

[dokumenty-06] Úlohy z matematických olympiád na základní škole

Vladimír Repáš (editor); Anna Pribišová (editor); Juraj Vantuch (editor): [dokumenty-06] Úlohy z matematických olympiád na základní škole. (4.-7. ročník). (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1991.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/405296>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>



**ÚLOHY
Z MATEMATICKÝCH
OLYMPIÁD
na základní škole**

VLADIMÍR REPÁŠ, ANNA PRIBIŠOVÁ, JURAJ VANTUCH

**ÚLOHY Z MATEMATICKÝCH OLYMPIÁD
NA ZÁKLADNÍ ŠKOLE
(4. – 7. ROČNÍK)**

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ
PRAHA

Zpracovali RNDr. Vladimír Repáš, RNDr. Anna Pribišová, RNDr. Juraj Vantuch

Lektorovali RNDr. Tomáš Hecht, CSc., RNDr. Ludovít Hrdina, CSc.

© Vladimír Repáš, Anna Pribišová, Juraj Vantuch, 1991

ISBN 80-04-25439-X

OBSAH

Předmluva	5
30. ročník matematické olympiády	6
1. ročník MOZ (MaMO) školní rok 1980/1981	6
Kategorie MOZ 5	6
Kategorie MOZ 6	10
Kategorie MOZ 7	13
31. ročník matematické olympiády	17
2. ročník MOZ (MaMO) školní rok 1981/1982	17
Kategorie MOZ 5	17
Kategorie MOZ 6	20
Kategorie MOZ 7	23
32. ročník matematické olympiády	28
3. ročník MOZ (MaMO) školní rok 1982/1983	28
Kategorie MOZ 5	28
Kategorie MOZ 6	31
Kategorie MOZ 7	35
33. ročník matematické olympiády	39
4. ročník MOZ školní rok 1983/1984	39
Kategorie MOZ 4	39
Kategorie MOZ 5	41
Kategorie MOZ 6	44
Kategorie MOZ 7	48
34. ročník matematické olympiády	52
5. ročník MOZ školní rok 1984/1985	52
Kategorie MOZ 4	52
Kategorie MOZ 5	54
Kategorie MOZ 6	57
Kategorie MOZ 7	60
35. ročník matematické olympiády	64
6. ročník MOZ školní rok 1985/1986	64
Kategorie MOZ 4	64
Kategorie MOZ 5	67
Kategorie MOZ 6	71
Kategorie MOZ 7	74
Řešení úloh	78

Předmluva

Tato knížka obsahuje všechny úlohy z matematických olympiád, které se konaly v letech 1980/1981 až 1985/1986 v 4. až 7. ročníku základní školy. Čtenář v ní najde olympijskou úlohu, která ho svého času zaujala, ale i úlohu, která ho třeba rozzlobila. Tato téměř „archivní funkce“ byla jedním z důvodů k napsání této knihy. Jiným důvodem je tradice podobných brožur obsahujících úlohy z tzv. „velké“ matematické olympiády, osvědčená zkušenost, že vhodný příkladový materiál najde uplatnění při vyučovací hodině nebo při práci v matematických kroužcích.

Řešení úloh jsou většinou obsáhlá, žáci by měli být schopni pracovat s knihou samostatně. Tato řešení však nemůžeme pokládat za vzorová. Často jsme z důvodů úspory místa vynechali zápis úlohy, zkoušku, formulaci odpovědi. Snažili jsme se řešení přizpůsobit věku žáků, pro které je úloha určena. V těch případech, kdy řešení úlohy bylo zdlouhavé, popřípadě nepěkné, uvedli jsme i jiné řešení.

Pokud jsme v některém řešení vynechali důležitý mezikrok anebo se dopustili chyby, budeme vděční za upozornění. Za pečlivé přečtení rukopisu, cenné připomínky a rady patří naše poděkování RNDr. Tomáši Hechtovi, CSc., a RNDr. Ludovítu Hrdinovi, CSc.

Autoři

30. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

1. ROČNÍK MOZ (MaMO) ŠKOLNÍ ROK 1980/1981

Kategorie MOZ 5

MOZ 5 - I - 1

Petr byl znám tím, že rád dával různé úlohy svým spolužákům, ale při sčítání „pro jistotu“ používal sčítací pravítko. Jednou předložil spolužákům tuto statistiku: „V naší třídě je dohromady 31 žáků a všichni jsou podle svého zájmu rozděleni do kroužků takto: 18 žáků pracuje v matematickém kroužku, 14 v tělovýchovném a 16 v přírodovědném, 6 žáků pracuje v matematickém i tělovýchovném, 5 v matematickém i přírodovědném, 7 v tělovýchovném a přírodovědném a 3 ve všech třech kroužcích.“

Jana, nejlepší žákyně ve třídě v matematice a členka matematického kroužku, po krátkém kreslení a počítání prohlásila: „Petře, tvoje statistika není správná.“ Rozhodněte, kdo z nich měl pravdu.

MOZ 5 - I - 2

Na kolik nepřekrývajících se částí je možné rozdělit rovinu čtyřmi různými přímkami? Určete všechny možnosti a každou z nich znázorněte graficky.

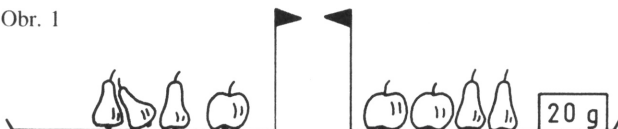
MOZ 5 - I - 3

Ve dvou kolonách aut bylo po 28 osobních autech. V obou kolonách dohromady bylo 11 aut značky Žiguli, ostatní byla značky Škoda 120 L. Kolik škodovek bylo v každé koloně, jestliže v první koloně připadlo na každé žiguli dvakrát méně škodovek než ve druhé?

MOZ 5 - I - 4

Rovnoramenné váhy byly v rovnováze při zatížení, které znázorňuje obrázek 1.

Obr. 1



(Všechny hrušky mají stejnou hmotnost, právě tak jablka; závaží má hmotnost 20 gramů.) Určete úsudkem (bez dalšího vážení) hmotnost jedné hrušky, jestliže hmotnost všeho ovoce je 780 gramů.

MOZ 5 - I - 5

Napište čtyři bezprostředně po sobě následující číslice různé od nuly. Zaměníte-li pořadí prvních dvou číslic, dostanete čtyřciferné číslo, které je součinem dvou stejných přirozených čísel. Určete všechna čtyřciferná čísla, která mají tuto vlastnost.

MOZ 5 - I - 6

Ve čtvercové tabulce (obr. 2) nahraďte písmena číslicemi tak, aby se součty čísel ve všech řádcích, sloupcích a obou úhlopříčkách rovnaly.

Obr. 2

a	b	x	-2
2	-3	-4	5
x	c	-1	0
k	x	e	f

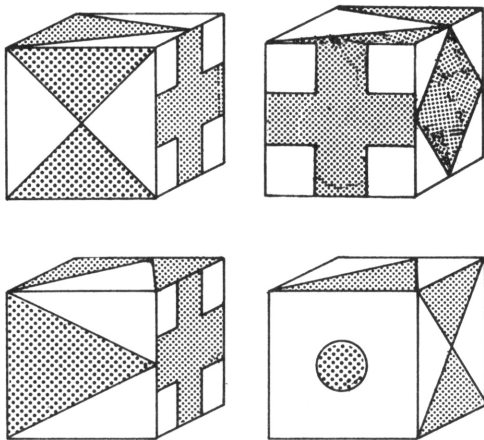
(Stejná písmena je třeba nahradit stejnými čísly, různá písmena znamenají různá čísla.)

MOZ 5 - I - 7

V prodejně látek měli 1 620 m látky. První den prodali 0,3 tohoto množství, druhý den $\frac{1}{6}$ zbytku. Zbylou látku prodali během dalších dvou dní tak, že třetí den prodali čtyřikrát víc než čtvrtý den. Kolik metrů látky prodali v jednotlivých dnech, jestliže za čtyři dny prodali všechnu látku?

MOZ 5 - I - 8

Na obrázku 3 je krychle s délkou hrany $a = 4$ cm ve čtyřech různých polohách. Narýsujte síť této krychle (i s geometrickými vzory).



Obr. 3

MOZ 5 - II - 1

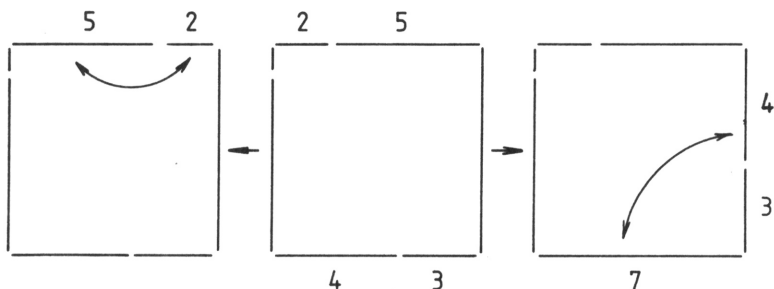
Spolužáci Aleš, Boris, Cyril, Dušan a Emil přinesli do sběrný dohromady 25 kg surovin. Hmotnost surovin, které odevzdal každý z nich, byla větší než 1 kg a byla vyjádřena v kilogramech přirozeným číslem. Určete, kolik surovin odevzdal každý ze spolužáků, víte-li, že Aleš přinesl víc než Cyril, Boris víc než Emil, Dušan méně než Emil a Cyril víc než Boris. V případě, že má úloha více řešení, najděte všechna.

MOZ 5 - II - 2

Tři stejně velké krychle a velká koule mají stejnou hmotnost jako 12 malých stejných kuliček. Hmotnost velké koule se rovná hmotnosti jedné krychle a 8 malých kuliček. Kolik kuliček má stejnou hmotnost jako velká koule?

MOZ 5 - II - 3

Z 9 tyčinek délek 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm, 9 cm sestavte čtverec. V případě, že se vám to podaří, určete délku strany čtverce. Najděte všechny další jiné způsoby sestavení čtverců. Čtverce považujeme za stejné, liší-li se pouze zaměněním tyčinek na téže straně nebo mají „přehozené” celé strany (obr. 4). Na sestavení čtverce nemusíme použít všechny tyčinky.



Obr. 4

MOZ 5 - II - 4

Narýsujte dva libovolné obdélníky tak, aby jejich průnik byl a) osmiúhelník, b) sedmiúhelník, c) šestiúhelník, d) pětiúhelník, e) čtyřúhelník, f) trojúhelník, g) úsečka, h) bod. V případech a) až f) společnou část obdélníků vyšrafujte.

Kategorie MOZ 6

MOZ 6 - I - 1

Určete počet všech dvojciferných čísel, jejichž druhá mocnina končí číslicí jedna.

MOZ 6 - I - 2

Přeškrtnete-li první dvě číslice pěticiferného čísla a za takto získané trojciferné číslo připsíte číslici 8, dostanete čtyřciferné číslo, které je čtyřikrát menší, než bylo původní pěticiferné číslo. Určete všechna čísla, která mají tuto vlastnost.

MOZ 6 - I - 3

Je dáno pět úseček s délkami 1, 3, 5, 7 a 9 cm. Kolik různých trojúhelníků je možné sestavit z těchto úseček?

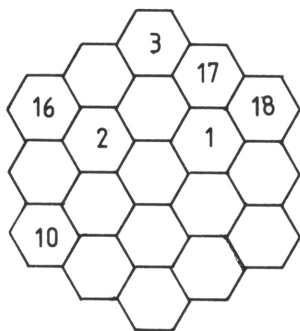
MOZ 6 - I - 4

a) V rovině je dáno 100 různých bodů, z nichž žádné tři neleží na téže přímce. Kolik různých přímek je těmito body určeno?

b) Řešte úlohu pro 101 různých bodů v rovině za stejných podmínek.

MOZ 6 - I - 5

Prázdné šestiúhelníčky (obr. 5) doplňte přirozenými čísly tak, aby v obrazci byla všechna čísla od 1 do 19. Ve všech pěti řádcích každého ze tří směrů (svislý a dva šikmé) musí být součet čísel v řádku vždy týž.



Obr. 5

MOZ 6 - I - 6

Dva vlaky jedoucí proti sobě se mají potkat. Jeden jede rychlostí 60 km/h, druhý rychlostí 40 km/h. V jaké vzdálenosti budou vlaky 30 minut před tím, než se potkají?

MOZ 6 - I - 7

Z Bratislavy do Banské Bystrice vyjelo nákladní auto rychlostí 30 km/h. Současně s ním vyjel autobus, který jel rychlostí 40 km/h a přijel do Banské Bystrice o 1 hodinu a 45 minut dříve než nákladní auto. Zjistěte na základě těchto údajů, jaká je vzdálenost mezi Bratislavou a Banskou Bystricí.

MOZ 6 - I - 8

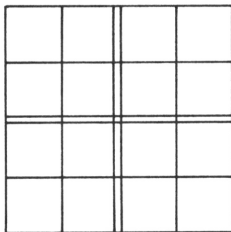
Za Jendou, nejlepším matematikem 6. B, přišla spolužačka Zuzka a řekla: „Neumím si poradit s úlohou z časopisu: Sedm bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží v přímce, spojte úsečkami libovolným způsobem tak, aby z každého bodu vycházely tři úsečky.“ Jenda se zamyslel a za chvíli řekl: „To ale nejde, protože úloha je neřešitelná,“ a vysvětlil Zuzce proč. Jak Jenda uvažoval? Za týden uveřejnili v časopise opravu tiskové chyby. Bodů mělo být osm. Je v tomto případě úloha řešitelná?

MOZ 6 - II - 1

Žáci sportovní třídy byli na horách. Za tři dny ušli 65 km. První den ušli dvakrát více než třetí den. Druhý den ušli o 10 km méně než první den. Kolik kilometrů ušli v jednotlivých dnech?

MOZ 6 - II - 2

Umístěte do 16 okének čtverce na obrázku 6 všechna čísla od 1 do 8, a to každé dvakrát, tak aby se součet čtyř čísel v každém řádku, v každém sloupci, v každé úhlopříčce, v každém malém čtverci a v rozích velkého čtverce rovnal 18.



Obr. 6

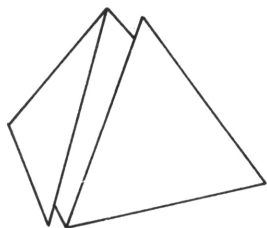
MOZ 6 - II - 3

Je dáno dvojciferné číslo. Zaměníme-li pořadí jeho cifer, dostaneme dvojciferné číslo, které je čtyřiapůlkrát větší než dané číslo. Určete dané číslo.

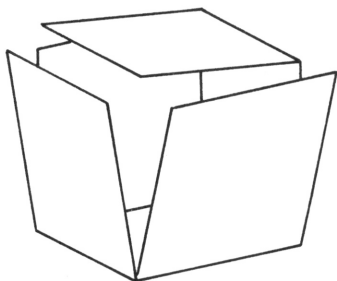
MOZ 6 - II - 4

Na obrázku 7a je nakreslen rozkládací model pravidelného čtyřstěnu a na obrázku 7b rozkládací model krychle.

- Nakreslete síť čtyřstěnu a síť krychle.
- Zjistěte, kolika různými způsoby je možné nakreslit síť čtyřstěnu a krychle.



a)



b)

Kategorie MOZ 7

MOZ 7 - I - 1

Náměstí tvaru obdélníku s délkami stran 252 m a 180 m je třeba osvětlit elektrickými lampami, které mají být umístěny ve stejných vzdálenostech po obvodě náměstí. V každém rohu náměstí už stojí jedna lampa. Kolika lampami ještě musíme osvětlit náměstí, jestliže mezera mezi lampami má být co největší?

MOZ 7 - I - 2

Jeden náš známý matematik si v den svých narozenin roku 1963 všiml, že jeho věk se rovná součinu čísel napsaných čtyřmi číslicemi letopočtu jeho narození. V kterém roce se narodil?

MOZ 7 - I - 3

Z krychlí s objemem 1 cm^3 je sestavena velká krychle, jejíž povrch je obarven a měří 216 cm^2 . Z každého rohu velké krychle odebereme jednu malou krychli.

a) Určete objem takto vzniklého tělesa.

b) Rozhodněte, zda je možno z takto odebraných krychlí vytvořit kvádr, jehož povrch bude mít tolik cm^2 , o kolik se zmenšil obarvený povrch. Jestliže ano, jaké budou jeho rozměry?

c) Kolik procent barvy by se ušetřilo, kdybychom místo velké krychle natřeli jen tu část jejího původního povrchu, která zůstala po odebrání malých krychlí z rohů velké krychle?

MOZ 7 - I - 4

Je dán obdélník $ABCD$ se stranami $|AB| = 3 \text{ cm}$, $|BC| = 2 \text{ cm}$. S je střed obdélníku. Označme S_1 obraz bodu S ve středové souměrnosti se středem v bodě A , S_2 obraz bodu S_1 ve středové souměrnosti se středem v bodě B . Vypočítejte obsah trojúhelníku SS_1S_2 .

MOZ 7 - I - 5

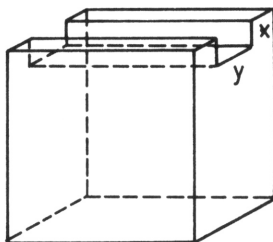
Škola objednala dohromady 324 bílých, růžových a červených aster do kytic na hroby padlých vojáků. Růžových aster bylo o 36 víc než bílých a červených bylo dvakrát víc než bílých. Kolik stejných kytic (stejný počet květů i barev) se dá svázat z těchto květů? Kolik květů jednotlivých barev by bylo v každé kytici? Napište všechny možnosti.

MOZ 7 - I - 6

Vysokoškoláci Vláďa a Milan hrají šachy. Kolem nich jde Milanova mladší sestra Naďa. Na Vláškovu otázku: „Kolik let je Naďe?“ Milan odpovídá: „Když vynásobíš pořadové číslo dnešního dne v týdnu (pondělí – 1, ..., neděle – 7) číslem Nadina dne narození a číslem měsíce, ve kterém se narodila, dostaneš rok jejího narození.“ Určete den v týdnu, kdy hráli Milan a Vláďa šachy, a datum, kdy se narodila Naďa.

MOZ 7 - I - 7

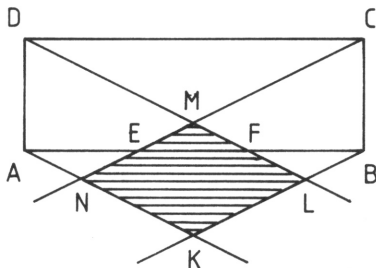
Do krychle s hranou délky 60 mm je třeba udělat výřez tvaru kvádru tak, jak je to znázorněno na obrázku 8. Jaké rozměry x, y vyjádřené celými čísly může mít tento výřez, aby povrch tělesa, které po výřezu vznikne, byl o $\frac{1}{6}$ větší než povrch celé krychle? Délka y nesmí být menší než 10 mm, ale musí být menší než 30 mm.



Obr. 8

MOZ 7 - I - 8

Je dán obdélník $ABCD$ se stranami $|AB| = 3$ cm, $|BC| = 1$ cm. Na straně AB zvolme body E, F tak, aby platilo $|AE| = 1$ cm, $|BF| = 1$ cm. Sestrojte přímky CE, DF a bodem B veďte rovnoběžku s přímkou CE , bodem A rovnoběžku s přímkou DF . Průsečíky dvojic rovnoběžek označme K, L, M, N (obr. 9). Vypočítejte obsah rovnoběžníku $KLMN$.



Obr. 9

MOZ 7 - II - 1

Žáci dvou tříd se dohodli, že při sběru starého papíru se rozdělí do skupin tak, aby v každé skupině byl stejný počet žáků. Při rozdělování zjistili, že se mohou rozdělit jen na skupiny po 3 nebo 7 žácích, protože při utváření skupin po 4, 5 nebo 6 žácích vždy přebývala trojčlenná skupina. Kolik žáků měly obě třídy dohromady, jestliže víte, že v každé třídě bylo méně než 40 žáků?

MOZ 7 - II - 2

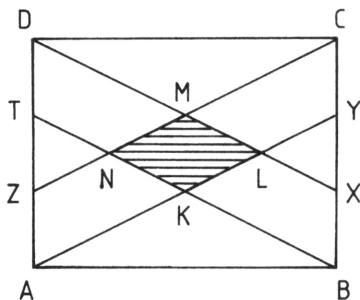
Kolik kvádrů s povrchem 52 cm^2 a s jedním rozměrem $a = 2 \text{ cm}$ je možno sestavit z nejvýše 40 krychlí s hranou délky 1 cm ?

MOZ 7 - II - 3

Jenda a Petr hrají kuličky tak, že střídavě berou 2 nebo 3 kuličky z hromádky, ve které je 12 kuliček. Vyhrává ten, kdo bere poslední. Zůstane-li na konci 1 kulička, je výsledek nerozhodný. Po chvílce zjistili, že ten, kdo začíná brát první, může vždy vyhrát. Kolik kuliček musí vzít začínající hráč, aby vyhrál? Odůvodněte své tvrzení.

MOZ 7 - II - 4

Je dán obdélník $ABCD$ ($|AB| = 4 \text{ cm}$, $|BC| = 3 \text{ cm}$). Na straně $|BC|$ zvolme body X, Y tak, aby platilo $|BX| = |CY| = 1 \text{ cm}$, a na straně AD body Z, T tak, aby $|AZ| = |DT| = 1 \text{ cm}$. Průsečíky úseček AY, ZC, DX, TB je určen rovnoběžník $KLMN$ (obr. 10). Vypočítejte obsah rovnoběžníku $KLMN$.



Obr. 10

31. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

2. ROČNÍK MOZ (MaMO) ŠKOLNÍ ROK 1981/1982

Kategorie MOZ 5

MOZ 5 - I - 1

Máme padesátihaléřové, korunové a dvoukorunové mince. Kolika způsoby můžeme zaplatit částku 3,50 Kčs?

MOZ 5 - I - 2

„Změnit“ číslo bude znamenat vydělit ho dvěma a k výsledku přičíst 1. Například změníme-li číslo 5, dostaneme $\frac{5}{2} + 1$ neboli 3,5. Změníme-li číslo 3,5, dostaneme $\frac{3,5}{2} + 1$, tedy 2,75, a změníme-li toto číslo, dostaneme 2,375. Jestliže tedy číslo 5 „třikrát po sobě změníme“, dostaneme číslo 2,375.

a) Myslím si číslo x . Změnil jsem ho třikrát po sobě a dostal jsem číslo 2. Které číslo jsem si myslel?

b) Myslím si číslo y . Změnil jsem ho čtyřikrát po sobě a dostal jsem číslo 3. Které číslo jsem si myslel?

MOZ 5 - I - 3

Narýsujte čtverec $ABCD$ se stranou $|AB| = 6$ cm. Sestrojte střed úsečky CD a označte ho E . Narýsujte úhlopříčku AC a úsečku BE . Úsečky AC , BE rozdělily čtverec na čtyři části. Vypočítejte obsah každé z nich.

MOZ 5 - I - 4

V rovině je dán rovnostranný trojúhelník ABC se středy stran P, Q, R . Kolika způsoby můžeme rozdělit trojúhelník ABC na čtyři menší trojúhelníky, jejichž vrcholy jsou prvky množiny bodů A, B, C, P, Q, R ?

MOZ 5 - I - 5

Počítáte-li součiny tří, $3 = 03$, $3 \cdot 3 = 09$, $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$, $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$, $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$, vidíte, že je na místě desítek vždy sudá číslice. Bude na místě desítek sudá číslice i tehdy, vynásobíte-li 40 trojek? Jestliže ano, jaká? Zkuste co nejjednodušeji násobit.

MOZ 5 - I - 6

Pět dětí, které označíme A, B, C, D, E , odevzdalo 25 kg surovin. Žák A přinesl víc než C , B víc než žák E , žák D méně než E a žák C víc než žák B . Hmotnost surovin, které odevzdal každý žák, byla v kilogramech vyjádřena přirozeným číslem. Kolik kilogramů surovin odevzdali jednotliví žáci? Pokud má úloha více řešení, najděte všechna.

MOZ 5 - I - 7

Šest měst A, B, C, D, E, F je spojeno silnicemi. Na obr. 11 jsou zapsány nejkratší silniční vzdálenosti mezi jednotlivými městy v kilometrech. Nakreslete mapku silniční sítě a vyznačte na ní města, jejich označení a silniční vzdálenosti.

Obr. 11

A					
13	B				
7	9	C			
4	9	10	D		
9	4	5	5	E	
4	12	3	8	8	F

MOZ 5 - I - 8

Dva chlapci závodili na kruhovém hřišti. Mladší z nich šel rychlostí 5 km/h. Starší chlapec šel rychlostí 7 km/h a vystartoval tehdy, když mladší ušel vzdálenost 400 metrů. Závod skončil po čtyřech kolech. Jak dlouhá byla trať, jestliže oba chlapci došli do cíle současně?

MOZ 5 - II - 1

Kolika způsoby je možné z devíti stejně velkých čtverců (tří bílých, tří červených a tří modrých) složit čtverec s rozměry 3×3 tak, aby v každém řádku i v každém sloupci byly čtverce různých barev?

MOZ 5 - II - 2

a) Vyškrtněte ze sedmiciferného čísla 4 713 268 tři číslice tak, abyste dostali co největší číslo.

b) Z 31ciferného čísla

1 234 567 891 011 121 314 151 617 181 920 vyškrtněte 6 číslic tak, abyste dostali co nejmenší číslo.

MOZ 5 - II - 3

Do dvanácti prázdných políček tabulky na obrázku 12 запиšte čísla tak, aby součet každých tří čísel, která je možné pokrýt obdé-

níkem

--	--	--

 nebo

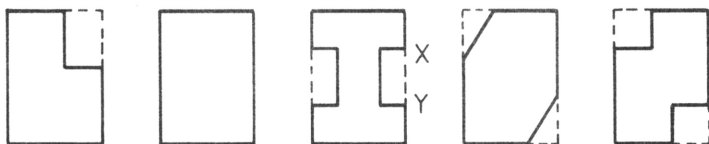
, se rovnal šesti.

1			
	0		
		2	
	3		

Obr. 12

MOZ 5 - II - 4

Pět sousedů, Antonín, Bohumil, Cyril, Dušan a Emil, mělo zahrady tvaru jako na obrázku 13. Uspořádejte zahrady podle délky plotu bez měření. Své výsledky zdůvodněte.



Antonín

Bohumil

Cyril

Dušan

Emil

Obr. 13

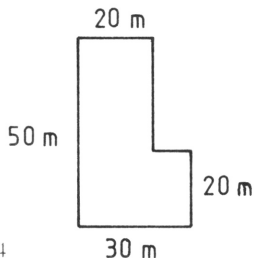
Kategorie MOZ 6

MOZ 6 - I - 1

Traktorista chtěl zorat 18 ha pole za 3 dny při stejném denním výkonu. První den plán splnil. Druhý den však pracoval v horších podmínkách a zoral o 15 % méně než první den. O kolik procent musí zvýšit svůj výkon třetí den proti výkonu ve druhém dni, aby splnil plán?

MOZ 6 - I - 2

Otec odkázal třem synům zahradu, jejíž tvar je znázorněn na obrázku 14, s podmínkou, že si ji rozdělí na tři části tak, aby byly stejně velké, měly stejný obvod a tvar. Jak to udělali?



Obr. 14

MOZ 6 - I - 3

Na celostátním kole matematické soutěže se setkal Paľko z Prešova, Slavko ze Sliače, Bohuš z Bardejova, Lacko z Lúček a Rudko z Ružbachů. Při loučení se domluvili, že každý z nich během prázdnin navštíví právě jednoho kamaráda. Plán návštěv navrhl Rudko, který cestou domů navštíví Paľka. Plán obsahoval tyto podmínky: Lacko nepojede do Ružbachů, Rudka navštíví ten, kdo bydlí ve městě, kam pojede Bohuš. Paľko to nebude. Sestavte plán, kdo koho navštíví.

MOZ 6 - I - 4

Na mezinárodní konferenci bylo 33 účastníků od nás, ze Sovětského svazu a z Maďarska. Osm z nich ovládalo ruštinu a maďarštinu, 14 ruštinu a slovenštinu a jen 5 mluvilo plynule slovensky i maďarsky. Tři účastníci konference ovládali všechny tři jazyky. Počet těch, kteří znali jen svůj mateřský jazyk, byl stejný ze všech tří zemí. Určete, kolik účastníků konference umělo rusky, kolik slovensky a kolik maďarsky.

MOZ 6 - I - 5

Nad úhlopříčkou AC daného obdélníku $ABCD$ sestrojte obdélník $ACKL$ tak, aby oba obdélníky měly stejný obsah.

MOZ 6 - I - 6

V pěti sáčkích jsou kuličky, jejichž množství je vyjádřeno pěti za sebou následujícími sudými přirozenými čísly. Dohromady je jich 300. Kolik kuliček je v každém sáčku?

MOZ 6 - I - 7

Během přestávky před hodinou matematiky jeden člen služby napsal na tabuli: $[1, \frac{1}{2}]$, $[2, \frac{4}{5}]$, $[3, 1]$, $[4, \frac{8}{7}]$, $[5,]$, $[,]$. Už se to

chystal smazat, když zazvonilo a do třídy vkročila paní učitelka. Podívala se na tabuli a řekla: „Nemazat, je v tom určitá zákonitost. Kdo ji objeví?”

a) Která tři čísla nestihl žák napsat?

b) Napište uspořádanou dvojici čísel v hranaté závorce obecně. Jestliže první číslo je n , jaké je druhé číslo?

MOZ 6 - I - 8

Je dán trojúhelník ABC . Označte A_0 , B_0 , C_0 středy stran BC , AC , AB a T průsečík úseček AA_0 , BB_0 a CC_0 . (T je těžiště trojúhelníku ABC .) Dokažte, že obsahy trojúhelníků ABT , BCT a CAT se rovnají.

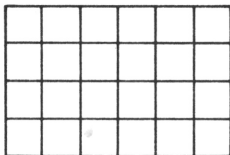
MOZ 6 - II - 1

Rybář chytil sumce. Když se ho přátelé zeptali, jak dlouhý byl úlovek, odpověděl: „Hlava je dlouhá 9 cm. Délka těla se rovná délce ocasu a hlavy dohromady. Potom ocas je tak dlouhý jako hlava a polovina těla dohromady.” Jakou délku měl ulovený sumec?

MOZ 6 - II - 2

Obdélník s rozměry $a = 6$ cm, $b = 4$ cm (obr. 15) rozřežte na 4 shodné části tak, aby jejich rozměry v centimetrech byly vyjádřeny přirozenými čísly. Řezat smíte jen po čarách sítě. Najděte všechny možnosti.

Obr. 15



MOZ 6 - II - 3

Žáci třídy 6. A denně sledovali počasí v průběhu dvou týdnů a zaznamenali tyto údaje:

- a) zataženo ... 5 dní,
- b) zataženo a déšť ... 3 dni,
- c) déšť ... 4 dni.

Kolik dní bylo jasno (tj. nebylo zataženo a nepršelo)?

MOZ 6 - II - 4

Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC s výškou $v = 6$ cm. Uvnitř tohoto trojúhelníku najděte takový bod X , aby obsah trojúhelníku BCX byl dvakrát větší než obsah trojúhelníku ABX a obsah trojúhelníku ACX třikrát větší než obsah trojúhelníku ABX .

Kategorie MOZ 7

MOZ 7 - I - 1

Z číslic 1 až 9 sestavte dvojice čísel a jejich součin tak, aby se v zápisu vyskytovaly tyto číslice právě jednou. Např.: $18 \cdot 297 = 5\,346$.

Počítač zjistil, že existuje ještě 8 podobných součinů. Pokuste se je najít.

MOZ 7 - I - 2

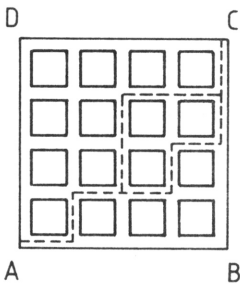
Vedení zemědělského družstva se rozhodlo v období žní dopravit do skladů auta s obilím přesně v 11.00 h. Jestliže auta pojedou rychlostí 30 km/h, přijedou na místo v 10.00 h, pojedou-li však rychlostí 20 km/h, přijedou na místo ve 12.00 h. Kolik kilometrů je z družstva ke skladům obilí a jakou rychlostí musí jet auta, aby přijela na místo ve stanovenou dobu?

MOZ 7 - I - 3

Z dopisu žáků:

V matematickém kroužku jsme rýsovali plán šestnácti čtvrtí našeho města. Na náčrtu plánu, který vidíte na obrázku 16, jsou všechny čtvrti znázorněny stejnými čtverci. Zaujalo nás, kolik různých ulic je možné vést z bodu A do bodu C, můžeme-li se pohybovat ulicemi našeho města jen nahoru a vpravo. Některé úseky ulic mohou splývat (viz čárkované čáry na náčrtu plánu). Přesvědčili jsme se, že to není lehká úloha. Vyřešili jsme ji správně, když jsme našli 70 různých ulic?

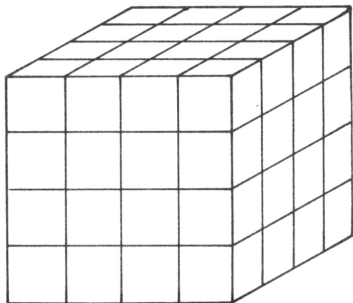
Jak je potřeba odpovědět na tento dopis?



Obr. 16

MOZ 7 - I - 4

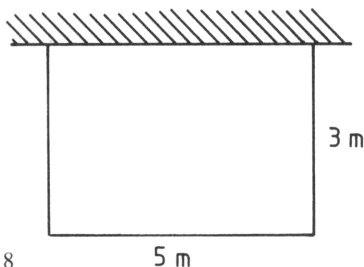
Chceme rozřezat dřevěnou krychli s hranou délky 40 cm na 64 krychlí s délkou hrany 10 cm (obr. 17). Snadno to můžeme udělat devíti řezy, jestliže nezměníme polohu rozřezaných částí. O kolik se dá zmenšit počet řezů, můžeme-li po každém řezu části přemístit?



Obr. 17

MOZ 7 - I - 5

Dědeček je drobný chovatel. Má ohrádku pro kuřátka 5 m dlouhou a 3 m širokou. Ohrádka je ze tří stran oplocena pletivem a na jedné z delších stran je postaven kurník (obr. 18). Dědeček se rozhodl, že ohrádku obloží prkny, aby kuřata nemohla podlézat pletivo. Šel do kůlny, kde měl jedno prkno 5 m dlouhé, jedno 3 m dlouhé, čtyři 2 m dlouhá a jedno 1 m dlouhé. Aspoň jedno z prken musel v kůlně nechat. Kolik je možností, jak obložit ohrádku, aby dědeček nemusel donesená prkna řezat?



MOZ 7 - I - 6

Některé bakterie se ve zkumavce množí dělením tak, že každou minutu vzniknou z jedné bakterie dvě. Za 24 hodin se bakterie rozmnožily tak, že zaplnily celou zkumavku. Za jakou dobu byla zaplněna čtvrtina zkumavky?

MOZ 7 - I - 7

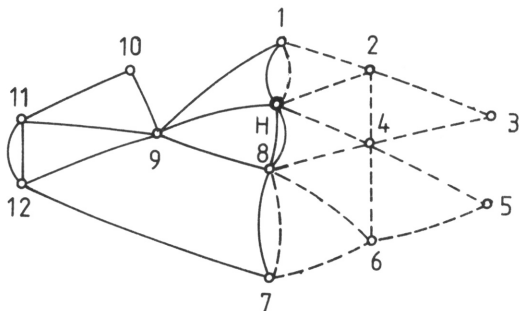
Kolik různých tahů může na prázdné šachovnici udělat a) jezdec, b) dáma?

Za Jendou, nejlepším matematikem 7. A, přišla spolužačka Zuzka a řekla: „Jendo, mám problém.“ „Už zase?“ „Zase. Víš, můj otec a strýc Fanda kropí ulice ve městě a nevědí si rady. Podívej, přinesla jsem ti pláněk části města, o kterou jde: Tlustě vytažené ulice kropí otec a čárkovaně vytažené kropí strýc. Oba vyjedou od hydrantu H a chtěli by každou ulicí projet jen jednou a znovu se k němu vrátit.“ „A mají dost vody?“ „Vody by měli dost, ale ať dělají co dělají, vždy musí jet po ulici, kterou už kropili, a zbytečně plýtvat naftou. Chápeš?“ Jenda si vzal pláněk a druhý den řekl Zuzce: „Při tomto rozdělení ulic, které mají, to jinak nejde, jestliže však tvůj otec dá jednu ulici strýci Fandovi, dá se to vyřešit“ a vysvětlil Zuzce jak. Víte to i vy? Jestliže ano, jistě odpovíte správně na tyto tři otázky:

a) Proč se úloha nedá vyřešit při původním rozdělení ulic?

b) Kterou ulici musí Zuzčin otec dát strýci Fandovi, aby úloha měla řešení?

c) Poradte Zuzčinu otci a strýci Fandovi, jak je třeba jet s kropicími vozy (po předání ulice), aby po vyjetí od hydrantu H projel každý jemu přidělenou ulicí jen jednou a vrátil se k hydrantu H. Stačí napsat pořadí křižovatek (na plánu jsou očíslované). (Obr. 19.)

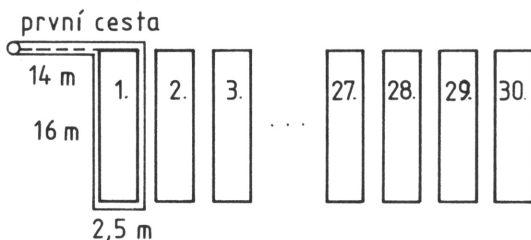


Obr. 19

Pět bojovníků z kmene Apačů v čele se slavným Vinnetouem zajalo 34 dobytých - bělochů. Do tábora je měli dopravit přes řeku ve člunu, do kterého se vešlo 9 lidí. Náčelník Vinnetou dal převést zajatce tak, aby jeden bojovník neměl pod dozorem víc než 10 zajatců a aby je převezli napětkrát. Víte, jak to udělali?

MOZ 7 - II - 2

Na zahradě je 30 záhonů. Každý má délku 16 metrů a šířku 2,5 metru. Zahradník nosí na zalévání vodu v konvích ze studně vzdálené 14 metrů od zahrady, přičemž obchází záhony po obvodu. Najednou přinese vodu na jeden záhon. Kolik metrů musí ujít, aby zalil všechny záhony? Cesta začíná a končí u studně. Podívej se na obrázek 20.



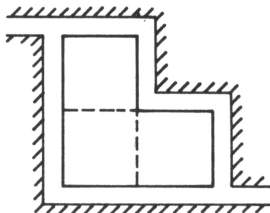
Obr. 20

MOZ 7 - II - 3

Dva soustružníci mají dohromady zhotovit víc než 100 a méně než 450 výrobků. Plánované výkony prvního a druhého soustružníka jsou různé. První soustružník zhotovil první den $\frac{1}{5}$, druhý den $\frac{1}{6}$, třetí den $\frac{2}{7}$ množství, které si naplánoval. Druhý soustružník zhotovil první den $\frac{1}{3}$, druhý den $\frac{1}{4}$ a třetí den $\frac{3}{11}$ množství, které si naplánoval. Jaké byly plánované úkoly každého z nich?

MOZ 7 - II - 4

Pozemek na obrázku 21 je třeba rozdělit na 8 stavebních parcel tak, aby měly stejný tvar i velikost a aby se na každou parcelu dalo vejít přímo z ulice.



Obr. 21

32. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

3. ROČNÍK MOZ (MaMO) ŠKOLNÍ ROK 1982/1983

Kategorie MOZ 5

MOZ 5 - I - 1

V krabici je 7 červených a 5 modrých pastelek. Se zavázanýma očima máte z krabice vybrat nejmenší možný počet pastelek tak, aby mezi nimi byly aspoň 2 červené a aspoň 3 modré. Kolik pastelek musíte vybrat?

MOZ 5 - I - 2

Najděte přirozené číslo s touto vlastností: Zmenšíme-li ho o 7 a výsledek vydělíme deseti, dostaneme číslo, které je o 34 menší než hledané číslo.

MOZ 5 - I - 3

Součin dvou čísel je dvakrát větší než jejich součet a součet je třikrát větší než jejich rozdíl. Která jsou to čísla?

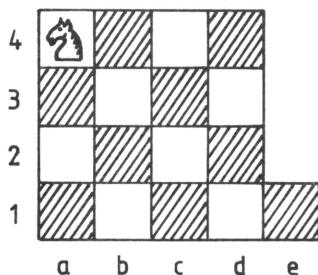
MOZ 5 - I - 4

Kolik čtyřciferných čísel, která mají číslici 7 na místě desítek a číslici 9 na místě set, má při dělení 45 podíl přirozené číslo? Najděte tato čísla.

MOZ 5 - I - 5

V rohu části polámané šachovnice (obr. 22) stojí kůň (pole $a4$), který se chce dostat do protilehlého rohu (pole $e1$) tak, aby na každé pole šachovnice vstoupil právě jednou. Jak to má udělat?

Obr. 22



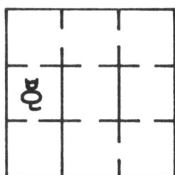
MOZ 5 - I - 6

Součet několika přirozených čísel je 11. Jaký největší může být jejich součin?

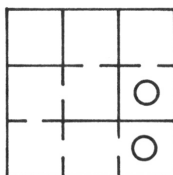
MOZ 5 - I - 7

V tříposchodové budově je v každém poschodí 9 místností. Půdorysy jednotlivých poschodí jsou načrtnuty na obrázcích 23a, b, c. V jedné místnosti v prvním poschodí je kočička (obr. 23a), která se potřebuje dostat do třetího poschodí ke své misce s mlékem (obr. 23c). Na obrázcích je vyznačeno, kde může projít dveřmi z jedné místnosti do druhé v jednotlivých poschodích; kroužek označuje místnost, do níž může vylézt po žebříku z nižšího poschodí do vyššího. Vyznačte nejkratší cestu kočky k misce.

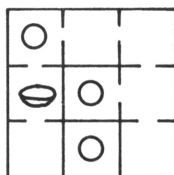
Obr. 23



a)



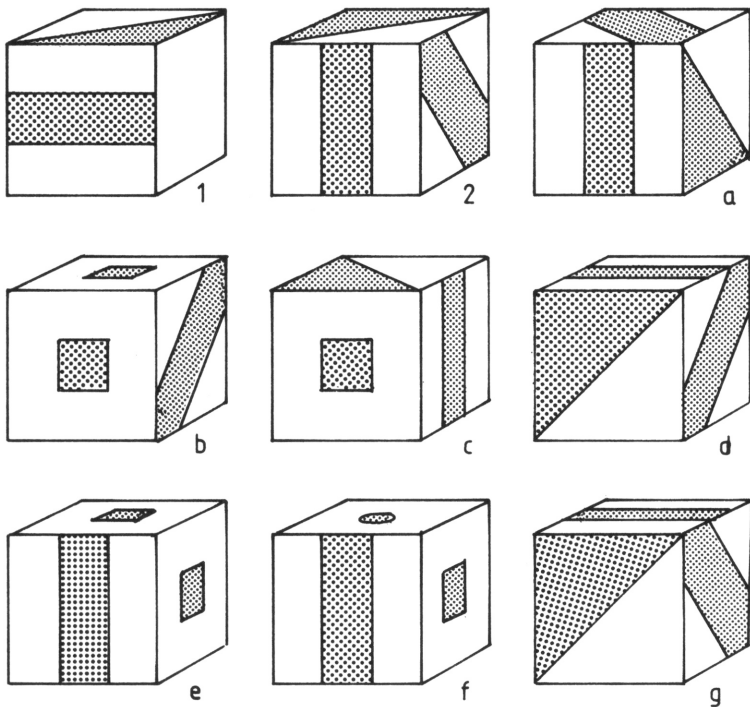
b)



c)

MOZ 5 - I - 8

Na obrázcích 24-1 a 24-2 je znázorněna stejná krychle. Rozhodněte, které z obrázků 24a až g mohou znázorňovat pohledy na tuto krychli.



Obr. 24

MOZ 5 - II - 1

Svatopluk měl více než 50 a méně než 100 prutů. Svazoval-li je do svazků po devíti, chyběl mu (v posledním svazku) 1 prut. Kdyby pruty svazoval po sedmi, zbyl by mu 1 prut. Kolik prutů měl Svatoopluk?

MOZ 5 - II - 2

Na přímé silnici jsou čtyři autobusové zastávky A, B, C, D . Nakreslete, jak jsou uspořádány, jestliže $|AD| = 1$ km, $|BC| = 2$ km, $|BD| = 3$ km, $|AB| = 4$ km, $|CD| = 5$ km. Určete vzdálenost zastávek A, C .

MOZ 5 - II - 3

Barbora, Petr a Tomáš se setkali na začátku školního roku 1982/1983 už jako pátáci. Petr řekl Tomášovi: „Představ si, mému dědovi je přesně tolik let, jako ukazují poslední dvě číslice letopočtu, ve kterém se narodil.“ Tomáš udiveně odpověděl Petrovi: „Víš, že s počtem let mé maminky je to přesně tak?“ Barbora řekla, že to není možné. Co myslíte, měla Barbora pravdu? Pokud pravdu neměla, kolik let bylo Tomášově mamince a kolik Petrovu dědovi?

MOZ 5 - II - 4

Paní učitelka měla 7 stejných krychlí. Složila je do jedné řady před sebe na svůj stůl jako na obrázku 25. Z krychlí si mohla přečíst jméno pohádkového kuřátka „ONOSIKA“. Napište, co si přečetli na krychlích žáci, kteří seděli v lavicích.



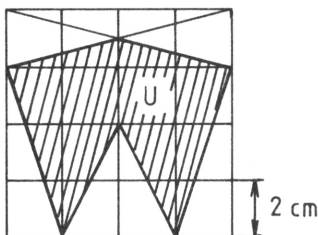
Obr. 25

Kategorie MOZ 6

MOZ 6 - I - 1

Na obrázku 26 je znázorněn rovinný útvar U . Vypočítejte jeho obsah.

Obr. 26



MOZ 6 - I - 2

Zvolte číslíce x, y ($x \neq y$) tak, aby trojčíferné číslo xyx bylo dělitelné čtyřmi a současně aby trojčíferné číslo yxy bylo dělitelné třemi.

MOZ 6 - I - 3

Dědeček má dva budíky. Jeden z nich ukazuje správně, druhý se předchází každých 24 hodin o 6 minut. 10. února 1982 v 8.00 h ukazovaly oba budíky stejný čas. Kdy to nastalo znovu?

MOZ 6 - I - 4

Kolika různými způsoby se dá z tabulky na obrázku 27 přečíst slovo kotrmelec, čteme-li sousední políčka buď zleva doprava, nebo shora dolů?

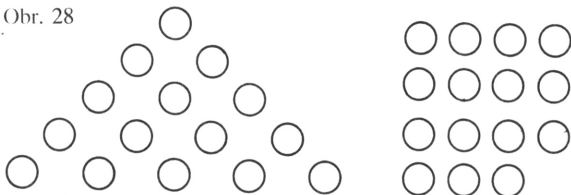
K	O	T	R	M
O	T	R	M	E
T	R	M	E	L
R	M	E	L	E
M	E	L	E	C

Obr. 27

MOZ 6 - I - 5

15 kuleček je možné sestavit do tvaru trojúhelníku, ale není možné sestavit je do tvaru čtverce (obr. 28). Jaký počet kuleček nepřevyšujících 100 je možné sestavit do tvaru trojúhelníku i čtverce?

Obr. 28



MOZ 6 - I - 6

Je možné umístit čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 do vrcholů krychle tak, aby součet čtyř čísel umístěných ve vrcholech jednotlivých stěn krychle byl vždy stejný?

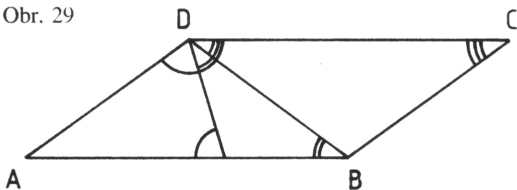
MOZ 6 - I - 7

Na dvůr přiletělo 35 vran. Najednou se něčeho polekaly, vzletly a rozdělily se na dvě hejna. První si sedlo na větve starého topolu, druhé na střechu kravína. Za chvíli přeletělo 5 vran z topolu na střechu a stejný počet vran odletěl ze střechy pryč. Na topole bylo dvakrát víc vran než na střechě. Kolik vran bylo v jednotlivých hejnech na začátku?

MOZ 6 - I - 8

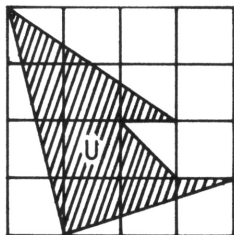
Rovnoběžník je složen ze tří rovnoramenných trojúhelníků (obr. 29), které nejsou shodné. Zjistěte velikosti vnitřních úhlů rovnoběžníku.

Obr. 29



MOZ 6 - II - 1

Na obrázku 30 je znázorněn rovinný útvar U. Vypočítejte jeho obsah.



Obr. 30

MOZ 6 - II - 2

Z Bratislavy létá letadlo do města A každých 10 dní, do města B každé dva týdny. 1. ledna 1983 odletěla obě letadla. Určete nejbližší datum, kdy obě letadla opět letěla současně.

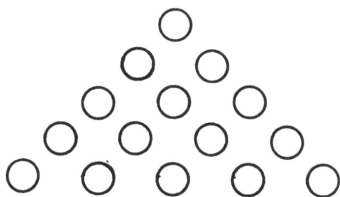
MOZ 6 - II - 3

Najděte všechna přirozená čísla, jejichž ciferný součet i ciferný součin je 6.

MOZ 6 - II - 4

V trojúhelníku na obrázku 31 je 15 koleček. V jeho dolním řádku je 5 koleček. To znamená, že v trojúhelníku je 3krát více koleček, než je v jeho dolním řádku. Najděte takový trojúhelník, ve kterém je a) 4krát, b) 5krát, c) 100krát více koleček než v jeho dolním řádku.

Obr. 31



Kategorie MOZ 7

MOZ 7 - I - 1

V daném schématu nahraďte písmena číslicemi – stejná písmena stejnou číslicí, různá písmena různými číslicemi – tak, aby naznačené operace byly správné:

$$\begin{array}{rcccl}
 AB & : & C & = & DE \\
 - & & \times & & + \\
 DA & - & A & = & DF \\
 \hline
 CD & + & H & = & CE
 \end{array}$$

MOZ 7 - I - 2

Sestrojte čtverec $ABCD$, je-li dán:

a) grafický součet délek úhlopříčky u a strany a úsečkou $|XY| = u + a = 8$;

b) grafický rozdíl délek úhlopříčky u a strany a úsečkou $|MN| = u - a = 3$.

MOZ 7 - I - 3

Jenda, Anička a Petr jsou sourozenci. V tomto roce je Aničce dvakrát více let než Jendovi. Za tři roky bude Jendovi polovina let Petra a před třemi roky bylo Petrovi dvakrát víc než Aničce. Určete, kolik let je každému ze sourozenců.

MOZ 7 - I - 4

Adam, Bohouš, Cyril a David chodí do jedné třídy. Každý z nich vyniká právě v jednom z předmětů matematika, český jazyk, angličtina, fyzika. Adam sedí v lavici s nejlepším angličtinářem, ale je nejlepším kamarádem fyzika. David nemá rád jazyky, Cyril přírodní vědy, Cyril je nejlepším kamarádem Bohouše, který vyniká v přírodních vědách. Rozhodněte, který chlapec je ve kterém předmětu nejlepší.

MOZ 7 - I - 5

V prvním pololetí prospělo ve třídě 16 chlapců z 18, děvčata prospěla všechna. Prospívajících žáků ve třídě bylo 95 procent. Kolik děvčat bylo ve třídě?

MOZ 7 - I - 6

Najděte všechny uspořádané dvojice y, z přirozených čísel větších než 1, pro které podíl

$$\frac{52 - y \cdot z}{5}$$

je opět přirozené číslo.

MOZ 7 - I - 7

Délky stran trojúhelníku ABC jsou v poměru $a : b : c = 2 : 3 : 4$. Výška v_a ke straně a je 9. Určete ostatní výšky daného trojúhelníku.

MOZ 7 - I - 8

Ve fotbalové soutěži se hrálo systémem každý s každým jeden zápas. Vítěz soutěže získal 7 bodů, druhé mužstvo 5 a třetí 3 body.

Kolik mužstev se zúčastnilo soutěže a kolik bodů získalo poslední mužstvo?

MOZ 7 - II - 1

V daném zápisu nahraďte písmena číslicemi – stejná písmena stejnou číslicí, různá písmena různými číslicemi – tak, aby naznačené operace byly správné. Kolik možností existuje?

$$\begin{array}{rclcl}
 A & \times & B & = & CD \\
 + & & - & & - \\
 E & \times & E & = & CE \\
 \hline
 F & : & G & = & C
 \end{array}$$

MOZ 7 - II - 2

Zvolte úsečky XY , ZT tak, aby $|XY| > |ZT|$. Sestrojte obdélník $ABCD$, v němž grafický součet délky úhlopříčky u a délky jeho jedné strany s se rovná délce úsečky XY ($|XY| = u + s$) a grafický rozdíl délky úhlopříčky u a délky strany s se rovná délce úsečky ZT ($|ZT| = u - s$).

MOZ 7 - II - 3

Čtyři kamarádi Anička, Bohouš, Cilka a Dana mají každý jedno ze zvířátek: pesek, kočka, kanárek, papoušek. Zjistěte, kdo má které zvířátko, když víte:

1. Dvě z děvčat mají ptáčky.
2. Cilka je sousedka kamarádky, která má papouška.
3. Maminka Aničky nesouhlasí s chováním ptáčků v klecích.
4. Anička se bojí psů.

MOZ 7 - II - 4

Za 3 velké a 5 malých čokolád zaplatila maminka 72 Kčs. Kolik korun stála 1 velká čokoláda a 1 malá čokoláda, jestliže jejich ceny jsou v celých korunách?

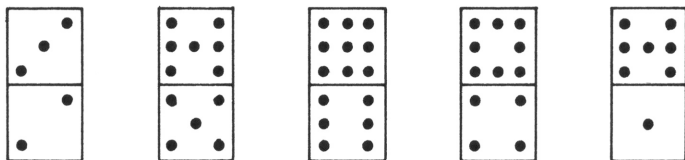
33. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

4. ROČNÍK MOZ ŠKOLNÍ ROK 1983/1984

Kategorie MOZ 4

MOZ 4 - I - 1

Na obrázku 32 je 5 kostek domina. První čtyři vyhovují určité zákonitosti, pátá tuto zákonitost nesplňuje. Proč?



Obr. 32

MOZ 4 - I - 2

Maminka potřebuje na zaváření odměřit přesně 4 litry vody. Má však jen třílitrovou a pětilitrovou nádobu. Jak pomocí těchto nádob odměří přesně 4 litry vody? Uveďte dva způsoby.

MOZ 4 - I - 3

Míša a Fanda byli koumáci a nové míry délky nazvali „peromírou“ a „tužkomírou“. Míša zjistil, že jejich lavice má délku 8 tužkoměr. Fanda naměřil 12 peroměr. Oba měli pravdu. Určete délku jejich lavice, víte-li, že je delší než 120 cm, ale kratší než 150 cm. (Délku peromíry a tužkomíry je možné vyjádřit v celých centimetrech.) Kolik centimetrů měřila jejich tužkomíra a peromíra?

MOZ 4 - I - 4

Do rovností

$$D + D + E = 24$$

$$A + A + D = 24$$

$$A + C + E = 24$$

$$B + B - D = 24$$

$$C + C + F = 24$$

$$A - D + G = 24$$

dosadte čísla za jednotlivá písmena tak, aby byly splněny. Je třeba dodržet zásadu dosazovat za stejná písmena stejná čísla a za různá písmena různá čísla. Dosazovaná čísla mohou být i víceciferná.

MOZ 4 - I - 5

15 chlapců si v šatně odložilo 33 kusů oděvu – čepice a rukavice. Jiné části oděvu v šatně nebyly. Čepici měl každý chlapec, rukavice ne. Kolik chlapců nemělo rukavice?

MOZ 4 - I - 6

Závodím za naši školu v běhu na krátké tratě. V posledním období jsem se zúčastnil deseti závodů. Ani v jednom z nich jsem neskončil hůře než třetí. Přitom jsem dosáhl dvakrát více druhých míst než prvních. Pokud by se umístění hodnotilo známkami 1, 2, 3 (1 za první, 2 za druhé, 3 za třetí místo), měl bych průměr přesně 2,2. Jakého umístění jsem dosáhl na závodech? (Jestliže nevíš, co je průměr, zeptej se svého vyučujícího.)

MOZ 4 - II - 1

Dosadte číslice za jednotlivá písmena tak, aby platily rovnosti. Za stejná písmena dosadte stejné číslice, za různá písmena různé číslice.

$$AB + CC = BAD$$

$$CC + CC = BCA$$

$$CD + CC = BAC$$

MOZ 4 - II - 2

Věrka navštěvovala se školní družinou kino nebo divadlo. V minulém roce byla v kině o dvě představení navíc, než je dvojnásobek jejích návštěv divadelních představení. Součin počtu divadelních a filmových představení je 312. Vypočítejte, kolikrát byla Věrka v kině a kolikrát v divadle.

Kategorie MOZ 5

MOZ 5 - I - 1

Na očíslování stran učebnice bylo třeba 273 číslic desítkové soustavy. Kolik stran má učebnice?

MOZ 5 - I - 2

V pátém ročníku základní školy, do kterého chodí 88 žáků, se vyučují dva nepovinné předměty: cvičení z matematiky (CM) a sportovní hry (SH). Na CM nechodilo 66 žáků, což je o 3 více než počet žáků, kteří se nepřihlásili na SH. Na oba nepovinné předměty se přihlásilo 9 žáků.

- a) Kolik žáků se přihlásilo aspoň na jeden nepovinný předmět?
- b) Kolik žáků se přihlásilo právě na jeden nepovinný předmět?

MOZ 5 - I - 3

Na palubní desce osobního automobilu Škoda 105 je 7 kontrolních žárovek: kontrolní žárovka levého ukazatele směru, dálkových světel, pravého ukazatele směru, nabíjení akumulátoru, mazání motoru, poslední zásoby paliva, brzdového systému. Kolik situací mohou žárovky signalizovat, jestliže:

- a) svítí právě jedna žárovka, b) svítí nejvýše tři žárovky?

MOZ 5 - I - 4

Součet délek tří úseček je 104 mm. První úsečka má stejnou délku jako dvě zbývající dohromady. Délka druhé úsečky je třikrát menší než délka třetí úsečky. Zjistěte graficky i výpočtem délky všech tří úseček.

MOZ 5 - I - 5

Obdélník $ABCD$ má délku strany AB 6 jednotek délky (j. d.), délka strany BC je 10 j. d. Bodem A vedte přímkou p , která rozdělí daný obdélník na pravoúhlý trojúhelník a čtyřúhelník (lichoběžník) tak, aby délky odvěsen trojúhelníku byly vyjádřeny v j. d. celými čísly. Obsah trojúhelníku je x -krát menší než obsah čtyřúhelníku. Najděte všechny takové trojúhelníky, pro které platí: x je celé číslo. Vyjádřete délky odvěsen těchto trojúhelníků. (Řešte tabulkou.)

MOZ 5 - I - 6

Kupující si v samoobsluze vybral zboží v hodnotě 41 Kčs a platil padesátikorunovou bankovkou. Pokladní měla mince: 5 Kčs, 2 Kčs, 1 Kčs, 50 hal, 20 hal, 10 hal. Jak dala nazpět zákazníkovi, jestliže:

- použila nejmenší možný počet mincí,
- použila největší možný počet mincí,
- použila všechny druhy mincí, které měla k dispozici,
- vrátila 14 mincí (uveďte aspoň 1 řešení),
- vrátila 20 mincí (uveďte aspoň 1 řešení)?

MOZ 5 - II - 1

V 5. třídě je 26 žáků. Děvčat je 15. Službu mají vždy dva žáci, chlapec a dívka. Vždy má službu jiný chlapec a jiná dívka. Dvojice má službu celý týden. Zjistěte, zda může třídní učitel určit službu od 5. do 8. ročníku ZŠ (včetně) tak, aby stejná dvojice neměla službu víckrát než jednou. Školní rok má 40 pracovních týdnů.

MOZ 5 - II - 2

Žáci 5. tříd soutěží ve dvou matematických soutěžích – v matematické olympiádě (MO) a v pythagoriádě (P). Z 33 žáků třídy 5. A soutěžilo aspoň v jedné soutěži 22 žáků. Žáků, kteří soutěžili jen v P, bylo dvakrát víc než těch, kteří soutěžili jen v MO. Žáků, kteří soutěžili v obou soutěžích, bylo čtyřikrát víc než těch, kteří soutěžili jen v P.

- a) Kolik žáků soutěžilo současně v obou soutěžích?
- b) Kolik žáků soutěžilo právě v jedné soutěži?
- c) Kolik žáků soutěžilo nejvýše v jedné soutěži?

MOZ 5 - II - 3

Je dán obdélník $ABCD$. $|AB| = 12$ cm, $|BC| = 5$ cm. Na polopřímce AB leží body X_1, X_2 . Určete délky úseček BX_1, BX_2 tak, aby platilo, že obsah obdélníku $ABCD$ je dvakrát větší než obsah trojúhelníku BX_1C a šestkrát větší než obsah trojúhelníku BX_2C .

MOZ 5 - II - 4

Jsou dány číslice 1, 2, 6, 9. Sestavte z těchto číslic všechna trojčíferná čísla menší než 200, v jejichž zápise se každá číslice vyskytuje nejčastěji. Z těchto čísel najděte ta, která by mohla být obsahem čtverce a zároveň i obsahem obdélníku. Délky stran čtverce i obdélníku musí být přirozená čísla. Jakmile taková čísla naleznete, určete délky stran čtverce a všechny možné rozměry obdélníků.

Kategorie MOZ 6

MOZ 6 - I - 1

Mezi číslice

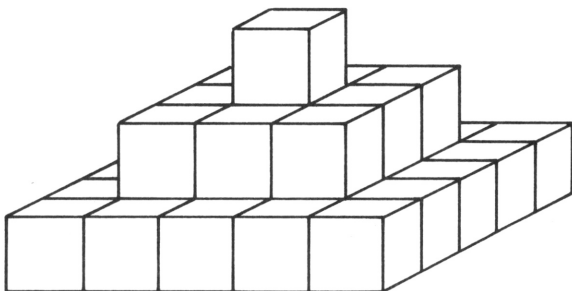
5 4 3 2 1

vložte znaky početních výkonů a závorky (pořadí číslic musí zůstat nezměněno) tak, aby se výsledek lišil od čísla 111 nejvýše o 2.

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 1 = 121$ (liší se o 10), $5 + 4 \cdot (32 - 1) = 129$ (liší se o 18). Jestliže mezi číslice nevložíme žádný znak početního výkonu, můžeme dostat dvojciferná i víceciferná čísla, např. 54, 432. Najděte aspoň 2 řešení.

MOZ 6 - I - 2

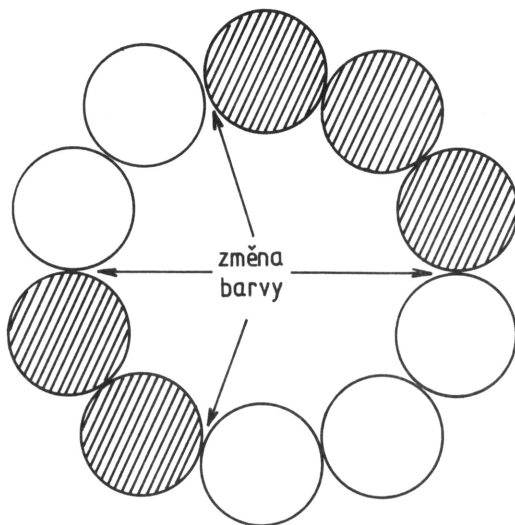
Na obrázku 33 je nakreslena tříposchodová pyramida se čtvercovou podstavou. Na vrchol pyramidy můžeme vystoupit po každé její straně po třech stupních. Kolik stupňů bychom potřebovali, abychom se dostali na vrchol podobné pyramidy (také se čtvercovou podstavou) postavené ze 455 krychlí? (Výška i hloubka každého stupně se vždy rovná délce hrany krychle.)



Obr. 33

MOZ 6 - I - 3

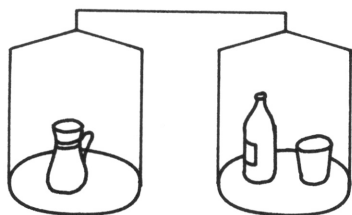
Závod na výrobu bižuterie vyrábí dětské náramky z pěti červených a pěti bílých korálků navlečených na gumičce. Jak mají být korálky navlečeny, aby náramek měl právě 6 barevných obměn? Najděte aspoň pět různých řešení. (Na obrázku 34 je náramek se čtyřmi barevnými obměnami.)



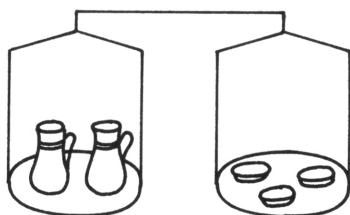
Obr. 34

MOZ 6 - I - 4

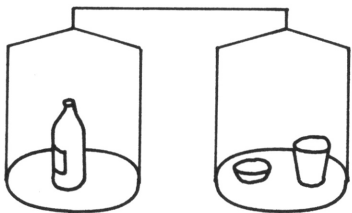
Podle toho, co nám o hmotnostech džbánu, láhve, poháru a misky prozrazují váhy v rovnováze na obrázcích 35a, b, c, rozhodněte, kolik pohárů je třeba přidat k poháru na levé misce vah na obrázku 35d, aby váhy byly v rovnováze.



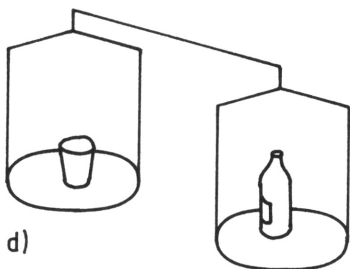
a)



b)



c)



d)

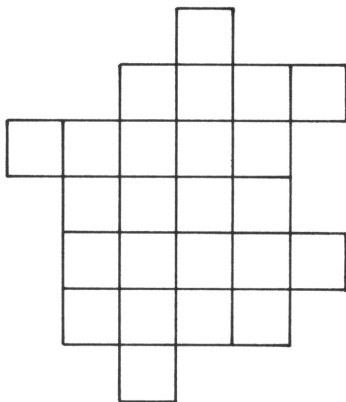
Obr. 35

MOZ 6 - I - 5

Ve výškové 51poschoďové budově vede z ulice do přízemí 9 schodů, z přízemí do prvního poschodí 18 schodů, z prvního do druhého poschodí také 18 schodů atd. Zjistěte, mezi kterými poschodími je 141. schod, počítáme-li od vstupu z ulice, a kolikátý schod je to mezi těmito poschodími.

MOZ 6 - I - 6

Útvar nakreslený na obrázku 36 rozdělte na 6 stejných částí. (Je dovoleno řezat jen podél stran čtvercové sítě uvnitř útvaru.)



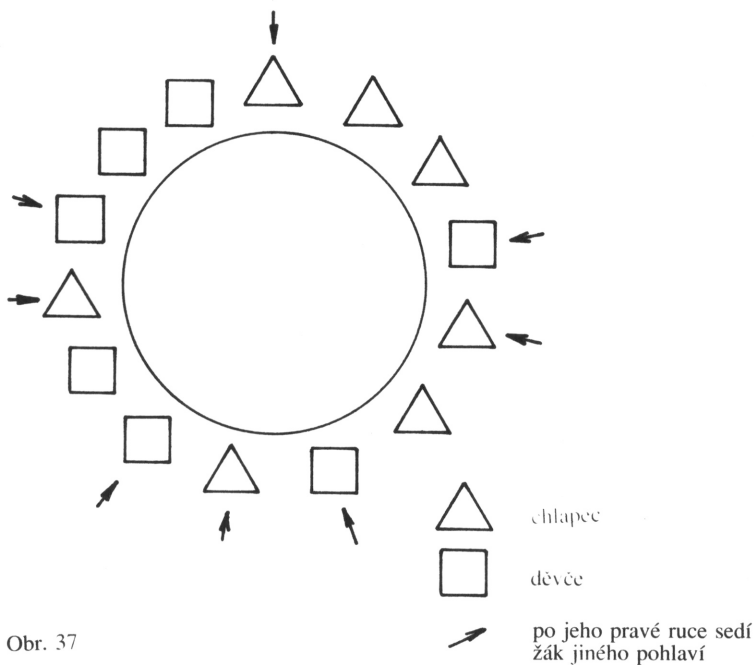
Obr. 36

MOZ 6 - II - 1

Marie počítá na prstech jedné ruky. Začíná počítat od palce přes ukazovák, prostředník a prsteník k malíčku a dostane číslo 5. Hned se vrací na prsteník (6), prostředník (7), ukazovák (8), palec (9), znovu se vrací, ukazovák (10), prostředník (11) atd. Na který prst vyjde číslo 1 988?

MOZ 6 - II - 2

Sedm chlapců a sedm děvčat si chce sednout za kulatý stůl. Je možné udělat zasedací pořádek tak, aby právě pět z nich mělo po pravé ruce žáka druhého pohlaví? Na obrázku 37 je vyznačen případ, kdy právě osmi žákům sedí po pravici žáci jiného pohlaví.



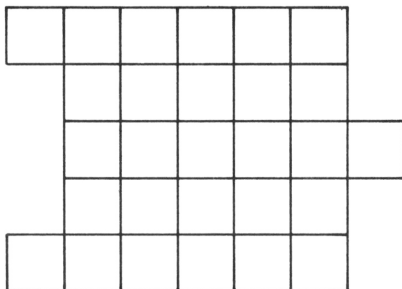
Obr. 37

MOZ 6 - II - 3

Kolik stran může mít mnohoúhelník, který je průnikem trojúhelníku a konvexního čtyřúhelníku? Určete všechny možnosti a jednotlivé případy načrtněte.

MOZ 6 - II - 4

Rozdělte obrazec na obrázku 38 na 7 shodných částí. Je povoleno dělit jen podél stran jednotlivých čtverečků.



Obr. 38

Kategorie MOZ 7

MOZ 7 - I - 1

Lístek do kina je možné si koupit po 2, 3 a 6 Kčs. V předprodeji vstupenek prodali třem návštěvníkům lístky v ceně 100 Kčs. První návštěvník koupil dva lístky stejné ceny. Druhý koupil jeden lístek. Poslední koupil od každého druhu lístků stejný počet. Kolik a kterých lístků prodali? (Pokuste se i o jiné řešení než tabulkovou metodou.)

MOZ 7 - I - 2

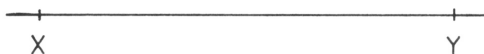
Doplňte tabulku (obr. 39) výsledků hokejové soutěže čtyř mužstev A, B, C, D. Je třeba doplnit všechny chybějící údaje, přičemž v druhé části tabulky znamená b počet získaných bodů, s skóre a p pořadí po skončení soutěže. (Každé mužstvo hrálo s každým právě jednou.)

	A	B	C	D	b	s	p
A	1 : 1					: 3	
B					1	: 4	
C						3 : 1	1.
D	: 5		1 :		3	: 7	

Obr. 39

MOZ 7 - I - 3

Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC , je-li dán grafický součet délky jeho strany s a výšky v úsečkou XY (obr. 40).



Obr. 40

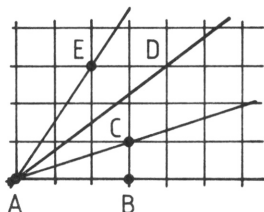
MOZ 7 - I - 4

Zjistěte pouze pomocí vztahů na čtverečkováném papíru (obr. 41), zda o velikostech úhlů platí:

a) $|\angle CAB| = |\angle DAC|$,

b) $|\angle CAB| = |\angle EAD|$.

Své tvrzení odůvodněte.

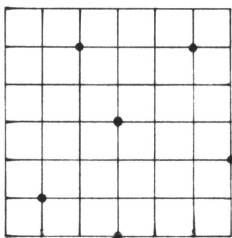


Obr. 41

MOZ 7 - I - 5

Každou trojicí z daných šesti bodů je určen právě jeden trojúhelník (obr. 42). Kolik procent z těchto trojúhelníků má obsah 1, kolik procent má obsah 2, kolik procent má obsah 3?

Obr. 42



MOZ 7 - I - 6

Jirka chtěl napsat dopis svému příteli, ale nepamatoval si jeho přesnou adresu. O číslu domu si zapamatoval pouze následující údaje:

1. Je to trojčíferné číslo dělitelné třemi, jehož všechny číslice jsou různé (XYZ).

2. Dvojcíferné číslo XY je čtvercem přirozeného čísla.

3. Dvojcíferné číslo YZ je prvočíslo menší než 20.

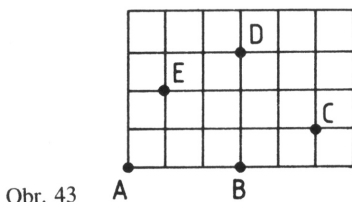
Zjistěte, zda mohl Jirka z těchto údajů přesně určit číslo domu.

MOZ 7 - II - 1

Najdi největší trojčíferné číslo, jehož ciferný součet je prvočíslo a ciferný součin se rovná třetí mocnině přirozeného čísla.

MOZ 7 - II - 2

Vypočítejte pomocí čtverečkovaného papíru obsahy všech čtyřúhelníků, které mají vrcholy v bodech A, B, C, D, E čtvercové sítě. (Obr. 43.)



Obr. 43

MOZ 7 - II - 3

V květinovém stánku prodávali tři druhy květin: po 2 Kčs, po 5 Kčs a po 6 Kčs. Květiny ve stánku stály dohromady 1 500 Kčs. Výpověď prodavačky:

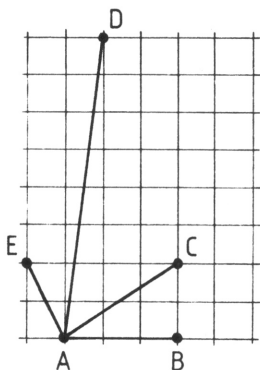
1. Přišli tři zákazníci.
2. Každý koupil jiný počet květin.
3. Každý koupil jeden druh květin.
4. Žádní dva nekoupili stejný druh květin.
5. Ani jeden nekoupil víc než tři květiny.
6. Po odchodu zákazníků zůstaly ve stánku všechny druhy květin ve stejném počtu.

Zjistěte, zda prodavačka mluvila pravdu.

MOZ 7 - II - 4

Zjistěte, pouze pomocí vztahů na čtverečkováném papíru, zda o velikostech úhlů platí (obr. 44):

- a) $|\angle CAB| = |\angle EAD|$,
- b) $|\angle CAB| = |\angle DAC|$.



