

[dokumenty-08] Dvacet pět let matematické olympiády v Československu

Jozef Moravčík (editor); Jan Vyšín (editor): [dokumenty-08] Dvacet pět let matematické olympiády v Československu. sborník. (Czech). Praha: Ústřední výbor matematické olympiády, 1976.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/405329>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library*
<http://dml.cz>

**M
O**

**M
O**

**M
O**

**DVACET PĚT LET
MATEMATICKÉ
OLYMPIÁDY
V ČESKOSLOVENSKU**

**M
O**

**M
O**

Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

DVACET PĚT LET MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY V ČESKOSLOVENSKU

SBORNÍK

**SESTAVILI JOZEF MORAVČÍK
A JAN VYŠÍN**

PRAHA 1976

**VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA**

©

Mladá fronta,

1976

OBSAH

Akademik Josef Novák / Úvodem - - - - -	7
---	---

I.

Na slovíčko s prof. Miroslavem Fiedlerem - - - - -	11
Co řekl o olympiádě předseda ÚV MO - - - - -	13
Zastavenie na kus reči s podpredsedom ÚV MO - - - - -	25

II.

Vlastimil Macháček a Jiří Mída / Z kroniky matematické olympiády - - - - -	33
Břetislav Novák a Jaroslav Morávek / Vzpomínka na ma- tematickou olympiádu - - - - -	55
Karel Jakoubek / Třináct let práce v kategorii Z - - - - -	58
Jozef Moravčík / RNDr. Ladislav Berger a 25 rokov matematickej olympiády - - - - -	61
Jan Vyšín / Kdo byl Rudolf Zelinka - - - - -	64

III.

Jan Vyšín / O Škole mladých matematiků - - - - -	71
--	----

IV.

Ivan Semjonovič Petrakov / Matematické olympiády v Sovětském svazu (<i>přel. Štefan Schwabik</i>) - - - - -	99
--	----

Vladimír Mičič / O soutěžích mladých matematiků v Jugoslávii (přel. Štefan Schwabik)	116
Helmut Bausch / Pozdrav z NDR (přel. Štefan Schwabik)	121
Johannes Lehmann / Činorodé přátelství (přel. Štefan Schwabik)	127
Tiberiu Roman / Matematické olympiády – „pro“ a „proti“ (přel. František Hradecký)	138
Endre Hódi / