + 1 - a^2 = a$, $a - ab = 0$. Z rovnic $ab + a - a^3 = a^2$ a $a - ab = 0$ plyne $2a - a^3 = a^2$, tj. $a(a^2 + a - 2) = 0$. Je tedy buď $a = 0$, nebo $a^2 + a - 2 = 0$,

čili $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, $a + \frac{1}{2} = \pm \frac{3}{2}$, čili $a = 1$, $a = -2$. Pro

koeficient a jsou tedy možnosti $a = 0$, $a = -1$ (případ I), $a = 0$, $a = 1$, $a = -2$ (případ II).

Pomocí rovnic (1), (2), (3), (4) doplníme tabulku:

a	b	c	d	
0	0	0	0	} případ I
-1	0	1	0	
0	-1	0	1	} případ II
1	1	-1	1	
-2	1	2	1	

Všech 5 případů ověříme zkouškou.

32. Vyjádřete trojčlen $x^8 + x^4 + 1$ aspoň jedním způsobem jako součin

- a) dvou mnohočlenů 4. stupně;
- b) čtyř mnohočlenů 2. stupně.

Řešení. Daný mnohočlen rozložíme podle známých vzorců z algebry takto:

$$\begin{aligned} x^8 + x^4 + 1 &= (x^8 + 2x^4 + 1) - x^4 = (x^4 + 1)^2 - (x^2)^2 = \\ &= (x^4 + x^2 + 1) (x^4 - x^2 + 1) \end{aligned}$$

Tímto rozkladem jsme úlohu a) vyřešili. V rozkladu budeme dále pokračovat a postupně dostáváme:

$$\begin{aligned} (x^4 + x^2 + 1) (x^4 - x^2 + 1) &= \\ &= (x^4 + 2x^2 + 1 - x^2) (x^4 + 2x^2 + 1 - 3x^2) = \\ &= [(x^2 + 1)^2 - x^2] [(x^2 + 1)^2 - (x\sqrt{3})^2] = \\ &= (x^2 + x + 1) (x^2 - x + 1) (x^2 + x\sqrt{3} + 1) (x^2 - x\sqrt{3} + 1) \end{aligned}$$

Poslední rozklad je řešením úlohy b).

33. Výraz

$$V = (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$$

upravte na součin a pak určete všechny trojice čísel x, y, z , pro které je $V = 0$.

Řešení. Znění úlohy naznačuje, že se rozklad výrazu V v součin činitelů zdaří. Protože V je třetího stupně v x, y, z , bude v rozkladu buď jeden činitel prvního stupně a jeden druhého, nebo budou tři činitelé prvního stupně.

Bylo by možné umocnit každý z dvojčlenů na třetí podle známého vzorce, ale tak bychom dostali dosti nepřehledný výraz o 12 členech. Bude lépe užít vzorec

$$a^3 + b^3 = (a + b) (a^2 - ab + b^2). \quad (1)$$

Dosadíme-li do (1) $a = x - y$, $b = y - z$, dostaneme na levé straně součet prvních dvou členů V a na pravé straně dvojčlen $a + b = x - z = -(z - x)$, který lze pak z V vytknout.

Výpočtem dostaneme

$$V = (x - z) (x^2 - 2xy + y^2 - xy + y^2 + xz - yz + y^2 - 2yz + z^2) + (z - x)^3,$$

tj.

$$\begin{aligned} V &= (x - z) (x^2 + 3y^2 + z^2 - 3xy - 3yz + xz) + (z - x)^3 = \\ &= (x - z) \cdot (x^2 + 3y^2 + z^2 - 3xy - 3yz + xz - x^2 - z^2 + 2xz) = \\ &= 3(x - z) (y^2 - xy - yz + xz) = \\ &= 3(x - z) [y(y - z) - x(y - z)] = \\ &= 3(x - z) (y - z) (y - x). \end{aligned}$$

Je tedy $V = 0$ právě tehdy, když aspoň dvě z čísel x, y, z jsou sobě rovna.

34. a) Rozhodněte nejprve, pro která reálná čísla a, b, c má smysl výraz

$$\begin{aligned} V &= \frac{(a - b)^2}{c^2 - ac - bc + ab} + \frac{(b - c)^2}{a^2 - ab - ac + bc} + \\ &+ \frac{(c - a)^2}{b^2 - bc - ba + ca}. \end{aligned}$$

b) Dokažte, že pro každou trojici a, b, c , pro kterou má výraz V smysl, je V totéž číslo, a vypočtěte je.

Řešení. Označíme

$$a - b = z, b - c = x, c - a = y \quad (1)$$

a vypočteme

$$c^2 - ac - bc + ab = (c - a)(c - b) = -xy. \quad (2)$$

Obdobně upravíme

$$a^2 - ab - ac + bc = (a - b)(a - c) = -yz, \quad (3)$$

$$b^2 - bc - ba + ca = (b - a)(b - c) = -xz.$$

Ad a) Odtud je patrné, že V má smysl právě tehdy, je-li $a \neq b \neq c \neq a$ čili $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$.

Ad b) Vypočtěme podle (2), (3)

$$-Vxyz = x^3 + y^3 + z^3 \quad (4)$$

a podle (1)

$$x + y + z = 0. \quad (5)$$

Dále

$$\begin{aligned} & (x + y + z)^3 + 3xyz = \\ & = 3(x + y + z)xy + 3(x + y + z)xz + \\ & \quad + 3(x + y + z)yz + x^3 + y^3 + z^3 \end{aligned}$$

neboli podle (5)

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz. \quad (6)$$

Spojením (4), (6) dostaneme

$$-Vxyz = 3xyz.$$

Protože je $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, je

$$V = -3.$$

Úloha je značně obtížná, zejména je nesnadný trik se zavedením nových proměnných x, y, z .

35. Dokažte, že výraz

$$V = a^2 - ab + b^2 - a + b + 1$$

nabývá pro každá dvě čísla a, b kladné hodnoty.

Řešení. Tato úloha je příkladem na složitější úpravu algebraického výrazu, tj. celistvé racionální funkce o dvou proměnných a, b . »Nezápornost« takového výrazu se obvykle snažíme dokázat úpravou na součet, v němž každý sčítanec je buď druhá (sudá) mocnina reálného čísla, nebo součin činitelů, který je nezáporný, nebo určité kladné číslo.

Výraz V budeme postupně upravovat:

$$\begin{aligned} V &= a^2 - a(b+1) + b^2 + b + 1 = \\ &= [a^2 - 2 \cdot a \cdot \tfrac{1}{2}(b+1) + \tfrac{1}{4}(b+1)^2] + \\ &\quad + b^2 + b + 1 - \tfrac{1}{4}(b+1)^2 = \\ &= [a - \tfrac{1}{2}(b+1)]^2 + \tfrac{1}{4}(4b^2 + 4b + 4 - b^2 - 2b - 1) = \\ &= [a - \tfrac{1}{2}(b+1)]^2 + \tfrac{3}{4}(b^2 + \tfrac{2}{3}b + 1) = \\ &= [a - \tfrac{1}{2}(b+1)]^2 + \tfrac{3}{4}(b + \tfrac{1}{3})^2 + \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Z posledního součtu plyne, že je $V > 0$ pro všechna a, b .

Poznámky. 1. Za povšimnutí stojí, že při vytváření druhé mocniny dvojčlenu $a - \frac{1}{2}(b + 1)$ jsme užili všechny členy výrazu V , které obsahovaly proměnnou a .

2. Naši úlohu lze vyřešit trikem, který překvapuje svou krátkostí a elegancí, ale také svou smělostí. Budeme totiž zkoumat výraz $2V$. Platí:

$$\begin{aligned} 2V &= 2a^2 - 2ab + 2b^2 - 2a + 2b + 2 = \\ &= (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 + 2b + 1) = \\ &= (a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b + 1)^2 \end{aligned}$$

36. Dokažte, že pro každá dvě reálná čísla a, b nabývá výraz

$$V = a^4 + b^4 - 2ab(b^2 - ab - a^2)$$

nezáporné hodnoty.

V kterém případě je tento výraz roven nule?

Řešení. Jde o typovou úlohu úpravy algebraického výrazu, která směřuje k tomu, aby se výraz V vyjádřil jako součet druhých mocnin polynomů. Výraz V budeme postupně upravovat:

$$V = a^4 + b^4 - 2ab^3 + 2a^2b^2 + 2a^3b \quad (1)$$

$$V = (a^4 + 2a^3b + a^2b^2) + (a^2b^2 - 2ab^3 + b^4)$$

$$V = a^2(a^2 + 2ab + b^2) + b^2(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$V = a^2(a + b)^2 + b^2(a - b)^2 \quad (2)$$

Je tedy $V \geq 0$ pro všechna a, b . V předcházejících úpravách je jeden trochu umělý obrat - rozdělení členu $2a^2b^2 = a^2b^2 + a^2b^2$ a sdružení šesti členů do dvou trojčlenů.

Zjištění nutné a postačující podmínky pro to, aby bylo $V = 0$, je stereotypní. Platí podle (2):

$V = 0$, právě když $a^2(a + b)^2 = 0$ a zároveň $b^2(a - b)^2 = 0$.

Z obou součinů dostáváme tyto čtyři možné kombinace:

I. $a^2 = 0, b^2 = 0$

III. $(a + b)^2 = 0, b^2 = 0$

~~IV. $(a + b)^2 = 0, a^2 = 0$~~

II. $a^2 = 0, (a - b)^2 = 0$

IV. $(a + b)^2 = 0, (a - b)^2 = 0$

Ve všech čtyřech případech vyjde $a = b = 0$; to je skutečně jediná dvojice a, b , pro kterou je $V = 0$.

Vraťme se ještě jednou ke vztahu (1), který vznikl roznásobením daného výrazu. Při prvním pohledu nás napadne spíše jiná úprava, než je ta, kterou jsme použili. Je to sdružení

$$V = (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) + 2ab(a^2 - b^2)$$

neboli

$$V = (a^2 + b^2)^2 + 2ab(a^2 - b^2). \quad (3)$$

První člen (3) je nezáporný, druhý může být záporný. Bude-li však absolutní hodnota druhého členu menší nebo rovna absolutní hodnotě prvního členu, bude určitě $V \geq 0$. Místo porovnávání absolutních hodnot můžeme vypočítat rozdíl

$$\begin{aligned} V' &= (a^2 + b^2)^4 - 4a^2b^2(a^2 - b^2)^2 = \\ &= (a^4 + 2a^2b^2 + b^4)^2 - 4a^2b^2(a^4 - 2a^2b^2 + b^4). \end{aligned}$$

Po krátkém výpočtu dostaneme

$$V' = a^8 + 14a^4b^4 + b^8.$$

Zřejmě je vždy $V' \geq 0$, tedy i $V \geq 0$. Je-li $V = 0$, je $V' = 0$, tj. $(a^4 + b^4)^2 + 12a^4b^4 = 0$ a odtud plyne $a = b = 0$. Dostáváme tedy opět jedinou možnou dvojici $a = b = 0$, pro kterou je $V = 0$.

37. Jsou-li a, b, c taková nezáporná čísla, že platí

$$a + b + c = 1,$$

pak je

$$ab + ac + bc < \frac{1}{2}, \quad (1)$$

$$ab + ac + bc - abc < \frac{1}{3}. \quad (2)$$

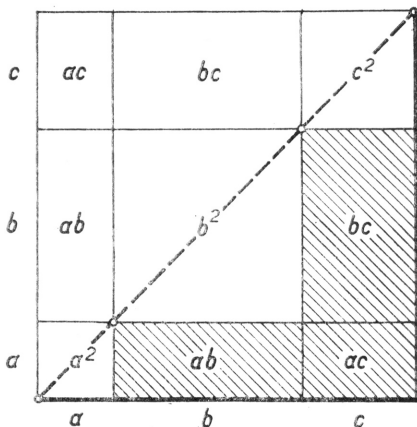
Řešení. Nerovnost (1) je patrná z obr. 2.

Obsah tlustě zarámovaného pravoúhlého trojúhelníka je $\frac{1}{2}$, obsah šrafovaného obrazce je $ab + ac + bc$; platí tedy nerovnost (1).

Vypočteme $2(ab + ac + bc) + a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 = 1$, tj. $2(ab + ac + bc) < 1$, a odtud plyne (1).

Vypočteme

$$\begin{aligned} & (a + b + c)^3 = \\ & = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a + b) + 3ac(a + c) + \\ & + 3bc(b + c) + 6abc = \\ & = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a + b + c) + \\ & + 3ac(a + b + c) + 3bc(a + b + c) - 3abc = 1 \end{aligned}$$



Obr. 2

Protože $a + b + c = 1$, dostaneme

$$ab + ac + bc - abc < \frac{1}{3},$$

což je nerovnost (2).

38. Jsou dána kladná čísla a, b, c, d , pro která platí

$$a + b + c + d = 1.$$

Dokažte, že pak platí

$$abc + abd + acd + bcd < \frac{1}{6},$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 < 1.$$

Řešení. Základní myšlenka pro tyto jednoduché odhady je vyhledat příslušný výraz v rozvedení $(a + b + c + d)^3$ a odtud odvodit příslušnou nerovnost. K tomu nepotřebujeme znát

vzorce pro umocňování čtyřčlenu; mocnina se nahradí prostě součinem

$$(a + b + c + d) (a + b + c + d) (a + b + c + d). \quad (1)$$

Násobení však nebudeme provádět, neboť bychom dostali nepřehledný sled $4^3 = 64$ členů.

Bez roznásobení určíme, kolik členů se rovná abc . Sestavíme tabulku, v níž bude zachyceno, z kterého z činitelů $(a + b + c + d)$ součinu (1) je vybráno a , z kterého b , z kterého c . Tabulka může vypadat takto:

Činitelé	a	b	c
Součin			
abc	1	2	3
acb	1	3	2
bac	2	1	3
bca	3	1	2
cab	2	3	1
cba	3	2	1

Protože násobení je komutativní a asociativní, dostaneme součin abc při roznásobení součinu (1) celkem 6krát.

Stejnou úvahu jako pro součin abc můžeme provést i pro součiny abd , acd , bcd ; vlastně jde jen o záměnu písmen. V součinu (1) dostaneme po roznásobení mimo členy

$$6abc + 6abd + 6acd + 6bcd$$

ještě další kladné členy (a, b, c jsou čísla kladná); jejich součet označíme k . Je tedy

$$(a + b + c + d)^3 = 6(abc + abd + acd + bcd) + k,$$

tj. vzhledem k podmínce $a + b + c + d = 1$

$$6(abc + abd + acd + bcd) = 1 - k < 1$$

a odtud

$$abc + abd + acd + bcd < \frac{1}{6}.$$

Obdobně, ale jednodušeji, se získá odhad $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 < 1$.

39. Rozhodněte, který ze zlomků

$$\frac{5\,555\,555\,553}{5\,555\,555\,557},$$

$$\frac{6\,666\,666\,664}{6\,666\,666\,669}$$

je větší.

Řešení. Kdybyste postupovali, jak jste se učili ve škole, uvedli byste oba zlomky na společného jmenovatele a porovnali byste pak čitatele. Bylo by to však příliš pracné. Společný jmenovatel by byl asi součin obou jmenovatelů a počítání by trvalo příliš dlouho. Proto musíme postupovat vtipněji.

Vidíme, že číselník a jmenovatel každého zlomku jsou sice velká čísla, ale liší se jen o několik jednotek. Označíme-li

$$5\,555\,555\,557 = a, \quad 6\,666\,666\,669 = b,$$

jsou oba dané zlomky

$$A = \frac{a-4}{a}, \quad B = \frac{b-5}{b}.$$

Víme, že je $A > B$ právě tehdy, je-li $A - B > 0$; a obdobně $A < B$ právě tehdy, je-li $A - B < 0$. Vypočteme tedy $A - B$; vyjde

$$A - B = \frac{ab - 4b - ab + 5a}{ab} = \frac{5a - 4b}{ab}. \quad (1)$$

Protože je $ab > 0$, stačí vypočítat $5a - 4b$, a to je poměrně snadné.

Dostaneme $5a - 4b = 27\,777\,777\,785 - 26\,666\,666\,676 > 0$. Podle (1) je tedy $A - B > 0$, tj.

$$A > B.$$

Vidíte, jak nám pomohla algebra.

40. Rozhodněte, které z obou čísel

$$a = 639^9, \quad b = 638^9 + 638^8$$

je větší. Své tvrzení odůvodněte.

Řešení. Bylo by jistě pracné a zdlouhavé vypočítat tak vysoké mocniny trojciferných čísel a porovnat přímo výsledky.

Víme, že $a > b$ právě tehdy, když je $a - b > 0$, a že $a < b$ právě tehdy, když je $a - b < 0$. Pomocí znalosti algebry se tedy pokusíme vypočítat výhodně rozdíl $a - b$.

$$a - b = 639^9 - (638^9 + 638^8). \quad (1)$$

Platí

$$638^9 + 638^8 = 638^8 (638 + 1) = 638^8 \cdot 639.$$

Dosadíme-li do (1), vyjde

$$a - b = 639^9 - 638^8 \cdot 639,$$

$$a - b = 639 (639^8 - 638^8). \quad (2)$$

Protože je $639 > 638$, je $639^8 > 638^8$, tj. $639^8 - 638^8 > 0$; z (2) tedy vyplývá $a - b > 0$ a dále $a > b$.

41. Zjistěte, který ze zlomků

$$\frac{23\,456\,798}{29\,876\,543}, \quad \frac{23\,456\,789}{29\,876\,534}$$

je větší.

Řešení. Prohlédneme-li si pozorně oba zlomky, vidíme, že jejich čitatelé se od sebe liší jen o 9; podobně je tomu se jmenovateli. Označíme-li $23\,456\,789 = a$, $29\,876\,534 = b$, jsou dané zlomky

$$\frac{a+9}{b+9}, \frac{a}{b}.$$

Dále si uvědomíme, že dvě kladná čísla x, y můžeme porovnat buď pomocí jejich rozdílu nebo pomocí jejich podílu. Platí totiž např. věta: $x > y$ (nebo $x = y$ nebo $x < y$), právě když je $\frac{x}{y} > 1$ (nebo $\frac{x}{y} = 1$ nebo $\frac{x}{y} < 1$). Vypočteme tedy

$$\frac{x}{y} = \frac{(a+9)b}{(b+9)a} = \frac{ab+9b}{ab+9a}.$$

Protože je $b > a$, je $9b > 9a$, $ab+9b > ab+9a$, a tedy

$$\frac{x}{y} > 1,$$

neboli první zlomek je větší než druhý.

42. Zjistěte, které z čísel

$$\frac{1}{999\,999} + \frac{1}{1\,000\,001}, \quad \frac{2}{1\,000\,000}$$

je větší.

Řešení. Položme $a = 1\,000\,000$. Pak pro daná čísla platí

$$\frac{1}{999\,999} + \frac{1}{1\,000\,001} = \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+1} = \frac{2a}{a^2-1},$$

$$\frac{2}{1\,000\,000} = \frac{2}{a}.$$

Daná čísla lze porovnat podílem nebo rozdílem.

1. Užijeme podíl. Platí

$$\frac{2a}{a^2 - 1} : \frac{2}{a} = \frac{2a}{a^2 - 1} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{a^2 - 1}.$$

Zřejmě $a^2 > a^2 - 1$, takže uvažovaný podíl je větší než 1. Platí tedy

$$\frac{1}{999\,999} + \frac{1}{1\,000\,001} > \frac{2}{1\,000\,000}. \quad (1)$$

2. Užijeme rozdíl. Platí:

$$\frac{2a}{a^2 - 1} - \frac{2}{a} = \frac{2a^2 - 2(a^2 - 1)}{a(a^2 - 1)} = \frac{2}{a^2(a^2 - 1)} > 0,$$

tj. docházíme také k závěru (1).

43. Určete všechna čísla a , pro která kořen x rovnice $a(x - 2) + x - 5 = 0$ vyhovuje rovnici

$$x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0. \quad (1)$$

Řešení. Rovnice

$$a(x - 2) + x - 5 = 0$$

má pro každé $a \neq -1$ kořen

$$x = \frac{2a + 5}{a + 1}. \quad (2)$$

Dosadíme-li číslo x do rovnice (1), požaduje se, aby byla splněna rovnice

$$\left(\frac{2a+5}{a+1}\right)^3 - 7\left(\frac{2a+5}{a+1}\right)^2 + 7\frac{2a+5}{a+1} + 15 = 0. \quad (3)$$

Znásobíme ji číslem $(a+1)^3$ a upravíme; vyjde

$$a^3 - 4a = 0. \quad (4)$$

Tato rovnice se dá napsat ve tvaru

$$a(a+2)(a-2) = 0.$$

Čísla $a = 0$, $a = 2$, $a = -2$ jsou jediná čísla, která mohou být řešením úlohy. Zkouškou se přesvědčíme, že skutečně čísla 5, 3, -1 , která dostaneme z (2) pro $a = 0$, $a = 2$ a $a = -2$, vyhovují úloze. Jádrem řešení je přechod od rovnice (3) k rovnici (4).

44. Je dána soustava dvou rovnic o dvou neznámých x, y

$$3x + 2y = 0, \quad (1)$$

$$2x - y = -3.$$

Ke každému koeficientu u neznámé přičteme totéž číslo p ; nová soustava bude mít za řešení dvě čísla x, y , jejichž rozdíl je 1. Určete všechna čísla p této vlastnosti.

Řešení. Řešení nové soustavy budou buď čísla $x, x + 1$ nebo čísla $x, x - 1$. Probereme obě možnosti:

$$\text{a) } (3 + p)x + (2 + p)(x + 1) = 0 \quad (2)$$

$$(2 + p)x + (p - 1)(x + 1) = -3$$

Odečtením obou rovnic vyjde $x = 0$. Dosazením do první rovnice (2) vyjde $p = -2$. Pozměněná soustava (2) pak zní $x = 0, -3y = -3$, tj. $y = 1$, je tedy $y - x = 1$.

b) Druhá možnost:

$$(3 + p)x + (2 + p)(x - 1) = 0 \quad (3)$$

$$(2 + p)x + (p - 1)(x - 1) = -3$$

Odečtením obou rovnic (3) dostaneme $4x - 3 = 3$, odtud $x = \frac{3}{2}$. Dosazením do první rovnice (3) vyjde $p = -\frac{11}{4}$.

Pozměněná soustava pak zní

$$\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y = 0,$$

$$-\frac{3}{4}x - \frac{15}{4}y = -3.$$

Tato soustava má řešení $x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$, takže je opět splněna podmínka textu úlohy: $x - y = 1$.

Hledaná čísla p jsou tedy $p = -2$, $p = -\frac{11}{4}$; poněvadž soustavy (2), popř. (3), mají vždy jen jediné řešení $x = 0$, $p = -2$, popř. $x = \frac{3}{2}$, $p = -\frac{11}{4}$.

45. Dokažte, že platí

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{15}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right) < 2$$

pro všechna přirozená čísla $n > 1$.

Řešení. V posledních závorkách je předpis, jak se sestrojí jednotliví činitelé součinu, např. pro $n = 2$ dostaneme

$$1 + \frac{1}{2^2 - 1} = 1 + \frac{1}{3},$$

pro $n = 3$

$$1 + \frac{1}{3^2 - 1} = 1 + \frac{1}{8}$$

atd. Výraz $1 + \frac{1}{n^2 - 1}$ upravíme »uvedením na společného jmenovatele«

$$1 + \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{(n^2 - 1) + 1}{n^2 - 1} = \frac{n^2}{(n + 1)(n - 1)}.$$

Užijeme-li tuto úpravu pro každého činitele, můžeme součin zapsat

$$s = \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdot \cdots \cdot \frac{n^2}{(n-1)(n+1)}$$

neboli

$$s = \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot n^2}{2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot (n-1)^2 \cdot n \cdot (n+1)}.$$

Po zkrácení vyjde

$$s = 2n \frac{1}{n+1} = 2 \cdot \frac{n}{n+1} < 2 \cdot 1 = 2.$$

Tím je nerovnost dokázána.

III. Úlohy logického charakteru

46. Sedm spolužáků si slíbilo na začátku prázdnin, že každý z nich napíše třem dalším zprávu o svých příhodách. Jeden z nich si vzpomněl, že by měl každý žák dostat listy právě od těch tří spolužáků, kterým napsal. Je to možné?

Řešení. Kdyby to bylo možné, musili by si vždy určití dva žáci vyměnit dva dopisy. To znamená, že by všech dopisů musil být sudý počet. Ale víme, že každý žák napsal a odeslal 3 dopisy; celkem tedy bylo vyměněno $7 \cdot 3 = 21$ dopisů, což je lichý počet. Dodatečné podmínce tedy nelze vyhovět. Tato úloha nevyžaduje celkem žádný výpočet; je třeba jen uvažovat. Zároveň je to pěkný příklad úlohy neřešitelné.

47. Šachový kroužek uspořádal turnaj, v němž každý z kamarádů Jirka, Karel, Tonda obsadil právě jedno ze tří prvních míst. Určete pořadí chlapců v šachovém turnaji, víte-li, že právě jeden z výroků

- a) Jirka je třetí,
- b) Tonda není druhý,
- c) Karel není třetí

je pravdivý.

Řešení. Sestavme tabulku, která udává, které z výroků a , b , c jsou pravdivé pro jednotkové permutace JKT , JTK , KJT , KTJ , TJK , TKJ , které udávají pořadí soutěžících.

JKT	JTK	KJT	KTJ	TJK	TKJ
b, c		b, c	a, c	b	a, b, c

Řešení je tedy jediné: permutace TJK .

48. Dopravní síť města se skládá ze tří trolejbusových linek. Celková délka trolejbusového vedení je 13 km. Jednotlivé linky číselované 1, 2, 3 mají po řadě délky 5,7 km, 5,8 km, 6,9 km. Linky 1 a 2 mají společný úsek délky 1,8 km, linky 2 a 3 mají společný úsek délky 2,3 km. Linky 3 a 1 mají společný úsek délky 2,7 km. Rozhodněte, zda existuje úsek společný všem třem linkám. Jestliže ano, vypočítejte jeho délku. Načrtněte plánec všech tří tratí a vpište do něho délky jednotlivých úseků.

Řešení (všecky délky jsou udány v kilometrech). Označíme:

a) d_1, d_2, d_3 délky těch částí tratí 1, 2, 3, v nichž jezdí každá linka sama;

b) d_{12}, d_{23}, d_{31} délky těch úseků, jimiž jezdí právě dvě linky (označené indexy);

c) x délku úseku, jímž jezdí všechny tři tratě.

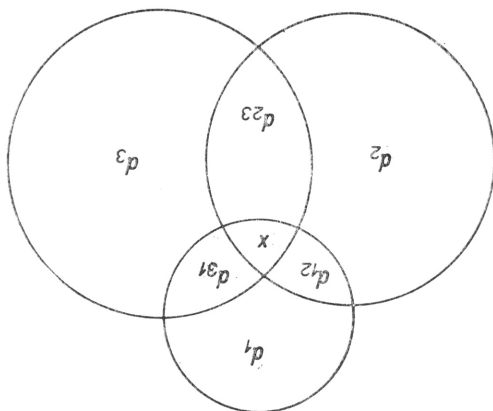
Úlohu lze řešit velmi jednoduše bez soustavy rovnic. Zobrazme délky tratí kruhy a délky jejich společných úseků částmi kruhů, jako na obr. 3a. Sečteme-li délky jednotlivých linek, dostaneme číslo

$$5,7 + 5,8 + 6,9 = 18,4, \quad (1)$$

jež je o 5,4 větší než skutečná délka tratí. Tento rozdíl lze

snadno vysvětlit. Z obr. 3a plyne, že v součtu (1) jsme dvakrát započítali úseky d_{12} , d_{23} , d_{31} a úsek x dokonce třikrát. Tedy

$$d_{12} + d_{23} + d_{31} + 2x = 5,4. \quad (2)$$



Obr. 3a

Sečteme-li délku společného úseku linek 1 a 2 s délkou společného úseku linek 2 a 3 a s délkou společného úseku linek 3 a 1, dostáváme

$$1,8 + 2,3 + 2,7 = 6,8.$$

Z obr. 3a je zřejmé, že

$$d_{12} + d_{23} + d_{31} + 3x = 6,8. \quad (3)$$

Podle (2) a (3) je tedy

$$x = 6,8 - 5,4 = 1,4.$$

Nyní již snadno pomocí obr. 3a vypočteme

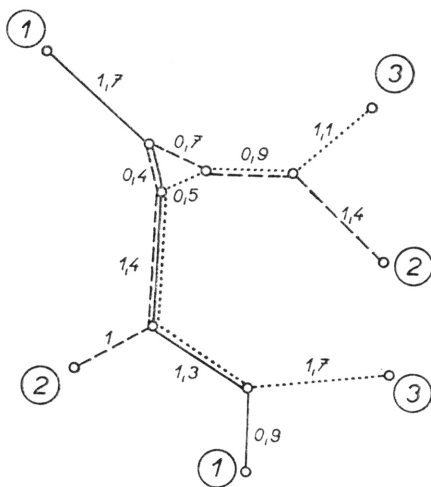
$$d_{12} = 1,8 - 1,4 = 0,4, \quad d_{23} = 2,3 - 1,4 = 0,9,$$

$$d_{31} = 2,7 - 1,4 = 1,3,$$

$$d_1 = 5,7 - 3,1 = 2,6, \quad d_2 = 5,8 - 2,7 = 3,1,$$

$$d_3 = 6,9 - 3,6 = 3,3.$$

Náčrtek plánku tří linek je na obr. 3b.



Obr. 3b

49. Když jsem vkročil na náměstí, odbíjely právě hodiny na radnici 8 hodin, kostelní hodiny však už ukazovaly 8^{02} . Když jsem přešel náměstí a dorazil k zámku, bylo na zámeckých hodinách teprve 8^{01} , ale na kostelních hodinách už 8^{06} . Mám však už s hodinami v našem městě své zkušenosti: zámecké nikdy nejdou napřed, radniční zato vždycky jdou napřed a čas na kostelních hodinách se neliší od správného času nikdy víc než o 3 minuty. Určete (na minuty), jaký byl správný čas, když jsem vkročil na náměstí.

Řešení. Z údajů kostelních hodin je vidět, že od vstupu na náměstí do příchodu k zámku uplynuly 4 minuty. Tudíž v okamžiku vstupu na náměstí bylo na zámeckých hodinách 7^{57} h. Zámecké hodiny nikdy nejdou napřed, takže ukazují-li 7^{57} , jsou možné (uvažujeme-li jen celé minuty) následující časové údaje

$$7^{57}, 7^{58}, 7^{59}, 8^{00}, 8^{01}, \dots \quad (1)$$

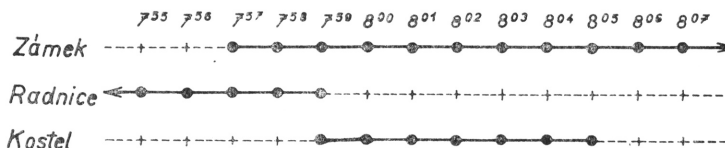
Radniční hodiny jdou vždy napřed, a proto když odbíjejí 8 hodin, ještě 8 hodin není a jsou možné (uvažujeme-li jen celé minuty) následující časové údaje:

$$7^{59}, 7^{58}, 7^{57}, 7^{56}, \dots \quad (2)$$

Čas na kostelních hodinách se neliší od správného času nikdy o víc než o 3 minuty, tudíž, když tyto hodiny ukazují 8^{02} , jsou možné (uvažujeme-li jen celé minuty) následující časové údaje

$$7^{59}, 8^{00}, 8^{01}, 8^{02}, 8^{03}, 8^{04}, 8^{05}. \quad (3)$$

Porovnáme-li možné časové údaje všech tří hodin, tj. množiny (1), (2) a (3), vidíme, že správný čas (na minuty) byl 7^{59} h. Tento výsledek lze také dostat pomocí grafického znázornění (obr. 4).



Obr. 4

50. Je dána tabulka přirozených čísel připomínající tabulku pro sázení ve sportce.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

Vybereme-li z tabulky sedm čísel tak, aby z každého řádku i z každého sloupce bylo vybráno jediné číslo, pak je součet vybraných čísel vždy týž. Dokažte. (Jeden možný výběr je vyznačen v tabulce tučně.)

Řešení. Postup vybírání čísel si můžeme představit takto: Na každé pole 1. řádku položíme jednu minci. Potom jednu minci necháme v 1. řádku a ostatní mince posuneme ve směru sloupců tak, aby každá z nich ležela právě v jednom řádku. Čísla zakrytá mincemi potom splňují požadavky výběru. Když mince ležely v 1. řádku, byl součet čísel, která zakrývaly,

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28.$$

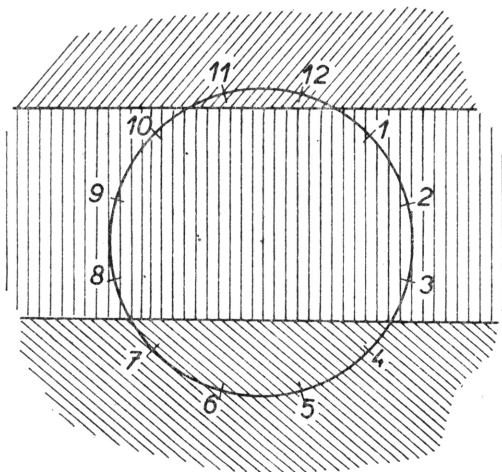
Tím, že jsme jednu minci posunuli do 2. řádku, se součet čísel zakrytých mincemi zvětšil o 7; podobně posunem do 3. řádku o 2.7, ..., posunem do 7. řádku o 6.7. Součet čísel zakrytých mincemi se tedy celkem zvětšil o

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot 7 = 21 \cdot 7 = 147.$$

Součet čísel vybraných tak, jak požaduje úloha, je tedy vždy

$$28 + 147 = 175.$$

51. Na obrázku (obr. 5) je znázorněn hodinový ciferník a dvě rovnoběžné přímky, z nichž žádná neprochází žádným z bodů 1 až 12. Změňte polohu přímek tak, aby součet čísel ležících v každé ze dvou vyšrafovaných polorovin i ve vyšrafovaném pásu byl týž.



Obr. 5

Řešení. Nejdříve zjistíme součet všech čísel na ciferníku:

$$1 + 2 + \dots + 12 = 78 = 3 \cdot 26.$$

Součet v každé z částí ciferníku musí být tedy 26. Určeme nejprve tu část, do níž patří číslo 12. Musíme rozlišit dva případy:

1. Nechť číslo 12 leží v části, jež je polorovinou. Experimentováním zjistíme, že

$$26 = 11 + 12 + 1 + 2.$$

Jedna z hledaných polorovin obsahuje tedy body ciferníku označené 1, 2, 11, 12. Analogicky zjistíme, že

$$26 = (10 + 9) + (3 + 4),$$

takže pás obsahuje body ciferníku označené 3, 4, 9, 10 a zbývající polovina body ciferníku označené 5, 6, 7, 8.

2. Experimentováním se přesvědčíme, že 12 nemůže ležet v rovnoběžkovém pásu, neboť součty

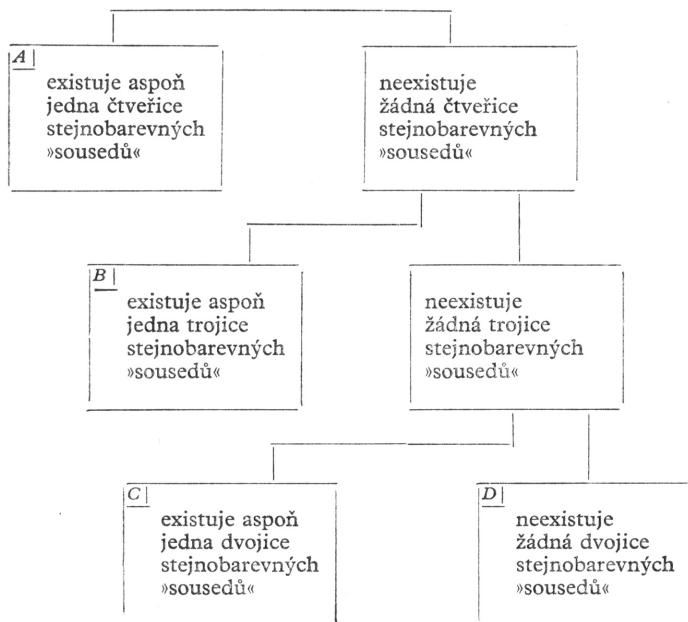
$$(11 + 12) + 3, 12 + (5 + 4 + 3 + 2), (12 + 1) + (7 + 6),$$

$$(12 + 1 + 2) + (6 + 5), (12 + 1 + 2 + 3) + 8$$

nevedou k řešení.

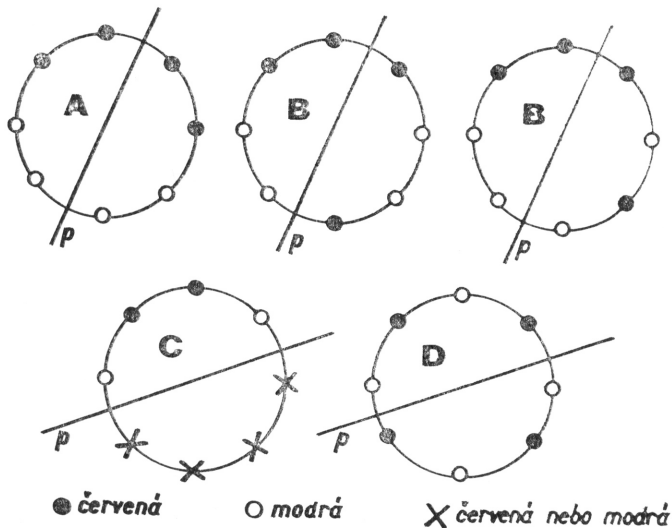
52. Na kružnici k leží 8 různých bodů, z nichž jsou 4 červené a 4 modré. Zjistěte, zda lze vždy sestavit takovou přímku p , že uvnitř opačných polorovin s hraniční přímkou p leží po 2 červených a po 2 modrých bodech.

Řešení. Při hledání přímky p musíme přihlížet k tomu, kolik stejnobarevných bodů je »sousedů«. Nejprve tedy přistoupíme k systematickému výčtu všech možností (dichotomické třídění). Třídění zaznamenáme do schématu zvaného **strom**:



Na obr. 6 jsou nakresleny koncové případy *A*, *B*, *C*, *D*. V případě *B* jsou dvě možnosti. V případě *C* musí být »sousedí« dvou červených dva modré, na uspořádání zbývajících čtyř nezáleží.

Na obr. 6 jsou také naznačeny polohy přímky *p*. Získali jsme je experimentálně.



Obr. 6

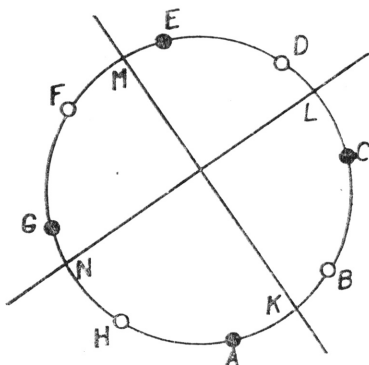
53. Osmiúhelník vepsaný dané kružnici má čtyři vrcholy červené a čtyři modré; přitom žádné tři sousední vrcholy nejsou téže barvy. Zjistěte, zda lze vždy sestrojit takové dvě různoběžné přímky, aby uvnitř každého úhlu jimi určeného ležel jeden červený a jeden modrý vrchol.

Řešení. Rozlišíme dva případy.

I. Žádné dva sousední vrcholy nemají tutéž barvu.

II. Lze najít aspoň jednu dvojici sousedních vrcholů téže barvy.

V případě I se barvy vrcholů střídají. Na kružnici zvolíme čtyři body K, L, M, N tak, aby každý z nich odděloval dvě dvojice červená-modrá a spojíme je přímkami ob jeden (obr. 7).



Obr. 7

V případě II necht' jsou např. body A, B červené; pak jsou vrcholy C, H modré. Přehled barvy vrcholů si zapíšeme »tabulkou«

$$\begin{array}{cccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H \\ \hline \text{č} & \text{č} & \text{m} & & & & & \text{m} \end{array}, \quad (1)$$

kde v druhé řádce je zaznamenána barva. V tabulce (1) nemůže být červená žádná z dvojic D, E a F, G ; pak by totiž byla modrá zbývající dvojice a tři sousední vrcholy by byly modré. »Barvení« vrcholů v tabulce (1) lze tedy **dokončit** některým z těchto způsobů:

$A \downarrow B$			$C \downarrow D$			$E \downarrow F$			$G \downarrow H$		
č	č	m	č	m	č	m	č	m	č	m	m
č	č	m	č	m	m	č	č	m	č	m	m
č	č	m	m	č	č	m	č	m	č	m	m
č	č	m	m	č	m	č	m	č	č	m	m

Konstrukce bodů K , L , M , N , které je třeba spojit přímkami, je ve všech čtyřech případech zřejmá; ukazují ji šípky.

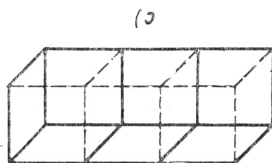
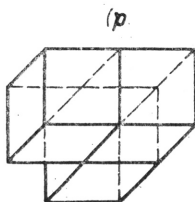
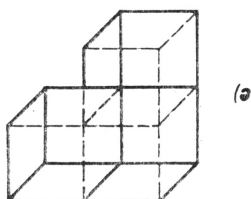
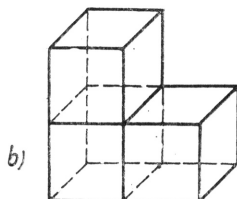
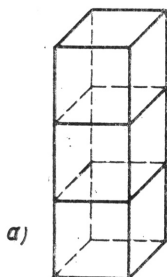
54. Hrací kostka má tvar krychle; její stěny jsou opatřeny oky v počtu 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, že součet počtů ok na dvou protějších stěnách je týž. K hrací kostce přilepíme dvě další stejné hrací kostky vždy celými stěnami. Máme zjistit, jak máme kostky slepit a jak slepenec položit na stůl (aspoň jednou stěnou), aby počet viditelných ok byl a) co největší, b) co nejmenší. (Za viditelné pokládáme všechny stěny slepence, které nepřiléhají ke stolu.)

Řešení. Popsaným slepováním hracích kostek lze získat právě dva různé tvary slepenců; znázorňují je obr. 8 a), b). Tyto útvary můžeme postavit na stůl celkem pěti způsoby. K případům z obr. 8 a), b) přibývají totiž další tři možnosti znázorněné na obr. 8 c), d), e).

Před zjišťováním počtů viditelných ok je třeba spočítat, kolik je součet počtu ok na dvou protějších stěnách. Rovná se sedmi, neboť

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) : 3 = 7.$$

Protější stěny totiž tvoří právě tři různé dvojice.



Obr. 8

Největší a nejmenší možné počty viditelných ok u jednotlivých sestav zapíšeme do tabulky:

Sestava z obr.	Počet viditelných ok	
	největší	nejmenší
8 a)	48	43
8 c)	49	28
8 b)	51	33
8 d)	51	26
8 e)	52	39

Největší počet viditelných ok může být 52 (u sestavy podle obr. 8 e)) a nejmenší 26 (podle obr. 8 d)).

55. Máme 12 kamenů stavebnice; každý z nich je kvádr o rozměrech 2, 3, 4 centimetry. Z těchto kamenů sestavujeme kvádry, a to tak, že vždy shodné stěny kamenů musí být přiloženy k sobě; musíme použít vždy všech 12 kamenů.

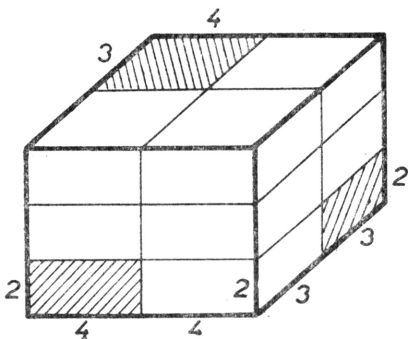
a) Udejte rozměry všech kvádrů, které lze sestavit.

b) U každého kvádru udejte, kolika způsoby ho sestavit.

Řešení. Hlavní věcí při řešení úlohy je najít nějaký systém, jak udat všechny kvádry, které z kamenů lze vytvořit. Pak vypočteme rozměry každého z nich a snadno zodpovíme otázku b).

Ze způsobu, jak jsou kvádry tvořeny, vyplývá, že každý kvádr má dvě protější stěny složené z obdélníků o rozměrech 3 a 4 cm, další dvě protější stěny složené z obdélníků o rozmě-

rech 2 a 4 cm a konečně další dvě stěny složené z obdélníků o rozměrech 2 a 3 cm. Obrázek 9 ukazuje jeden z »vystavěných« kvádrů; dolní a horní stěna jsou zde složeny ze čtyř obdélníků o rozměrech 3 a 4 cm, přední a zadní stěny ze šesti obdélníků o rozměrech 2 a 4 cm, pravá a levá stěna ze šesti obdélníků o rozměrech 2 a 3 cm.



Obr. 9

Tabulka (4)

Číslo případu	Počet vrstev x	Počet řad y	Počet sloupců z	Rozměry vytvořeného kvádru v cm		
				$2x$	$3y$	$4z$
1	1	1	12	2	3	48
2	1	2	6	2	6	24
3	1	3	4	2	9	16
4	1	4	3	2	12	12
5	1	6	2	2	18	8
6	1	12	1	2	36	4
7	2	1	6	4	3	24
8	2	2	3	4	6	12
9	2	3	2	4	9	8
10	2	6	1	4	18	4
11	3	1	4	6	3	16
12	3	2	2	6	6	8
13	3	4	1	6	12	4
14	4	1	3	8	3	12
15	4	3	1	8	9	4
16	6	1	2	12	3	8
17	6	2	1	12	6	4
18	12	1	1	24	3	4

Kvádry budeme tvořit tak, že ze stěny složené z obdélníků o rozměrech 3 a 4 cm vyjdeme jako z podstavy, počet obdélníků

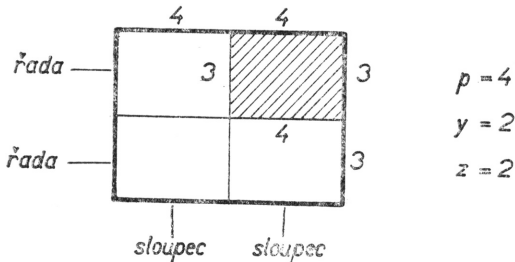
označíme p . Nad touto stěnou je x »vrstev« výšky 2 cm. Pro čísla p, x zřejmě platí

$$p \cdot x = 12, \quad (1)$$

neboť nad každým obdélníkem podstavy je x kamenů a počet všech kamenů stavebnice je 12.

Podstava kváдру složená z p obdélníků o rozměrech 3 a 4 cm se dá rozdělit v »řady« a »sloupce«, jak ukazuje obr. 10. Počet řad (každá z nich má šířku 3 cm) označíme y ; počet sloupců (každý z nich má šířku 4 cm) označíme z ; pak platí zřejmě

$$p = yz. \quad (2)$$



Obr. 10

Tabulka (5)

Případy z (4)	Rozměry kvádrů v cm
1	2, 3, 48
2	2, 6, 24
3	2, 9, 16
4	2, 12, 12
5	2, 8, 18
6	2, 4, 36
7, 18	3, 4, 24
8, 13, 17	4, 6, 12
9, 15	4, 8, 9
10	4, 4, 18
11	3, 6, 16
12	6, 6, 8
14, 16	3, 8, 12

Spojením vztahů (1), (2) dostaneme

$$xyz = 12. \quad (3)$$

Čísla x, y, z jsou podle (3) dělitelé čísla 12; např. na obr. 9 je $x = 3, y = 2, z = 2$.

Sestavíme nyní tabulku (4) pro všechny možnosti rozkladu čísla 12 podle (3); všimněme si, jak je tabulka konstruována. Nyní vybereme z tabulky (4) kvádry o týchž rozměrech a sestavíme je do tabulky (5); rozměry jsou tu uvedeny vzestupně, čísla případů podle tabulky (4) udávají počet způsobů, kterými lze vytvořit každý z kvádrů. Tím jsou rozřešeny úlohy a) i b).

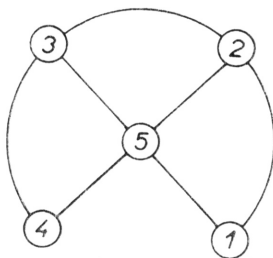
56. Na obr. 11 je znázorněn hrací plán podkovy, hry francouzských dětí. Obsahuje 5 polí označených čísly 1 až 5.

Sousedními poli se nazývají dvě pole spojená úsečkou nebo obloukem. Hru hrají dva hráči, červený ($\check{C}$) a modrý (M), z nichž každý má dva kameny své barvy. Počáteční postavení zaujmou tak, že střídavě kladou po jednom kamenu své barvy na pole 1 až 5; jedno pole zůstane volné. Při samotné hře táhnou hráči střídavě, vždy jeden kámen na sousední volné pole. Vyhrává hráč, který znemožní svému protivníkovi další tah.

a) Kolik počátečních postavení má hra podkova?

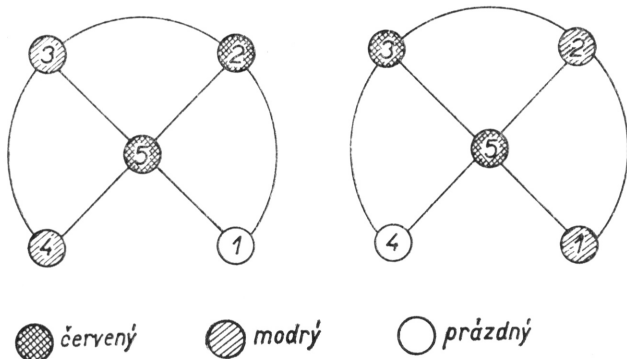
b) Najděte všechna postavení, z nichž modrý nemůže dále táhnout.

c) Je dáno postavení Č14, M35; červený táhne. Zapište další průběh hry, jestliže červený svým třetím tahem vyhrál.



Obr. 11

Řešení. a) Jedno z polí 1 až 5 zůstane neobsazeno, to je 5 možností. Zbývající čtyři pole jsou obsazena dvěma modrými a dvěma červenými kameny, to je celkem 6 možností. Všech počátečních postavení je tedy $5 \cdot 6 = 30$.



Obr. 12

b) Jsou to jediné postavení Č25, M34 a Č35, M12 (obr. 12).

Odůvodnění: Je-li volné pole 5, může táhnout Č i M.

Je-li M na 5, může táhnout na některé z polí 1 až 4.

Je tedy Č na 5 a stačí vyzkoušet Č15 a Č25.

Při Č15 může M vždy táhnout.

Při Č25 nemůže M táhnout jediné při M34.

c) Zápis hry je

Č14, M35 → Č24,	M 35 → Č24,	M13 → Č45,	M13 → Č45,
táhne Č	táhne M	táhne Č	táhne M
			(chyba)

M12 → Č35, M12
táhne Č

57. Zdeněk krátil při výpočtech zlomky takto:

$$\frac{\cancel{1}6}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\cancel{2}6}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5}, \quad \frac{\cancel{1}99}{\cancel{9}95} = \frac{1}{5}.$$

Učitel mu tento způsob »krácení« pochopitelně neschvaluje, ale Zdeněk se hájí tím, že výsledek je správný. Najděte všechny zlomky s a) dvojcifernými, b) trojcifernými čitateli a jmenovateli, které mohl Zdeněk »krátit« svým způsobem a dostal správný výsledek.

Řešení. a) Čítec i jmenovatel zlomku, který je možno podle Zdenka »krátit«, jsou dvojciferná čísla, a proto můžeme takový zlomek psát ve tvaru

$$\frac{10a + b}{10b + c}.$$

V případech, kdy má Zdeněk pravdu, platí

$$\frac{10a + b}{10b + c} = \frac{a}{c}, \quad (1)$$

přičemž čísla a, b, c jsou přirozená a menší než 10. Z rovnice (1) plyne

$$c = \frac{10ab}{9a + b}. \quad (2)$$

O číslech a, b, c víme, že jsou přirozená a menší než 10, přičemž číslo c splňuje vztah (2). Chceme-li najít všechny zlomky, kde

je možno »krátit« Zdeňkovým způsobem, musíme při volbě čísel a, b postupovat tak, abychom vystřídalí všechny možnosti.

1. Zvolme $a = 1$. Pro b a c sestavme tabulku:

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9
c	$\frac{10}{10}$	$\frac{20}{11}$	$\frac{30}{12}$	$\frac{40}{13}$	$\frac{50}{14}$	$\frac{60}{15}$	$\frac{70}{16}$	$\frac{80}{17}$	$\frac{90}{18}$

Obdrželi jsme řešení: $a = b = c = 1$, tj. $\frac{11}{11} = \frac{1}{1}$,

$$a = 1, b = 6, c = 4, \text{ tj. } \frac{16}{64} = \frac{1}{4},$$

$$a = 1, b = 9, c = 5, \text{ tj. } \frac{19}{95} = \frac{1}{5}.$$

2. Zvolme $a = 2$. Pro b, c sestavíme tabulku:

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9
c	$\frac{20}{19}$	$\frac{40}{20}$	$\frac{60}{21}$	$\frac{80}{22}$	$\frac{100}{23}$	$\frac{120}{24}$	$\frac{140}{25}$	$\frac{160}{26}$	$\frac{180}{27}$

Našli jsme další řešení: $a = b = c = 2$, tj. $\frac{22}{22} = \frac{2}{2}$,

$$a = 2, b = 6, c = 5, \text{ tj. } \frac{26}{65} = \frac{2}{5}.$$

3. až 9. Volíme-li postupně $a = 3, 4, \dots, 9$, najdeme další zlomky, pro něž platí $a = b = c$, tj.

$$\frac{33}{33} = \frac{3}{3}, \frac{44}{44} = \frac{4}{4}, \dots, \frac{99}{99} = \frac{9}{9},$$

a ještě případ

$$a = 4, b = 9, c = 8, \text{ tj. } \frac{49}{98} = \frac{4}{8}.$$

Závěr. Zlomky $\frac{11}{11}, \frac{22}{22}, \dots, \frac{99}{99}, \frac{16}{64}, \frac{19}{95}, \frac{26}{65}, \frac{49}{98}$

jsou všechny zlomky vyhovující úloze.

b) Postupujeme obdobně jako v části a). V tomto případě jde o nalezení přirozených čísel a, b, c menších než 10, které splňují rovnost

$$\frac{100a + 10b + b}{100b + 10b + c} = \frac{a}{c}.$$

Snadnou úpravou zjistíme, že pro c platí

$$c = \frac{10ab}{9a + b},$$

tj. vzorec (2). Je tedy možno využít výsledky z části a). Všechny zlomky, které splňují část b) naší úlohy, jsou:

$$\frac{111}{111}, \frac{222}{222}, \dots, \frac{999}{999}, \frac{166}{664}, \frac{199}{995}, \frac{266}{665}, \frac{499}{998}.$$

58. V písemné práci se vyskytl lomený výraz

$$\frac{ax + b}{x + c}.$$

Luděk se pamatuje, že a, b, c byla určitá čísla a že při dosazení $x = 1$ dostal výsledek 1, při dosazení $x = -1$ dostal -1 , a když dosadil $x = 2$, zjistil, že se nedá hodnota daného výrazu vypočítat. Pomozte mu najít čísla a, b, c .

Řešení. Z textu úlohy dostaneme

$$\frac{a + b}{1 + c} = 1, \quad \frac{-a + b}{-1 + c} = -1.$$

Hodnotu výrazu nebylo možno vypočítat pro $x = 2$, protože jmenovatel byl roven nule, tj. $c + 2 = 0$. Z uvedených rovnic dostaneme

$$a = -2, b = 1, c = -2.$$

Lomený výraz, s kterým se Luděk potýkal, byl tedy

$$\frac{1 - 2x}{x - 2}.$$

59. Žák měl řešit rovnici

$$\frac{x + 2}{7x + 23} = \frac{x - 2}{7(x + 1)}. \quad (1)$$

Opsal ji však s chybami: v čitateli na levé straně napsal chybně druhý člen a v jmenovateli na pravé straně místo znaménka plus napsal znaménko minus. Přesto při správném řešení chybně opsané rovnice dostal správné řešení (kořen) dané rovnice. Jak zněla chybně opsaná rovnice?

Řešení. Tato úloha je výstrahou pro učitele, kteří kontrolují jen výsledky; jak je vidět, může být výpočet nesprávný, ale výsledek je přesto »správný«. Jinak patří tato úloha do skupiny úloh »na pátrání po chybě«, které bývají velmi poučné. Nejprve zjistíme, jaké vlastně řešení má daná rovnice (1).

Postupnými úpravami dostaneme:

$$\begin{aligned} 7(x + 1)(x + 2) &= (7x + 23)(x - 2) \\ 7(x^2 + 3x + 2) &= 7x^2 + 9x - 46 \\ 12x &= -60 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = -5$ do pravé i levé strany rovnice, dostaneme vždy $\frac{1}{4}$; zkouška tedy »vyšla«. Zkoušku jsme museli provést, abychom se mimo jiné přesvědčili, že číslo $x = -5$ neanuluje jmenovatele zlomků z rovnice (1).

Nyní: jak opsal žák rovnici (1)? Podle textu úlohy místo čísla 2 v čitateli na levé straně napsal jakési neznámé číslo a ; v jmenovateli na pravé straně rovnice (1) spletl znaménko.

Chybně opsaná rovnice tedy zněla

$$\frac{x + a}{7x + 23} = \frac{x - 2}{7(x - 1)}. \quad (2)$$

Číslo a bylo takové, že rovnice (2) měla »správné« řešení $x = -5$. Dosadíme-li do (2) $x = -5$, vyjde

$$\frac{a - 5}{-12} = \frac{-7}{-42},$$

tj. po úpravě $a - 5 = -2$ neboli $a = 3$. Chybně opsaná rovnice tedy zněla

$$\frac{x + 3}{7x + 23} = \frac{x - 2}{7(x - 1)}.$$

Jejím řešením se přesvědčíme, že má skutečně řešení $x = -5$. Žák měl tedy šťastnou ruku: obě chyby při opisování »se zrušily«.

60. Žák dostal za úlohu umocnit trojčlen $(a + 2b - 3)^2$ a vyšlo mu $a^2 + 4b^2 - 9$. »Ale to je přece špatně,« namítal učitel, »dosad' si na zkoušku za a i b nějaká určitá přirozená čísla.« Žák poslechl a zkouška mu vyšla. Která čísla dosadil?

Řešení. Vynásobením nebo podle vzorce pro druhou mocninu trojčlenu zjistíme, že správný výsledek je

$$(a + 2b - 3)^2 = a^2 + 4b^2 + 9 + 4ab - 6a - 12b. \quad (1)$$

Jsou-li a, b přirozená čísla, která žák dosadil, platí podle (1)

$$a^2 + 4b^2 - 9 = a^2 + 4b^2 + 9 + 4ab - 6a - 12b, \quad (2)$$

neboť zkouška mu »vyšla«, jak praví text úlohy.

Všechny členy v (2) převedeme na pravou stranu; vyjde

$$4ab - 6a - 12b + 18 = 0,$$

po dělení dvěma

$$2ab - 3a - 6b + 9 = 0.$$

Postupným vytýkáním dostaneme

$$\begin{aligned} a(2b - 3) - 3(2b - 3) &= 0, \\ (a - 3)(2b - 3) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Pro žádné přirozené číslo b neplatí $2b - 3 = 0$, neboť pro každé přirozené b je $2b - 3$ vždy číslo liché a nula je číslo sudé. Z rovnice (3) tedy plyne $a - 3 = 0$, tj. $a = 3$. Dosadíme-li za a číslo 3 a za b libovolné přirozené číslo, je

$$\begin{aligned} (a + 2b - 3)^2 &= (2b)^2 = 4b^2, \\ a^2 + 4b^2 - 9 &= 4b^2; \end{aligned}$$

zkouška tedy opravdu »vyjde«.

Ödpověď zní. Žák dosadil $a = 3$ a za b nějaké přirozené číslo.

61. Olda si kontroloval po hodině úlohu z písemky: »Měli jsme upravit výraz

$$\frac{x^2 - 3}{x + 1} + \frac{6x - 7}{2x - 1};$$

v čitateli mi vyšel nějaký mnohočlen $ax^3 + bx^2 + cx + d$, koeficienty si již nepamatuji; ve jmenovateli bylo $2x^2 + x - 1$. Vyšla mi dobře zkouška pro $x = 0, 1$ a 2 , ale pro $x = 3$ už ne: to vyšlo na levé straně 3,7 a na pravé 4.«

Dovedete z těchto údajů zjistit koeficienty a, b, c, d a rozhodnout, zda Oldovo řešení bylo správné?

Řešení. Rozřešíme znovu Oldův příklad.

$$\frac{x^2 - 3}{x + 1} + \frac{6x - 7}{2x - 1} = \frac{(x^2 - 3)(2x - 1) + (x + 1)(6x - 7)}{(x + 1)(2x - 1)}$$

V čitateli vyjde po vynásobení a sečtení

$$2x^3 + 5x^2 - 7x - 4,$$

ve jmenovateli vyjde skutečně $2x^2 + x - 1$, jak tvrdil Olda. Pro $x = 0$ mělo vyjít na levé i pravé straně číslo 4. Oldovi vyšlo $-d$; protože mu zkouška souhlasila, bylo $d = -4$.

Pro $x = 1$ mělo vyjít -2 . Olda dostal $\frac{a + b + c - 4}{2}$; protože

mu zkouška souhlasila, bylo $\frac{a + b + c - 4}{2} = -2$, tj.

$$a + b + c = 0. \quad (1)$$

Pro $x = 2$ mělo vyjít 2. Olda dostal $\frac{8a + 4b + 2c - 4}{9}$;

protože mu zkouška souhlasila, bylo $\frac{8a + 4b + 2c - 4}{9} = 2$,

tj. po úpravě

$$4a + 2b + c = 11. \quad (2)$$

Konečně pro $x = 3$ mělo vyjít 3,7. Olda dostal

$$\frac{27a + 9b + 3c - 4}{20} = 4,$$

tj. po úpravě

$$9a + 3b + c = 28. \quad (3)$$

Dosadíme-li z (1) $c = -a - b$ do (2) a (3), dostaneme soustavu

$$3a + b = 11, \quad (4)$$

$$4a + b = 14.$$

Odečtením první rovnice (4) od druhé vyjde $a = 3$, dále z první rovnice (4) $b = 2$ a z (1) $c = -5$.

Oldův nesprávný výsledek byl tedy

$$\frac{3x^3 + 2x^2 - 5x - 4}{2x^2 + x - 1}.$$

IV. Úlohy z reality

62. Dílna splnila v prvním týdnu plán, tj. vyrobila n výrobků. V druhém týdnu poklesla výroba proti prvnímu týdnu o p %. O kolik procent proti druhému týdnu musela dílna zvýšit výkon v třetím týdnu, aby koncem třetího týdne byl splněn třítydenní plán?

Řešení. Prvním úkolem při řešení tzv. slovní úlohy je sestavit z ní matematickou úlohu (často to bývá rovnice nebo několik rovnic či nerovnic), jejíž řešení nám umožní rozřešit úlohu z reality (ze života). Při sestavení matematické úlohy jde o nahrazení slov matematickými symboly, tj. písmeny a znaky pro operace (+, −, : atd.). Některá z písmen jsou dána už v textu úlohy, některá si musíme zvolit. V naší úloze je označen počet výrobků n , počet procent poklesu p ; musíme zvolit označení (x) pro počet procent růstu výroby v třetím týdnu.

Při vyjádření počtu výrobků v jednotlivých týdnech si musíme bedlivě všimnout, z jakého základu jsou vzata procenta. Vyplatí se vždy zapsat potřebné údaje do tabulky:

	1. týden	2. týden	3. týden	Období 1. až 3. týden
Počet výrobků	n	$n\left(1 - \frac{p}{100}\right)$	$n\left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)$	$3n$
Vzrůst (pokles) v % proti předešlému týdnu	—	p	x	—

V tabulce jsme už použili údaje z textu úlohy, že ve třech týdnech má být splněn plán ($3n$ výrobků). Mimoto užíváme věty: Zvětšíme-li, resp. zmenšíme-li číslo n (počet výrobků) o p procent, dostaneme číslo $n\left(1 + \frac{p}{100}\right)$, resp. $n\left(1 - \frac{p}{100}\right)$.

Podle textu úlohy je

$$n + n\left(1 - \frac{p}{100}\right) + n\left(1 - \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{x}{100}\right) = 3n. \quad (1)$$

Rovnici (1) dělíme kladným číslem n a dostaneme lineární rovnici pro jedinou neznámou x :

$$1 + 1 - \frac{p}{100} + 1 - \frac{p}{100} + \frac{x}{100}\left(1 - \frac{p}{100}\right) = 3,$$

po úpravě

$$\frac{x}{100} \left(1 - \frac{p}{100} \right) = \frac{2p}{100},$$

$$x(100 - p) = 200p,$$

$$x = \frac{200p}{100 - p}. \quad (2)$$

Je totiž $100 - p \neq 0$, neboť je $p \neq 100$; jinak by v druhém týdnu dílna vůbec nepracovala.

Vzorec (2) dává výsledek, který ověříme **zkouškou**.

Z (2) totiž vyplývá, že

$$1 + \frac{x}{100} = \frac{100 + p}{100 - p}.$$

Počet výrobků v třetím týdnu je pak podle tabulky

$$\begin{aligned} n \left(1 - \frac{p}{100} \right) \left(1 + \frac{x}{100} \right) &= \frac{n}{100} (100 - p) \cdot \frac{100 + p}{100 - p} = \\ &= n \left(1 + \frac{p}{100} \right); \end{aligned}$$

součet výrobků z 1. a 3. týdne je potom skutečně $3n$, protože

$$\begin{aligned} n + n \left(1 - \frac{p}{100} \right) + n \left(1 + \frac{p}{100} \right) &= \\ &= n + n \left(1 - \frac{p}{100} + 1 + \frac{p}{100} \right) = \\ &= n + 2n = 3n. \end{aligned}$$

Např. pro $n = 10$ dostaneme z (2) $x = \frac{200}{9} \doteq 22,2 \%$.

63. V továrně pracovalo 1 440 zaměstnanců (mužů a žen). Za vzornou práci dostalo prémie 18,75 % mužů a 22,5 % žen. Vedení továrny vyhlásilo, že prémie bylo odměněno 20 % zaměstnanců. Kolik mužů a kolik žen bylo zaměstnáno v továrně?

Řešení. Neznámý počet zaměstnaných mužů označíme x , počet zaměstnaných žen označíme y . Všimněme si, jakého typu je matematická formulace úlohy. Jsou to dvě lineární rovnice

$$x + y = s, \tag{1}$$

$$ax + by = cs.$$

V našem případě je $s = 1\,440$, $a = 0,1875$, $b = 0,225$, $c = 0,20$. Typ úlohy je tento: Je dán součet s hledaných čísel a součet jistých částí hledaných čísel je jistá známá část součtu s . Přepišme znovu soustavu (1) s číselnými údaji:

$$\begin{aligned} x + y &= 1\,440 \\ 0,1875x + 0,225y &= 0,2 \cdot 1\,440 \end{aligned} \tag{2}$$

Dosadíme z první rovnice (2) za y do druhé:

$$0,1875x + 0,225(1\,440 - x) = 0,2 \cdot 1\,440$$

neboli

$$(0,1875 - 0,225)x = (0,2 - 0,225) \cdot 1440$$

neboli

$$-0,0375x = -0,025 \cdot 1440$$

neboli

$$375x = 25 \cdot 1440.$$

Odtud plyne $15x = 14400$ a dále

$$x = 960;$$

z první rovnice (2) pak vyjde

$$y = 480.$$

Zkouškou ověříme správnost výpočtu.

64. Při omezování odběru elektrické energie v době špiček se 35 závodů zavázalo k snížení spotřeby. Celkem byly tři skupiny závodů: V první skupině každý závod dosáhl snížení na 50 % pravidelného odběru, v druhé snížil každý závod spotřebu o $\frac{1}{3}$, ve třetí o $\frac{1}{4}$ pravidelného odběru.

Tím se dosáhlo úspory 40 % celkové pravidelné spotřeby. Přitom v první skupině byl počet závodů dvojnásobný než v druhé a původně měl každý z 35 závodů tutéž spotřebu. Kolik bylo závodů v každé skupině?

Řešení. Označíme písmeny neznámé počty závodů: v druhé skupině bylo x závodů, v první $2x$ závodů, v třetí y závodů.

Je tedy $2x + x + y = 35$ neboli

$$3x + y = 35. \quad (1)$$

Dále označme m kWh spotřebu elektrické energie, kterou původně odbíral každý z 35 závodů v době špičky. Celková původní spotřeba v době špičky byla $35m$ kWh.

Zapišme původní i snížené spotřeby jednotlivých skupin do tabulky:

	První skupina závodů	Druhá skupina závodů	Třetí skupina závodů	Celkem
Původní spotřeba	$2xm$	xm	ym	$35m$
Snížená spotřeba	$\frac{50}{100} \cdot 2xm$	$\frac{2}{3} \cdot xm$	$\frac{3}{4} \cdot ym$	$\frac{60}{100} \cdot 35m$

Podle textu úlohy je

$$xm + \frac{2}{3}xm + \frac{3}{4}ym = \frac{3}{5} \cdot 35m;$$

po úpravě dostaneme

$$\frac{5}{3}x + \frac{3}{4}y = 21$$

a dále

$$20x + 9y = 252. \quad (2)$$

K rovnici (2) připojíme rovnici (1) a vyloučíme y ; vyjde

$$20x + 9(35 - 3x) = 252$$

a dále

$$7x = 63,$$

$$x = 9.$$

Z rovnice (1) vyjde $y = 8$.

V první skupině je tedy $2 \cdot 9 = 18$ závodů, v druhé 9 a v třetí 8.

Zkouškou ověříme, že výsledek je správný (při zkoušce počítáme vlastně údaje z tabulky).

65. Na chmelové brigádě soutěžily dvě třídy v česání chmele. Jedna třída o 39 žácích pracovala 9 dní a natrhala 2 282 větelů. Druhá třída o 31 žácích pracovala 8 dní a natrhala 1 959 větelů. Přitom jeden žák z této třídy onemocněl a čtyři dni nepracoval. Která třída měla vyšší průměrný denní pracovní výkon na osobu?

Řešení. Výkon první třídy by splnilo za jeden den $39 \cdot 9 = 351$ žáků. Průměrný denní výkon na osobu je tedy

$$\frac{2\,282}{351} \doteq 6,5 \text{ (věrtele).}$$

Výkon druhé třídy by splnilo za jeden den $31 \cdot 4 + 30 \cdot 4 = 124 + 120 = 244$ žáků (ve skutečnosti 4 dni pracovalo 31 žáků, 4 dni jen 30 žáků). Průměrný denní výkon na osobu je tedy

$$\frac{1\,959}{244} \doteq 8,0 \text{ (věrtele).}$$

Vyšší výkon měla tedy druhá třída, která zvítězila.

66. Máme 1 500 gramů 7,2procentního roztoku kuchyňské soli ve vodě. Vařením tohoto roztoku se odpaří část vody a zůstane 1 200 gramů nového roztoku.

- a) Kolikaprocentní je nový roztok?
- b) Kolik gramů soli musíme přidat do nového roztoku, aby vznikl 25procentní roztok?

Řešení. Je třeba si připomenout, co znamenají slova »1 500 gramů 7,2procentního roztoku kuchyňské soli«. Hmotnost tohoto roztoku je 1 500 g a roztok se skládá z

$$7,2 \% \text{ z } 1\,500 \text{ g, tj. } 1\,500 \cdot 0,072 \text{ g soli a}$$

$$92,8 \% \text{ z } 1\,500 \text{ g, tj. } 1\,500 \cdot 0,928 \text{ g vody.}$$

Původní roztok obsahuje tedy 108 g soli a 1 392 g vody.

Úloha a). Po odpaření se množství soli nezměnilo, celková hmotnost roztoku je 1 200 g. Procenta soli tedy určíme dělením

$$108 : 1\,200 = 0,09.$$

Nový roztok je 9procentní.

Úloha b). Otázka úlohy nás vybízí, abychom zavedli neznámou: označíme x počet gramů soli, které musíme přidat k 1 200 g roztoku se 108 g soli, abychom dostali 25procentní roztok. Zápis úlohy je

$$0,25 \cdot (1\,200 + x) = 108 + x$$

neboli

$$\frac{1}{4}(1\,200 + x) = 108 + x. \quad (1)$$

Rovnici (1) upravíme

$$1\,200 + x = 432 + 4x$$

a řešíme; vyjde

$$x = 256.$$

Je tedy třeba přidat 256 g soli.

67. Máme dva kusy klempířské pájky (slitina olova a cínu) o hmotnostech 5 kg, $7\frac{1}{2}$ kg. Obsah cínu v prvním kusu je $\frac{1}{4}$ jeho hmotnosti, v druhém kusu $\frac{1}{3}$ jeho hmotnosti. Od obou kusů

oddělíme část stejné hmotnosti a připojíme ke zbytku druhého kusu. Po slití každého zbytku s nově připojenou částí dostaneme opět dva kusy o hmotnosti 5 kg a $7\frac{1}{2}$ kg.

Vypočítejte hmotnosti oddělených částí, aby nové slitiny měly stejné procento cínu.

Řešení. Hmotnost oddělených částí v kg označíme x a pro přehlednost si zapíšeme údaje do tabulky.

	Část oddělená od první pájky	Zbytek první pájky	Část oddělená od druhé pájky	Zbytek druhé pájky
Hmotnost v kg	x	$5 - x$	x	$7,5 - x$
Díl cínu	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Hmotnost cínu v kg	$\frac{x}{4}$	$\frac{5 - x}{4}$	$\frac{x}{3}$	$\frac{7,5 - x}{3}$

Nově vzniklé pájky jsou:

a) 7,5 kg, obsahující (podle tabulky) $\frac{x}{4} + \frac{7,5 - x}{3}$ kg cínu,

b) 5 kg, obsahující (podle tabulky) $\frac{x}{3} + \frac{5 - x}{4}$ kg cínu.

Podle textu úlohy je

$$\left(\frac{x}{4} + \frac{7,5 - x}{3}\right) : 7,5 = \left(\frac{x}{3} + \frac{5 - x}{4}\right) : 5.$$

Odtud dostaneme

$$(3x + 30 - 4x) : 7,5 = (4x + 15 - 3x) : 5$$

neboli

$$5 \cdot (30 - x) = 7,5(15 + x),$$

tj. $x = 3$. Oddělená část váží 3 kg, což ověříme zkouškou.

68. Klempířská pájka je slitina cínu a olova. Jeden druh pájky obsahuje 25 % cínu a druhý 60 %. Smísením obou druhů pájky a přidáním 2 kg čistého olova máme vyrobit 10 kg pájky obsahující 30 % cínu.

Kolik kilogramů každého druhu pájky potřebujeme k výrobě nové pájky?

Řešení. Soustředíme se na hmotnosti olova obsaženého v každém ze tří druhů pájek. První druh obsahuje 25 % cínu - tedy 75 % olova, druhý druh 60 % cínu - tedy 40 % olova. Výsledná pájka obsahuje 30 % cínu - tedy 70 % olova.

Potřebná množství pájek označíme: x kg prvního druhu, y kg druhého druhu.

Celkem je ve směsi obou pájek po přidání 2 kg olova

$$0,75x + 0,40y + 2 \quad (1)$$

kilogramů olova. Celkem dostaneme $x + y + 2 = 10$ kg pájky se 70 % obsahem olova. Je tedy podle (1)

$$0,75x + 0,40y + 2 = 0,70 \cdot 10 \quad (2)$$

a mimoto

$$x + y = 8. \quad (3)$$

Rovnice (2), (3) tvoří soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých x , y . Rovnice (2) dá po úpravě $75x + 40y = 500$ neboli

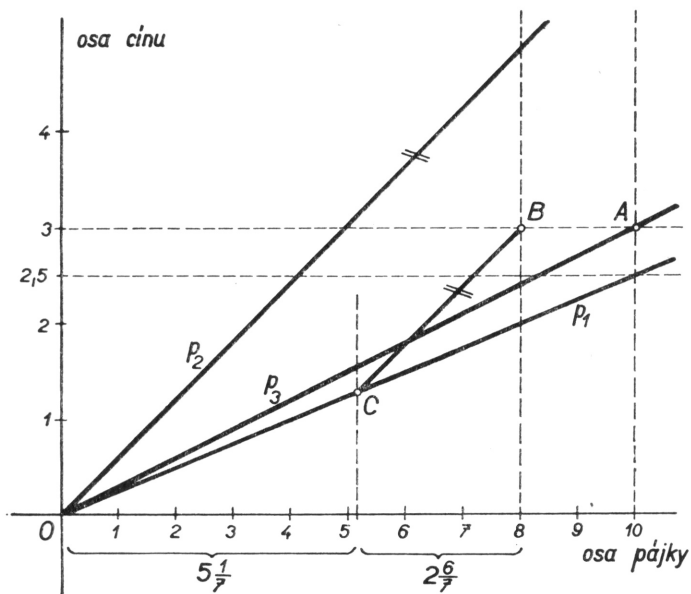
$$15x + 8y = 100. \quad (4)$$

Dosadíme-li za y z (3) do (4), dostaneme $x = \frac{36}{7}$ a z (3) pak

$y = \frac{20}{7}$. Výsledek ověříme zkouškou.

Odpověď. Potřebujeme $5\frac{1}{7}$ kg prvního druhu pájky a $2\frac{6}{7}$ kg druhého druhu.

Úlohu rozřešíme ještě jednou graficky. Osu x zvolíme za »osu pájky«; jednotková úsečka znázorňuje 1 kg pájky. Osu y zvolíme za »osu cínu«; jednotková úsečka znázorňuje 1 kg cínu.



Obr. 13

Určitá pájka obsahuje vždy totéž procento cínu. Např. první druh pájky obsahuje 25 % cínu, tj. např. 4 kg pájky obsahují 1 kg cínu, 8 kg pájky obsahuje 2 kg cínu atd. Grafem pájky je tedy polopřímka; každý bod této polopřímky má za souřadnice čísla x, y , udávající počet kg pájky (x) a cínu (y). Čisté olovo je »pájka«, jejímž grafem je poloosa $+x$.

K sestrojení grafu kterékoli pájky stačí její počátek $[0,0]$ a jeden další bod. Tak jsou sestrojeny na obr. 13 grafy obou druhů pájek i graf výsledné pájky s 30 % cínu.

Konstrukce je provedena takto: Když z 10 kg výsledné pájky p_3 (bod A) ubereme 2 kg olova, dostaneme pájku charakterizovanou bodem B . Bod C leží na grafu p_1 , a to tak, aby bylo $BC \parallel p_2$. Když sestrojíme bod C , odečteme množství obou druhů pájek, jak ukazuje obr. 13.

69. Ve sklepe JZD jsou dva sudy vína; v jednom je a litrů vína po n Kčs, ve druhém b litrů vína po p Kčs. Z každého sudu ubereme současně totéž množství vína a nalejeme je do druhého sudu. Lze toto množství zvolit tak, aby cena směsi za jeden litr v obou sudech byla stejná? Jaká bude tato cena?

Vypočtěte numericky pro $a = 80$ litrů, $b = 120$ litrů, $n = 20$ Kčs, $p = 16$ Kčs.

Řešení. Vyplníme tabulku:

		Množství vína v litrech	Celková cena v Kčs	Cena za 1 litr v Kčs
I. sud	Před mícháním	a	an	n
	Po míchání	$(a - x) + x = a$	$(a - x)n + xp$	$\frac{(a - x)n + xp}{a}$
II. sud	Před mícháním	b	bp	p
	Po míchání	$(b - x) + x = b$	$(b - x)p + xn$	$\frac{(b - x)p + xn}{b}$

Přitom x je množství vína v litrech, které se ubralo z I. i II. sudu. Podle znění textu úlohy má mít směs v sudě I i v sudě II stejnou cenu za 1 litr, tj. má platit (viz tabulka)

$$\frac{(a - x)n + xp}{a} = \frac{(b - x)p + xn}{b}. \quad (1)$$

Při úpravě se z této rovnice (1) vyloučí n , pokud je $n \neq p$ ($n - p \neq 0$), a dostaneme

$$x = \frac{ab}{a + b}. \quad (2)$$

Cena za jeden litr směsi je podle tabulky

$$q = \frac{(a - x)n + xp}{a}. \quad (3)$$

Dosadíme-li do (3) z (2), dostaneme

$$q = \frac{an + bp}{a + b}.$$

Číselně vyjde $x = 48$ litrů, $q = 17,60$ Kčs.

Nyní se ještě podíváme na vyloučený případ $n = p$, tj. kdy cena za 1 litr vína je v obou sudech stejná. Popsaným přeléváním vína se jeho cena za 1 litr ani v jednom sudu nemůže změnit; v obou bude stále $n = p$. Vzorec (3) platí i v tomto případě. Vzorec (2) však neurčuje všechna řešení; v tomto případě může

být přeléváné množství vína x jakékoli kladné číslo, jež je menší nebo rovné menšímu z čísel a a b ; plyne to i z toho, že rovnici (1) lze pro $n = p$ upravit na tvar $x \cdot 0 = ab \cdot 0$.

70. Bylo vypočteno, že stavební materiál odveze jisté auto za x dní ($x > 3$). Když bylo třeba odvoz urychlit, počal se materiál čtvrtého dne odvážet ještě dalšími dvěma auty. Výkon

1. pomocného auta byl $\frac{5}{6}$ výkonu původního auta, výkon

2. pomocného auta byl 1,5 výkonu původního auta. Celý odvoz pak trval y dní.

a) Vyjádřete y pomocí x .

b) Pro která celá čísla $x < 50$ je y číslo celé?

Řešení. Označíme M množství materiálu v tunách a vyplníme tabulku:

	Původní auto	1. pomocné auto	2. pomocné auto
Odvezený materiál za 1 den	$\frac{M}{x}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{M}{x}$	$1,5 \cdot \frac{M}{x}$
Počet pracovních dní	y	$y - 3$	$y - 3$

Z této tabulky vyčteme rovnici

$$M = y \frac{M}{x} + (y - 3) \frac{5}{6} \frac{M}{x} + 1,5 (y - 3) \frac{M}{x}.$$

Dělíme číslem M a upravíme

$$x - 3 = (y - 3) \cdot \frac{20}{6}.$$

Další úpravou dostaneme

$$y = \frac{3}{10}(x + 7),$$

což dává odpověď na otázku a).

Má-li x vyhovovat požadavkům úlohy b), musí být $x + 7$ násobkem 10 a $x < 50$. Oběma požadavkům vyhovují jediné čísla $x = 13, 23, 33, 43$, neboť v textu úlohy je podmínka $x > 3$.

71. Turistického zájezdu se zúčastnilo 286 zaměstnanců podniku. Měli k dispozici jednak autobusy s 19 sedadly, jednak autobusy se 17 sedadly (řidič a jeho sedadlo se neberou v úvahu).

Kolik autobusů každého druhu se použilo při zájezdu, když všechna sedadla v každém autobusu byla obsazena?

Řešení. Text úlohy nás vybízí k zavedení dvou neznámých:

x počet autobusů s 19 sedadly,

y počet autobusů se 17 sedadly.

Matematický zápis úlohy je

$$19x + 17y = 286, \quad (1)$$

neboť $19x$ je počet všech osob, které jely autobusy prvního druhu, $17y$ je počet všech osob, které jely autobusy druhého druhu.

Rovnice (1) je rovnice o dvou neznámých; hledáme však taková její řešení x, y , která jsou přirozená čísla.

Rovnici (1) budeme řešit pokusně. Pro $x = 1, 2, 3, \dots$ budeme počítat rozdíl $286 - 19x$ a mezi těmito čísly vyhledáme násobky čísla 17. Přitom stačí omezit se na čísla $x = 1$ až $x = 15$, neboť 15 autobusů prvního druhu odveze $15 \cdot 19 = 285$ osob a větší počet než 15 autobusů by nebyl zcela zaplněn.

Sestavíme tabulku:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$286 - 19x$	267	248	229	210	191	172	153	134	115	96	77	58	39	20	1

Všimněme si, že druhý řádek tabulky (2) dostaneme postupným přičítáním čísla 19 takto: $1 + 19 = 20$, $20 + 19 = 39$, $39 + 19 = 58$ atd.

V druhém řádku tabulky (2) nyní vyhledáme násobky čísla 17; k tomu účelu si vypíšeme »násobilku sedmnácti«: 17, 34, 51, 68, 85, 102, 119, 136, 153, 170, 187, 204, 221, 238, 255, 272, 289, ...

Z těchto násobků je v druhém řádku tabulky (2) obsaženo jediné číslo 153. Podle tabulky (2) je tedy $x = 7$ a z rovnice (1) plyne $y = 9$.

Odpověď. Při zájezdu se použilo 7 autobusů prvního druhu a 9 autobusů druhého druhu.

Jiné řešení. Užijeme postup velmi obvyklý v úlohách na zjištění počtu předmětů dvou druhů (v našem případě autobusů). Seskupíme autobusy do dvojic: v každé dvojici bude jeden autobus prvního druhu a jeden autobus druhého druhu; tato dvojice pojme $19 + 17 = 36$ sedících osob. Takovýchto dvojic je nejvýše 7, neboť

$$\begin{array}{l} 286 : 36 = 7 \\ 34 \end{array}$$

Při 7 dvojicích stačí ještě přibrat 2 autobusy druhého druhu, neboť $2 \cdot 17 = 34$, a úloze je vyhověno; dostáváme též výsledek 7, 9 jako při předchozím způsobu řešení.

Zbývá ovšem ještě dokázat, že není možné řešení s menším počtem dvojic autobusů. To provedeme pomocí tabulky (3):

z	0	1	2	3	4	5	6	7
$286 - 36z$	286	250	214	178	142	106	70	34

(3)

Přitom z znamená počet dvojic autobusů. Protože v druhém řádku je jediný násobek sedmnácti (34) a žádný násobek devatenácti, má úloha jediné řešení.

72. Vzdálenost Praha - Brno po železniční trati je 255 km. Rychlík projede tuto trať za dobu t hodin. Má-li se doba jízdy rychlíku zkrátit o p %, musí se jeho průměrná rychlost c km/h zvýšit o q %.

- Vyjádřete q pomocí c , t a p .
- Vypočtěte q , je-li $p = 10$.

Řešení. a) Možná, že se někdo hned pozastaví nad úlohou b). Jak mám vypočítat q , neznám-li c a t ? Uvidíme, že to je možné, neboť q vůbec nezávisí ani na c , ani na t ; to nám ukáže řešení úlohy a).

Sestavme si tuto přehlednou tabulku:

	Původně	Po zvýšení rychlosti
Průměrná rychlost jízdy (km/h)	c	$c \left(1 + \frac{q}{100} \right)$
Doba jízdy (h)	t	$t \left(1 - \frac{p}{100} \right)$

Co jsme potřebovali k sestavení této tabulky? Stoupne-li rychlost c o q %, činí přírůstek $\frac{q}{100} \cdot c$; nová rychlost je tedy

$$c + c \cdot \frac{q}{100} = c \left(1 + \frac{q}{100} \right). \text{ Podobně tomu je s dobou.}$$

V obou případech jede rychlík z Prahy do Brna; je tedy

$$ct = 255, c \left(1 + \frac{q}{100} \right) \cdot t \left(1 - \frac{p}{100} \right) = 255. \quad (1)$$

Z obou rovností (1) dostaneme

$$ct = ct \left(1 + \frac{q}{100} \right) \left(1 - \frac{p}{100} \right). \quad (2)$$

Rovnice (2) dělíme číslem ct ; vyjde

$$\left(1 + \frac{q}{100}\right) \left(1 - \frac{p}{100}\right) = 1. \quad (3)$$

Rovnost (3) znásobíme činitelem 100^2 ; dostaneme

$$(100 + q)(100 - p) = 100^2,$$

tj.

$$100^2 + q(100 - p) - 100p = 100^2.$$

Odtud vyjde

$$q(100 - p) = 100p. \quad (4)$$

Protože je určité $p < 100$, je $100 - p > 0$; z (4) pak vyjde

$$q = \frac{100p}{100 - p}. \quad (5)$$

Vztah (5) je výsledný vzorec; je vidět, že q skutečně závisí jen na p , nikoli na c , t , dokonce nezávisí ani na vzdálenosti Praha - Brno (255 km).

Vypočteme dosazením $p = 10$ do vzorce (5); dostaneme

$$q = \frac{1\,000}{90} = 11\frac{1}{9}.$$

Úloha nás poučuje o tom, že některé údaje v textu mohou být zbytečné. Dále nás upozorňuje, jak je výhodné počítat nejdříve s proměnnými (písmeny) a pak teprve dosazovat číselné údaje; tím se vyhneme zbytečným výpočtům.

73. Petr a Milan jeli tramvají do kina, které je v ulici na trati tramvaje mezi stanicemi A , B . Poměr vzdáleností vchodu do kina od stanic A , B je $3 : 2$. Petr vystoupil na stanici A , Milan na stanici B . Šli stejnou průměrnou rychlostí a ke vchodu kina přišli v témž okamžiku. Vypočtete, kolikrát byla průměrná rychlost jejich chůze menší než průměrná rychlost tramvaje mezi stanicemi A , B .

Řešení. Tramvaj zřejmě nejdříve přijela do stanice A . Jen tak je možné, aby chlapci přišli v týž okamžik ke vchodu kina.

Vzdálenost zastávek A a B v kilometrech nechť je $5a$ (obr. 14).



Obr. 14

Průměrnou rychlost chůze chlapců v km/h označme v . Je-li průměrná rychlost tramvaje x -krát větší než průměrná rychlost chůze chlapců, pak je její rychlost xv km/h.

Doby cest chlapců ke vchodu kina měřme od okamžiku, kdy tramvaj zastavila ve stanici A . Pak platí

$$t_P = \frac{3a}{v} ,$$

$$t_M = \frac{5a}{xv} + \frac{2a}{v} .$$

Odtud plyne

$$\frac{3a}{v} = \frac{5a}{xv} + \frac{2a}{v} ,$$

tj.

$$3 = \frac{5}{x} + 2,$$

takže

$$x = 5.$$

Snadno ověříme, že chlapci přijdou ke vchodu kina v též okamžik, má-li tramvaj pětkrát větší průměrnou rychlost než chlapci.

Závěr. Chlapci šli pětkrát menší průměrnou rychlostí, než byla průměrná rychlost tramvaje mezi stanicemi A a B .

74. Dva přátelé z téže obce potřebují navštívit blízké město. První jde pěšky a cesta mu trvá hodinu. Druhý jede na kole a cesta mu trvá 20 minut. Chodec vyšel čtvrt hodiny před

odjezdem cyklisty. Za jakou dobu po svém odjezdu ho cyklista dohoní?

Řešení. Úloha patří do skupiny úloh na »dohánění« a »potkávání«. Chceme-li tuto úlohu řešit úsudkem, je dobře si zapamatovat tento obrat: představíme si, že pomalejší z obou cestovatelů (v našem případě chodec) se nepohybuje. Pak rychlejší cestovatel se buď pohybuje proti němu rychlostí $v_1 + v_2$, nebo ho dohoní rychlostí $v_1 - v_2$; přitom $v_1(v_2)$ značí rychlost (v km/h nebo m/min apod.) rychlejšího (pomalejšího) cestovatele.

V okamžiku, kdy vyjel cyklista z obce O do města M , byl chodec v místě P vzdáleném od O o $\frac{1}{4}OM$ (neboť tuto vzdálenost urazil chodec za čtvrt hodiny, OM urazí za hodinu); obr. 15.



Obr. 15

Zastavíme chodce v místě P a cyklista ho bude dohánět rychlostí $v_1 - v_2$ (v m/min). Přitom platí

$$OM = v_1 \cdot 20 = v_2 \cdot 60. \quad (1)$$

Hledaný čas (za který cyklista dohoní chodce) je

$$t = \frac{OM}{4} : (v_1 - v_2). \quad (2)$$

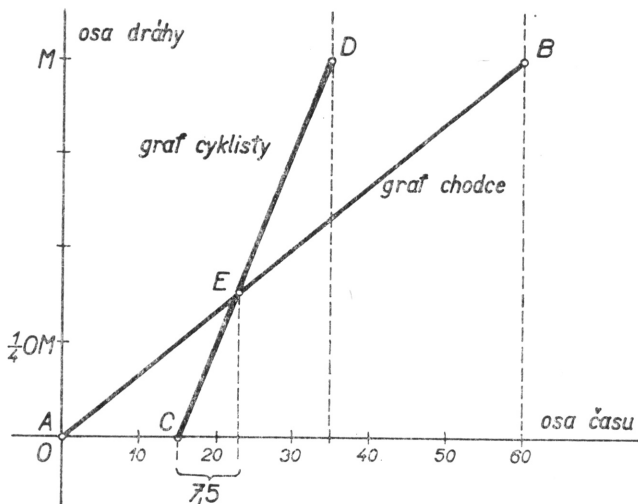
Z (1) vypočteme $v_1 = 3v_2$ a dosadíme do (2)

$$t = \frac{OM}{4} : 2v_2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{OM}{v_2}. \quad (3)$$

Podle (1) je $\frac{OM}{v_2} = 60$; z (3) tedy dostaneme $t = \frac{60}{8} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$.

Cyklista dohoní chodce za $7\frac{1}{2}$ minuty.

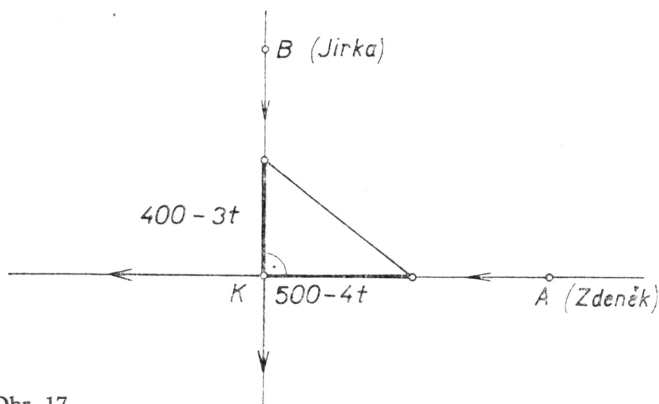
Úlohu rozřešíme ještě jednou graficky. Použijeme přitom vlastně »grafický jízdní řád« pro cyklistu a chodce, které zakreslíme do téhož obrazu.



Obr. 16

Osu x zvolíme za »osu času«; jednotková úsečka značí 10 minut. Osu y zvolíme za »osu dráhy«; jednotková úsečka značí $\frac{1}{4}$ vzdálenosti OM . Cyklista i chodec se pohybují stálými rychlostmi v_1, v_2 , tj. konají pohyb rovnoměrný. Dráha vykonaná při tomto pohybu je přímo úměrná času; proto je grafem rovnoměrného pohybu přímka (část přímky). K jejímu sestrojení stačí dva body, tj. dvě dvojice údajů: čas - vykonaná dráha. Na obr. 16 se použilo bodů A, B pro chodce, C, D pro cyklistu. Bod A odpovídá času 0 minut (počátek pozorování) a dráze 0 km (obec O). Bod B odpovídá času 60 minut a dráze OM km (vzdálenost obce O od města M). Bod C odpovídá času 15 minut (cyklista vyjel $\frac{1}{4}$ h po chodci) a dráze 0 km (obec O). Konečně bod D odpovídá času 35 minut ($15 + 20 = 35$, cyklista jel z O do M 20 minut) a dráze OM km.

Průsečík E obou grafů udává čas a dráhu předjetí chodce cyklistou. Čas je 22,5 min od vyjití chodce, tj. 7,5 min od vyjetí cyklisty z obce O .



Obr. 17

75. Zdeněk a Jirka bydlí v domech A , B ve dvou vzájemně kolmých ulicích; domy A , B jsou od křižovatky K obou ulic po řadě vzdáleny 500 m a 400 m. V témž okamžiku vyjedou oba chlapci na kolech od svých bydlíšť po ulicích AK , BK směrem ke křižovatce K , kterou projedou.

Zdeněk jede průměrnou rychlostí 4 m/s, Jirka průměrnou rychlostí 3 m/s. Za kolik sekund po startu bude jejich vzdušná vzdálenost nejmenší a kolik metrů to bude?

Řešení. V okamžiku t sekund po startu (obr. 17) je podle Pythagorovy věty vzdálenost obou chlapců (v m) dána vzorcem:

$$z^2 = (500 - 4t)^2 + (400 - 3t)^2$$

neboli

$$z^2 = 25t^2 - 6\,400t + 410\,000$$

neboli

$$z^2 = (5t - 640)^2 + 400.$$

Proměnná z^2 nabývá svého minima jen tehdy, je-li $5t - 640 = 0$, tj. $t = 128$ sekund. Toto minimum je $\sqrt{400}$ metrů, tj. $z = 20$.

76. Ručičky hodin ukazují přesně 12 hodin. Otočíme minutovou (velkou) ručičkou stokrát po sto stupních. Kolik hodin budou pak hodiny ukazovat? Udejte s přesností na minuty.

Řešení. Předpokládáme, že otáčení velkou ručičkou neprovádí ničitel hodinových strojů, tj. že se otáčení děje ve smyslu pohybu hodinových ručiček. Otočí se o $100 \cdot 100^\circ$, tj. o $10\,000$ úhlových stupňů. Jedné časové minutě je na ciferníku přiřazen úhel 6° ; provedenému otočení je tedy přiřazen čas $\frac{1}{6} \cdot 10\,000 \doteq 1\,667$ časových minut, tj. 27 hodin 47 minut, neboť $1\,667 = 27 \cdot 60 + 47$. Je tedy

$$10\,000^\circ \rightarrow 1 \text{ den} + 3 \text{ hodiny} + 47 \text{ minut.}$$

Hodiny budou ukazovat 3h 47min (s přesností na jednu minutu).

77. Kolikrát v době od 14.00 hodin do 14.05 hodin je centrální sekundová ručička hodinek osou dutého úhlu sevřeného hodinovou a minutovou ručičkou? Udejte příslušné okamžiky s přesností na sekundy.

Řešení. Nechť S je střed ciferníku hodin a bod O nechť na něm označuje 12 hodin. Označme α , β , γ velikosti úhlů sevřených po řadě minutovou, hodinovou a sekundovou ručičkou s polopřímkou SO po uplynutí t sekund po 14. hodině.

Minutová ručička opíše za 1 hodinu, tj. za 3 600 sekund, úhel o velikosti 360° . Tedy

$$\alpha = \frac{t}{3\,600} \cdot 360 = \frac{t}{10} \quad (1)$$

stupňů.

Hodinová ručička svírá ve 14 hodin s polopřímkou SO úhel

o velikosti 60° . Za 12 hodin, tj. za (12.3 600) sekund, opíše tato ručička úhel 360° , takže

$$\beta = \frac{t}{12.3\ 600} \cdot 360 + 60 = \frac{t}{120} + 60 \quad (2)$$

stupňů.

Sekundová ručička opíše za 1 minutu, tj. za 60 sekund, úhel o velikosti 360° . Tedy

$$\gamma = \frac{t}{60} \cdot 360 - k \cdot 360 = 6t - k \cdot 360 \quad (3)$$

stupňů, kde k je celé nezáporné číslo udávající, kolikrát sekundová ručička oběhla celý ciferník za dobu t sekund po 14 hodinách.

V hledaných okamžicích je velikost úhlu γ aritmetickým průměrem velikostí úhlů α a β . Platí tedy podle (1), (2), (3):

$$6t - k \cdot 360 = \frac{1}{2} \left[\frac{t}{10} + \frac{t}{120} + 60 \right],$$

odkud po úpravě dostaneme

$$1\ 427\ t = 86\ 400\ k + 7\ 200; \quad (4)$$

z této rovnice už lehko určíme t .

Podle textu úlohy splňuje t nerovnici

$$0 \leq t \leq 300.$$

Tuto podmínku však splňuje pouze pět kořenů rovnice (4), totiž

$$6, 66, 126, 186, 247$$

(s přesností na celé sekundy). O správnosti počtu řešení se též můžeme přesvědčit jednoduchým úsudkem.

78. Na výstavě hraček jezdí dvě elektrické lokomotivy po kolejích položených na dvou soustředných kružnicích $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$, kde $r_1 < r_2$, ve stejném smyslu stálou rychlostí v . Vyjely z polohy, v níž byly sobě nejbližší. V kterých okamžicích po startu budou od sebe

a) poprvé nejdále;

b) poprvé nejbližší?

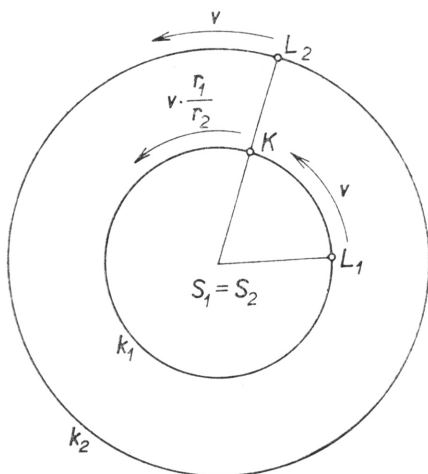
Řešte nejprve obecně, pak pro $r_1 = 60$ cm, $r_2 = 70$ cm, $v = 20$ cm/s, $\pi \doteq \frac{22}{7}$.

Řešení. Necht' body L_1 a L_2 na obr. 18 znázorňují obě lokomotivy v jistém časovém okamžiku. Označme K průsečík polopřímky S_1L_2 s kružnicí k_1 . Pohybuje-li se bod L_2 po kružnici k_2 rychlostí v , pak se bod K pohybuje po kružnici k_1 rychlostí

$$v \cdot \frac{r_1}{r_2}.$$

Body L_1 a L_2 jsou si zřejmě nejdále (nejbližší), právě když jsou si nejdále (nejbližší) body L_1 a K . V okamžiku startu

body L_1 a K splývaly. Protože $r_1 < r_2$, je rychlost bodu K menší než rychlost bodu L_1 .



Obr. 18

a) Body L_1 a K budou od sebe nejdále, právě když budou v krajních bodech téhož průměru kružnice k_1 . Poprvé se tak stalo v okamžiku t , v němž platilo

$$v \cdot t - v \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot t = \pi r_1,$$

tj.

$$t = \frac{\pi r_1 r_2}{v(r_2 - r_1)};$$

pro dané údaje $t \doteq 66$ s. V tomto okamžiku jsou od sebe také poprvé nejdále obě lokomotivy.

b) Body L_1 a K budou k sobě vždy nejbliže, když budou splývat. Poprvé se tak stane, když bod L_1 bude mít před bodem K náskok $2\pi r_1$. Bude tomu tak v časový okamžik T , v němž bude platit

$$vT - v \frac{r_1}{r_2} T = 2\pi r_1,$$

tj. pro

$$T = \frac{2\pi r_1 r_2}{v(r_2 - r_1)} = 2t;$$

pro dané údaje $T \doteq 132$ s. V tomto okamžiku jsou také poprvé po startu nejbliže k sobě obě lokomotivy.

79. Ozubené pedálové kolečko jízdního kola (bicyklu) má 48 zubů; malé převodové kolečko na zadní ose má 20 zubů. Průměr zadního kola bicyklu je 72 cm. (Uvědomte si, že vzdálenost dvou sousedních zubů u obou koleček je táž.) Cyklista jede po vodorovné silnici stálou rychlostí 25 km za hodinu na plný záběr (šlape rovnoměrně).

a) Kolikrát musí šlápnout za 1 minutu, aby si udržel stálou rychlost 25 km/h?

b) Kolikrát musí šlápnout na trati dlouhé 4,5 km?

Řešení. Úloha je značně idealizována; může být proti ní oprávněná námitka, že se takto na kole nejezdí.

Otočí-li se pedálové kolečko jednou, otočí se zadní kolo $\frac{48}{20} = 2,4$ krát; k tomu, aby se pedálové kolečko otočilo jednou, musí cyklista šlápnout dvakrát.

Při jednom šlápnutí ujede zadní kolo dráhu délky (v cm)

$$\frac{\pi d \cdot 2,4}{2} \doteq \frac{3,14 \cdot 72 \cdot 2,4}{2} = 271,296 \doteq 271,$$

kde d jsme označili průměr zadního kola bicyklu.

Na dráze 25 km = 2 500 000 cm cyklista šlápně tolikrát, kolik je $2\,500\,000 : 271$; to je přibližně 9 225. Za jednu hodinu tedy šlápně 9 225krát a za jednu minutu $9\,225 : 60 = 153,75$, tj. přibližně 154krát.

Poměr drah 4,5 km a 25 km je $\frac{4,5}{25}$. V témže poměru se změní i počet šlápnutí, tj. číslo 9 225; dostaneme

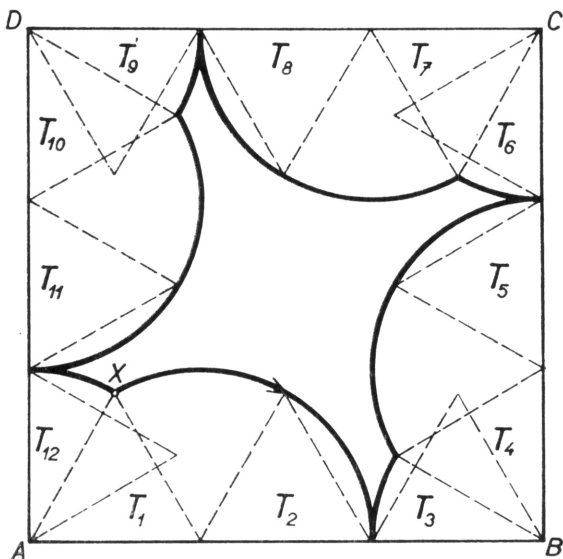
$$9\,225 \cdot \frac{4,5}{25} = 369 \cdot 4,5 = 1\,660,5 \doteq 1\,660.$$

Na dráze 4,5 km musí cyklista šlápnout asi 1 660krát.

GEOMETRIE

I. Úlohy na konstrukci čar vzniklých pohybem bodu

1. Na obr. 19 je čtverec $ABCD$ o straně délky 9 cm a dále 12 shodných rovnostranných trojúhelníků $T_1, T_2, \dots, T_{12}$. Převeďme trojúhelník T_1 v T_2 , T_2 v T_3 , $\dots$, T_{12} v T_1 vždy otočením kolem společného vrcholu obou trojúhelníků, provedeným ve čtverci $ABCD$.



Obr. 19

a) Sestrojte čáru, která je dráhou vrcholu X ve všech těchto otočeních.

b) Vypočtěte její délku a porovnejte ji s délkou kružnice opsané i kružnice vepsané čtverci $ABCD$.

Řešení. a) Čára je vyznačena v obrázku tlustě (zmenšeno na tři čtvrtiny). Skládá se ze čtyř oblouků kružnice o poloměru AX délky 3 cm příslušných k středovému úhlu 120° a ze čtyř oblouků kružnic téhož poloměru příslušných k středovému úhlu 30° .

b) Délka čáry je (v cm)

$$\begin{aligned}d &= 4 \cdot \frac{3\pi}{180} \cdot 120 + 4 \cdot \frac{3\pi}{180} \cdot 30 = \\&= 4 \cdot \frac{3\pi}{3} \cdot 2 + 4 \cdot \frac{3\pi}{6} = 4 \cdot 2\pi + 4 \cdot \frac{1}{2} \pi = 10 \pi.\end{aligned}\tag{1}$$

Délka kružnice opsané čtverci $ABCD$ je

$$d_1 = \pi \cdot 9 \cdot \sqrt{2} \doteq 12,7\pi,\tag{2}$$

délka kružnice vepsané čtverci $ABCD$ je

$$d_2 = 9\pi.\tag{3}$$

Je tedy podle (1), (2), (3)

$$d_2 < d < d_1.$$

2. Do dané kružnice $k = (S; r = 4 \text{ cm})$ vepište rovnostranný trojúhelník ABC . Trojúhelník ABC se i s kružnicí k a polopřímku AB otáčí rovnoměrně kolem bodu S . Na polopřímce AB se zároveň pohybuje rovnoměrně bod X tak, že jeho počáteční poloha je bod A , přičemž za dobu jedné otočky (tj. otočení o 360°) trojúhelníku urazí dráhu o velikosti $2 \cdot AB$.

Uvažujte oba smysly otáčení.

a) Narýsujte polohu bodu X v jednotlivých dvanáctinách první otočky.

b) Nakreslete co nejpřesněji čáru, kterou opíše bod X při svém pohybu během první otočky.

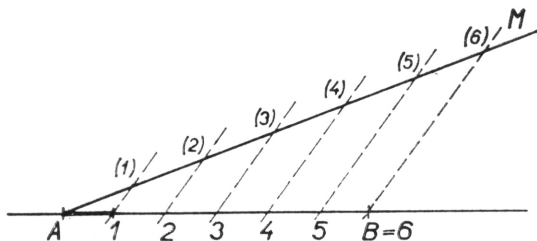
Řešení. Na obr. 20 (zmenšeno na polovinu) jsou čárkovaně vyznačeny polohy trojúhelníku ABC při otáčení v opačném smyslu než je pohyb hodinových ručiček. Např. poloha $A_1B_1C_1$ vznikla otočením o úhel velikosti $\frac{1}{12}$ ze 360° , tj. o 30° . Pohybují se bod X dostane se po polopřímce A_1B_1 do polohy 1, přičemž platí

$$d(A_11) = \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot d(AB) = \frac{1}{6} d(AB). \star)$$

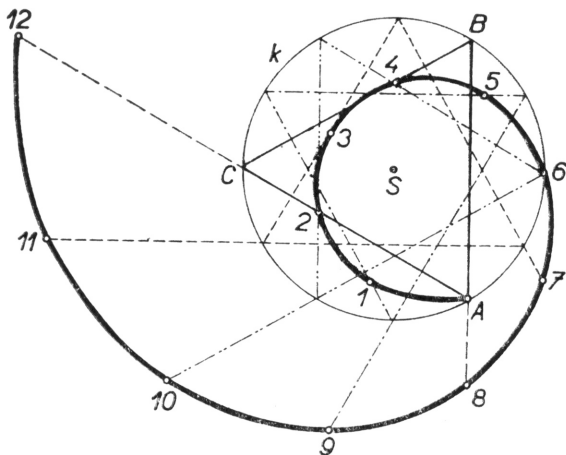
*) Zápis $d(A_11)$ ve významu »délka úsečky A_11 « užíváme podobně jako v nově zaváděných učebnicích matematiky pro ZŠ.

$$\triangle A1(1) \sim \triangle A2(2) \sim \dots \sim \triangle A6(6).$$

Dostaneme tak úsečky $A1 = \frac{1}{6} AB$, $A2 = \frac{2}{6} AB$ atd. potřebné ke konstrukci poloh 1, 2, ... bodu X při daném pohybu (obr. 21).



Obr. 21



Obr. 22

Na obr. 22 je znázorněno otáčení trojúhelníku ve smyslu pohybu hodinových ručiček. Konstrukce se provede obdobně jako na obr. 21; v tomto případě se bod X pohybuje po polopřímce AC .

3. V bodě A na okraji gramofonové desky sedí brouk. Označme S střed desky a AB její průměr. Brouk začne lézt z bodu A po úsečce AB do bodu B ; v okamžiku, kdy se dá brouk do pohybu, počne se deska otáčet. Když se deska jednou otočí, dorazí brouk právě do bodu B .

Narýsujte cestu brouka po desce, jak se jeví pozorovateli při pohledu shora. Přitom předpokládáme, že pohyb brouka i otáčení desky se děje rovnoměrně. *) Průměr AB volte 12 cm.

Pro narýsování cesty brouka sestrojte přesně body, v nichž je brouk v jednotlivých dvanáctinách jedné otočky desky.

Řešení je pro jeden možný smysl otáčení desky provedeno na obr. 23. Jednotlivé polohy brouka na desce dostaneme takto: Kdyby se deska neotáčela, dostal by se brouk na cestě z bodu A do bodu B postupně do poloh (1), (2), (3) atd. Protože se však deska otáčí i s broukem a s úsečkou AB , bude se brouk např. místo v poloze (1) nalézat na polopřímce SA_1 . Tato polopřímka vznikne otočením polopřímky SA o úhel velikosti

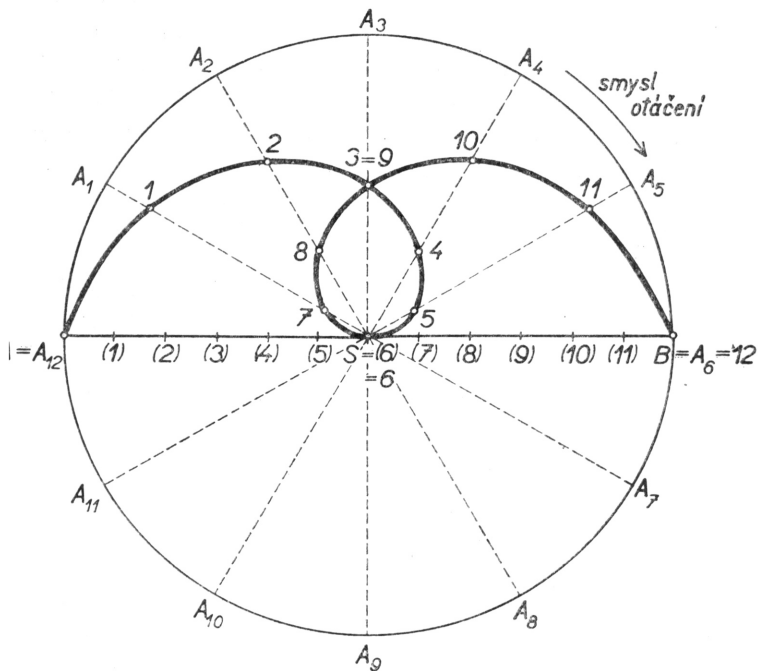
$\frac{1}{12}$ z 360° , tj. o 30° . Přitom platí $S(1) = S1$.

Obdobně zkonstruuujeme body 2, 3, 4, 5 a 6. Bod (7) a další leží už na polopřímce opačné k SA ; proto bod 7 (a další) bude ležet na polopřímce opačné k SA_7 atd. Uvedenou kon-

*) Všimněte si, že v úloze jde vlastně o skládání dvou rovnoměrných pohybů: posunutí a otočení.

strukcí, kterou můžeme nazvat »bodovou«, získáme jen jednotlivé body cesty; jejich spojením plynulou čarou dostaneme hledanou cestu.

Čím přesněji chceme dráhu narýsovat, tím více jejích bodů se pokusíme sestavit. Na obr. 23 je pohyb rozdělen do 12 poloh; můžete ho však rozdělit též např. do 16 nebo 24 poloh.



Obr. 23

4. Narýsujte pravidelný osmiúhelník

$$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$$

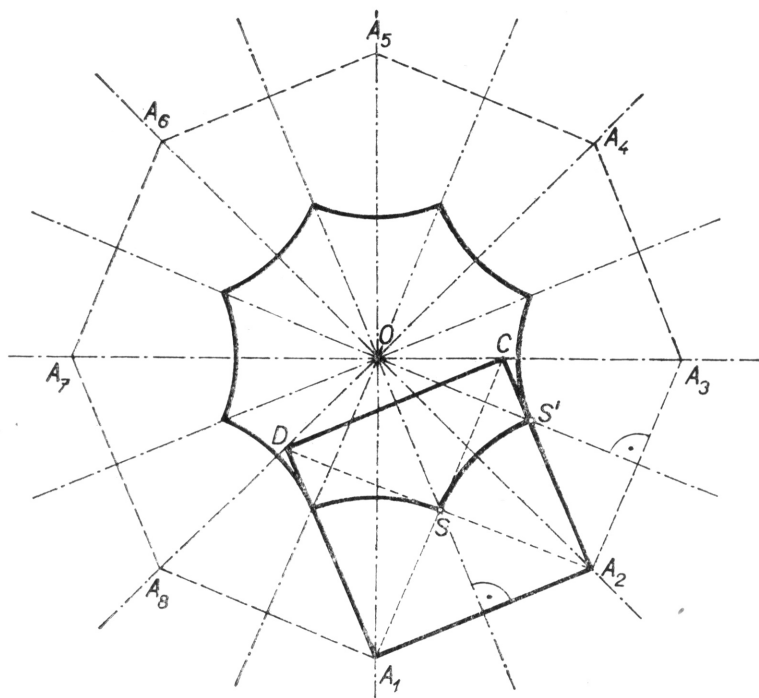
se středem O . Uvnitř tohoto osmiúhelníka sestrojte nad úsečkou A_1A_2 čtverec A_1A_2CD ; jeho střed označte S .

Čtvercem, který jste sestrojili, budete pohybovat tak, že stále zůstane v daném osmiúhelníku. Čtverec nejdříve otočíte kolem bodu A_2 tak, že vrchol C splyne s bodem A_3 ; novou polohu bodu D označte D' . Čtverec, který jste tak dostali, pak otočíte opět, tentokrát kolem bodu A_3 , a to tak, že bod D' po otočení splyne s bodem A_4 . Stejným způsobem postupně provedete další otočení čtverce kolem bodů $A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_1$. Při posledním otočení se čtverec dostane do své původní polohy.

Vyšetřte, jakou čáru při všech osmi otočeních opsál střed S daného čtverce. Zjistěte všechny osy souměrnosti vzniklé dráhy bodu S .

Řešení (obr. 24). Platí $\sphericalangle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$, $\sphericalangle OA_1A_2 = 67,5^\circ$, $\sphericalangle A_8A_1A_2 = 135^\circ$. Protože je $\sphericalangle SA_1A_2 = 45^\circ$, je $\sphericalangle SA_1A_2 < \sphericalangle OA_1A_2$ a bod S tedy padne dovnitř trojúhelníka OA_1A_2 ; je tedy $A_1S < A_1O$. Při prvním pohybu čtverce A_1A_2CD se bod S otáčí kolem bodu A_2 po oblouku kružnice z polohy S do polohy S' , kde $\sphericalangle S'A_2A_3 = 45^\circ$. Je tedy $\sphericalangle SA_2S' = \sphericalangle A_1A_2A_3 - 2 \cdot \sphericalangle A_1A_2S = 135^\circ - 2 \cdot 45^\circ = 45^\circ$ (to plyne i z toho, že $\sphericalangle CA_2A_3 = \sphericalangle A_1A_2A_3 - \sphericalangle A_1A_2C$). Protože je $\sphericalangle SA_2C = 45^\circ$, padne bod S' právě dovnitř úsečky A_2C ,

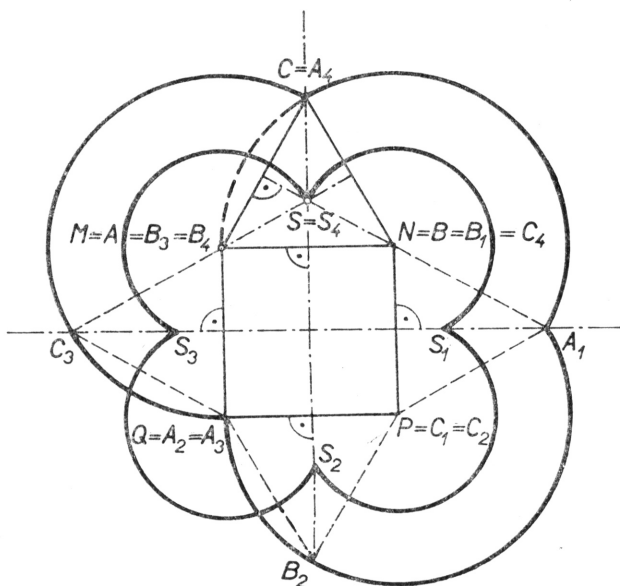
neboť je $A_2S < A_2C$ (odvěsna pravouhlého trojúhelníka A_2CS je menší než jeho přepona A_2C).



Obr. 24

Odtud výsledek: Dráha, kterou postupně bod S opíše, se skládá z osmi shodných oblouků. První oblouk má střed A_2 a poloměr A_2S , tj. polovinu úhlopříčky čtverce A_1A_2CD , úhel $\sphericalangle SA_2S' = 45^\circ$; přímka A_2O je osou souměrnosti tohoto

oblouku. Snadno se zjistí, že celá dráha bodu S má osm os souměrnosti. Jsou to jednak čtyři hlavní úhlopříčky A_1A_5 , A_2A_6 , A_3A_7 , A_4A_8 daného osmiúhelníka, jednak čtyři osy stran osmiúhelníka (přitom totiž osy protějších stran daného osmiúhelníka - např. A_1A_2 , A_5A_6 - navzájem splývají).



Obr. 25

5. Daný čtverec $MNPQ$ má stranu délky 4,5 cm. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, že $A = M$, $B = N$ a vrchol C leží vně daného čtverce.

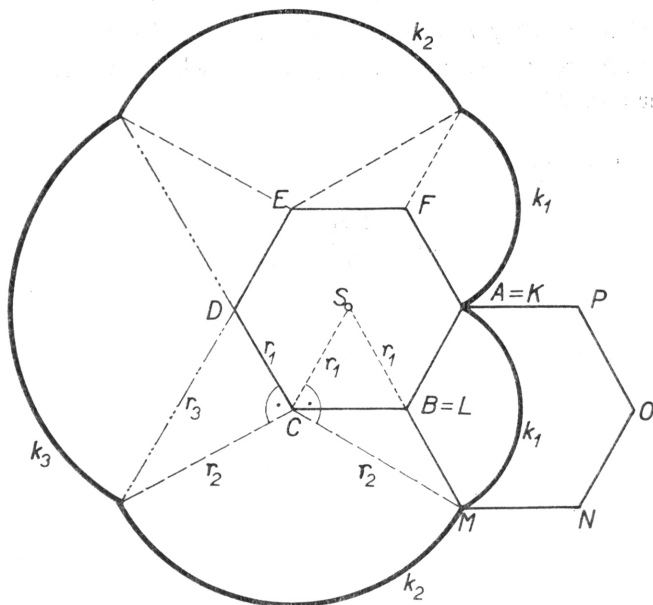
Trojúhelník ABC se pohybuje po obvodu čtverce $MNPQ$ takto: Nejprve se otočí okolo bodu N do polohy $A_1B_1C_1$ tak,

že $C_1 = P$, $B_1 = B = N$ a bod A_1 leží vně daného čtverce. Při dalších pohybech se otočí trojúhelník po řadě okolo bodů P , Q a M , N , až se dostane do své původní polohy ABC , ale tak, že $A_4 = C$.

Narýsujte a) polohy, do nichž se dostane trojúhelník vždy po vykonání jednotlivých otočení, a dráhu bodu A ;

b) čáru, kterou opíše střed S trojúhelníka ABC .

Řešení je patrné z obr. 25; úhly otočení jsou rovny 210° .



Obr. 26

6. Jsou dány dva různé pravidelné šestiúhelníky $ABCDEF$ a $KLMNOP$, které mají společnou stranu ($A = K, B = L$).

a) Určete dráhu, kterou opíše vrchol K šestiúhelníka $KLMNOP$, který se kotálí vně po obvodě šestiúhelníka $ABCDEF$.

b) Vypočítejte délku této dráhy.

Řešení. a) Dráha bodu K se skládá z pěti oblouků kružnice, jak je naznačeno na obr. 26.

b) Každému z pěti oblouků odpovídá středový úhel velikosti 120° ; k_1, k_2, k_3 jsou délky příslušných oblouků. Označíme-li a délku strany daného šestiúhelníka, budou mít příslušné poloměry délky $r_1 = a$, $r_2 = a\sqrt{3}$, $r_3 = 2a$ (jak plyne podle Pythagorovy věty z pravoúhlých trojúhelníků vyznačených na obr. 26).

Platí tedy

$$k_1 = \frac{2\pi r_1}{3} = \frac{2}{3} \pi a,$$

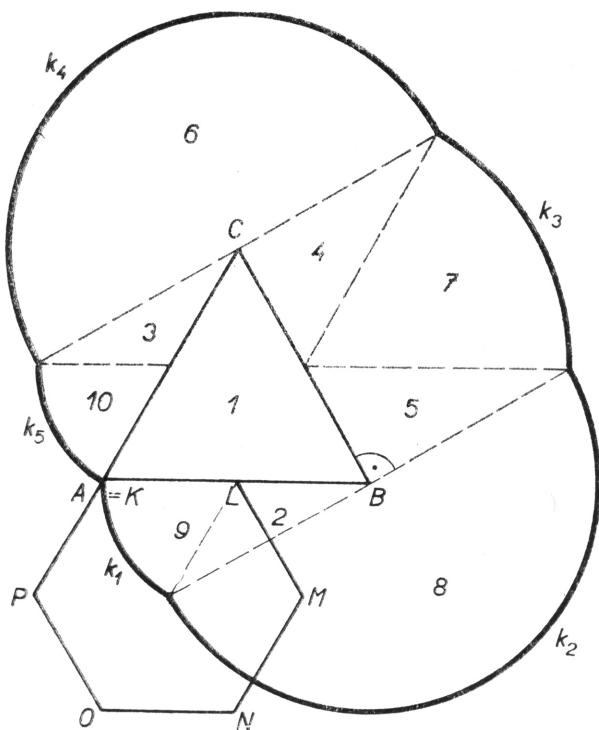
$$k_2 = \frac{2\pi r_2}{3} = \frac{2}{3} \pi a\sqrt{3},$$

$$k_3 = \frac{2\pi r_3}{3} = \frac{2}{3} \pi a.$$

Odpověď: Celková dráha bodu K je tedy

$$d = 2k_1 + 2k_2 + k_3 = \frac{4}{3} \pi a (2 + \sqrt{3}).$$

(Je-li např. $a = 4$ cm, dostaneme $d \doteq 62,3$ cm.)



Obr. 27

7. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC se stranou a délky 8 cm. Dále je dán pravidelný šestiúhelník $KLMNOP$ se stranou délky 4 cm, takový, že vrcholy A a K v základní poloze splývají

a vrchol L leží na polopřímce AB . Oba útvary leží v opačných polorovinách vyřatých přímkou AB .

Šestiúhelník $KLMNOP$ se kotálí po obvodě trojúhelníka ABC .

a) Najděte dráhu vrcholu K .

b) Vypočítejte obsah útvaru ohraničeného dráhou bodu K .

Řešení (obr. 27). a) Dráha bodu K se skládá z pěti kružnicových oblouků, jak je vyznačeno na obrázku.

b) Obsah útvaru ohraničeného dráhou bodu vypočítáme jako součet obsahů celkem deseti obrazců, z nichž je pět trojúhelníků a pět kruhových výsečí (viz obr. 27). Obsah obrazce označeného číslem i bude P_i v cm^2 ($i = 1, 2, \dots, 10$).

Obsah rovnostranného trojúhelníka ABC je

$$P_1 = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 16 \cdot \sqrt{3} \doteq 27,68. \quad (1)$$

Dále je $P_2 = P_3$, takže

$$P_2 + P_3 = 2 \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 8 \cdot \sqrt{3} \doteq 13,84. \quad (2)$$

Podobně $P_4 = P_5$, takže

$$P_4 + P_5 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \right) = 16\sqrt{3} \doteq 27,68. \quad (3)$$

Kruhová výseč označená na obr. 27 číslem 7 má poloměr $a = 8 \text{ cm}$ a středový úhel velikosti 60° ; její obsah je tedy

$$P_7 = \frac{1}{6} \pi \cdot 64 \doteq 33,60. \quad (4)$$

Dále je $P_6 = P_8 = \frac{1}{2} \pi (4 \cdot \sqrt{3})^2 = 24\pi$, takže

$$P_6 + P_8 = 48\pi \doteq 150,72. \quad (5)$$

Nakonec $P_9 = P_{10}$, proto je

$$P_9 + P_{10} = 2 \left(\frac{1}{6} \pi \cdot 4^2 \right) = 16 \cdot \frac{\pi}{3} \doteq 16,80. \quad (6)$$

Sečtením výsledků (1), (2), (3), (4), (5) a (6) dostaneme

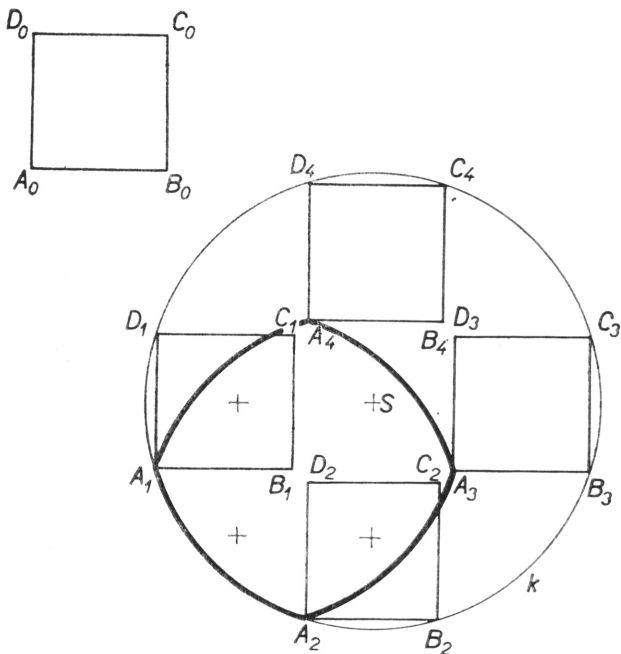
$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots + P_{10} \doteq 270 \text{ cm}^2.$$

Odpověď. Obsah útvaru ohraničeného dráhou bodu K je přibližně 270 cm^2 .

8. V rovině je dána kružnice k o poloměru délky 6 cm a čtverec $A_0B_0C_0D_0$, jehož strana má délku 3,5 cm. Označme $ABCD$ čtverec těchto vlastností:

1. Vznikne rovnoběžným posunutím čtverce $A_0B_0C_0D_0$;
2. náleží kruhu K s hranicí k ;
3. aspoň jeden jeho vrchol náleží kružnici k .

Narýsujte čáru, kterou vyplní vrcholy A všech takových čtverců.



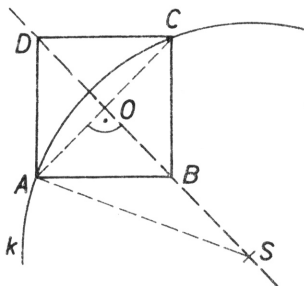
Obr. 28

Řešení. Poloměr kružnice opsané čtverci $A_0B_0C_0D_0$ se rovná polovině délky jeho úhlopříčky, tj.

$$\frac{1}{2} \cdot 3,5 \cdot \sqrt{2},$$

takže je menší než poloměr kružnice k . Čtverec $A_0B_0C_0D_0$ lze tedy rovnoběžně posunout tak, aby náležel kruhu K (např. čtverec $A_1B_1C_1D_1$ na obr. 28). Přitom na kružnici k mohou ležet nejvýše dva jeho vrcholy. Totiž, kdyby na kružnici k

ležely tři jeho vrcholy, pak by střed čtverce $ABCD$ byl středem S kružnice k , což však není možné. Leží-li na k dva vrcholy čtverce $ABCD$, pak musí být sousední. Kdyby byly protější, potom by čtverec $ABCD$ neležel uvnitř kruhu K . Toto tvrzení dokážeme.



Obr. 29

Nechť na kružnici k leží např. vrcholy A a C . Střed S pak leží (obr. 29) na přímce BD ; předpokládejme, že náleží polopřímce OB , kde bod O je střed čtverce $ABCD$. (Kdyby střed S ležel na polopřímce OD , byly by další úvahy obdobné.) Protože platí $AS > AB$, má trojúhelník ASD při vrcholu A tupý úhel, takže $DS > AS$ a bod D leží vně kruhu K .

Čtverce, které dostaneme ze čtverce $A_0B_0C_0D_0$ rovnoběžným posunutím a jež náleží kruhu K a mají dva vrcholy na kružnici k , jsou právě čtyři (obr. 28). Konstrukce těchto čtyř čtverců je jednoduchá. Přímky A_1B_3 a D_1C_3 jsou rovnoběžné s přímkou A_0B_0 a jejich vzdálenosti od středu S kružnice k jsou 1,75 cm. Obdobně přímky A_2D_4 a B_2C_4 jsou rovnoběžné s přímkou A_0D_0 a jejich vzdálenosti od bodu S jsou 1,75 cm. Body A_1, A_2, A_3, A_4 leží na hledané čáře.

Představme si, že čtverec $ABCD$ se z polohy $A_1B_1C_1D_1$ pohybuje tak, že v každé své další poloze je obrazem čtverce $A_0B_0C_0D_0$ v rovnoběžném posunutí, přitom náleží kruhu $\mathbf{K}$ a zároveň vrchol A leží na kružnici k . Při tomto pohybu se bod A pohybuje na obr. 28 proti směru hodinových ručiček a pohyb čtverce $ABCD$ skončí v poloze $A_2B_2C_2D_2$. Kdyby se totiž čtverec $ABCD$ uvedeným způsobem dále pohyboval, pak by vrchol B opustil kruh $\mathbf{K}$. Bod A proběhl při uvažovaném pohybu oblouk A_1A_2 kružnice k , který je tedy částí hledané čáry.

Nyní budeme obdobně pohybovat čtvercem $ABCD$ z polohy $A_2B_2C_2D_2$ tak, aby vrchol B ležel na kružnici k . Tak se dospěje až do polohy $A_3B_3C_3D_3$, odkud už nebude možno v pohybu pokračovat, neboť vrchol C by opustil kruh $\mathbf{K}$. Vrchol A při tomto pohybu opíše oblouk A_2A_3 , jenž získáme z oblouku B_2B_3 kružnice k rovnoběžným posunutím ($B_2 \rightarrow A_2$). Oblouk A_2A_3 je další částí hledané čáry.

Obdobně zjistíme, že zbývajících částmi hledané čáry jsou oblouky A_3A_4 a A_4A_1 , jež vzniknou z oblouků C_3C_4 a D_4D_1 rovnoběžnými posunutími ($C_3 \rightarrow A_3$) a ($D_4 \rightarrow A_4$).

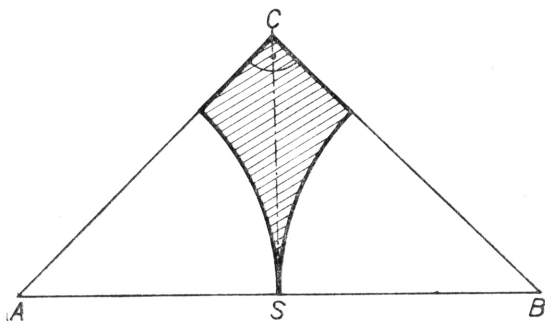
Hledaná čára je na obr. 28 vyznačena tlustě.

II. Úlohy na výpočet velikosti obrazců a ploch

9. Narýsujte pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s přeponou AB délky 0,7 dm. Kolem bodů A, B opište kružnice s poloměrem $\frac{1}{2}AB$. Označte x obsah (v dm^2) té části trojúhelníka, která leží vně obou kružnic.

a) Vypočítejte číslo x (použijte $\pi \doteq \frac{22}{7}$).

b) Kolik procent obsahu trojúhelníka ABC je obsah x ?



Obr. 30

Řešení (obr. 30). a) Obsah P trojúhelníka ABC snadno vypočítáme, neboť $d(AB) = 0,7$ dm, $d(SC) = \frac{1}{2} \cdot 0,7$ dm, a je tedy

$$P = \frac{1}{2} \cdot 0,7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,7$$

čili

$$P = \frac{1}{4} \cdot 0,7^2 \text{ (dm}^2\text{)}. \quad (1)$$

Kruhové výseče se středy A, B mají poloměr $r = \frac{1}{2} d(AB) = \frac{1}{2} \cdot 0,7 \text{ dm}$. Protože středové úhly těchto výsečí mají velikost 45° , je součet Q obsahů těchto výsečí roven obsahu čtvrtkruhu.

Platí

$$Q = \frac{1}{4} \pi r^2 = \frac{1}{4} \pi \left(\frac{1}{2} \cdot 0,7 \right)^2 = \frac{1}{16} \pi \cdot 0,7^2 \text{ (dm}^2\text{)}.$$

Pro obsah x vyšrafované části trojúhelníka (obr. 30) dostáváme

$$x = P - Q$$

čili

$$x = \frac{1}{4} \cdot 0,7^2 - \frac{1}{16} \pi \cdot 0,7^2 = \frac{1}{16} \cdot 0,7^2 (4 - \pi).$$

Po výpočtu dojdeme k **odpovědi a)**:

Obsah x vyšrafované části trojúhelníka ABC je přibližně $0,026\ 25\text{ dm}^2$.

b) Označme písmenem p hledaný počet procent, P je základ a x procentová část; je tedy

$$x = \frac{p}{100} \cdot P$$

čili

$$p = \frac{100x}{P}.$$

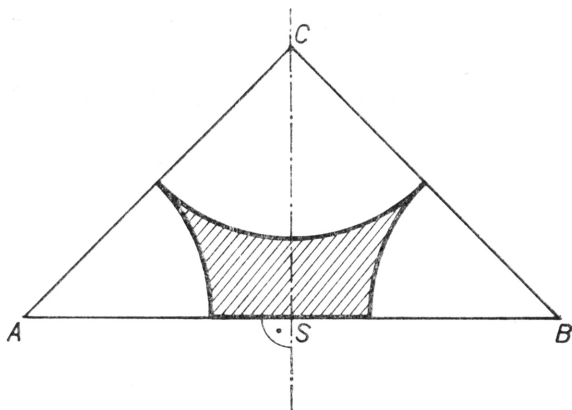
Dosadíme za x a P a dostaneme

$$p \doteq \frac{2,625}{\frac{1}{4} \cdot 0,7^2} \doteq 21,4.$$

Ódpověď b): Obsah x uvažovaného obrazce je asi $21,4\ \%$ obsahu daného trojúhelníka ABC .

10. Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC o odvěsnách CA a CB délky 2 dm . Kolem každého jeho vrcholu opíšeme kružnici o poloměru 1 dm . Oblouky těchto kružnic oddělí z trojúhelníka ABC tři kruhové výseče a z trojúhelníka zbude obrazec, jehož obsah označíme x .

Vypočítejte, kolik procent je obsah x z obsahu daného trojúhelníka.



Obr. 31

Řešení (obr. 31 zmenšený na jednu čtvrtinu). Označme P obsah trojúhelníka ABC a x obsah v textu uvažovaného obrazce; dále označme Q obsah tří kruhových výsečí, které od trojúhelníka ABC máme oddělit. Platí

$$P = \frac{1}{2} \cdot d(CA) \cdot d(CB) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2,$$

tedy je

$$P = 2 \text{ (dm}^2\text{)}. \quad (1)$$

Obsah Q je součet obsahů tří výsečí o poloměru $r = 1$, kruh o poloměru $r = 1$ má obsah πr^2 , tj. π ; dvě z těchto výsečí (při vrcholech A, B) mají tedy obsahy rovné $\frac{1}{8} \pi$ a třetí výseč

(při vrcholu C) má obsah $\frac{1}{4}\pi$; je tedy

$$Q = 2 \cdot \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{4}\pi,$$

tj.

$$Q = \frac{1}{2}\pi \text{ (dm}^2\text{)}. \quad (2)$$

Z výsledků (1), (2) pro číslo $x = P - Q$ dostáváme

$$x = 2 - \frac{1}{2}\pi. \quad (3)$$

Položme $\pi \doteq \frac{22}{7}$; po dosazení do (3) obdržíme

$$x \doteq 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{22}{7} = 2 - \frac{11}{7} = \frac{14 - 11}{7} = \frac{3}{7},$$

tj.

$$x \doteq \frac{3}{7}. \quad (4)$$

Označme p hledaný počet procent; je

$$p = \frac{x}{P} \cdot 100.$$

Dosaďme sem z (1) a (4); dostáváme přibližně

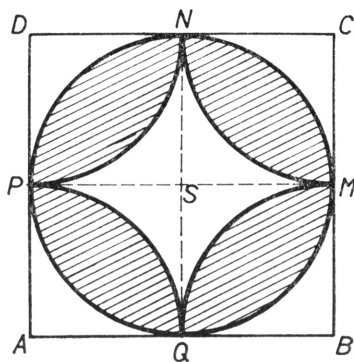
$$p \doteq \frac{3 \cdot 100}{7} : 2 = \frac{3 \cdot 100}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{150}{7} = 21 \frac{3}{7}$$

neboli

$$p \doteq 21,43.$$

Odpověď. Hledaný obrazec je asi $21 \frac{3}{7} \%$ obsahu daného trojúhelníka.

11. Je dán čtverec $ABCD$ o straně a a středu S . Čtverci je vepsána kružnice o středu S ; z každého vrcholu čtverce jsou opsány čtvrtkružnice o poloměru rovném polovině strany čtverce (obr. 32). Kružnice a čtvrtkružnice omezují útvar, který je v obrázku vyšrafován.



Obr. 32

Kolik procent obsahu čtverce zaujímá vyčárkovaný obrazec?
 Závísí toto číslo na velikosti strany daného čtverce? (Položte
 $\pi \doteq \frac{22}{7} \cdot$)

Řešení. Strana daného čtverce má velikost a centimetrů. Obsahy, které budeme počítat, budou pak udány v cm^2 . Kružnice v našem obrázku 32 i každá ze čtyř čtvrtkružnic mají poloměry $r = \frac{1}{2} a$ neboli

$$a = 2r.$$

Střední příčky velkého čtverce na obrázku 32 rozdělují bílou plochu (tj. nevyčárkovanou) kolem bodu S na čtyři části. Každou z těchto částí dostaneme, když od čtverce (např. $AQSP$) o straně r oddělíme čtvrtkruh o poloměru r ; střed tohoto čtvrtkruhu je v jednom z vrcholů velkého čtverce. Rovněž bílé plošky při vrcholech velkého čtverce vzniknou tak, že od čtverce o straně r oddělíme čtvrtkruh o poloměru r (střed je ve středu velkého čtverce). Dostáváme tak celkem osm bílých ploch, z nichž každá má týž obsah x . Tento obsah x je roven rozdílu obsahu r^2 malého čtverce a čtvrtkruhu o obsahu $\frac{1}{4} \pi r^2$, tedy

$$x = r^2 - \frac{1}{4} \pi r^2.$$

Všech osm bílých plošek má dohromady obsah

$$8x = 8\left(r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2\right)$$

neboli

$$8x = 8r^2 - 2\pi r^2.$$

Plochu, která je na obr. 32 vyčárkována, dostaneme, když od velkého čtverce oddělíme oněch osm bílých plošek. Označme y obsah vyčárkované plochy. Obsah velkého čtverce je $a^2 = (2r)^2$ neboli $a^2 = 4r^2$. Obsah $y = a^2 - 8x$ neboli

$$y = 4r^2 - (8r^2 - 2\pi r^2),$$

tj.

$$y = 2\pi r^2 - 4r^2 = 2r^2(\pi - 2).$$

Označíme p počet procent, y je procentová část a $4r^2$ (obsah velkého čtverce) je základ. Tu platí

$$p = \frac{y}{4r^2} \cdot 100$$

neboli

$$p = \frac{2r^2(\pi - 2)}{4r^2} \cdot 100.$$

Odtud po zkrácení dostaneme

$$p = \frac{\pi - 2}{2} \cdot 100$$

neboli

$$p = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \cdot 100. \quad (1)$$

Protože $\pi \doteq \frac{22}{7}$, je $\frac{\pi}{2} = \frac{11}{7} = 1,\overline{571\,428}$, a tedy $\frac{\pi}{2} - 1 \doteq \doteq 0,571\,4$.

Je tedy

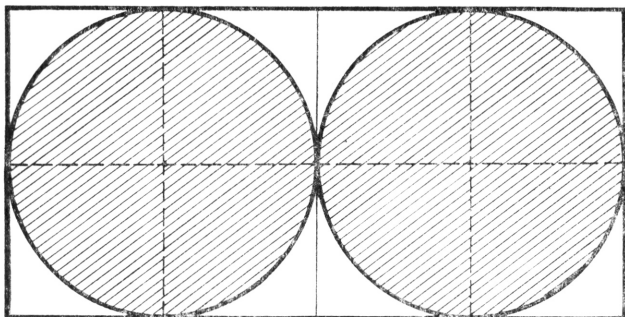
$$p \doteq 0,571\,4 \cdot 100$$

neboli

$$p \doteq 57,14.$$

Odpověď. Obsah čárkované části na obr. 32 je přibližně 57 % obsahu čtverce o straně a . Protože číslo p , které jsme ve vztahu (1) vypočítali, nezávisí na velikosti poloměru r , a tím na velikosti a strany velkého čtverce, dospějeme k témuž výsledku při každém kladném čísle a .

Poznámka. Snadno usoudíme, že bílé plošky, o nichž jsme mluvili (viz obr. 32), jsou shodné s bílými ploškami na obr. 33.



Obr. 33

Proto obsah $8x$ těchto bílých plošek podle obr. 33 dostaneme, když od obsahu $2a^2$ dvou velkých čtverců odečteme obsah $2\pi r^2$ dvou kruhů, z nichž každý má poloměr r . Platí tedy

$$8x = 2(2r)^2 - 2\pi r^2$$

neboli

$$8x = 8r^2 - 2\pi r^2,$$

čímž bychom podstatně zkrátili předchozí výpočet.

Jiné řešení (obr. 32). Délka strany čtverce a je rovna $2r$, přičemž r je poloměr vepsané kružnice. Proto obsah čtverce

$$P = (2r)^2 = 4r^2,$$

což představuje 100 %; z toho 1 % je

$$\frac{4r^2}{100} = \frac{r^2}{25}.$$

Obsah kruhu do čtverce vepsaného je $P_1 = \pi r^2$, což představuje x % obsahu čtverce. Vypočteme nyní v procentech, jakou částí obsahu čtverce je obsah kruhu P_1 . Zjistíme to dělením

$$\pi r^2 : \frac{r^2}{25} = 25\pi.$$

Potom platí, že

$$25\pi \doteq 25 \cdot \frac{22}{7} = 78 \frac{4}{7}.$$

Obsah kruhu se rovná $78 \frac{4}{7}$ % obsahu čtverce. Čtyři plošky při vrcholech čtverce se rovnají nevyčárkovanému obrazci uvnitř kruhu, to znamená, že jejich obsah je roven $P - P_1$, což v procentech činí:

$$100 - 78 \frac{4}{7} = 21 \frac{3}{7}$$

Obsah vyčárkovaného obrazce se rovná rozdílu obsahu kruhu a obrazce uvnitř kruhu. V procentech to znamená:

$$78 \frac{4}{7} - 21 \frac{3}{7} = 57 \frac{1}{7}$$

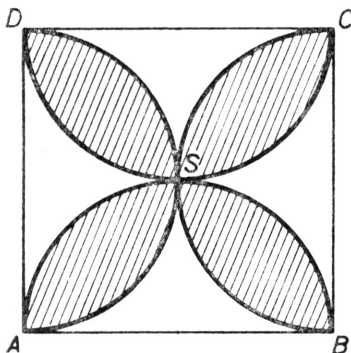
Odpověď. Vyčárkovaný obrazec zaujímá asi $57\frac{1}{7}\%$ obsahu

čtverce.

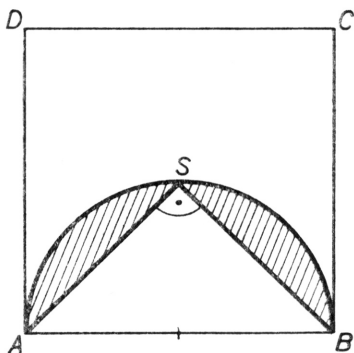
Z výrazu

$$\frac{\pi r^2 \cdot 25}{r^2} = 25\pi$$

je vidět, že počet procent je nezávislý na délce strany čtverce, neboť se rovná 25π (r^2 se totiž zkrátí).



Obr. 34



Obr. 35

Tentýž výsledek dostaneme řešením úlohy:

12. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky d . Kolem středu každé jeho strany opište polokružnici, která prochází středem čtverce $ABCD$.

Kolik procent z obsahu čtverce tvoří obsah vyčárkovaného obrazce (obr. 34)?

13. Park tvaru obdélníka $ABCD$ má rozměry $d(AB) = 240$ m, $d(AD) = 232$ m. Parkem vedou dvě stejně široké navzájem kolmé hlavní cesty (viz obr. 36).

Řešení. a) Velikosti úseček budeme udávat v metrech a obsahy v m^2 . Použijeme označení zavedené na obr. 36. Celý útvar je souměrný podle os $p \perp AB$, $q \perp BC$, vedených středem S

obdélníka $ABCD$. Proto body M, P leží na přímce p a body N, Q na přímce q .

Pro výpočet výměry cest bude třeba určit šířku cest; ta bude známa, zjistíme-li společnou délku úseček $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = x$. Vzhledem k souměrnosti podle přímky q je pravoúhlý trojúhelník BCN rovnoramenný a jeho přepona BC má délku 232. Jeho odvěsna NB je i odvěsnou pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka A_1BN ; platí tedy

$$\triangle BCN \cong \triangle A_1BN,$$

takže také $BC = A_1B$ čili $232 = 240 - x$. Je tedy

$$x = 8.$$

Z rovnoběžníka AA_1NQ plyne, že $d(QN) = 8$. Je tedy šířka cesty $QM = y$ rovna délce strany čtverce $QMNP$ s úhlopříčkou QN , tj.

$$y = 4\sqrt{2}.$$

Výměru V obou cest dohromady dostaneme jako součet obsahů dvou shodných rovnoběžníků AA_1CC_1 a B_1BD_1D , zmenšený o obsah čtverce $QMNP$. Rovnoběžník AA_1CC_1 má ke straně AA_1 příslušnou výšku $v = d(BC) = 232$. Je tedy

$$V = 2 \cdot 8 \cdot 232 - (4\sqrt{2})^2,$$

tj.

$$V = 3\,712 - 16 \cdot 2$$

čili

$$V = 3\,680 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Poznámka. Výpočtu šířky y cest bychom se mohli vyhnout, kdybychom obsah čtverce $QMPN$ vyjádřili jako polovinu obsahu čtverce se stranou QN velikosti x , tj. $\frac{x^2}{2} = \frac{8^2}{2} = 32$.

b) Výměra $3\,680 \text{ m}^2$ představuje procentovou část vzhledem k základu, jímž je obsah pozemku $ABCD$, tj.

$$232 \cdot 240 = 55\,680 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Máme tedy vypočítat, kolik procent p je $3\,680$ ze základu $55\,680$. Pro p platí

$$\frac{55\,680}{100} \cdot p = 3\,680$$

čili

$$p = \frac{3\,680 \cdot 100}{55\,680}.$$

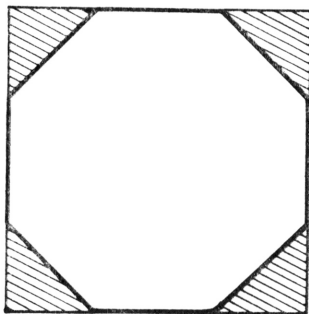
Po úpravě krácením a dělením dostaneme

$$p \doteq 6,6.$$

Odpověď. Obě cesty mají dohromady výměru $3\,680\text{ m}^2$ a zaujímají asi $6,6\%$ celkové výměry parku.

14. Plechová podložka má tvar čtverce o straně délky 8 dm . Při každém vrcholu tohoto čtverce máme odříznout stejnou část tvaru pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka tak, aby se hmotnost podložky zmenšila a) o 18% ; b) o 72% .

Vypočtete velikost odvěsen odříznutých trojúhelníků. Dále rozhodněte, zda je možné obojí odříznutí provést.



Obr. 37

Řešení. Čtvercová podložka má čtvercovou stěnu o straně délky 8 dm ; tato stěna má obsah 64 dm^2 . Rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, který odřízneme, má odvěsnu velikosti $x\text{ dm}$; součet obsahů všech těchto čtyř trojúhelníků je $4 \cdot \frac{1}{2}x^2 = 2x^2$ (obr. 37). V našem případě musí být $x \leq 4$, jinak by se odříznutí nedalo provést.

Protože tloušťka podložky i hustota jejího materiálu je všude stejná, stačí, když místo hmotnosti uvažujeme jen obsah čtvercové stěny podložky.

a) 18 % ze 64 je 64.0,18; toto číslo má být rovno $2x^2$, tj. má platit

$$2x^2 = 64.0,18$$

neboli

$$x^2 = 64.0,09.$$

Je tedy

$$x = 8.0,3,$$

tj.

$$x = 2,4.$$

Protože je $2,4 < 4$, lze odříznutí provést (obr. 37). Zkouškou bychom se přesvědčili o správnosti výpočtu.

Odpověď. Abychom hmotu podložky zmenšili o 18 %, je nutno v každém rohu podložky odříznout pravoúhlý rovno-ramenný trojúhelník s odvěsnou délky 2,4 dm.

b) 72 % ze 64 dm² je 64.0,72. Má platit

$$2x^2 = 64.0,72$$

neboli

$$x^2 = 64.0,36.$$

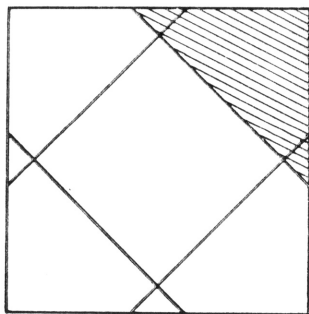
Je tedy

$$x = 8.0,6,$$

tj.

$$x = 4,8.$$

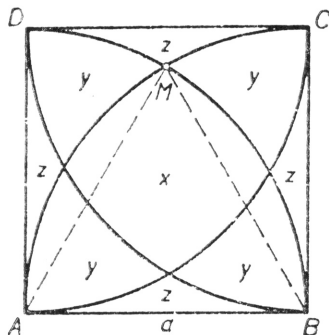
Protože je $4,8 > 4$, nelze odříznutí provést (obr. 38).



Obr. 38

Odpověď. Požadavky úlohy nelze tedy v případě b) splnit a úloha je neřešitelná.

15. Je dán čtverec $ABCD$, jehož strana má délku a . Kolem jeho vrcholů jsou opsány vnitřkem čtverce čvrtkružnice s poloměrem a . Tím se čtverec rozdělí na 9 částí tří různých tvarů (obr. 39). Vypočítejte obsahy těchto částí.



Obr. 39

Řešení. Průsečík oblouků opsaných okolo bodů A , B označme M . Písmeny x , y , z označme obsahy vzniklých ploch tak jako na obr. 39. Potom platí

$$z = P - (P_1 + 2P_2),$$

kde P je obsah čtverce $ABCD$ se stranou délky a , P_1 je obsah rovnostranného trojúhelníka ABM se stranou délky a a P_2 je obsah kruhové výseče s poloměrem a a středovým úhlem velikosti 30° (tj. $2P_2$ je součet obsahů výsečí AMD a BCM). Platí tedy

$$z = a^2 - \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} - 2\pi a^2 \cdot \frac{30}{360},$$

tj.

$$z = \frac{a^2}{12} (12 - 2\pi - 3\sqrt{3}) \doteq 0,043 a^2. \quad (1)$$

Dále je

$$y = P - (P_3 + 2z),$$

kde P_3 je obsah čtvrtkruhu ABD s poloměrem a , tj.

$$y = \frac{a^2}{12} (\pi + 6\sqrt{3} - 12) \doteq 0,128 a^2. \quad (2)$$

Pro x platí

$$x = P - (4y + 4z),$$

tj.

$$x = \frac{a^2}{3} (3 + \pi - 3\sqrt{3}) \doteq 0,315 a^2. \quad (3)$$

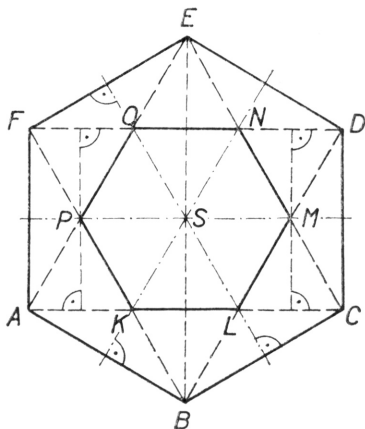
Odpověď. Řešení úlohy je dáno vztahy (1), (2) a (3).

16. Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Trojúhelníky ACE a BDF se protínají opět v pravidelném šestiúhelníku.

Dokažte, že jeho obsah se rovná třetině obsahu šestiúhelníka $ABCDEF$.

Řešení. Pozorně si prohlédněte obr. 40 a dokažte, že šestiúhelník $ABCDEF$ je sjednocením 36 shodných pravoúhlých trojúhelníků, které mají ostré vnitřní úhly 60° a 30° a jejichž delší odvěsna je rovna polovině strany daného šestiúhelníka.

Přitom žádné dva z těchto trojúhelníků se nepřekrývají. Šestiúhelník $KLMNOP$, který je průnikem trojúhelníků ACE a BDF , je sjednocením dvanácti těchto trojúhelníků. Odtud již plyne tvrzení úlohy.