Obr. 44

34. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

5. ROČNÍK MOZ ŠKOLNÍ ROK 1984/1985

Kategorie MOZ 4

MOZ 4 - I - 1

Napiš čísla 1, 2, 3, 4, 5 čtyřmi čtyřkami. Můžeš použít znaménka +, −, ·, : a v některých případech i závorky.

$$\begin{array}{lcl} 4 & 4 & 4 & 4 = 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 = 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 = 3 \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} 4 & 4 & 4 & 4 = 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 = 5 \end{array}$$

MOZ 4 - I - 2

Pracovní četa na stavbě vodovodu má za den uložit 67 m potrubí. Potrubí je z 5 m nebo 3 m dlouhých dílů. Kolik pětimetrových a kolik třimetrových dílů použijí, jestliže má mít potrubí co nejmenší počet svarů?

MOZ 4 - I - 3

Přeppravka s ovocem má sedmkrát větší hmotnost než prázdná přeppravka. Hmotnost přeppravky s ovocem je o 30 kg větší než hmotnost prázdné přeppravky. Urči, jakou hmotnost má přeppravka.

MOZ 4 - I - 4

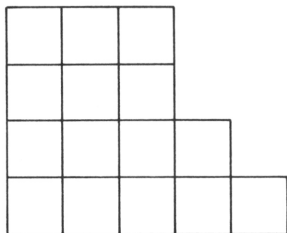
Na konci školního roku jsme byli na výletě v Bojnicích. U stánku s dárky se nás tlačilo 17. Každý si chtěl něco koupit, ale peněz jsme neměli nazbyt. Všichni dohromady jsme měli 97 Kčs. Bylo zajímavé, že všichni chlapci měli stejné množství peněz a každá dívka měla o 2 Kčs víc než kterýkoli chlapec. Určete, kolik bylo mezi námi chlapců a kolik dívek.

MOZ 4 - I - 5

Ze dvou míst vzdálených od sebe 30 km vyjedou proti sobě dva cyklisté. Oba jedou rychlostí 15 km/h. Současně s jedním cyklistou vyjede i motocyklista, který má střídavě kontrolovat závodníky. Jezdí stále mezi nimi, dokud se cyklisté nepotkají. Motocyklista dodržuje předepsanou rychlost 20 km/h. Kolik kilometrů ujede motocyklista?

MOZ 4 - I - 6

Rozděl útvar na obrázku 45 na tři části tak, aby měly stejný tvar i velikost.



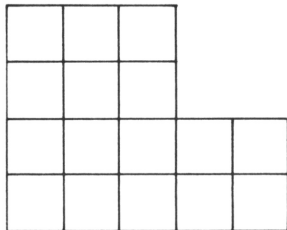
Obr. 45

MOZ 4 - II - 1

Petr poslal rodičům z letního tábora dohromady 12 dopisů a pohlednic. Za známky zaplatil 8-Kčs. Na dopisy dával známky v hodnotě 1 Kčs, na pohlednice v hodnotě 50 haléřů. Urči, kolik dopisů a kolik pohlednic poslal Petr rodičům.

MOZ 4 - II - 2

Rozděl útvar, který vidíš na obrázku 46, na 4 části tak, aby měly stejný tvar i velikost.



Obr. 46

Kategorie MOZ 5

MOZ 5 - I - 1

Na jedné straně aleje zůstaly jen 4 stromy, mezi nimiž jsou vzdálenosti 35 m, 14 m, 91 m. Do mezer je třeba vysadit nové stromy tak, aby vzdálenosti mezi všemi stromy byly stejné a aby počet vysazených stromů byl co nejmenší.

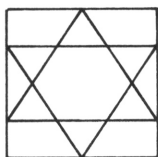
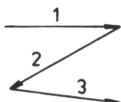
- Jaké vzdálenosti budou mezi jednotlivými stromy?
- Kolik stromů se vysadí?

MOZ 5 - I - 2

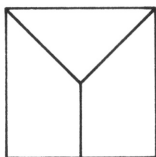
Jenda si koupil 2 lízátka a 1 perník. Dohromady zaplatil 4,50 Kčs. Kdyby si byl koupil 1 lízátko a 2 perníky, byl by zaplatil 6 Kčs. Kolik korun stálo 1 lízátko a kolik korun stál 1 perník?

MOZ 5 - I - 3

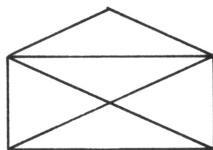
Tři zahrádkáři Aleš, Bohouš a Cyril si upravili zahrádky tak, že cestičky na zahrádkách tvořily obrazce jako na obrázcích 47a, b, c. I po obvodu zahrádky je cesta. Rozhodněte, který zahrádkář může přejít po všech cestičkách své zahrádky tak, že po každé přejde právě jednou. Směr obchůzky označte očíslovanými šipkami, např.:



A



B



C

Obr. 47

MOZ 5 - I - 4

Okružní etapa automobilové rely má procházet právě třemi městy z měst: Bratislava, Brno, Košice, Liberec, Praha, Ostrava. Délka tratě má být 744 km. Podle tabulky vzdáleností navrhnete města dvou různých okružních etap.

Bratislava

142	Brno				
403	473	Košice			
381	239	660	Liberec		
372	230	661	107	Praha	
318	165	371	340	347	Ostrava

MOZ 5 - I - 5

Dosadte číslice za jednotlivá písmena tak, aby naznačený součet byl správný. Za stejná písmena dosadte stejné číslice, za různá písmena různé číslice.

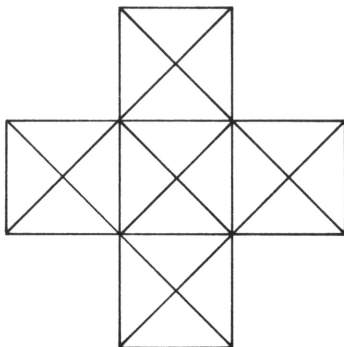
$$\begin{array}{r} O \quad K \quad O \\ O \quad K \quad O \\ \hline K \quad U \quad K \end{array}$$

MOZ 5 - I - 6

Ve třídě je 31 žáků. Chlapci z této třídy mohou nastoupit v trojstupech, čtyřstupech, šestistupech nebo osmistupech a ani v jednom zástupu žádný chlapec nechybí ani nepřebývá. Kolik chlapců je ve třídě?

MOZ 5 - II - 1

Urči počet všech trojúhelníků nakreslených na obrázku 48. Načrtni trojúhelníky, které se v obrázku vyskytují – k náčrtům trojúhelníků připiš délku jedné strany.



Obr. 48

MOZ 5 - II - 2

Jeden kilogram jablek stojí 5 Kčs, jeden kilogram hrušek stojí 8 Kčs. Maminka koupila několik kilogramů jablek a několik kilogramů hrušek. Dohromady za ně zaplatila 62 Kčs. Zuzce se nákup nelíbil. Chtěla, aby maminka koupila tolik kilogramů jablek, kolik koupila kilogramů hrušek, a tolik kilogramů hrušek, kolik právě koupila kilogramů jablek. Maminka nesouhlasila, protože by nákup stál o 6 Kčs více. Kolik kilogramů jablek a kolik kilogramů hrušek maminka koupila?

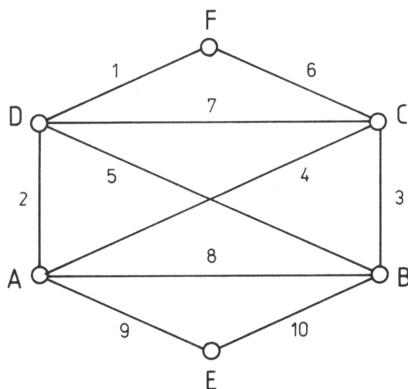
MOZ 5 - II - 3

Nad cirkusovou arénou předvádí své umění provazochodec. Lano jsou napnuta na šesti sloupech A, B, C, D, E, F (obr. 49).

a) Mohl by provazochodec přejít po lanech tak, že po každém laně přejde právě jednou a vrátí se na místo, odkud vyšel? Jestliže ano, zapiš jeho cestu.

b) Před jedním představením se lano č. 7 přetrhlo. Mohl by potom provazochodec splnit takový úkol jako v bodě a)?

c) Odůvodni své řešení úlohy b).



Obr. 49

MOZ 5 - II - 4

Za stejná písmena dosadte stejné číslice, za různá písmena různé číslice tak, aby naznačený početní výkon byl správný:

$$\begin{array}{r}
 S \quad A \quad D \\
 + H \quad A \quad D \\
 \hline
 D \quad A \quad R
 \end{array}$$

Kategorie MOZ 6

MOZ 6 - I - 1

Kolik je třeba prvních členů součtu $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$ k tomu, aby součet byl trojciferné číslo, jehož všechny číslice jsou stejné?

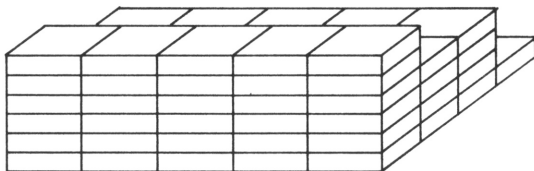
MOZ 6 - I - 2

Kolika způsoby je možné postavit na šachovnici s 3×3 poli dva krále tak, aby se navzájem neohrožovali?

MOZ 6 - I - 3

V balírně závodu na výrobu dlaždic ukládají vyrobené dlaždice s rozměry $15 \text{ cm} \times 8 \text{ cm} \times 1,5 \text{ cm}$ na dřevěné palety do tvaru krychle. Všechny dlaždice jsou uloženy podobně jako na obrázku 50.

- Jaké jsou nejmenší možné rozměry krychle na paletě?
- Kolik je v této krychli dlaždic?



Obr. 50

MOZ 6 - I - 4

Nahradte symboly $\triangle$, $\circ$, $\square$ takovými číslicemi, aby platily rovnosti (obráz. 51):

$$\begin{array}{rcl} \triangle \circ & \cdot & \triangle \circ = \square \square \circ \\ \triangle & \cdot & \circ = \circ \end{array}$$

Obr. 51

MOZ 6 - I - 5

Na mezinárodním dětském táboře se spřátelili tři chlapci z Československa Petr, Karel a Ruda s Volodou a Aljošou ze Sovětského svazu. Rozhodli se, že se dají spolu vyfotografovat. Nemohli se dohodnout, jak se mají postavit. Chtěli ale stát vždy tak, aby kamarádi Voloda a Aljoša byli mezi nimi, ale nestáli vedle sebe. Vystřídali všechny možnosti. Určete:

a) Kolik snímků aspoň musel udělat fotograf, aby zachytil všechny možnosti?

Kolik z těchto snímků bylo takových, že

b) Voloda byl vedle Petra,

c) Aljoša byl uprostřed,

d) Petr byl uprostřed,

e) Aljoša byl mezi Petrem a Karlem (nemusel stát těsně vedle nich)?

MOZ 6 - I - 6

Pasák ovcí rozdělil stádo 200 ovcí do čtyř skupin. Kdyby bylo v první skupině o čtyři ovce víc, v druhé o čtyři méně, ve třetí jen čtvrtina jejich počtu a ve čtvrté jejich čtyřnásobek, byl by v každé skupině stejný počet ovcí. Kolik ovcí je v každé skupině?

MOZ 6 - II - 1

Milan šetří na jízdní kolo. Má už 660 Kčs. Je to o třetinu více, než je polovina ceny kola. Kolik korun stojí kolo?

MOZ 6 - II - 2

Považujme čísla, která padnou při hodu dvěma hracími kostkami, za činitele součinu. Kolik různých součinů můžeme dostat při hodu dvěma hracími kostkami?

MOZ 6 - II - 3

V sadě je 90 stromků rybízu vysazených do čtverce $7,2 \text{ m} \times 7,2 \text{ m}$. Jsou vysazeny ve sponu 90×80 , to znamená, že vzdálenost mezi řadami je 90 cm a v řadě jsou stromky od sebe vzdáleny 80 cm. Kvůli prosvětlení bylo rozhodnuto, že stromky mají být ve sponu 120×120 . Výměra záhonu se nezměnila ($7,2 \text{ m}$ krát $7,2 \text{ m}$). Kolik původních stromků můžeme nechat na místě? Kolik stromků je třeba znovu zasadit?

MOZ 6 - II - 4

Písmena nahraďte číslicemi (stejná písmena stejnou číslicí, různá jinou) tak, aby naznačený početní výkon byl správný.

$$\begin{array}{r} R \quad Y \quad B \quad A \\ + \quad R \quad Y \quad B \quad A \\ \hline H \quad L \quad A \quad V \quad A \end{array}$$

Kategorie MOZ 7

MOZ 7 - I - 1

Nahraďte písmena číslicemi tak, aby vznikl správný zápis sčítání ($I = \acute{I}$):

$$\begin{array}{r} P \quad S \quad \acute{I} \quad C \quad I \\ P \quad S \quad \acute{I} \quad C \quad I \\ P \quad S \quad \acute{I} \quad C \quad I \\ \hline H \quad A \quad F \quad A \quad N \quad I \end{array}$$

MOZ 7 - I - 2

Narýsujte trojúhelník ABC : $|AB| = 5$ cm, $|BC| = 10$ cm, $|AC| = 6$ cm. Uvnitř strany AC sestrojte bod X a uvnitř strany BC bod Y tak, aby platilo: $\leftrightarrow XY \parallel \leftrightarrow AB$ a současně $|AX| = |XY|$.

MOZ 7 - I - 3

Představte si, že máte 81 dvoukorun, z nichž je jedna falešná. Falešná mince má menší hmotnost než pravá mince. Kolik vážení nejméně je třeba na to, abyste našli falešnou minci, budete-li vážit na přesných dvojramenných váhách? (Své tvrzení zdůvodněte.)

MOZ 7 - I - 4

Anička, Václav, Jakub a Lukáš jsou čtyřčata. Anička ví, že Lukáš vždycky mluví pravdu, naopak Jakub nikdy nemluví pravdu a Václav jednou neříká pravdu, hned potom říká pravdu a potom zase neříká pravdu atd. Jednou odpoledne přiběhli všichni domů a jeden říká Aničce:

„Maminka na tebe čeká v obchodě.”

„Dobře, Lukáši,” řekla Anička.

Bratr se zasmál a řekl: „Já jsem Václav.”

Umíte říci, kdo z bratrů vyřídil Aničce maminčin vzkaz? Byl vzkaz pravdivý?

MOZ 7 - I - 5

Kolik čtverečků musíme vyšrafovat na šachovnici 6×6 čtverečků, aby se útvar (kříž)  složený z pěti čtverečků nedal nakreslit na zbytek (nevyšrafované) šachovnice?

MOZ 7 - I - 6

Představte si, že vynásobíte všechna přirozená čísla od 1 do 63. Potom vynásobíte všechna přirozená čísla od 1 do 61. Nakonec vypočtete rozdíl těchto součinů. Je tento rozdíl dělitelný číslem 71?

MOZ 7 - II - 1

Je dána přímka p a na ní dva různé body X, Y . Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby bod X ležel na přímce AB , bod Y na přímce BC a aby úhlopříčka měla délku 8 cm a bod B měl od přímky p vzdálenost 2,5 cm.

MOZ 7 - II - 2

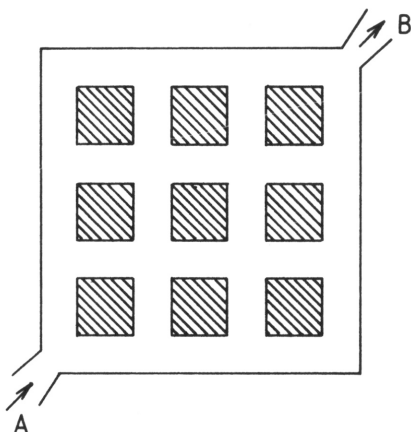
Najděte číslíce x, y , víte-li, že trojčíferné číslo xyy se dá beze zbytku dělit sedmi, trojčíferné číslo xyx se dá beze zbytku dělit čtyřmi a trojčíferné číslo xyx se dá beze zbytku dělit třemi.

MOZ 7 - II - 3

V místě A vběhla do bludiště na obrázku 52 vyděšená myší rodina. Všechny myši šťastně utekly do bezpečí v místě B. (Hladový kocour prská v místě A.) Z rozhovoru myší se dovídáme:

1. Každá myš běžela po chodbičkách jen směrem doprava a nahoru.
2. Žádné dvě myši neběžely celou cestu po stejné trase.
3. Kdyby myší bylo o jednu víc, musely by některé dvě běžet po stejné trase.

Kolik členů měla myší rodina?



Obr. 52

MOZ 7 - II - 4

Ivan s otcem a psem Harykem čekali na vlak. Čas si krátili u váhy na zavazadla. Zjistili:

1. Všichni tři dohromady mají hmotnost 106 kg.
2. Otec má o 50 kg větší hmotnost než Ivan a Haryk dohromady.
3. Haryk má přesně $\frac{2}{5}$ Ivanovy hmotnosti.

Jakou hmotnost měl každý z nich?

35. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

6. ROČNÍK MOZ ŠKOLNÍ ROK 1985/1986

Kategorie MOZ 4

MOZ 4 - I - 1

Svatopluk dal každému ze svých synů 4 hůlky s délkami 6 dm, 5 dm, 8 dm, 4 dm a řekl jim: „Každou ze čtyř hůlek můžete nejvýše jednou přerýznout. Udělejte to tak, abyste řezáním získali hůlky požadovaných délek.

1. Ty, nejstarší synu, přines hůlky s délkami 2 dm, 2 dm, 3 dm, 4 dm, 4 dm, 4 dm, 5 dm.

2. Ty, prostřední, přines hůlky s délkami 1 dm, 2 dm, 2 dm, 3 dm, 4 dm, 5 dm, 6 dm.

3. Ty, nejmladší, přines hůlky s délkami 1 dm, 1 dm, 1 dm, 2 dm, 3 dm, 3 dm, 4 dm, 4 dm, 4 dm.

Mohl každý syn splnit úkol? Najděte všechna řešení.

MOZ 4 - I - 2

Hanka a Míša si hráli na obchod. Jejich platidly byly kuličky a kostky. Dohodli se, že kulička bude mít hodnotu 3 Kčs a kostka 5 Kčs. Jak mohla zaplatit Hanka, jestliže si chtěla koupit:

a) knížku v hodnotě 13 Kčs,

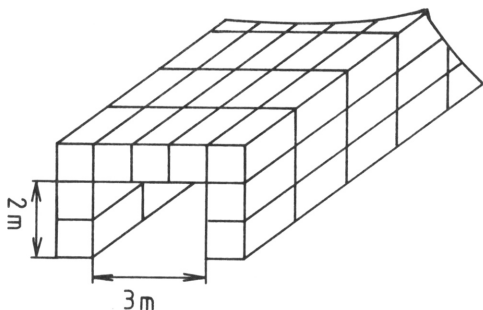
b) panenku v hodnotě 49 Kčs?

(Uveďte vždy všechny možnosti.)

MOZ 4 - I - 3

Liliputáni obdivovali velký kamenný tunel, který postavil Gulliver z kamenů tvaru kvádra s rozměry $1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 2\text{ m}$. Část tohoto 500 m dlouhého tunelu se šířkou 3 m a výškou 2 m je nakreslena na obrázku 53 (výška a šířka jsou vyznačeny). Gulliver chce postavit

nový, stejně dlouhý tunel, ale takový, aby měl výšku 4 m a šířku 6 m (tloušťka stěn má zůstat nezměněná). Kolik takových kvádrů s rozměry 1 m × 1 m × 2 m si musí na stavbu připravit?



Obr. 53

MOZ 4 - I - 4

Vyplňte matematickou křížovku (obr. 54):

1. řádek: číslo, které po dělení 10 dává zbytek 3,
2. řádek: číslo, které je násobkem 3,
3. řádek: dvojnásobek 1. řádku.

Sloupec A: číslo, které je násobkem čísla 229.

Sloupec B: nejmenší trojciferné číslo, které je dělitelné 3 beze zbytku.

Sloupec C: číslo, jehož střední číslice je součtem krajních číslic v jeho zápise.

Sloupec D: počet trpaslíků, přátel Sněhurky.

	A	B	C	D
1				
2				
3				

Obr. 54

MOZ 4 - I - 5

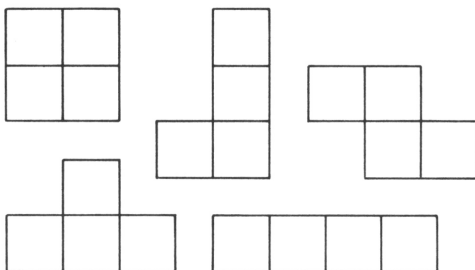
Utvořte největší sedmiciferné číslo z číslic 0, 1, 3, 4, 5, 8, 9, které má všechny tyto vlastnosti:

- každou z daných číslic použijete právě jednou,
- číslo je menší než 8 000 000,
- číslo není dělitelné deseti.

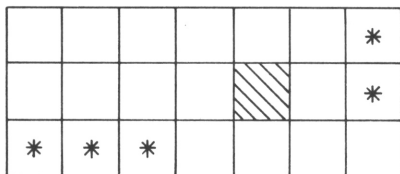
MOZ 4 - I - 6

Na obrázku 55a je nakresleno pět mnohoúhelníků. Naskládejte je do krabičky, jejíž dno je nakresleno na obrázku 55b, tak aby bylo splněno:

- každý z pěti mnohoúhelníků zakryje právě jednu hvězdičku,
- mnohoúhelníky pokryjete celé dno krabičky kromě vyšrafovaného čtverečku.



a)



b)

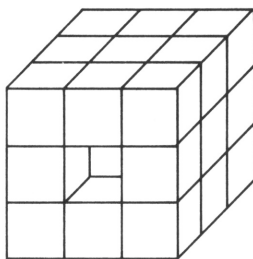
Obr. 55

MOZ 4 - II - 1

Utvoř z číslic 0, 2, 5, 7, 8, 9 nejmenší možné sudé šesticiferné číslo. Každou z daných číslic použij právě jednou.

MOZ 4 - II - 2

Saša měl 100 kusů samolepek tvaru čtverce se stranou délky 3 cm. Má děravou krychli (znázorněnou na obr. 56), která je složena z 24 shodných krychlí s délkou hrany 3 cm. Kolik samolepek mu zůstalo, jestliže jimi polepil stěny této děravé krychle (i zevnitř)?



Obr. 56

Kategorie MOZ 5

MOZ 5 - I - 1

Najděte nejmenší přirozené číslo s těmito vlastnostmi:

- a) Po dělení číslem 51 dává zbytek 33.
- b) Po dělení číslem 54 dává zbytek 0.

MOZ 5 - I - 2

Matematická křížovka (obr. 57). Do každého čtverečku vepište některou z číslic 0, 1, ..., 9. V řádcích a sloupcích jsou zapsána trojčíselná čísla.

Vodorovně. V řádku:

- a – polovina čísla jako ve sloupci 1, napsaná odzadu,
- b – číslo, které při dělení deseti dává zbytek 0,
- c – číslo, které je rozdílem největšího a nejmenšího trojciferného čísla.

Svisle. Ve sloupci:

- 1 – jestliže by bylo číslo o 400 větší, mělo by všechny číslice stejné,
- 2 – třetí číslice tohoto čísla se rovná součtu prvních dvou číslic,
- 3 – tajenka.

	1	2	3
a			
b			
c			

Obr. 57

MOZ 5 - I - 3

V době krádeže bylo v hotelu 96 lidí, z nichž 61 je mimo podezření. Ze 47 zaměstnanců, kteří byli tehdy v hotelu, je 23 mimo podezření. Kolik hostů není mimo podezření?

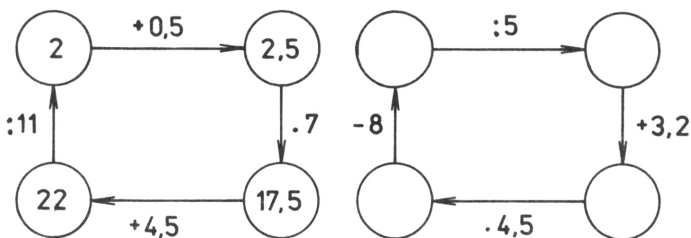
MOZ 5 - I - 4

Dosaďte za jednotlivá písmena číslice tak, aby platil naznačený součet. Za různá písmena dosaďte různé číslice, za stejná písmena stejné číslice ($A = \acute{A}$).

$$\begin{array}{r}
 J \\
 J \quad \acute{A} \\
 J \quad A \quad N \\
 J \quad A \quad N \quad O \\
 \hline
 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1
 \end{array}$$

MOZ 5 - I - 5

V kroužcích na obrázku 58a jsou čísla, která odpovídají naznačeným početním výkonům (např. $2 + 0,5 = 2,5$; $2,5 \cdot 7 = 17,5$). Také do kroužků na obrázku 58b vepište taková čísla, aby odpovídala uvedeným početním výkonům.



Obr. 58

a)

b)

MOZ 5 - I - 6

Z města A do města B je 36 km. Z města A vyrazili současně cyklista rychlostí 12 km/h a osobní auto Š 100. Jakou rychlostí jel řidič Š 100, když se ve městě B zdržel nákupy 50 minut a při cestě nazpátek potkal cyklistu v polovině vzdálenosti mezi městy A, B? (Uvažujte, že cyklista i auto jeli stálou rychlostí.)

MOZ 5 - II - 1

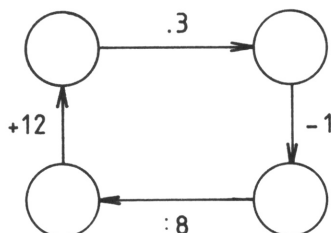
Myslím si číslo. Kdybych je vydělil číslem 72, dostal bych zbytek 50. Kdybych je vydělil číslem 74, dostal bych zbytek 0. Je to nejmenší číslo z těch, která mají tyto vlastnosti. Najdi číslo, které si myslím.

MOZ 5 - II - 2

Ve třídě je 35 žáků. Odebírají časopisy Kamarád a ABC. ABC neodebírá 20 žáků a Kamaráda neodebírá 15 žáků ve třídě. Aspoň jeden z těchto časopisů odebírá 30 žáků třídy. Kolik žáků ze třídy odebírá oba časopisy?

MOZ 5 - II - 3

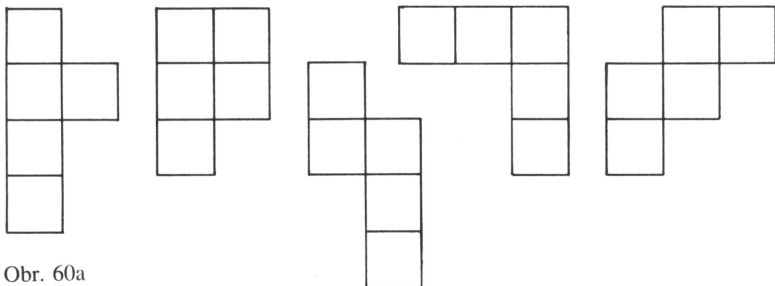
Do kroužků na obrázku 59 napište celá čísla tak, aby odpovídala uvedeným početním výkonům.



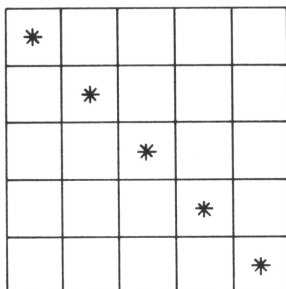
Obr. 59

MOZ 5 - II - 4

Na obrázku 60a vidíte pět útvarů. Pokryjte jimi čtverec s 5×5 čtverečky (obr. 60b), tak aby každý útvar pokryl jednu hvězdičku.



Obr. 60a



Obr. 60b

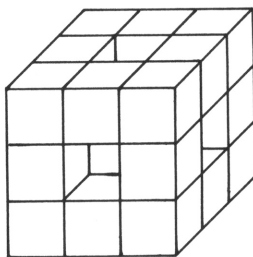
Kategorie MOZ 6

MOZ 6 - I - 1

Je dán rovnoběžník $ABCD$: $|AB| = 9$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|\sphericalangle DAB| = 60^\circ$. Rozdělte daný rovnoběžník na 6 shodných trojúhelníků. Shodnost trojúhelníků dokažte.

MOZ 6 - I - 2

David měl 100 kusů samolepek tvaru čtverce s délkou strany 3 cm. Kolik samolepek mu zůstalo, jestliže jimi polepil (i uvnitř) stěny tělesa „děravá krychle“ znázorněného na obrázku 61? Těleso se skládá z 20 shodných krychlí s délkou hrany 3 cm.

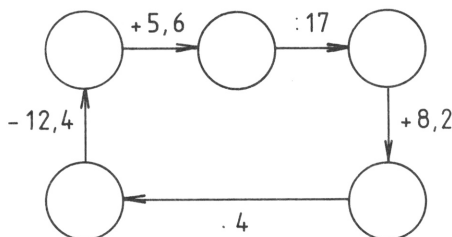


Obr. 61

MOZ 6 - I - 3

Do kroužků na obrázku 62 vepište čísla tak, aby odpovídala naznačeným početním výkonům.

Nerozumíte-li zadání, podívejte se na úlohu MOZ 5 - I - 5 na str. 69.



Obr. 62

MOZ 6 - I - 4

Název města se zapisuje pěti písmeny. Když každé písmeno nahradíme pořadovým číslem abecedy bez háčeků ($A = 1, B = 2, C = 3, D = 4, \dots$, nezapomeňte na $CH, \dots, Z = 25$), dostaneme čísla, která mají tyto vlastnosti: Součet všech pěti čísel se rovná $\frac{1}{4}$ z 256. Třetí číslo je větší než všechna ostatní, a to o 10 větší než druhé, o 5 větší než první, o 2 větší než čtvrté a o 19 větší než páté. Jak se jmenuje město?

MOZ 6 - I - 5

Karel má telefonní číslo $abcd$, Vladimír má telefonní číslo $mnpq$. Tato čísla jsou zajímavá tím, že dohromady obsahují všechny číslice od 1 do 9, a to každou číslici právě jednou, přičemž součin těchto dvou čísel je největší možný. Zjistěte, jaká telefonní čísla mají Karel a Vladimír.

MOZ 6 - I - 6

Určete složení, pořadí a bodové hodnocení prvních tří dvojčlených hlídek v branných závodech podle těchto údajů:

Jožka získal o 10 bodů víc než Dušan, Dušan o 20 víc než Petr, Ruda získal o 5 bodů méně než druhý člen jeho hlídky. Emil ztratil na každém stanovišti o 5 bodů více než druhý člen jeho hlídky. Karel ztratil na dvou stanovištích po 5 bodech a na zbývajících pěti stanovištích po 10 bodech, zatímco jeho partner získal na všech stanovištích plný počet bodů. Úspěšnější závodníci z těchto tří hlídek získali celkem 380 bodů. Hlídka, která se umístila na druhém místě, získala 220 bodů.

MOZ 6 - II - 1

Název města se píše čtyřmi písmeny. Jestliže se každé písmeno nahradí pořadovým číslem abecedy: A B C D E F G H CH I J K L M N O P R S T U V X Y Z, získaná 4 čísla budou mít tyto vlastnosti:

1. První číslo se rovná jedné osmině čtvrtého čísla.
2. Třetí číslo je o 13 větší než první, o 3 menší než druhé a o 1 menší než čtvrté.

Jaký je název města?

MOZ 6 - II - 2

Je dán pravoúhlý trojúhelník s přeponou délky 8 cm a odvěsnou délky 4 cm. Zjistěte, zda ze šesti takovýchto nepřekrývajících se trojúhelníků se dá složit rovnoběžník, jehož jeden vnitřní úhel je 30° . Najděte všechny možnosti.

MOZ 6 - II - 3

Dominové kostky můžeme chápat jako zápisy zlomků. Přitom jedna kostka může vyjadřovat dva zlomky, např. dominová kostka

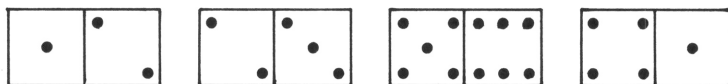
1	2
---	---

 podle toho, jak ji postavíme, vyjadřuje zlomky $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{1}$. Do kroužků v obrázku 63 vepište znaménka plus nebo minus a na místa prázdných dominových kostek umístěte dominové kostky z obrázku 64 tak, aby se výsledek rovnal 5.

Obr. 63

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \bigcirc \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \bigcirc \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \bigcirc \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} = 5$$

Obr. 64



MOZ 6 - II - 4

Myslím si čtyřciferné číslo. Vím, že:

1. Jeho ciferný součet je setina z čísla, které dostaneme zaokrouhlením myšleného čísla na sta.
2. Jeho poslední číslice je o 1 větší než předposlední číslice.
3. Součet jeho posledních dvou číslic se rovná jeho druhé číslici.

Které je to číslo?

Kategorie MOZ 7

MOZ 7 - I - 1

Námořník o vánocích roku 1985 vzpomínal, že při poslední plavbě kolem Evropy vyplul se svou lodí z Leningradu za krásného slunečného rána první pondělí v měsíci. První pondělí po první neděli ve stejném měsíci se už koupal v Kodani. Poslední sobotu před poslední nedělí v dalším měsíci si prohlížel Atény. Do Oděsy připlul poslední sobotu téhož měsíce. Určete den, měsíc a rok začátku a konce cesty. Příhoda není starší než 7 roků.

MOZ 7 - I - 2

Pás je složen z 1 985 čtverců (obr. 65). V každém čtverci je jedna číslice. Dvojice sousedních čísel tvoří dvojciferné číslo, které je násobkem čísla 17 nebo 23. Určete první číslici, jestliže poslední číslice je 7.

Obr. 65



MOZ 7 - I - 3

Narýsujte trojúhelník ABC se stranami $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 7$ cm. Uvnitř trojúhelníku ABC sestrojte bod D tak, aby trojúhelníky ABD , BCD a ACD měly stejný obsah.

MOZ 7 - I - 4

Libovolně zvolíme 8 po sobě jdoucích přirozených čísel. Zjistěte, kolik může být mezi nimi:

- nejvíce prvočísel,
- nejméně prvočísel.

Uveďte příklady.

MOZ 7 - I - 5

Věžní hodiny odbíjejí malým zvonem každou čtvrt hodinu:

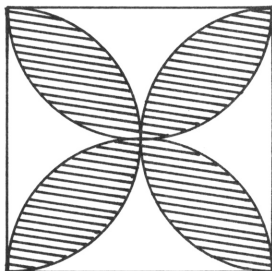
- čtvrt hodinu ... 1 úder
- čtvrt hodinu ... 2 údery
- čtvrt hodinu ... 3 údery
- čtvrt hodinu ... 4 údery

a velkým zvonem každou celou hodinu příslušný počet úderů (1, 2, ..., 12 úderů).

Zjistěte nejkratší dobu, za kterou můžeme slyšet 1 000 úderů.

MOZ 7 - I - 6

Narýsujte čtyřlístek (obr. 66) a vypočítejte jeho obsah. Délka strany čtverce je 6 cm.



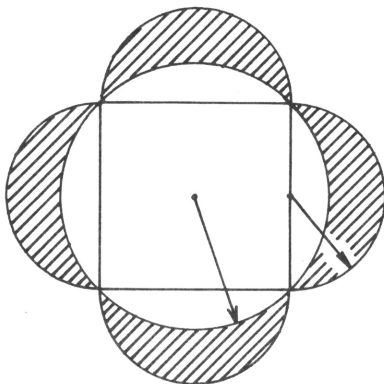
Obr. 66

MOZ 7 - II - 1

V krabici je 666 hracích kostek. Jirka je postupně vybírá a pokládá na stůl. První kostku položí tak, aby jednička byla nahoře, potom položí dvě kostky s dvojkami nahoře, dále tři kostky s trojkami nahoře atd. až šest kostek s šestkami nahoře. Potom všechno zopakuje, tj. opět položí jednu kostku tak, aby jednička byla nahoře atd. ..., až se krabice vyprázdní. Vypočítejte součet teček na horních stěnách kostek.

MOZ 7 - II - 2

Čtverec $ABCD$ má strany délky 6 cm. Co je větší? Obsah čtverce $ABCD$, nebo součet obsahů čtyř měsíčků? (Obr. 67.)



Obr. 67

MOZ 7 - II - 3

Určete prvních devět a posledních devět číslic podílu:

$$\underbrace{3000000 \dots\dots\dots 000007 : 37}_{99 \text{ nul}}$$

Určete i zbytek.

MOZ 7 - II - 4

Narýsujte libovolný trojúhelník ABC a uvnitř něj zvolte bod X . Sestrojte k bodu X body souměrně sdružené podle přímk AB , AC , BC a označte je K , L , M . Vyznačte průnik trojúhelníků ABC a KLM . Zjistěte, zda tímto průnikem může být trojúhelník, čtyřúhelník, pětiúhelník atd. Měňte tvar trojúhelníku i polohu bodu X . Narýsujte.

ŘEŠENÍ ÚLOH

1. ROČNÍK MOZ ŠKOLNÍ ROK 1980/1981

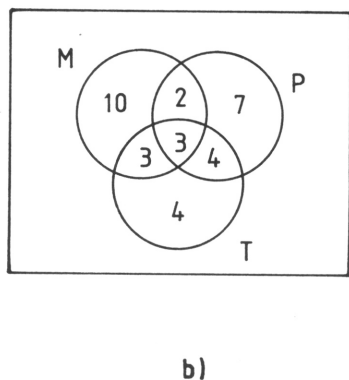
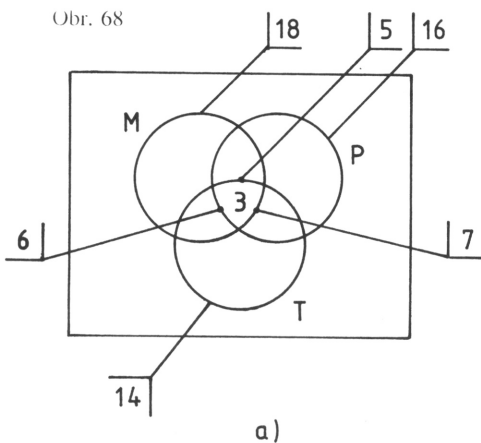
Kategorie MOZ 5

MOZ 5 - I - 1

Označme množinu žáků matematického kroužku M , přírodovědného kroužku P , tělovýchovného kroužku T , množinu všech žáků V .

1. řešení. Do množinového diagramu pro tři množiny zapíšeme známé údaje (obr. 68a).

Obr. 68



Dále vypočítáme počty žáků, kteří pracují právě ve dvou kroužcích:

v matematickém a přírodovědném ... $5 - 3 = 2$,

v matematickém a tělovýchovném ... $6 - 3 = 3$,

v přírodovědném a tělovýchovném ... $7 - 3 = 4$;

pouze v jednom kroužku:

v matematickém ... $18 - 3 - 3 - 2 = 10$,

v přírodovědném ... $16 - 2 - 3 - 4 = 7$.

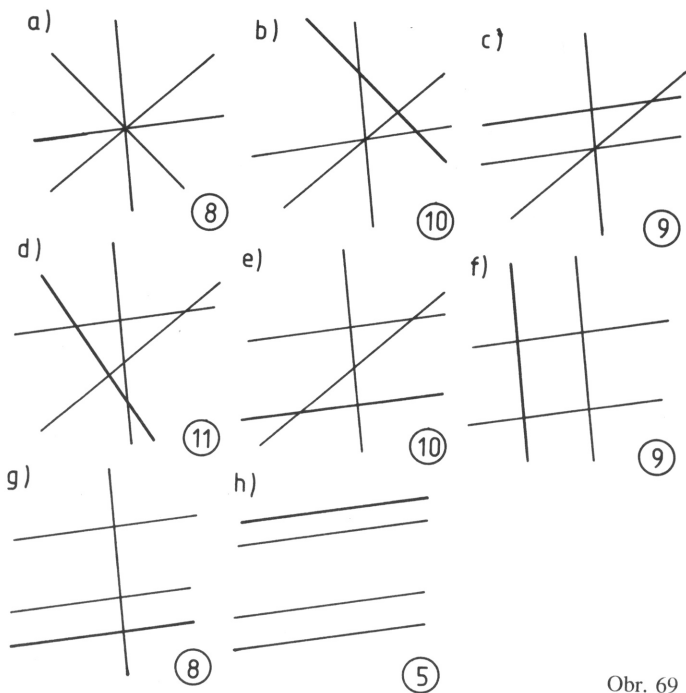
Počet všech žáků je potom $14 + 10 + 2 + 7 = 33$ a to odporuje prvnímu Petrovu údaji, že žáků je 31. Pravdu měla Jana. (Obr. 68b.)

2. řešení: Platí: $|V| = |M| + |P| + |T| - |M \cap P| - |M \cap T| - |P \cap T| + |P \cap M \cap T|$. Tedy $|V| = 18 + 16 + 14 - 5 - 6 - 7 + 3 = 33$.

Všech žáků má však být 31, v Petrových údajích musí tedy být chyba.

MOZ 5 - I - 2

Jednotlivé možnosti vidíme na obrázcích 69a, b, c, d, e, f, g, h.



Obr. 69

Čtyřmi různými přímkami je možno rovinu rozdělit na 5, 8, 9, 10 a 11 nepřekrývajících se částí.

MOZ 5 - I - 3

1. řešení. 11 žiguli (lichý počet) se dá rozdělit do kolon jen tak, že v jedné jich bude sudý počet a v druhé lichý počet. Sestavme dvě tabulky, každá představuje jednu kolonu (označme $\check{Z}$ – počet žiguli, $\check{S}$ – počet škodovek, P – $\check{S} : \check{Z}$):

$\check{Z}$	$\check{S}$	P	$\check{Z}$	$\check{S}$	P
2	26	13	9	19	–
4	24	6	7	21	3
6	22	–	5	23	–
8	20	–	3	25	–
10	18	–	1	27	27

V koloně je dohromady 28 aut. V druhých sloupcích tabulek jsou proto čísla, která spolu s prvním číslem řádku dávají součet 28. V třetím sloupci je podíl (jestliže vychází celé číslo). Vyhovují jen čísla v druhém řádku. V druhé tabulce připadají na jedno žiguli tři škodovky a to je dvakrát méně škodovek než v první tabulce. Druhá tabulka tedy zachycuje situaci v první koloně.

V první koloně bylo 21 škodovek a v druhé koloně 24 škodovek.

2. řešení. $\check{Z}_1 + \check{Z}_2 = 11$ a $k\check{Z}_1 + 2k\check{Z}_2 = 45$, z toho $\check{Z}_2 = \frac{45}{k} - 11$, potom $k = 1$ nebo $k = 3$.

Je-li $k = 1$, pak $\check{Z}_2 = 34$. Nevyhovuje.

Je-li $k = 3$, pak $\check{Z}_2 = 4$, $\check{Z}_1 = 7$, $\check{S}_2 = 24$ a $\check{S}_1 = 21$.

MOZ 5 - I - 4

Jestliže z levé i pravé misky odebereme po jednom jablku a dvou hruškách, zůstanou váhy v rovnováze. Nalevo bude jedna hruška, napravo jablko a 20 g.

Hruška má tedy o 20 g větší hmotnost než jablko a 5 hrušek má o 100 g větší hmotnost než 5 jablek. To znamená, že 5 hrušek a 3 jablka mají stejnou hmotnost jako 8 jablek a 100 g závaží.

Všechno ovoce má hmotnost 780 g. 8 jablek a 100 g musí mít proto hmotnost také 780 g.

8 jablek má potom hmotnost 680 g a 1 jablko má hmotnost 85 gramů.

Hruška má hmotnost o 20 g větší, čili 105 g.

Zkouška: Levá miska: $3 \cdot 105 + 85 = 400$

Pravá miska: $2 \cdot 105 + 2 \cdot 85 + 20 = 400$

MOZ 5 - I - 5

Vypišme čtveřice bezprostředně za sebou jdoucích číslic a čísel, která vzniknou záměnou prvních dvou číslic:

1234 ... 2 134 4567 ... 5 467

2345 ... 3 245 5678 ... 6 578

3456 ... 4 356 6789 ... 7 689

Číslo 2 134 se nemůže rovnat součinu stejných přirozených čísel, protože platí $46 \cdot 46 < 2\,134 < 47 \cdot 47$.

Podobně číslo 3 245; $56 \cdot 56 < 3\,245 < 57 \cdot 57$ a číslo 7 689; $87 \cdot 87 < 7\,689 < 88 \cdot 88$.

Čísla 5 467 a 6 578 se nedají zapsat jako součin dvou stejných přirozených čísel, protože poslední číslice takového součinu může být jen 0, 1, 4, 5, 6 a 9.

Ze všech 6 čísel vyhovuje podmínce jedině 4 356 a $4\,356 = 66 \cdot 66$.

MOZ 5 - I - 6

Součet čísel druhého řádku tabulky je 0. To znamená, že ve všech řádcích, sloupcích a úhlopříčkách musí být součet 0. Ze 4. sloupce zjistíme, že $f = -3$, z úhlopříčky dostáváme $a = 7$. Z 3. řádku vidíme, že $x + c = 1$. To však znamená, že $b = 2$ (podle 2. sloupce).

Z 1. řádku dostaneme $x = -7$. Z 3. řádku dostáváme $c = 8$, z 3. sloupce $e = 12$, z 1. sloupce $k = -2$.

7	2	-7	-2
2	-3	-4	5
-7	8	-1	0
-2	-7	12	-3

MOZ 5 - I - 7

Měli 1 620 m látky.

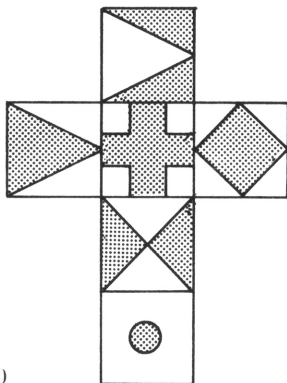
1. den prodali $\frac{3}{10}$ $0,3 \cdot 1\,620 = 486$ 486 m
zůstalo $1\,620 - 486 = 1\,134$... 1 134 m
2. den prodali $\frac{1}{6}$ zbytku $\frac{1}{6} \cdot 1\,134 = 189$ 189 m
zůstalo $1\,134 - 189 = 945$ 945 m
3. den 4krát víc než 4. den $4x$
4. den, x $4x + x = 945$, $x = 189$... 189 m
3. den $4 \cdot 189 = 756$ 756 m

Zkouška: $486 + 189 + 756 + 189 = 1\,620$

1. den prodali 486 m, 2. den 189 m, 3. den 756 m a 4. den 189 m látky.

MOZ 5 - I - 8

Narýsujeme si síť krychle (obr. 70). Vzor „kříž“ umístíme do jedné stěny sítě. Vzory, které sousedí s „křížem“, na obrázcích krychlí (obr. 3) zakreslujeme do stěn sítě, které sousedí se stěnou, ve které je „kříž“. Za sousední stěny na síti považujeme ty, které spolu sousedí po složení sítě do krychle. Při zakreslování vzoru do stěny sítě je třeba dávat pozor na jeho správné uložení. Úloha má více řešení, která se liší tvarem sítě nebo „vyvzorováním“ sítě.



Obr. 70

MOZ 5 - II - 1

Označme hmotnost surovin, které odevzdali jednotliví žáci, začátečními písmeny jejich jmen.

Podle zadání úlohy platí:

$$(1) \quad A > C, B > E, D < E, C > B$$

$$(2) \quad A + B + C + D + E = 25$$

Z nerovnosti (1) vyplývá uspořádání

$$(3) \quad A > C > B > E > D.$$

Hmotnost surovin, které odevzdal každý žák, je aspoň 2 kg, tedy $D \geq 2$ kg.

Všechna řešení jsou zapsána v tabulce:

Žák	Rozložení hmotností odevzdaných surovin						
Aleš	11	10	9	9	8	8	7
Cyril	5	6	7	6	7	6	6
Boris	4	4	4	5	5	5	5
Emil	3	3	3	3	3	4	4
Dušan	2	2	2	2	2	2	3
Dohromady	25	25	25	25	25	25	25

MOZ 5 - II - 2

Úlohu je možné řešit např. graficky.

Ukážeme si jiné řešení. Označíme hmotnost velké koule G , krychle K a kuličky g .

Podle podmínek úlohy platí:

$$(1) \quad 3K + G = 12g$$

$$(2) \quad G = K + 8g$$

Dosadíme-li za G z (2), dostaneme:

$$(3) \quad 4K + 8g = 12g$$

Jestliže v (3) odečteme na každé straně $8g$, dostaneme:

$$(4) \quad 4K = 4g$$

Ze (4) vyplývá, že krychle a kulička mají stejnou hmotnost.

Proto z (2) vyplývá, že hmotnost velké koule je stejná jako hmotnost 9 kuliček.

MOZ 5 - II - 3

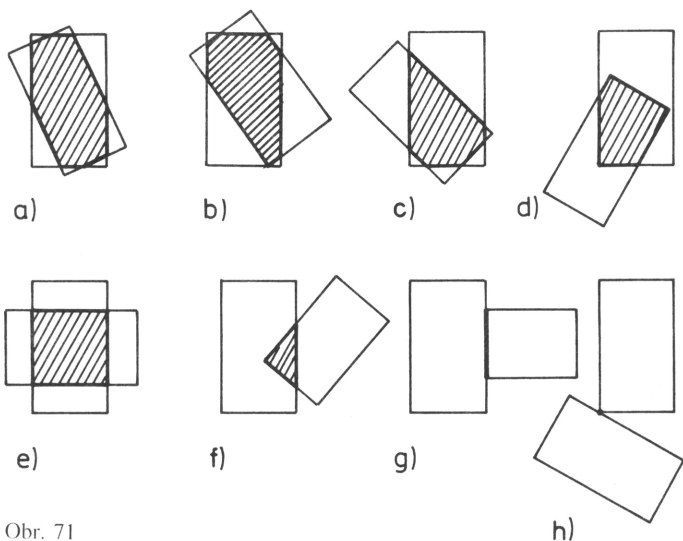
Součet délek všech tyčinek je 45 cm. Můžeme z nich proto sestavit čtverec s maximálním obvodem 44 cm a se stranou délky 11 cm. Snadno se přesvědčíme, že konstrukce čtverce se stranou délky menší než 7 cm není možná.

Délka strany čtverce	Délky použitých tyčinek v cm			
7 cm	7	$6 + 1$	$5 + 2$	$4 + 3$
8 cm	8	$7 + 1$	$6 + 2$	$5 + 3$
9 cm	9	$8 + 1$	$7 + 2$	$6 + 3$
	9	$8 + 1$	$6 + 3$	$5 + 4$
	9	$7 + 2$	$6 + 3$	$5 + 4$
10 cm	$8 + 1$	$7 + 2$	$6 + 3$	$5 + 4$
	$9 + 1$	$8 + 2$	$7 + 3$	$6 + 4$
11 cm	$9 + 2$	$8 + 3$	$7 + 4$	$6 + 5$

Úloha má dohromady 8 různých řešení.

MOZ 5 - II - 4

Náčrt řešení je na obrázku 71a, b, c, d, e, f, g, h.



Obr. 71

Kategorie MOZ 6

MOZ 6 - I - 1

Jestliže má druhá mocnina čísla končit číslicí 1, musí toto číslo končit jedničkou nebo devítkou. Hledaná čísla jsou: 11, 19, 21, 29, ..., 91, 99. Dohromady je jich 18.

MOZ 6 - I - 2

Z čísla $abcde$ máme podle pokynu utvořit číslo $cde8$. Vynásobíme-li toto číslo čtyřmi, dostaneme číslo $abcde$. Násobme: $\overset{cde8}{\cdot \frac{4}{2}}$.

$4 \cdot 8 = 32$, potom číslo $e = 2$. Násobme: $\overset{cd28}{\cdot \frac{4}{2}}$ (zůstaly 3).

$4 \cdot 2 + 3 = 11$, potom číslo $d = 1$. Násobme: $\overset{c128}{\cdot \frac{4}{12}}$ (zůstala 1).

$4 \cdot 1 + 1 = 5$, potom číslo $c = 5$. Násobme: $\overset{5128}{\cdot \frac{4}{20\,512}}$.
Hledané číslo je 20 512.

MOZ 6 - I - 3

Součet délek dvou stran trojúhelníku je větší než délka třetí strany. Necht' nejdelší strana trojúhelníku je úsečka délky 9 cm. Zbývající dvě strany mohou být pouze úsečky délek 5 cm a 7 cm nebo 3 cm a 7 cm.

Necht' nejdelší strana trojúhelníku je úsečka délky 7 cm. Potom zbývající dvě strany mohou mít délky pouze 3 cm a 5 cm. Strana délky 5 cm už nemůže být stranou trojúhelníku. Zbývající menší úsečky 1 cm, 3 cm jsou velmi malé, jejich součet je menší než 5 cm.

Nalezli jsme trojúhelníky se stranami délek:

5 cm, 7 cm, 9 cm;

3 cm, 7 cm, 9 cm;

3 cm, 5 cm, 7 cm.

Poznámka. Je možné sestavit 6 trojúhelníků nebo 3 trojúhelníky podle toho, zda nesouhlasně shodné trojúhelníky považujeme za různé, nebo stejné.

MOZ 6 - I - 4

1. řešení. a) Body označíme $A_1, A_2, \dots, A_{100}$. Spojíme-li bod A_1 se zbývajících 99 body, dostaneme 99 úseček.

Totéž zopakujeme s body $A_2, A_3, \dots$ až A_{100} . Sestrojíme tak $100 \cdot 99$ úseček. Vždy dvě úsečky však splývají. Např. A_1A_2 s A_2A_1 , A_5A_6 s A_6A_5 atd. Každá úsečka je započítána dvakrát.

Dohromady jich je tedy $\frac{100 \cdot 99}{2} = 4\,950$.

b) Přibude-li bod A_{101} , přibude 100 úseček. Tento bod můžeme totiž spojit s předcházejícími 100 body.

Dostaneme dohromady 5 050 úseček.

2. ř e š e n í. a) První bod spojíme se zbývajcími 99 body. Dostaneme 99 úseček. Druhý bod (je už spojen s prvním) spojíme se zbývajcími 98 body. Dostaneme 98 úseček, třetí bod spojíme s 97 body atd. $\dots$, až 99. bod spojíme s posledním, stým bodem. Dostaneme $99 + 98 + 97 + \dots + 2 + 1$ úseček. Jak vypočítáme takový součet? Zapišeme dva takové součty pod sebe a sečteme:

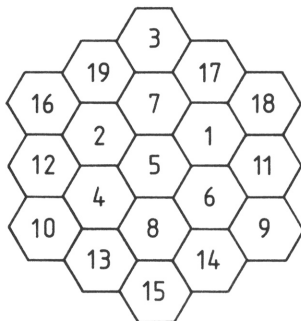
$$\begin{array}{cccccccc}
 99 + & 98 + & 97 + & \dots & + & 3 + & 2 + & 1 \\
 1 + & 2 + & 3 + & \dots & + & 97 + & 98 + & 99 \\
 \hline
 100 + & 100 + & 100 + & \dots & + & 100 + & 100 + & 100
 \end{array}$$

Jeden součet se tedy rovná $\frac{99 \cdot 100}{2}$, čili 4 950.

MOZ 6 - I - 5

Na obrázku 5 vpravo nahoře máme vypsanou celou řadu, její součet je 38. Můžeme tedy postupně vepsat čísla 19, 12, 7, 11, 9. Tři čísla, která jsou nejnižší, musí být: 13, 15, 14.

Ř e š e n í je na obrázku 72.



Obr. 72

MOZ 6 - I - 6

Vlaky se k sobě přibližují rychlostí 100 km/h. Půlhodinu před tím, než se potkají, budou od sebe vzdáleny 50 km.

MOZ 6 - I - 7

1. řešení. Kdyby vzdálenost měst byla 30 km, nákladní auto by ji ujelo o $\frac{1}{4}$ hodiny později než autobus. Autobus totiž ujede 30 km za $\frac{3}{4}$ hodiny, nákladní auto za 1 hodinu. Když nákladní auto přijelo do Banské Bystrice o $\frac{7}{4}$ hodiny později, pak je vzdálenost mezi městy 7krát větší, tedy 210 km. Vzdálenost mezi Bratislavou a Banskou Bystricí je 210 km.

2. řešení. Když do Banské Bystrice přijel autobus, nákladnímu autu zbývala $1\frac{3}{4}$ hodiny jízdy.

$$\text{Tedy } 30 + \frac{3}{4} \cdot 30 = 30 + 22,5 = 52,5.$$

Autobus získal před nákladním autem náskok 10 km za každou hodinu, čili 1 km za 6 minut.

$$52,5 \cdot 6 = 315$$

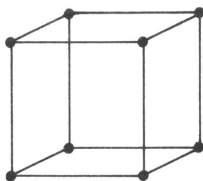
Náskok 52,5 km získal za 315 minut, čili za $5\frac{1}{4}$ hodiny. Za tuto dobu autobus ujel $5 \cdot 40 + 10 = 210$ km. Vzdálenost mezi Bratislavou a Banskou Bystricí je 210 km.

MOZ 6 - I - 8

Nakreslíme-li 7 bodů a z každého bodu tři různé úsečky, dostaneme 21 úseček.

Má-li však být situace taková jako v úloze, musí tyto úsečky začínat i končit v těchto 7 bodech. Vždy dva body budou tedy mít společnou úsečku, dohromady bude tedy těchto úseček o polovinu méně, čili $21 : 2$. To však není celé číslo. Obrázek se nedá sestavit.

Při sudém počtu bodů je situace jiná. Například pro 8 bodů je jedno z řešení na obrázku 73.



Obr. 73

MOZ 6 - II - 1

Protože počet kilometrů, které ušli první den, porovnáváme s počtem kilometrů, které ušli třetí den, vezmeme počet kilometrů, které ušli třetí den, za základ.

3. den ušli	x (km)
1. den ušli	$2x$ (km)
2. den ušli	$2x - 10$ (km)
Dohromady ušli	65 km

$$x + 2x + 2x - 10 = 65$$

$$5x = 75$$

$$x = 15 \text{ (km)}$$

První den ušli žáci 30 km, druhý den o 10 km méně, tedy 20 km, a třetí den 15 km.

MOZ 6 - II - 2

Jedno z mnoha řešení:

1	7	2	8
4	6	3	5
7	1	8	2
6	4	5	3

MOZ 6 - II - 3

1. řešení. Hledané číslo musí být menší než 23, protože $23 \cdot 4,5 > 100$. Musí končit „velkou číslicí“. Po „přehození“ číslic má přece vzniknout více než 4krát větší číslo. $4 \cdot 15 = 60 > 51$. Stačí tedy zkoumat čísla 16, 17, 18, 19. Vyhovuje pouze jedno číslo: 18; $18 \cdot 4,5 = 81$.

2. řešení. Označme první číslici hledaného čísla a , druhou číslici b . Má platit:

$$(10a + b) \cdot \frac{9}{2} = 10b + a$$

$$88a = 11b$$

$$8a = b$$

Tedy $a = 1$, $b = 8$.

3. řešení. Hledané číslo označme x . Číslo, které vznikne záměnou číslic, označme z . Platí:

$$x \cdot \frac{9}{2} = z \quad \text{číslo } z \text{ je celé}$$

$$\frac{x}{2} \cdot 9 = z \quad \text{číslo } z \text{ je násobkem 9}$$

To znamená, že jeho ciferný součet je dělitelný 9. Stejný ciferný součet má i číslo x , je tedy též dělitelné 9. Zároveň vidíme, že je hledané číslo dělitelné dvěma, je tedy sudé. Musíme věnovat pozornost sudým dvojciferným číslům dělitelným 9 (a ne příliš velkým). Vyhovuje pouze 18.

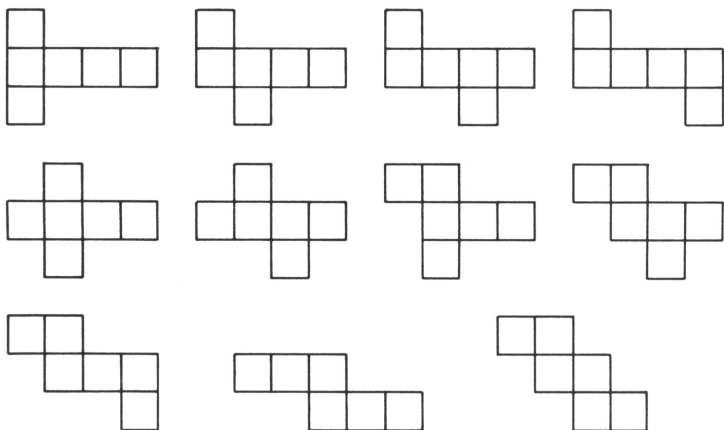
MOZ 6 - II - 4

Sít čtyřstěnu je možné narýsovat dvěma způsoby (obr. 74a), síť krychle je možné narýsovat 11 způsoby (obr. 74b).



Obr. 74a





Obr. 74b

Kategorie MOZ 7

MOZ 7 - I - 1

Vzdálenost mezi stožáry pouličního osvětlení je dělitelem šířky a délky náměstí. Víme, že vzdálenost mezi stožáry má být co největší. Je tedy největším společným dělitelem čísel 180, 252. Číslo rozložíme na součin:

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 36 \cdot 5$$

$$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 36 \cdot 7$$

Vzdálenost mezi stožáry má být tedy 36 m a po šířce náměstí musí být 5 mezer mezi stožáry, čili 6 stožárů, z toho 4 nové. Na obou kratších stranách dohromady 8. Po délce náměstí musí být 7 mezer mezi stožáry, čili 8 stožárů, z toho 6 nových. Na obou delších stranách dohromady 12. Celkem je třeba 20 nových stožárů.

MOZ 7 - I - 2

Máme vlastně najít číslíce a, b, c takové, že platí:

$$1963 - 1abc = a \cdot b \cdot c$$

Můžeme předpokládat, že matematikovi bylo méně než 100 a více než 20 let. To znamená, že se mohl narodit nejdříve v roce 1863 a nejpozději v roce 1943.

Tedy $a = 8$ nebo 9. Jestliže $a = 8$, potom $b \geq 6$; jestliže $a = 9$, pak $b \leq 4$.

c volíme tak, aby platilo $20 < a \cdot b \cdot c < 100$.

Po vyzkoušení všech možností vidíme, že vyhovuje jen rok 1891. Matematik se narodil roku 1891.

MOZ 7 - I - 3

Povrch krychle je $6a^2$, přičemž a je délka hrany a v našem případě zároveň počet krychlí podél jedné hrany:

$$6a^2 = 216$$

$$a = 6$$

a) Objem velké krychle je 6^3 cm^3 . Po odebrání 8 rohových krychlí zůstává $6^3 - 8 = 208 \text{ (cm}^3\text{)}$.

b) S každou z odebraných krychlí ubyly 3 stěny, tj. 3 cm^2 původního povrchu, tj. 24 cm^2 . Jestliže připustíme, že i krychle je kvádr, splňuje podmínku krychle s délkou hrany 2 cm.

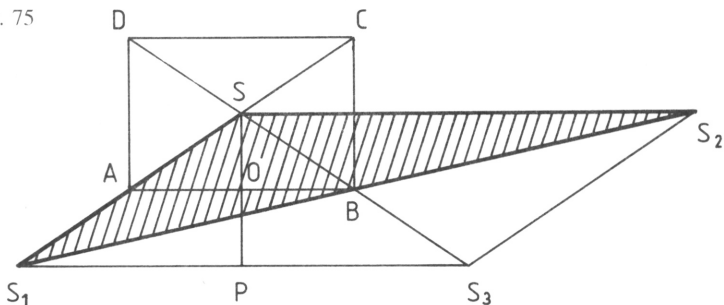
c) Ušetřilo by se barvení 24 cm^2 , to je $\frac{24}{216} = \frac{1}{9}$ povrchu, to je přibližně 11,1 % povrchu.

MOZ 7 - I - 4

Sestrojíme body podle podmínek úlohy a kromě nich bod S_3 souměrně sdružený s bodem S podle bodu B , patu P kolmice z bodu S k S_1S_3 a O její průsečík s AB (obr. 75). Obsah trojúhelníku SS_1S_2 se rovná obsahu trojúhelníku SS_1S_3 (polovina obsahu rovnoběžníku $SS_1S_3S_2$). Vypočítejme obsah trojúhelníku SS_1S_3 .

AB je střední příčka trojúhelníku SS_1S_3 , a proto jeho základna $|S_1S_3| = 2|AB|$ a jeho výška $|PS| = 2|OS| = |BC|$. $S_{\triangle SS_1S_2} = S_{\triangle SS_1S_3} = \frac{|S_1S_3| \cdot |PS|}{2} = \frac{2|AB| \cdot |BC|}{2} = S_{\square ABCD} = 3 \cdot 2 = 6 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Obr. 75



MOZ 7 - I - 5

Označme b , r , $\check{c}$ počet bílých, růžových a červených aster. Podle podmínek platí:

$$b + r + \check{c} = 324$$

$$r = b + 36$$

$$\check{c} = 2b$$

$$b + (b + 36) + 2b = 324$$

$$4b = 288$$

$$b = 72$$

$$\check{c} = 144$$

$$r = 72 + 36 = 108$$

Bílých aster bylo 72, červených 144 a růžových 108. Počet kytic je společný dělitel počtu bílých, červených a růžových aster.

$$b = 2^3 \cdot 3^2 = 2 \cdot 36$$

$$\check{c} = 2^4 \cdot 3^2 = 4 \cdot 36$$

$$r = 2^2 \cdot 3^3 = 3 \cdot 36$$

Jestliže chtěli uvázat co nejvíce kytic, pak kytic bylo 36, v každé z nich byly 4 červené, 2 bílé a 3 růžové astry. Jinak kytic mohlo být: 18 (4b, 8č, 6r), 12 (6b, 12č, 9r), 9 (8b, 16č, 12r), 6 (12b, 24č, 18r), 4 (18b, 36č, 27r), 3 (24b, 48č, 36r), 2 (36b, 72č, 54r) nebo jen jedna.

MOZ 7 - I - 6

Označme t číslo dne v týdnu, d den, m měsíc, r rok Nadina narození.

Platí: $t \cdot d \cdot m = r$, přičemž $t \in \{1, 2, \dots, 7\}$, $d \in \{1, 2, \dots, 31\}$, $m \in \{1, 2, \dots, 12\}$.

Snadno se přesvědčíme, že se šachový zápas hrál koncem týdne. Kdyby se hrál v některém z prvních pěti dnů týdne, nestačilo by ani „největší“ datum 31. 12., protože součin $t \cdot d \cdot m = 5 \cdot 31 \cdot 12$ je jen 1 860 a Naďa se jistě narodila po roku 1950. Rok jejího narození musí být tedy dělitelný šesti (jestliže se hrálo v sobotu) nebo sedmi (jestliže se hrálo v neděli). Jestliže vyšetříme roky mezi 1950 a 1980, najdeme jediný vyhovující rok $1960 = 28 \cdot 10 \cdot 7$.

Naďa se tedy narodila 28. října 1960 a šachový zápas se hrál v neděli.

Poznámka. Řešení této úlohy závisí na roce. V úvahu připadá 30. listopad 1980 a v roce 1987 jen sobota. (Například v roce 1982 by byla možná dvě řešení.)

MOZ 7 - I - 7

Po vyřezání kvádrů přibudou na povrchu dva obdélníky s délkami stran 60, x a ubudou dva obdélníky s délkami stran x , y . Celkově bude pro přírůstek p povrchu platit:

$$p = 2 \cdot 60 \cdot x - 2 \cdot x \cdot y$$

Povrch krychle $S = 6 \cdot 60 \cdot 60$; z toho, že $p = \frac{1}{6}S$, dostaneme

$$2 \cdot x \cdot (60 - y) = 3\,600.$$

$x = \frac{1800}{60-y}$, přičemž $y < 30$ a zároveň $y \geq 10$, pro $60 - y$ potom platí $60 - y \leq 50$ a zároveň $60 - y > 30$. Číslo x musí být celé, a proto $60 - y$ musí dělit číslo 1 800. Mezi 30 a 51 jsou 4 taková čísla: 36, 40, 45, 50. (Při hledání těchto čísel nám pomůže rozklad čísla $1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.) Hodnoty x, y jsou v tabulce:

$60 - y$	x	y
36	50	24
40	45	20
45	40	15
50	36	10

MOZ 7 - I - 8

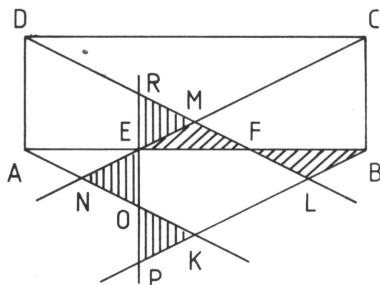
V bodě E sestrojíme kolmici k úsečce AB . Její průsečíky s přímkami AK, BK, DM označíme O, P, R (obr. 76).

$\triangle ANE \cong \triangle FME$ (*usu*, $|AE| = |EF|$), tedy $|NE| = |EM|$, potom $\triangle NOE \cong \triangle MRE$ (*usu*), čili $|NE| = |EM| = |PK|$ čili i $\triangle NOE \cong \triangle KOP$ (*usu*).

$|EF| = |FB|$, potom $\triangle BFL \cong \triangle EFM$ (*usu*).

Tedy $\triangle BEP \cong \triangle EBC$ (*usu*),

čili $S_{\square KLMN} = S_{\triangle BEP} = S_{\triangle EBC} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1 \text{ (cm}^2\text{)}.$



Obr. 76

MOZ 7 - II - 1

Počet žáků v obou třídách je menší než 80 a je společným násobkem čísel 3 a 7. V úvahu přicházejí tedy jen čísla 21, 42, 63. Z nich však podmínkám úlohy vyhovuje jen číslo 63.

Počet žáků v obou třídách je 63.

MOZ 7 - II - 2

Pro objem kváдру platí $V = a \cdot b \cdot c \leq 40$, kde a, b, c jsou přirozená čísla.

Je-li $a = 2$, potom $b \cdot c \leq 20$. Pro povrch kváдру platí:

$$S = 2 \cdot (ab + ac + bc) = 52$$

Je-li $a = 2$, dostaneme

$$2 \cdot (b + c) + bc = 26.$$

Zkoumejme, pro která $b = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ bude c přirozené číslo:

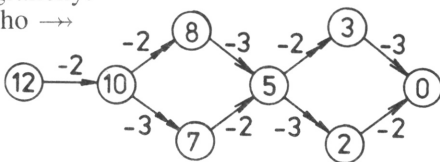
b	1	2	3	4	5	6	7	8
c	8	$\frac{22}{4}$	4	3	$\frac{16}{7}$	$\frac{14}{8}$	$\frac{12}{9}$	1

Je tedy možné sestavit dva různé kvádry s délkami hran 2, 1, 8 a 2, 3, 4.

MOZ 7 - II - 3

Řešení znázorníme graficky:

tah prvního $\rightarrow$, tah druhého $\rightarrow$



Začínající hráč vezme nejdříve 2 kuličky a v každém následujícím tahu se chová podle pravidla:

jestliže soupeř bral 2 kuličky, on bere 3,

jestliže soupeř bral 3 kuličky, on bere 2.

Vidíme, že při tomto postupu začínající hráč vyhraje svým třetím tahem.

MOZ 7 - II - 4

Bod M je průsečík úhlopříček obdélníku $ZXCD$. Osa úsečky DC tedy prochází bodem M . Podobně bod K je průsečík úhlopříček obdélníku $ABYT$. Osa úsečky AB (a také CD) prochází tedy bodem K .

Platí tedy $KM \parallel CY$ a $|MK| = |CY| = 1$ cm.

Trojúhelníky KLM , XYL , KMN a ZTN jsou shodné (*usu*).

Shodné jsou i jejich výšky. Protože leží na rovnoběžce s DC , ($KLMN$ je kosočtverec, $KM \perp NL$), je délka každé 1 cm, a tedy $|NL| = 2$ cm.

$$S_{\square KLMN} = S_{\triangle NLM} + S_{\triangle NLK} = 2 \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{2} = 1 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

2. ROČNÍK MOZ ŠKOLNÍ ROK 1981/1982

Kategorie MOZ 5

MOZ 5 - I - 1

Mince	Počty mincí					
0,50	7	5	3	3	1	1
1	0	1	2	0	3	1
2	0	0	0	1	0	1

Všech 6 možností je zachyceno v tabulce.

MOZ 5 - I - 2

a) Je třeba postupovat odzadu. Číslo 2 budeme třikrát „měnit nazpět” – odčítáme 1 a výsledek násobíme dvěma.

$$2 \rightarrow 2 \cdot (2 - 1) = 2$$

Číslo x je 2, přeměněním se nezměnilo.

$$\begin{aligned} \text{b) } 3 &\rightarrow 2 \cdot (3 - 1) = 4 \rightarrow 2 \cdot (4 - 1) = 6 \rightarrow 2 \cdot (6 - 1) = \\ &= 10 \rightarrow 2 \cdot (10 - 1) = 18 \end{aligned}$$

Číslo y je 18.

MOZ 5 - I - 3

Průsečík úseček AC a BE označme P . Výška trojúhelníku ABP ke straně AB je 4 cm, výška trojúhelníku BCP ke straně BC a výška trojúhelníku CEP ke straně EC je 2 cm. Proto

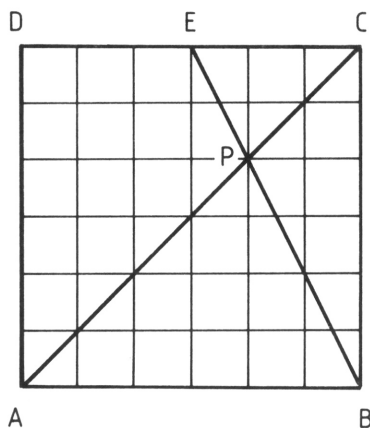
$$S_{\triangle ABP} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 \text{ (cm}^2\text{)},$$

$$S_{\triangle BCP} = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6 \text{ (cm}^2\text{)},$$

$$S_{\triangle CEP} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3 \text{ (cm}^2\text{)},$$

$$S_{APED} = 6 \cdot 6 - 12 - 6 - 3 = 15 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

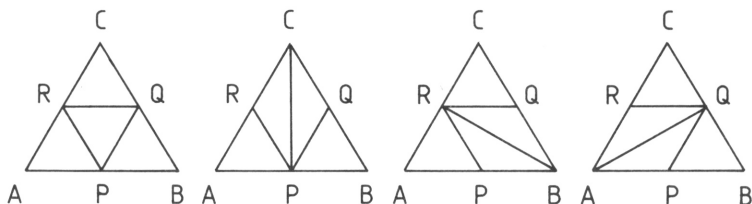
Výšky je možno určit pomocí čtverečkovaného papíru, jinak z podobnosti trojúhelníků ECP a ABP . Výška většího trojúhelníku je dvakrát větší než výška menšího trojúhelníku a dohromady mají 6 cm. (Obr. 77.)



Obr. 77

MOZ 5 - I - 4

Čtyřmi způsoby (obr. 78).