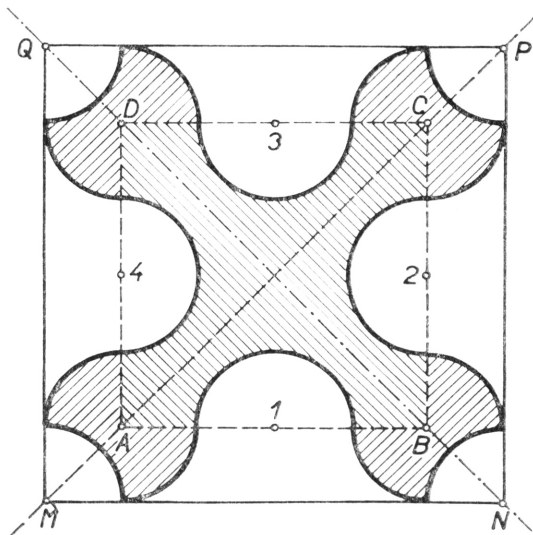


Obr. 40

17. Na obr. 41 je znázorněna plechová součástka, jejíž obvod se skládá z oblouků shodných kružnic s daným poloměrem a . Středů oblouků jsou v obrázku vyznačeny kroužky. Přitom $ABCD$, $MNPQ$ jsou čtverce, jejichž úhlopříčky leží ve dvou navzájem kolmých přímkách $MACP$, $NBDQ$. Přitom je $d(AB) = 4a$, $d(MN) = 6a$.

- Narýsujte obrázek součástky, je-li $a = 2,5$ cm.
- Vyjádřete obsah obrazu součástky pomocí čísla a .
- Vyjádřete pomocí čísla a hmotnost 1 000 kusů součástek, jestliže 1 m^2 plechu, z kterého jsou vyrobeny, váží 8,5 kg. Výpočet proveďte pro $a = 2,5$ cm.

Řešení. a) Obrázek součástky je zmenšen na dvě pětiny (obr. 41).

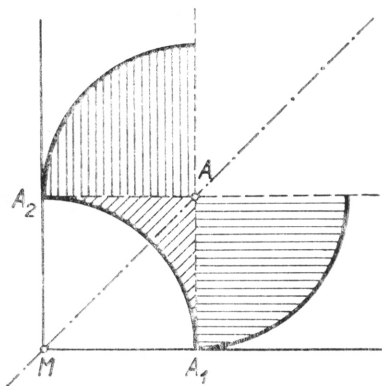


Obr. 41

b) Protože číslo a udává velikost úseček v centimetrech, vypočteme obsah P vyšrafované plochy v obr. 41 v centimetrech čtverečných. Obvod čtverce $ABCD$ rozděluje plochu součástky ve dvě nepřekrývající se části. První část je znázorněna vyšrafovanou plochou ve čtverci $ABCD$; její obsah označíme x . Druhá část je znázorněna čtyřmi vyšrafovanými plochami, z nichž každá leží ve čtverci $MNPQ$. Jedna z těchto ploch je znázorněna ve zvětšení v obr. 42, a to plocha, která leží při vrcholu A ; její obsah označíme y . Výpočty provedeme odděleně.

Obsah čtvrtkruhu o poloměru a označíme K ; obsah celého kruhu o poloměru a je

$$4K = \pi a^2. \quad (1)$$



Obr. 42

I. Výpočet obsahu x první části vyšrafované plochy: Obsah x dostaneme, když od obsahu čtverce $ABCD$ odečteme obsah čtyř polokruhů o poloměru a (středů polokruhů jsou v bodech 1, 2, 3, 4). Čtverec $ABCD$ má stranu délky $4a$; jeho obsah je $(4a)^2 = 16a^2$. Obsah jednoho polokruhu je $2K$, všech čtyř je $8K$. Proto je

$$x = 16a^2 - 8K. \quad (2)$$

II. Výpočet obsahu druhé části vyšrafované plochy: Obsah y plochy naznačené v obr. 42 dostaneme, když od obsahu čtverce MA_1AA_2 o straně MA_1 délky a odečteme obsah

jednoho čtvrtkruhu (jeho střed je v M a poloměr má délku a) a k tomu přičteme obsahy dvou čtvrtkruhů o středu A a délce poloměru a . Obsah čtverce MA_1AA_2 je a^2 , obsah čtvrtkruhu je K ; je tedy $y = (a^2 - K) + 2K$ neboli $y = a^2 + K$. Obsah $4y$ druhé části tudíž je

$$4y = 4(a^2 + K). \quad (3)$$

III. Vypočteme obsah P celé vyšrafované plochy, tj. určíme součet obsahů všech nepřekrývajících se obrazců. Tu platí $P = x + 4y$. Dosadíme sem z výsledků (2) a (3); dostaneme postupně

$$P = (16a^2 - 8K) + 4(a^2 + K),$$

$$P = 16a^2 - 8K + 4a^2 + 4K,$$

$$P = 20a^2 - 4K.$$

Do tohoto výsledku dosadíme ze vzorce (1); obdržíme postupně

$$P = 20a^2 - \pi a^2, \quad (4)$$

$$P = a^2(20 - \pi),$$

což je hledaný výsledek. Tím je úloha b) rozřešena.

c) Označme Q hmotnost 1 000 kusů součástek v kilogramech. Protože je udána hmotnost 1 m² plechu, převedeme obsah P

ve výsledku (4) na čtverečné metry. Platí $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2 = 100 \cdot 100 \text{ cm}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$. Obsah součástky v metrech čtverečných je proto $\frac{1}{10\,000} \cdot a^2 (20 - \pi)$ a hmotnost jedné součástky v kilogramech je

$$\frac{1}{10\,000} \cdot a^2 (20 - \pi) \cdot 8,5.$$

Hmotnost Q je 1 000krát větší, tj.

$$Q = \frac{1}{10\,000} \cdot a^2 (20 - \pi) \cdot 8,5 \cdot 1\,000;$$

postupnou úpravou dostaneme

$$Q = \frac{1}{10} \cdot a^2 (20 - \pi) \cdot 8,5,$$

což je hledaná hmotnost 1 000 součástek vyjádřená užitím čísla a .

Jestliže nyní je $a = 2,5$, dostaneme odtud postupně

$$Q = 2,5^2 \cdot (20 - \pi) \cdot 0,85,$$

$$Q = 6,25 \cdot 0,85 \cdot (20 - \pi).$$

Výpočet provedme pro $\pi \doteq \frac{22}{7}$. Tu je

$$20 - \pi \doteq 20 - \frac{22}{7} = \frac{140 - 22}{7} = \frac{118}{7}; \text{ je tedy}$$

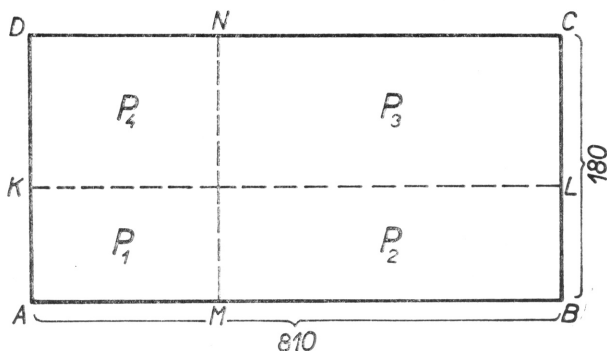
$$Q \doteq 5,31 \cdot \frac{118}{7} = (5,31 \cdot 118) \cdot \frac{1}{7} \doteq 627 \cdot \frac{1}{7} \doteq 89,6.$$

Odpověď. 1 000 kusů plechových součástek má hmotnost asi 90 kg.

18. Pole tvaru obdélníka $ABCD$ má rozměry $d(AB) = 810$ m, $d(AD) = 180$ m. Toto pole je třeba rozdělit na čtyři obdélníky s obsahy P_1, P_2, P_3, P_4 jako na obr. 43. Přitom má platit

$$P_1 = 2,03 \text{ ha}, P_4 = 3,19 \text{ ha}.$$

Vypočítejte a) obsahy P_2, P_3 ; b) obvody všech obdélníků.



Obr. 43

Řešení (obr. 43).

a) Abychom úlohu rozřešili, musíme určit velikosti úseček AM , AK ; jejich pomocí už snadno vypočítáme rozměry všech vzniklých obdélníků. (Písmeny P_1 , P_2 , P_3 , P_4 budeme značit jak dané obdélníky, tak jejich obsahy.)

Obsah obdélníka $AMND$ je $P_1 + P_4$, jeden jeho rozměr je $d(AD) = 180$ m; druhý rozměr $d(AM)$ vypočítáme tak, že obsah obdélníka dělíme rozměrem $d(AD)$. Uvedeme-li délku úseček v metrech a obsahy ve čtverečných metrech, platí

$$P_1 = 20\,300\text{ m}^2, P_4 = 31\,900\text{ m}^2$$

a dále

$$d(AM) = 52\,200 : 180 = 290\text{ (m)}. \quad (1)$$

Nyní obdobně vypočítáme délku úsečky AK jako podíl obsahu obdélníka P_1 a délky druhé strany AM . Platí

$$d(AK) = 20\,300 : 290 = 70\text{ (m)}. \quad (2)$$

Z výsledků (1) a (2) vypočítáme zbývající rozměry obdélníků P_2 , P_3 , tj. $d(MB) = 520$ m, $d(KD) = d(LC) = 110$ m. Je tedy

$$P_2 = d(MB) \cdot d(AK) = 520 \cdot 70 = 36\,400\text{ (m}^2\text{)}, \quad (3)$$

$$P_3 = d(MB) \cdot d(LC) = 520 \cdot 110 = 57\,200\text{ (m}^2\text{)}. \quad (4)$$

Zkoušku provedeme sečtením obsahů obdélníků P_1 , P_2 , P_3 , P_4 ; snadno se přesvědčíte, že dostanete obsah P obdélníka

$ABCD$, tj. $145\,800\text{ m}^2$. Výsledky (3) a (4) jsou tedy řešením úlohy.

b) Označme o_1, o_2, o_3, o_4 (v tomto pořadí) obvody obdélníků P_1, P_2, P_3, P_4 . Pak platí

$$o_1 = 2 \cdot (d(AM) + d(AK)) = 2(290 + 70) = 720 \text{ (m)},$$

$$o_2 = 2 \cdot (d(MB) + d(AK)) = 2(520 + 70) = 1\,180 \text{ (m)},$$

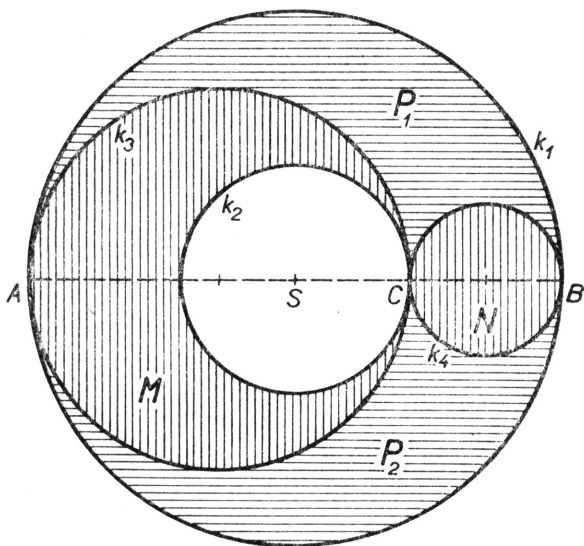
$$o_3 = 2 \cdot (d(MB) + d(KD)) = 2(520 + 110) = 1\,260 \text{ (m)},$$

$$o_4 = 2 \cdot (d(AM) + d(KD)) = 2(290 + 110) = 800 \text{ (m)}.$$

Zkoušku provedeme např. tak, že součet obvodů $o_1 + o_2 + o_3 + o_4$ porovnáme s dvojnásobným obvodem obdélníka $ABCD$; druhý obvod odpovídá dvojnásobně počítanému součtu délek úseček MN a KL .

19. Na obr. 44 jsou dány soustředné kružnice $k_1 = (S; x)$, $k_2 = (S; y)$, přičemž je $x > y$. Úsečka AB je průměrem kružnice k_1 , bod C leží na kružnici k_2 a uvnitř úsečky SB . Nad úsečkami AC, BC jako průměry opíšeme kružnice k_3, k_4 .

Součet $P_1 + P_2$ obsahů vodorovně vyčárkovaných ploch je roven součtu $M + N$ obsahů ploch vyčárkovaných svisle. Dokažte.



Obr. 44

Řešení (obr. 44). Obsahy kruhů k_1, k_2, k_3, k_4 označme po řadě $p_1, p_2, p_3, p_4 = N$. Poloměry kružnic k_3, k_4 jsou po řadě $r_3 = \frac{1}{2} d(AC), r_4 = \frac{1}{2} d(CB)$, kde $d(AC) = d(AS) + d(SC) = x + y, d(CB) = d(SB) - d(SC) = x - y$; proto je

$$r_3 = \frac{1}{2} (x + y), r_4 = \frac{1}{2} (x - y).$$

Je proto

$$p_1 = \pi x^2, p_2 = \pi y^2, p_3 = \frac{\pi}{4} (x + y)^2, p_4 = \frac{\pi}{4} (x - y)^2.$$

Je tedy

$$\begin{aligned}P_1 + P_2 &= p_1 - p_3 - p_4 = \\&= \frac{\pi}{4} [4x^2 - (x + y)^2 - (x - y)^2] = \\&= \frac{\pi}{4} [2x^2 - 2y^2] = \frac{\pi}{2} (x^2 - y^2).\end{aligned}\tag{1}$$

Dále je

$$\begin{aligned}M &= p_3 - p_2 = \frac{\pi}{4} (x + y)^2 - \pi y^2 = \\&= \frac{\pi}{4} [(x + y)^2 - 4y^2],\end{aligned}$$

$$N = p_4 = \frac{\pi}{4} (x - y)^2,$$

a tedy

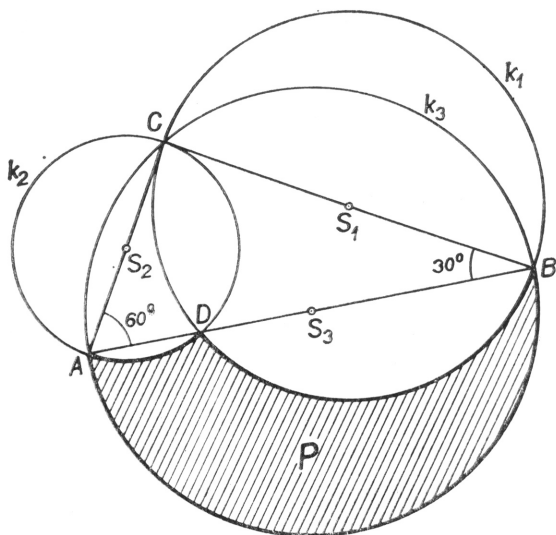
$$\begin{aligned}M + N &= \frac{\pi}{4} [(x + y)^2 - 4y^2 + (x - y)^2] = \\&= \frac{\pi}{4} [2x^2 - 2y^2] = \frac{\pi}{2} (x^2 - y^2).\end{aligned}\tag{2}$$

Porovnáním výsledků (1), (2) vyplývá

$$P_1 + P_2 = M + N,$$

což jsme měli dokázat.

20. Je dán trojúhelník ABC , jehož úhly mají velikosti $\sphericalangle BAC = 60^\circ$, $\sphericalangle ABC = 30^\circ$ a strana AC má velikost 1. Vypočítejte obsah vyšrafované plochy (obr. 45), která je omezená kružnicemi sestavenými nad průměry AB , BC , CA (na dvě desetinná místa).



Obr. 45

Řešení. Trojúhelník ABC je pravoúhlý, $\sphericalangle ACB = 90^\circ$. Označme D patu výšky k přeponě. Podle obrácení Thaletovy věty procházejí kružnice k_1, k_2 sestrojené nad odvěsnami BC, CA bodem D . Pro délky stran trojúhelníka ABC platí

$$AC = 1, AB = 2, BC = \sqrt{3}. \quad (1)$$

Označme P obsah vyšrafované plochy, P_1, P_2 obsahy úsečí omezených tětivy BD, AD a kružnicemi k_1, k_2 ; středy těchto kružnic označme S_1, S_2 . Pak platí vzhledem k (1)

$$P = \frac{1}{2} \pi - P_1 - P_2. \quad (2)$$

Obsahy P_1, P_2 vypočteme pomocí středových úhlů

$$\sphericalangle BS_1D = 120^\circ, \sphericalangle AS_2D = 60^\circ.$$

Je tedy vzhledem k (1)

$$P_1 = \frac{\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{360} \cdot 120 - \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{4} \sqrt{3}$$

čili

$$P_1 = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \quad (3)$$

(trojúhelník BDS_1 má též obsah jako rovnostranný trojúhelník o straně délky $\frac{\sqrt{3}}{2}$). Rovnost (3) po úpravě zní

$$P_1 = \frac{1}{4} \pi - \frac{3 \sqrt{3}}{16}. \quad (4)$$

Obdobně dostaneme

$$P_2 = \frac{\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2}{360} \cdot 60 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4}$$

čili

$$P_2 = \frac{1}{6} \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

po úpravě

$$P_2 = \frac{1}{24} \pi - \frac{\sqrt{3}}{16}. \quad (5)$$

Dosadíme-li z (4) a (5) do (2), vyjde

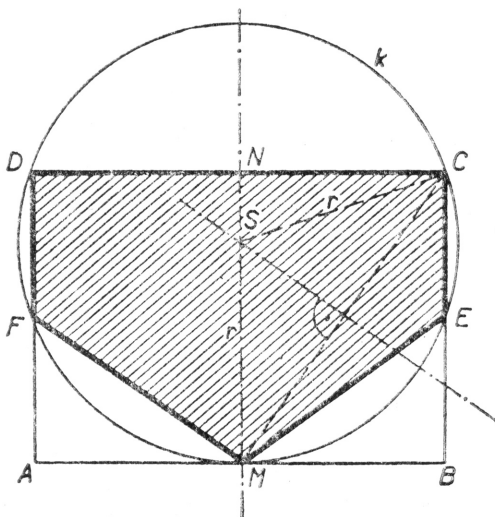
$$P = \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{4} \pi + \frac{3 \sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{5\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$P = (3,14.5) : 24 + (1,73 : 4) \doteq 0,65 + 0,43,$$

tedy

$$P \doteq 1,08.$$

21. Je dán obdélník $ABCD$. Bod M je středem strany AB . Uvnitř stran BC , AD sestrojte body E , F tak, aby bylo možno pětiúhelníku $MECDF$ opsat kružnici. Vyjádřete poloměr této kružnice i obsah pětiúhelníka pomocí délek stran obdélníka. Určete podmínku řešitelnosti úlohy.



Obr. 46

Řešení. Situaci zachycuje obr. 46. Kružnice k opsaná pětiúhelníku $MECDF$ je opsaná i rovnoramennému trojúhelníku MCD . Její střed je průsečíkem osy úsečky CD a osy úsečky MC . Označme N střed strany CD , r poloměr kružnice k , $a = d(AB)$, $b = d(BC)$ délky stran obdélníka. Potom

$$d(SC) = d(SM) = r, d(SN) = b - r, d(CN) = \frac{1}{2}a,$$

a podle Pythagorovy věty platí

$$(b - r)^2 + \frac{a^2}{4} = r^2. \quad (1)$$

Z (1) po úpravě dostaneme

$$r = \frac{4b^2 + a^2}{8b}. \quad (2)$$

Ze vzorce (2) vyjde vždy $r > 0$. Dále je $r < b$ právě tehdy, když $4b^2 + a^2 < 8b^2$ neboli $4b^2 > a^2$, tj. $2b > a$ čili

$$b > \frac{a}{2}. \quad (3)$$

Nerovnost (3) je podmínkou řešitelnosti, jak vyplývá z obrácení postupu.

Výpočet obsahu pětiúhelníka $MECDF$:

Protože trojúhelník CES je rovnoramenný, platí

$$d(CE) = d(DF) = 2d(SN) = 2(b - r). \quad (4)$$

Protože platí $BE = BC - CE$, je vzhledem ke (4)

$$d(BE) = b - 2(b - r) = 2r - b. \quad (5)$$

Pětúhelník $MECDF$ vznikne sjednocením obdélníku $ECDF$ a rovnoramenného trojúhelníku MEF . Jeho obsah P je tedy vzhledem ke (4) a (5)

$$P = a \cdot 2(b - r) + \frac{1}{2} a(2r - b) = \frac{a}{2} (3b - 2r). \quad (6)$$

Po dosazení za r ze vzorce (2) do (6) dostaneme po úpravě

$$P = ab - \frac{a^3}{8b}. \quad (7)$$

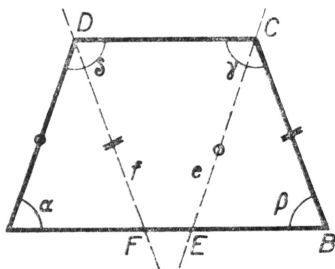
Odpověď. Poloměr r hledané kružnice je dán vzorcem (2) a obsah pětúhelníku vzorcem (7). Úloha má řešení jen pro

$$b > \frac{1}{2} a.$$

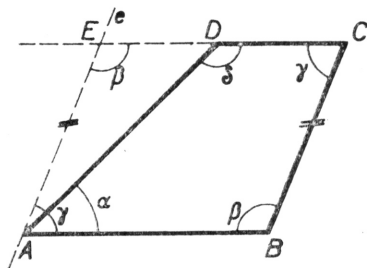
III. Důkazové úlohy

22. Sestrojte libovolný lichoběžník $ABCD$ tak, že $AB \parallel CD$, $AB > CD$.

Dokažte, že součet úhlů lichoběžníka při základně CD je větší než součet úhlů při základně AB .



Obr. 47



Obr. 48

Řešení. Úhly lichoběžníka $ABCD$ (viz obr. 47) při vrcholech A, B, C, D označme po řadě $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Z pomocného obrázku 47 se zdá, že tvrzení úlohy je zřejmé, neboť oba úhly při základně AB jsou ostré a při základně CD jsou oba úhly tupé. Avšak obr. 48 ukazuje, že tomu tak vždy nemusí být. Důkaz provedeme pro každý případ zvlášť.

a) Bodem C (obr. 47) vedme rovnoběžku e se stranou AD . Protože $AB \parallel DC$, $AB > DC$, protne přímka e úsečku AB

ve vnitřním bodě E tak, že $AE = DC$. Čtyřúhelník $AECD$ je tedy rovnoběžník, v němž $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DCE = \alpha$. Avšak podle konstrukce je úhel $\sphericalangle DCE$ částí úhlu $\sphericalangle DCB$, a platí tedy

$$\alpha < \gamma. \quad (1)$$

Pomocí přímky $f \parallel BC$ bodem D obdobně dokážeme, že

$$\beta < \delta. \quad (2)$$

Je tedy zřejmé součet velikostí úhlů na levých stranách nerovností (1) a (2) menší než součet velikostí úhlů na pravých stranách, tj.

$$\alpha + \beta < \gamma + \delta,$$

což jsme měli dokázat.

b) Také na obr. 48 vytvoříme přímkou $e \parallel BC$ vedenou bodem A , přímkou BC a přímkami $AB \parallel DC$ rovnoběžník $ABCE$. V tomto rovnoběžníku zřejmě platí

$$\sphericalangle AEC = \beta.$$

Protože $\sphericalangle ADC = \delta$ je vnějším úhlem trojúhelníka ADE , je

$$\beta < \delta. \quad (3)$$

Zároveň v rovnoběžníku $ABCE$ je

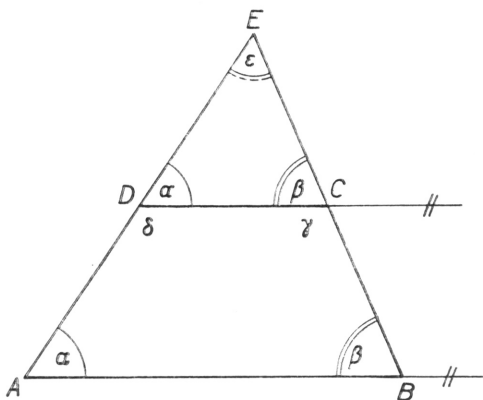
$$\sphericalangle EAB = \sphericalangle ECB = \gamma,$$

a protože $\alpha < \sphericalangle EAB$, dostáváme

$$\alpha < \gamma. \quad (4)$$

Nerovnosti (3) a (4) obdobně jako v případě a) vedou k dokazovanému vztahu

$$\alpha + \beta < \gamma + \delta.$$



Obr. 49

Jiné řešení. Lichoběžník $ABCD$ doplníme na trojúhelník ABE (viz obr. 49). Úhel při vrcholu E označíme ε . (V další úvaze nezáleží na tom, zda lichoběžník $ABCD$ má tvar jako na obr. 47 nebo na obr. 48.)

Protože přímky AB a CD jsou rovnoběžné, má podle věty o rovnoběžkách proťatých příčkou AD , popř. BC , trojúhelník

DCE při vrcholu D úhel α , při vrcholu C úhel β . V tomto trojúhelníku pro součet velikostí vnitřních úhlů platí $\alpha + \beta + \varepsilon = 180^\circ$ čili

$$\alpha + \beta < 180^\circ. \quad (1)$$

Úhly γ a δ jsou k úhlům α , β trojúhelníka DCE vedlejší, a tedy platí

$$\alpha + \delta = 180^\circ,$$

$$\beta + \gamma = 180^\circ.$$

Sečteme-li tyto nerovnosti, dostaneme známou rovnost pro součet velikostí úhlů v lichoběžníku $ABCD$:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$

Protože podle (1) je $\alpha + \beta < 180^\circ$, musí platit

$$\gamma + \delta > 180^\circ. \quad (2)$$

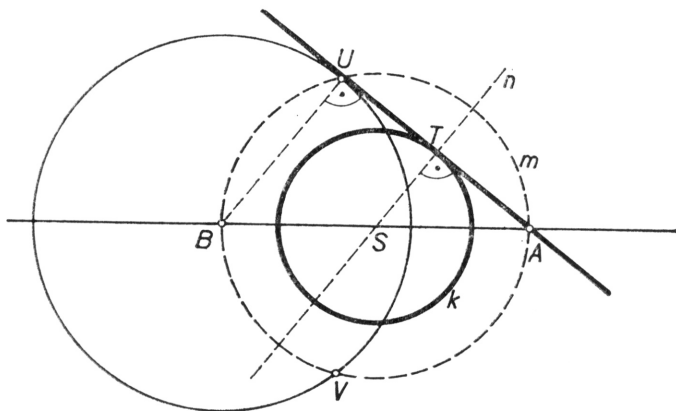
Porovnáním (1) a (2) dostaneme dokazovaný vztah

$$\alpha + \beta < \gamma + \delta.$$

23. Je dána úsečka AB . Kolem jejího středu S je opsána kružnice k s poloměrem $r < SA$. Dále jsou sestrojeny body U , V tak, aby platilo

$$BU = BV = 2r, SU = SV = SA.$$

Dokažte, že přímky AU , AV jsou tečnami kružnice k .



Obr. 50

Řešení (obr. 50). Jak poznáme, že přímka je tečnou kružnice? Např. podle toho, že tato přímka má od středu kružnice vzdálenost rovnou poloměru kružnice. Ze souměrnosti celého obrázku podle přímky AB vyplývá, že stačí vyšetřit vzdálenost přímky AU od bodu S .

Protože bod U leží na kružnici $m = (S; SA)$, je podle
Thaletovy věty

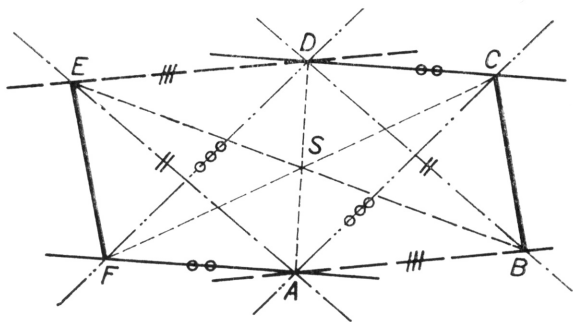
$$\angle BUA = 90^\circ. \quad (1)$$

Sestrojíme-li bodem S kolmici n k přímce AU , je $n \parallel BU$; patu této kolmice označme T . Protože $SA = SB$, $BU \parallel ST$, je úsečka ST střední příčkou v trojúhelníku AUB a platí

$$ST = \frac{1}{2} BU = r. \quad (2)$$

Dále platí $ST \perp AU$ vzhledem ke vztahu (1) a k tomu, že $ST \parallel BU$; proto přímka AU má vzdálenost r od středu S kružnice k , a je tedy její tečnou.

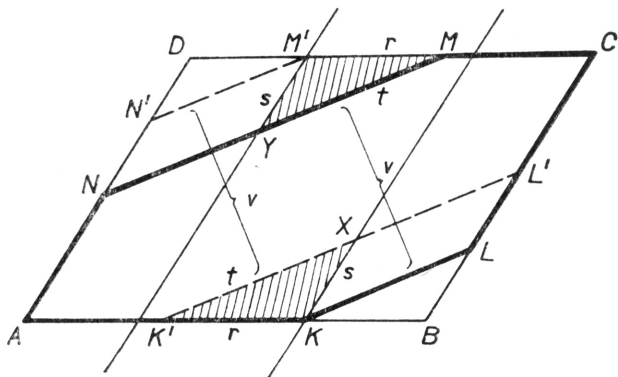
24. Jsou dány body A, B, C, D , z nichž žádné tři neleží v přímce. Sestrojte bod E tak, aby bylo $AE \parallel BD$, $DE \parallel AB$, a bod F tak, aby bylo $AF \parallel CD$, $DF \parallel AC$. Dokažte, že $EF = BC$.



Obr. 51

Řešení. Obrazec $ABDE$ je rovnoběžník, neboť body A, B, D neleží v přímce. Průsečík jeho úhlopříček označme S (obr. 51). Pak $AS = DS$, $BS = ES$. Obrazec $ACDF$ je rovněž rovnoběžník, neboť ani body A, C, D neleží v přímce. Jeho úhlopříčky se rovněž protínají v bodě S , neboť úhlopříčka AD je oběma rovnoběžníkům společná; proto také $CS = FS$. Z podmínek $BS = ES$, $CS = FS$ plyne $EF = BC$, neboť body B, E a C, F tvoří dvojice bodů souměrně sdružených podle středu S .

25. Je dán rovnoběžník $ABCD$. Uvnitř stran AB, BC, CD, DA zvolme po řadě body K, L, M, N tak, aby $KL \parallel MN$. Uvnitř týchž stran zvolme další body K', L', M', N' tak, aby $K'L' \parallel M'N' \parallel KL$ a aby vzdálenost rovnoběžek $K'L', M'N'$ byla táž jako vzdálenost rovnoběžek KL, MN . Dokažte, že šestiúhelníky $AKLCMN$ a $AK'L'CM'N'$ mají týž obvod.



Obr. 52

Řešení (obr. 52). Předpokládejme, že bod K' leží uvnitř úsečky AK (kdyby tomu tak nebylo, zaměníme označení bodů K, L, M, N a K', L', M', N'). Pak bod M' leží uvnitř úsečky DM a $KK' = MM'$. Vedme body K, M' rovnoběžky se stranou BC a označme po řadě X, Y jejich průsečíky s přímkami $K'L', MN$. Zřejmě platí $\triangle K'KX \cong \triangle MM'Y$. Označme $d(KK') = d(MM') = r, d(KX) = d(M'Y) = s, d(K'X) = d(MY) = t$. Potom (také vzhledem k vlastnostem stran pomocně vzniklých rovnoběžníků) dostáváme:

$$d(AK') = d(AK) - r;$$

$$d(K'L') = d(KL) + t;$$

$$d(L'C) = d(LC) - s;$$

$$d(CM') = d(CM) + r;$$

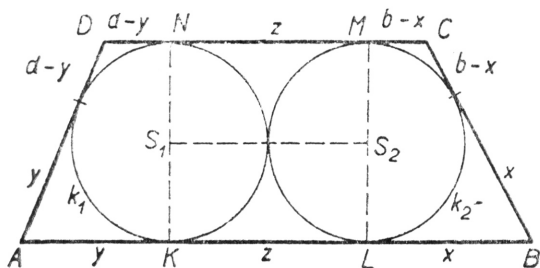
$$d(M'N') = d(MN) - t;$$

$$d(N'A) = d(NA) + s;$$

sečteme-li tyto rovnosti, dostaneme vztah, z něhož pro vyšetřované úsečky vyplývá:

$$\begin{aligned} AK' + K'L' + L'C + CM' + M'N' + N'A &= \\ &= AK + KL + LC + CM + MN + NA, \end{aligned}$$

což znamená, že obvody obou šestiúhelníků jsou si rovny.



Obr. 53

26. Do lichoběžníka $ABCD$ jsou vepsány kružnice k_1 , k_2 , které se dotýkají stran AB , CD a AD , popř. AB , BC a CD (viz obr. 53). O délkách stran lichoběžníka platí

$$a + c > b + d.$$

Dokažte větu: Má-li výška lichoběžníku délku $\frac{1}{2}(a + c - b - d)$, potom mají kružnice k_1 , k_2 vnější dotyk.

Řešení. Body a délky úseček označme podle obrázku. (Platí, že úsečky ohraničené daným bodem a dotykovým bodem na tečnách vedených z bodu ke kružnici mají rovné délky.) Potom $KLMN$ je pravoúhelník. Dále platí

$$a = x + y + z, c = b + d - x - y + z.$$

Sečtením obou rovností dostaneme

$$a + c = b + d + 2z$$

$$z = \frac{1}{2} (a + c - b - d).$$

Pravoúhelník $KLMN$ je tedy čtverec, délka středné S_1S_2 je rovna součtu poloměrů kružnic k_1 , k_2 , a obě kružnice mají tedy vnější dotyk.

27. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC o straně délky a a dále úsečka délky q . Střed kružnice opsané tomuto trojúhelníku označme O .

Na prodloužení úsečky AB za bod B sestrojte bod X tak, aby platilo $d(BX) = q$. Na prodloužení úsečky BC za bod C sestrojte bod Y tak, aby platilo $d(CY) = q$. Na prodloužení úsečky CA za bod A sestrojte bod Z tak, aby platilo $d(AZ) = q$.

Dokažte: a) Trojúhelník YXZ je také rovnostranný.

b) Trojúhelníku XYZ lze opsat kružnici se středem v bodě O .

Řešení. a) Vzhledem ke konstrukci bodů X , Y , Z (obr. 54) je jednak

$$d(BX) = d(CY) = d(AZ) = q, \quad (1)$$

jednak

$$d(AX) = d(BY) = d(CZ) = a + q. \quad (2)$$

Protože úhly $\sphericalangle XBY$, $\sphericalangle YCZ$ a $\sphericalangle ZAX$ jsou vedlejšími k vnitřním úhlům rovnostranného trojúhelníka ABC , mají

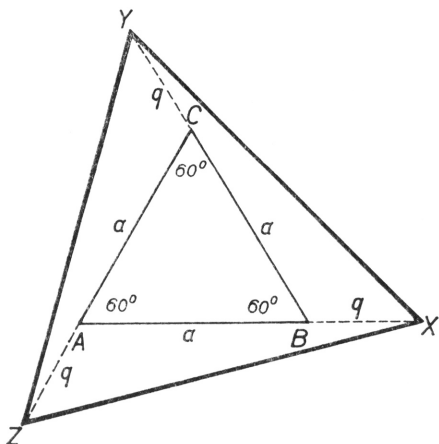
velikost 120° , a jsou tedy navzájem shodné. Proto vzhledem k (1) a (2) platí podle věty *sss*

$$\triangle XBY \cong \triangle YCZ \cong \triangle ZAX$$

a rovněž

$$XY \cong YZ \cong ZX,$$

takže trojúhelník XYZ je rovnostranný.

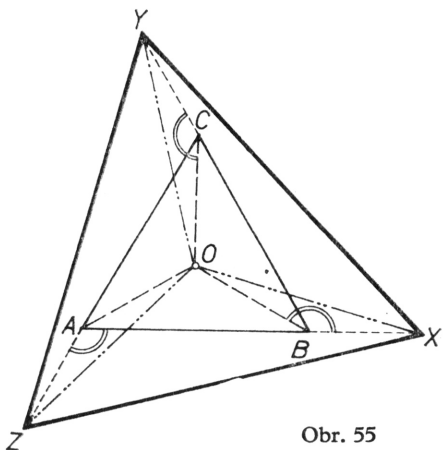


Obr. 54

b) Dokážeme-li, že

$$OX \cong OY \cong OZ, \quad (3)$$

je zřejmé, že trojúhelníku XYZ lze opsat kružnici se středem O a poloměrem OX .



Obr. 55

Na obr. 55 jsou vyznačeny úsečky OX , OY , OZ .

Podle konstrukce platí (1) a vzhledem k tomu, že bod O je středem kružnice opsané trojúhelníku ABC , je

$$OB \cong OC \cong OA. \quad (4)$$

Polopřímky BO , CO , AO v rovnostranném trojúhelníku jsou i osami vnitřních úhlů trojúhelníka, neboť středy opsané a vepsané kružnice splynou. Proto platí pro velikosti úhlů

$$\sphericalangle OBY = \sphericalangle OCZ = \sphericalangle OAX = 30^\circ.$$

V trojúhelníku OBX je zřejmé

$$\sphericalangle OBX = \sphericalangle OBY + \sphericalangle YBX = 30^\circ + 120^\circ = 150^\circ.$$

Obdobně zjistíme, že i úhly $\sphericalangle OCY$ a $\sphericalangle OAZ$ mají velikost 150° . Proto vzhledem k (1) a (4) platí

$$\triangle OBX \cong \triangle OCY \cong \triangle OAZ \text{ (sus)}$$

a rovněž

$$OX \cong OY \cong OZ,$$

takže trojúhelníku XYZ lze opsat kružnici (O ; OX).

28. Narýsujte libovolný pravoúhlý trojúhelník ABC s pravoúhlým úhlem při vrcholu C . Na prodloužené straně AC za bod C sestrojte bod B_1 tak, aby bylo $CB_1 \cong CB$. Na prodloužení strany BC za bod C určete bod A_1 tak, aby bylo $CA_1 \cong CA$.

a) Dokažte, že trojúhelníky ABC a A_1B_1C jsou shodné.

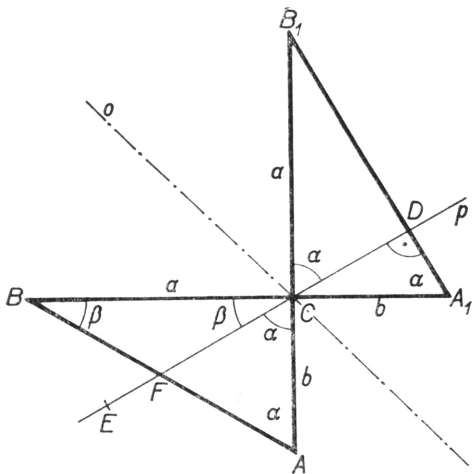
b) Bodem C sestrojte přímku p kolmou k přímce A_1B_1 ; její patu označte D . Dokažte, že přímka p protne úsečku AB v jejím středu.

Řešení. a) Podle konstrukce (obr. 56) platí $BC \cong B_1C$, $\sphericalangle BCA \cong \sphericalangle B_1CA_1$, $AC \cong A_1C$, a tedy

$$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C \text{ (sus),}$$

příčměž pravé úhly $\sphericalangle BCA$ a $\sphericalangle B_1CA_1$ jsou vrcholové.

b) Shodné úhly při vrcholech A, A_1 označíme α , při vrcholech B, B_1 je označíme β . Protože oba úhly α, β jsou ostré, padne pata D kolmice p dovnitř úsečky A_1B_1 ; polopřímka CD leží tedy uvnitř úhlu $\sphericalangle B_1CA_1$. Polopřímka CE opačná k polopřímce CD prochází vnitřkem úhlu $\sphericalangle BCA$, který je vrcholový k $\sphericalangle B_1CA_1$. Průsečík polopřímky CE s úsečkou AB nazveme F .



Obr. 56

Jak dokážeme, že F je střed úsečky AB , tj. střed přepony AB pravoúhlého trojúhelníka ABC ? Nastane-li to, je F středem kružnice opsané $\triangle ABC$, tj. $FA \cong FB \cong FC$. Obráceně, je-li $FA \cong FB \cong FC$, je bod F středem kružnice opsané trojúhelní-

ku ABC . Musíme tedy dokázat, že trojúhelníky ACF , BCF jsou rovnoramenné s hlavním vrcholem F . Důkaz shodnosti stran převedeme na důkaz shodnosti úhlů.

V pravoúhlém trojúhelníku CDB_1 má druhý ostrý úhel $\sphericalangle B_1CD$ zřejmě velikost α ; pak úhel k němu vrcholový $\sphericalangle ACF$ je rovněž velikosti α . Protože trojúhelník ACF má dva shodné úhly velikosti α , je rovnoramenný se základnou AC a platí

$$FC \cong FA. \quad (1)$$

Obdobně dokážeme, že trojúhelník CBF je rovnoramenný se základnou CB , pro jehož ramena platí

$$BF \cong FC. \quad (2)$$

Spojením rovnosti (2) a (1) dostaneme konečně

$$BF \cong FA,$$

a protože polopřímky FA , FB jsou opačné, je bod F středem úsečky AB , což jsme měli dokázat.

Poznámka 1. Ze vztahů (1) a (2) rovněž vyplývá, že »střed přepony pravoúhlého trojúhelníka je středem kružnice tomuto trojúhelníku opsané«. Protože jsme v úloze vyšli od zcela libovolného pravoúhlého trojúhelníka, provedli jsme v bodě b) také vlastně důkaz věty uvedené v uvozovkách pro libovolný pravoúhlý trojúhelník.

Poznámka 2. Vraťme se nyní k obrázku 56. Po konstrukci trojúhelníka A_1B_1C sestrojíme osu o úsečky AA_1 . Protože $CA_1 \cong CA$, prochází o bodem C a obsahuje osy úhlů ACA_1 i BCB_1 . Dále je podle konstrukce $CB_1 \cong CB$, takže i body B, B_1 jsou souměrně sdružené podle osy o . Trojúhelníky ABC a A_1B_1C jsou tedy souměrně sdružené podle osy o , a proto jsou i shodné. Tím jsme vlastně úlohu a) vyřešili jiným způsobem.

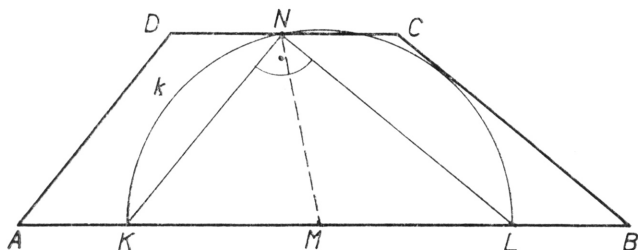
29. Je dán lichoběžník $ABCD$, v němž $AB > CD$. Označme M a N po řadě středy základů AB a CD .

Dokažte: Je-li

$$MN = \frac{1}{2} (AB - CD),$$

pak

$$\sphericalangle BAD + \sphericalangle ABC = 90^\circ.$$



Obr. 57

Řešení. Bodem N vedme (obr. 57) rovnoběžky s přímkami AD a BC , jejich průsečíky s přímkou AB označme po řadě K a L . Z konstrukce bodů K a L plyne, že $AK \cong BL \cong \frac{1}{2} CD$. Bod M je tedy středem úsečky $KL = AB - CD$, takže z předpokladu plyne

$$KM \cong ML \cong MN.$$

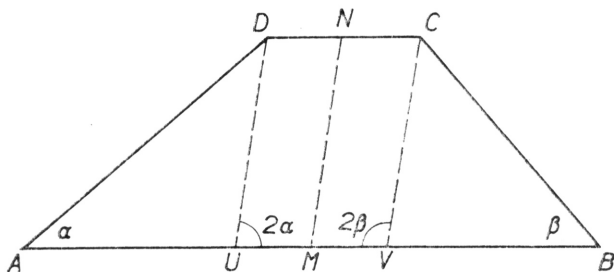
Bod N leží tedy na půlkružnici nad průměrem KL , takže

$$\sphericalangle KNL = 90^\circ,$$

a tedy

$$\sphericalangle NKL + \sphericalangle KLN = 90^\circ.$$

Protože $\sphericalangle NKL \cong \sphericalangle DAB$ a $\sphericalangle NLK \cong \sphericalangle CBA$, plyne dokazovaná rovnost z poslední rovnosti.



Obr. 58

Jiné řešení. Body C a D vedeme rovnoběžky s přímkou MN . Průsečíky s přímkou AB označme U a V (obr. 58). Platí

$$UM \cong MV \cong DN \cong NC \cong \frac{1}{2} CD < \frac{1}{2} AB,$$

takže U a V jsou vnitřní body úsečky AB . Z konstrukce bodů U a V plyne

$$DU \cong CV = \frac{1}{2} (AB - CD) \quad (1)$$

a

$$AU \cong AM - UM \cong \frac{1}{2} (AB - CD), \quad (2)$$

$$BV \cong BM - VM \cong \frac{1}{2} (AB - CD).$$

Trojúhelníky AUD a BVC jsou podle (1) a (2) rovnoramenné s hlavními vrcholy U a V . Z vlastnosti vnějšího úhlu trojúhelníka vyplývá:

$$\sphericalangle UAD \cong \frac{1}{2} \sphericalangle MUD \quad (3)$$

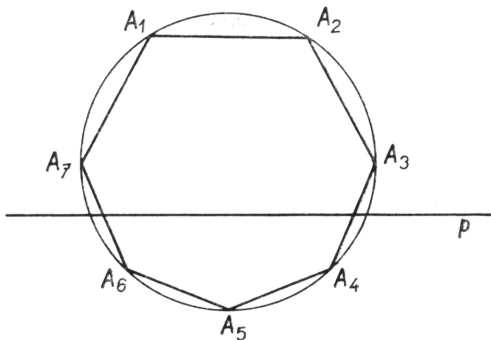
$$\sphericalangle VBC \cong \frac{1}{2} \sphericalangle MVC$$

Podle konstrukce bodů U a V je $UD \parallel VC$, takže

$$\sphericalangle MUD + \sphericalangle MVC = 180^\circ. \quad (4)$$

Zřejmě $\sphericalangle UAD \cong \sphericalangle BAD$ a $\sphericalangle VBC \cong \sphericalangle ABC$, takže z (3) a (4) dostáváme dokazovanou rovnost.

30. Do kružnice je vepsán sedmiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Přímka p prochází středy stran A_3A_4 , A_6A_7 . Kolik úhlopříček daného sedmiúhelníka přímka p protíná?



Obr. 59

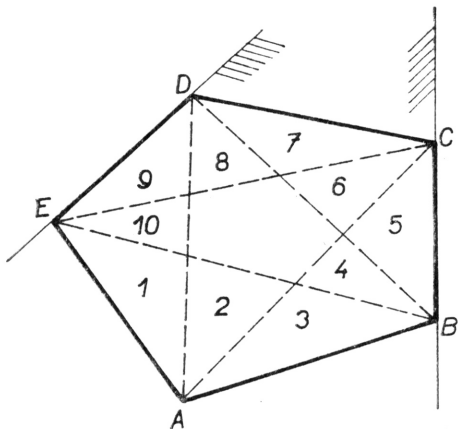
Řešení. Přímka p protíná úhlopříčku daného sedmiúhelníka, právě když její krajní body leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou p . V jedné z těchto polorovin (obr. 59) leží body A_7, A_1, A_2, A_3 a ve druhé A_6, A_5, A_4 . Počet úseček, jejichž jeden krajní bod je A_7 a druhý z množiny $\{A_6, A_5, A_4\}$, se zřejmě rovná třem. Obdobně je tomu pro body A_1, A_2, A_3 . Tedy úseček, jejichž jeden krajní bod je z množiny $\{A_7, A_1, A_2,$

$A_3\}$ a druhý z množiny $\{A_6, A_5, A_4\}$, je $4 \cdot 3 = 12$. Ovšem mezi těmito dvanácti úsečkami jsou též strany A_6A_7 a A_3A_4 daného sedmiúhelníka. Zbývajících deset je úhlopříčkami. Tedy přímka p protíná 10 úhlopříček daného sedmiúhelníka.

31. Je dán konvexní*) pětiúhelník $ABCDE$.

a) Dokažte, že žádné jeho tři úhlopříčky nemohou procházet týmž bodem.

b) Narýsujte tento pětiúhelník a všechny jeho úhlopříčky. Potom ho vystříhněte a rozstříhejte podél jeho úhlopříček. Zjistěte, kolik částí vzniklo a jaké jsou to útvary.

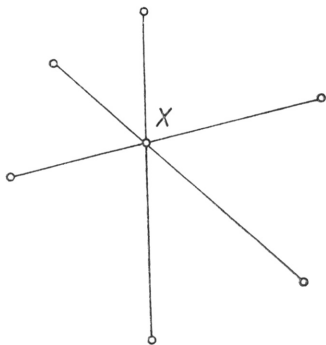


Obr. 60

*) Pro naši úvahu je účelná tato vlastnost konvexního mnohoúhelníka v rovině: Zvolme jeho libovolnou stranu a vedme jí přímku, která rozdělí rovinu na dvě opačné poloroviny. Potom mnohoúhelník (až na zvolenou stranu) leží v právě jedné z těchto polorovin.

Příklad: Pětiúhelník $ABCDE$ leží (až na stranu ED) celý v polorovině EDB ; strana ED , ale jenom ona, patří též polorovině opačné (obr. 60).

Řešení. a) Pětiúhelník má celkem 5 vrcholů; z každého z nich vycházejí právě dvě strany a dvě úhlopříčky (např. na obr. 60 z vrcholu A dvě strany AB , AE a dvě úhlopříčky AC , AD - jiné možnosti nejsou). Kdyby tři úhlopříčky procházely týmž bodem, nemohl by to tedy být vrchol pětiúhelníka.



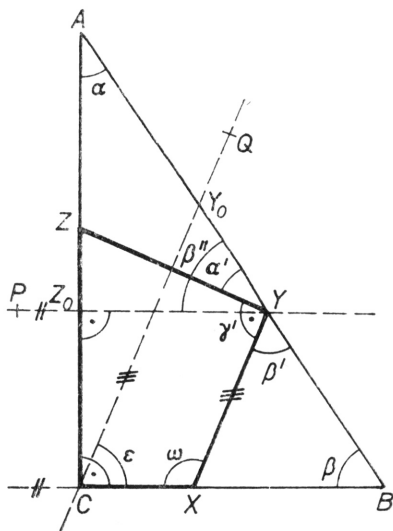
Obr. 61

Další úvahu provedeme formou tzv. »nepřímého důkazu«. Při důkazu tohoto typu obvykle vylučujeme platnost jisté vlastnosti nebo situace tak, že nejprve její platnost pomocně předpokládáme, a pak na základě dalších správně vedených úvah dojdeme k neplatnému závěru. Z toho soudíme, že předpokládaná vlastnost neplatí. Ukážeme si to konkrétně v naší úloze:

Předpokládejme, že tři navzájem různé úhlopříčky se protínají v bodě X , který je vnitřním pro každou z nich. Na každé z úhlopříček leží dva vrcholy. Žádný z těchto vrcholů nemůže být společný dvěma různým úhlopříčkám; takové dvě úhlopříčky by měly společný vrchol a průsečík, a proto by splynuly.

Existuje tedy celkem 6 různých vrcholů (obr. 61), což však není možné, neboť pětiúhelník má jen 5 vrcholů. (Někdy říkáme, že jsme došli ke »spor«.) Neplatí tedy náš předpoklad, že tři navzájem různé úhlopříčky procházejí bodem X , který je vnitřním pro každou z nich. Tím je důkaz a) zcela proveden.

b) Rozstříháním vypuklého pětiúhelníka vznikne 10 trojúhelníků a jeden pětiúhelník.



Obr. 62

32. Načrtněte pravoúhlý trojúhelník ABC tak, aby odvěsna BC byla menší než odvěsna CA . Uvnitř úsečky BC zvolte bod X a uvnitř úsečky AB najděte bod Y tak, že platí $XY \cong XB$. Bodem Y vedte kolmici k přímce XY ; její průsečík s přímkou AC označte Z .

Dokažte, že obvod čtyřúhelníka $CXYZ$ je stále týž, ať zvolíme bod X kdekoli uvnitř úsečky BC .

Vypočtete tento obvod pomocí stran trojúhelníka ABC .