Obr. 78

MOZ 5 - I - 5

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}^{40} = \overbrace{243 \cdot 243 \cdot \dots \cdot 243}^8 = \\
 = 59\,049 \cdot 59\,049 \cdot 59\,049 \cdot 59\,049 \\
 \begin{array}{c}
 \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\
 \dots 01 \quad \quad \quad \dots 01 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \dots 01
 \end{array}
 \end{array}$$

Protože nás zajímá pouze číslice na místě desítek, stačí provést jen neúplný výpočet.

Součin $59\,049 \cdot 59\,049$ má na místě desítek nulu. Podobně i součin čtyř čísel $59\,049$.

$$\begin{array}{r}
 \dots 41 \quad \dots 01 \times \dots 01 \\
 \hline
 \dots 6 \quad \dots 01 \\
 \dots 0 \quad \dots 0 \\
 \hline
 \dots \quad \dots \\
 \dots 01 \quad \dots 01
 \end{array}$$

Vynásobíme-li 40 trojek, bude na místě desítek 0.

MOZ 5 - I - 6

Body A, B, C, D, E umístíme na svislou osu. Bod A nad C , B pod C , E pod B , D pod E . Dostali jsme pořadí. Dále víme, že D přinesl nejméně 1 kg, E 2 kg, B 3 kg atd.

Žák B nemohl přinést více než 6 kg. Kdyby přinesl 7 kg, musel by C přinést přinejmenším 8 kg a A 9 kg, to je dohromady 24 kg. Na C a D by zůstal dohromady pouze 1 kg, a to není možné. Je 30 řešení. (Viz tabulka.)

A	15	14	13	12	11	10	13	12	11	10	12	11	10	9	11	10	9
C	4	5	6	7	8	9	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7
B	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
E	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3
D	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2

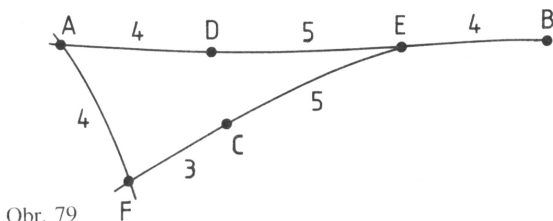
A	11	10	9	9	10	9	9	8	9	8	8	8	7
C	6	7	8	7	6	7	6	7	6	7	7	6	6
B	5	5	5	6	5	5	5	5	5	6	5	5	5
E	2	2	2	2	3	3	3	3	4	3	4	4	4
D	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	2	3

MOZ 5 - I - 7

Obvykle na jedné silnici leží více měst. Například A , D , B leží na stejné silnici. Je to vidět z toho, že $|AD| + |DB| = |AB|$, $9 + 4 = 13$.

Najdeme trojice měst s touto vlastností. Jsou to ještě ADE , AEB , DEB , FCE .

To však znamená, že na jedné silnici leží $ADEB$. Řešení vidíme na obrázku 79. (Jsou možná i jiná řešení, např. bod A může ležet i v opačné polorovině.)



Obr. 79

MOZ 5 - I - 8

Závod skončil v okamžiku, když starší chlapec zlikvidoval náskok mladšího. Zjistíme, kolik času na to potřeboval. Starší běží o 2 km/h rychleji. Za hodinu by zlikvidoval náskok 2 000 m mladšího. Pětkrát menší náskok – 400 m – zlikviduje za pětinu času, tj. za 12 minut. Starší běžel 12 minut, tj. $\frac{1}{5}$ hodiny. Za tuto dobu uběhl $\frac{1}{5} \cdot 7$ km, což je 1 400 m. Jedno kolo měřilo 350 metrů.

MOZ 5 - II - 1

Všimněme si nejprve prvního řádku. Jestliže do prvního sloupce položíme bílý čtvereček, zbývají ještě dvě možnosti na položení dalších dvou čtverečků. Do prvního sloupce je ale možno položit také modrý nebo červený čtvereček a na položení zbývajících dvou čtverečků zbývají pokaždé dvě možnosti. Máme tedy dohromady 6 možností na sestavení prvního řádku. Zkoumejme nyní, kolika způsoby je možné doplnit sestavený první řádek na čtverec. První čtvereček v druhém řádku je možné vybrat dvěma způsoby tak, aby se lišil od prvního čtverečku v prvním řádku. Jeho výběrem je však obarvení zbývajících 5 čtverečků jednoznačně určeno. Každý první řádek se tedy dá doplnit na čtverec dvěma různými způsoby. Existuje proto 12 různých způsobů složení čtverce.

MOZ 5 - II - 2

a) ~~47132~~68 $\rightarrow$ 7368

b) 123~~456789~~1011121314151617181920 $\rightarrow$
 $\rightarrow$ 1231011121314151617181920

MOZ 5 - II - 3

Tabulku je možné doplnit jediným způsobem. Nejdříve doplníme číslo ve 2. sloupci a ve 3. řádku – musí to být 3. Potom doplníme číslo ve 3. řádku a v 1. sloupci, kde musí být 1. Tak postupně doplňujeme trojice na součet 6; dostaneme:

1	3	2	1
4	0	2	4
1	3	2	1
1	3	2	1

MOZ 5 - II - 4

Nejdelší je plot Cyrilovy zahrady, protože přerušovaná čára mezi body X , Y je kratší než součet délek tří plných čar (obr. 13).

Délky plotů Antonínovy, Bohumilovy a Emilovy zahrady jsou stejné. Nejkratší plot má Dušanova zahrada, protože délka každé strany trojúhelníku je menší než součet jeho zbývajících dvou stran.

Kategorie MOZ 6

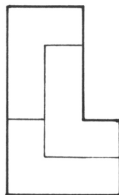
MOZ 6 - I - 1

Výkon za první den je 6 ha. Výkon za druhý den je potom $\frac{85}{100} \cdot 6 = 5,1$ (ha). Třetí den musí zorat $18 - 6 - 5,1 = 6,9$ (ha). V porovnání s výkonem ve druhém dnu je to o 1,8 ha více, tj. o $\frac{1,8}{5,1} \cdot 100 = \frac{1800}{51} \doteq 35,3$ (%).

Proti druhému dnu musí traktorista zvýšit výkon asi o 35 %.

MOZ 6 - I - 2

Řešení je na obrázku 80.



Obr. 80

MOZ 6 - I - 3

Podmínky zapíšeme do tabulky:

koho kdo	P	S	B	L	R
P	○	–	–	+	–
S	–	○	–	–	+
B	–	+	○	–	–
L	–	–	+	○	–
R	+	–	–	–	○

Do řádku R a sloupce P ... +, do řádku L a sloupce R ... –, do řádku P a sloupce R ... – atd. V každém řádku i sloupci může být jen jedno +.

Rudka podle podmínek nenavštíví Paľko, Lacko (neboť nejede do Ružbachů) ani Bohuš, protože ten jede do toho města, v kterém bydlí host Rudka. Do sloupce R napíšeme třikrát minus, Rudu tedy navštíví Slavko. Do Sliache potom přijede Bohuš. Do Lúček k Lackovi nepřijede ani Ruda, ani Slavko, ani Bohuš. Zbývá Paľko. Lacko jede potom k Bohušovi.

MOZ 6 - I - 4

Podle podmínek úlohy je v množině:

$R \cap M$... 8 prvků

$R \cap S$... 14 prvků

$S \cap M$... 5 prvků

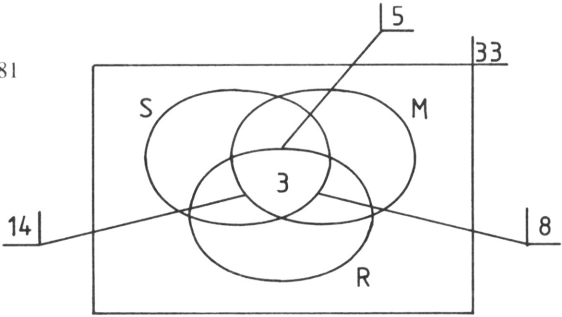
Tyto tři údaje zapíšeme do diagramu jakoby „na plot” (obr. 81a) nebo až pomocí dalšího údaje, v $R \cap S \cap M$ jsou tři prvky, víme, jak je můžeme rozdělit (obr. 81b).

Počet těch, kdo ovládají jen jeden jazyk (vyšrafováno na obr. 81b), je $33 - 11 - 2 - 5 - 3 = 12$. Na každý jazyk tedy podle poslední podmínky připadají 4 účastníci.

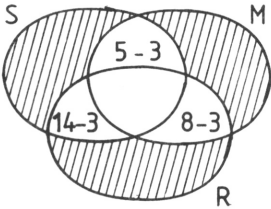
Celková situace je znázorněna na obrázku 81c.

Ruštinu ovládalo 23, slovenštinu 20, maďarštinu 14 účastníků konference.

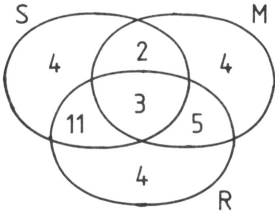
Obr. 81



a)

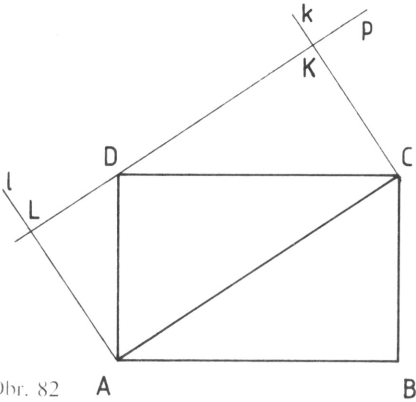


b)



c)

MOZ 6 - I - 5



Obr. 82

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD}$$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} |AC| \cdot |AL| = \frac{1}{2} S_{\square ACKL}, \text{ tedy } S_{\square ABCD} = S_{\square ACKL}$$

Konstrukce

1. Sestrojíme přímku $p \parallel AC$; $D \in p$.
2. Sestrojíme přímku $k \perp AC$; $C \in k$.
3. Sestrojíme bod $K \in k \cap p$.
4. Sestrojíme přímku $l \perp AC$; $A \in l$.
5. Sestrojíme bod $L \in l \cap p$.

MOZ 6 - I - 6

1. řešení. Předpokládejme, že máme všechny kuličky pohromadě. Rozdělíme je rovnoměrně do sáčků. $300 : 5 = 60$. Ve třetím sáčku necháme 60 kuliček, z druhého vybereme dvě a dáme do čtvrtého, z prvního čtyři a dáme do pátého.

2. řešení

$$a + (a + 2) + (a + 4) + (a + 6) + (a + 8) = 300$$

$$5a + 20 = 300$$

$$a = 56$$

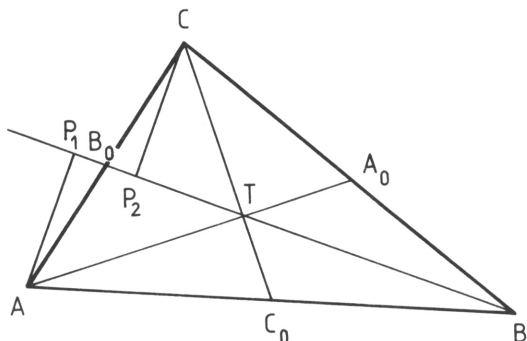
V sáčcích je 56, 58, 60, 62, 64 kuliček.

MOZ 6 - I - 7

Poslední dvě dvojice byly $[5, \frac{5}{4}]$; $[6, \frac{4}{3}]$; obecně $[n, \frac{2n}{n+3}]$.

MOZ 6 - I - 8

1. řešení



Trojúhelníky AP_1B_0 a CP_2B_0 jsou shodné (*usu*; $|\sphericalangle AB_0P_1| = |\sphericalangle CB_0P_2|$ — vrcholové úhly, $|AB_0| = |CB_0|$, $|\sphericalangle AP_1B_0| = |\sphericalangle CP_2B_0| = 90^\circ$). Jsou-li tyto trojúhelníky shodné, platí $|AP_1| = |CP_2|$. Z toho dále vyplývá, že $S_{\triangle ABT} = S_{\triangle BCT}$, neboť mají společnou základnu BT a stejné výšky.

Podobně dokážeme i rovnost $S_{\triangle CAT} = S_{\triangle BCT}$.

2. řešení. $|AP_1| = |CP_2|$ (viz 1. řešení).

$S_{\triangle ABB_0} = S_{\triangle BCB_0}$ a $S_{\triangle ATB} = S_{\triangle CTB}$. (V obou případech jde o společnou základnu a shodné výšky.)

Potom $S_{\triangle ABT} = S_{\triangle BCT}$. Podobně $S_{\triangle ABT} = S_{\triangle ACT}$.

3. řešení. Využijeme vlastnost těžiště. Víme, že $2|TB_0| = |TB|$;

$$\begin{aligned} S_{\triangle CAT} &= S_{\triangle ATB_0} + S_{\triangle CTB_0} = 2 \cdot S_{\triangle ATB_0} = \\ &= 2 \cdot \frac{|TB_0| \cdot |AP_1|}{2} = \frac{|TB| \cdot |AP_1|}{2} = S_{\triangle ATB}. \end{aligned}$$

Podobně i $S_{\triangle CAT} = S_{\triangle BCT}$.

MOZ 6 - II - 1

Označme d délku sumce v centimetrech, H délku hlavy v centimetrech, T délku těla v centimetrech, O délku ocasu v centimetrech. Platí:

$$H = 9 \quad (1)$$

$$T = O + 9 \quad (2)$$

$$O = 9 + \frac{T}{2} \quad (3)$$

Z (2) vyplývá:

$$O = T - 9 \quad (4)$$

Porovnáním rovnic (3) a (4) dostáváme: $9 + \frac{T}{2} = T - 9$, nebo $9 + \frac{T}{2} = \frac{T}{2} + \frac{T}{2} - 9$, tj. $\frac{T}{2} = 18$, z toho $T = 36$ (cm).

Jestliže dosadíme do (2) za $T = 36$ cm, dostaneme $36 = O + 9$, tedy $O = 27$ (cm).

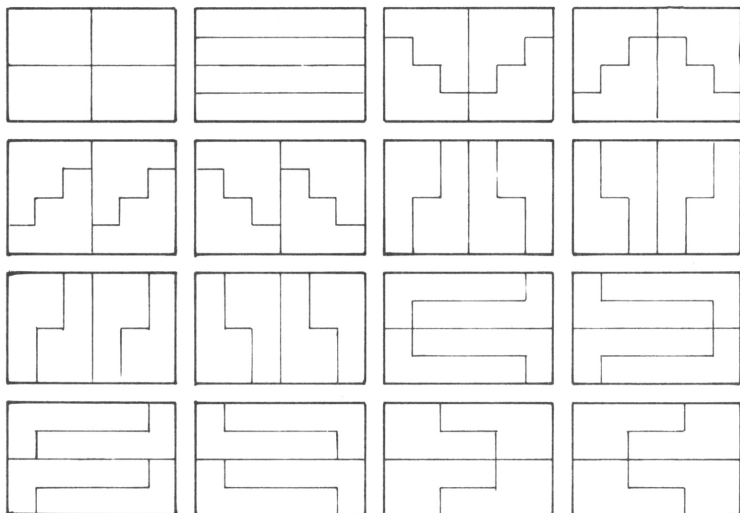
$$d = H + T + O = 9 + 36 + 27 = 72 \text{ (cm)}$$

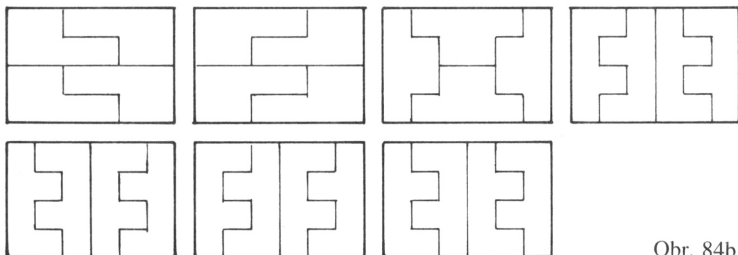
Ulovený sumec měřil 72 cm.

MOZ 6 - II - 2

Při řešení je velmi výhodné použít čtvercovou síť s rozměrem 1 cm (obr. 84a, b).

Obr. 84a

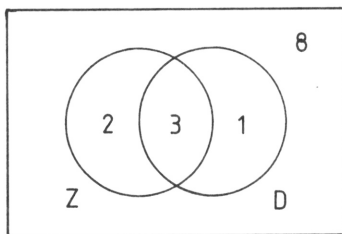




Obr. 84b

MOZ 6 - II - 3

Při řešení úlohy použijeme množinový diagram pro 2 množiny. Označme D déšť, Z zataženo.



Obr. 85

$$|Z \cap D| = 3, |Z - D| = 5 - 3 = 2, |D - Z| = 4 - 3 = 1$$

$$14 - 2 - 3 - 1 = 8$$

V průběhu dvou týdnů bylo jasno 8 dní.

MOZ 6 - II - 4

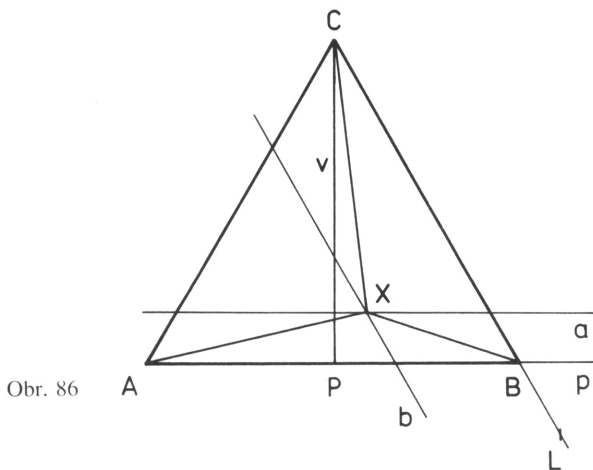
Sestrojíme výšku $|PC| = v = 6$ cm. Bodem P sestrojíme $p \perp \leftrightarrow PC$. Protože velikost vnitřních úhlů v rovnostranném trojúhelníku je 60° , je $|\sphericalangle PCB| = |\sphericalangle PCA| = 30^\circ$.

Sestrojíme proto polopřímku CL , která s výškou PC svírá úhel velikosti 30° . $\mapsto CL \cap p = B$.

Podobně sestrojíme vrchol A , nebo použijeme vlastnosti $|PB| = |AP|$.

Protože $|AB| = |BC| = |AC|$, trojúhelníky ABX , BCX a ACX budou mít výšky v poměru $1 : 2 : 3$. Přitom součet obsahů trojúhelníků ABX , BCX a ACX se rovná obsahu trojúhelníku ABC , součet jejich výšek ke stranám AB , BC , AC se tedy bude rovnat výšce trojúhelníku ABC , tj. 6 cm. Proto výšky budou 1 cm, 2 cm, 3 cm.

Sestrojíme tedy přímku $a \parallel AB$, která má od AB vzdálenost 1 cm, a přímku $b \parallel BC$ tak, že má od BC vzdálenost 2 cm. $a \cap b = \{X\}$, X je hledaný bod. (Obr. 86.)



Obr. 86

Kategorie MOZ 7

MOZ 7 - I - 1

Počítač našel tyto výsledky:

$$4 \cdot 1\,738 = 6\,952$$

$$18 \cdot 297 = 5\,346$$

$$39 \cdot 186 = 7\,254$$

$$4 \cdot 1\,963 = 7\,852$$

$$27 \cdot 198 = 5\,346$$

$$42 \cdot 138 = 5\,796$$

$$12 \cdot 483 = 5\,796$$

$$28 \cdot 157 = 4\,396$$

$$48 \cdot 159 = 7\,632$$

MOZ 7 - I - 2

1. ř e š e n í. Předpokládejme, že jsou sklady vzdáleny 60 km. Při rychlosti 30 km/h ujede kolona tuto vzdálenost za 2 hodiny. Při rychlosti 20 km/h za 3 hodiny, tedy o hodinu déle. Podle zadání má druhé koloně trvat cesta o 2 hodiny déle. Sklady jsou tedy vzdáleny 120 km. Tuto vzdálenost při rychlosti 30 km/h kolona ujede za 4 hodiny.

Aby ji ujela za 5 hodin, musí jet rychlostí $\frac{120}{5} = 24$ (km/h).

2. ř e š e n í. Označme v rychlost, kterou má kolona jet, s dráhu (vzdálenost skladů), kterou má překonat.

Údaje pro první případ:

$$v_1 = 30 \text{ km/h}, t_1, s$$

Údaje pro druhý případ:

$$v_2 = 20 \text{ km/h}, t_2 = t_1 + 2, s$$

Dráhy se v obou případech rovnají, tedy:

$$30t_1 = 20t_1 + 40$$

$$t_1 = 4$$

$$s = v_1 \cdot t_1 = 30 \cdot 4 = 120 \text{ (km)}$$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{120}{t_1 + 1} = \frac{120}{5} = 24 \text{ (km/h)}$$

Do skladů je 120 km a auta musí jet rychlostí 24 km/h.

MOZ 7 - I - 3

Čísla na obrázku 87 udávají počet ulic, kterými je možné dostat se na místo, na němž jsou napsána.

Všimněme si „zakroužkované“ křižovatky. Pripusťme, že do křižovatky vlevo od ní (označené *) vedou opravdu 4 ulice a do křižovatky pod ní (označené **) 6 ulic.

Kolik jich povede do zakroužkované křižovatky? Ulice do ní přijdou buď zleva, nebo zespodu. První vzniknou prodloužením ulic z „jednohvězdičkové křižovatky“ a jsou 4. Druhé vzniknou prodlou-

žením ulic z „dvojhvězdičkové křižovatky” a těch je 6. Dohromady $4 + 6 = 10$.

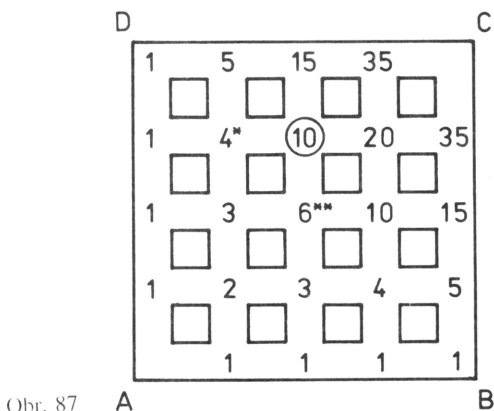
Podobně je to u všech křižovatek. Počet ulic, kterými je možné se do nich dostat, se rovná součtu ulic do křižovatky „vlevo” a „pod ní”. Každý se může přesvědčit sám. (Nejsnáze v blízkosti bodu A.)

Kdybychom čísla z obrázku zapsali tak, jako kdyby čtverec $ABCD$ visel zavěšený za bod A , dostali bychom část číselné tabulky známé z kombinatoriky pod názvem Pascalův trojúhelník. Čísla Pascalova trojúhelníku jsou tzv. kombinační čísla. Tomu, kdo zná kombinační čísla, ukážeme, jak tato úloha souvisí s kombinatorikou.

Každá ulice z A do B představuje lomenou čáru. Všechny tyto čáry jsou stejně dlouhé. Vždy se totiž skládají z 8 stejných úseků. Čtyřikrát se jde dopředu (D) a čtyřikrát vpravo (V). Každá cesta se dá zapsat pomocí 8 písmen. Například „horní cesta” vyznačená na obrázku 16 takto: $VDVDDVVD$, „dolní cesta” $VDVVDVDD$.

Počet cest do C se rovná počtu různých „slov” vytvořených ze čtyř písmen V a D .

Představme si teď 8 kuliček v řadě vedle sebe očíslovaných od 1 do 8. Každé „slovo” si znázorníme pomocí těchto kuliček. Vezme-me do ruky 1. kuličku. Jestliže slovo začíná písmenem V , kuličku vrátíme na místo, jestliže začíná písmenem D , dáme ji pryč. Potom vezmeme do ruky 2. kuličku a rozhodneme o jejím osudu podle



Obr. 87

druhého písmene atd. Z původních 8 kuliček zůstanou 4. Každé cestě tak odpovídá čtyřprvková podmnožina osmiprvkové množiny kuliček. Každé takové podmnožině jedna cesta z A do C .

Počet všech čtyřprvkových podmnožin osmiprvkové množiny se rovná kombinačnímu číslu $\binom{8}{4}$, tj. 70.

MOZ 7 - I - 4

Prvním řezem krychli rozpůlíme na dva hranoly s délkami hran 20 cm, 40 cm, 40 cm. Poloviny položíme na sebe a druhým řezem dostaneme 4 hranoly s délkami hran 10 cm, 40 cm, 40 cm. Třetím řezem rozpůlíme všechny vrstvy na 8 hranolů s délkami hran 10 cm, 20 cm, 40 cm. Čtvrtým řezem rozpůlíme najednou všechny tyto hranoly na 16 „komínů” s rozměry 10 cm, 10 cm, 40 cm. Z „komínů” dostaneme pátým řezem 32 dvojčtyřlů a šestým řezem 64 čtyřlů. Menším počtem řezů než 6 se úloha splnit nedá. Každá čtyřl má totiž 6 stěn. Na „řezání” čtyřlů, které nejsou na povrchu, je třeba 6 řezů.

Dají se ušetřit 3 řezy.

MOZ 7 - I - 5

Vždy se musí použít desky 5 m, 3 m, 1 m a 2 m dlouhé. Jsou 4 možnosti uložení.

MOZ 7 - I - 6

Za každou minutu se počet bakterií zdvojnásobí. Do čtvrtiny zaplněná zkumavka se za minutu zaplní do poloviny a za další minutu úplně. Čtvrtina zkumavky se tedy zaplní za 23 hodin 58 minut.

Poznámka. Ve skutečnosti by se bakterie po celých 24 hodin nemohly rozmnožovat stejným tempem. Za 24 hodin by jich totiž muselo být 2^{1440} . I kdyby se hmotnost jedné bakterie rovnala jen hmotnosti elektronu ($9 \cdot 10^{-31}$ kg), měla by zaplněná zkumavka větší hmotnost, než je odhadovaná celková hmotnost pozorovaného vesmíru.

a)

2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

V každém políčku je vepsán počet tahů jezdcem, které se dají provést. V každém rohovém čtverci 4×4 polí je dohromady 84 tahů, na celé šachovnici čtyřikrát více. Jezdec tedy může táhnout 336krát.

b) Tahy dámy jsou buď tahy střelce, nebo věže. Napřed spočítáme všechny tahy věže. V libovolném poli je možné s věží provést 7 tahů vodorovně (doleva nebo doprava) a 7 tahů svisle (nahoru – dolů).

Dohromady je to $64 \cdot 14$, tedy 896 tahů věží.

7	7	7	7	7	7	7	7
7	9	9	9	9	9	9	7
7	9	11	11	11	11	9	7
7	9	11	13	13	11	9	7
7	9	11	13	13	11	9	7
7	9	11	11	11	11	9	7
7	9	9	9	9	9	9	7
7	7	7	7	7	7	7	7

Počet tahů střelcem je vepsán v každém políčku. Na celé šachovnici je to 560 tahů střelcem.

$$896 + 560 = 1\,456$$

Dáma má na šachovnici 1 456 tahů.

MOZ 7 - I - 8

a) Křižovatky s lichým počtem ulic nemohou být uvnitř trasy. Každý řidič má na své trase dvě křižovatky, z nichž vycházejí tři „jeho“ ulice. Tyto křižovatky (H a 8) mohou být jen na začátku nebo na konci trasy. Jakmile tedy řidiči vyjedou od hydrantu, musí skončit na křižovatce 8.

b) Jakmile ulici H8 bude kropit strýc Fanda, budou trasy obou řidičů obsahovat pouze křižovatky se sudým počtem ulic. Když tedy do některé křižovatky vjedou, mohou z ní i vyjet. V křižovatce, v níž jízdu začnou, musí jízda i skončit.

c) Trasa otce např.: H, 1, 9, 10, 11, 12, 11, 9, 12, 7, 8, 9, H.
Trasa strýce Fandy např.: H, 1, 2, 3, 4, 2, H, 4, 5, 6, 4, 8, 6, 7, 8, H.

MOZ 7 - II - 1

	Vyjelo	Zůstalo na druhém břehu	Vrátilo se	Čekalo na převoz
1.	2 bojovníci, 7 zajatců	1 bojovník, 7 zajatců	1 bojovník	3 bojovníci, 27 zajatců
2.	2 bojovníci, 7 zajatců	1 bojovník, 7 zajatců	1 bojovník	2 bojovníci, 20 zajatců
3.	1 bojovník, 7 zajatců	6 zajatců	1 bojovník, 1 zajatec	2 bojovníci, 13 zajatců
4.	2 bojovníci, 7 zajatců	1 bojovník, 7 zajatců	1 bojovník	1 bojovník, 7 zajatců
5.	2 bojovníci, 7 zajatců			

MOZ 7 - II - 2

Na to, aby zalil první záhon, musí zahradník ujít:

$$14 + 16 + 2,5 + 16 + 2,5 + 14 = 65 \text{ (m)}$$

Při zalévání druhého záhonu ujde:

$$14 + 2,5 + 16 + 2,5 + 16 + 2,5 + 2,5 + 14 = 65 + 5 + 70 \text{ (m)}$$

Při zalévání každého dalšího záhonu je třeba ujít o 5 m více než při zalévání předcházejícího. Máme tedy posloupnost:

$$65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, \dots; 65 + 5 \cdot 29 = 210$$

Součet členů této posloupnosti je:

$$\frac{(65 + 210) \cdot 30}{2} = 4\,125 \text{ m}$$

Zahradník ujde při zalévání zahrady 4,125 km.

Poznámka. Jak sčítat členy takové posloupnosti, je naznačeno v řešení MOZ 6 - I - 4, I. ročník.

MOZ 7 - II - 3

Počet výrobků je celé číslo. Počet výrobků vyrobených prvním soustružníkem je dělitelný čísly 5, 6, 7, to znamená, že je dělitelný číslem 210. Počet výrobků vyrobených druhým soustružníkem je dělitelný 3, 4, 11, to znamená, že i číslem 132.

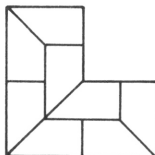
$$210 + 132 = 342 < 450$$

Snadno se přesvědčíme, že větší násobky 210 a 132 úloze nevyhovují.

Plánované výkony soustružníků byly 210 a 132 výrobků.

MOZ 7 - II - 4

Řešení je na obrázku 88.



Obr. 88

3. ROČNÍK MOZ ŠKOLNÍ ROK 1982/1983

Kategorie MOZ 5

MOZ 5 - I - 1

Musíme vybrat 10 pastelek. Kdybychom vybrali jen 9, mohlo by mezi nimi být 7 červených a jen 2 modré.

MOZ 5 - I - 2

Aby hledané číslo bylo po odečtení 7 dělitelné 10, musí mít na konci sedmičku.

Hledané číslo se rovná součtu čísla 34 a čísla, které má hledané číslo na místě desítek.

Na místě desítek může být jen 3 a hledané číslo je 37.

MOZ 5 - I - 3

Je-li součet dvou čísel 3krát větší než jejich rozdíl, musí být větší z nich dvojnásobkem menšího. Potom zkusmo pro přirozená čísla najdeme dvojici 6, 3.

(Zadání vyhovuje i dvojice 0, 0.) Jiné dvojice nevyhovují.

MOZ 5 - I - 4

Když hledaná čísla mají být beze zbytku dělitelná i číslem 5, musí být na místě jednotek 0 nebo 5.

$$\square 97 \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}$$

Po vyzkoušení možností 1 970, 1 975, 2 970, ..., 9 970, 9 975 zjistíme, že vyhovují čísla 2 970 a 6 975.

(Řešení urychlíme, známe-li kritérium dělitelnosti devíti.)

MOZ 5 - I - 5

Kůň, který skáče po šachovnici, mění barvu pole. Z bílého skáče na černé, z černého na bílé. Náš kůň stojí na bílém poli $a4$ a má se dostat na černé pole $e1$. Ujde tedy cestu $b, \check{c}, b, \check{c}, b, \check{c}, \dots, b, \check{c}$.

Tuto cestu musí tvořit stejný počet bílých a černých polí. Na polámané šachovnici je 8 bílých a 9 černých polí. Kůň tedy nemůže přejít přes všechna pole.

2. úvaha. Kůň stojí na bílém poli. Jeho 1., 3., 5., ... skok končí na černém poli. Jeho 15., předposlední skok končí na černém poli, proto nemůže jít na poslední, černé pole.

MOZ 5 - I - 6

1. ř e š e n í. Provedeme rozklady čísla 11 na součet. Nejmenší činitel je 2, neboť 1 už součin neovlivní. Po vyzkoušení všech možností největší součin 54 dává rozklad $3 + 3 + 3 + 2$.

2. ř e š e n í. Hledání si usnadníme, jestliže si uvědomíme, že větší součin dostaneme tehdy, rozkládáme-li čísla rovnoměrně. Například $11 = 6 + 5$ je výhodnější než $11 = 7 + 4$ nebo $11 = 8 + 3$. Podobně $6 = 3 + 3$ je výhodnější než $6 = 4 + 2$ a pro rozklad 5 je nejvýhodnější $5 = 3 + 2$. Tedy

$$11 = 6 + 5 = 3 + 3 + 3 + 2.$$

Největší možný součin je 54.

MOZ 5 - I - 7

Řešení je na obrázku 89.



Krychli může znázorňovat pohled d.

Jestliže pruty svazoval po 9, chyběl mu 1. Prutů mohlo být:
 $9 \cdot 6 - 1 = 53$ nebo $9 \cdot 7 - 1 = 62$ nebo $9 \cdot 8 - 1 = 71$ nebo
 $9 \cdot 10 - 1 = 89$ nebo $9 \cdot 11 - 1 = 98$.

Jestliže pruty svazoval po 7, přebýval mu 1. Prutů mohlo být:
 $7 \cdot 8 + 1 = 57$ nebo $7 \cdot 9 + 1 = 64$ nebo $7 \cdot 10 + 1 = 71$ nebo
 $7 \cdot 11 + 1 = 78$ nebo $7 \cdot 12 + 1 = 85$ nebo $7 \cdot 13 + 1 = 92$ nebo
 $7 \cdot 14 + 1 = 99$. Oběma podmínkám vyhovuje právě počet 71.

Svatopluk měl 71 prutů.

1. Body A, D zvolíme libovolně.



2. B je od D vzdáleno 3 km – jsou dvě možnosti, ale vzhledem k tomu, že B je od A vzdáleno 4 km, vyhovuje jen jedna.

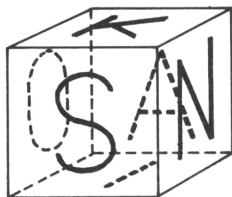
3. Podobně pro C – od B je vzdáleno 2 km, od D 5 km. Jediné řešení je vyznačeno na obrázku 90. Vzdálenost AC je 6 km.

MOZ 5 - II - 3

Rozhovor probíhal v roce 1982. Uvážíme-li reálnou délku lidského života, v roce 1982 mohlo být tolik let, jako ukazují poslední číslice roku narození, jen člověku 41letému ($82 : 2 = 41$) a člověku 91letému ($182 : 2 = 91$). Protože není pravděpodobné, aby 91letá žena měla 10letého syna a 41letý muž 10letého vnuka, je to možné jen tak, že Tomášově matce bylo 41 let a Petrovu dědovi bylo 91 let.

MOZ 5 - II - 4

Z krychlí položených na stolku umíme zjistit, jak krychle vypadají (jaká písmena jsou na protilehlých stěnách). (Obr. 91.)



Obr. 91

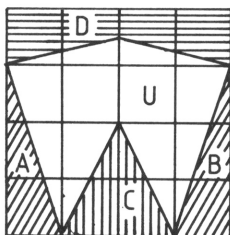
Proti S je A , proti K je I , proti N je O .
Žáci si na krychlích přečetli "SIKANON".

Kategorie MOZ 6

MOZ 6 - I - 1

Obsah útvaru U dostaneme, jestliže od obsahu čtverce 4×4 odečteme obsahy útvarů A , B , C , D (obr. 92).

Obsah útvaru A se rovná obsahu útvaru B, čili se rovná polovině obsahu obdélníku 3×1 . Obsah A a B dohromady se rovná 3 jednotkovým čtvercům (j. č.).



Obr. 92

Podobně obsah C se rovná 2 j. č.

Obsah D se rovná $\frac{3}{4}$ obsahu obdélníku 4×1 (proč?), obsah D se tedy rovná 3 j. č.

Obsah útvaru U se rovná $4 \cdot 4 - 3 - 2 - 3 = 8$ (j. č.). Protože obsah 1 j. č. je 4 cm^2 , je obsah útvaru U 32 cm^2 .

MOZ 6 - I - 2

xyx je dělitelné čtyřmi, x tedy musí být sudé.

xyx je dělitelné třemi, ciferný součet $x + 2y$ musí být dělitelný třemi.

Protože x je sudé, musí být $x + 2y$ sudé. Z toho $x + 2y$ může být 6, 12, 18, 24. Provéříme všechny možnosti; pro $y = 1, 2, 3, \dots, 9$ vypočítáme x a zkusíme, jestli je xyx dělitelné čtyřmi. Úloze vyhovují čísla 828, 636, 252, 696, která jsou dělitelná čtyřmi, a jim odpovídající čísla 282, 363, 525, 969, která jsou dělitelná třemi.

MOZ 6 - I - 3

Budík, který jde o 6 minut napřed, bude ukazovat přesný čas až tehdy, když se posune o 12 hodin, tj. o 720 minut. To se stane za $720 : 6 = 120$ (dní).

Budíky ukazovaly stejný čas opět 10. června 1982 v 8.00 h.