Řešení (obr. 62). Označme $d(BC) = a$, $d(CA) = b$; podle textu úlohy je

$$a < b. \quad (1)$$

Bod X jsme podle textu úlohy zvolili uvnitř úsečky BC . Myslíme si, že sestrojení bodů X , Z lze provést tak, jak je naznačeno v obrázku 62, tj. že je

$$XY \cong XB, \quad (2)$$

přičemž bod Y leží uvnitř úsečky BA , a dále, že je

$$YZ \perp XY,$$

přičemž bod Z padne dovnitř úsečky CA . Podle (2) je trojúhelník XYB rovnoramenný a úhly β , β' při jeho základně BY jsou shodné; je tedy

$$\beta' = \beta. \quad (3)$$

Dále podle konstrukce kolmice k je

$$\gamma' = 90^\circ. \quad (4)$$

Vypočítejme nyní velikost úhlu α' . Víme, že v daném trojúhelníku ABC je $\gamma = 90^\circ$, a tedy

$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad (5)$$

(součet velikostí ostrých úhlů v pravoúhlém trojúhelníku je 90°). Je tudíž

$$\alpha' = 180^\circ - \beta' - \gamma'$$

neboli [dosazujeme sem ze vztahů (3), (4)]

$$\alpha' = 180^\circ - \beta - 90^\circ,$$

a tedy

$$\alpha' = 90^\circ - \beta.$$

Ze vztahu (5) plyne, že $\alpha = 90^\circ - \beta$; odtud porovnáním obou posledních vztahů dostáváme

$$\alpha' = \alpha. \quad (6)$$

Z této rovnosti (podle známé věty o úhlech a protějších stranách trojúhelníka) plyne pro trojúhelník AYZ , že je

$$ZY \cong ZA. \quad (7)$$

Nyní vyjádříme obvod p čtyřúhelníka $CXYZ$; je

$$p = (d(CX) + d(XY)) + (d(CZ) + d(ZY)).$$

Dosaďme sem za XY ze vztahu (2) a za ZY ze vztahu (7); dostaneme

$$p = (d(CX) + d(XB)) + (d(CZ) + d(ZA)). \quad (8)$$

Podle obr. 62 však platí

$$d(CX) + d(XB) = d(CB) = a,$$

$$d(CZ) + d(ZA) = d(CA) = b.$$

Dosaďme tyto výsledky do (8); dostaneme

$$p = a + b.$$

Odpověď. Obvod čtyřúhelníka $CXYZ$ je roven součtu délek odvěsen daného pravoúhlého trojúhelníka ABC .

Než však ukončíme řešení, musíme ještě dokázat, že při volbě bodu X uvnitř úsečky CB (viz obr. 62)

[1] bod Y padne dovnitř úsečky AB ,

[2] bod Z padne dovnitř úsečky CA .

Důkaz (viz označení z obrázku 62). V polorovině BCA sestrojíme polopřímku $CQ \parallel XY$. Vnější úhel ω rovnoramenné-

ho trojúhelníka XY je roven $\beta + \beta'$, a protože je $\beta' = \beta$ [viz (3)], platí

$$\omega = 2\beta. \quad (9)$$

O přilehlých úhlech ε , ω mezi rovnoběžkami CQ , YX platí $\varepsilon + \omega = 180^\circ$; dosadíme sem ze vztahu (9). Dostaneme $\varepsilon + 2\beta = 180^\circ$; proto je

$$\varepsilon = 2\alpha,$$

neboť $2(\alpha + \beta) = 2 \cdot 90^\circ$ [viz vztah (5)]. Ale $\alpha < 45^\circ$, $\beta > 45^\circ$, neboť v daném trojúhelníku ABC je $a < b$, $\gamma = 90^\circ$; je tedy $\varepsilon = 2\alpha < 90^\circ$ a polopřímka CQ leží v pravém úhlu γ . Proto společný bod Y_0 polopřímky CQ a úsečky AB padne dovnitř této úsečky. Leží tedy celá přímka $XY \parallel CY_0$ uvnitř poloroviny CY_0B , a bod Y padne tudíž vždy dovnitř úsečky Y_0B , a tím také dovnitř úsečky AB .

Nyní sestrojme přímku $YP \parallel BC$; je tedy $CA \perp YP$. Protože přímka YP leží uvnitř poloroviny BCA a protože bod Y je vnitřním bodem úsečky AB , padne společný bod Z_0 kolmic CA , YP dovnitř úsečky CA . V trojúhelníku AYZ_0 je úhel $\angle Z_0 = 90^\circ$ a úhel $\beta'' = 90^\circ - \alpha$, tj. $\beta'' = \beta$. Protože je $\alpha < \beta$, je podle (6) též $\alpha' < \beta''$ a polopřímka YZ leží v úhlu β'' , a tudíž bod Z padne dovnitř úsečky Z_0A ; tato úsečka však je částí úsečky CA , a proto bod Z leží též uvnitř úsečky CA , což jsme měli dokázat.

Tím je celý důkaz proveden.

IV. Úlohy s výpočty

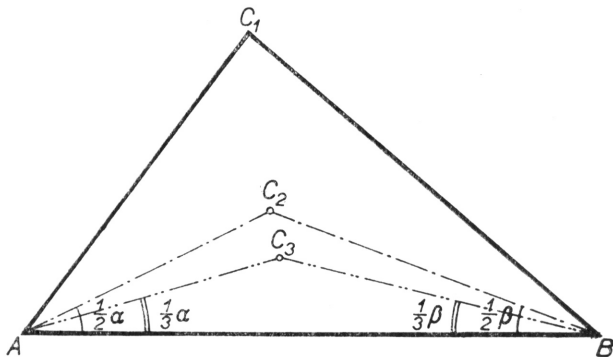
33. V trojúhelníku ABC_1 označme úhly $\sphericalangle C_1AB = \alpha$, $\sphericalangle ABC_1 = \beta$, $\sphericalangle BC_1A = \gamma$.

Uvnitř trojúhelníka ABC_1 leží bod C_n takový, že platí

$$\sphericalangle C_nAB = \frac{1}{n} \cdot \alpha, \quad \sphericalangle ABC_n = \frac{1}{n} \cdot \beta,$$

kde n je dané přirozené číslo větší než 1.

Vyjádřete velikost úhlu $\sphericalangle AC_nB$ pomocí úhlu γ .



Obr. 63

Řešení. Na obr. 63 jsou trojúhelníky ABC_1 , ABC_2 , ABC_3 .
Výpočet úhlu $\sphericalangle AC_2B$ je jednoduchý:

$$\sphericalangle AC_2B = 180^\circ - \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2} \beta = 180^\circ - \frac{1}{2} (\alpha + \beta).$$

Protože platí $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, je

$$\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma \quad (1)$$

čili

$$\sphericalangle AC_2B = 180^\circ - \frac{1}{2} (180^\circ - \gamma) = 90^\circ + \frac{1}{2} \gamma.$$

Obdobně bychom vypočítali velikost úhlu $\sphericalangle AC_3B = \gamma_3$
a obecně pak úhlu $\sphericalangle AC_nB = \gamma_n$:

$$\gamma_n = 180^\circ - \frac{\alpha}{n} - \frac{\beta}{n} = 180^\circ - \frac{1}{n} (\alpha + \beta) \quad (2)$$

Dosadíme-li z (1) do (2), dostaneme

$$\gamma_n = 180^\circ - \frac{1}{n} (180^\circ - \gamma)$$

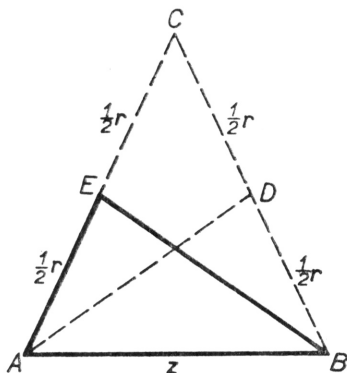
nebo po další úpravě

$$\gamma_n = 180^\circ \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \gamma.$$

Toto vyjádření velikosti úhlu γ_n závisí na přirozeném čísle n , velikosti úhlu γ a konstantě 180° , jak vyžadoval text úlohy.

34. Rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB má obvod 50 cm. Označte D střed strany BC a E střed strany AC . Obvod trojúhelníka ABE je o 8 cm větší než obvod trojúhelníka ACD .

Vypočítejte velikosti stran trojúhelníka ABC .



Obr. 64

Řešení (obr. 64). Označme $z = d(AB)$, $r = d(CA) = d(CB)$ v rovnoramenném trojúhelníku ABC se základnou AB . Protože body E, D jsou středy ramen, platí podle věty *sus* zřejmě

$$\triangle AEB \cong BDA. \quad (1)$$

Podle podmínek úlohy je

$$d(AB) + d(BE) + d(AE) - 8 \text{ cm} = d(AD) + d(CD) + d(AC). \quad (2)$$

Protože podle (1) je $AD \cong BE$, dostaneme po dosazení do (2) rovnici

$$z + \frac{1}{2} r - 8 \text{ cm} = \frac{1}{2} r + r$$

čili

$$z - r = 8 \text{ cm}. \quad (3)$$

Z podmínky pro obvod trojúhelníka ABC plyne druhá rovnice pro neznámé z, r :

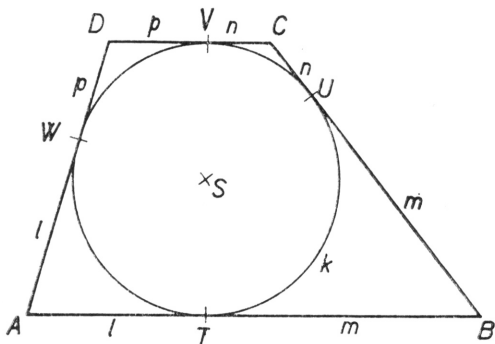
$$z + 2r = 50 \text{ cm} \quad (4)$$

Řešením soustavy (3), (4) dostaneme $r = 14 \text{ cm}$, $z = 22 \text{ cm}$, tj. $d(AB) = 22 \text{ cm}$, $d(CA) = d(CB) = 14 \text{ cm}$.

Zkouška. a) $d(AB) + d(CA) + d(CB) = 22 \text{ cm} + 2 \cdot 14 \text{ cm} = 50 \text{ cm}$, což je podmínka úlohy.

b) Vypočítáme $d(AB) + d(BE) + d(AE) - (d(AC) + d(DC) + d(AD))$. Protože podle (1) je $AD \cong BE$, dostaneme $d(AB) + d(AE) - d(AC) - d(DC) = 22 \text{ cm} + 7 \text{ cm} - 14 \text{ cm} - 7 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$, jak žádá text úlohy.

35. Je dán lichoběžník $ABCD$, jehož střední příčka má délku 1 a jemuž lze vepsat kružnici. Vypočtete jeho obvod.



Obr. 65

Řešení (obr. 65). Kružnice k vepsaná lichoběžníku $ABCD$ se dotýká jeho stran AB , BC , CD , DA v bodech, které označíme po řadě T , U , V , W . Podle známé vlastnosti tečen vedených z bodu ke kružnici platí $AW \cong AT$, $BT \cong BU$, $CU \cong CV$, $DV \cong DW$. Délky těchto úsečků označíme l , m , n , p . Podíváme-li se pozorně na obr. 65, vidíme, že součet délek obou základů je

$$l + m + n + p \quad (1)$$

a že témuž číslu se rovná i součet délek obou ramen. Obvod lichoběžníka je tedy

$$2(l + m + n + p). \quad (2)$$

Nyní využijeme podmínky, že střední příčka má délku 1.

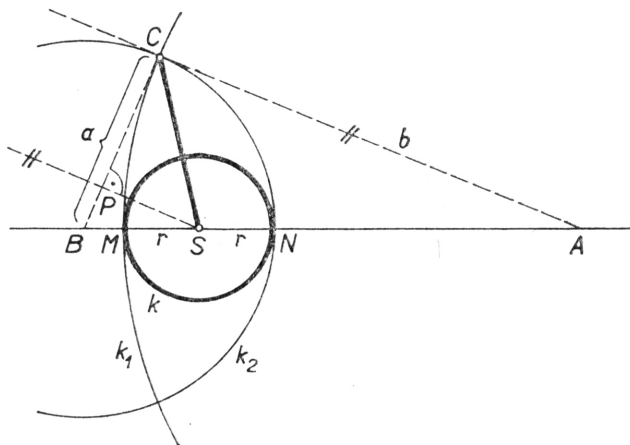
Délka střední příčky se rovná polovině součtu obou základů, tj. podle (1)

$$\frac{1}{2}(l + m + n + p) = 1.$$

Dosadíme-li do výrazu (2), dostáváme, že obvod daného lichoběžníka se rovná číslu 4.

36. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC o stranách délek $d(AC) = b = 12$ cm, $d(BC) = a = 5$ cm. Sestrojte kružnici $k = (S; r)$, která se dotýká uvnitř každé z kružnic $k_1 = (A; b)$, $k_2 = (B; a)$ a má střed na AB .

Vypočítejte poloměr r a vzdálenost CS .



Obr. 66

Řešení. Při rýsování obrázku využijeme toho, že úhel ACB je pravý; celá konstrukce je patrna z obr. 66. Dotykový bod kružnic k a k_1 označíme M . Kružnice k a k_2 mají dotykový bod N .

a) Nejprve vypočítáme délku přepony c v centimetrech:

$$\sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ (cm)}$$

Z polohy bodů na přímce AB vyplývá, že

$$c = d(BM) + d(MN) + d(NA)$$

čili

$$c = (a - 2r) + 2r + (b - 2r),$$

takže platí

$$c = a + b - 2r.$$

Proto dostaneme

$$2r = a + b - c = 5 \text{ cm} + 12 \text{ cm} - 13 \text{ cm} = 4 \text{ cm}.$$

Odpověď. Poloměr kružnice k je $r = 2 \text{ cm}$.

b) Úsečka CS je přeponou pravoúhlého trojúhelníka CSP , kde bod P je patou kolmice vedené bodem S na přímku CB . Trojúhelníky BSP a BAC jsou podle věty *uu* podobné; toho využijeme k určení délek odvěsen trojúhelníka CSP . Platí

$$\frac{d(BS)}{d(SP)} = \frac{d(BA)}{d(AC)}$$

čili

$$\frac{3 \text{ cm}}{d(SP)} = \frac{13 \text{ cm}}{12 \text{ cm}},$$

takže

$$d(SP) = \frac{36}{13} \text{ cm.} \quad (4)$$

Protože $CP = CB - PB$, vypočteme nejprve délku PB .
Platí

$$\frac{d(PB)}{d(BS)} = \frac{d(CB)}{d(BA)}$$

čili

$$\frac{d(PB)}{3 \text{ cm}} = \frac{5 \text{ cm}}{13 \text{ cm}},$$

takže

$$d(PB) = \frac{15}{13} \text{ cm}$$

a

$$d(CP) = 5 \text{ cm} - \frac{15}{13} \text{ cm} = \frac{50}{13} \text{ cm}. \quad (5)$$

Podle Pythagorovy věty pak dostaneme

$$\begin{aligned} d(CS) &= \sqrt{(d(CP))^2 + (d(SP))^2} \text{ cm} = \\ &= \sqrt{\frac{2\,500}{13^2} + \frac{1\,296}{13^2}} \text{ cm} = \\ &= \frac{1}{13} \sqrt{3\,796} \text{ cm} = \frac{1}{13} \cdot 61,61 \text{ cm} = 4,74 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Odpověď. Vzdálenost $CS \doteq 4,74 \text{ cm}$.

37. Obdélník $ABCD$ má rozměry $d(AB) = 6\frac{3}{5} \text{ cm}$, $d(BC) = 4\frac{2}{3} \text{ cm}$; označte F střed strany AB . Výpočtem řešte úlohu:

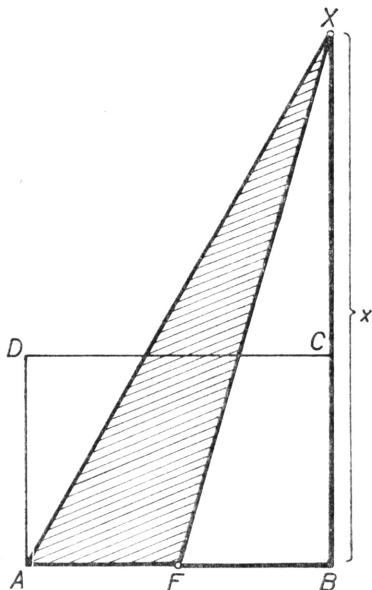
Na polopřímce BC určete takový bod X , aby obsah trojúhelníka AFX byl roven $\frac{5}{8}$ obsahu obdélníka $ABCD$. (Vypočtěte délku x úsečky BX .)

Řešení (obr. 67). Obsah P obdélníka $ABCD$ je

$$P = 6\frac{3}{5} \cdot 4\frac{2}{3} \text{ cm}^2.$$

$\frac{5}{8}$ obsahu P je

$$6 \frac{3}{5} \cdot 4 \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} \text{ cm}^2. \quad (1)$$



Obr. 67

Trojúhelník AFX má stranu AF délky

$$d(AF) = 6 \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \text{ cm} \quad (2)$$

a délku příslušné výšky v centimetrech označíme x ; obsah tohoto trojúhelníka je

$$\frac{1}{2} \cdot d(AF) \cdot x \text{ cm}^2.$$

Dosaďme sem za $d(AF)$ ze vztahu (2); dostaneme

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot x \text{ cm}^2.$$

Toto číslo má být rovno číslu (1); tím dostaneme rovnici (v cm^2)

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot x = \frac{5}{8} \cdot 6 \frac{3}{5} \cdot 4 \frac{2}{3}.$$

Znásobme tuto rovnici číslem převráceným k číslu $\frac{1}{2} \cdot 6 \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}$;

pak se na pravé straně zkrátí $6 \frac{3}{5}$ a dostaneme pro x v centimetrech

$$x = \frac{5}{8} \cdot 4 \frac{2}{3} \cdot 4 \text{ cm};$$

odtud postupně dostáváme

$$x = \frac{5}{2} \cdot \frac{14}{3} \text{ cm},$$

$$x = \frac{5}{1} \cdot \frac{7}{3} \text{ cm},$$

$$x = \frac{35}{3} \text{ cm},$$

$$x = 11 \frac{2}{3} \text{ cm}.$$

Odpověď. Délka úsečky BX je $11 \frac{2}{3}$ cm.

Zkouška. Obsah T trojúhelníka AFX je (v cm^2)

$$T = \frac{1}{2} \cdot 6 \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 11 \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 33 \cdot 1 \cdot 35}{2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1 \cdot 11 \cdot 1 \cdot 7}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{77}{4}.$$

Pro obsah P obdélníka $ABCD$ dostáváme (v cm^2)

$$P = 6 \frac{3}{5} \cdot 4 \frac{2}{3} = \frac{33}{5} \cdot \frac{14}{3} = \frac{154}{5}.$$

Vypočteme $\frac{5}{8}$ jeho obsahu

$$\frac{5}{8} P = \frac{154}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{77}{4},$$

a to je skutečně obsah T trojúhelníka AFX v cm^2 .

Poznámka. Promyslíte-li si text úlohy, uvážíte-li, které údaje jsou pro řešení úlohy podstatné, a nebudete-li hned dosazovat numerické údaje, zjednoduší se celý výpočet takto:

$$\text{Označme } d(AB) = a, d(AF) = \frac{1}{2}a, d(BC) = b, d(BX) = x.$$

Podle textu úlohy má platit

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a \cdot x = \frac{5}{8} a \cdot b.$$

Po výpočtu x dostaneme

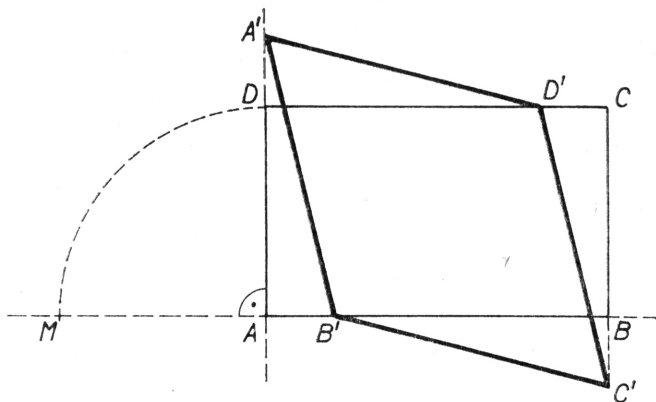
$$x = \frac{5}{2} b$$

a po dosazení za $b = 4 \frac{2}{3} \text{ cm} = \frac{14}{3} \text{ cm}$ (za a není třeba dosazovat) je

$$x = \frac{5}{2} \cdot \frac{14}{3} \text{ cm} = \frac{35}{3} \text{ cm} = 11 \frac{2}{3} \text{ cm}.$$

38. Je dán obdélník $ABCD$, jehož strany mají délky $d(AB) = a$, $d(BC) = b$, $a > b$. Na polopřímkách BA , CB , DC , AD sestrojte po řadě body B' , C' , D' , A' tak, aby platilo $AA' \cong BB' \cong CC' \cong DD'$ a aby $A'B'C'D'$ byl kosočtverec.

Vypočtěte nejprve délku úseku $d(AA') = x$, a pak kosočtverec sestrojte.



Obr. 68

Řešení. Budiž $A'B'C'D'$ kosočtverec (obr. 68). Označme $d(AA') = d(BB') = d(CC') = d(DD') = x$. Pak je $d(AB') = d(CD') = |a - x|$ (nevíme, zda je $a > x$ nebo $x > a$); obdobně je $d(BC') = d(DA') = |b - x|$. Podle Pythagorovy věty a z toho, že $A'B'C'D'$ je kosočtverec, je

$$\begin{aligned} (d(BB'))^2 + (d(BC'))^2 &= (d(B'C'))^2, \\ (d(CC'))^2 + (d(CD'))^2 &= (d(C'D'))^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Protože je $B'C' \cong C'D'$, plyne z (1)

$$(d(BB'))^2 + (d(BC'))^2 = (d(CC'))^2 + (d(CD'))^2,$$

protože je $d(BB') = d(CC') = x$, dostáváme

$$|b - x|^2 = |a - x|^2. \quad (2)$$

Základy druhých mocnin v rovnici (2) jsou absolutní hodnoty, tedy nezáporná čísla, a proto můžeme každou ze stran rovnice (2) odmocnit a dostaneme správnou rovnici

$$|a - x| = |b - x|. \quad (3)$$

Připustíme-li možnosti jednak $a > x$ nebo $a < x$, jednak $b > x$ nebo $b < x$, dostaneme po odstranění absolutních hodnot dvě rovnice

$$a - x = b - x, \quad (I)$$

$$a - x = x - b. \quad (II)$$

První rovnice je vyloučena, poněvadž je $a > b$. Z druhé rovnice plyne

$$x = \frac{1}{2} (a + b). \quad (4)$$

Obrácením postupu zjistíme, že $A'B'C'D'$ je při takto zvoleném x skutečně kosočtverec. Vzorec (4) zároveň ukazuje, že je

$$b < x < a,$$

tj. body C' , A' leží vně obdélníka, B' , D' na jeho stranách (viz obr. 68).

Konstrukce. Na polopřímce opačné k AB sestrojíme bod M tak, aby bylo $d(AM) = b$. Pak je $d(BM) = a + b$ a B' je středem úsečky BM , neboť je $d(BB') = \frac{1}{2} d(BM) = \frac{1}{2} (a + b)$. Další body A' , C' , D' snadno doplníme.

Poznámka. Předpokládáme-li, že na obr. 68 je znázorněno řešení úlohy, zjistíme, že

$$\triangle B'BC' \cong \triangle C'CD'$$

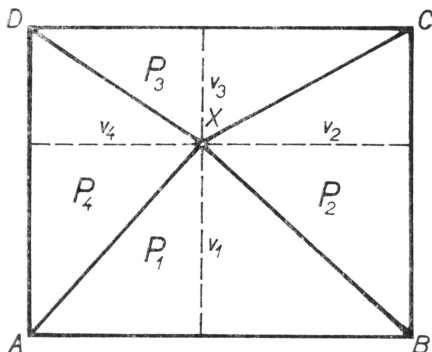
(podle věty *Ssu*, neboť oba trojúhelníky jsou pravoúhlé a platí $d(B'B) = d(C'C) = x$, $d(B'C') = d(C'D')$, kde $B'C' > B'B$). Proto je

$$BC' \cong CD',$$

tj. $|a - x| = |b - x|$ a obdobnou úvahou jako v uvedeném řešení zjistíme platnost vzorce (4).

39. Je dán obdélník $ABCD$ o rozměrech $d(AB) = 2$ m, $d(AD) = 1,6$ m. Uvnitř tohoto obdélníka leží bod X ; přitom jsou obsahy trojúhelníků ABX , BCX , CDX , DAX po řadě úměrné číslům 5, 6, 3, 2.

- Vypočtěte obsah každého z těchto čtyř trojúhelníků.
- Vypočtěte vzdálenost bodu X od přímek AB , BC , CD , DA .
- Sestrojte obdélník $ABCD$ v měřítku 1 : 20 a v něm bod X , který vyhovuje požadavkům úlohy.



Obr. 69

Řešení (obr. 69). a) Je $d(AB) = 20$ dm, $d(BC) = 16$ dm. Obsah P daného obdélníka $ABCD$ je 320 dm². Označme P_1 , P_2 , P_3 , P_4 obsahy (v decimetrech čtverečných) trojúhelníků ABX , BCX , CDX , DAX . Podle textu úlohy platí

$$P_1 = 5d, P_2 = 6d, P_3 = 3d, P_4 = 2d, \quad (1)$$

kde číslo $d > 0$ musíme vypočítat. Platí

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

neboli (v dm²)

$$320 = 5d + 6d + 3d + 2d;$$

odtud postupně dostaneme

$$16d = 320,$$

$$d = \frac{320}{16},$$

$$d = 20.$$

Ze vztahů (1) pak dostáváme

$$P_1 = 100 \text{ dm}^2, P_2 = 120 \text{ dm}^2, P_3 = 60 \text{ dm}^2, P_4 = 40 \text{ dm}^2. (2)$$

Čísla P_1, P_2, P_3, P_4 jsou zřejmě úměrná číslům 5, 6, 3, 2, jak se přesvědčíme násobením čísel (2) číslem $\frac{1}{20}$. Součet $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 320 \text{ dm}^2$.

b) Označme po řadě v_1, v_2, v_3, v_4 vzdálenosti bodu X od přímk AB, BC, CD, DA neboli výšky trojúhelníků ABX, BCX, CDX, DAX . Platí po řadě (délky úseček v decimetrech, obsahy v decimetrech čtverečných):

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot v_1,$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot v_2,$$

$$P_3 = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot v_3,$$

$$P_4 = \frac{1}{2} \cdot DA \cdot v_4$$

neboli

$$100 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot v_1,$$

$$120 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot v_2,$$

$$60 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot v_3,$$

$$40 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot v_4.$$

Po zkrácení a záměně stran rovnic dostáváme

$$10v_1 = 100, 8v_2 = 120, 10v_3 = 60, 8v_4 = 40.$$

Násobme obě strany každé z rovnic po řadě čísly $\frac{1}{10}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{8}$;
dostaneme

$$v_1 = 10, v_2 = \frac{120}{8}, v_3 = \frac{60}{10}, v_4 = \frac{40}{8}$$

neboli v decimetrech

$$v_1 = 10 \text{ dm}, v_2 = 15 \text{ dm}, v_3 = 6 \text{ dm}, v_4 = 5 \text{ dm}.$$

Zřejmě platí $v_1 + v_3 = d(BC)$, tj. 16 dm, dále $v_2 + v_4 = d(AB)$, tj. 20 dm.

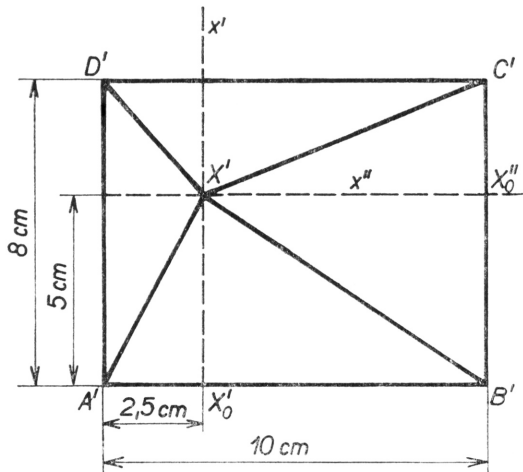
c) (Délky úseček udáváme v decimetrech; obr. 70 zmenšen.)
Obdélník $ABCD$ znázorníme obdélníkem $A'B'C'D'$ v měřítku 1 : 20, tj.

$$d(A'B') = \frac{1}{20} d(AB), d(B'C') = \frac{1}{20} d(BC)$$

neboli

$$d(A'B') = \frac{1}{20} \cdot 20 \text{ dm} = 1 \text{ dm} = 10 \text{ cm},$$

$$d(B'C') = \frac{1}{20} \cdot 16 \text{ dm} = \frac{8}{10} \text{ dm} = 8 \text{ cm}.$$



Obr. 70

Sestrojení obdélníka $A'B'C'D'$ je z vypočítaných rozměrů zřejmé.

Nyní platí

$$\frac{v_1}{v_3} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}, \quad \frac{v_2}{v_4} = \frac{15}{5} = \frac{3}{1}. \quad (3)$$

Úsečku $A'B'$ délky 1 dm rozdělíme v poměru 3 : 1 [viz (3)]. Provedeme to tak, že ji rozdělíme na 4 rovné díly: délka jednoho

dílu je $\frac{1}{4} \cdot d(A'B') = \frac{1}{4}$ dm; části budou $\frac{3}{4}$ dm, $\frac{1}{4}$ dm. Označ-

me X'_0 bod úsečky $A'B'$, pro nějž platí $d(A'X'_0) = \frac{1}{4}$ dm neboli

$$d(B'X'_0) = \frac{3}{4} \text{ dm (tj. } d(A'X'_0) = 2,5 \text{ cm).}$$

Úsečku $B'C'$ délky $0,8 \text{ dm} = 8 \text{ cm}$ rozdělíme v poměru $5 : 3$. Provedeme to takto: Rozdělíme ji na 8 rovných dílů: délka jednoho dílu je $\frac{1}{8} d(B'C') = \frac{1}{8} \cdot 0,8 \text{ dm} = 0,1 \text{ dm}$, tj. 1 cm .

Části budou:

$$0,1 \text{ dm} \cdot 5 = 0,5 \text{ dm}; 0,1 \text{ dm} \cdot 3 = 0,3 \text{ dm}.$$

Na úsečce $B'C'$ sestrojíme bod X_0'' tak, aby platilo $d(B'X_0'') = 0,5 \text{ dm}$ neboli $d(C'X_0'') = 0,3 \text{ dm}$ (tj. $d(C'X_0'') = 3 \text{ cm}$).

Nyní sestrojíme bodem X_0' přímku $x' \parallel B'C'$, bodem X_0'' přímku $x'' \parallel A'B'$. Průsečík přímek x', x'' je bod X' . Tím je celá úloha rozřešena.

40. V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ má větší základna AB délku 4 cm ; úhlopříčky lichoběžníka jsou navzájem kolmé a dělí se v poměru $2 : 1$.

Vypočtěte poloměr kružnice lichoběžníku opsané.

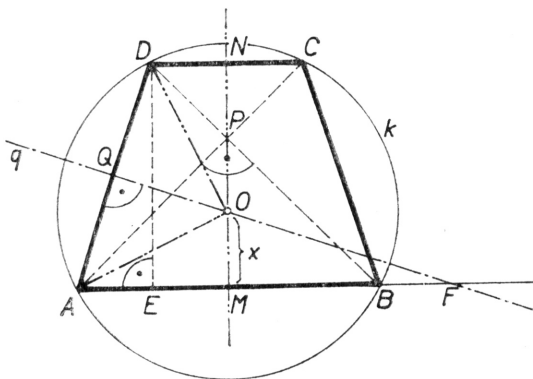
Řešení. V této i v každé jiné geometrické úloze, kterou řešíme početně, velmi záleží na pořízení zřetelného obrázku, na jeho vhodném označení i postupném doplňování dosaženými výsledky nebo na vhodném uplatňování známých geometrických vět.

Na obrázku lichoběžníka $ABCD$, o němž předpokládáme, že má dané vlastnosti (obr. 71), označíme P průsečík úhlopříček a M, N po řadě středy úseček AB, CD . Přímka MN je osou souměrnosti lichoběžníka a dělí i úhel APB na dva shodné úhly, takže $\sphericalangle APM = \sphericalangle BPM = 45^\circ$. Proto pravoúhlý trojúhelník AMP ($\sphericalangle AMP = 90^\circ$) je rovnoramenný a platí

$$d(AM) = d(MP) = 2 \text{ cm}; \quad d(AP) = 2\sqrt{2} \text{ cm}.$$

Pak podle podmínky úlohy je $d(PC) = \sqrt{2} \text{ cm}$ a z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků AMP a CNP vyplývá, že $d(PN) = 1 \text{ cm}$, takže $d(MN) = 3 \text{ cm}$ a dále $d(NC) = 1 \text{ cm}$, takže $d(DC) = 2 \text{ cm}$.

Střed O kružnice opsané lichoběžníku leží na přímce MN a např. na ose q strany AD . Dokážeme-li, že průsečík přímek MN a q padne dovnitř úsečky MN tak, jak nám vyšlo na obrázku, pak budeme moci při výpočtu poloměru $r = d(AO) = d(BO)$ použít trojúhelníky AMO a BNO .



Obr. 71

Nejprve tedy početní ověření polohy bodu O mezi body M , N : Střed úsečky AD označme Q ; bod Q přímky q leží tedy uvnitř polorovin MNA , AMN a NDA . Označme dále E patu kolmice bodem D k přímce AB ; tu je $d(AE) = d(AM) -$

— $d(ME) = 2 \text{ cm} - 1 \text{ cm} = 1 \text{ cm}$. V pravoúhlém trojúhelníku ADE o přeponě AD pak podle Pythagorovy věty platí:

$$(d(AD))^2 = (d(AE))^2 + (d(DE))^2 = 1^2 + 3^2 = 10 \text{ (v cm}^2\text{)}$$

čili

$$d(AD) = \sqrt{10} \text{ cm}; d(AQ) = \frac{1}{2} \sqrt{10} \text{ cm}.$$

Protože z trojúhelníku AED vyplývá, že úhel DAE je ostrý, protnou se přímky q a AE v bodě F a vytvoří rovněž pravoúhlý trojúhelník AQF . Trojúhelníky AED a AQF jsou podle věty *uu* o podobnosti trojúhelníků podobné, a platí pak např.

$$\frac{d(AE)}{d(AD)} = \frac{d(AQ)}{d(AF)};$$

odtud po dosazení za $d(AE) = 1 \text{ cm}$, $d(AD) = \sqrt{10} \text{ cm}$ a $d(AQ) = \frac{1}{2} \sqrt{10} \text{ cm}$ dostaneme

$$d(AF) = 5 \text{ cm}.$$

Avšak $d(AB) = 4 \text{ cm}$, takže bod F padne do poloroviny MNB ; bod Q leží v polorovině opačné. Potom bod O úsečky QF leží uvnitř poloroviny ABD , a tedy i uvnitř úsečky MN .

Nyní už vypočteme poloměr $r = d(AO) = d(DO)$ opsané kružnice z trojúhelníků AMO a DNO . Pomocně označíme $d(MO) = x$, takže je $d(NO) = 3 - x$ (oba údaje jsou v centi-

metrech). Podle Pythagorovy věty pro uvedené pravoúhlé trojúhelníky dostaneme:

$$(d(AM))^2 + (d(MO))^2 = r^2, \quad (d(ON))^2 + (d(ND))^2 = r^2$$

(vše v cm²) neboli

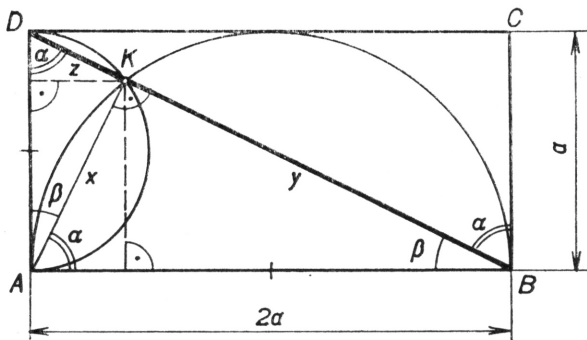
$$4 + x^2 = r^2, \quad (3 - x)^2 + 1^2 = r^2. \quad (1)$$

Porovnáním obou vyjádření r^2 dostaneme rovnici

$$4 + x^2 = 9 - 6x + x^2 + 1$$

a z ní vypočteme $x = 1$, což značí, že bod O je středem úsečky MP . Dosazením do (1) dostaneme $r^2 = 5$ (v cm^2) čili $r = \sqrt{5} \text{ cm} \doteq 2,24 \text{ cm}$.

Odpověď. Hledaný poloměr opsané kružnice je $r = \sqrt{5}$ cm.



Obr. 72

41. Je dán obdélník $ABCD$, v němž $d(AB) = 2a$, $d(BC) = a$. Nad stranami AB , AD jako nad průměry jsou sestrojeny kružnice, které kromě bodu A mají společný ještě bod K .

- Dokažte, že bod K leží na úhlopříčce BD .
- Vypočítejte vzdálenosti bodu K od vrcholů A , B , D .

Řešení. a) Poněvadž podle Thaletovy věty (viz obr. 72) je

$$\sphericalangle AKD = 90^\circ \text{ a zároveň } \sphericalangle AKB = 90^\circ,$$

leží body B , K , D v přímce, tj. na úhlopříčce BD daného obdélníka.

- Označme (v centimetrech)

$$d(AK) = x, d(BK) = y, d(BD) = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}.$$

Z pravoúhlého trojúhelníka ABK plyne

$$x^2 + y^2 = 4a^2,$$

a podobně z pravoúhlého trojúhelníka ADK plyne

$$x^2 + (a\sqrt{5} - y)^2 = a^2.$$

Upravujeme druhou rovnici

$$x^2 + y^2 - 2ay\sqrt{5} + 5a^2 = a^2.$$

Dosadíme z první rovnice

$$4a^2 - 2ay\sqrt{5} + 4a^2 = 0$$

a odtud

$$y = \frac{4a}{\sqrt{5}}, \quad x = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

Nakonec ještě dostaneme (v centimetrech)

$$d(DK) = a\sqrt{5} - y = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Jiné řešení. Označme $d(DK) = z$ (v centimetrech). Z podobnosti $\triangle AKB \sim \triangle DKA$ (věta *uu*) plyne

$$z : x = x : y.$$

Dosadíme-li

$$z = a\sqrt{5} - y, \tag{1}$$

dostáváme

$$ay\sqrt{5} - y^2 = x^2,$$

odtud s použitím vztahu

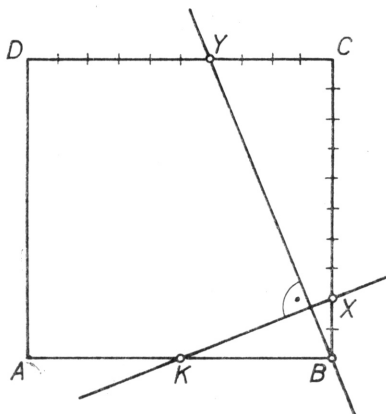
$$x^2 + y^2 = 4a^2 \tag{2}$$

plyne $y = \frac{4a}{\sqrt{5}}$. Z (1) pak určíme z . Z (2) můžeme určit x .

Rychleji lze x určit z podobnosti $\triangle ABK \sim \triangle DBA$ (věta *uu*), odkud plyne

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

42. Je dán čtverec $ABCD$ o straně $a = 10$ cm. Každá ze stran BC , CD je rozdělena devíti body na deset shodných úsečků. Střed K strany AB je spojen s dělicím bodem X strany BC a vrchol B je spojen s dělicím bodem Y strany CD . Které dělicí body X , Y musíme vybrat, aby přímky KX , BY byly navzájem kolmé?



Obr. 73

Řešení. Dělicí bod na straně BC označme X a dělicí bod na straně CD označme Y (obr. 73). Aby přímky KX , BY byly k sobě kolmé, musí platit

$$\triangle KBX \sim \triangle BCY.$$

Odtud máme

$$d(BX) : d(BK) = d(CY) : d(BC), \quad (1)$$

ale

$$d(BK) = \frac{a}{2} = 5 \text{ cm},$$

$$d(BC) = a = 10 \text{ cm}.$$

Dále ještě označme

$$d(BX) = \alpha,$$

$$d(CY) = \beta,$$

kde pro přirozená čísla α , β (v centimetrech) platí

$$0 < \alpha < 10, 0 < \beta < 10.$$

Po dosazení do (1) dostaneme

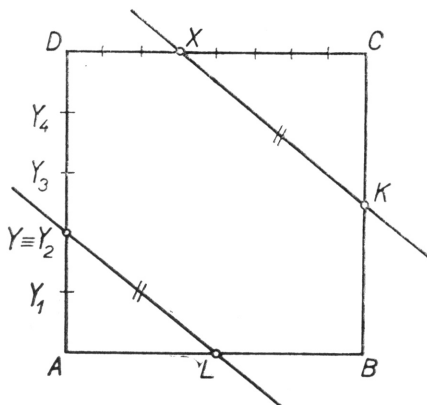
$$\alpha : \frac{a}{2} = \beta : a,$$

$$\beta = 2\alpha.$$

Vyhovují tyto hodnoty:

α	1	2	3	4
β	2	4	6	8

Úloha má podle toho čtyři různá řešení.



Obr. 74

43. Je dán čtverec $ABCD$. Stranu CD rozdělte na n shodných dílů tak, aby na ní existoval dělicí bod X takový, že

$$KX \parallel YL. \quad (1)$$

K je střed strany BC , L je střed strany AB a Y je dělicí bod na straně AD , která je rozdělena na 5 shodných dílů.

Určete nejmenší n této vlastnosti.

Řešení (obr. 74). Ze vztahu (1) plyne

$$\triangle ALY \sim \triangle CXK,$$

tj.

$$\frac{d(AY)}{d(AL)} = \frac{d(CK)}{d(CX)}. \quad (2)$$

Označíme-li délku strany čtverce a , potom rovnost (2) nabývá tvaru

$$\frac{r \cdot \frac{a}{5}}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{s \cdot \frac{a}{n}}, \quad (3)$$

kde r, s jsou přirozená čísla vyhovující nerovnostem

$$1 \leq r < 5, \quad 1 \leq s < n. \quad (4)$$

Vztah (3) po úpravě zní

$$4rs = 5n. \quad (5)$$

Z poslední rovnosti je zřejmé, že n je násobkem 4. Nejmenší takové n jsou 4. Pro $n = 4$ dává (5)

$$rs = 5,$$

což však nelze splnit čísla r, s vyhovujícími nerovností (4). Pro $n = 8$ rovnost (5) zní

$$rs = 10.$$

Této nerovnosti vyhovují čísla $r = 2, s = 5$, která také splňují nerovnosti (4). Potom $d(AY) = \frac{2}{5}a, d(CX) = \frac{5}{8}a$. V tomto případě skutečně platí (1).

Závěr. Nejmenší n požadované vlastnosti je $n = 8$.

Jiné řešení. Označme Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 dělicí body na straně AD (viz obr. 74). Ze vztahu (2) plyne

$$d(CX) = \frac{d(CK) \cdot d(AL)}{d(AY)} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{1}{d(AY)}.$$

Pro Y_1 platí

$$d(CX) = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{5}{a} = \frac{5}{4}a, \text{ tj. } X \text{ by nebyl bodem úsečky } DC;$$

pro Y_2 je

$$d(CX) = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{5}{2a} = \frac{5}{8}a, \text{ tj. } n = 8;$$

pro Y_3 je

$$d(CX) = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{5}{3a} = \frac{5}{12} a, \text{ tj. } n = 12;$$

pro Y_4 je

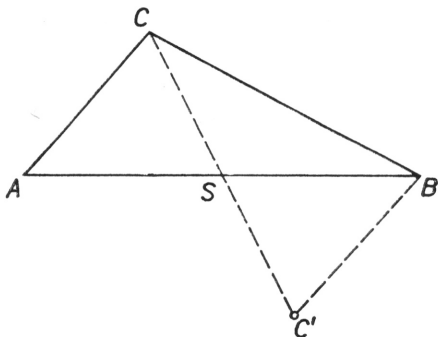
$$d(CX) = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{5}{4a} = \frac{5}{16} a, \text{ tj. } n = 16.$$

Závěr. Nejmenší n požadované vlastnosti je tedy $n = 8$.

V. Nerovnosti v geometrii

44. Je dán trojúhelník ABC . Označme S střed strany AB .
Dokažte, že

$$CS < \frac{1}{2}(AC + BC). \quad (1)$$



Obr. 75

Řešení. Na prodloužení úsečky CS (obr. 75) za bod S sestrojíme bod C' tak, aby platilo

$$C'S \cong CS.$$

Pak ovšem platí

$$CC' = 2 \cdot CS \text{ a } BC' \cong AC. \quad (2)$$

Bod S neleží na přímce BC , takže body C , C' a B neleží na téže přímce a platí pro ně trojúhelníková nerovnost

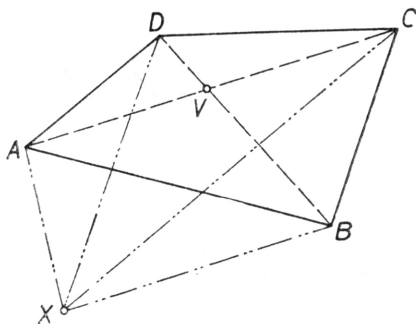
$$CC' < BC' + BC,$$

tj. podle (2)

$$2 \cdot CS < AC + BC,$$

odkud již plyne dokazovaná nerovnost (1).

45. V rovině daného vypuklého čtyřúhelníku $ABCD$ najděte všechny body, jejichž součet vzdáleností od vrcholů A , B , C , D je nejmenší.



Obr. 76

Řešení. Zvolme libovolný bod X v rovině daného čtyřúhelníku $ABCD$ a hledejme (obr. 76), v kterém případě je nejmenší součet

$$AX + BX + CX + DX.$$

Pro body A, C, X podle trojúhelníkové nerovnosti platí

$$AX + CX \geq AC, \quad (1)$$

přičemž rovnost nastává, právě když bod X je bodem úsečky AC . Obdobně podle trojúhelníkové nerovnosti pro body B, D, X plyne

$$BX + DX \geq BD, \quad (2)$$

kde rovnost platí, právě když je bod X bodem úsečky BD .
Z nerovností (1) a (2) dostáváme

$$AX + BX + CX + DX \geq AC + BD,$$

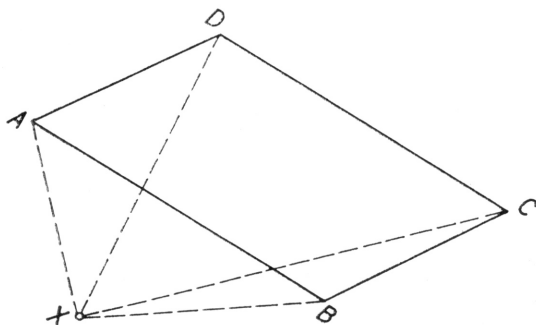
přičemž rovnost platí, právě když je bod X zároveň bodem úsečky AC a úsečky BD . Tyto dvě úsečky mají jediný společný bod - svůj průsečík V . Tento bod V je tedy bodem, jehož součet vzdáleností od bodů A, B, C, D je nejmenší.

Úloha má jediné řešení; je jím průsečík úhlopříček čtyřúhelníku $ABCD$.

46. Je dán rovnoběžník $ABCD$. Potom pro každý bod X roviny rovnoběžníku platí

$$AX < BX + CX + DX. \quad (1)$$

Dokažte.



Obr. 77

Řešení. Pro každý bod X roviny rovnoběžníku $ABCD$ (obr. 77) podle trojúhelníkové nerovnosti platí

$$AX \leq AD + DX. \quad (2)$$

Porovnáním s nerovností (1), kterou máme dokázat, vidíme, že na místě úsečky AD potřebujeme mít součet $BX + CX$. Pro tento součet podle trojúhelníkové nerovnosti pro body B, C, X platí

$$BC \leq BX + CX, \quad (3)$$

přičemž

$$AD = BC, \quad (4)$$

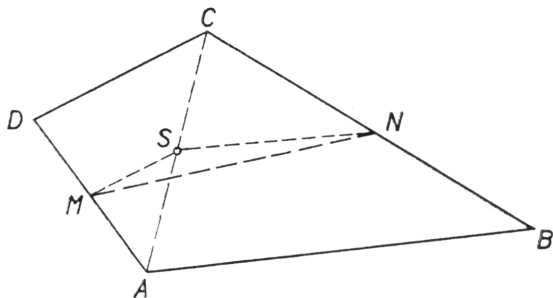
což plyne z toho, že čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník. Tak dostáváme nerovnost

$$AD \leq BX + CX, \quad (5)$$

z níž a z nerovnosti (2) plyne

$$AX \leq BX + CX + DX. \quad (6)$$

Nyní zbývá ještě rozřešit problém, zda v (6) může nastat rovnost. Ta by platila, právě když by platila rovnost současně v (2) a (5), tj. v (2) a (3), tedy právě když by bod X ležel zároveň na polopřímce opačné k polopřímce DA a na úsečce BC . To však není možné, neboť přímky AD a BC jsou různé rovnoběžky. Tedy pro každý bod X roviny rovnoběžníka $ABCD$ platí nerovnost (1).



Obr. 78

47. Je dán vypuklý čtyřúhelník $ABCD$. Označme M a N po řadě středy stran AD a BC .

Dokažte následující tvrzení: Jestliže

$$MN = \frac{1}{2} (AB + CD), \quad (1)$$

pak střed S úhlopříčky AC leží uvnitř úsečky MN a $AB \parallel CD$.

Řešení. Úsečky MS a SN jsou po řadě středními příčkami (obr. 78) trojúhelníků ACD a ABC . Tedy

$$MS \parallel CD, \quad SN \parallel AB, \quad (2)$$

$$MS = \frac{1}{2} CD, \quad SN = \frac{1}{2} AB,$$

takže

$$MS + SN = \frac{1}{2} (AB + CD).$$

Z předpokladu (1) tedy plyne

$$MS + SN = MN. \quad (3)$$

Podle trojúhelníkové nerovnosti pro body M, N, S platí

$$MS + SN \geq MN,$$

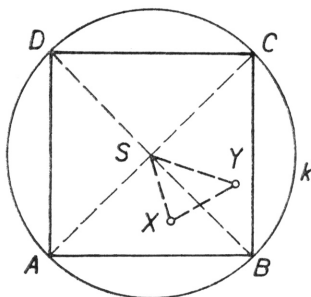
přičemž rovnost nastává, právě když bod S je vnitřním bodem úsečky MN . Tedy z rovnosti (3) vyplývá, že bod S je vnitřním bodem úsečky MN . Pak podle (2) je

$$MN \parallel AB \text{ a } MN \parallel CD,$$

tj.

$$AB \parallel CD.$$

48. Jsou dány dva různé body P a Q . Sestrojte čtverec K , který obsahuje body P a Q a má nejmenší možný obsah.



Obr. 79

Řešení. Nejprve dokážeme, že pro každý čtverec $ABCD$ platí: Jsou-li X a Y dva jeho body, pak

$$XY \leq AC, \quad (1)$$

příčemž rovnost nastává, právě když X a Y jsou protější vrcholy čtverce $ABCD$.

Označme S střed čtverce $ABCD$ a u délku jeho úhlopříčky

(obr. 79). Všechny body čtverce $ABCD$ náleží kruhu o středu S a poloměru $\frac{u}{2}$. Je tedy

$$d(SX) \leq \frac{u}{2}, \quad d(SY) \leq \frac{u}{2}. \quad (2)$$

Podle trojúhelníkové nerovnosti pro body S, X, Y platí

$$SX + SY \geq XY, \quad (3)$$

odkud již vzhledem k nerovnosti (2) plyne nerovnost (1). Rovnost v nerovnosti (1) nastane, právě když platí rovnost v obou nerovnostech (2) a v nerovnosti (3), tj. právě když bod S je vnitřním bodem úsečky XY a body X, Y jsou vrcholy čtverce $ABCD$, tj. právě když X a Y jsou protější vrcholy čtverce $ABCD$.

Hledaný čtverec K má obsahovat dané body P, Q a mít přitom nejmenší možný obsah. Musí tedy mít nejmenší možnou stranu, a tedy nejmenší možnou úhlopříčku. Body P a Q jsou různé, a proto nejmenší možná délka úhlopříčky čtverce K je podle (1) rovna $d(PQ)$. Body P, Q jsou tedy protějšími vrcholy čtverce K . Odtud již plyne (obr. 80) konstrukce čtverce K .

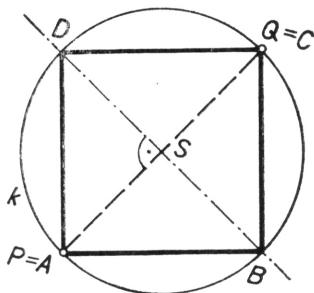
49. Pro každý trojúhelník ABC se středem S vepsané kružnice platí: Jestliže

$$\sphericalangle CAB > \sphericalangle ABC > \sphericalangle BCA, \quad (1)$$

pak

$$AS < BS < CS. \quad (2)$$

Dokažte. Platí i věta obrácená k této větě?



Obr. 80

Řešení. Z předpokladu

$$\sphericalangle BCA < \sphericalangle ABC \quad (3)$$

plyne, že

$$\frac{1}{2} \sphericalangle BCA < \frac{1}{2} \sphericalangle ABC. \quad (4)$$

Bod S je však středem vepsané kružnice trojúhelníka ABC , takže z nerovnosti (4) dostáváme (obr. 81)

$$\sphericalangle SCB < \sphericalangle SBC. \quad (5)$$

Podle známé věty o vztahu mezi úhly a stranami trojúhelníků pak z trojúhelníka BSC dostáváme

$$BS < CS. \quad (6)$$

Z předpokladu

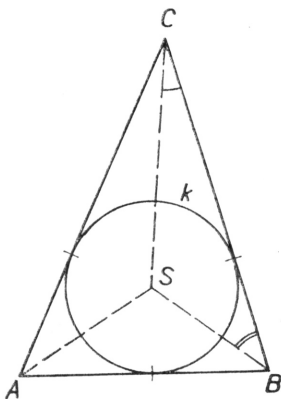
$$\sphericalangle ABC < \sphericalangle CAB \quad (7)$$

dále obdobně plyne, že

$$\sphericalangle ABS < \sphericalangle SAB. \quad (8)$$

V trojúhelníku ABS je tedy

$$AS < BS. \quad (9)$$



Obr. 81

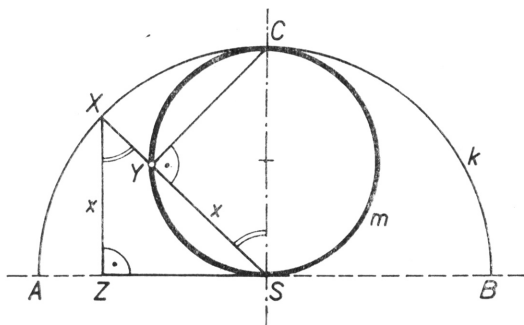
Nyní už stačí napsat nerovnosti (6) a (9) do jednoho zápisu tvaru (2) a věta je dokázána.

Zbývá ještě odpovědět na poslední otázku v textu úlohy. Nejprve však musíme zformulovat obrácenou větu. Ta zní:

Pro každý trojúhelník ABC se středem S vepsané kružnice platí: Jestliže jsou splněny nerovnosti (2), pak platí nerovnosti (1). K důkazu této obrácené věty lze využít důkaz původní věty, stačí ho číst odzadu. Z nerovností (2) užijeme nerovnost (9), podle níž platí v trojúhelníku ABS nerovnost (8), z níž plyne nerovnost (7). Dále z nerovností (2) využijeme nerovnost (6), z níž postupně vyplynou nerovnosti (5), (4) a (3).

VI. Množiny všech bodů dané vlastnosti

50. Je dána polokružnice k se středem S a průměrem AB . Označme x vzdálenost libovolného bodu X polokružnice k od přímky AB . Na polopřímce SX sestrojte bod Y tak, aby platilo $SY = x$. Vyšetřte množinu všech bodů Y .



Obr. 82

Řešení (obr. 82). Nejprve provedeme odhad hledané množiny. Označme $k = (S; r = 1)$ danou polokružnici s průměrem AB a dále bod C této polokružnice, který má sobě rovné vzdálenosti od bodů A, B , takže $SC \perp AB$. Poloměr r jsme zvolili rovný jednotkové úsečce; je totiž zřejmé, že velikost poloměru nemá vliv na způsob a výsledek řešení.

Zvolíme několik poloh bodu X a sestrojíme příslušné body Y .

Při volbě různých poloh bodu X postupujeme systematicky. Zvolíme např. nejdříve bod $X = C$; pak je $Y = X = C$. Pak volíme postupně body X na oblouku blíže bodu A a snadno uhadneme, že je-li $X = A$, je $Y = S$. Proto body C a S patří určitě do hledané množiny. Konstrukcí dalších několika bodů Y , které odpovídají bodům $X \neq A$, $X \neq C$, snadno dospějeme k domněnce, že body Y padnou na kružnici m sestrojenou nad úsečkou SC jako průměrem.

Nyní nejprve dokážeme, že každý bod Y leží na kružnici m .

1. O bodech Y odpovídajících bodům $X = A$, $X = B$ a $X = C$ to zřejmě platí.

2. Nechť bod X polokružnice k je různý od bodů A , B , C . Potom vznikne pravoúhlý trojúhelník SXZ , kde Z je pata kolmice vedené bodem X k přímce AB , takže $XZ \parallel SC$. Trojúhelníky SXZ , CSY jsou potom shodné podle věty *sus*, protože se shodují ve stranách $d(SX) = d(CS) = 1$, $d(XZ) = d(SY) = x$ a v úhlech $\sphericalangle SXZ = \sphericalangle CSY$ (úhly střídavé mezi rovnoběžkami XZ , SC). Je tedy $\sphericalangle SYC = \sphericalangle XZS = 90^\circ$, a proto bod Y leží na Thaletově kružnici m sestrojené nad úsečkou SC jako průměrem.

Dokážeme ještě obráceně, že každý bod Y kružnice m má vlastnost požadovanou textem úlohy, tj. že platí $d(YS) = x$ a Y leží na polopřímce SX :

Nechť tedy bod Y leží na kružnici m (můžeme předpokládat, že Y je různý od bodů S , C , pro něž jsou podmínky úlohy samozřejmě splněny). Označme X průsečík polopřímky SY s polokružnicí k a Z patu kolmice vedené bodem X k přímce AB . Potom trojúhelníky SCY a XSZ jsou shodné podle věty *usu*, protože $d(SC) = d(XS) = 1$, $\sphericalangle CSY = \sphericalangle SXZ$ (úhly střídavé mezi rovnoběžkami SC , XZ), $90^\circ = \sphericalangle CYS = \sphericalangle SZX$,

a tedy i $\sphericalangle SCY = \sphericalangle XSZ$. Je tedy $d(YS) = d(XZ) = x$; body Y, X leží zřejmě na téže polopřímce s počátkem S .

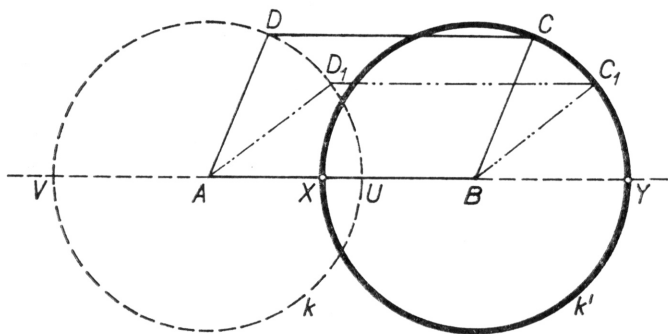
Závěr. Hledaná množina všech bodů Y je kružnice m sestavená nad úsečkou SC jako průměrem, kde C je společný bod polokružnice k a osy úsečky AB .

Poznámka. Všimněte si pozorně dvojího kroku v důkazu a promyslete si, proč jsou oba kroky nutné.

V prvním kroku jsme vlastně dokázali, že body Y nemohou ležet někde jinde než v odhadnuté množině, neboť úhly CYS jsou pravé. Máme tedy zaručeno, že náš odhad je dost široký a hledaná množina je jeho částí.

Druhý krok nám poví, zda náš odhad nebyl příliš široký a za skutečně každý bod kružnice m může být považován za bod Y .

51. Je dána úsečka $AB = 7$ cm. Představte si, že sestojíte všechny možné rovnoběžníky $ABCD$, pro něž je $d(AD) = 4$ cm.



Obr. 83

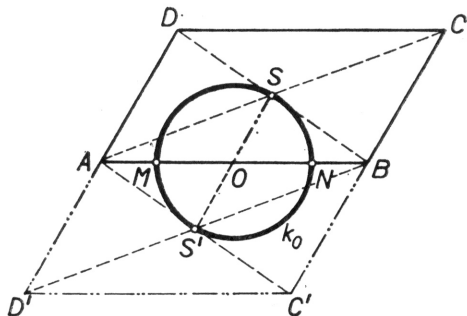
Vyšetřte množinu všech

a) vrcholů C ;

b) středů S všech rovnoběžníků $ABCD$.

Řešení. a) Na obr. 83 je narysován jeden z rovnoběžníků s pevnou stranou AB a stranou AD délky 4 cm. Možné vrcholy D opisují kružnici $k = (A, d(AD) = 4 \text{ cm})$ a obdobně vrcholy C kružnici $k = (B; 4 \text{ cm})$. Odpovídající si vrcholy D, C , resp. D_1, C_1 apod., leží na přímce rovnoběžné s AB . Průsečíky U, V kružnice k a X, Y kružnice k' s přímkou AB nemohou být vrcholy uvažovaných rovnoběžníků, neboť by se v tom případě redukovaly na úsečku.

Zvolíme-li na kružnici k' libovolný bod $C_1 \neq X, C_1 \neq Y$, je $d(C_1B) = 4 \text{ cm}$ a na kružnici k najdeme příslušný bod D_1 tak, že ABC_1D_1 je uvažovaný rovnoběžník.



Obr. 84

Závěr. Hledanou množinou všech bodů C je tedy kružnice $k' = (B; 4 \text{ cm})$ bez bodů X, Y , která vznikne z kružnice k posunutím.

b) Označme písmenem S střed jednoho uvažovaného rovno-

běžníka $ABCD$ (obr. 84) a písmenem O střed úsečky AB . Pak úsečka OS je střední příčkou v trojúhelníku ABD a platí

$$OS \parallel AD, d(OS) = \frac{1}{2} d(AD).$$

Protože bod O je pevný a $\frac{1}{2}d(AD) = 2$ cm je pevné číslo, leží body S na kružnici $k_0 = (O; 2 \text{ cm})$; tím jsme provedli odhad hledané množiny a zároveň první část důkazu.

Aby kružnice k_0 byla hledanou množinou všech bodů S , musíme ještě dokázat, že každý její bod je středem rovnoběžníka daných vlastností. Zřejmě průsečíky M, N kružnice k_0 s přímkou AB do hledané množiny bodů nepatří, neboť střed rovnoběžníka nemůže ležet na přímce obsahující jeho stranu.

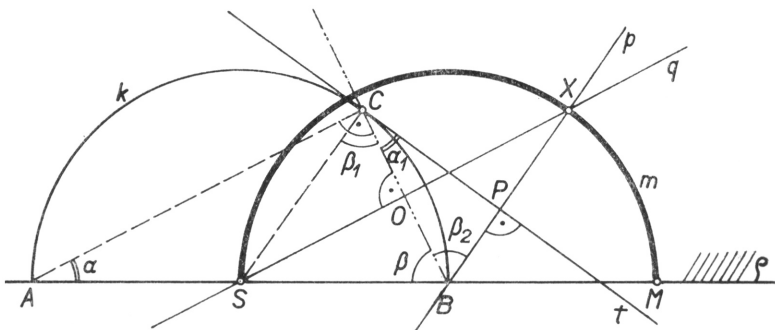
Zvolme nyní bod S' na k_0 různý od bodů M, N a provedme konstrukci bodů C, D tak, aby vznikl rovnoběžník požadovaných vlastností. Na prodloužení úsečky AS' za bod S' nanese úsečku AS' ; dostaneme tak bod C' . Obdobně sestrojíme bod D' na přímce BS' . Protože úhlopříčky AC' a BD' se půlí, je čtyřúhelník $ABC'D'$ rovnoběžník. Protože úsečka délky $d(OS') = 2$ cm je střední příčkou v trojúhelníku ABD' , je $d(AD') = 2 \cdot d(OS') = 4$ cm, jak vyžaduje text úlohy ($d(AB) = 7$ cm bylo použito při konstrukci).

Závěr. Kružnice $k_0 = (O; 2 \text{ cm})$ až na body M, N je tedy množinou středů S všech rovnoběžníků $ABCD$ daných textem úlohy.

52. Je dána polokružnice o průměru AB a středu S . Na polokružnici zvolme bod C různý od bodů A, B a sestrojme v něm k polokružnici tečnu t . Bodem B vedme kolmici p

k přímce t a bodem S kolmici q k přímce BC . Označme X průsečík přímek p, q .

Vyšetřte množinu všech bodů X , jestliže bod C probíhá danou polokružnicí.



Obr. 85

Řešení (viz označení z obr. 85). Označme ρ polovinu (s hranicí AB), v které leží daná polokružnice k . Provedeme odhad hledané množiny. Při konstrukci bodu X se pokusíme najít vzájemné vztahy, které se při volbě různých bodů C nemění. Tím vlastně provádíme první krok důkazu.

Zvolme tedy bod C a hledejme k němu bod X . Podle textu úlohy je $p \perp t, q \perp BC$; paty těchto kolmic označme po řadě P, O . O středu S polokružnice k platí

$$d(SA) = d(SB) = d(SC) = r. \quad (1)$$

Označme α, β úhly při vrcholech A, B pravoúhlého trojúhel-

níka ABC (bod C leží totiž na Thaletově kružnici opsané nad úsečkou AB jako průměrem). Proto o úhlech vyznačených v obr. 85 platí

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

(ostré úhly v pravouhlém trojúhelníku ABC),

$$\beta_1 = \beta$$

(trojúhelník SBC podle (1) je rovnoramenný se základnou BC),

$$\alpha_1 + \beta_1 = 90^\circ, \text{ tj. } \alpha_1 = \alpha \text{ (je } SC \perp t),$$

$$\alpha_1 + \beta_2 = 90^\circ, \text{ tj. } \beta_2 = \beta$$

(součet velikostí ostrých úhlů v trojúhelníku BCP , kde $\sphericalangle P = 90^\circ$). Přímka BC tedy půlí úhel $\sphericalangle SBX$, přičemž je $BC \perp q$; je tedy BSX rovnoramenný trojúhelník s rameny BS , BX a vzhledem k (1) platí $r = d(BS) = d(BX)$. Je tedy $\sphericalangle SBX$ dutý a bod X padne dovnitř poloroviny q na polokružnici m , která má střed B a průměr SM . Tím jsme nejen provedli odhad hledané množiny, ale i dokázali, že každý bod X , sestrojený podle textu úlohy, padne na polokružnici m (její krajní body k ní nepatří).

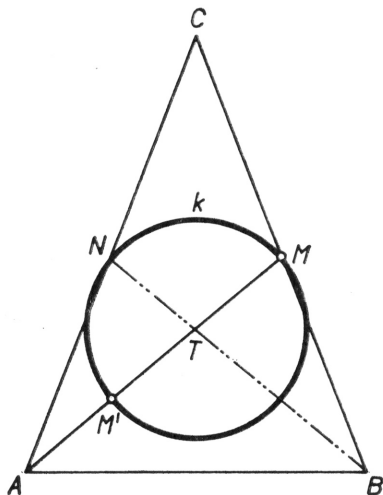
Poznámka. Trojúhelníky SBC , BSX mají kolmé základny BC , SX , které se navzájem půlí, proto je $SBXC$ rovnostranný rovnoběžník (čtverec nebo kosočtverec) a polokružnice k , m vzniknou jedna z druhé posunutím o délku SB ve směru SB (nebo opačném).

Obráceně, je-li X bod uvnitř oblouku SM (polokružnice m), sestrojíme rovnostranný rovnoběžník $SBXC$; je $SC \cong SB$, tj. bod C padne dovnitř oblouku AB (polokružnice k), a najde-

me-li k bodu C příslušné přímky p , q , je jejich průsečíkem zvolený bod X .

Závěr. Množinou všech bodů X jsou body polokružnice $m = (B; \frac{1}{2}d(AB))$ ležící v polorovině ϱ , a to bez obou jejích krajních bodů S , M .

53. V rovině je dána úsečka AM . Určete množinu středů ramen AC všech rovnoramenných trojúhelníků ABC se základnou AB , v nichž je úsečka AM těžnicí.



Obr. 86

Řešení. a) Budiž T těžiště trojúhelníků ABC , tj. T je bod úsečky AM , pro který platí $AT = 2TM$. Označme N střed ramena AC (obr. 86); pak BN je těžnice trojúhelníka ABC .

Poněvadž trojúhelník ABC je rovnoramenný, je $AM \cong BN$, a tedy $TM \cong TN$. Bod N leží tedy na kružnici k se středem T a poloměrem TM .

b) Nyní ještě musíme zjistit, zda ke každému bodu kružnice k existuje rovnoramenný trojúhelník požadovaných vlastností.

Označme M' střed úsečky AT (který je také bodem kružnice k). Zvolme libovolný bod N kružnice k , různý od M, M' . Dokážeme, že existuje rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB a těžnicemi AM, BN . Na polopřímce opačné k polopřímce TN sestrojíme bod B tak, aby platilo $TB = 2TN$. Dále sestrojíme bod C souměrně sdružený s bodem B podle bodu M . Poněvadž $N \neq M, M'$, leží bod B mimo přímku AM , body B, C jsou odděleny přímkou AM , a tudíž body A, B, C neleží v přímce a jsou vrcholy trojúhelníka ABC .

Protože AM je těžnice trojúhelníka ABC (neboť $BM \cong CM$) a protože $AT = 2TM$, je T těžiště trojúhelníka ABC . Protože T je těžiště trojúhelníka ABC , leží jeho těžnice z vrcholu B v přímce BT , a protože $BT = 2TN$, je N středem strany AC . Protože těžnice AM, BN trojúhelníka ABC mají stejnou délku, je trojúhelník ABC rovnoramenný se základnou AB .

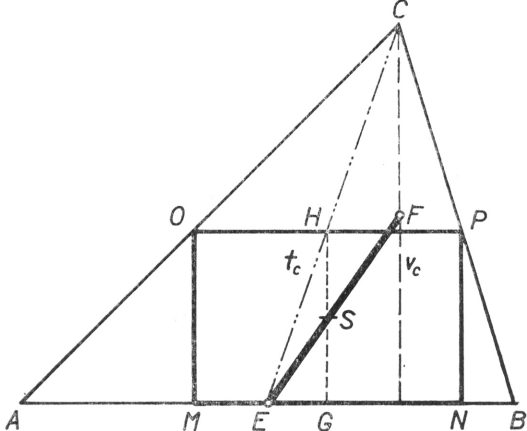
Závěr. Hledaná množina bodů je kružnice k bez bodů M, M' .

Poznámka 1. Kdyby platilo $N = M$ nebo $N = M'$, ležely by sestrojené body A, B, C v přímce.

Poznámka 2. Trojúhelník ABC je rovnostranný, právě když $\sphericalangle MTN = 120^\circ$.

54. Do ostroúhlého trojúhelníka ABC je vepsán obdélník $MNPO$ tak, že vrcholy M, N leží na straně AB , vrchol P na straně BC a vrchol O na straně CA .

Vyšetřte množinu středů všech obdélníků $MNPO$.



Obr. 87

Řešení. Sestrojíme jeden obdélník $MNPO$ splňující podmínky úlohy a jeho střed S (obr. 87). Bod S jako střed obdélníka $MNPO$ je středem jeho střední příčky HG , kde H je střed strany OP a G střed strany MN . Zřejmě $HG \perp AB$.

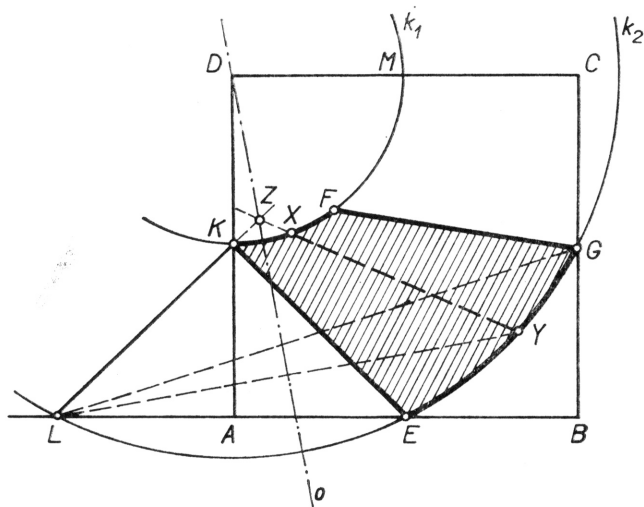
Bod H je střed příčky OP trojúhelníka ABC , která je rovnoběžná se stranou AB , a proto bod H leží na těžnici $t_c = EC$ trojúhelníka ABC . Obráceně snadno zjistíme, že každý vnitřní bod H' těžnice $EC = t_c$ je středem strany $O'P'$ jistého obdélníka $M'N'P'O'$ splňujícího podmínky úlohy. Docházíme tedy k jiné formulaci úlohy:

Určete množinu středů S všech úseček HG , kde bod H probíhá vnitřek úsečky $EC = t_c$, G leží na AB a $HG \perp AB$. Lze tedy zřejmě vyslovit závěr úlohy takto:

Závěr. Množinou všech středů S je tedy vnitřek úsečky EF , kde F je střed výšky v_c z bodu C na stranu AB , což platí i v případě, že t_c splývá s v_c , tj. je-li $AC \cong BC$.

55. Je dán čtverec $ABCD$, jehož strana má délku a ; K je střed strany AD , L je bod polopřímky BA , pro který platí $d(BL) = \frac{3}{2}a$. Označme o takovou přímku procházející bodem D , že úsečka XY souměrně sdružená s KL podle osy o leží celá ve čtverci $ABCD$.

Jaký útvar vyplní všechny takto vytvořené úsečky XY ? Narýsujte obrázek a vyšrafujte tento útvar.



Obr. 88

Řešení. Danou situaci znázorňuje obr. 88. Protože body K , X jsou souměrně sdruženy podle osy o , která prochází vrcholem D , platí

$$DK \cong DX.$$

Bod X leží tedy na kružnici k_1 se středem D a poloměrem $d(DK) = \frac{a}{2}$, ovšem jenom na tom oblouku kružnice k_1 , který leží na čtverci $ABCD$ (je to čtvrtkružnice KM).

Protože body L , Y jsou souměrně sdruženy podle osy o , která prochází vrcholem D , je

$$DL \cong DY.$$

Bod Y leží tedy na kružnici k_2 se středem D a poloměrem

$$d(DL) = \frac{a}{2} \sqrt{5}, \text{ jak snadno vypočteme podle Pythagorovy věty}$$

z trojúhelníka ADL . Kružnice k_2 prochází středem G strany BC ; bod Y leží ovšem jen na tom oblouku kružnice k_2 , který leží ve čtverci $ABCD$. Tento oblouk je omezen středy E , G stran AB , BC .

Budiž Y libovolný bod oblouku EG ; dokážeme, že vznikne jako souměrně sdružený bod s bodem L podle vhodné osy o procházející bodem D . Tuto osu o sestrojíme jako osu úsečky LY ; určíme průsečík Z přímek o , KL a dále průsečík X přímky YZ s obloukem KM kružnice k_1 . Úsečka XY je souměrně sdružená s KL podle osy o . Je-li $Y = G$, je $X = F$.

Závěr. Proměnná úsečka XY vyplní vyšrafovanou část mezikruží (k_1 , k_2) omezenou obloukem EG kružnice k_2 , obloukem KF kružnice k_1 a úsečkami KE , FG .

56. Je dán obdélník $ABCD$, v němž je $AB > CD$. Sestrojte množinu středů všech kružnic, které leží v obdélníku $ABCD$ a dotýkají se dvou jeho sousedních stran nebo dvou jeho protějších stran.

nost od BC je $\frac{1}{2}b$. Zřejmě každý bod úsečky UV je středem kružnice o poloměru $\frac{1}{2}b$, která se dotýká stran AB a CD a leží v obdélníku $ABCD$. Body přímky o_2 ležící vně úsečky UV už tuto vlastnost nemají, neboť každá kružnice se středem v takovém bodu a mající poloměr $\frac{1}{2}b$ obsahuje aspoň jeden bod ležící vně rovnoběžkového pásu přímek AD a BC . Množinou M_2 je tedy úsečka UV .

c) Hledíme množinu M_3 středů všech kružnic, které leží v obdélníku $ABCD$ a dotýkají se jeho stran AB a AD . Velikost úhlu UAB je 45° , a proto střed každé kružnice, která se dotýká strany AB a strany AD , leží v polopřímce AU . Zřejmě $A \notin M_3$ a $U \in M_3$.

Nechť S je libovolný bod ležící mezi A a U . Protože $AS < AU$, je vzdálenost bodu S od strany AB menší než $\frac{1}{2}b$, takže kružnice o středu S , která se dotýká AB a AD , leží v daném obdélníku, tj. $S \in M_3$.

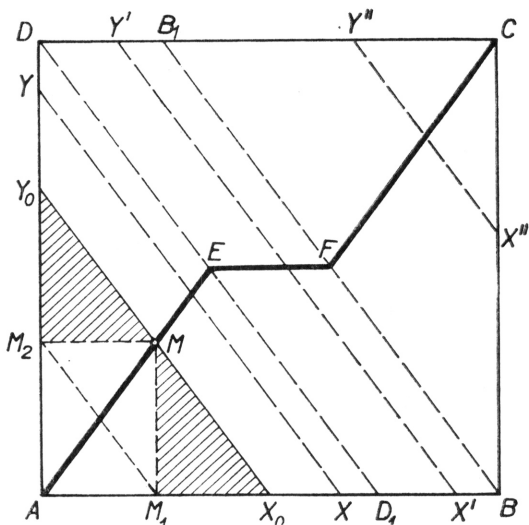
Nechť S' je libovolný bod ležící na prodloužení úsečky AU za bod U . Pak $AS' > AU$, a proto vzdálenost bodu S' od přímky AB je větší než $\frac{1}{2}b$ a vzdálenost od přímky CD menší než $\frac{1}{2}b$, takže kružnice se středem S' , jež se dotýká přímek AB a AD , neleží v daném obdélníku, tj. $S' \notin M_3$.

Množina M_3 je tedy množinou všech bodů úsečky AU s výjimkou bodu A .

Závěr. Hledaná množina bodů je sjednocení úsečky UV a úseček AU , DU , BV a CV s výjimkou bodů A , B , C , D .

57. Je dán čtverec, jehož strana má délku 6 cm. Bod M má od obou sousedních stran čtverce vzdálenosti 15 mm a 20 mm.

Sestrojte lomenou čáru procházející bodem M , která tvoří množinu středů všech úseček XY navzájem rovnoběžných, jejichž krajní body leží na stranách daného čtverce. Vypočtete její délku.



Obr. 90

Řešení. Sestrojíme čtverec $ABCD$ o straně délky 6 cm. Nechť bod M má vzdálenost 20 mm od strany AB a 15 mm od strany AD (obr. 90).

Bod M sám musí být středem jedné takové úsečky XY , o nichž mluví text úlohy, a proto bod M musí být vnitřním bodem čtverce $ABCD$.

Nejprve budeme řešit dílčí úlohu.

Na obvodu čtverce $ABCD$ sestrojte body X_0, Y_0 tak, aby bod M byl středem úsečky X_0Y_0 .

Jsou-li X_0, Y_0 takové body, potom

- a) neleží na téže straně čtverce $ABCD$, neboť bod M je vnitřním bodem čtverce $ABCD$;
- b) neleží na rovnoběžných stranách čtverce $ABCD$, neboť bod M neleží ani na jedné ze středních příček čtverce $ABCD$;
- c) neleží na stranách AB a BC , BC a CD , neboť M je vnějším bodem trojúhelníka ABC a trojúhelníka BCD .

Zbývají tedy dvě možnosti: X_0 a Y_0 leží po řadě na stranách AB a AD nebo AD a DC .

Uvažujme případ, že X_0 je bodem strany AB a Y_0 je bodem strany AD . Označme M_1 patu kolmice spuštěné z bodu M na AB a M_2 patu kolmice spuštěné z bodu M na AD . Potom zřejmě X_0 je bodem úsečky M_1B a Y_0 je bodem úsečky M_2D . Platí

$$\triangle M_1X_0M \cong \triangle M_2MY_0, \quad (1)$$

neboť oba trojúhelníky jsou pravoúhlé, $\sphericalangle M_1X_0M = \sphericalangle M_2MY_0$ a $X_0M \cong MY_0$. Tudíž platí

$$d(M_1X_0) = 15 \text{ mm}, \quad d(M_2Y_0) = 20 \text{ mm}. \quad (2)$$

Vzhledem k tomu, že strana čtverce $ABCD$ má délku 6 cm, body X_0, Y_0 splňující podmínky (2) leží uvnitř úseček M_1B a M_2D , tj. na obvodu čtverce $ABCD$.

Jsou-li X_0 a Y_0 body ležící po řadě na úsečkách M_1B, M_2D , přičemž splňují podmínky (2), pak platí (1), a tudíž M je středem úsečky X_0Y_0 .

Uvažujeme-li možnost, že X_0, Y_0 leží po řadě na stranách AD, DC , potom stejnou úvahou, jakou jsme právě užili pro strany AB a AD , zjistíme, že takové body X_0 a Y_0 na obvodu čtverce $ABCD$ neexistují.

Řešením dílčí úlohy máme určen směr úseček XY .

Vedme rovnoběžky s úsečkou X_0Y_0 vrcholy D a B . Označme body D_1 a B_1 podle obrázku. Necht' E je střed úsečky DD_1 a F je střed úsečky BB_1 . Hledaná lomená čára je $AEFC$, neboť

1. AE je těžnice trojúhelníka AD_1D , která je množinou středů všech úseček $XY \parallel D_1D$, jejichž krajní body leží na straně AD_1 a na straně AD (dokáže se z podobnosti trojúhelníka AD_1D a trojúhelníka AXY);
2. EF je střední příčka rovnoběžníka D_1BB_1D , a je tedy množinou středů všech úseček $XY \parallel DD_1$, jejichž krajní body leží na stranách D_1B a DB_1 ;
3. FC je těžnice trojúhelníka BCB_1 , a je tedy množinou středů všech úseček $XY \parallel BB_1$, jejichž krajní body leží na stranách BC a B_1C .

Zbývá určit délku lomené čáry $AEFC$. Bod F leží na střední příčce čtverce $ABCD$, a proto $FC \cong FB$. Čtýřúhelník D_1BFE je rovnoběžník, tj. $FC \cong FB \cong ED_1$. Trojúhelník AD_1D je pravoúhlý, E je střed jeho přepony, a proto $DE \cong AE$. Z předchozích úvah plyne, že

$$d(AE) + d(FC) = d(DD_1).$$

Délku úsečky DD_1 určíme pomocí podobnosti trojúhelníků M_1X_0M a AD_1D . Platí

$$d(DD_1) = d(MX_0) \cdot \frac{d(DA)}{d(MM_1)} = 3 \cdot d(MX_0).$$

Užijeme-li pro trojúhelník M_1X_0M Pythagorovu větu, dostáváme, že $d(MX_0) = 2,5$ cm, tj.

$$d(DD_1) = d(AE) + d(FC) = 7,5 \text{ cm.}$$

Čtyřúhelník D_1BFE je rovnoběžník, tj.

$$EF \cong D_1B;$$

dále platí

$$d(D_1B) = d(AB) - d(AD_1).$$

Z podobnosti trojúhelníků M_1X_0M a AD_1D plyne, že

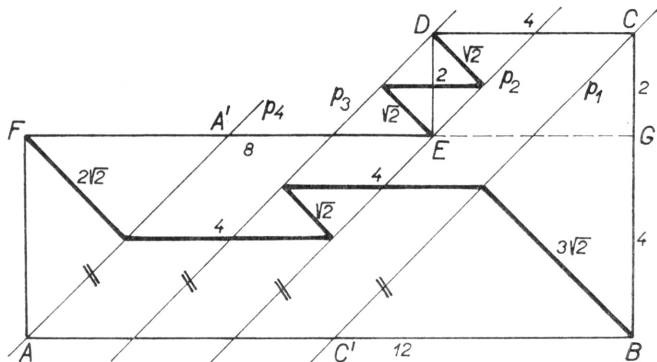
$$d(AD_1) = 1,5 \cdot \frac{6}{2} \text{ cm} = 4,5 \text{ cm,}$$

tj.

$$d(EF) = 1,5 \text{ cm.}$$

Odpověď. Délka lomené čáry $AEFC$ je $7,5 \text{ cm} + 1,5 \text{ cm} = 9 \text{ cm}$.

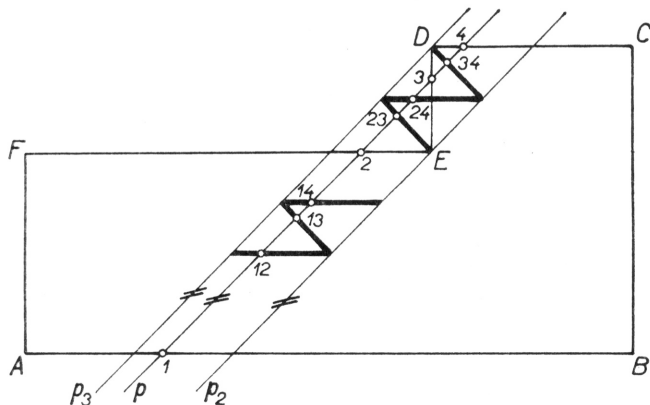
58. Je dán šestiúhelník $ABCDEF$ složený z obdélníka $ABGF$ o rozměrech $d(AB) = 12 \text{ cm}$, $d(AF) = 4 \text{ cm}$ a z obdélníka $CDEG$ o rozměrech $d(CD) = 4 \text{ cm}$, $d(CG) = 2 \text{ cm}$ (viz obr. 91). Narýsujte tento šestiúhelník a zakreslete množinu středů všech úseček kolmých k BE , jejichž krajní body leží na obvodu šestiúhelníka. Množina se skládá z osmi úseček; vypočtěte součet jejich délek.



Obr. 91

Řešení. Na obr. 91 je narýsován daný šestiúhelník. Vrcholy C , E , D , A vedeme po řadě přímky p_1 , p_2 , p_3 , p_4 kolmé k BE . Část hledané množiny $\mathbf{M}$, která leží v polorovině p_1B , je výška rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka BCC' (C' je průsečík p_1 , AB). Obdobně je tomu v polorovině p_4F , kde příslušná část množiny $\mathbf{M}$ je výška rovnoramenného pravoúhlého troj-

úhelníka AFA' (A' je průsečík p_4 , FG). V pásech (p_1p_2) a (p_3p_4) jsou příslušné části množiny $\mathbf{M}$ úsečky; leží v osách souměrnosti dvojice rovnoběžek AB , CD a AB , EF . Nejsložitější je situace v pásu (p_2p_3) . Na obr. 92 je zakreslena přímka p tohoto pásu kolmá k přímce BE . Čísly 1, 2, 3, 4 jsou označeny její průsečíky s obvodem šestiúhelníka $ABCDEF$; dvojicemi 12, 13, ..., 34 je označeno šest středů dvojic vybraných ze čtyř bodů 1, 2, 3, 4. Probíhá-li přímka p pás (p_2p_3) , dostaneme úsečky tlustě vytažené na obr. 92. Na obr. 91 jsou připsány k jednotlivým úsečkám délky (bez pojmenování cm). Sjedením těchto úseček je vyšetřovaná množina.



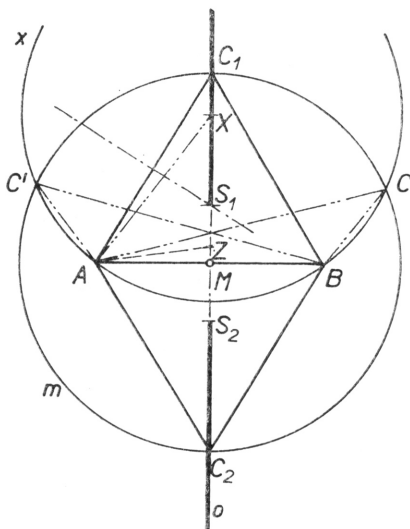
Obr. 92

Odpověď. Součet délek úseček je $10 \text{ cm} + 8 \cdot \sqrt{2} \text{ cm} \doteq 21,3 \text{ cm}$.

59. Je dána úsečka AB a kružnice m opsaná kolem středu M úsečky AB poloměrem větším než je polovina délky úsečky AB . Nechť S je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC .

a) Vyšetřte množinu všech bodů S , když bod C probíhá kružnici m .

b) Jakou množinu dostaneme, když poloměr kružnice m bude rovný polovině délky úsečky AB ?



Obr. 93

Řešení. a) Střed y kružnic, opsaných trojúhelníkům ABC , musí ležet na ose o úsečky AB , která je společnou stranou všech uvažovaných trojúhelníků (obr. 93).

Je otázka, zda obráceně každý bod přímky o patří hledané množině, kterou nazveme $\mathbf{G}$. Do $\mathbf{G}$ patří body S_1, S_2 , které jsou středy kružnic opsaných rovnoramenným trojúhelníkům ABC_1 a ABC_2 (kde C_1, C_2 jsou průsečíky přímky o s kružnicí m).

Každý bod X vnitřku úsečky S_1C_1 (popř. S_2C_2) je středem kružnice $x = (X; d(AX))$, která protne kružnici m ve dvou bodech (vzniknou tak dokonce dva uvažované trojúhelníky). Z trojúhelníka AS_1X plyne $AX > AS_1$. Protože $AS_1 \cong S_1C_1$ a $S_1C_1 > XC_1$, je $AX > XC_1$. Kružnice x tedy protíná kružnici m .

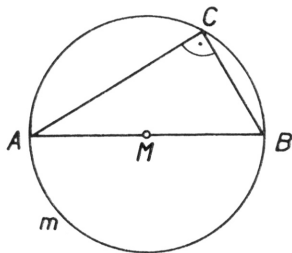
Proto bod X patří do $\mathbf{G}$. Také každý bod Y prodloužení úsečky S_1C_1 za bod C_1 (popř. S_2C_2 za bod C_2) patří do $\mathbf{G}$, neboť kružnice $y = (Y, d(AY))$ protne vždy kružnici m .

Naproti tomu bod M do $\mathbf{G}$ nepatří, neboť kružnice m a $(M; d(MA))$ se neprotnou.

Je-li Z bod vnitřku úsečky MS_1 (popř. MS_2), pak z trojúhelníka AZS_1 plyne $AZ < AS_1$. Dále platí $AS_1 \cong C_1S_1$ a $C_1S_1 < ZC_1$. Proto je $AZ < ZC_1$, takže kružnice m a $z = (Z, d(AZ))$ se neprotnou. Bod Z tedy do $\mathbf{G}$ nepatří.

b) Je-li poloměr kružnice m roven $\frac{1}{2}d(AB)$, splyne kružnice m s kružnicí opsanou každému trojúhelníku ABC . Pak $\mathbf{G}$ obsahuje jediný bod - střed M kružnice m .

Závěr. V případě a) tvoří množinu $\mathbf{G}$ body polopřímek S_1C_1 a S_2C_2 (viz obr. 93). V případě b) obsahuje množina $\mathbf{G}$ jediný bod M (obr. 94).



Obr. 94

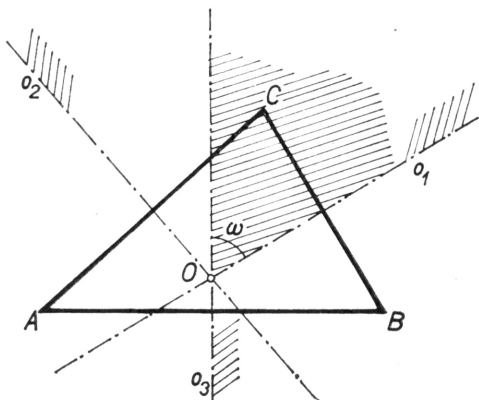
60. Je dán trojúhelník ABC . Vyšetřte množinu všech bodů X tohoto trojúhelníka, pro něž platí

$$AX \geq BX \geq CX. \quad (1)$$

Pomocí délek stran a velikostí úhlů trojúhelníka ABC vyjádřete podmínky pro to, aby

- množinou všech bodů X byl pětiúhelník;
- množinou všech bodů X byl šestiúhelník;
- množina všech bodů X obsahovala právě jeden bod;
- množina všech bodů X byla prázdná.

Řešení (obr. 95). Množinou všech bodů X , pro něž platí např. $AX \geq BX$, je polorovina o_3B , kde o_3 je osa úsečky AB . Obdobně množinou všech bodů X , pro které platí $BX \geq CX$, je polorovina o_1C , kde o_1 je osa úsečky BC . Protože se osy stran trojúhelníka ABC protínají v jediném bodě O , tvoří množinu všech bodů X , splňujících podmínku (1), dutý úhel ω , který je společnou částí polorovin o_3B a o_1C . Hledaná množina je tedy průnikem trojúhelníka ABC a úhlu ω .



Obr. 95

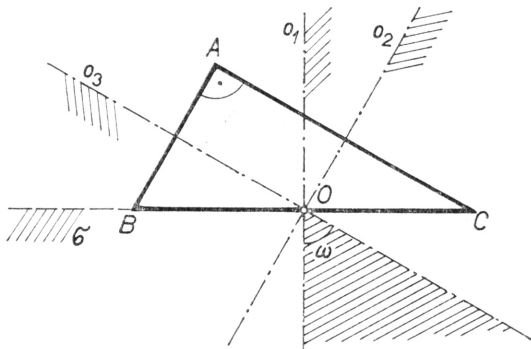
Víme, že poloha vrcholu O , tj. středu opsané kružnice, vzhledem k přímce BC závisí na tom, zda úhel BAC je tupý, pravý nebo ostrý. Rozlišujeme proto tyto dva případy:

1. Úhel BAC je tupý. Pak O leží v té polorovině σ vyřáté přímkou BC , která neobsahuje bod A . Protože i obě ramena úhlu ω leží v polorovině δ , leží celý úhel ω v polorovině σ , takže hledaná množina neobsahuje žádný bod.

2. Úhel BAC je pravý. Bod O pak leží na straně BC , obě ramena jsou opět v polorovině σ . Bod O je proto jediným bodem hledané množiny (obr. 96).

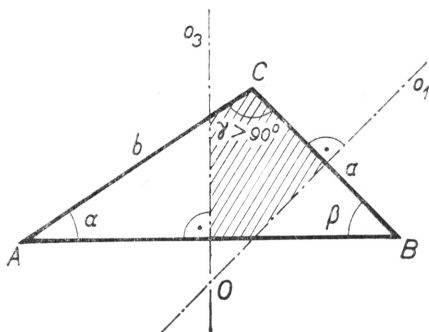
3. Úhel $BAC = \alpha$ je ostrý. Pak bod O leží v té polorovině vyřáté přímkou BC , která obsahuje vrchol A . Hledaná množina pak obsahuje střed S strany BC a další body blízké k bodu S , tedy alespoň dva různé body. Odtud již plyne, že případ d) v úloze nastane, právě když $\alpha > 90^\circ$, a případ c) nastane, právě když $\alpha = 90^\circ$. Abychom našli řešení v případech a) a b), všim-

něme si, kdy společná část libovolného trojúhelníka a libovolného dutého úhlu je pětíúhelník a kdy šestiúhelník. Protože strany této části, pokud je to mnohoúhelník, jsou částí tří stran trojúhelníka a dvou ramen úhlu, je těchto stran nejvýše pět. Nikdy tedy nevznikne šestiúhelník. Pětíúhelník vznikne právě když jeden vrchol trojúhelníka leží uvnitř úhlu, zbylé dva vně úhlu tak, že úsečka je spojující protne obě ramena úhlu.



Obr. 96

Vraťme se k případu ostrého úhlu BAC . Protože ω je společná část polorovin o_1C a o_3B a protože B není v o_1C , A není v o_3B , nastane případ a) právě když C je v o_3B čili $a < b$ (C je vždy v o_1C) a strana AB protne obě ramena úhlu ω (obr. 97). Strana AB protne rameno obsažené v o_3 , právě když O leží v té polorovině vyřáté přímkou AB , která neobsahuje bod C . Pak však už AB protne i druhé rameno. Nastane tedy případ a), právě když úhel γ je tupý a když úhel α je menší než β , neboť $a < b$ (α je pak skutečně ostrý).



Obr. 97

Závěr. Podmínky, kdy nastanou jednotlivé případy, jsou:

- a) $\gamma > 90^\circ, \alpha < \beta$;
- b) nikdy;
- c) $\alpha = 90^\circ$;
- d) $\alpha > 90^\circ$.

61. V rovině je dána úsečka AB . Vyšetřte množinu vrcholů C všech trojúhelníků ABC dané roviny, pro jejichž vnitřní úhly (při obvyklém značení) platí

$$\alpha \geq \beta > \gamma. \quad (1)$$

Řešení. Platí-li pro vnitřní úhly trojúhelníka ABC nerovnosti (1), pak pro jeho strany je

$$a \geq b \text{ a zároveň } b > c. \quad (2)$$

Také obráceně z nerovností (2) plynou nerovnosti (1).

Při vyšetřování množiny vrcholů C docházíme k těmto třem závěrům:

(a) Množina všech bodů C , pro něž platí

$$d(BC) = a \geq b = d(AC),$$

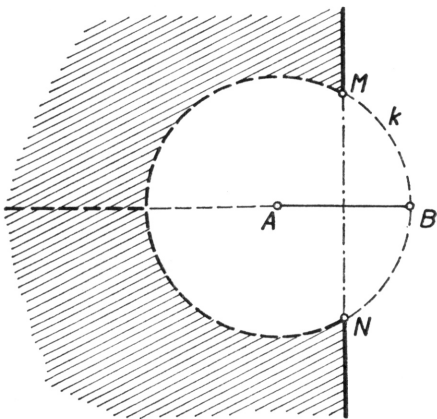
je uzavřená polorovina π , jejíž hranicí (obr. 98) je osa o úsečky AB a jež obsahuje bod A .

(b) Množina všech bodů C , pro které je

$$d(AC) = b > c = d(AB),$$

je vnější oblast kružnice k se středem A a poloměrem $c = d(AB)$.

(c) Bod C je vrcholem trojúhelníka ABC , a proto bod C neleží na přímce AB .

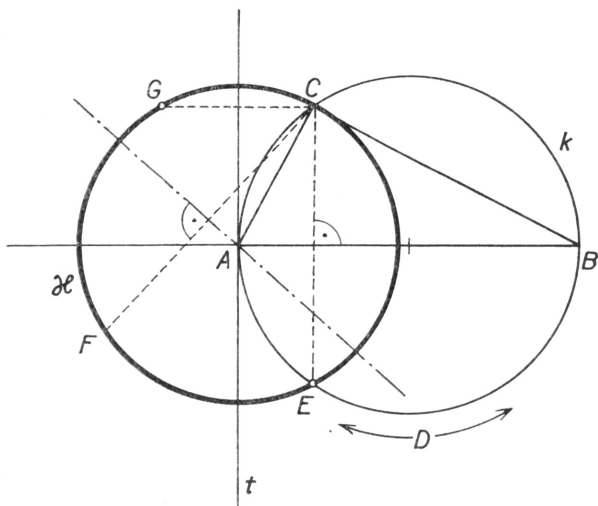


Obr. 98

Závěr. Hledaná množina je tedy průnikem uzavřené polopřímky π a vnější oblasti kružnice k bez bodů přímky AB . Průsečíky M, N kružnice k a osy úsečky AB k hledané množině ovšem nepatří.

62. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB . Ke každému bodu D kružnice opsané trojúhelníku ABC ($D \neq A, D \neq B$) sestrojíme bod E souměrně sdružený s bodem C podle přímky AB a bod F souměrně sdružený s bodem C podle přímky AD .

Vyšetřte množinu a) všech bodů E ; b) všech bodů F .



Obr. 99

Řešení. a) Trojúhelník ABC je pevně dán (obr. 99), a proto bod souměrně sdružený s bodem C podle přímky AB je právě jeden. Množina všech bodů E je jednoprvková.

b) Označme $\mathbf{M}$ hledanou množinu všech bodů F . Bod F je souměrně sdružen s bodem C podle osy AD , a proto $AF \cong AC$, kde AC je pevná úsečka. Proto každý bod F leží na kružnici $\kappa = (A, r = d(AC))$. Platí tedy $\mathbf{M} \subset \kappa$.

Dále musíme zjistit, zda každý bod kružnice κ náleží do hledané množiny $\mathbf{M}$. Zvolme na kružnici κ libovolný bod F . Nejdříve budeme hledat osu o dvojice bodů C a F . Je vhodné rozlišit dva případy:

α) Necht $F \neq C$. Body F a C leží na kružnici κ , a proto osa o této dvojice bodů prochází bodem A . Bod F bude náležet množině $\mathbf{M}$, právě když přímka o bude mít s kružnicí k společný bod D , různý od bodu A a od bodu B . Je tomu tak, právě když přímka o není ani přímkou AB , ani tečnou t kružnice k v bodě A . Tedy $F \in \mathbf{M}$, právě když $F \neq E$ a $F \neq G$, kde bod G je souměrně sdružený s bodem C podle přímky t .

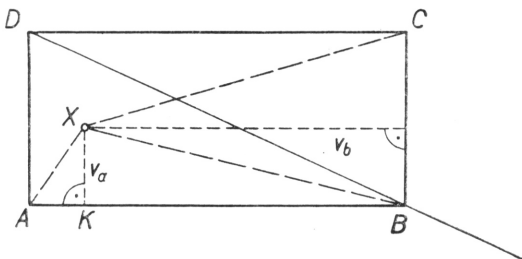
β) Necht $F = C$. Pak je bod F souměrně sdružený s bodem C podle každé přímky, která prochází bodem C , tedy také podle přímky AC . V tomto případě je tedy $D = C$ a uvažovaný bod F (tj. C) náleží do množiny $\mathbf{M}$.

Závěr. Hledanou množinou všech bodů F je množina

$$\mathbf{M} = \kappa \setminus \{E, G\}.$$

63. Je dán pravoúhelník $ABCD$. Najděte množinu všech takových bodů X pravoúhelníka $ABCD$, kde pro obsahy trojúhelníků platí

$$\triangle ABX = \triangle BCX < \triangle ADX.$$



Obr. 100

Řešení. Označme $\mathbf{M}_1$ množinu všech bodů X pravoúhelníku $ABCD$, pro něž je $\triangle ABX = \triangle BCX$ a $\mathbf{M}_2$ množinu všech bodů X daného pravoúhelníku, pro které platí $\triangle BCX < \triangle ADX$. Potom hledaná množina je průnik

$$\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2. \quad (1)$$

Začneme hledáním množiny $\mathbf{M}_1$. Nechť bod $X \in \mathbf{M}_1$ (viz obr. 100). Pak bod X neleží ani na AB , ani na BC . Označme v_a, v_b vzdálenosti bodu X od přímek AB, BC . Potom

$$\frac{1}{2} d(AB) \cdot v_a = \frac{1}{2} d(BC) \cdot v_b, \quad (2)$$

tj.

$$\frac{v_a}{v_b} = \frac{d(BC)}{d(AB)}. \quad (3)$$

Označme K patu výšky z bodu X na přímku AB . Pak z rovnosti (3) plyne

$$\frac{d(KX)}{d(KB)} = \frac{d(AD)}{d(AB)}, \quad (4)$$

tj. pravoúhlé trojúhelníky ABD a KBX jsou podobné. Úhly $\sphericalangle ABD$ a $\sphericalangle KBX$ jsou tedy shodné. Body D a X leží v téže polorovině určené přímkou AB , takže bod X leží na polo-přímce BD .

Obráceně se snadno dokáže, že pro každý bod X , jenž leží na úhlopříčce BD , přičemž $X \neq B$, platí (4), tj. podle (3) a (2) obsahy trojúhelníků ABX a BCX se sobě rovnají.

Zjistili jsme tedy, že množinou $\mathbf{M}_1$ je úhlopříčka BD bez bodu B .

Množina $\mathbf{M}_2$ se najde snadno (obr. 101). V pravoúhelníku $ABCD$ je $AD \cong BC$, a proto nerovnost

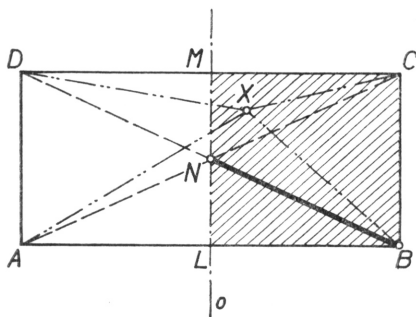
$$\triangle BCX < \triangle ADX$$

platí, právě když vzdálenost bodu X od přímky BC je menší (avšak nenulová) než vzdálenost bodu X od přímky AD . Tyto dvě podmínky splňuje bod X , právě když neleží na přímce BC a zároveň leží uvnitř poloroviny oB , kde přímka o je osou

rovnoběžkového pásu určeného přímkami AD a BC . Označme L, M průsečíky osy o a přímek AB a CD . Potom množina $\mathbf{M}_2$ je sjednocením vnitřku pravoúhelníku $LBCM$ a vnitřků úseček BL a CM .