MOZ 6 - I - 4

K	1	1	1	1
1	2	3	4	5
1	3	6	10	15
1	4	10	20	35
1	5	15	35	$C = 70$

Čísla v okénkách tabulky ukazují, kolika způsoby je možné se do daného okénka dostat.

Chceme-li přechíst slovo kotrmelec, musíme se dostat z okénka K do okénka C .

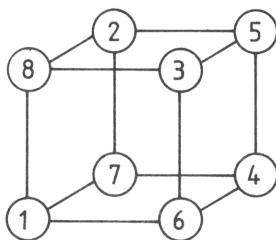
Slovo *KOTRMELEC* můžeme v tabulce přechíst 70krát.

MOZ 6 - I - 5

Trojúhelník je možné složit z 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91 koleček. Podle podmínek úlohy čtverec a trojúhelník je možné složit jen z 36 koleček.

MOZ 6 - I - 6

Ano, možností je víc. Jedna z nich je na obrázku 93.



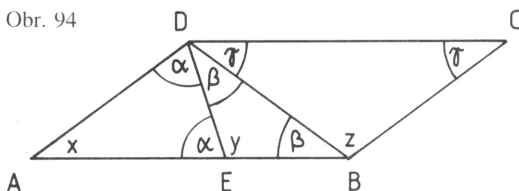
Obr. 93

MOZ 6 - I - 7

Na topolu a na kravině bylo původně 35 vran. Když 5 vran přeletělo z topolu na střechu a 5 vran ze střechy odletělo, bylo na topolu a na střeše dohromady 30 vran. Na topolu jich však bylo 2krát víc než na střeše. Na topolu tedy bylo potom 20 a na střeše 10 vran. V jednotlivých hejnech bylo na začátku 25 a 10 vran.

MOZ 6 - I - 8

Obr. 94



1. ř e š e n í. Jestliže si označíme velikosti úhlů rovnoramenných trojúhelníků podle obrázku 94, potom $x = 180^\circ - 2\alpha$, $y = 180^\circ - 2\beta$, $z = 180^\circ - 2\gamma$.

Ale úhel AEB je přímý, takže $y = 180^\circ - \alpha$, z čehož $\alpha = 2\beta$. Z vlastností rovnoběžníku víme, že $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle ABC|$, takže platí $\alpha + \beta + \gamma = \beta + z$, z čehož $z = \alpha + \gamma$.

Ze součtu úhlů trojúhelníku BCD plyne:

$$\gamma + \gamma + z = 3\gamma + \alpha = 180^\circ.$$

Z vlastností rovnoběžníku $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle DCB|$, z čehož $x = \gamma$, tj. $180^\circ - 2\alpha = \gamma$.

Máme dva vztahy pro α a γ :

$$(1) \quad 3\gamma + \alpha = 180^\circ$$

$$(2) \quad 180^\circ - 2\alpha = \gamma$$

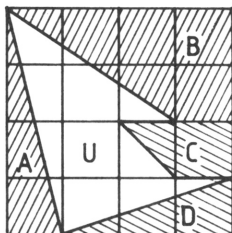
Dosadíme za γ do 1. rovnice:

$$3 \cdot (180^\circ - 2\alpha) + \alpha = 180^\circ \text{ a odtud } \alpha = 72^\circ, \gamma = 36^\circ.$$

2. (hezčí) řešení. Z vlastností střídavých úhlů platí: $\beta = \gamma$, $\alpha = \beta + \gamma$ a $x = \gamma$, z toho potom $\alpha = 2\gamma$. Potom z $\triangle AED$: $2\alpha + \gamma = 180^\circ$ a z předcházejícího $2\alpha + \gamma = 5\gamma = 180^\circ$. Odtud $\gamma = 36^\circ$, $\beta = 36^\circ$, $\alpha = 72^\circ$.

Rovnoběžník má úhly velikosti 36° a 144° .

MOZ 6 - II - 1



Obr. 95

$|A| = 2$ čtverečky, $|B| = 5$ čtverečků, $|C| = 1,5$ čtverečku, $|D| = 1,5$ čtverečku, $|U| = 16$ čtverečků.

$|U| = |C| - |A| - |B| - |D| = 16 - 10 = 6$ (čtverečků),
1 čtvereček = 4 cm^2 .

$|U| = 24 \text{ cm}^2$.

MOZ 6 - II - 2

Nejmenší společný násobek 10 a 14 je 70. Současně tedy letěla znovu za 70 dní.

Leden 31 dní

Únor 28 dní

59 dní, zbývá 11 dní

Nejbližší den, kdy spolu znovu letěla, byl 12. březen 1983.

MOZ 6 - II - 3

Ciferný součin 6:

a) $1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot 6$ nevyhovuje, protože součet je vždy víc než 6.

b) $1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$ vyhovuje, čili vyhovuje trojciferné číslo s číslicemi 1, 2, 3.

Jiná možnost není.

Řešením jsou čísla 123, 132, 213, 231, 312, 321.

MOZ 6 - II - 4

Experimentováním je možné zjistit, že přidáním dalších dvou řádků k trojúhelníku, v němž počet koleček je n -násobkem počtu koleček spodního řádku, se poměr změní. Počet koleček nového trojúhelníku se bude rovnat $(n + 1)$ násobku počtu koleček spodního řádku.

a) Počet koleček v trojúhelníku bude 4krát větší než počet koleček ve spodním řádku, bude-li trojúhelník mít 7 řádků.

b) ... 9 řádků.

c) ... 199 řádků.

Obecné tvrzení je možné formulovat i takto:

Aby trojúhelník měl n -krát více koleček než jeho poslední řádek, musí mít $2n - 1$ řádků.

Kategorie MOZ 7

MOZ 7 - I - 1

Z rozdílu $DA - A = DF$ vyplývá, že $F = \emptyset$ ($\emptyset$ = nula). Protože $DE + D\emptyset = CE$, musí platit: $C = 2 \cdot D$ a současně $D < 5$. Necht' $D = 1$, potom $C = 2$ a algebrogram vypadá takto:

$$\begin{array}{r} AB : 2 = 1E \\ - \quad \times \quad + \\ 1A - A = 1\emptyset \\ \hline 21 + H = 2E \end{array}$$

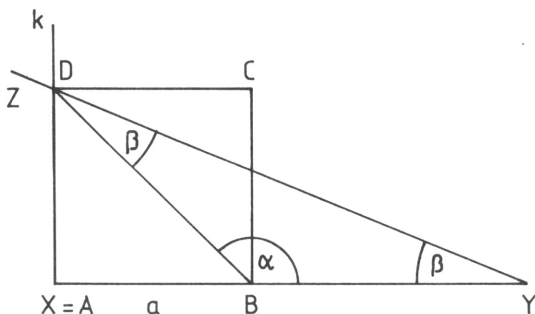
Z rozdílu $AB - 1A = 21$ vyplývá $A = 3, B = 4$. Po dosazení a výpočtech dostáváme $E = 7, H = 6$. Tedy:

$$\begin{array}{r} 34 : 2 = 17 \\ - \quad \times \quad + \\ 13 - 3 = 10 \\ \hline 21 + 6 = 27 \end{array}$$

Když $D \geq 2$, potom $C \geq 4$, potom $A \geq 8$, potom $C \cdot A \geq 32$, ale $H \neq 32$. Další řešení neexistuje.

MOZ 7 - I - 2

a) *Rozbor* (obr. 96):



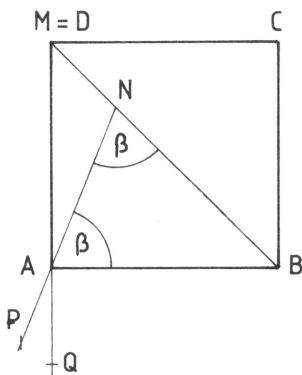
Obr. 96

Trojúhelník YDB je rovnoramenný. Úhly při vrcholech Y a D jsou shodné, označili jsme je β . Když $\alpha = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, $\beta = 22,5^\circ$. $\triangle XYZ$ umíme sestrojit (*usu*), potom už známe $|a| = |XD|$.

Konstrukce

1. Sestrojíme přímku k : $k \perp XY$; $X \in k$.
2. Sestrojíme polopřímku YZ : $|\sphericalangle XYZ| = 22,5^\circ$.
3. Sestrojíme bod $D \in k \cap YZ$.
4. Sestrojíme čtverec $ABCD$, bod $A = X$.

b) *Rozbor* (obr. 97):



Obr. 97

Trojúhelník ANB je rovnoramenný, úhly při vrcholech A , N jsou stejně velké, $\beta = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67,5^\circ$.

$\triangle MNA$ umíme sestrojit (*usu*), potom už známe $|a| = |MA|$.

Konstrukce

1. Sestrojíme polopřímku NP : $|\sphericalangle MNP| = 112,5^\circ$.
2. Sestrojíme polopřímku MQ : $|\sphericalangle NMQ| = 45^\circ$.
3. Sestrojíme bod $A \in MQ \cap NP$.
4. Sestrojíme čtverec $ABCD$, bod $D = M$.

MOZ 7 - I - 3

Označme věk Jendy j , Aničky a , Petra p . Z textu přímo sestavíme rovnice:

$$a = 2j$$

$$j + 3 = \frac{p + 3}{2}$$

$$p - 3 = 2 \cdot (a - 3)$$

Řešením je $j = 3$, $a = 6$, $p = 9$.

MOZ 7 - I - 4

Z textu zjistíme, že Adam může být nejlepší jen z Č (český jazyk) a M (matematika), David jen z M a F (fyzika). Protože David a Bohouš jsou nejlepší jen v M a F , Adam musí být nejlepší z Č. Z toho plyne, že Cyril je nejlepší z A (angličtina).

Adam je nejlepším přítelem fyzika a Cyril nejlepším přítelem Bohouše. Protože Bohouš nemůže mít dva nejlepší přátele, je nejlepší v M , a tedy David je nejlepší z F . Adam je nejlepší v Č, Boris v M , Cyril v A a David je nejlepší ve F .

MOZ 7 - I - 5

Procento neprospívajících žáků je 5. Neprospěli dva chlapci, tj. 2 žáci tvoří 5 % třídy. V celé třídě je potom 20krát více žáků, čili 40 žáků, z toho je 22 děvčat.

MOZ 7 - I - 6

Protože $52 - y \cdot z$ musí být dělitelné 5, může se rovnat jen 50, 45, 40, 35, ..., 15, 10, 5. Potom $y \cdot z$ musí být jedno z čísel 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47. Čísla 2, 7, 17, 37, 47 jsou prvočísla – nedají se rozložit na součin dvou čísel větších než 1.

Pro $y \cdot z$ zbývají jen možnosti: $12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$, $22 = 2 \cdot 11$, $27 = 3 \cdot 9$, $32 = 2 \cdot 16 = 4 \cdot 8$, $42 = 2 \cdot 21 = 3 \cdot 14 = 6 \cdot 7$.

Všechny možnosti jsou uvedeny v tabulce:

y	3	4	2	6	2	11	3	9	2	16	4	8	2	21	6	7	3	14
z	4	3	6	2	11	2	9	3	16	2	8	4	21	2	7	6	14	3

MOZ 7 - I - 7

Ze vzorce pro obsah trojúhelníku dostaneme rovnosti:

$$\frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2},$$

z nich $a \cdot v_a = b \cdot v_b = c \cdot v_c$, z toho $v_b = \frac{a}{b} \cdot v_a = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6$
a $v_c = \frac{a}{c} \cdot v_a = \frac{2}{4} \cdot 9 = 4,5$.

MOZ 7 - I - 8

První tři mužstva získala dohromady 15 bodů, což mohla získat nejméně v 8 zápasech. 3 mužstva v systému každý s každým (prá-
vě jeden zápas) odehrají 3 zápasy, 4 mužstva 6 zápasů, 5 mužstev
10 zápasů. V turnaji tedy muselo být aspoň 5 mužstev. Na poslední
dvě z nich zbývá 5 bodů, což je možné rozdělit $5 + 0$, $4 + 1$, $3 + 2$,
 $2 + 3$, ... Ale čtvrté musí mít nejvíce tři body a musí mít aspoň
tolik jako páté mužstvo. Jediná možnost rozdělení zbylých 5 bodů
je: čtvrté mužstvo 3 a páté 2 body. Kdyby v turnaji hrálo 6 mužstev,
sehrála by 15 zápasů, tj. mužstva by dohromady získala 30 bodů.
15 z nich získala první tři mužstva, zbytek by musela získat ostat-
ní. Mezi tři mužstva je možné rozdělit 15 bodů jen tak, že nejlepší
z nich získá aspoň 5 bodů. Ale nejlepší z nich může být jen na
4. místě, přitom by ale mělo více bodů než třetí mužstvo. V turnaji
tedy nemůže hrát 6 mužstev.

Na turnaji bylo 5 mužstev a poslední z nich získalo 2 body.

MOZ 7 - II - 1

Z druhého řádku vyplývá, že zápis druhé mocniny čísla E končí
stejnou číslicí E . Taková čísla jsou dvě (0 a 1 samozřejmě nevyho-
vují): $5 \times 5 = 25$, $6 \times 6 = 36$.

a) Nechť $E = 5$, potom $C = 2$ a algebrogram je možné částečně
vyplnit:

$$\begin{array}{r} A \times B = 2D \\ + \quad - \quad - \\ \hline 5 \times 5 = 25 \\ \hline F : G = 2 \end{array}$$

Z 3. sloupce vyplývá $D = 7$, a tedy $A \times B = 27$, ale číslo 27 je možné jen jedním způsobem rozložit na součin dvou jednociferných čísel: $27 = 3 \cdot 9$. Protože z 2. sloupce vyplývá, že $B > 5$, musí být $A = 3$, $B = 9$. Dostaneme:

$$\begin{array}{r} 3 \times 9 = 27 \\ + \quad - \quad - \\ 5 \times 5 = 25 \\ \hline F : G = 2 \end{array}$$

Ale potom $F = 8$ a $G = 4$. Algebrogramu tedy vyhovuje: $A = 3$, $B = 9$, $C = 2$, $D = 7$, $E = 5$, $F = 8$, $G = 4$.

b) Necht' $E = 6$, potom $C = 3$. Dostáváme:

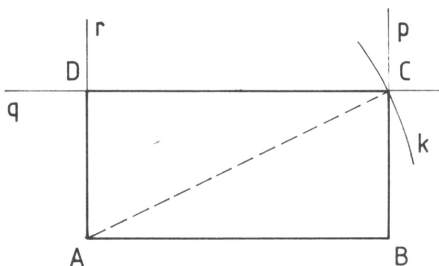
$$\begin{array}{r} A \times B = 3D \\ + \quad - \quad - \\ 6 \times 6 = 36 \\ \hline F : G = 3 \end{array}$$

Podle 3. sloupce by muselo $D = 9$, v 1. řádku by mělo být $A \times B = 39$. Ale číslo 39 se nedá rozložit na součin dvou jednociferných čísel ($39 = 3 \cdot 13$). $E = 6$ tedy nevyhovuje. Úloha má jedno řešení.

MOZ 7 - II - 2

Grafický součet úseček XY , ZT se rovná $(u + s) + (u - s) = 2u$, u tedy najdeme rozdělením $XY + ZT$ na polovinu. Z nalezené hodnoty u získáme $s = XY - u$.

Konstrukce obdélníku $ABCD$ (obr. 98):



Obr. 98

1. Sestrojíme AB : $|AB| = s$.
2. Sestrojíme přímku p : $B \in p, p \perp AB$.
3. Sestrojíme kružnici k : $k(A, u)$.
4. Sestrojíme bod C : $C \in k \cap p$.
5. Sestrojíme přímku q : $q \parallel AB, C \in q$.
6. Sestrojíme přímku r : $r \perp AB, A \in r$.
7. Sestrojíme bod D : $D \in q \cap r$.
8. $ABCD$.

MOZ 7 - II - 3

Nakreslíme si tabulku. Do 1. sloupce zapíšeme začáteční písmena jmen čtyř přátel, do 1. řádku začáteční písmena jmen zvířátek, která chovají. Jestliže chlapec nebo dívka určité zvířátko chová, napíšeme do příslušného okénka +, jestliže ne, –. Protože každé z dětí chová právě jedno zvířátko, bude v každém sloupci a v každém řádku tabulky právě jedno +. Z první podmínky vyplývá, že Bohouš nechová ptáčky, tj. v BKa a BPa je –. Z druhé podmínky vyplývá, že Cilka nechová papouška, tj. v CPa je –. Z třetí podmínky vyplývá, že Anička nechová ptáčky, tj. v AKa , APa je –. Potom ale v DPa musí být +, tj. Dana chová papouška, ale nic jiného, v DP , DK a DKa jsou –. Potom ale kanárka musí chovat Cilka, která už nemůže chovat ani pejska, ani kočku, tj. v CP a CK jsou –. Ze čtvrté podmínky vyplývá, že Anička nechová pejska. Potom ale pejska musí chovat Bohouš a Anička chová kočku.

	P	K	Ka	Pa
A	–	+	–	–
B	+	–	–	–
C	–	–	+	–
D	–	–	–	+

Úlohu je možné řešit i úvahou, bez pomoci tabulky.

MOZ 7 - II - 4

Označme x cenu velké čokolády a y cenu malé čokolády. Z podmínek úlohy dostáváme $3x + 5y = 72$. Odtud $3x = 72 - 5y$.

Když levá strana rovnice je dělitelná třemi, musí být i její pravá strana dělitelná třemi. Číslo 72 je dělitelné třemi, z toho $5y$ musí být dělitelné třemi, a tedy y musí být dělitelné třemi.

Zvolme y jako násobky tří a sestavme tabulku:

y	3	6	9	12
$x = \frac{72 - 5y}{3}$	19	14	9	4

Předpokládáme-li, že velká čokoláda stála více, vyhovují dvě řešení.

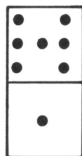
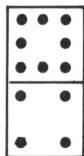
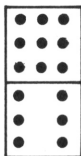
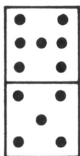
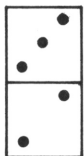
Velká čokoláda stála 19 Kčs a malá 3 Kčs, nebo velká 14 Kčs a malá 6 Kčs.

4. ROČNÍK MOZ ŠKOLNÍ ROK 1983/1984

Kategorie MOZ 4

MOZ 4 - I - 1

Rozdíl čísel určených jednotlivými kostkami domina tvoří posloupnost 1, 2, 3, 4, Rozdíl čísel na poslední kostce tuto posloupnost nesplňuje. (Obr. 99.)



Obr. 99 $3-2=1$

$7-5=2$

$9-6=3$

$8-4=4$

$7-1=6$

„Jiné řešení“ žáka: Každá kostka domina má v obou čtvercích v pravém horním a v levém dolním rohu bod. Pouze dolní čtverec poslední kostky to nesplňuje.

MOZ 4 - I - 2

a) (3, 0), (0, 3), (3, 3), (1, 5), (1, 0), (0, 1), (0, 4),

b) (0, 5), (3, 2), (0, 2), (2, 0), (2, 5), (3, 4).

První číslo v závorce znamená počet litrů vody ve třílitrové nádobě, druhé číslo počet litrů vody v pětilitrové nádobě.

MOZ 4 - I - 3

Délka lavice je 12násobkem délky „peromíry“ a 8násobkem délky „tužkomíry“. Možnosti pro peromíru jsou: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144; pro tužkomíru: 8, 16, 24, 32, 40, 48,

56, 64, 72, 80, 88, 96, 104, 112, 120, 128, 136, 144. Protože lavice je kratší než 150 cm a delší než 120 cm, vyhovuje jen společné číslo 144.

Peromíra měřila 12 cm, tužkomíra 18 cm a lavice 144 cm.

MOZ 4 - I - 4

Řešíme zkusmo.

Z 2. rovnosti vyplývá, že D je sudé číslo, a z 1. rovnosti, že $D \leq 12$.

Jestliže $D = 0$, potom z 1. rovnosti $E = 24$ a z 3. rovnosti $A + C + 24 = 24$, což nemůže být, protože potom i $A = 0$, i $C = 0$. Jestliže $D = 2$, potom z 1. rovnosti $E = 20$ a z 2. rovnosti $A = 11$, ale z 3. rovnosti je $11 + C + 20 = 24$, to také nemůže nastat. Stejně jestliže $D = 4$, dojdeme k rovnosti, která nemůže nastat. Jestliže $D = 6$, potom $E = 12$, $A = 9$, $C = 3$, $B = 15$, $F = 18$, $G = 21$. Pro žádné další číslo D rovnosti nevyhovují.

MOZ 4 - I - 5

Každý chlapec měl čepici, takže v šatně bylo 15 čepic a 18 kusů rukavic.

$18 : 2 = 9$, 9 chlapců tedy mělo rukavice.

$15 - 9 = 6$, 6 chlapců nemělo rukavice.

MOZ 4 - I - 6

Průměr 2,2 znamená součet známek 22. Zkusmo najdeme počet prvních, druhých a třetích míst:

dvakrát první místo	2 body,
čtyřikrát druhé místo	8 bodů,
čtyřikrát třetí místo	12 bodů,
dohromady 22 bodů, $22 : 10 = 2,2$.	

MOZ 4 - II - 1

Označme rovnosti v pořadí (1), (2), (3). Dvě dvojčíferná čísla mají součet vždy menší než 200, musí tedy být $B = 1$. V (3) ze součtu posledních číslic vidíme, že $D = 0$. V (1) ze součtu $B + C = 10$ a $B = 1$, tedy $C = 9$. Jestliže $C = 9$ a $D = 0$, pak (3) je $90 + 99 = 189$, to znamená, že $A = 8$.

Řešením je $A = 8$, $B = 1$, $C = 9$, $D = 0$.

MOZ 4 - II - 2

Úlohu můžeme řešit zkusmo. Například, jestliže byla Věrka v divadle 10krát, pak v kině byla $2 \cdot 10 + 2 = 22$ krát, součin je potom $10 \cdot 22 = 220$, ale $220 \neq 312$.

Jestliže byla v divadle 11krát, pak v kině byla $2 \cdot 11 + 2 = 24$ krát, součin potom je $11 \cdot 24 = 264$.

Jestliže Věrka byla v divadle 12krát, pak v kině byla $2 \cdot 12 + 2 = 26$ krát, součin potom je $12 \cdot 26 = 312$.

Věrka byla v divadle 12krát a v kině 26krát.

Kategorie MOZ 5

MOZ 5 - I - 1

Počet stran očíslovaných jednocíferným číslem (1 až 9) je 9. Zbývá $273 - 9 = 264$ číslic.

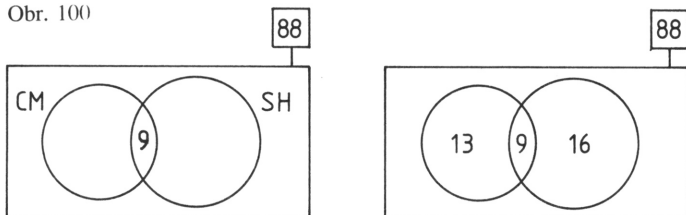
Počet stran očíslovaných dvojčíferným číslem (10 až 99) je 90, spotřebovaných je $90 \cdot 2 = 180$ číslic. Zbývá $264 - 180 = 84$ číslic, ze kterých jsou vytvořena trojčíferná čísla (100, 101, ...). Počet všech trojčíferných čísel použitých na očíslování stran učebnice musí být $84 : 3 = 28$. $9 + 90 + 28 = 127$.

Učebnice má 127 stran.

MOZ 5 - I - 2

Úlohu můžeme řešit pomocí množinového diagramu (obr. 100).

Obr. 100



Ze zadání úlohy víme:

všech žáků je	88
na CM nechodí	66
na SH nechodí	63
chodí právě na oba	9

Dále dostaneme:

na CM chodí	$88 - 66 = 22$
na SH chodí	$88 - 63 = 25$

Právě na jeden předmět tedy chodí:

na CM	$22 - 9 = 13$
na SH	$25 - 9 = 16$

a) 38 žáků se přihlásilo aspoň na jeden předmět,

b) 29 žáků se přihlásilo právě na jeden předmět.

MOZ 5 - I - 3

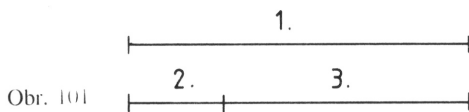
a) Právě jedna svítící žárovka signalizuje 7 různých situací.

b) Svítí-li nejvýše tři žárovky, mohou nastat případy, že nesvítí žádná, svítí právě jedna, právě dvě nebo právě tři. Žádná svítící žárovka signalizuje jednu situaci. Jedna svítící žárovka signalizuje 7 různých situací. Dvě svítící žárovky signalizují tolik různých situací, kolik je možné vybrat dvojic žárovek ze sedmi žárovek. Je to 21 dvojic.

Podobně právě tři svítící žárovky signalizují 35 různých situací.

Nejvýše tři svítící žárovky mohou signalizovat $1 + 7 + 21 + 35 = 64$ různých situací.

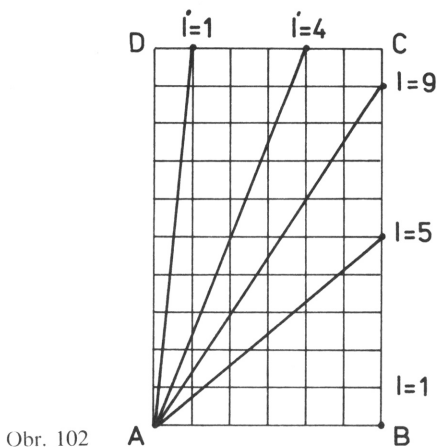
MOZ 5 - I - 4



První úsečka má stejnou délku jako dvě zbývající dohromady, první úsečka tedy má délku $104 : 2 = 52$ (mm). Třetí úsečka má délku jako 3 druhé úsečky dohromady. Třetí a druhá úsečka mají tedy délku jako čtyři druhé úsečky. $52 : 4 = 13$, druhá úsečka má délku 13 mm.

Délky úseček jsou 52 mm, 13 mm, 39 mm.

MOZ 5 - I - 5



Vrchol I	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Obsah obdélníku	60	60	60	60	60	60	60	60	60
Obsah trojúhelníku ABI	3	6	9	12	15	18	21	24	27
Obsah čtyřúhelníku	57	54	51	48	45	42	39	36	33
Číslo x	19	9	–	4	3	–	–	–	–

1. odvěsna	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2. odvěsna	6	6	6	6	6	6	6	6	6

Vrchol I'	1	2	3	4	5
Obsah obdélníku	60	60	60	60	60
Obsah trojúhelníku ABI'	5	10	15	20	25
Obsah čtyřúhelníku	55	50	45	40	35
Číslo x	11	5	3	2	–

1. odvěsna	1	2	3	4	5
2. odvěsna	10	10	10	10	10

Úloha má 8 řešení. Jsou vyznačena v tabulkách.

MOZ 5 - I - 6

a) Prodavačka vrátila kupujícímu 3 kusy mincí (1 pětikorunu a dvě dvoukoruny).

b) Prodavačka vrátila kupujícímu 90 kusů mincí (v desetihaléřích).

c) Prodavačka vrátila kupujícímu jednu pětikorunu, jednu dvoukorunu, jednu korunu, jeden padesátihaléř, jeden dvacetihaléř a tři desetihaléře (nebo dva dvacetihaléře a jeden desetihaléř).

d) Prodavačka vrátila např. jednu pětikorunu, jednu dvoukorunu, dva padesátihaléře a deset desetihaléřů; nebo jednu pětikorunu, jednu korunu, dva padesátihaléře, deset dvacetihaléřů. Jsou ještě další možnosti.

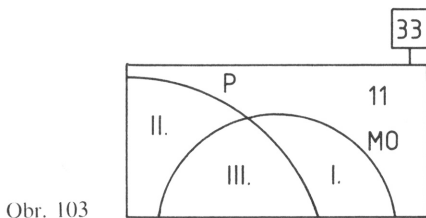
e) Prodavačka vrátila např. jednu pětikorunu, čtyři padesátihaléře, pět dvacetihaléřů, deset desetihaléřů. Jsou ještě další možnosti.

MOZ 5 - II - 1

Je možné utvořit $11 \cdot 15 = 165$ různých dvojic do týdenních služeb. Od 5. do 8. ročníku je $4 \cdot 40 = 160$ pracovních týdnů. Učitel tedy může určit služby během čtyř let tak, aby žádná dvojice neměla službu více než jednou.

MOZ 5 - II - 2

Situaci znázorníme na množinovém diagramu (obr. 103):



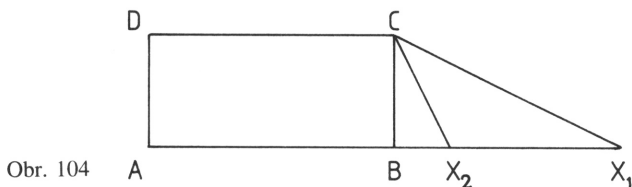
Zapíšeme počty prvků množin I, II, III do tabulky:

I	II	III	součet	
1	2	8	11	nevyhovuje podmínkám
2	4	16	22	vyhovuje podmínkám
3	6	24	33	nevyhovuje podmínkám
⋮				

Řešení: a) 16 žáků,
b) 6 žáků,
c) 17 žáků.

MOZ 5 - II - 3

Náčrt (obr. 104):



Když $S_{\square ABCD} = 60 \text{ cm}^2$, potom $S_{\triangle BX_1C} = 30 \text{ cm}^2$, a tedy $|BX_1| = 12 \text{ cm}$.

Když $S_{\square ABCD} = 60 \text{ cm}^2$, potom $S_{\triangle BX_2C} = 10 \text{ cm}^2$, a tedy $|BX_2| = 4 \text{ cm}$.

MOZ 5 - II - 4

Trojčiferná čísla vyhovující první podmínce úlohy jsou 126, 162, 129, 192, 169, 196. Poslední podmínce vyhovují jen čísla 169, 196.

169 ... strana čtverce 13, strany obdélníku 1, 169.

196 ... strana čtverce 14, strany obdélníku 1, 196; 2, 98; 4, 49; 7, 28.

Kategorie MOZ 6

MOZ 6 - I - 1

Úlohu řešíme zkusmo.

a) $5 \cdot (43 - 21) = 110$

b) $(54 + 3) \cdot 2 - 1 = 113$

MOZ 6 - I - 2

V představě je třeba pyramidu začít stavět od vrcholu. Na jednotlivá poschodí potřebujeme:

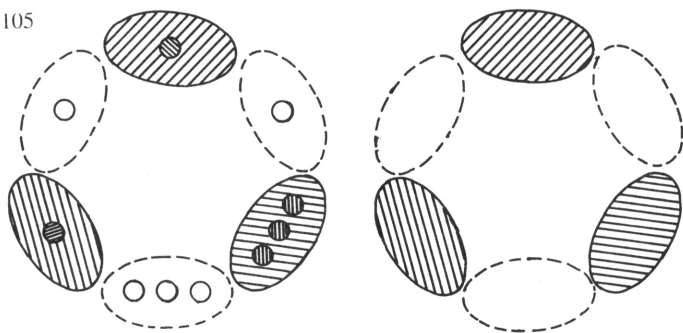
$$1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 5 + 7 \cdot 7 + 9 \cdot 9 + 11 \cdot 11 + 13 \cdot 13 = 455 \text{ krychlí.}$$

Ze 455 krychlí postavíme sedmiposchoďovou pyramidu, k vystoupení na vrchol potřebujeme vyjít 7 schodů.

MOZ 6 - I - 3

Skupina sousedních korálků stejné barvy tvoří jednu množinu. Aby bylo právě 6 obměn, musíme mít právě 3 neprázdné množiny červených a právě 3 neprázdné množiny bílých korálků a „navlékat“ tyto množiny střídavě (obr. 105).

Obr. 105



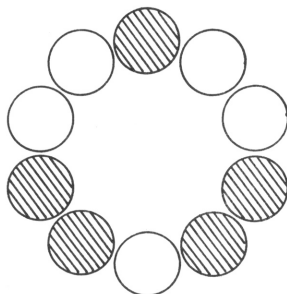
Sjednocením množin červených korálků dostaneme 5prvkovou množinu, sjednocením množin bílých korálků dostaneme také 5prvkovou množinu.

Protože $5 = 1 + 1 + 3$ nebo $5 = 1 + 2 + 2$, počty prvků v uvažovaných množinách červených korálků jsou 1, 1, 3 nebo 1, 2, 2. Totéž platí i pro počty prvků v množinách bílých korálků.

Je 8 různých řešení.

Řešení	<i>b</i>	<i>č</i>	<i>b</i>	<i>č</i>	<i>b</i>	<i>č</i>
1.	1	3	3	1	1	1
2.	1	3	1	1	3	1
3.	2	3	2	1	1	1
4.	2	3	1	1	2	1
5.	1	1	1	2	3	2
6.	1	1	3	2	1	2
7.	2	1	1	2	2	2
8.	2	1	2	2	1	2

b – počet prvků v množině bílých korálků, *č* – počet prvků množiny červených korálků. Poslední, 8. řešení je na obrázku 106.



Obr. 106

MOZ 6 - I - 4

1. řešení. Z obrázku b vyčteme, že tři misky mají stejnou hmotnost jako dva džbány, ale jeden džbán má hmotnost jako láhev s pohárem, tři misky tedy mají stejnou hmotnost jako dvě láhve s dvěma poháry.

Z obrázku c vidíme, že hmotnost láhve je stejná jako hmotnost poháru s miskou, tři misky tedy mají stejnou hmotnost jako dva poháry s dvěma miskami a dvěma poháry, což jsou dvě misky a čtyři poháry. Z toho vidíme, že jedna miska má stejnou hmotnost jako čtyři poháry.

Porovnáním obrázku d s obrázkem c vidíme, že k poháru musíme přidat poháry o hmotnosti misky.

* K poháru na obrázku d musíme přidat 4 poháry.

2. řešení. Označme džbán d , láhev l , pohár p , miskou m . Z b) $3m = 2d$, z a) $d = l + p$, tedy $3m = 2l + 2p$, ale z c) $l = p + m$, tedy $3m = 2 \cdot (p + m) + 2p = 4p + 2m$, odtud $m = 4p$. Porovnáním obrázků d a c vidíme, že k poháru na obrázku d musíme přidat 4 poháry.

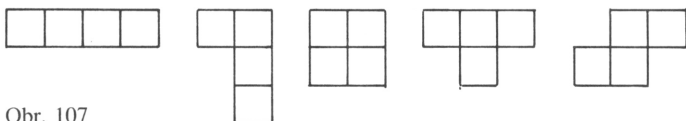
MOZ 6 - I - 5

$$141 - 9 = 132, 132 : 18 = 7, \text{zb. } 6.$$

141. schod je šestý schod mezi sedmým a osmým poschodím.

MOZ 6 - I - 6

Daný útvar má obsah rovnající se 24 jednotkám, jednotlivé části tedy budou mít obsah rovnající se $24 : 6 = 4$ jednotkám. Uvažujme útvary na obr. 107:

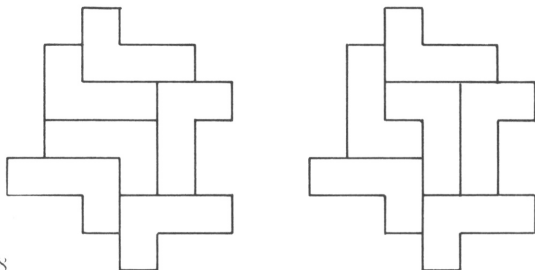


Obr. 107

Úvahou a experimentováním zjistíme, že úloze vyhovuje útvar



a úloha má dvě řešení (obr. 108a, b):

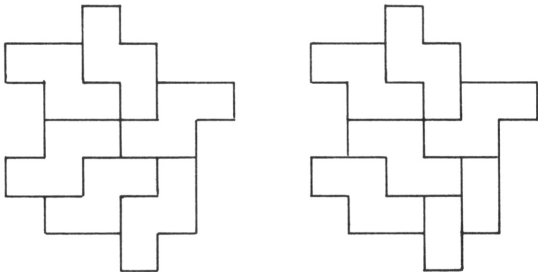


Obr. 108

a)

b)

nebo útvar  a úloha má také dvě řešení (obr. 109a, b):



Obr. 109

c)

d)

MOZ 6 - II - 1

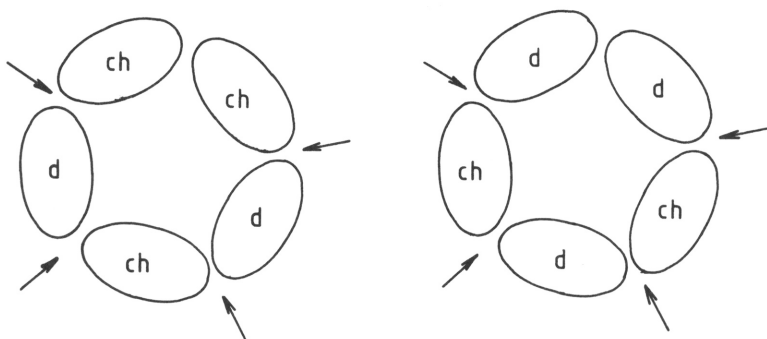
palec	ukazovák	prostředník	prsteník	malíček
1	2	3	4	5
9	8	7	6	
	10	11	12	13
17	16	15	14	
	18	19	20	21
25	24	23	22	
	26	27	... atd.	

K palci se při počítání Marie vrátí vždy po osmi číslech, proto dělíme $1\,988 : 8 = 248$, zb. 4. Všechna čísla, která při dělení osmi dávají zbytek 4, padnou na prsteník, číslo 1 988 tedy padne na prsteník.

MOZ 6 - II - 2

1. řešení. Kdyby seděli střídavě, bylo by právě 14 změn. Pro 5 změn potřebujeme vytvořit 5 podmnožin tak, aby prvky jednotlivých množin byli jen žáci jednoho pohlaví. Rozmístit tyto množiny je možné jen dvěma způsoby (obr. 110).

Obr. 110



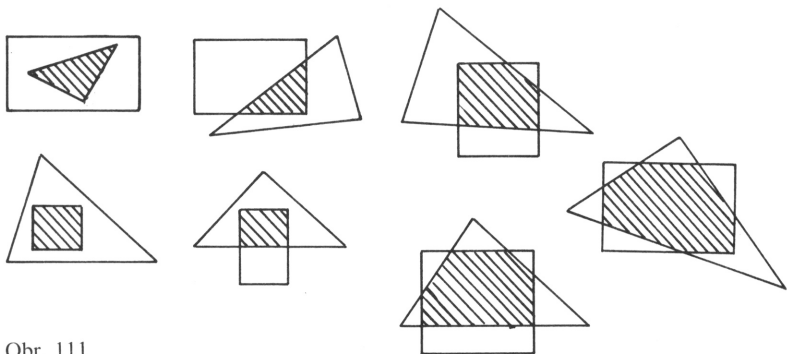
Obě situace mají jen 4 změny, tj. při čtyřech žácích sedí napravo žáci jiného pohlaví.

2. řešení. Jdeme do kruhu a počítáme „změny“. Startujeme od chlapce, přijdeme-li k děvčeti, bude počet změn lichý, když přijdeme k chlapci, tak sudý. To znamená, když se vrátíme k chlapci, od kterého jsme vyšli, je počet změn sudý, tedy různý od 5.

Úloha nemá řešení.

MOZ 6 - II - 3

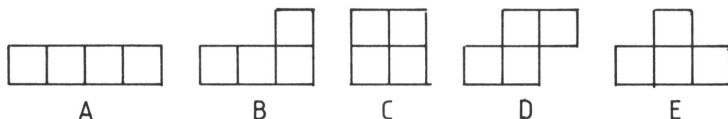
Průnik může být troj-, čtyř-, pěti-, šesti-, sedmiúhelník (obr. 111).



Obr. 111

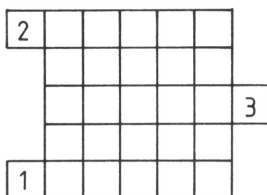
MOZ 6 - II - 4

Daný obrazec se skládá z 28 čtverečků, proto útvary, na které ho máme rozdělit, se budou skládat ze čtyř čtverečků. Mohou to být útvary z obrázku 112.



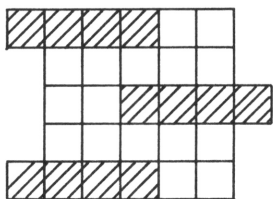
Obr. 112

Označme si čtverečky čísly 1, 2, 3 jako na obrázku 113. Potom velmi

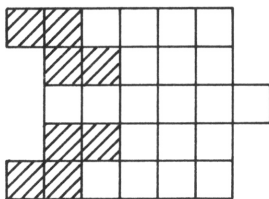


Obr. 113

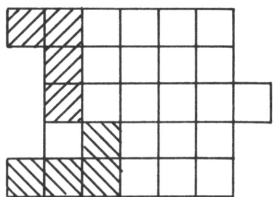
rychle usoudíme, že útvary A, B, C, D nevedou k řešení. Čtverečky 1, 2, 3 mají jedinou možnost pokrytí útvarem A, podobně čtverečky 1 a 2 útvarem D. Čtvereček 1 je možné pokrýt dvěma způsoby útvarem B, potom čtvereček 2 je možné pokrýt dvěma nebo jedním způsobem (obr. 114).



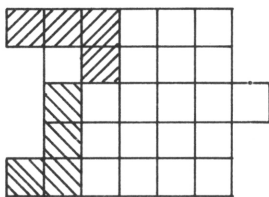
a)



b)



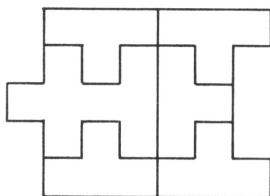
c)



d)

Obr. 114

Všechna naznačená pokrytí jsou nevyhovující z hlediska dalšího pokrývání daného obrazce, podobně i pro útvar C, kterým se čtvereček 1 vůbec nedá pokrýt. Zůstává jediný útvar  kterým je možné pokrýt daný obrazec, a to jediným způsobem jako na obrázku 115.



Obr. 115

Kategorie MOZ 7

MOZ 7 - I - 1

První dva kupující mohli koupit lístky maximálně za $2 \cdot 6 + 3 = 15$ Kčs. Třetí kupující tedy nakoupil lístky minimálně za 85 Kčs. Třetí kupující za jednu trojici různých lístků zaplatil 11 Kčs, musel tedy zaplatit 88 nebo 99 Kčs. 99 Kčs nevyhovuje.

1. návštěvník koupil lístky po 3 Kčs,
2. návštěvník koupil jeden lístek za 6 Kčs,
3. návštěvník koupil 24 lístků; 8 po 2 Kčs, 8 po 3 Kčs, 8 po 6 Kčs.

MOZ 7 - I - 2

Jeden z možných postupů je podle bodů 1 až 7.

1. Každý s každým hrál jeden zápas. Tabulka tedy musí být symetrická podle úhlopříčky. Doplníme na základě toho údaje v tabulce.

Tento krok „doplnění do symetrie” budeme provádět za každým nově nalezeným údajem.

2. Řádek C: výsledné skóre 3 : 1, je tedy možné ve sloupcích A, B doplnit : 0, : 0.

3. Řádek D: zápas D : A, D nemohl vyhrát (remizovat) nad A (musel by dát víc gólů než 5, v případě remízy 5, ale A dostal za celou soutěž jen 3 góly), D tedy zápas prohrál. Získal však 3 body, ve zbývajících dvou zápasech musel jednou vyhrát a jednou remizovat. Kromě toho D dostal za soutěž 7 gólů, na zbývajících zápasy tedy zbývají ještě dva góly. Mohl je dostat s B a s C vyhrát 1 : 0, potom by však s B musel hrát 2 : 2 – nerozhodně, ale B získal za celou soutěž jen 1 bod. Dva góly s C nemohl dostat, 1 gól tedy dostal s B a jeden s C.

4. Řádek B: B získal jen 1 bod – zápasy s C a D tedy musel prohrát – jediná možnost, aby se zachovalo skóre, je $B : C = 0 : 1$, $B : D = 1 : 2$.

5. Řádek C: vzhledem ke skóre je jediná možnost $C : A = 1 : 0$.

6. Řádek A: vzhledem ke skóre je jediná možnost $A : D = 5 : 1$.

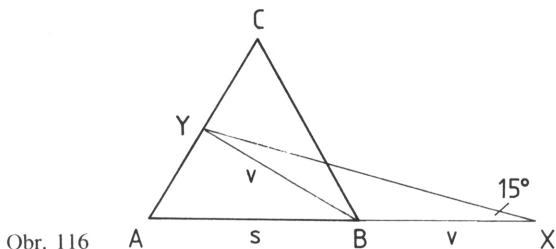
7. Doplníme body, skóre a pořadí.

	A	B	C	D	b	s	p
A	○	1 : 1	0 : 1	5 : 1	3	6 : 3	2.
B	1 : 1	○	0 : 1	1 : 2	1	2 : 4	4.
C	1 : 0	1 : 0	○	1 : 1	5	3 : 1	1.
D	1 : 5	2 : 1	1 : 1	○	3	4 : 7	3.

Úloha má jedno řešení.

MOZ 7 - I - 3

1. řešení vyplývá z náčrtu na obrázku 116.



Obr. 116

Trojúhelník BXY je rovnoramenný,

$$|\sphericalangle BXY| = \frac{1}{2}(180^\circ - 150^\circ).$$

Podle *usu* sestrojíme trojúhelník AXY . Další postup je zřejmý.

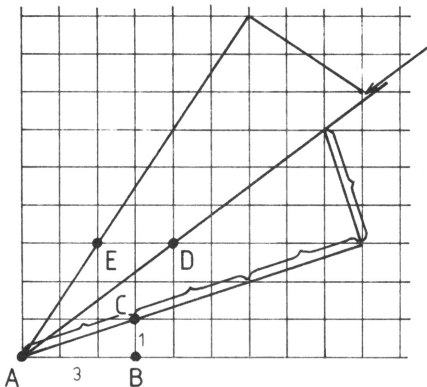
2. řešení. Ve všech rovnostranných trojúhelnících jsou strana a výška ve stejném poměru. Je tedy třeba rozdělit úsečku XY ve stejném poměru, v jakém je strana a výška v rovnostranném trojúhelníku. Další postup je zřejmý.

MOZ 7 - I - 4

Řešení je postaveno na intuitivním pojetí, že dva úhly určující „stoupání přímky“ jsou shodné, když na a dílků „stoupne“ každá z nich o b dílků.

V našem případě úhel CAB určuje stoupání „na tři díly stoupne o jeden díl“.

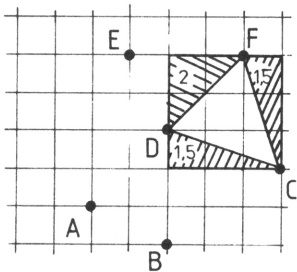
Důkaz, že $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle DAC|$ a $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle EAD|$, je zřejmý z obrázku 117.



Obr. 117

MOZ 7 - I - 5

Označme body v obrázku 118 A, B, C, D, E, F .



Obr. 118

Vypište všechny trojúhelníky určené těmito body; je jich 20. Čísla v závorkách udávají obsah.

ABC (2,5)	ABD (2)	ABE (3,5)	ABF (5)
	ACD (2,5)	ACE (7,5)	ACF (7,5)
		ADE (2,5)	ADF (1)
			AEF (4,5)
BCD (3)	BCE (6,5)	BCF (5)	
	BDE (1)	BDF (2)	
		BEF (6)	
CDE (2,5)	CDF (4)		
	CEF (4,5)		
DEF (3)			

10 % trojúhelníků má obsah 1, 10 % trojúhelníků má obsah 2,
10 % trojúhelníků má obsah 3.

MOZ 7 - I - 6

Jsou dvě řešení: 813 a 819. Jirka z daných údajů nemohl určit přesně číslo domu.

MOZ 7 - II - 1

Hledáme trojčiferné číslo xyz . Protože hledáme největší číslo dané vlastnosti, můžeme předpokládat $x \geq y \geq z$ (rozmyslete si proč).

Zvolme největší číslo x ; $x = 9$, potom aby platilo $9 \cdot y \cdot z$ je třetí mocninou, součin $y \cdot z$ se musí rovnat $3 \cdot 1^3$ nebo $3 \cdot 2^3$ nebo $3 \cdot 3^3$, větší být nemůže.

Nechť $y \cdot z = 3 \cdot 3^3$, potom $y = 9$, $z = 9$, avšak neplatí $9 + 9 + 9$ je prvočíslo.

Nechť $y \cdot z = 3 \cdot 2^3$, potom $y = 8$, $z = 3$, nebo $y = 6$, $z = 4$. $9 + 8 + 3$ není prvočíslo, $9 + 6 + 4 = 19$ je prvočíslo. Hledané číslo je číslo 964.

MOZ 7 - II - 2

Obdobně jako v přípravné úloze MOZ 7 - I - 5 určíme obsahy čtyřúhelníků:

$$S_{ABCD} = 7,5; S_{ABCE} = 6; S_{ACDE} = 7,5;$$

$$S_{BCDE} = 6; S_{ABDE} = 6.$$

MOZ 7 - II - 3

Z podmínek 1 až 5 vyplývá, že zákazníci koupili jednu, dvě a tři květiny. Na začátku prodeje bylo v prodejně $(k + 1)$, $(k + 2)$, $(k + 3)$ květin jednotlivých druhů (pořadí není podle ceny). Cena všech květin

$$c = a \cdot (k + 1) + b \cdot (k + 2) + c \cdot (k + 3),$$

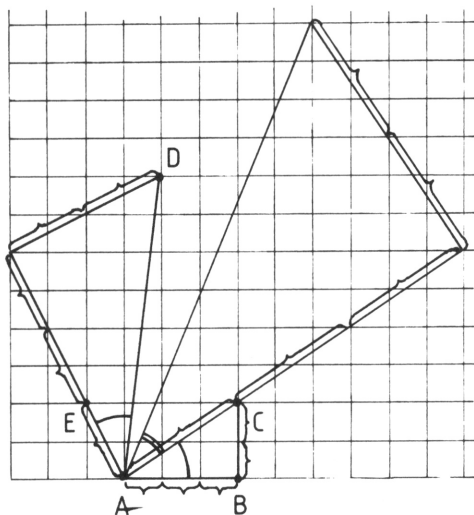
přičemž a , b , c jsou různé prvky množiny $\{2, 5, 6\}$. Výraz můžeme upravit:

$$\begin{aligned} c &= a \cdot (k + 2) - a + b \cdot (k + 2) + c \cdot (k + 2) + c = \\ &= (k + 2) \cdot (a + b + c) + (c - a) = \\ &= 13(k + 2) + (c - a) \end{aligned}$$

1 500 je číslo tvaru $13n + 5$. Pro žádnou volbu čísel a , c číslo $13(k + 2) + (c - a)$ není ve tvaru $13n + 5$.

Některý údaj prodavačky nebyl tedy pravdivý.

Řešení je vidět z obrázku 119.



Obr. 119

$$\begin{aligned} |\sphericalangle CAB| &= |\sphericalangle EAD| \\ |\sphericalangle CAB| &< |\sphericalangle DAC| \end{aligned}$$

5. ROČNÍK MOZ ŠKOLNÍ ROK 1984/1985

Kategorie MOZ 4

MOZ 4 - I - 1

Řešení každého případu je více. Pro orientaci uvádíme po jednom.

$$4 : 4 + 4 - 4 = 1$$

$$4 : 4 + 4 : 4 = 2$$

$$(4 + 4 + 4) : 4 = 3$$

$$(4 - 4) : 4 + 4 = 4$$

$$(4 \cdot 4 + 4) : 4 = 5$$

MOZ 4 - I - 2

Jestliže mají udělat co nejméně svarů, musí použít co nejvíce pětimetrových dílů, přičemž zbytek 67metrového potrubí musí být dělitelný číslem 3. Nejmenší takový zbytek je 12metrový. Je třeba použít 11 pětimetrových a 4 třímetrové díly.

MOZ 4 - I - 3

Přepravka s ovocem má sedmkrát větší hmotnost než prázdná přepravka. Uvažujeme-li prázdnou přepravku jako 1 díl, je přepravka s ovocem 7 dílů a ovoce 6 dílů hmotnosti.

Ovoce má hmotnost 30 kg, 1 díl je $30 : 6 = 5$.

Prázdná přepravka má hmotnost 5 kg.

MOZ 4 - I - 4

1. řešení. Úlohu řešíme zkusmo. Pokud by každý měl stejnou sumu, tato suma by byla zhruba 6 Kčs. Chlapci měli méně než průměr, děvčata více. Proto zkusme: Chlapci měli 5 Kčs, děvčata 7 Kčs. Nechť chlapců bylo 10, potom děvčat bylo 7 a měli dohromady $10 \cdot 5 + 7 \cdot 7 = 99$ Kčs. To je hodně, takže děvčat muselo být méně. Nechť chlapců je 11, potom děvčat je 6 a dohromady zaplatili $11 \cdot 5 + 6 \cdot 7 = 97$ Kčs.

U stánku bylo 11 chlapců a 6 děvčat.

2. řešení. Kdyby každý chlapec a každá dívka měli po 5 Kčs, měli by dohromady 85 Kčs. Zbývá $97 - 85 = 12$ Kčs. Každá dívka má o 2 Kčs více než chlapec, čili děvčat by mělo být $12 : 2 = 6$. Zkusme ještě, platí-li $11 \cdot 5 + 6 \cdot 7 = 97$.

U stánku bylo 6 děvčat, každé z nich mělo 7 Kčs, a 11 chlapců, každý z nich měl 5 Kčs.

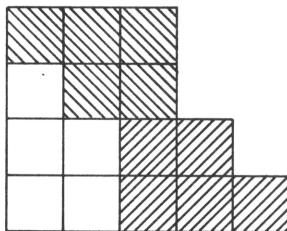
MOZ 4 - I - 5

Je třeba si uvědomit, že motocyklista jezdí stejně dlouho jako cyklisté. Cyklisté se potkají za 1 hodinu.

Motocyklista ujede 20 km.

MOZ 4 - I - 6

Řešení vidíme na obrázku 120.



Obr. 120

MOZ 4 - II - 1

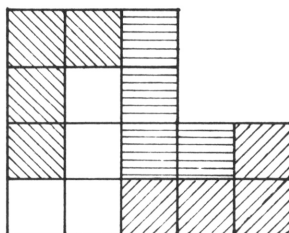
1. řešení. Řešíme zkusmo. Určíme počet dopisů a pohlednic (dohromady 12) a vypočítáme, kolik korun za ně zaplatíme. Je-li to více než 8 Kčs, musí být dopisů méně, je-li to méně než 8 Kčs, musí být dopisů více.

2. řešení. Kdyby poslal 12 pohlednic, zaplatil by 6 Kčs. Zaplatil však 8 Kčs, což je o 4 padesátihaléře více, takže poslal 4 dopisy.

Petr poslal 4 dopisy a 8 pohlednic.

MOZ 4 - II - 2

Řešení vidíme na obrázku 121.



Obr. 121

Kategorie MOZ 5

MOZ 5 - I - 1

a) Největší společný dělitel čísel 14, 35, 91 je číslo 7. Vzdálenost mezi stromy bude 7 metrů.

b) Celkový počet stromů v aleji bude $140 : 7 + 1 = 21$. V aleji musí vysadit $21 - 4 = 17$ stromů.

MOZ 5 - I - 2

Kdyby Jenda udělal oba nákupy, koupil by 3 lízátka a 3 perníky, za které by zaplatil 10,50 Kčs.

1 lízátko a 1 perník je jedna třetina z nákupu a jeho cena je $10,50 \text{ Kčs} : 3 = 3,50 \text{ Kčs}$.

Protože 2 lízátka a 1 perník (ze zadání úlohy) stály 4,50 Kčs, rozdíl $4,50 \text{ Kčs} - 3,50 \text{ Kčs} = 1 \text{ Kčs}$ určuje cenu 1 lízátka.

Lízátko stálo 1 Kčs a perník stál 2,50 Kčs.

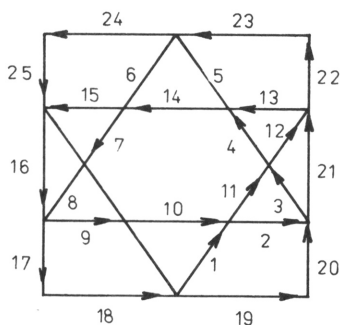
MOZ 5 - I - 3

Všimněme si křižovatky cestiček. Když vejde do křižovatky, musíme z ní i vyjít, a protože po každé cestě můžeme jít právě jednou, musí do každé křižovatky ústít sudý počet cest. Výjimku mohou tvořit jen dvě křižovatky, kde cesta začíná a kde končí. Aby se po cestách dalo jít, musí ústít do každé křižovatky sudý počet cest – potom končíme tam, kde jsme začali, neboť v právě dvou křižovatkách ústí lichý počet cestiček, a potom v jedné z nich začínáme a v druhé končíme cestu.

Odpověď pro obrázek A z obrázku 47 ze zadání úlohy zní: Zahradkář může vyjít z kteréhokoli uzlu na obvodě zahrady (např. obr. 122a).

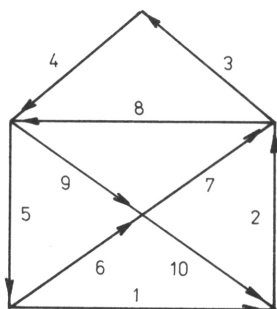
Obr. 47B ze zadání: Úloha nemá řešení.

Obr. 47C ze zadání: Zahradkář musí vyjít z uzlu, z kterého vycházejí 3 cesty (lichý počet). Například obr. 122b.



Obr. 122

a)



b)

MOZ 5 - I - 4

Hledáme všechny tříprvkové kombinace a sledujeme součet vzdáleností. Pozor, etapa je *okružní*. Vyhovují etapy:

Liberec – Ostrava – Brno – Liberec

$$340 + 165 + 239 = 744 \text{ km}$$

Bratislava – Brno – Praha – Bratislava

$$142 + 230 + 372 = 744 \text{ km}$$

MOZ 5 - I - 5

Řešení

$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \ 1 \\ + 1 \ 2 \ 1 \\ \hline 2 \ 4 \ 2 \end{array} \quad \text{nebo} \quad \begin{array}{r} 2 \ 4 \ 2 \\ + 2 \ 4 \ 2 \\ \hline 4 \ 8 \ 4 \end{array}$$

MOZ 5 - I - 6

Násobky čísel:

3 ... 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33

4 ... 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32

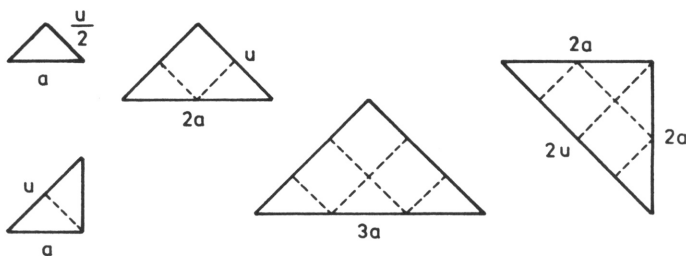
6 ... 6, 12, 18, 24, 30

8 ... 8, 16, 24, 32

Společný násobek čísel 3, 4, 6, 8 je číslo 24 a to je počet chlapců ve třídě. Další společný násobek je až 48. To je víc, než je žáků ve třídě.

Ve třídě je 24 chlapců.

MOZ 5 - II - 1



Obr. 123

Dohromady 56 trojúhelníků.

MOZ 5 - II - 2

1 kg hrušek stojí o 3 Kčs více než 1 kg jablek. Při zaměněném počtu kilogramů koupených jablek a hrušek by maminka zaplatila o 6 Kčs více, $6 : 3 = 2$, čili by koupila o 2 kg hrušek více než jablek. Při původním nákupu však maminka koupila o 2 kg více jablek než hrušek. 2 kg jablek stojí 10 Kčs. Počet kilogramů koupených hrušek a stejný počet kilogramů jablek stojí $62 \text{ Kčs} - 10 \text{ Kčs} = 52 \text{ Kčs}$. 1 kg jablek a 1 kg hrušek stojí $5 \text{ Kčs} + 8 \text{ Kčs} = 13 \text{ Kčs}$. Potom $52 : 13 = 4$.

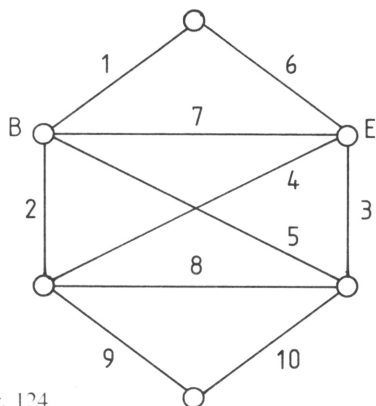
Maminka koupila 4 kg hrušek a 6 kg jablek.

MOZ 5 - II - 3

a) Může, např. 2, 1, 6, 7, 5, 3, 4, 8, 10, 9, 2.

b) Nemůže. Kdyby se nemusel vrátit na původní místo, byla by úloha řešitelná.

c) Když provazochodec přijde k libovolnému sloupu, musí od něj i odejít. U každého sloupu se musí sbíhat sudý počet lan. Výjimky mohou tvořit právě dva sloupy; kde provazochodec začíná a kde končí svou cestu (v našem případě B a E – obr. 124). V podmínce úlohy však je, že se provazochodec musí vrátit tam, odkud vyšel. Proto se u každého sloupu musí sbíhat sudý počet lan. To není splněno u sloupů B a E .



Obr. 124

MOZ 5 - II - 4

$A = 0$, potom $S + H = D$ a $D + D = R$, z čehož $D \in \{3, 4\}$,

$$\begin{array}{r} 103 \\ 203 \\ \hline 306 \end{array} \quad \begin{array}{r} 203 \\ 103 \\ \hline 306 \end{array} \quad \begin{array}{r} 104 \\ 304 \\ \hline 408 \end{array} \quad \begin{array}{r} 304 \\ 104 \\ \hline 408 \end{array}$$

nebo $A = 9$, potom $D \geq 5$ a $S + H = D - 1$.

$D = 5$ $D = 6$ $D = 7$ $D = 8$

$$\begin{array}{r} 195 \\ 395 \\ \hline 590 \end{array} \quad \begin{array}{r} 395 \\ 195 \\ \hline 590 \end{array} \quad \begin{array}{r} 196 \\ 496 \\ \hline 692 \end{array} \quad \begin{array}{r} 496 \\ 196 \\ \hline 692 \end{array} \quad \begin{array}{r} 197 \\ 597 \\ \hline 794 \end{array} \quad \begin{array}{r} 597 \\ 197 \\ \hline 794 \end{array} \quad \begin{array}{r} 298 \\ 598 \\ \hline 896 \end{array} \quad \begin{array}{r} 398 \\ 498 \\ \hline 896 \end{array} \quad \begin{array}{r} 498 \\ 398 \\ \hline 896 \end{array} \quad \begin{array}{r} 598 \\ 298 \\ \hline 896 \end{array}$$

Kategorie MOZ 6

MOZ 6 - I - 1

Odpověď zjistíme pokusem. Nejdříve, kolik by bylo třeba prvních členů „součtu“, aby jejich součet byl 111.

$$\begin{aligned}
 - \text{ číslo 111: } 1 + 2 + 3 + \dots + 12 + 13 + 14 &= 105 \\
 1 + 2 + 3 + \dots + 12 + 13 + 14 + 15 &= 120 \\
 105 < 111 < 120
 \end{aligned}$$

Vidíme, že součet 111 nemůžeme dostat. Podobně další čísla.

$$\begin{aligned}
 - \text{ číslo 222: } 1 + 2 + 3 + \dots + 18 + 19 + 20 &= 210 \\
 1 + 2 + 3 + \dots + 18 + 19 + 20 + 21 &= 231 \\
 210 < 222 < 231
 \end{aligned}$$

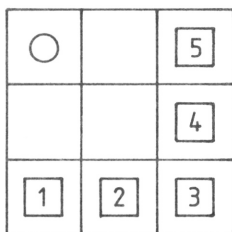
⋮

$$\begin{aligned}
 - \text{ číslo 666: } 1 + 2 + 3 + \dots + 33 + 34 + 35 &= 630 \\
 1 + 2 + 3 + \dots + 33 + 34 + 35 + 36 &= 666
 \end{aligned}$$

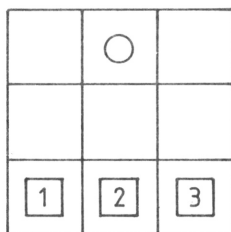
Ze součtu je třeba vzít 36 členů, jejichž součet je trojčíselné číslo a jehož všechny číslice jsou stejné. Je to číslo 666.

MOZ 6 - I - 2

Označme: 1. král ..., 2. král Pro polohu 1. krále (obr. 125a) je 5 možností umístění 2. krále. Kdyby 1. král byl v dalším rohu šachovnice, je zase 5 možností. V každém rohu 5, tj. dohromady $4 \cdot 5 = 20$ možností. Pro polohu 1. krále (obr. 125b) jsou tři možnosti umístění 2. krále. Stejnou polohu může 1. král zaujmout čtyřmi způsoby. Dohromady je tedy $4 \cdot 3 = 12$ možností.



a)



b)

Obr. 125

Jiná poloha 1. krále na šachovnici neexistuje, kdyby totiž stál ve středu šachovnice, druhý král by ho vždy ohrožoval. Na šachovnici s 3×3 poli je tedy možné postavit dva krále tak, aby se neohrožovali, $20 + 12 = 32$ způsoby.

MOZ 6 - I - 3

a) 2 dlaždice položené na sebe mají výšku 3 cm. Nejmenší rozměr krychle na paletě je nejmenší společný násobek čísel 15, 8, 3.

$$n(15, 8, 3) = 120$$

Krychle utvořená z dlaždic uložených na paletě bude mít hranu délky 120 cm.

b) V jedné vrstvě je uloženo $8 \cdot 15 = 120$ dlaždic. Vypočítáme počet vrstev: $120 : 1,5 = 80$.

V krychli je uloženo $120 \cdot 80 = 9\,600$ dlaždic.

MOZ 6 - I - 4

Z druhé rovnosti zadání plyne, že $\triangle = 1$, $\circ = 0$. Necht' $\triangle = 1$. Potom na levé straně první rovnosti zadání je zřejmě napsán součin dvou stejných dvojciferných čísel, která mají číslici na místě desítek rovnou 1 a jejich součin je trojciferné číslo, jehož číslice na místě set se rovná číslici na místě desítek. Této podmínce vyhovuje jen číslo 15.

Platí tedy: $\triangle = 1$, $\circ = 5$, $\square = 2$.

Necht' $\circ = 0$. Potom by ale číslo na pravé straně první rovnosti muselo končit 00, ale to není pravda. $\circ \neq 0$.

MOZ 6 - I - 5

Všechny možnosti:

P	V	K	A	R	K	V	P	A	R	R	V	K	A	P
P	A	K	V	R	K	A	P	V	R	R	A	K	V	P
P	V	R	A	K	K	V	R	A	P	R	V	P	A	K
P	A	R	V	K	K	A	R	V	P	R	A	P	V	K

Odpověď: a) Fotograf musel udělat aspoň 12 snímků.

b) Voloda byl vedle Petra 8krát.

c) Aljoša nebyl v prostředku ani jednou, protože by musel být vedle Volodi nebo Voloda by musel být na kraji.

d) Petr byl uprostřed 4krát.

e) Aljoša byl mezi Petrem a Karlem 8krát, z toho 4krát tak, že byl i vedle nich.

MOZ 6 - I - 6

1. řešení. Zvolíme si úsečku AB , z níž $\frac{1}{4}$ bude představovat počet ovcí čtvrté skupiny. Úsečka AB představuje počet ovcí stejných skupin po požadované úpravě. Čtvrtou skupinu určuje čtvrtina (jeden díl) úsečky AB , třetí čtvrtinu 16 dílů. K první skupině máme 4 ovce přidat a z druhé skupiny 4 ovce ubrat, v první a druhé skupině bude tedy dohromady 8 dílů. Ze všech skupin jsme utvořili $8 + 16 + 1 = 25$ dílů. Těchto 25 stejných dílů představuje počet 200 ovcí.

2. řešení.

4. skupina		x ovcí
2. skupina		$(4x + 4)$ ovcí
1. skupina		$(4x - 4)$ ovcí
3. skupina		$16x$ ovcí

Dohromady:

$$x + (4x + 4) + (4x - 4) + 16x = 200$$

$$25x = 200$$

$$x = 8$$

Ve čtvrté skupině je 8 ovcí, v třetí skupině je 128 ovcí, v druhé skupině je 36 ovcí a v první skupině je 28 ovcí.

MOZ 6 - II - 1

1. řešení. Úsudkem. Určíme polovinu ceny kola. Položku 660 korun rozdělíme na 4 části, $660 : 4 = 165$. Polovina ceny kola je tedy $165 \cdot 3 = 495$ Kčs. Kolo stojí $2 \cdot 495 = 990$ Kčs.

2. řešení

polovina ceny kola		x Kčs
třetina poloviny ceny kola		$\frac{x}{3}$ Kčs
dohromady		$x + \frac{x}{3}$ Kčs

$$x + \frac{x}{3} = 660$$

$$\frac{4}{3}x = 660$$

$$x = 495$$

Jízdní kolo stojí 990 Kčs.

MOZ 6 - II - 2

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$2 \cdot 4 = 8$$

$$3 \cdot 3 = 9$$

$$1 \cdot 2 = 2$$

$$2 \cdot 5 = 10$$

$$3 \cdot 5 = 15$$

$$1 \cdot 3 = 3$$

$$2 \cdot 6 = 12$$

$$3 \cdot 6 = 18$$

$$1 \cdot 4 = 4$$

$$1 \cdot 5 = 5$$

$$1 \cdot 6 = 6$$

$$4 \cdot 4 = 16$$

$$5 \cdot 5 = 25$$

$$6 \cdot 6 = 36$$

$$4 \cdot 5 = 20$$

$$5 \cdot 6 = 30$$

$$4 \cdot 6 = 24$$

$$6 + 3 + 3 + 3 + 2 + 1 = 18$$

Při házení dvěma hracími kostkami je možné dostat 18 různých součinů.

MOZ 6 - II - 3

V sadu je 9 řad po 10 stromcích. Má-li být mezi řadami meze-
ra 120 cm, můžeme ponechat řady, jejichž vzdálenost je násobkem
120. Tedy 1., 5. a 9. řada (jsou od sebe vzdáleny 360 cm). Jestli-
že má být v řadě mezi stromky mezera 120 cm, můžeme ponechat
stromky, jejichž vzdálenosti jsou násobkem 120. Tedy 1., 4., 7. a 10.
stromek. Takže můžeme ponechat 3 řady po 4 stromcích, dohromady
12 stromků.

V novém sadu bude dohromady 7 řad po 7 stromcích, tj. 49
stromků. Zbývá tedy vysadit ještě $49 - 12 = 37$ stromků. Zbývá vysa-
dit 4 nové řady po 7 stromcích a ve 3 řadách doplnit po 3 stromcích,
dohromady $4 \cdot 7 + 3 \cdot 3 = 37$.

MOZ 6 - II - 4

Z vlastnosti sčítání vyplývá, že $A = 0$, $Y = 5$, $H = 1$, $1 < B < 5$, $R > 5$ ($R + R \dots$ sčítání s přechodem přes desítku). Vyzkoušíme všechny možnosti pro B a R . Vyloučíme případy, kdy pro různá písmena vyjde stejná číslice.

Zbývají tedy 4 řešení:

6 520	8 520	8 530	6 540
<u>6 520</u>	<u>8 520</u>	<u>8 530</u>	<u>6 540</u>
13 040	17 040	17 060	13 080

Kategorie MOZ 7

MOZ 7 - I - 1

Označíme si jednotlivé sloupce příkladu:

f)	e)	d)	c)	b)	a)
	P	S	$\acute{I}$	C	I
	P	S	$\acute{I}$	C	I
	P	S	$\acute{I}$	C	I
	H	A	F	A	N
				N	I

$I + I + I = I$, tedy $I \in \{0, 5\}$. Ve sloupcích b), e) nastává přechod přes desítku, tedy

$C \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $P \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Jestliže $I = 0$, sčítání se rozpadne na dvě části.

$C + C + C = AN$, tedy $A \in \{1, 2\}$, $PS + PS + PS = HAF$, tedy $H \in \{1, 2\}$. Nechť $A = 1$, potom $H = 2$. Potom $PS = 21F : 3$, tedy $P = 7$. Tedy

7	S	0	C	0
7	S	0	C	0
7	S	0	C	0
2	1	F	1	N
				0

$C, F, S, N \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $S = 3$, současně $F = 9$; $C = 6$ a současně $N = 8$. Tedy:

7	3	0	6	0	
7	3	0	6	0	
7	3	0	6	0	
2	1	9	1	8	0

Nechť $A = 2$, potom $H = 1$. Potom $P + P + P = 12$, z čehož $P = 4$. Z rovnosti $S + S + S = F$ vyplývá, že $S = 3$, $F = 9$, jiná možnost pro S a F není. Potom pro N vyhovují pouze číslice 1 a 4 a to nemůže být.

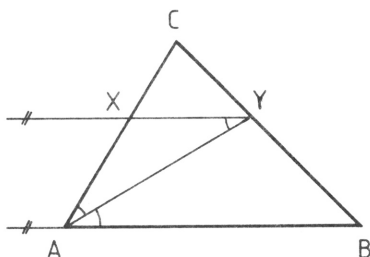
Je-li $I = 5$, potom $H \in \{1, 2\}$. V následující tabulce zapíšeme všechny možné výsledky postupů, které vedou ke zjištění jednotlivých číslic. Zřejmě, jestliže se v řádku bude opakovat už jedna z uvedených číslic, tato možnost není řešením.

I	H	A	P	S	F	C	N
5	1	6	5				
5	1	7	5				
5	2	6	8	9	8		
5	2	6	8	7	2		
5	2	7	9	1	3	6	7
5	2	7	9	1	3	8	5
5	2	7	9	3	9		

Jestliže $I = 5$, úloha nemá řešení.

MOZ 7 - I - 2

Rozbor



Obr. 126

1. $\triangle AXY$ je rovnoramenný $\Rightarrow |\sphericalangle XAY| = |\sphericalangle XYA|$
 2. $\leftrightarrow XY \parallel \leftrightarrow AB \Rightarrow |\sphericalangle XYA| = |\sphericalangle YAB|$ (střídavé úhly)
- Z 1. a 2. dostáváme $|\sphericalangle XAY| = |\sphericalangle YAB|$, tj. $\leftrightarrow AY$ je osou úhlu CAB .

Konstrukce

1. Sestrojíme trojúhelník ABC
2. o ; osa úhlu CAB
3. bod Y : $o \cap BC = \{Y\}$
4. přímka p : $p \parallel \leftrightarrow AB$, současně $Y \in p$
5. bod X : $p \cap \leftrightarrow AC = \{X\}$

MOZ 7 - I - 3

Rozdělíme dvoukoruny na tři hromádky po 27 mincích.