Nyní už můžeme určit hledanou množinu, tj. průnik (1). Je jím vnitřek úsečky BN , kde N je průsečík úhlopříček pravoúhelníku $ABCD$.

Závěr. Hledanou množinu všech bodů X tvoří body úsečky BN bez bodů B, N .

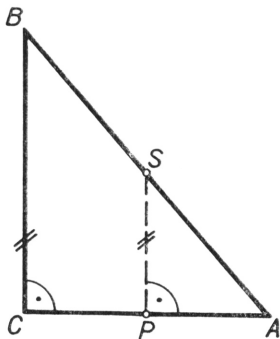


Obr. 101

VII. Úlohy konstrukční

64. Je dána úsečka SP délky 31 mm; bod S má být středem přepony AB a bod P středem odvěsny AC pravoúhlého trojúhelníka ABC .

- Sestrojte tento trojúhelník, je-li $d(AB) = 98$ mm.
- Zjistěte podmínku řešitelnosti úlohy.



Obr. 102

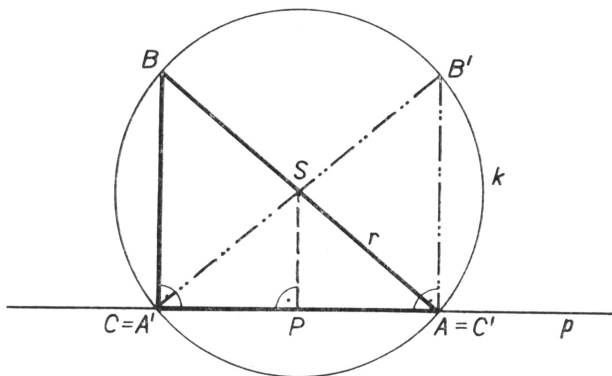
Řešení. a) **Rozbor.** Úsečka SP je zřejmě střední příčkou trojúhelníka ABC s pravým úhlem $\sphericalangle ACB$ (obr. 102). Platí tedy

$$d(BC) = 2 \cdot d(SP), \quad BC \parallel SP.$$

Proto i úhel $\sphericalangle SPA$ je pravý; protože bod S je středem strany AB , je $d(SA) = \frac{1}{2} d(AB)$ a pomocný trojúhelník APS je sestrojitelný podle věty *Ssu*.

Protože z textu úlohy vyplývá, že jde o úlohu polohovou («Je dána úsečka $SP \dots$ »), postupujeme při **konstrukci** takto (obr. 103):

1. Sestrojíme danou úsečku SP délky 31 mm.
2. Bodem P vedeme kolmici p k přímce SP .
3. Kolem bodu S opíšeme kružnici k s poloměrem $r = d(SA) = \frac{1}{2}d(AB) = 49$ mm.
4. Průsečík kružnice k s přímkou p je hledaný vrchol A .
5. Bod B sestrojíme na polopřímce opačné k polopřímce SA tak, že $SB \cong SA$.
6. Bod C sestrojíme na polopřímce opačné k polopřímce PA tak, že $PC \cong PA$.



Obr. 103

Zkouška. Dokážeme, že trojúhelník ABC je hledaným trojúhelníkem. Z bodů 5 a 6 konstrukce plyne, že body S, P jsou po řadě středy stran AB, AC . Úhel $\sphericalangle BCA$ je pravý, neboť podle vlastností střední příčky trojúhelníka je $BC \parallel SP \perp p$.

Protože poloměr $d(SA) = 49$ mm je větší než vzdálenost středu S kružnice k od přímky p , tj. než $d(SP) = 31$ mm, dostaneme právě dva body A, A' , z nichž každý vede k jednomu řešení úlohy. Úloha má tedy v případě a), tj. pro $d(AB) = 98$ mm, právě dvě řešení.

b) Z konstrukce je zřejmé, že úloha má právě dvě řešení v případě, že SA je větší než SP , čili

$$AB > 2 \cdot SP.$$

Jinak úloha nemá řešení.

65. Je dán trojúhelník ABC .

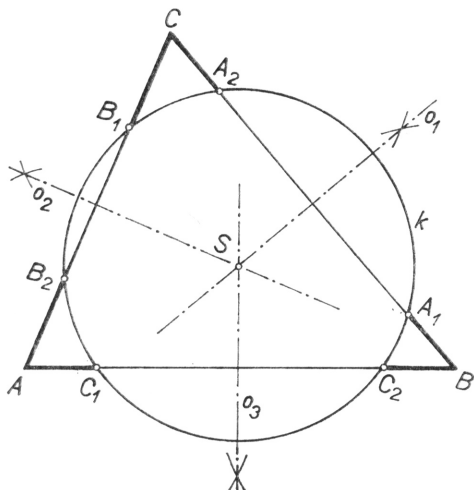
Sestrojte střed S kružnice k , která protíná strany trojúhelníka AB, BC, CA po řadě ve dvojicích bodů (různých nebo splývajících)

$$C_1, C_2; A_1, A_2; B_1, B_2$$

tak, že platí

$$AC_1 \cong BC_2, BA_1 \cong CA_2, CB_1 \cong AB_2.$$

Stanovte podmínky pro poloměr kružnice k .



Obr. 104

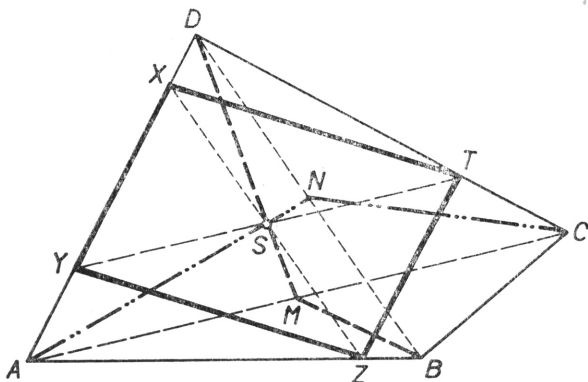
Řešení. Rozbor. Předpokládáme, že kružnice $k = (S; r)$ na obr. 104 má požadované vlastnosti. Jsou-li C_1, C_2 dva různé body, pak bod S leží na ose o_3 této úsečky; protože však $AC_1 \cong \cong BC_2$, je o_3 osou i úsečky AB . Platí-li $C_1 = C_2$, pak AB je tečnou kružnice k a rovněž platí, že bod S leží na ose úsečky AB . Obdobně dostaneme, že bod S leží na ose o_1 úsečky BC a na ose o_2 úsečky CA . Z toho plyne velmi jednoduchá **konstrukce**:

1. Bod S sestrojíme jako střed kružnice trojúhelníku ABC opsané.

2. Poloměr r hledané kružnice musí být větší nebo roven největší ze vzdáleností bodu S od stran trojúhelníka a musí být menší nebo roven poloměru kružnice trojúhelníku opsané.

Zkoušku vlastností kružnice k požadovaných textem úlohy provedeme obrácením úvahy z rozboru.

66. Je dán čtyřúhelník $ABCD$, jehož strany mají délky $d(AB) = 70 \text{ mm}$, $d(BC) = 35 \text{ mm}$, $d(CD) = 75 \text{ mm}$, $d(DA) = 65 \text{ mm}$ a úhlopříčka má délku $d(BD) = 70 \text{ mm}$. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$ a pak sestrojte rovnoběžník, jehož všechny čtyři vrcholy leží na obvodu čtyřúhelníka $ABCD$ a jehož úhlopříčky jsou rovnoběžné s úhlopříčkami daného čtyřúhelníka. Sestrojte nejprve střed hledaného rovnoběžníka.



Obr. 105

Řešení. Sestrojíme nejprve trojúhelník ABD , a pak v poloovině opačné k BDA sestrojíme trojúhelník BCD (obr. 105), a tak získáme daný čtyřúhelník $ABCD$.

Rozbor vlastní úlohy. Střed S hledaného rovnoběžníka náleží dvěma množinám bodů: množině Γ_1 středů všech příček čtyřúhelníka $ABCD$ rovnoběžných s přímkou AC , a množině Γ_2 středů všech příček čtyřúhelníka $ABCD$ rovnoběžných s přímkou BD . Množina Γ_1 je sjednocení těžnic BM , DM trojúhelníků ACB , ACD (bez bodů B , D), množina Γ_2 je

Z toho plyne **konstrukce**:

1. Sestrojíme dvě rovnoběžné přímky m, n ve vzdálenosti $v = 3$ cm.
2. Na přímce m zvolíme bod A a opíšeme kružnici $k = (A; 2v)$.
3. Průsečík n a k je bod C .
4. Osa o úsečky AC protne přímky m, n po řadě v bodech B, D .

Zkouška. Sestrojený čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník, protože se jeho úhlopříčky půlí, a protože jsou na sebe kolmé, je to kosočtverec nebo čtverec. Čtverec to nemůže být, neboť v tomto případě (obr. 107) by pravoúhlý trojúhelník BSC musel být rovnostranný, tj. platilo by

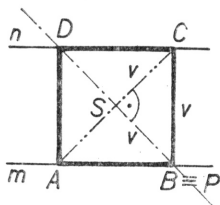
$$d(BS) = d(SC) = d(CB) = v. \quad (1)$$

Pro úhlopříčku čtverce však platí $d(AC) = 2 \cdot d(SC) = v\sqrt{2}$ čili

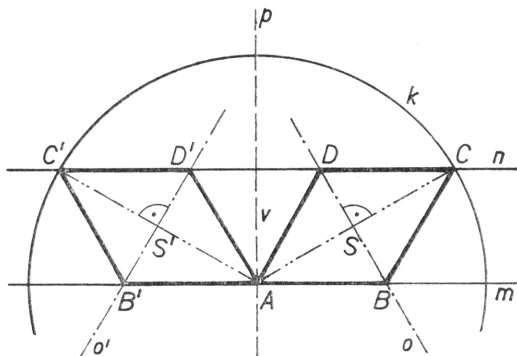
$$d(BS) = d(SC) = v \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (2)$$

Protože vztahy (1) a (2) si neodpovídají, nemůže čtverec konstrukcí vzniknout. Sestrojený čtyřúhelník je tedy kosočtverec. Jeho výška je $v = 3$ cm podle 1. bodu konstrukce a úhlopříčka AC má délku $2v$ podle 2. a 3. bodu konstrukce.

Protože vzdálenost středu A kružnice k od přímky n je $v = 3$ cm a je menší než poloměr $2v = 6$ cm kružnice, dostaneme v konstrukci (viz obr. 108) dva různé body C a C' , které vedou k dvěma shodným výsledkům úlohy (souměrně sdruženým podle přímky p procházející bodem A kolmo k oběma rovnoběžkám m, n). Dostáváme tedy jediné řešení úlohy.

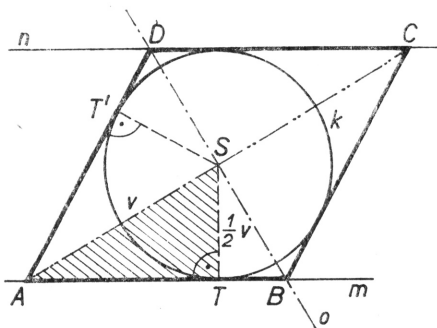


Obr. 107



Obr. 108

Jiné řešení. Rozbor (obr. 109). Průměr kružnice k vepsané kosočtverci $ABCD$ je v našem případě roven výšce $v = 3$ cm kosočtverce. Označme dotykový bod kružnice k na straně AB písmenem T , na straně AD písmenem T' . Ve vyšrafovaném pravoúhlém trojúhelníku ATS je známa přepona AS délky v a odvěsna ST délky $\frac{1}{2}v$; je tedy tento trojúhelník podle věty *Ssu* sestrojitelný.



Obr. 109

Konstrukce: 1. Sestrojíme trojúhelník ATS podle Ssu .

2. Na prodloužení úsečky AS za bod S sestrojíme bod C tak, že $d(SC) = d(AS) = v$.

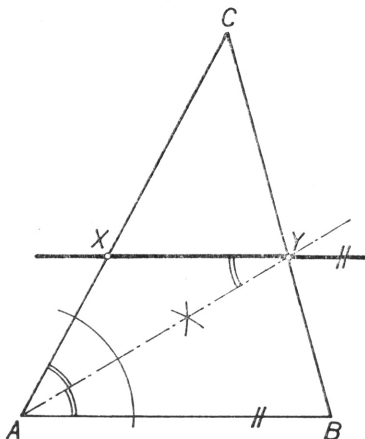
3. Bodem C vedeme přímku $n \parallel AT$.

4. Osa o úsečky AC protne přímky AT , n po řadě v bodech B , D .

Zkouška tohoto řešení úlohy odpovídá prvnímu odstavci zkoušky prvního řešení. Protože jsme v druhé konstrukci vyšli přímo z trojúhelníka určeného podle věty Ssu , odpadla úvaha o dalších výsledcích konstrukce. V druhém případě má každý krok konstrukce jediný výsledek, a úloha má tedy jediné řešení - kosočtverec. Příklad čtverce nastat nemůže, neboť pomocný trojúhelník ATS by musel být rovnoramenný. To však zde není splněno.

68. Narýsujte trojúhelník ABC . Uvnitř strany AC sestrojte bod X a uvnitř strany BC bod Y tak, aby platilo

$$XY \parallel AB, AX \cong XY.$$



Obr. 110

Řešení. V rozboru předpokládáme (viz obr. 110), že body X , Y splňují podmínky úlohy, tj.

$$XY \parallel AB, AX \cong XY.$$

Proto je trojúhelník AYX rovnoramenný; platí

$$\sphericalangle XAY \cong \sphericalangle XYA. \quad (1)$$

Protože přímka AY protíná rovnoběžky AB , XY , platí pro střídavé úhly

$$\sphericalangle XYA \cong \sphericalangle YAB. \quad (2)$$

Ze vztahů (1) a (2) vyplývá

$$\sphericalangle XAY \cong \sphericalangle YAB, \quad (3)$$

takže polopřímka AY je osou úhlu $\sphericalangle XAB \cong \sphericalangle CAB$.

Na základě tohoto výsledku dostaneme již **konstrukci** bodů X , Y :

1. Osa úhlu CAB protne stranu BC v hledaném bodě Y .
2. Rovnoběžka bodem Y s přímkou AB protne úsečku AC v bodě X .

Zkouška. Z 2. bodu konstrukce je zřejmé, že $XY \parallel AB$. Dokážeme, že $AX \cong XY$.

Podle 1. bodu konstrukce je polopřímka AY osou úhlu CAB , a platí tedy (3). Z 2. kroku konstrukce vyplývá platnost vztahu (2) a platí tedy celkem

$$\sphericalangle XAY \cong \sphericalangle XYA.$$

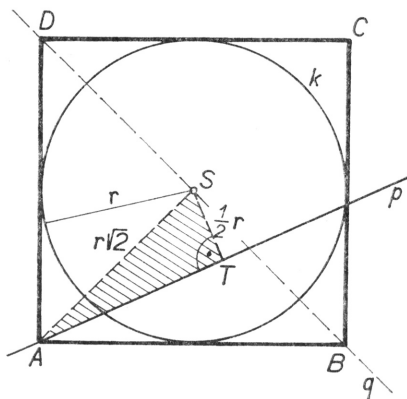
Trojúhelník AXY je tedy rovnoramenný se základnou AY a s ramenem $AX \cong XY$, což jsme měli dokázat.

Každý z kroků konstrukce vede k jedinému částečnému výsledku, takže úloha má jediné řešení.

Poznámka. Tvar trojúhelníka ABC má sice vliv např. na vzájemný poměr úseček AX a CX apod. v dané úloze (říkáme též, že *tvar* trojúhelníka je »*parametrem úlohy*«), ale protože pro kterýkoli trojúhelník jsou kroky konstrukce proveditelné tímž způsobem, neovlivňuje tvar trojúhelníka existenci a počet řešení, a proto diskusi neprovádíme. Platí tedy řešení pro libovolný trojúhelník ABC .

69. Je dána kružnice $k = (S; r)$ a přímka p ve vzdálenosti $v = \frac{1}{2}r$ od bodu S .

Sestrojte čtverec $ABCD$ opsaný kružnici k , jehož vrchol A leží na přímce p . Dokažte, že úloha má právě dvě řešení.



Obr. 111

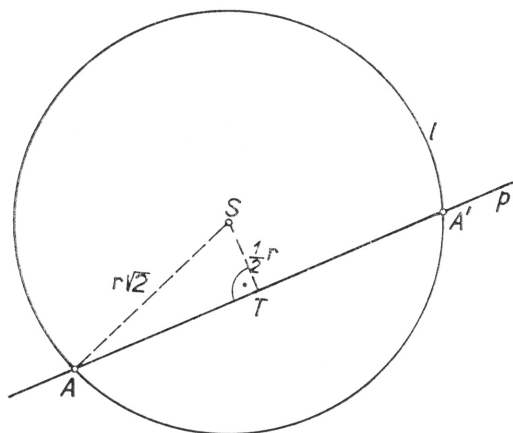
Řešení. Rozbor (obr. 111). Poloměr r kružnice vepsané čtverci je roven polovině jeho strany, tj. $d(AB) = a = 2r$.

Vzdálenost AS je $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$ čili $d(AS) = r\sqrt{2}$ je délka sestrojitelné

úsečky. Vrchol A má tedy ležet na přímce p a současně na kružnici $l = (S; r\sqrt{2})$. Existuje-li společný bod přímky p a kružnice l , je to bod A ; pak je známa polovina AS úhlopříčky AC . Protože úhlopříčky čtverce jsou shodné a na sebe kolmé, můžeme už přikročit ke **konstrukci**:

1. Sestrojíme danou kružnici k a přímku p .

2. Pomocně sestrojíme úsečku délky $r\sqrt{2}$ (je to úhlopříčka pomocného čtverce o straně r).
3. Opíšeme kružnici $l = (S; r\sqrt{2})$.
4. Průsečík přímky p a kružnice l je bod A .
5. Na prodloužení úsečky AS za bod S sestrojíme bod C tak, že $SC \cong SA$.
6. Sestrojíme přímku $q \perp AC$ bodem S a na ní body $B \neq D$ tak, že $SB \cong SD \cong SA$.



Obr. 112

Zkouška je jednoduchá; z 5. a 6. bodu konstrukce ihned plyne, že čtyřúhelník $ABCD$ je čtverec. Bod A leží na přímce p (viz bod 4). Protože úhlopříčka sestrojeného čtverce má délku $2r\sqrt{2}$, je jeho strana $2r$. Jemu vepsaná kružnice má též střed S a též poloměr r jako kružnice daná.

Zbývá určit počet řešení. Kružnice l protne přímku p vždy ve dvou různých bodech A, A' , protože $AS > ST$, tj. $r\sqrt{2} > \frac{1}{2}r$ (obr. 112). Každý z bodů A, A' vede podle naší konstrukce k jednomu čtverci; každý z čtverců má za svůj střed bod S . Je tedy otázka, zda tyto čtverce splynou, nebo jsou různé. Jde totiž o polohovou úlohu, v níž každý z výsledků konstrukce, který splňuje podmínky úlohy, je řešením úlohy. Oba čtverce $ABCD$ a $A'B'C'D'$ by splynuly, kdyby bod A' byl některým z vrcholů čtverce $ABCD$. Avšak $A' \neq A$, neboť přímka p je sečnou kružnice l a také $A' \neq C$, neboť p neprochází bodem S . Možnosti $A' = B$ nebo $A' = D$ jsou také vyloučeny, neboť úhel $\sphericalangle ASA'$ není pravý, což vyplývá z délek stran trojúhelníků ATS a $A'TS$. Je totiž

$$d(AT) = d(A'T) = \sqrt{2r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{1}{2}r\sqrt{7} \neq \frac{r}{2}.$$

Proto $AT \neq ST$ a $\sphericalangle AST \neq 45^\circ$.

Úloha má tedy vždy dvě různá řešení.

70. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky jeho střední příčky $d(MN) = 6$ cm, výšky $v = 5$ cm a ramena $d(AD) = 6$ cm.

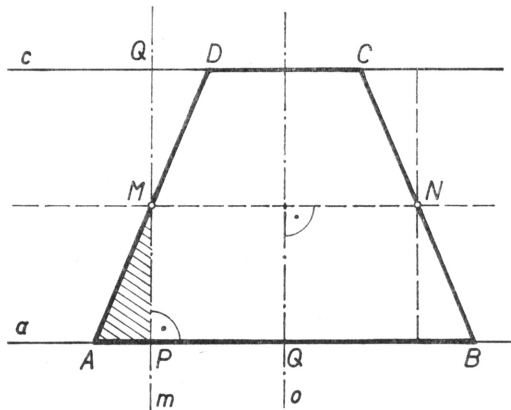
Řešení. Rozbor. Na obr. 113 je znázorněno předpokládané řešení: rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ s osou souměrnosti o . Bod M je středem ramena AD , bod N středem ramena BC . Kolmice vedená bodem M k přímkám pásu $AB \parallel CD$ spolu-vytvoří se stranami lichoběžníka dva shodné pravoúhlé troj-

úhelníky APM a DQM . Tyto trojúhelníky jsou z podmínek úlohy sestrojitelné podle věty Ssu (např. $d(PM) = \frac{1}{2}v, d(AM) = \frac{1}{2}d(AD)$). Odtud již plyne **konstrukce** (obr. 114).

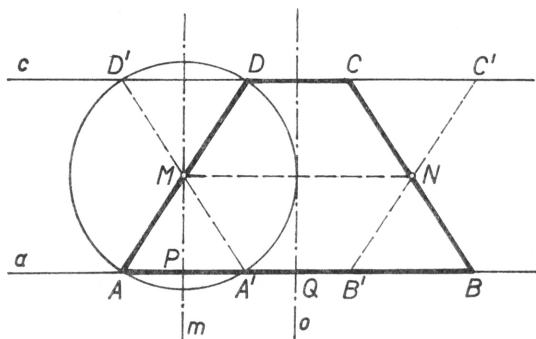
1. Sestrojíme střední příčku MN délky 6 cm.
2. Bodem M vedeme přímku $m \perp MN$.
3. Sestrojíme rovnoběžky a, c s přímkou MN ve vzdálenosti $\frac{1}{2}v = 2,5$ cm.
4. Průsečík přímek m, a je bod P .
5. Kolem bodu M opíšeme kružnici k s poloměrem $d(AM) = \frac{1}{2}d(AD) = 3$ cm.
6. Protože $AM > MP$, protne kružnice k každou z přímek a, c ve dvou bodech; z nich vybereme dvojice bodů A, D , popř. A', D' tak, aby tvořily průměr kružnice k a zároveň rameno lichoběžníka.
7. Pomocí osové souměrnosti podle osy o úsečky MN doplníme vrcholy B, C , popř. B', C' .

Zkouška. Za podmínky $AM > MP$, tj. $AD > v$, vzniknou dva lichoběžníky $ABCD, A'B'C'D'$. Každý z nich splňuje podmínky úlohy. Např. lichoběžník $ABCD$ má střední příčku MN délky 6 cm, jak plyne z 1. a 6. bodu konstrukce. Výška lichoběžníka má velikost $v = 5$ cm podle 3. bodu. Délka ramen AD a BC je 6 cm podle 5. a 6. bodu konstrukce.

Lichoběžník $A'B'C'D'$ má obdobně požadované vlastnosti až na to, že jsou prohozeny velikosti obou základů ($AB \cong C'D', CD \cong A'B'$). Úloha má tedy dvě různá řešení.



Obr. 113



Obr. 114

Poznámka. Úloha byla řešena pro rozměry dané v úloze. Připustíme-li však, že rozměry jsou libovolné (tj. jsou zadány parametricky), vznikne zajímavá diskuse:

Za podmínky $AM > MP$, tj.

$$d(AD) > v, \quad (1)$$

vzniknou dva lichoběžníky $ABCD$, $A'B'C'D'$ pouze tehdy, je-li splněna ještě další podmínka

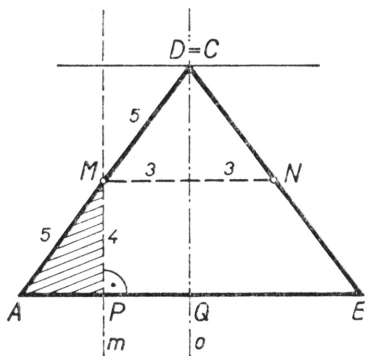
$$d(MN) > \sqrt{(d(AD))^2 - v^2}. \quad (2)$$

Podmínka (1) je zřejmě pro konstrukci podmínkou nutnou; při jejím splnění je možno trojúhelník APM vždy sestrojit. Tato podmínka však při konstrukci lichoběžníků nestačí. Zvolíme-li totiž např. $d(AD) = 10$ cm, $v = 8$ cm, $d(MN) = 6$ cm (obr. 115), trojúhelník APM sice sestrojíme, ale po další konstrukci body D a C splynou a vznikne trojúhelník ABC ; platí totiž $d(MN) = \frac{1}{2} d(AB)$. Odtud už dostaneme pro konvexní lichoběžník podmínku (2), neboť

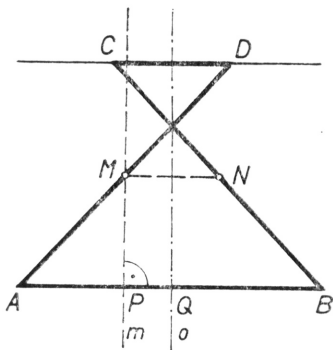
$$d(AB) = 2 \cdot d(AQ) = \sqrt{(d(AD))^2 - v^2}.$$

Pro $d(MN) < \sqrt{(d(AD))^2 - v^2}$ konvexní lichoběžník nedostaneme (obr. 116).

Proto říkáme, že teprve oba vztahy (1) a (2) tvoří tzv. *podmínku postačující* pro konstrukci lichoběžníka při parametrickém zadání naší úlohy.



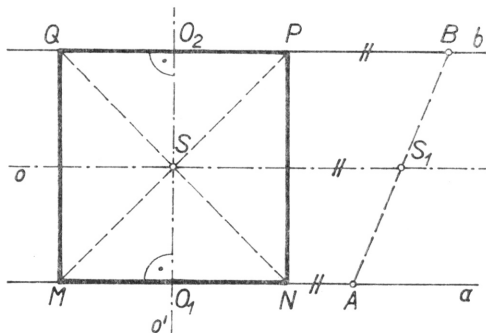
Obr. 115



Obr. 116

71. Jsou dány tři různé body A , B , S , které neleží v přímce. Sestrojte čtverec $MNPQ$, který má tyto vlastnosti:

- Bod S je jeho středem.
- Přímka MN prochází bodem A a přímka PQ bodem B .



Obr. 117

Řešení. Rozbor. Na obr. 117 je načrtnuto předpokládané řešení úlohy (všimněte si, že tento pomocný obrázek pro rozbor začneme kreslit od čtverce $MNPQ$ a k němu teprve připojíme dané údaje - při konstrukci ovšem budete vycházet z daných prvků).

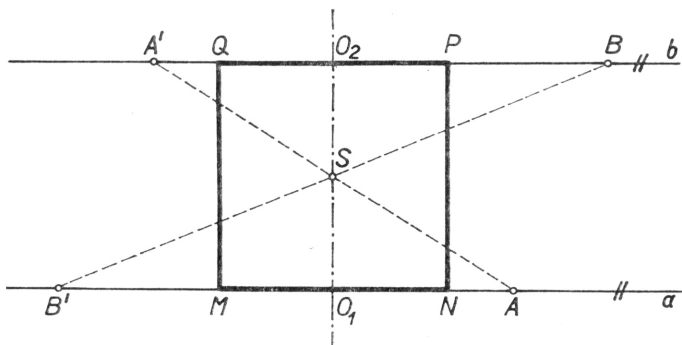
Bod S je středem čtverce $MNPQ$ a leží např. na ose o pásu rovnoběžek $MN \parallel PQ$, které po řadě obsahují body A, B . Střed S_1 úsečky AB je také bodem osy o uvedeného pásu. Osa pásu je rovnoběžná s jeho hraničními přímkami, šíře pásu je rovna délce strany hledaného čtverce. Můžeme tedy přistoupit ke **konstrukci**:

1. Sestrojíme střed S_1 úsečky AB a přímku $o = SS_1$.
2. Rovnoběžky a, b s osou o vedené po řadě body A, B vytvoří pás, jehož šířku zjistíme např. kolmicí o' bodem S k hranicím pásu.
3. Paty této kolmice určí po řadě středy O_1, O_2 stran MN, PQ hledaného čtverce.

4. Sestrojíme vrcholy M, N, P, Q hledaného čtverce na hranicích pásu $a \parallel b$ tak, že $MO_1 \cong NO_1 \cong SO_1 \cong PO_2 \cong QO_2$.

Zkouška. To, že sestrojený čtverec $MNPQ$ má bod S za střed, zjistíme ze shodnosti (podle věty *sus*) trojúhelníků $MO_1S, NO_1S, PO_2S, QO_2S$. Z bodu 2 konstrukce je zřejmé, že přímka MN prochází bodem A a přímka PQ bodem B .

Úloha, jak vyplývá z konstrukce pro body A, B, S neležící na přímce, má jediné řešení, nehledíme-li na možnou záměnu pojmenování bodů M a N , popř. P a Q .



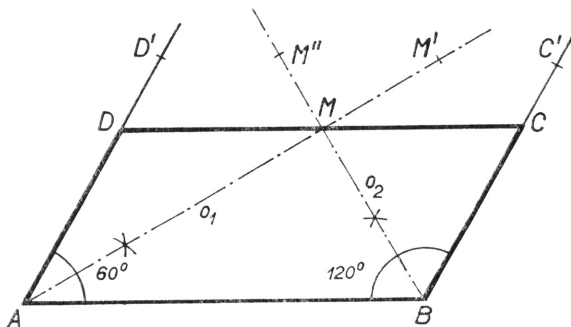
Obr. 118

Poznámka. Kdybychom při rozboru vyšli ze středové souměrnosti čtverce $MNPQ$ se středem S (obr. 118), bylo by možno přímky a, b sestřit jednodušeji: $a = AB', b = BA'$, kde body A', B' jsou středově souměrné po řadě k bodům A, B . Jinak by řešení úlohy probíhalo obdobně.

72. a) Narýsujte rovnoběžník $ABCD$ těchto vlastností $d(AB) = 7$ cm, $\sphericalangle BAD = 60^\circ$, strana CD prochází průsečíkem M os úhlů $\sphericalangle BAD$ a $\sphericalangle ABC$.

b) Dokažte, že pro tento rovnoběžník platí

$$d(AB) = 2 \cdot d(AD).$$



Obr. 119

Řešení. a) Rozbor provedeme na obr. 119. Úhel $\sphericalangle ABC$ má velikost 120° . Konstrukci rovnoběžníka provedeme tedy takto:

1. Sestrojíme úsečku AB délky 7 cm.
2. Ve zvolené polorovině s hranicí AB sestrojíme úhly $\sphericalangle BAD' = 60^\circ$ a $\sphericalangle ABC' = 120^\circ$ a jejich osy $o_1 = AM'$ a $o_2 = BM''$.
3. Průsečíkem M přímk o_1 a o_2 vedeme přímk $m \parallel AB$.
4. Průsečík přímk m a AD' je bod D , průsečík přímk m a BC' je bod C .

Dokážeme, že čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník a že má po-

žadované vlastnosti. Z 2. bodu konstrukce plyne, že $AD' \parallel BC'$.
Bod M existuje, neboť podle vlastností os úhlů o_1, o_2 platí

$$\sphericalangle BAM' + \sphericalangle ABM'' = 30^\circ + 60^\circ < 180^\circ.$$

Úhel $\sphericalangle BAD = 60^\circ$ byl použit ve 2. bodě konstrukce. Také strana CD je podle 3. bodu konstrukce rovnoběžná s AB .

b) Z konstrukce vyplývá, že

$$\sphericalangle BAM = \sphericalangle MAD = \sphericalangle DMA = 30^\circ.$$

Proto v rovnoramenném trojúhelníku AMD se základnou AM je

$$AD \cong DM. \quad (1)$$

Obdobně dokážeme, že v trojúhelníku BMC platí

$$BC \cong CM. \quad (2)$$

Z (1) a (2) plyne dokazovaný vztah

$$d(AB) = 2 \cdot d(AD),$$

neboť $AB \cong CD \cong DM + MC, BC \cong AD$.

73. Narýsujte přímku p a zvolte dva různé body X, Y mimo ni.

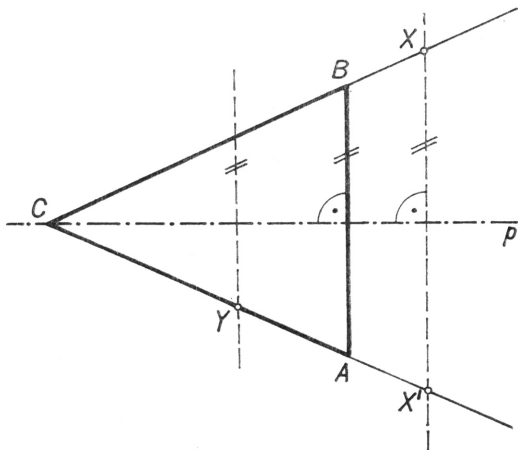
Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB , který má tyto vlastnosti:

a) Přímka p je osou souměrnosti tohoto trojúhelníka.

b) Délka ramen je 6 cm.

c) Polopřímka CA prochází bodem Y , polopřímka CB bodem X .

Řešení. Rozbor. Z podmínky c) a a) vyplývá, že body X , Y nemohou ležet uvnitř téže poloroviny vyřaté přímkou p , má-li mít úloha řešení.

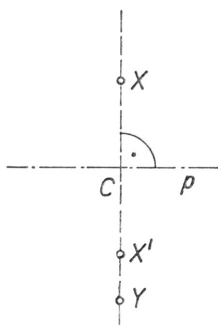


Obr. 120

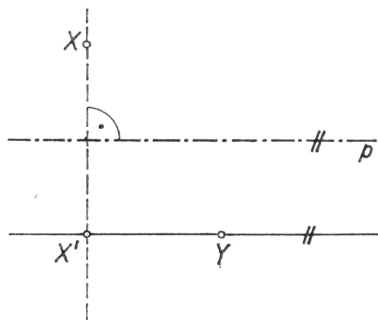
Na obr. 120 je znázorněno předpokládané řešení úlohy. Protože přímka p je osou souměrnosti trojúhelníka, jsou souměrně sdružené jak body A , B , tak i polopřímky CA a CB ; bod C je v této osové souměrnosti samodružný. Proto bod X' souměrně sdružený s bodem X podle přímky p padne na přímku CA . Je-li $X' \neq Y$, jsou přímky $X'Y$ a CA totožné a konstrukce trojúhelníka bude jednoduchá (případ $X' = Y$ vyšetříme zvlášť):

1. Sestrojíme bod X' souměrně sdružený s bodem X podle přímky p .
2. Existuje-li průsečík přímky $X'Y$ s přímkou p , je to bod C .
3. Na polopřímky CX , popř. CY , nanese se úsečku délky 6 cm a dostaneme po řadě body B , A .

Zkouška bezprostředně vyplývá z konstrukce: trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou AB , přímka p je jeho osou souměrnosti, vznikne-li ovšem trojúhelník ABC . To nastane jen tehdy, neleží-li body X' , Y a C na přímce (kolmé k přímce p) - viz obr. 121. Závěr této úvahy už uvádí jeden z případů diskuse.



Obr. 121



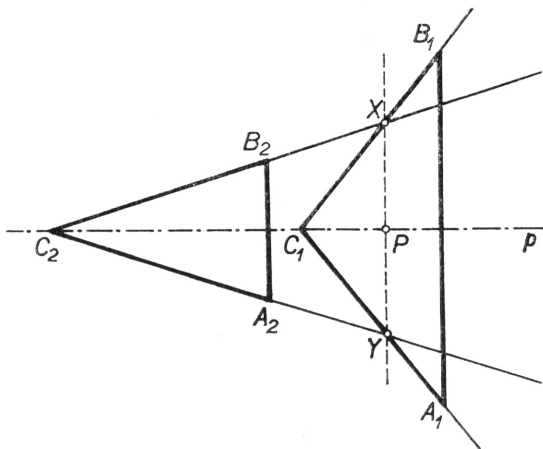
Obr. 122

Diskuse. Pro případ $X' \neq Y$, který jsme právě vyšetřili, má úloha jediné řešení, protnou-li se přímky $X'Y$ a p , přičemž $X'Y$ není kolmá na p . Existenci řešení nebrání ani možnost, že by bod Y ležel na přímce p ; musel by však být různý od průsečíku přímek XX' a p .

Jestliže $X'Y \parallel p$, což je v případě, že vzdálenosti bodů X a Y od přímky p jsou si rovny, úloha nemá řešení (obr. 122).

Zbývá vyšetřit případ $X' = Y$, což nastane právě tehdy, když body X, Y jsou souměrně sdružené podle přímky p . Označme P průsečík přímek XY a p . Pak průsečík C_1 ($C_2, \dots$) libovolné přímky procházející bodem $X' = Y$ až na bod P může být vrcholem trojúhelníka, který splňuje podmínky úlohy. V tomto případě má úloha nekonečně mnoho řešení (obr. 123).

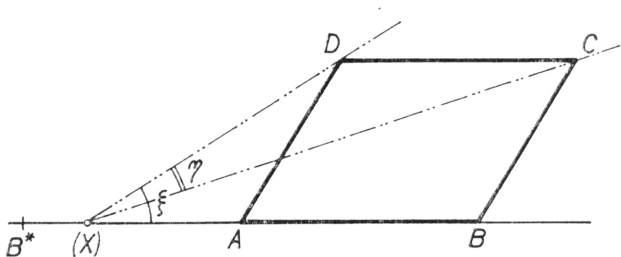
Již v rozboru jsme zjistili, že úloha nemá řešení, jestliže body X, Y leží uvnitř téže poloroviny vytažené přímkou p .



Obr. 123

74. Je dán rovnoběžník $ABCD$, v němž je $AB > BC$ a jehož úhel $\sphericalangle DAB$ je ostrý. Na přímce AB sestrojte takový bod X , z něhož je vidět úsečky AD a DC pod shodnými úhly.

Vyšetřete polohu bodu X vzhledem k úsečce AB .



Obr. 124

Řešení. Protože jde o polohovou úlohu, opět je úkolem »najít všechny body X «.

Rozbor. Pro zjednodušení úvahy vyloučíme nejprve možnost, že by hledaný bod mohl ležet na polopřímce AB^* , která je k polopřímce AB opačná. Předpokládejme, že bod (X) leží na polopřímce AB^* (obr. 124). Pak úhly $\sphericalangle A(X)D = \xi$ a $\sphericalangle D(X)C = \eta$ leží v téže polorovině s hranicí $(X)D$. Jedno rameno $(X)D$ mají společné, druhá jejich ramena $(X)A$ a $(X)C$ jsou však různá, neboť bod C na přímce $(X)A = AB$ neleží. Proto $\xi \neq \eta$ pro libovolný bod (X) polopřímky AB^* ; bod (X) nemůže být tedy řešením úlohy.

Předpokládejme tedy, že bod X leží na polopřímce AB (obr. 125) a má požadovanou vlastnost, tj. $\sphericalangle AXD \cong \sphericalangle DXC$. Protože $AB \parallel DC$, platí o střídavých úhlech $\sphericalangle AXD \cong \sphericalangle XDC$. Trojúhelník DXC je tedy rovnoramenný se základnou DX . Odtud **konstrukce**:

1. Okolo bodu C poloměrem CD opišeme kružnici k .
2. Průsečík přímky AB a kružnice k (existuje-li) je hledaný bod X .

Diskuse. Kružnice k má s přímkou AB společný aspoň jeden bod, je-li $d(CD) = d(AB) \geq v$, kde $v = d(CP)$ je výška rovnoběžníka ke straně AB . V prvním případě má úloha dvě řešení (viz obr. 126); případ rovnosti nemůže nastat vzhledem k podmínce úlohy $AB > BC$ a proto, že úhel $\sphericalangle DAB \cong \sphericalangle CBP$ je ostrý.

Vzhledem k souměrnosti obou řešení X a X' podle přímky CP jeden z bodů, např. X' , určitě nenáleží polopřímce PA . Pro bod X dokážeme, že patří vnitřku úsečky AB . Protože podle podmínky úlohy je úhel $\sphericalangle DAB$ ostrý, je úhel $\sphericalangle ADC$ trojúhelníka ADC tupý. Z podmínky úlohy a z vlastnosti tupoúhlého trojúhelníka ADC plyne

$$AC > CD > AD. \quad (1)$$

Protože body A, B, X leží na polopřímce PA a platí $CD \cong \cong XC, AD \cong BC$, dostaneme z nerovnosti (1) nerovnost

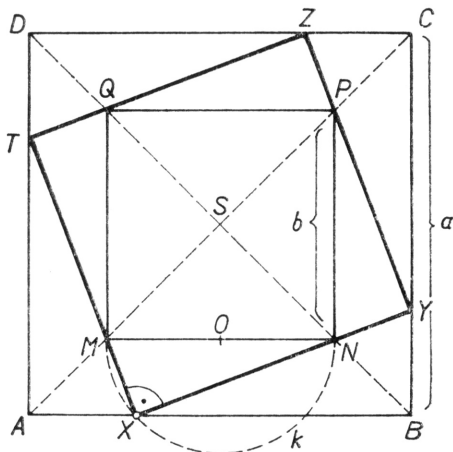
$$AC > XC > BC,$$

z níž vyplývá toto uspořádání bodů na polopřímce PA :

$$P, B, X, A;$$

bod X leží tedy uvnitř úsečky AB .

Neprotně-li kružnice k přímkou AB , je poloměr $d(CD) < v = d(CP)$. Protože $\sphericalangle CBP$ je ostrý v pravoúhlém trojúhelníku BPC , platí $BC > CP$. Je tedy $d(BC) > d(CD) = d(AB)$, což odporuje podmínce úlohy $AB > BC$. Nemůže se tedy stát, že by úloha neměla řešení. Z diskuse vyplývá, že existují vždy dvě řešení.



Obr. 127

75. Je dán čtverec $ABCD$ o délce strany a a čtverec $MNPQ$ o délce strany b , přičemž $a > b$; vrcholy M, N, P, Q leží v úhlopříčkách AC, BD (viz obr. 127).

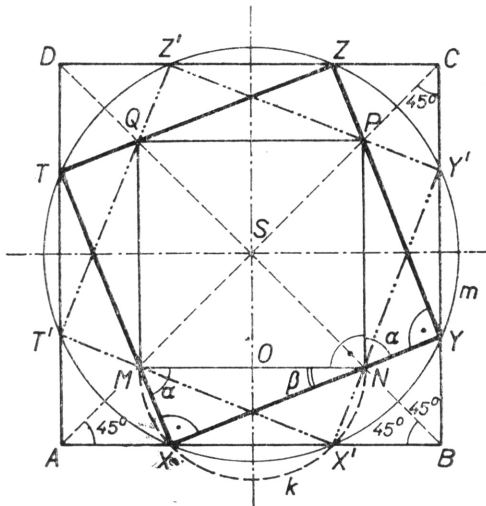
Sestrojte čtverec $XYZT$ tak, aby jeho vrcholy ležely na obvodu čtverce $ABCD$ a aby body M, N, P, Q ležely na obvodu čtverce $XYZT$.

Stanovte počet řešení úlohy vzhledem k daným číslům a, b .

Řešení. Rozbor (viz obr. 127). Podle zadání úlohy jsou oba dané čtverce souměrné podle svého středu S . Naši představu řešení znázorňuje čtverec $XYZT$. Pak trojúhelník MNX je pravoúhlý s přeponou MN ; bod X tedy nutně leží na Thaletově kružnici nad průměrem MN .

Odtud plyne **konstrukce**:

1. Sestrojíme kružnici $k = (O; r = \frac{1}{2}b)$ nad stranou MN jako průměrem.



Obr. 128

2. Existuje-li společný bod kružnice k a strany AB , nazvěme ho X (na obr. 128 jsou to dva různé body X, X').

3. Kolem průsečíku S úhlopříček daného čtverce opišeme kružnici $m = (S; r = d(SX))$.

4. Na kružnici m leží další vrcholy Y, Z, T hledaného čtverce tak, že $AX \cong BY \cong CZ \cong DT$.

Protože však jde o polohovou úlohu, musíme uvažovat i případný druhý průsečík k s AB , tj. na obr. 128 bod X' , který vede k *druhému* řešení úlohy, čtverci $X'Y'Z'T'$.

Zkouška. Nejprve musíme dokázat, že např. bod Y leží na přímce XN atd. Označme úhly pravoúhlého trojúhelníka MXN tak, že

$$\sphericalangle XMN = \alpha, \sphericalangle XNM = \beta$$

a platí

$$\alpha + \beta = 90^\circ. \quad (1)$$

Pro trojúhelníky MAX a NBY platí: $BY \cong AX$ (podle konstrukce), $BN \cong AM$, $\sphericalangle NBY \cong \sphericalangle MAX$ (ze zadání úlohy), proto jsou shodné podle věty *sus* a je $NY \cong MX$.

Trojúhelníky MXN a NYP jsou shodné podle věty *sss*, neboť $d(NP) = d(MN) = b$, $NY \cong MX$ (podle předešlé úvahy) a $YP \cong XN$, protože platí $\triangle YCP \cong \triangle XBN$ podle *sus*. Je tedy $\sphericalangle PNY \cong \sphericalangle NMX = \alpha$ a platí vzhledem k (1):

$$\sphericalangle XNM + \sphericalangle MNP + \sphericalangle PNY = \beta + 90^\circ + \alpha = 180^\circ; \quad (2)$$

proto polopřímky NX a NY tvoří přímý úhel, tj. body X , N , Y leží v přímce.

Z dokázané shodnosti pravoúhlých trojúhelníků

$$\triangle MXN \cong \triangle NYP \cong \triangle PZQ \cong \triangle QTM$$

vyplývá dále:

$$\text{a) } \sphericalangle TXY = \sphericalangle XYZ = \sphericalangle YZT = \sphericalangle ZTX = 90^\circ;$$

$$\text{b) } XN + NY = YP + PZ = ZQ + QT = TM + MX,$$

takže čtyřúhelník $XYZT$ je vskutku čtverec.

Poznámka. Celá zkouška proběhne jednodušeji, otočíme-li celý útvar okolo bodu S o pravý úhel (např. tak, že bod A přejde v bod B , bod M v N atd.). Je to možné, neboť ze zadání

vyplývá $SA \cong SB$, $SM \cong SN$ atd. Pak úsečka AB přejde v úsečku BC , pravouhlý trojúhelník MXN přejde ve shodný trojúhelník NYP ; tím dokážeme předpoklady pro platnost vztahu (2).

Diskuse. Počet řešení závisí na vzájemné poloze přímky AB a kružnice k . Vzdálenost v jejího středu O od AB je $v = \frac{1}{2}(a - b)$, její poloměr je $r = \frac{1}{2}b$. Podle věty o vzájemné poloze přímky a kružnice dospějeme k tomuto výsledku:

a) Je-li $v < r$ neboli $a - b < b$, tj.

$$b < a < 2b,$$

dostaneme dvě různá řešení $XYZT$, $X'Y'Z'T'$; tato řešení jsou souměrně sdružená podle středních příček daných čtverců a můžeme k nim dospět dvěma otočeními v navzájem opačných smyslech (jedno z nich je popsáno v poznámce).

b) Je-li $v = r$ neboli

$$a = 2b,$$

má úloha jediné řešení $XYZT$, kde X je střed úsečky AB .

c) Je-li $v > r$ neboli

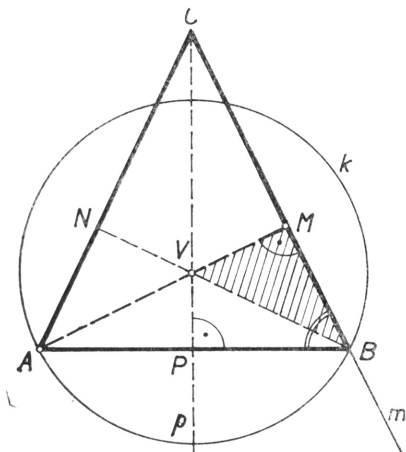
$$a > 2b,$$

nemá úloha řešení.

76. V rovině je dána úsečka AM a uvnitř této úsečky bod V .

Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB tak, aby úsečka AM byla jeho výškou a bod V průsečíkem výšek. Stanovte podmínku řešitelnosti.

Narýsujte, je-li $d(AM) = 82 \text{ mm}$, $d(AV) = 52 \text{ mm}$.



Obr. 129

Řešení. V textu úlohy je vlastně dána výška AM hledaného trojúhelníka a předepsána poloha průsečíku V jeho výšek. Toto zadání vás může svést přímo k vlastní konstrukci: Podle vašich znalostí je zřejmé, že přímka vedená bodem M kolmo k přímce AM bude obsahovat stranu BC hledaného trojúhelníka. Tím však vaše konstrukce skončí, neboť asi nevíte, jak využít bod V pro další konstrukci. Provedete-li však řádně rozbor úlohy, uvidíte, že sestavení konstrukce není obtížné.

Při **rozboru** vyjdeme opět z předpokladu, že na obr. 129 je narysován hledaný trojúhelník ABC . Paty jeho výšek vedených po řadě body A, B, C označme M, N, P . Přímka $CP = p = v_c$ prochází bodem V a je osou souměrnosti tohoto trojúhelníka, takže je $VA \cong VB$. Protože jde o úlohu polohovou, potřebujeme sestrojit dva »neznámé« vrcholy B, C . Pro ně hledáme množiny možných bodů. Oba body leží na přímce m procházející bodem M a kolmé k přímce AM . Pro bod C nemáme »v dohledu« žádnou jednoduchou množinu bodů; o bodu B však víme, že $VA \cong VB$. Proto bod B náleží kružnici $k = (V; d(VA))$. V pravoúhlém trojúhelníku VMB (kde $\sphericalangle VMB = 90^\circ$ - pokud ovšem existuje) známe tedy přeponu VB a odvěsnu VM . Odtud **konstrukce**.

1. Sestrojíme bodem M přímku $m \perp AM$.
2. Okolo bodu V opišeme kružnici k poloměrem $d(VA)$.
3. Každý z průsečíků k a m (existují-li) vede k jednomu vrcholu B hledaného trojúhelníka.
4. Bod C je průsečíkem přímky m a osy p úsečky AB .

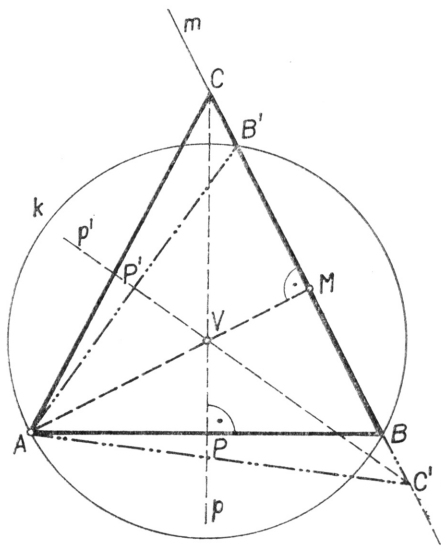
Provedeme **zkoušku** toho, že každý sestrojený trojúhelník je řešením úlohy. Podl. konstrukce je $AM \perp m = BC$. Protože pomocný trojúhelník VMB (existuje-li) je podle konstrukce rovnoramenný, je osa p úsečky AB jeno osou souměrnosti a zároveň i osou základny trojúhelníka ABC ; proto je $CV \perp AB$ a bod V je průsečíkem výšek.

Podmínku řešitelnosti zjistíme takto: Popsanou konstrukcí získáme řešení právě tehdy, protne-li kružnice k přímku m , tj. když $VB \cong VA > VM$. Pak dostaneme dva různé body B a B' souměrně sdružené podle přímky AM . V pravoúhlém trojúhelníku AMB je úhel ABM ostrý, úhel VPB je pravý,

a proto se přímky m a p podle Euklidova axiómu protnou; bod C tedy vždy existuje. Úloha má tedy pro $VA > VM$ - což je náš případ - vždy dvě řešení souměrně sdružená podle přímky AM .

Poznámka. Tato dvě řešení splynou (nehledíme-li na popis), jestliže přímka AM je osou úsečky BC . Pak trojúhelník je rovnostranný; to nastane právě tehdy, je-li $d(AV) = 2 \cdot d(VM)$; ze zadání naší úlohy to však neplyne.