První měření – zjistíme, v které z těchto hromádek je falešná mince. (Odvážíme libovolné dvě z těchto hromádek, má-li jedna menší hmotnost, falešná mince je v ní, jsou-li stejné, falešná mince je ve třetí, nevážené hromádce.)

Druhé měření – rozdělíme hromádku mincí, o níž jsme zjistili, že obsahuje falešnou minci, zase do tří hromádek po 9 mincích atd. Falešnou minci umíme tedy určit po čtvrtém vážení. Zjišťujeme, že třetím vážením ji není možno určit.

MOZ 7 - I - 4

Lukáš nemohl předat vzkaz, protože ve svém druhém tvrzení by lhal, což není možné.

Jestliže předal vzkaz Jakub, který nikdy nemluví pravdu, vzkaz není pravdivý.

Jestliže předal vzkaz Václav, jeho druhé tvrzení je pravdivé, první tedy musí být nepravdivé.

Vzkaz nebyl pravdivý. Z výpovědi se nedá určit, který z bratrů vyřídil mamčin vzkaz.

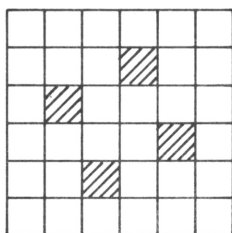
I. část řešení

	2			7	
1	3	4	6	8	9
	5			10	
	12			17	
11	13	14	16	18	19
	15			20	

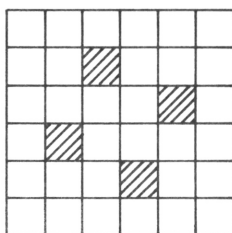
Obr. 127

Na šachovnici 6×6 se dají umístit 4 nepřekrývající se kříže, a proto bude nevyhnutelné vyšrafovat aspoň 4 čtverečky.

II. část řešení



a)



b)

Obr. 128

Stačí vyšrafovat 4 čtverečky, jak je vidět z obrázku 128.

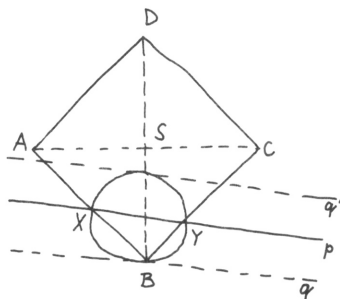
Úloha má dvě řešení.

MOZ 7 - I - 6

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 63 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 61 =$
 $= (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 61) \cdot (62 \cdot 63 - 1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 61 \cdot 3905$
 $3905 : 71 = 55$, uvedený rozdíl součinů čísel je dělitelný číslem 71.
 (Podíl bude $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 61 \cdot 55$.)

MOZ 7 - II - 1

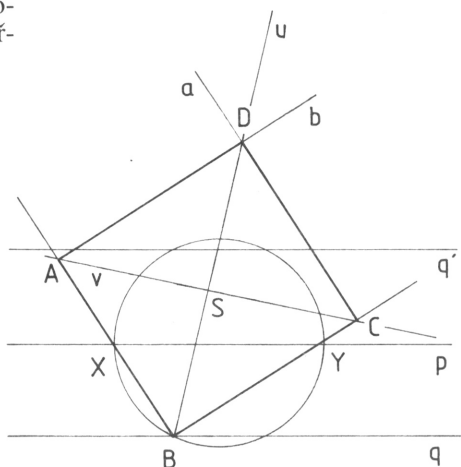
Rozbor (obr. 129):



Obr. 129

Bod B leží na přímce q , resp. q' vzdálené 2,5 cm od p a současně
 na Thaletově kružnici k nad průměrem XY ;
 bod S (střed čtverce) leží na
 ose úhlu XY , protože úhlo-
 příčky čtverce půlí jeho vnitř-
 ní úhly a $|BS| = 4$ cm.

Konstrukce (obr. 130):



Obr. 130

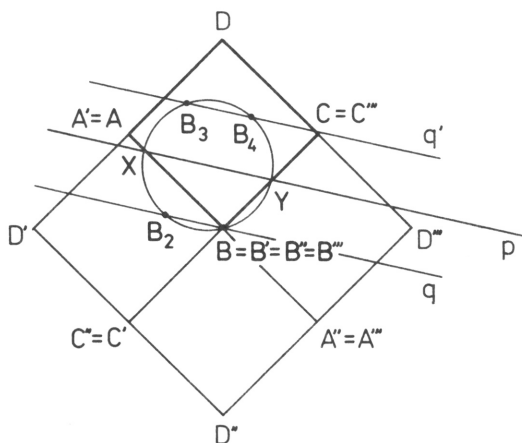
1. Zadání
2. q, q' : $|p, q| = |p, q'| = 2,5 \text{ cm}$
3. k : Thaletova kružnice nad XY
4. bod B : $B \in (q \cap k) \cup (q' \cap k)$
5. polopřímky BX, BY
6. u : osa úhlu XY
7. S : $S \in u$, současně $|BS| = 4 \text{ cm}$
8. v : $v \perp u$, současně $S \in v$
9. body A, C : $A \in \leftrightarrow BX \cap v, C \in \leftrightarrow BY \cap v$
10. a : $a \parallel AB$, současně $C \in a$; b : $b \parallel BC$, současně $A \in b$
11. bod D : $D \in b \cap a$
12. čtverec $ABCD$

Důkaz

Podle věty *usu* jsou shodné trojúhelníky ABS a BCS a trojúhelníky ABC a DCB . Úhel při vrcholu B je na Thaletově kružnici, je pravý. Zkonstruovaný čtyřúhelník $ABCD$ je čtverec. Protože úsečky SA, SC, SB jsou shodné a $|BS| = 4 \text{ cm}$, délka úhlopříčky AC čtverce $ABCD$ je 8 cm .

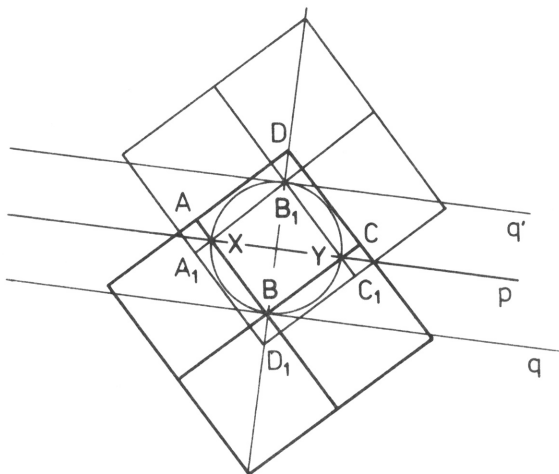
Diskuse

Je-li $|XY| > 5 \text{ cm}$, potom existují 4 body „ B “. Je to polohová úloha. Ke každému bodu B existují 4 čtverce, které vyhovují podmínkám úlohy (obr. 131). Dohromady je 16 možností.



Obr. 131

Je-li $|XY| = 5 \text{ cm}$, úloha má právě 8 řešení (body B jsou 2, viz obr. 132).



Obr. 132

Je-li $|XY| < 5$ cm, úloha nemá řešení.

MOZ 7 - II - 2

$a \mid b$ znamená a dělí b . Jestliže $4 \mid yxy$, potom $4 \mid xy$, jestliže $3 \mid xyx$, potom $3 \mid 2x + y$.

4 xy	3 2x + y	7 xyy		
xy	2x + y	xyy		
12	4	nevyhovuje		
32	8	nevyhovuje		
52	12	522	nevyhovuje	
72	16	nevyhovuje		
92	20	nevyhovuje		
24	8	nevyhovuje		
44	12	444	nevyhovuje	
64	16	nevyhovuje		
84	20	nevyhovuje		
16	8	nevyhovuje		
36	12	366	nevyhovuje	

$4 \mid xy$	$3 \mid 2x + y$	$7 \mid xyy$	
xy	$2x + y$	xyy	
56	16	nevyhovuje	
76	20	nevyhovuje	
96	24	966	
28	12	288	nevyhovuje
48	16	nevyhovuje	
68	20	nevyhovuje	
88	24	888	nevyhovuje

Úloha má jedno řešení $x = 9, y = 6$.

MOZ 7 - II - 3

Označme místa na „křižovatkách” jednotlivých chodbiček tak, jako ukazuje následující schéma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 m^1 & \rightarrow & n^4 & \rightarrow & o^{10} & \rightarrow & p^{20} \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 i^1 & \rightarrow & j^3 & \rightarrow & k^6 & \rightarrow & l^{10} \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 e^1 & \rightarrow & f^2 & \rightarrow & g^3 & \rightarrow & h^4 \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 a^1 & \rightarrow & b^1 & \rightarrow & c^1 & \rightarrow & d^1
 \end{array}$$

Index u písmene značí počet možností, kterými se myška může dostat do příslušného místa. Porovnej s úlohou MOZ 7 - I - 3 roč. 81/82.

Myší rodina měla 20 členů.

MOZ 7 - II - 4

hmotnost Ivana	x (kg)
hmotnost Haryka	$\frac{2}{5}x$ (kg)
hmotnost otce	$\frac{2}{5}x + x + 50$ (kg)
všichni dohromady	$x + \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}x + x + 50$ (kg)

$$2x + \frac{4}{5}x + 50 = 106$$

$$\frac{14}{5}x = 56$$

$$x = 20$$

Ivan měl hmotnost 20 kg, Haryk 8 kg a otec 78 kg.

6. ROČNÍK MOZ ŠKOLNÍ ROK 1985/1986

Kategorie MOZ 4

MOZ 4 - I - 1

Nejstarší syn: $2 + 2 + 3 + 4 + 4 + 4 + 5 = 24 > 23$. Úkol není možné splnit.

Prostřední syn: $1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 23$, nově vzniklých hůlek má být 7, proto právě jedna hůlka musí zůstat nepřerezaná (může to být 6, 5 nebo 4 dm dlouhá hůlka – proč?).

I. Nechť zůstane nepřerezaná hůlka délky 6 dm, potom z hůlek 5, 8, 4 je třeba získat 1, 2, 2, 3, 4, 5.

5 dm můžeme získat jedině z 8 dm, tj. $3 + 5$

4 dm můžeme získat jedině z 5 dm, tj. $1 + 4$

2 dm – (dvakrát) můžeme získat jedině ze 4 dm, tj. $2 + 2$

II. Nechť zůstane nepřerezaná 5 dm dlouhá hůlka, potom z hůlek 6, 8, 4 je třeba získat 1, 2, 2, 3, 4, 6.

6 dm můžeme získat jedině z 8 dm, tj. $2 + 6$

4 dm můžeme získat jedině ze 6 dm, tj. $2 + 4$

1 dm a 3 dm můžeme získat ze 4 dm, tj. $1 + 3$

III. Nechť zůstane nepřerezaná 4 dm dlouhá hůlka, potom z hůlek 6, 5, 8 je třeba získat 1, 2, 2, 3, 5, 6.

6 dm můžeme získat jedině z 8 dm, tj. $2 + 6$

5 dm můžeme získat jedině ze 6 dm, tj. $1 + 5$

2 dm a 3 dm můžeme získat z 5 dm, tj. $2 + 3$

Nejmladší syn: Devět hůlek se požadovaným způsobem získat nedá. Ze 4 hůlek můžeme dostat nejvíce 8 hůlek.

Úkol mohl splnit pouze prostřední syn, a to třemi způsoby:

I. $6, 8 = 3 + 5, 5 = 1 + 4, 4 = 2 + 2$

II. $5, 6 = 2 + 4, 8 = 2 + 6, 4 = 1 + 3$

III. $4, 8 = 2 + 6, 6 = 1 + 5, 5 = 2 + 3$

MOZ 4 - I - 2

a) $13 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5$

Hanka mohla zaplatit knížku jednou kuličkou a dvěma kostkami.

b) $49 = 13 \cdot 3 + 2 \cdot 5$

$$49 = 8 \cdot 3 + 5 \cdot 5$$

$$49 = 3 \cdot 3 + 8 \cdot 5$$

Hanka mohla zaplatit panenku třemi způsoby: 13 kuličkami a dvěma kostkami, nebo osmi kuličkami a pěti kostkami, nebo třemi kuličkami a osmi kostkami.

MOZ 4 - I - 3

Na levou zeď musí Gulliver přichystat:

$$(500 : 2) \cdot (4 + 1) = 250 \cdot 5 = 1\,250,$$

na pravou zeď:

$$(500 : 2) \cdot 5 = 250 \cdot 5 = 1\,250 \text{ (jako na levou zeď),}$$

na strop musí Gulliver přichystat:

$$(500 : 2) \cdot 6 = 250 \cdot 6 = 1\,500$$

Gulliver musí přichystat dohromady $1\,250 + 1\,250 + 1\,500 = 4\,000$ kamenů.

MOZ 4 - I - 4

Křížovku můžeme doplnit v pořadí:

1. řádek poslední číslice 3

3. řádek poslední číslice 6

sloupec B číslo 102

sloupec C číslo 396

sloupec A možnosti: 229, 458, 687, 916, s přihlédnutím k podmínce 3. řádku vyhovuje jen 458

sloupec D 7

2. řádek kontrola - číslo 5 097 je dělitelné 3

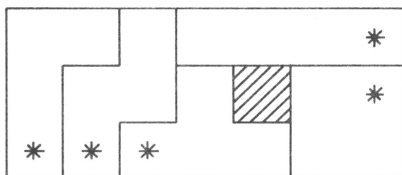
MOZ 4 - I - 5

1. Na místě miliónů musí být číslo 5.
2. Dále stačí použít číslice sestupně, tj. 5 984 310, a protože při dělení deseti nemá být zbytek nula a hledané číslo má být co největší, zaměníme číslice 0 a 1.

Řešení: 5 984 301.

MOZ 4 - I - 6

Úloha má jedno řešení. Viz obrázek 133.



Obr. 133

MOZ 4 - II - 1

Nejmenší takové šesticiferné číslo je 205 789, nejmenší takové sudé číslo je 205 798.

MOZ 4 - II - 2

- a) Na polepení přední a zadní stěny $8 \cdot 2 = 16$,
 - b) na polepení dolní, horní a bočních stěn $9 \cdot 4 = 36$,
 - c) na polepení tunelu zevnitř $3 \cdot 4 = 12$.
- Dohromady 64 samolepek, zůstalo mu 36 samolepek.

Kategorie MOZ 5

MOZ 5 - I - 1

1. p o s t u p: Sestavíme tabulku násobků 54 a 51 a budeme pozorovat rozdíly:

N_{54}	54	108	162	216	270	324	378	432	486	540	594
N_{51}	51	102	153	204	255	306	357	408	459	510	561
R	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33

Hledané číslo je v posledním sloupci: 594

2. p o s t u p: Označme hledané číslo c .

$$c = 51k + 33$$

$$c = 54n$$

Potom

$$51k + 33 = 54n$$

$$51k + 33 = 51n + 3n$$

$$n = 17 \cdot (k - n) + 11$$

Nejmenší hodnotu c dostaneme při nejmenším n , čili když $k - n = 0$.

Potom $n = 11$, $c = 54 \cdot 11 = 594$, $594 : 51 = 11$, zb. 33.

Hledané číslo je 594.

MOZ 5 - I - 2

	1	2	3
a	4	4	2
b	8	5	0
c	8	9	9

b) poslední číslice v řádce bude 0

c) $999 - 100 = 899$

1) $888 - 400 = 488$

a) 244 odzadu 442

2) $4 + 5 = 9$

3) vyšlo 209

MOZ 5 - I - 3

1. postup

1. přítomných	96
2. mimo podezření	61
3. zaměstnanců	47
4. zaměstnanců mimo podezření	23

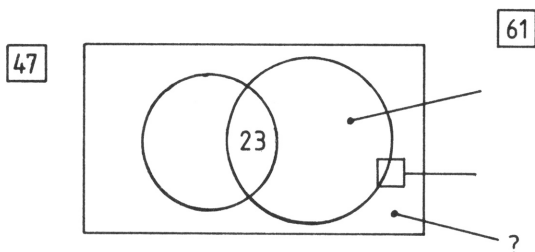
Z 2. a 4. dostáváme počet hostů mimo podezření $61 - 23 = 38$.

Z 1. a 3. dostáváme počet všech hostů $96 - 47 = 49$.

Čili počet hostů, kteří nejsou mimo podezření, je $49 - 38 = 11$.

Odpověď: 11 hostů není mimo podezření.

2. postup. Pomocí množinového diagramu pro dvě množiny (obr. 134).



Obr. 134

MOZ 5 - I - 4

Je-li $J = 4$, úloha nemá řešení. Je-li $J = 3$, pro A vyhovují dvě čísla, 9 a 8. Je-li $A = 9$, potom pro kterékoli N a O úloha nemá řešení.

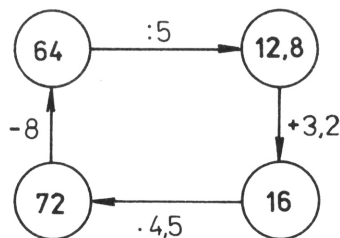
Nechť $J = 3$, $A = 8$. Potom musí být $N = 9$, $O = 1$.

Řešení: $J = 3$, $A = 8$, $N = 9$, $O = 1$.

MOZ 5 - I - 5

Příklad můžeme řešit zkusmo (obr. 135), případně rovnicí:

$$(x : 5 + 3, 2) \cdot 4, 5 - 8 = x, \text{ odtud } x = 64.$$



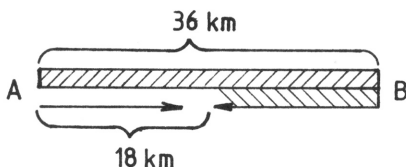
Obr. 135

MOZ 5 - I - 6

Cyklista ujel 18 km za 90 minut, auto ujelo 54 km za $90 - 50 = 40$ minut (obr. 136).

Z toho vypočítáme rychlost auta: za 20 minut ujelo 27 km, za 1 hodinu tedy 81 km.

Rychlost osobního auta Š 100 byla 81 km/h.



Obr. 136

MOZ 5 - II - 1

Řešení tabulkou. V prvním řádku jsou čísla, která při dělení 72 dávají zbytek 50, v druhém řádku násobky čísla 74.

x	122	194	266	338	410	482	554	626	698	770	842
y	74	148	222	296	370	444	518	592	666	740	814
$x - y$	48	46	44	42	40	...					

Všimněte si údajů ve třetím řádku tabulky. Po 25 krocích se rozdíl sníží na nulu. Hledané číslo je na 25. místě tabulky. Je to číslo 1 850.

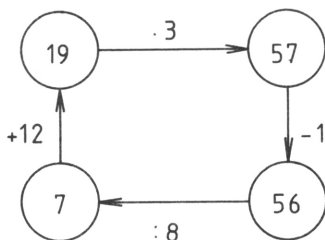
MOZ 5 - II - 2

Je-li ve třídě 35 žáků, ABC odebírá $35 - 20 = 15$ žáků. Podobně Kamaráda odebírá 20 žáků. Aspoň jeden z časopisů odebírá 30 žáků, ale $15 + 20 = 35$, v průniku tedy musí být 5 žáků.

MOZ 5 - II - 3

Zkusmo dosazujeme a provádíme naznačené operace (obr. 137).

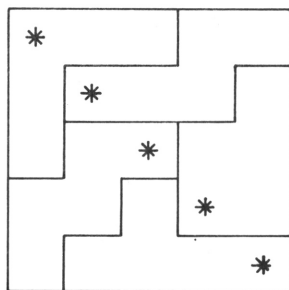
Ř e š e n í



Obr. 137

MOZ 5 - II - 4

Jedno z řešení je na obrázku 138.



Obr. 138

Ostatní řešení dostaneme otočením o 90° , případně osovou souměrností s osou souměrnosti střední příčkou čtverce.

Kategorie MOZ 6

MOZ 6 - I - 1

a) Ze šesti shodných trojúhelníků složíme rovnoběžník jako na obrázku 139a. Když si vyznačíme velikosti úhlů v těchto trojúhelnících, vidíme, že body X, Y (Z, U) leží na přímce, protože součty velikostí úhlů při nich jsou 180° . Rovnoběžník má stranu $|AB| = 3 + 3 + 3 = 9$ cm, $|BC| = 6$ cm. Má tedy požadovanou vlastnost.

b) 1. Přímka CX je osou úhlu BCD . Potom platí:

$$|\angle XCB| = |\angle XCY| = 30^\circ$$

$$|\angle YCX| = |\angle CXB| = 30^\circ \text{ (střídavé úhly)}$$

Z toho plyne, že $\triangle XBC$ je rovnoramenný.

Přímka BY je osou úhlu XBC . Potom $\triangle XBS \cong \triangle CBS$ (usu).

2. Trojúhelník BCY je rovnostranný, potom $|\angle YBC| = |\angle BCY| = |\angle BYC| = 60^\circ$. $\angle BYC$ a $\angle XBS$ jsou střídavé, z toho plyne $\triangle BCS \cong \triangle YSC$.

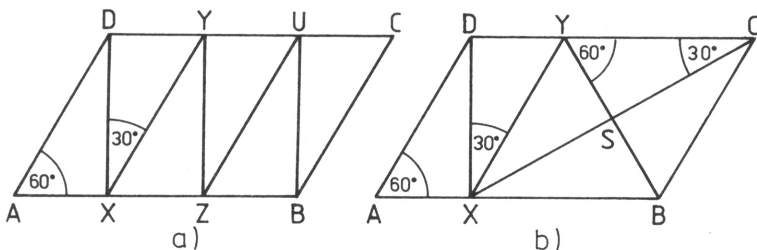
$$3. \triangle XSY \cong \triangle CSY \text{ (sus)}$$

$$4. \triangle XYD \cong \triangle XYS \text{ (usu)}$$

$$5. \triangle XYD \cong \triangle DAX \text{ (usu)}$$

$$\triangle AXD \cong \triangle YDX \cong \triangle YSX \cong \triangle BSX \cong \triangle BSC \cong \triangle YSC$$

Trojúhelníky jsou pravoúhlé, další dva úhly jsou 30° a 60° . Délky stran jsou 6 cm, 3 cm a $3 \cdot \sqrt{3}$ cm.



Obr. 139

MOZ 6 - I - 2

Na každou stěnu potřebujeme 8 kusů, tj. $6 \cdot 8 = 48$ kusů, na každou „díru“ potřebujeme 4 kusy, tj. $6 \cdot 4 = 24$ kusů.

$$100 - 48 - 24 = 28$$

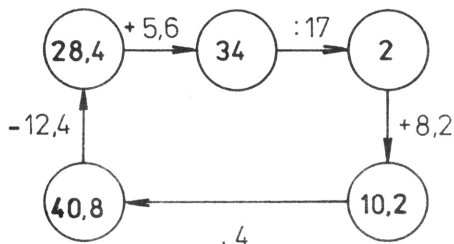
Davidovi zůstalo 28 samolepek.

MOZ 6 - I - 3

Příklad je možné řešit pokusem (obr. 140) nebo rovnicí.

$$[(x + 5,6) : 17 + 8,2] \cdot 4 - 12,4 = x$$

$$x = 28,4$$



Obr. 140

MOZ 6 - I - 4

3. číslo označme x , potom 1. číslo je $x - 5$; 2. číslo je $x - 10$; 4. číslo je $x - 2$; 5. číslo je $x - 19$. Jejich součet je:

$$x + (x - 5) + (x - 10) + (x - 2) + (x - 19) = 5x - 36$$

Přitom součet všech čísel má být $\frac{1}{4}$ z $256 = 64$. Tedy $5x - 36 = 64$, potom $5x = 100$, $x = 20$. Tato čísla jsou v pořadí: 15, 10, 20, 18, 1. Číslům přiřadíme písmena a dostaneme město Nitra.

MOZ 6 - I - 5

Hledáme taková dvě čísla A, B (čtyřciferné a pěticefurné), aby obsahovala každou číslici 1 až 9 právě jednou a přitom byl jejich součin co největší.

Aby to platilo, musí mít čísla A, B na prvním místě číslici 9 a 8 a na druhém místě číslici 7 a 6. Jsou však dvě možnosti: $A = 97-$, $B = 86-$, nebo $A = 96-$, $B = 87-$.

V součinu $97- \cdot 86- = 8342-$ a $96- \cdot 87- = 8352-$ nám vyhovuje větší součin, tedy čísla $96-$ a $87-$.

Jako další číslice použijeme největší ze zbývajících, tedy 5 a 4. Porovnáme součiny $965- \cdot 874- = 843410-$, $964- \cdot 875- = 843500-$. Výhodnější je druhý z nich.

Největší ze zbývajících čísel jsou 2 a 3. Číslice 2 a 3 napíšeme na čtvrté místo v číslech A, B .

Porovnáme součiny $9643- \cdot 8752- = 84395536-$ a

$$9642- \cdot 8753- = 84396426-.$$

Výhodnější je druhý z nich. Poslední číslici 1 můžeme přidat jednomu nebo druhému číslu.

Porovnáme součiny $96421 \cdot 8753 = 843973013$ a

$$9642 \cdot 87531 = 843973902.$$

Karel má telefonní číslo 9642 a Vladimír 87531.

(Jestliže jste úlohu řešili „jen úsudkem“, mohli jste dojít k výsledku $8642 \cdot 97531$. V čem byl váš úsudek chybný?)

MOZ 6 - I - 6

Označíme počty bodů, které získali chlapci, počátečními písmeny jejich jmen. Čárkou označíme počet bodů získaných druhým členem hlídky. Potom ze zadání:

$$J = D + 10$$

$$D = P + 20$$

$$R = R' - 5$$

$$E = E' - 7 \cdot 5 = E' - 35$$

$$K = K' - 2 \cdot 5 - 5 \cdot 10 = K' - 60$$

Dále víme, že $R' + E' + K' = 380$ (lepší z dvojice). Potom $P + D + J = P + P + 20 + P + 30 = 3P + 50$, $3P + 50 = 380$, tedy $P = 110$.

Potom Petr získal 110 bodů, Dušan 130, Jožka 140 bodů. Nejlepší byl Jožka, byl tedy v hlídce s Karlem, potom Karel získal $140 - 60 = 80$ bodů.

Dále jsou dvě možnosti:

a) Emilův partner je Dušan, potom Emil získal $130 - 35 = 95$ bodů, a partner Rudy je Petr, potom Ruda získal $110 - 5 = 105$ bodů, nebo

b) partner Emila je Petr, potom Emil získal $110 - 35 = 75$ bodů, a partner Rudy je Dušan, potom Ruda získal $130 - 5 = 125$ bodů.

Úloha má dvě řešení:

a) I. místo: Dušan 130 a Emil 95, dohromady 225 bodů.

II. místo: Jožka 140 a Karel 80, dohromady 220 bodů.

III. místo: Petr 110 a Ruda 105, dohromady 215 bodů.

b) I. místo: Dušan 130 a Ruda 125, dohromady 255 bodů.

II. místo: Jožka 140 a Karel 80, dohromady 220 bodů.

III. místo: Petr 110 a Emil 75, dohromady 185 bodů.

MOZ 6 - II - 1

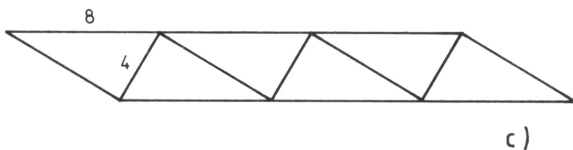
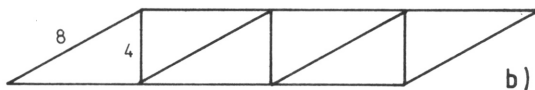
3. číslo označíme x , 1. číslo je potom $x - 13$, 2. číslo je $x + 3$, 4. číslo je $x + 1$ a současně 1. číslo je osmina 4. čísla, tj.

$$x - 13 = \frac{1}{8}(x + 1), \text{ potom } x = 15.$$

Čísla v pořadí jsou 2, 18, 15, 16 a město jim příslušející je Brno.

MOZ 6 - II - 2

Jsou tři možnosti rovnoběžníků s danou vlastností (obr. 141). Rovnoběžník můžeme sice dostat i jiným přiložením trojúhelníků mezi „dvěma krajními“, ale vždy vytvoří stejný rovnoběžník – nepovažujeme je tedy za různé.



MOZ 6 - II - 3

Jediné řešení až na pořadí sčítanců je

$$\frac{5}{6} + \frac{2}{3} + \frac{4}{1} - \frac{1}{2} = 5.$$

MOZ 6 - II - 4

Číslo, které si myslíme, můžeme zapsat jako

$$1000a + 100b + 10c + d,$$

kde a, b, c, d jsou přirozená čísla menší než 10, $a \neq 0$. Potom ze zadání:

$$a + b + c + d = 10a + b, \text{ jestliže } c < 5 \quad (1)$$

nebo

$$a + b + c + d = 10a + b + 1, \text{ jestliže } c \geq 5 \quad (2)$$

Z (1) určíme $9a = c + d$, potom $a = 1$, protože je-li $a = 2$, pak $c + d = 18$, z čehož $c = d = 9$ a to odporuje podmínkám úlohy. Je-li $a > 2$, postupujeme podobně.

Je-li $a = 1$, pak $c + d = 9$ a z podmínek úlohy $c = 4$, $d = 5$. Druhá číslice je součtem posledních dvou, tedy $b = 9$. Hledané číslo je 1945.

Z (2) nenajdeme takové c , d , aby vyhovovalo podmínkám úlohy.

Kategorie MOZ 7

MOZ 7 - I - 1

První pondělí v měsíci musí být první den v měsíci. Jinak by následující pondělí nebylo prvním pondělím po první neděli. Podobně poslední sobota v následujícím měsíci musí být posledním dnem měsíce. Jinak by předcházející sobota nebyla poslední sobotou před poslední nedělí.

Počet dní po sobě následujících dvou měsíců může být:

- a) $28 + 31 = 59$
- b) $29 + 31 = 60$
- c) $31 + 31 = 62$
- d) $30 + 31 = 61$

Protože 1. den v měsíci je pondělí, tak 59. den je středa, 60. den je čtvrtek, 61. den je pátek, 62. den je sobota. Událost se stala tedy ve dvou po sobě jdoucích měsících, které mají 31 dní. To může být buď červenec–srpen, nebo prosinec–leden. V tabulce uvádíme, na který den připadl 1. prosinec a 1. červenec v minulých letech:

	1985	1984	1983	1982	1981	1980	1979
1. 12.	Ne	So	Čt	St	Út	Po	So
1. 7.	Po	Ne	Pá	Čt	Čt	Út	Ne

Začátek cesty byl 1. 7. 1985 a konec cesty byl 31. 8. 1985.

MOZ 7 - I - 2

Dvojciferné násobky čísel 17 a 23 jsou:

17, 34, 51, 68, 85; 23, 46, 69, 92,

konec pásu je tedy 692346923468517.

Poslední skupina je 8 517 a před ní se periodicky opakuje pětice čísel 92 346, $1\,981 : 6 = 330$, zb. 1.

První číslice pásu je 6.

MOZ 7 - I - 3

Obsah každého z trojúhelníků ABD , BCD , ACD se rovná třetině obsahu daného trojúhelníku ABC . Proto výška každého z těchto trojúhelníků příslušející ke společné straně s trojúhelníkem ABC se rovná $\frac{1}{3}$ výšky trojúhelníku ABC .

Bod D sestrojíme jako společný průsečík tří přímek (rovnoběžných se stranami trojúhelníku ABC ve vzdálenosti $\frac{1}{3}$ příslušné výšky).

Bod D je zřejmě těžištěm trojúhelníku ABC .

MOZ 7 - I - 4

a) Nejvíce 4: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Více jich nemůže být, protože mezi 8 po sobě jdoucími čísly jsou aspoň 4 sudá čísla a ta, pokud mezi nimi není dvojka, nejsou prvočísla.

b) Žádné prvočíslo: zvolme např. $a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$. Připočítáme-li k číslu a postupně 2, 3, 4, ..., 9, dostaneme jen složená čísla.

MOZ 7 - I - 5

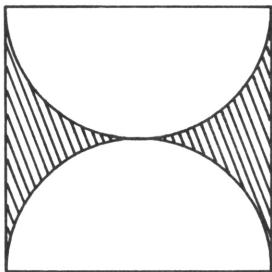
1. hodinu slyšíme $1 + 2 + 3 + 5 = 11$ úderů, 2. – 12 úderů, 3. – 13 úderů, ... 12. – 22 úderů. Za 12 hodin uslyšíme 198 úderů. Za $5 \cdot 12$ hodin uslyšíme 990 úderů – jestliže zanedbáme čas, za který slyšíme údery na začátku a na konci tohoto intervalu (proč?) – potom 990 úderů uslyšíme za $59\frac{3}{4}$ hodiny, protože začínáme úderem

1. čtvrt hodiny. Víc úderů za $59\frac{3}{4}$ hodiny slyšet nemůžeme, protože kdybychom posunuli začátek poslouchání do „výhodnější pozice“ – víc úderů, závěr by byl o toto „zvýhodnění“ horší. Potřebujeme slyšet ještě dalších 10 úderů, což můžeme udělat posunutím o $\frac{1}{4}$ hodiny dopředu (tehdy sice uslyšíme až 16 úderů, ale prvních 6 úderů nemusíme poslouchat).

1 000 úderů tedy můžeme slyšet za 60 hodin.

MOZ 7 - I - 6

Uvážíme-li, že doplněk čtyřlístku se skládá ze dvou útvarů U (vyšrafovaných na obrázku 142), potom výpočet je jednoduchý.



Obr. 142

$$\text{Obsah } U = 6^2 - 2 \cdot \frac{\pi \cdot 3^2}{2} = 6^2 - 3^2\pi.$$

Čtyřlístek Č je doplněk dvou útvarů U do čtverce, obsah $\check{C} = 6^2 - 2(36 - 9\pi) = 36 - 72 + 18\pi = 18\pi - 36 \doteq 20,52 \text{ (cm}^2\text{)}.$

MOZ 7 - II - 1

Jestliže uvážíme jednu „periodu“ kostek: 1 kostka s jedničkou, 2 kostky s dvojkou, ..., 6 kostek se šestkou, pak obsahuje dohromady $1 + 2 + \dots + 6 = 21$ kostek, na nichž je dohromady $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \dots + 6 \cdot 6 = 91$ teček.

$$666 : 21 = 31, \text{ zb. } 15$$

666 kostek obsahuje 31 takových celých period a ještě 15 kostek, na nichž je $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 = 55$ teček. Dohromady je na 666 kostkách $31 \cdot 91 + 55 = 2\,876$ teček.

MOZ 7 - II - 2

Součet obsahů čtyř měsíčků se rovná rozdílu součtu obsahů půlkruhů nad stranami čtverce s obsahem čtverce a obsahu kruhu opsaného čtverci, což je:

$$S = 4 \cdot \frac{\pi r_1^2}{2} + 36 - \pi r^2, \text{ kde } r_1 = 3 \text{ cm a } r = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$S = \frac{4}{2} \cdot 9\pi + 36 - 18\pi = 36$$

Obsah čtyř měsíčků se rovná obsahu čtverce.

MOZ 7 - II - 3

Začneme dělit číslem 37.

$$300000...0007 : 37 = 810$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ 30 \end{array}$$

Vidíme, že po 4. nule se začíná v podílu opakovat trojice 810. Jestliže se po $3 \cdot 1 + 1 = 4$ nulách opakuje 1. trojice, pak po $3 \cdot 32 + 1 = 97$ nulách se skončí opakování 32. trojice, dostáváme

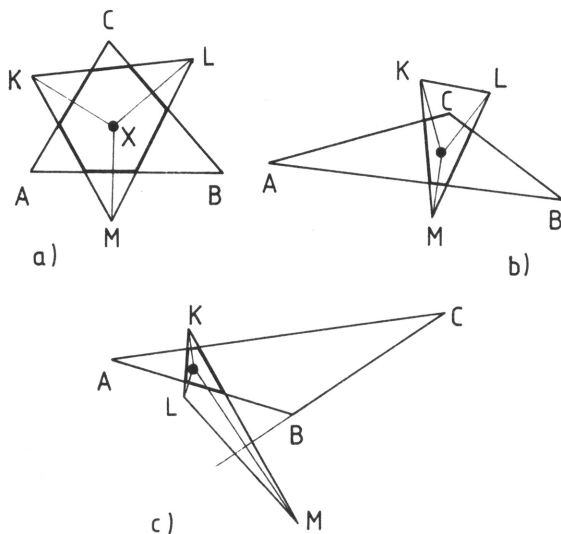
$$..97.98.99.$$

$$300...0 \quad 0 \quad 0 \quad 7 : 37 = 810 \dots 810811, \text{ zb. } 0$$

$$\begin{array}{r} 300 \\ 40 \\ 37 \end{array}$$

Prvních devět číslic podílu je 810810810, posledních devět číslic je 810810811, zbytek je 0.

Průnikem může být jen šestiúhelník, pětiúhelník a čtyřúhelník závisle na tom, zda je trojúhelník ABC ostroúhlý nebo tupouhlý, a na umístění bodu X uvnitř trojúhelníku. (Obr. 143a, b, c.)



Obr. 143

RNDr. Vladimír Repáš – RNDr. Anna Pribišová
– RNDr. Juraj Vantuch

**Úlohy z matematických olympiád na základní škole
(4. až 7. ročník)**

Obálku navrhl Pavel Štefan
Vydalo Státní pedagogické nakladatelství Praha
roku 1991 jako svou publikaci č. 5-92-11/1
Edice Zájmové náklady
Odpovědná redaktorka Anežka Bittnerová
Výtvarný redaktor Václav Hanuš
Technická redaktorka Dita Novotná
Vytiskly Moravské tiskárny, s. p., Olomouc
1. vydání

ISBN 80-04-25439-X

SPN 5-92-11/1

ISBN 80-04-25439-X