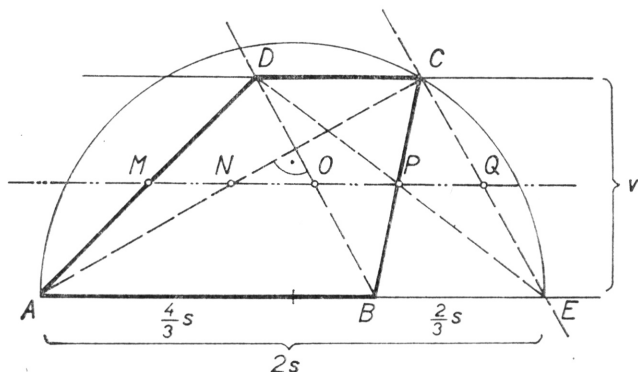
Konstrukce je provedena na obr. 130 v poměru 1 : 2.



Obr. 130

77. Je dána délka s střední příčky*) a délka v výšky lichoběžníka $ABCD$, jehož úhlopříčky jsou na sebe kolmé. Průsečíky úhlopříček se střední příčkou lichoběžníka $ABCD$ dělí tuto příčku na tři shodné úsečky.

Sestrojte lichoběžník $ABCD$.



Obr. 131

Řešení (obr. 131). **Rozbor.** Předpokládejme, že $ABCD$ je hledaný lichoběžník. Rovnoběžka vedená bodem C s úhlopříčkou BD protne polopřímku AB v bodě E . Trojúhelník AEC je pravoúhlý, známe jeho výšku a víme, že $d(AE)$ je $2s$. Střední příčka trojúhelníka DCB má délku $\frac{1}{3}s$; je tedy $d(DC) = d(BE) =$

*) Střední příčka lichoběžníka je úsečka určená středy jeho ramen. Je rovnoběžná se základnami. Její délka s je rovna aritmetickému průměru délek obou základů, tj. $s = \frac{a + c}{2}$.

$= \frac{2}{3}s$. Protože $EC \parallel BD$, je $\sphericalangle ACE = 90^\circ$. V pravoúhlém trojúhelníku ACE známe tedy délku $2s$ přepony AE a délku příslušné výšky v .

Konstrukce

1. Nejprve sestojíme pravoúhlý trojúhelník ACE s přeponou AE délky $2s$ a příslušnou výškou v . [Použijeme Thaletovu větu: Nad průměrem AE opíšeme půlkružnici (jejíž poloměr je s) a najdeme její průsečík C s přímkou sestrojenou v téže polorovině rovnoběžně s AE ve vzdálenosti v .]

2. Na přeponě AE sestojíme bod B tak, aby platilo: $d(AB) : d(BE) = 2 : 1$ (víme totiž, že $d(AB) = \frac{4}{3}s$, $d(BE) = \frac{2}{3}s$).

3. Trojúhelník ABC doplníme na hledaný lichoběžník $ABCD$ tak, že $CD \cong BE$.

Zkouška. Z toho, že $d(AE) = 2s$, $CD \cong BE$ a $AE = AB + BE$, je zřejmé, že střední příčka sestrojeného lichoběžníka $ABCD$ má danou délku s . Protože $\sphericalangle ACE = 90^\circ$ a $CE \parallel DB$, jsou úhlopříčky AC a DB navzájem kolmé.

Označme písmeny (viz obr. 131) M , N , O , P a Q průsečíky přímký obsahující střední příčku lichoběžníka $ABCD$ postupně s přímkami AD , AC , BD , BC a CE . Potom v rovnoběžníku $BECD$ platí

$$d(OP) = d(PQ) = \frac{1}{3}s. \quad (1)$$

V trojúhelníku AEC má střední příčka NQ délku $\frac{1}{2}d(AE) = s$.

Vzhledem k uspořádání bodů M, N, O, P a Q vyplývá z $d(NQ) = s$ a z (1), že i

$$d(NO) = \frac{1}{3} s.$$

Potom také

$$d(MN) = d(MP) - d(NP) = s - \frac{2}{3} s = \frac{1}{3} s.$$

Střední příčku MP rozdělují tedy úhlopříčky AC a BD na tři shodné úsečky.

Diskuse. Možnost provedení celé konstrukce závisí jen na existenci bodu C . V případě $v > s$ bod C neexistuje, takže úloha nemá řešení.

V případě $v \leq s$ bod C existuje (jeden nebo dva), takže úloha má řešení (jedno nebo dvě).

Jedinou podmínkou řešitelnosti je tedy splnění nerovnosti $v \leq s$.

78. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB , je-li dána délka jeho těžnice t_c a velikost úhlu ω , který svírá těžnice t_c s osou úhlu ACB . Pro které ω má úloha řešení?

Řešení. Rozbor (obr. 132). Označme S střed přepony AB . Podle Thaletovy věty je $d(SA) = d(SC) = d(SB) = t_c$. Trojúhelníky ASC a BSC jsou tedy rovnoramenné, a proto

$$\sphericalangle ACS = \sphericalangle CAS = \alpha,$$

$$\sphericalangle BCS = \sphericalangle SBC = \beta.$$

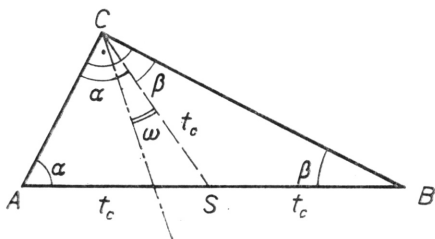
Je-li ω úhel, který svírá těžnice t_c s osou úhlu $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, potom

$$\alpha = 45^\circ + \omega, \beta = 45^\circ - \omega, \quad (1)$$

nebo

$$\alpha = 45^\circ - \omega, \beta = 45^\circ + \omega. \quad (2)$$

Z posledních vztahů vyplývá konstrukce. Jde o konstrukci trojúhelníka podle věty *usu*: $d(AB) = 2 \cdot t_c$ a úhly α, β jsou určeny vztahy (1), popř. (2).



Obr. 132

Zkouška. Ze vztahů (1), popř. (2), je zřejmé, že sestrojený trojúhelník ABC je pravoúhlý. Protože délka jeho přepony je $2t_c$, má těžnice k přeponě předepsanou délku.

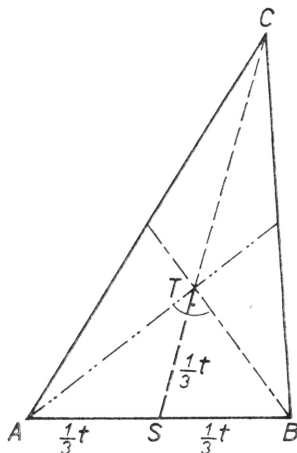
Diskuse. Aby úloha měla řešení, musí být úhly α, β dané vztahy (1), popř. (2), ostré, tj.

$$0^\circ \leq \omega < 45^\circ.$$

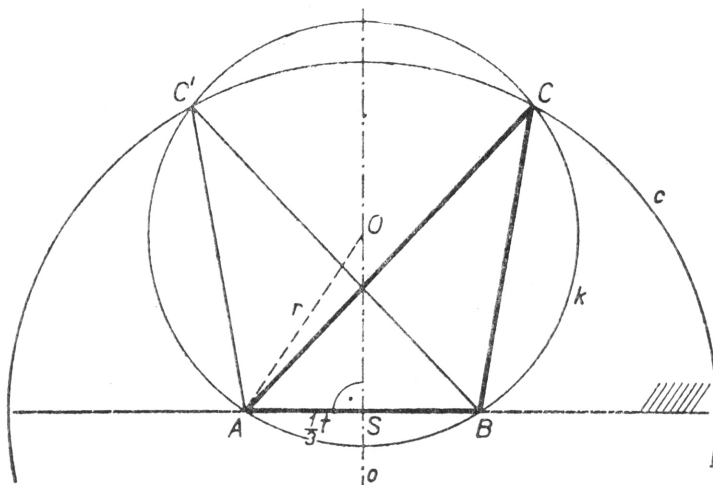
Je-li $\omega = 0^\circ$, má úloha jediné řešení a sestrojený trojúhelník ABC je rovnoramenný. Je-li $0^\circ < \omega < 45^\circ$, má úloha dvě řešení.

Pro $\omega \geq 45^\circ$ nemá úloha řešení.

79. V trojúhelníku ABC jsou těžnice t_a a t_b na sebe kolmé. Dále je dána délka t těžnice t_c a poloměr r opsané kružnice. Sestrojte tento trojúhelník a proveďte diskusi řešitelnosti.



Obr. 133

$$d(AB) = 2.d(ST) = \frac{2}{3} t.$$


Obr. 134

1. Sestrojíme úsečku AB délky $\frac{2}{3}t$ a její střed S .

2. V jedné z polorovin vyřatých přímkou AB sestrojíme bod O tak, aby platilo $d(OA) = d(OB) = r$.

3. Sestrojíme kružnice $c = (S, t)$ a $k = (O, r)$.
4. Průsečík kružnic c, k označme C .
5. Sestrojíme trojúhelník ABC .

Zkouška. Je jasné, že kružnice opsaná sestrojenému trojúhelníku ABC má poloměr r . Označme písmenem T těžiště trojúhelníka ABC ; potom $d(ST) = \frac{1}{3}t$. Protože podle konstrukce je $d(AB) = \frac{2}{3}t$, platí $SA \cong SB \cong ST$. Proto leží bod T na Thaletově kružnici s průměrem AB , takže $\sphericalangle ATB = 90^\circ$. Těžnice v přímkách AT, BT jsou tedy navzájem kolmé.

Diskuse. Bod 2 z konstrukce je možno provést jen tehdy, je-li

$$r \geq \frac{1}{3}t. \quad (1)$$

Průsečík C kružnic $c = (S, t)$ a $k = (O, r)$ podle bodu 4 existuje tehdy a jen tehdy, platí-li

$$|r - t| \leq d(SO) \leq r + t.$$

Dosadíme-li $d(SO) = \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{3}t\right)^2}$ do nerovnosti $|r - t| \leq d(SO)$, dostaneme po umocnění

$$r^2 - 2rt + t^2 \leq r^2 - \frac{t^2}{9}$$

a po další úpravě

$$r \geq \frac{5}{9} t. \quad (2)$$

Vztahy (1) a (2) platí současně právě tehdy, je-li

$$r \geq \frac{5}{9} t.$$

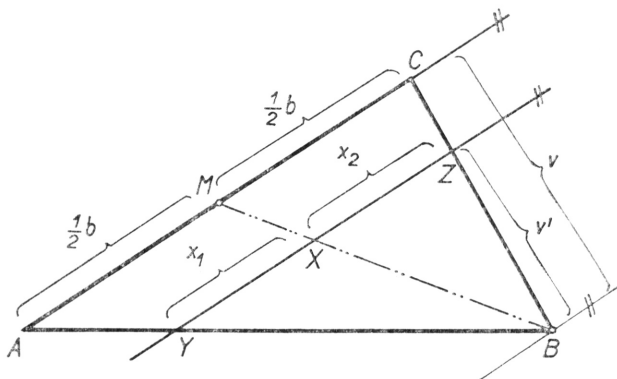
Protože průsečík C kružnic c a k nikdy nemůže ležet na přímce AB , je možno provést 5. bod konstrukce.

Podmínkou řešitelnosti je tedy

$$\frac{r}{t} \geq \frac{5}{9}.$$

Snadno zjistíme, že úloha má dvě řešení souměrná podle přímky o ; pouze v případě, že $r = \frac{5}{9} t$, je jediným řešením rovnoramenný trojúhelník s hlavním vrcholem C .

80. Je dán trojúhelník ABC se stranami délek $d(AB) = 9$ cm, $d(BC) = 5$ cm, $d(CA) = 8$ cm. Sestrojte kružnici k vepsanou tomuto trojúhelníku a na ní najděte všechny body X této vlastnosti: přímka p rovnoběžná s AC a procházející bodem X protíná strany AB , BC v takových bodech Y a Z , že X je střed úsečky YZ .



Obr. 135

Řešení. Rozbor. Kružnice k vepsaná trojúhelníku ABC představuje jednu množinu možných bodů X . Druhou množinu možných bodů X tvoří středy úseček YZ popsanych v textu úlohy; nazveme ji **M**. Nejdříve najděte tuto množinu. Na obr. 135 je trojúhelník ABC daných rozměrů. Je zřejmé, že bod M jako střed strany AC patří do množiny **M**. Nabízí se domněnka, že i další body úsečky MB (tj. těžnice t_b) patří do množiny **M**, nikoliv však bod B . Vedme libovolným bodem X mezi body M, B rovnoběžku s AC ; písmeny Y, Z označme její průsečíky se stranami AB, BC .

Provedeme tzv. *nepřímý* důkaz toho, že $XY \cong XZ$.

a) Předpokládáme, že $XY < XZ$, tzn., že pro délky těchto úseček platí $x_1 < x_2$ (viz obr. 135). Vzdálenosti bodu B od přímek AC, YZ označme v, v' ; vzdálenost přímek AC, YZ je tedy $v - v'$.

O obsahích trojúhelníků XYB, XZB vzhledem k $x_1 < x_2$ platí

$$S_{XYB} < S_{XZB}. \quad (1)$$

Z obdobného důvodu pro obsahy lichoběžníků $AMXY$ a $CMXZ$ dostáváme

$$S_{AMXY} < S_{CMXZ} \quad (2)$$

Sečtením nerovností (1) a (2) dostaneme, že obsah trojúhelníka AMB je menší než obsah trojúhelníka CMB , tj.

$$S_{AMB} < S_{CMB}. \quad (a)$$

b) Jestliže předpokládáme, že $x_1 > x_2$, dostaneme obdobným postupem

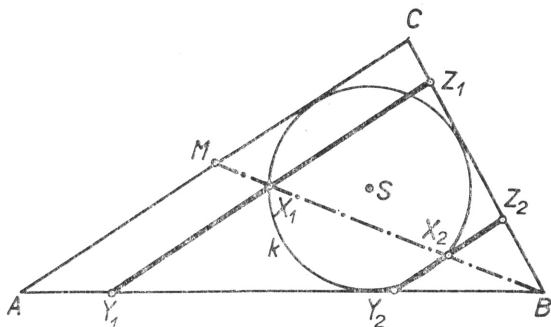
$$S_{AMB} > S_{CMB}. \quad (b)$$

Oba výsledky (a) a (b) jsou však zřejmě ve sporu s tím, že

$$S_{AMB} = S_{CMB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} b \cdot v.$$

Pro vztah mezi čísly x_1, x_2 musí tedy platit jediná zbývajících možnost $x_1 = x_2$, což znamená, že bod X je středem úsečky YZ .

Závěr. Body množiny $\mathbf{M}$ jsou všechny body těžnice MB vyjma bodu B . Z úvahy též vyplývá, že žádný jiný bod roviny nemůže mít požadovanou vlastnost.



Obr. 136

Tento výsledek využijeme v **konstrukci** (obr. 136).

1. Sestrojíme trojúhelník ABC .
2. Trojúhelníku ABC vepíšeme kružnici k .
3. Určíme těžnici BM .
4. Kružnice k protne těžnici BM ve dvou různých bodech X_1, X_2 , které jsou zřejmě řešením úlohy.

Dokážeme to: Jak z úvahy v rozboru vyplývá, jediné body těžnice BM (mimo bod B) mohou mít požadovanou vlastnost. Těžnice BM leží ve vnitřku úhlu ABC , neboť bod M leží mezi body A, C . Polopřímky BA, BC se kružnice k dotýkají, a proto polopřímka BM protne kružnici k ve dvou různých bodech. Tyto body X_1, X_2 vzhledem ke konstrukci jsou body vnitřku trojúhelníka ABC . Úloha má tedy dvě různá řešení.

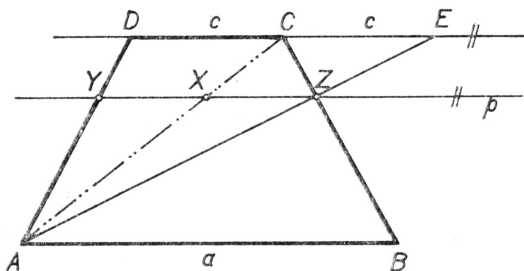
81. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD .

a) Určete takový bod X úhlopříčky AC , aby přímka p rovnoběžná s AB vedená bodem X proťala ramena AD, BC po řadě v bodech Y, Z , pro něž platí $XY \cong XZ$.

b) Vyjádřete délku úsečky XY pomocí $a = d(AB)$, $c = d(CD)$.

Řešení. Rozbor. a) Bod X na obr. 137 má požadovanou vlastnost, tj. úsečky XY a XZ na přímce $p \parallel AB$ jsou shodné. Obměníme-li i úvahu z rozboru v úloze č. 80, patří bod Z (mimo to, že leží na straně BC) straně trojúhelníka AZY , v němž úsečka AX je těžnicí. Proto úsečka AC je těžnicí trojúhelníka ADE , kde pro bod E platí: $E \neq D$, $d(CD) = d(CE) = c$, E leží na přímce DC (obr. 137). Z toho vyplývá i jednoduchá **konstrukce**.

1. Sestrojíme lichoběžník $ABCD$ a na přímce DC bod E tak, jak je popsáno v rozboru.
2. Průsečík polopřímky AE se stranou BC je bod Z požadovaný textem úlohy.
3. Konstrukcí přímky $p \parallel AB$ bodem Z dostaneme bod Y a hledaný bod X .



Obr. 137

Důkaz vlastností bodu X je patrný z rozboru. Úloha má popsané řešení jako jediné, neboť body B a C leží v opačných polorovinách vyřatých přímkou AE ; společný bod úsečky BC a polopřímky AE je proto jediný.

b) Ze vztahu $\triangle ZCE \sim \triangle ZBA$ plyne (obr. 137)

$$\frac{d(EZ)}{d(AZ)} = \frac{c}{a} \quad (1)$$

a dále podle (1)

$$\frac{d(AE)}{d(AZ)} = \frac{d(AZ) + d(EZ)}{d(AZ)} = 1 + \frac{c}{a} = \frac{a + c}{a}. \quad (2)$$

Ze vztahu $\triangle AXZ \sim \triangle ACE$ plyne

$$\frac{d(XZ)}{d(CE)} = \frac{d(AZ)}{d(AE)}.$$

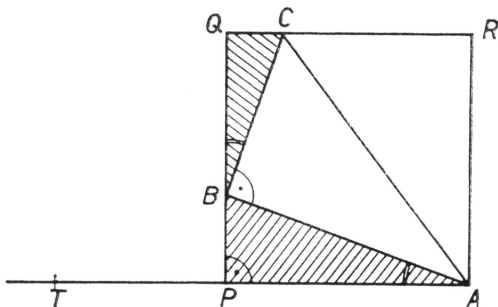
Podle (2) je

$$d(XZ) = \frac{d(AZ)}{d(AE)} \cdot d(CE) = \frac{ac}{a + c},$$

a tedy

$$d(XY) = d(XZ) = \frac{ac}{a + c},$$

což je hledané vyjádření.



Obr. 138

82. Pravoúhlý trojúhelník ABC má odvěsny délek $d(AB) = 4$ cm, $d(BC) = 3$ cm. Opište mu čtverec $APQR$ tak, aby vrcholy B, C ležely po řadě na stranách PQ, QR .

a) Popište konstrukci.

b) Vypočtěte délku úsečky AP .

Řešení. Úloha bude vyřešena (obr. 138), sestrojíme-li některý z bodů P, Q, R . Konstrukce zbývajících dvou vrcholů hledaného čtverce už bude snadná. Část b) dané úlohy požaduje výpočet délky úsečky AP , kterou označíme a .

Pravoúhlé trojúhelníky ABP a BCQ jsou podobné, neboť

$$\sphericalangle ABP + \sphericalangle CBQ = 90^\circ, \quad (1)$$

takže

$$\sphericalangle ABP = \sphericalangle BCQ. \quad (2)$$

Koeficient podobnosti trojúhelníků ABP a BCQ (v tomto pořadí) je

$$\frac{d(AB)}{d(BC)} = \frac{4}{3}.$$

Odtud již plyne, že

$$\frac{d(AP)}{d(BQ)} = \frac{4}{3},$$

tj.

$$d(BQ) = \frac{3}{4} d(AP) = \frac{3}{4} a.$$

Protože $PQ \cong AP$, je

$$d(BP) = a - d(BQ) = \frac{1}{4} a. \quad (3)$$

Z pravoúhlého trojúhelníka ABP podle Pythagorovy věty dostáváme

$$(d(AP))^2 + (d(BP))^2 = (d(AB))^2,$$

tj. podle (3)

$$a^2 + \frac{1}{16} a^2 = 16,$$

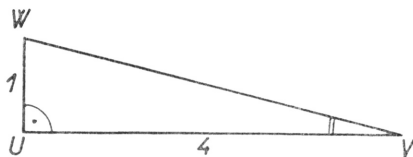
tj.

$$a^2 = \frac{16^2}{17}.$$

Odtud již plyne řešení části b):

$$d(AP) = a = \frac{16 \text{ cm}}{\sqrt{17}} = \frac{16 \cdot \sqrt{17} \text{ cm}}{17} = \frac{16 \cdot 4,13 \text{ cm}}{17} = 3,88 \text{ cm}. \quad (4)$$

Z výsledku (4) vyplývá jeden ze způsobů řešení části a) dané úlohy. Bod P sestrojíme na Thaletově půlkružnici nad průměrem AB (v polorovině opačné k polorovině s hraniční přímkou AB , v níž leží bod C) tak, aby bylo $d(AP) = \frac{16}{17} \sqrt{17} \text{ cm}$ (viz (4)).



Obr. 139

Jiný způsob nalezení bodu P se zakládá na konstrukci úhlu BAP . Z rovnosti (3) totiž plyne

$$\frac{d(BP)}{d(AP)} = \frac{1}{4}.$$

Sestrojíme pomocný pravoúhlý trojúhelník UVW (obr. 139) s odvěsnami o délkách $d(UV) = 4$ cm a $d(UW) = 1$ cm. Pak sestrojíme bod T (obr. 138) tak, aby platilo

$$\sphericalangle BAT = \sphericalangle WVU.$$

Bod P se sestrojí jako pata kolmice z bodu B k přímkce AT . (Poznamenejme ještě, že trojúhelník UVW je užitečný i pro konstrukci, která se zakládá na rovnosti (4), neboť $d(VW) = \sqrt{17}$ cm.)

Známe-li bod P , pak již snadno sestrojíme další dva vrcholy hledaného čtverce. Na polopřímce PB najdeme bod Q tak, aby bylo $d(PQ) = a$. Na polopřímce QC sestrojíme bod R , pro který platí $d(QR) = a$.

Na závěr musíme ještě provést **zkoušku**, tj. dokázat, že čtyřúhelník $APQR$ je hledaný čtverec. Z konstrukce vyplývá, že úhel APB je pravý a že $d(PQ) = d(QR) = a$. Je třeba dokázat, že také úhel PQR je pravý, že bod B leží na straně PQ a bod C leží na straně QR .

Bod B leží uvnitř úsečky PQ , neboť podle konstrukce bodu P je $d(PB) < a = d(PQ)$. Trojúhelníky ABP a BCQ jsou podobné podle věty $\frac{s}{s} u \frac{s}{s}$. Z rovnosti (1) plyne rovnost (2) a z konstrukce bodu P vyplývá rovnost (3), takže

$$\frac{d(AP)}{d(BQ)} = \frac{d(AP)}{d(PQ) - d(BP)} = \frac{a}{a - \frac{1}{4}a} = \frac{4}{3} = \frac{d(AB)}{d(BC)}.$$

Úhel PQC je tedy pravý a čtyřúhelník $APQR$ je obdélník.
 Z konstrukce dále plyne, že bod C skutečně leží na straně QR .
 Je totiž

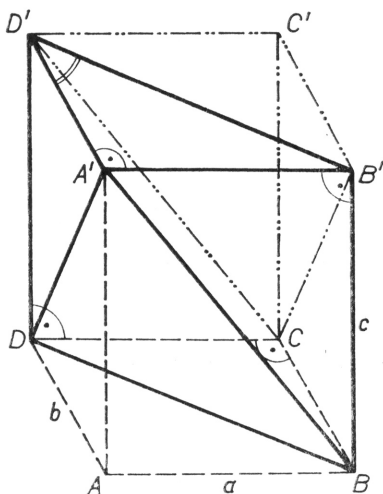
$$d(QC) = d(PB) \cdot \frac{d(BC)}{d(AB)} = d(PB) \cdot \frac{3}{4} < d(PQ).$$

Poznámka. Při řešení úlohy lze také začít konstrukcí bodu Q a využít pro ni podmínky $\sphericalangle BQC = 90^\circ$ a $\sphericalangle BQA = 45^\circ$.

VIII. Stereometrie

83. Kvádr $ABCD A' B' C' D'$ (s podstavou $ABCD$, přičemž je $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$) má rozměry $a = d(AB)$, $b = d(AD)$, $c = d(AA')$. Rovnoběžné roviny BDA' a $CB'D'$ oddělují od daného kváдру dva čtyřstěny $ABDA'$ a $C'CB'D'$.

- Vyjádřete objem zbylého tělesa pomocí rozměrů a , b , c .
- Narýsujte síť tohoto tělesa pro $a = 4$ cm, $b = 3$ cm a $c = 5$ cm.



Obr. 140

Řešení. a) Na obr. 140 je znázorněn kvádr $ABCD$ ve volném rovnoběžném promítání pro lepší názornost v »nadhledu zleva« (znamená to, že jsou viditelné: horní podstava, přední a levá pobočná stěna). Objem Z zbylého tělesa, jehož obraz je tlustě vytažen, vypočteme tak, že od objemu původního kvádru odečteme objemy oddělených čtyřstěňů.

Objem čtyřstěnu vypočítáme podle vzorce pro objem V jehlanu, tj.

$$V = \frac{1}{3} P \cdot v,$$

kde P je obsah podstavy a v délka příslušné výšky. Považujme ve čtyřstěnu $ABDA'$ trojúhelník ABD za podstavu; pak příslušná výška je $v = d(AA') = c$. Obsah pravoúhlého trojúhelníka ABD o odvěsnách a, b je $P = \frac{1}{2} ab$. Proto je

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} ab \cdot c = \frac{1}{6} abc.$$

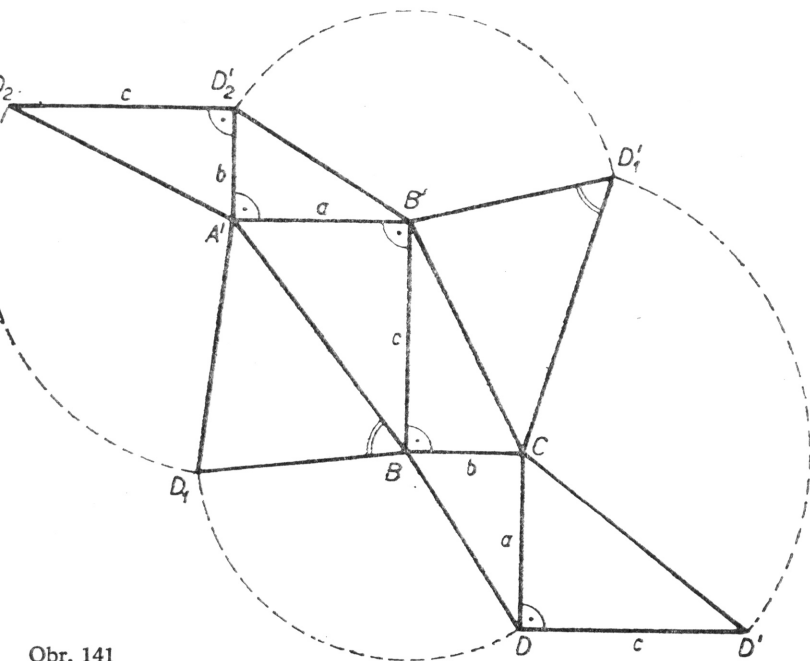
Objem V_2 druhého čtyřstěnu $C'CB'D'$ je rovněž $\frac{1}{6} abc$, neboť oba čtyřstěny mají shodné podstavy a výšky.

Dostáváme tedy pro objem Z zbylého tělesa

$$Z = abc - V_1 - V_2$$

čili

$$Z = abc - 2 \cdot \frac{1}{6} abc = \frac{2}{3} abc.$$

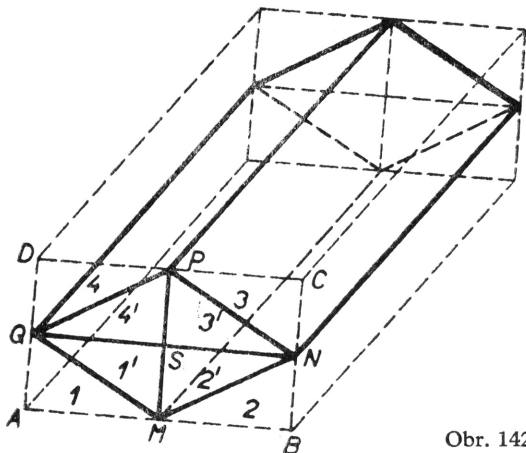


Obr. 141

Odpověď. Objem zbylého tělesa je $\frac{2}{3} abc$.

b) Síť zbylého tělesa je na obr. 141; při konstrukci vyjdeme nejvhodněji od stěny $A'B'B$ a její sousední stěny $B'BC$ a postupně připojujeme další stěny. Při rozvinutí povrchu v síť má např.

bod D tři obrazy (značené D, D_1, D_2); obdobně bod D' se zobrazí třikrát jako D', D_1', D_2' .



Obr. 142

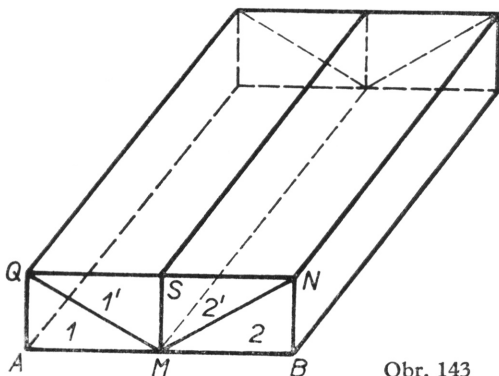
84. Je dán kvádr o rozměrech a, b, c (viz obr. 142). Od kvádrů oddělíme tělesa rovinnými řezy tak, že zbude těleso, které je na obrázku vyznačeno tlustými čarami. Jeho vrcholy leží ve středech hran přední a zadní stěny daného kvádrů.

a) Narýsujte obrázek, z něhož je vidět, že se odříznuté části dají složit v jiný kvádr.

b) Vypočítejte objem tělesa, které zbylo po odříznutí.

Řešení. a) Označme středy hran stěny $ABCD$ daného kvádrů stejně jako na obr. 142. Střední příčky MP, NQ tohoto obdél níka a dále úsečky MN, NP, PQ, QM dělí obdél ník $ABCD$ na osm shodných pravoúhlých trojúhelníků; ty jsou na obr. 142 očíslovány 1, 2, 3, 4, 1', 2', 3', 4'. Trojúhelníky se totiž shodují

v odvěsnách, tedy podle věty *sus*. Proto můžeme trojúhelník 3 přemístit do polohy 1', trojúhelník 4 do polohy 2'. S trojúhelníky 3, 4 přemístíme zároveň i odříznuté části kvádru, které k nim přísluší.



Obr. 143

b) Podle výsledku úlohy a) dostaneme z odřezaných částí kvádr, jehož přední stěnou je obdélník $ABNQ$ (obr. 143); rozměry tohoto kvádru jsou a , $\frac{1}{2}b$, c a jeho objem V' je

$$V' = a \cdot \frac{b}{2} \cdot c$$

neboli

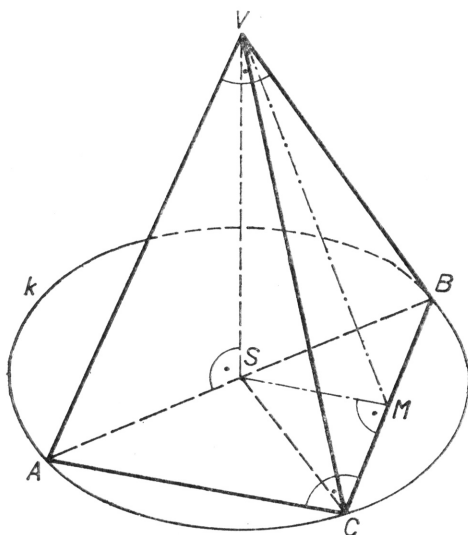
$$V' = \frac{1}{2} \cdot abc.$$

Protože objem daného kváдру je abc , rovná se objem odřezaných částí polovině objemu daného kváдру. Z toho plyne, že zbytek tělesa má objem rovný polovině objemu daného kváдру neboli $\frac{1}{2} \cdot abc$. Tím je úloha rozřešena.

85. Osový řez rotačního kužele je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník VAB o přeponě AB délky d . Přímkou AV je vedena rovina, která protne kužel v rovnostranném trojúhelníku VAC .

Pomocí proměnné d vyjádřete

- objem jehlanu $ABCV$;
- povrch jehlanu $ABCV$.



Obr. 144

Řešení (obr. 144). a) Pro výpočet objemu jehlanu $ABCV$ podle vzorce

$$V = \frac{1}{3} P \cdot v$$

potřebujeme znát obsah podstavy P a velikost výšky v . Zjistíme potřebné údaje.

Bod V je vrcholem kužele a pravého úhlu rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka ABV s přeponou AB délky d ; je tedy

$$d(AV) = d(BV) = \frac{d}{\sqrt{2}}. \quad (1)$$

Je-li S střed podstavy kužele, je jeho výška

$$v = d(SV) = \frac{d}{2}. \quad (2)$$

Protože trojúhelník VAC je rovnostranný, je

$$d(AC) = \frac{d}{\sqrt{2}}. \quad (3)$$

Trojúhelník ABC je podle Thaletovy věty pravoúhlý s přeponou AB . Pomocí Pythagorovy věty vypočítáme druhou odvěsnu

$$d(BC) = \sqrt{(d(AB))^2 - (d(AC))^2} = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{2}} = \frac{d}{\sqrt{2}}. \quad (4)$$

Vzhledem k (1), (3) a (4) je

$$\triangle VAB \cong \triangle CAB;$$

proto je i trojúhelník VBC rovnostranný.

Pro objem jehlanu $ABCV$ s podstavou ABC a výškou SV dostaneme

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{d}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \frac{d}{2} = \frac{d^3}{24}.$$

b) Vzhledem ke vztahům (1) až (4) platí $VA \cong VB \cong VC \cong AC \cong BC$. Toho použijeme při výpočtu povrchu S našeho jehlanu. Nejprve zjistíme obsah P trojúhelníka ABC , který je též jako obsah s ním shodného trojúhelníka VAB . Platí

$$P = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d^2}{4}.$$

Pomocí Pythagorovy věty vypočteme výšku VM trojúhelníka VBC :

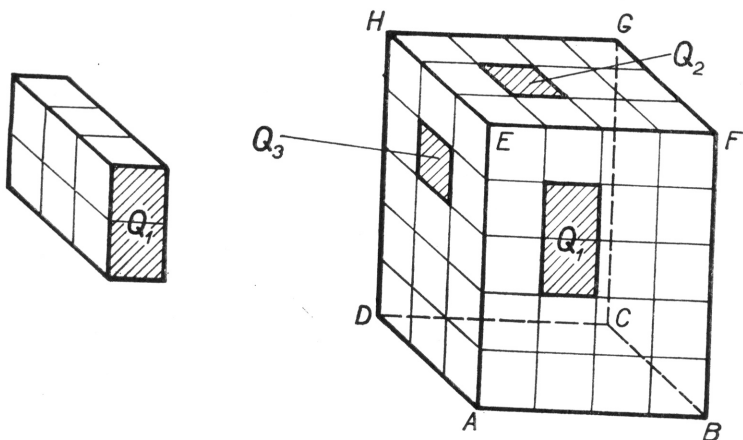
$$d(VM) = \sqrt{\left(\frac{d}{2} \right)^2 + \left(\frac{d}{2\sqrt{2}} \right)^2} = \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{d^2}{8}} = \sqrt{\frac{3d^2}{8}} = \frac{d\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Obsah P' trojúhelníka VBC je roven obsahu s ním shodného trojúhelníka VCA . Platí

$$P' = \frac{1}{2} \cdot d(BC) \cdot d(VM) = \frac{1}{2} \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{d\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{d^2\sqrt{3}}{8}.$$

Povrch S jehlanu je tedy

$$\begin{aligned} S &= 2P + 2P' = 2 \cdot \frac{d^2}{4} + 2 \cdot \frac{d^2\sqrt{3}}{8} = \frac{2d^2 + d^2\sqrt{3}}{4} = \\ &= \frac{d^2}{4} (2 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$



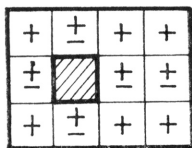
Obr. 145

86. Na připojeném obr. 145 vidíte kvádr o rozměrech $d(AB) = 4$ cm, $d(AD) = 3$ cm, $d(AE) = 5$ cm; tento kvádr je stmelen z krychliček o hranách délky 1 cm. Na povrchu kvádru je vyznačen obdélník $\mathcal{Q}_1$ o rozměrech 1 cm a 2 cm a dále pak dva čtverce $\mathcal{Q}_2$, $\mathcal{Q}_3$ o stranách 1 cm.

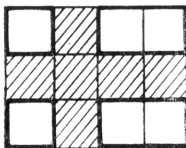
Nad obdélníkem $\mathcal{Q}_1$ vyrazíme z daného kvádru ve směru hrany AD sloupec (tvaru kvádru) složený celkem ze šesti krychliček; vyňatá část je znázorněna vlevo na obrázku. Tím vznikne v daném kvádru otvor. Obdobným způsobem sestrojíme nad čtvercem $\mathcal{Q}_2$ otvor dlouhý 5 cm ve směru hrany AE a nad čtvercem $\mathcal{Q}_3$ otvor dlouhý 4 cm ve směru hrany AB .

Vypočtete objem a povrch (tj. včetně povrchu dutiny) tělesa, které takto vzniklo.

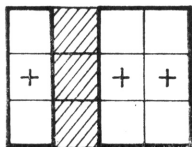
Řešení. Abychom úlohu rozřešili, rozřežeme vzniklé těleso (tj. daný kvádr po sestrojení otvorů) na vrstvy, a to rovinnými řezy rovnoběžnými s rovinou horní podstavy $EFGH$ daného kvádru. Dostaneme tak pět vrstev, které jsou v obr. 146 seřazeny ve směru shora dolů; přitom si myslíme, že se na vrstvu díváme shora (z náhledu). Patří-li horní stěna krychličky v určité vrstvě k povrchu tělesa, označíme ji v našem obrázku znaménkem $+$; patří-li spodní (dolní) stěna krychličky k povrchu tělesa, označíme ji v obrázku znaménkem $-$. Jestliže náleží povrchu boční stěna krychličky, vyznačíme ji v obrázku vrstvy tlustou úsečkou. Podle toho spočítáme v každé vrstvě počet stěn krychliček, které patří povrchu tělesa; zároveň spočítáme i počet krychliček v každé vrstvě (obr. 146 a, b, c, d, e).



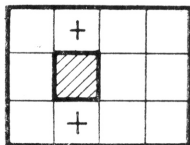
a



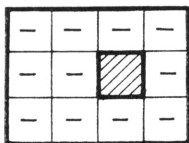
b



c



d



e

Obr. 146

Značka vrstvy	Počet stěn ve vrstvě krychliček, které patří povrchu tělesa			Cel- kem stěn	Počet krychliček ve vrstvě
	horních stěn (+)	dolních stěn (—)	bočních stěn (v obrázku tlustě vytažených)		
<i>a</i>	11	5	18	34	11
<i>b</i>	—	—	20	20	6
<i>c</i>	3	—	18	21	9
<i>d</i>	2	—	18	20	11
<i>e</i>	—	11	18	29	11
Součet				124	48

Odpověď. Povrch vzniklého tělesa je tedy 124 cm^2 , objem tělesa je 48 cm^3 . (Odpadlo $60 - 48 = 12$ krychliček.)

Jiné řešení. Na obrázku 147 máme znázorněno těleso, které jsme z kváдру odebrali. (Svislé šrafy značí zelenou barvu, šikmé šrafy červenou a vodorovné žlutou; stejně jsou obarveny i stěny vzniklé dutiny.)

Označme V objem a S povrch původního kváдру a V' , S' objem a povrch kváдру s dutinou.

Dutina nad $\mathbf{Q}_1$ vznikla vyjmutím šesti krychlí a vezmeme ji celou; má objem $V_1 = 6 \text{ cm}^3$, povrch $S_1 = 14 \text{ cm}^2$.

Dutina nad $\mathbf{Q}_2$ vznikla vyjmutím dalších tří krychlí; objem je $V_2 = 3 \text{ cm}^3$, povrch $S_2 = 12 \text{ cm}^2$.

Dutina nad Q_3 vznikla vyjmutím ještě dalších tří krychlí; objem je $V_3 = 3 \text{ cm}^3$, povrch $S_3 = 12 \text{ cm}^2$.

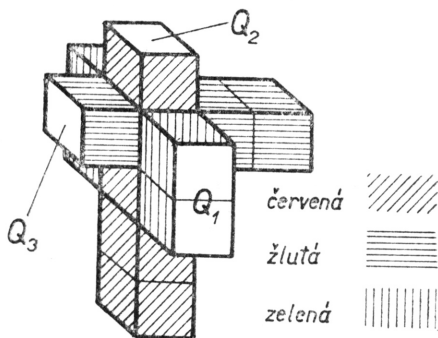
Obsahy obrazců Q_1, Q_2, Q_3 označíme Q_1, Q_2, Q_3 .

Podle obrázků vidíme, že platí (objem je vyjádřen v cm^3 , povrch v cm^2):

$$V' = V - (V_1 + V_2 + V_3) = 4 \cdot 3 \cdot 5 - (6 + 3 + 3) = 60 - 12 = 48;$$

$$S' = S + (S_1 + S_2 + S_3) - 2(Q_1 + Q_2 + Q_3) = 2 \cdot (4 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3) + (14 + 12 + 12) - (4 + 2 + 2) = 94 + 38 - 8 = 124.$$

Odpověď. Kvádr s dutinou má objem 48 cm^3 a povrch 124 cm^2 .

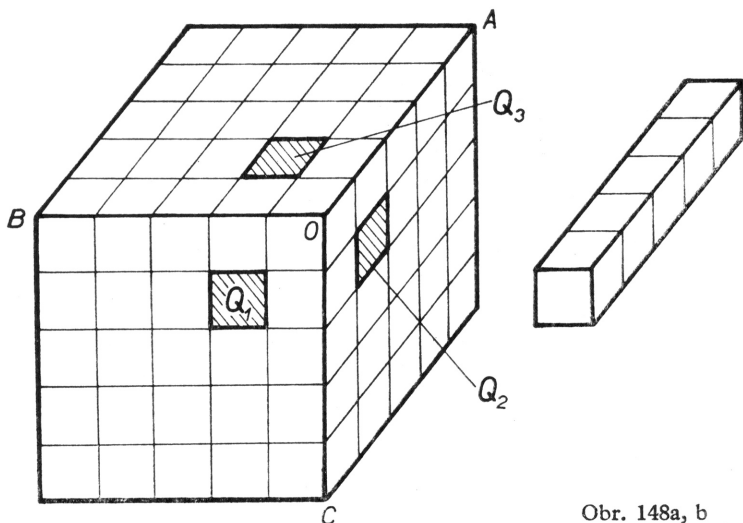


Obr. 147

87. Budiž dána krychle o hraně délky 5 cm; krychle je slepena z krychliček o hraně 1 cm. Zvolme na povrchu dané krychle tři čtverečky Q_1 , Q_2 , Q_3 o stranách délky 1 cm tak, jak je naznačeno v obr. 148a. Nad čtverečkem Q_1 ve směru hrany OA (viz obr. 148a) vyrazíme sloupec složený z pěti krychliček (vyňatá část je znázorněna v obr. 148b); tím vznikne v dané krychli otvor. Obdobným způsobem sestrojíme otvor nad čtverečkem Q_2 ve směru hrany OB a dále nad čtverečkem Q_3 otvor ve směru hrany OC . (Celkem bylo vyňato 13 krychliček.)

Provrtanou krychli ponoříme nyní do červené barvy, aby se povrch a dutiny obarvily. Po uschnutí krychli rozbijeme na krychličky o hranách délky 1 cm.

Určete, kolik jsme dostali krychliček, které mají obarvenou 1. jednu, 2. dvě, 3. tři, 4. čtyři, 5. pět, 6. šest, 7. žádnou stěnu.



Obr. 148a, b

Řešení. Abychom snadněji úlohu rozřešili, rozřežeme krychli na desky tvaru kvádrů, a to rovinnými řezy rovnoběžnými s horní podstavou krychle. Tím dostaneme pět desek tvaru kvádrů o rozměrech 5 cm, 5 cm, 1 cm; tyto desky na dané krychli odshora dolů očísloujeme číslicemi I, II, III, IV, V. Desky zobrazíme čtverci o rozměrech 5 cm (viz obr. 149 až 153); myslíme si, že se na desky díváme shora, takže vidíme horní stěnu čtvercové desky. Je-li horní stěna krychličky v určité desce obarvena, napíšeme do čtverečku, který krychličku znázorňuje, znaménko +; je-li obarvena dolní stěna, napíšeme znaménko —. Je-li obarvena boční stěna krychličky, vytáhneme stranu čtverečku v obrázku tlustou úsečkou. Tak snadněji spočítáme, kolik stěn má krychlička obarvených; celkový počet obarvených stěn krychliček napíšeme také dovnitř čtverečku. Krychličky, které jsme z krychle vyňali, znázorníme v obrázcích vyšrafovaným čtverečkem.

Výsledky, které získáme, napíšeme do tabulky. V tabulce, např. v řádku označeném II (tj. deska čís. II), čteme: 1 krychlička je neobarvená, 4 krychličky mají obarvenou jednu stěnu, 6 krychliček má obarvené dvě stěny, 4 krychličky tři stěny, 1 krychlička má obarvené čtyři stěny; celkem má deska 16 krychliček.

V předposledním řádku, označeném S, čteme výsledek: 11 krychliček je neobarvených, 36 krychliček má obarvenou jednu stěnu, 42 dvě stěny, 20 tři stěny, 3 čtyři stěny.

Provedeme **zkoušku**. Snadno přímo zjistíme, že je obarveno 192 stěn ($150 - 6 + 12 \cdot 4$); skutečně platí

$$36 \cdot 1 + 42 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 192.$$

I.

$^+3$	$^+2$	$^+2$	$^+3$	$^+3$
$^+2$	$^+1$	$^+1$	$^+2$	$^+2$
$^+2$	$^+1$	$^+1$	$^+3$	$^+2$
$^+3$	$^+2$	$^+3$		$^+4$
$^+3$	$^+2$	$^+2$	$^+4$	$^+3$

Obr. 149

II.

2	1	2		3
1	0	1		2
2	1	2		3
3	2	3		4

Obr. 150

III.

2	1	1	$^+2$	2
1	0	0	$^+1$	1
1	0	0	$^+2$	1
$^+2$	$^+1$	$^+2$		$^+3$
2	1	1	$^+3$	2

Obr. 151

IV.

2	1	1	1	2
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1		2
2	1	1	2	2

Obr. 152

V

$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$		$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$

Obr. 153

Počet obarvených krychliček v jednotlivých deskách je patrný z této tabulky:

Deska číslo	Počet krychliček, které mají obarveno n stěn					Počet krychliček v desce
	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	
I	0	4	10	8	2	24
II	1	4	6	4	1	16
III	4	10	8	2	0	24
IV	6	12	6	0	0	24
V	0	6	12	6	0	24
$S^*)$	11	36	42	20	3	112
Obarv. stěn	0	36	84	60	12	192

$^*) S$ je celkový počet krychliček.

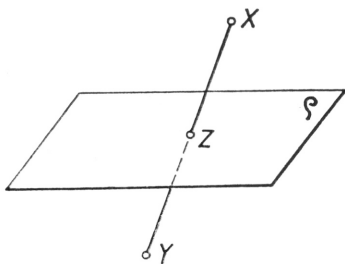
88. Dokažte, že hrany pravidelného trojbokého jehlanu se nedají očíslovat číslý 1, 2, 3, 4, 5 a 6 tak, aby součet tří čísel, kterými jsou očíslovány hrany jedné stěny, byl pro všechny čtyři stěny stejný (mezi stěny počítáme též podstavu).

Řešení. Představme si, že jsme si zvolili libovolný pravidelný trojboký jehlan, a že jsme jeho hrany očíslovali nějakým způsobem číslý 1, 2, 3, 4, 5, 6. Každé jeho stěně přiřadíme číslo, které je součtem tří čísel, jimiž jsou očíslovány její hrany. Jestliže sečteme čtyři čísla, která jsme takto přiřadili stěnám uvažovaného jehlanu, pak jejich součet bude

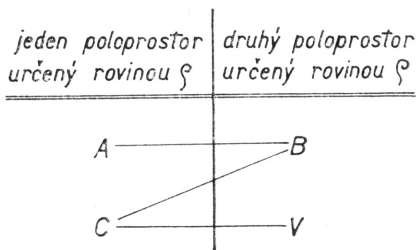
$$2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 42,$$

neboť každá hrana náleží dvěma stěnám. Odtud již plyne tvrzení, které jsme měli dokázat, neboť číslo 42 není dělitelné čtyřmi.

89. Je dán trojboký jehlan $ABCV$. Rovina ϱ protíná jeho hrany AB , BC , CV a neprochází žádným z bodů A , B , C , V . Které hrany jehlanu rovina ještě protíná?



Obr. 154

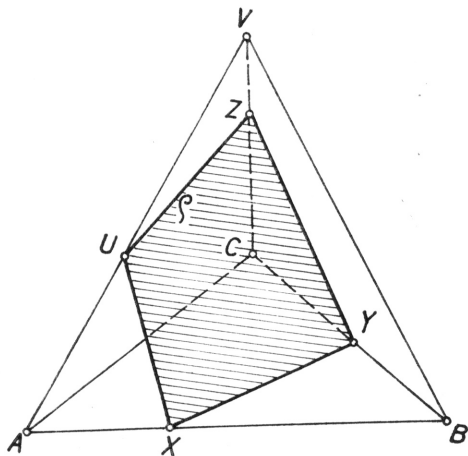


Obr. 155

Řešení. Nejprve zjistíme, které hrany by rovina ϱ ještě mohla protínat. Načtneme-li trojboký jehlan $ABCV$, vidíme, že z textu úlohy nevyplývá, zda protíná hrany AC , AV a BV .

Před vlastním řešením si připomeňme jeden poznatek z geometrie, který zní: Jsou-li X a Y dva různé body, které neleží v rovině ϱ , pak rovina ϱ úsečku XY protíná (obr. 154), právě když body X a Y leží v opačných poloprostorech vyřazených rovinou ϱ .

Vrcholy A , B neleží v rovině ϱ a rovina ϱ protíná hranu AB . Z těchto dvou podmínek plyne, že body A , B leží v opačných poloprostorech vyřazených rovinou ϱ . Obdobně zjistíme, že v navzájem opačných poloprostorech určených rovinou ϱ leží body B , C a také body C , V . Přehlednější bude, když si tato tři zjištění zapíšeme do tabulky (obr. 155). V témže poloprostoru tedy leží body A a C a také body B a V , takže rovina ϱ hrany AC a BV neprotíná. Body A , V však leží v různých poloprostorech, a proto rovina ϱ protíná hranu AV . Tyto vztahy jsou znázorněny na obr. 156.



Obr. 156

Jan Vyšín, Vlastimil Macháček, Jiří Mída

VYBRANÉ ÚLOHY Z MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
KATEGORIE Z

Obálku navrhl Jaromír Jarkovský

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze roku 1982
jako svou publikaci č. 5-42-18/2

Edice Pomocné knihy pro žáky

Odpovědná redaktorka: Květoslava Brázdová

Výtvarný redaktor: Václav Hanuš

Technická redaktorka: Eva Kalinová

Z nové sazby písmem Plantin vytiskly Moravské tiskařské závody, n. p.,

Olomouc, závod 10

Formát papíru 70 cm × 100 cm

Počet stran 362

AA 11,27 (8,69 AA textu, 2,58 AA grafiky) - VA 11,84

Náklad 5 000 výtisků

Tematická skupina a podskupina 03/2

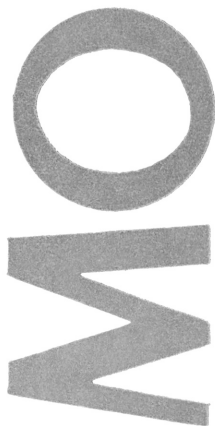
2. přepracované vydání

Cena brožovaného výtisku Kčs 14,00

505/21, 825

14-573-82	Kčs 14,00
-----------	-----------

**matematická
olympiáda**



SPN 5-42-18/2

14-573-82
03/2 Kčs 14,00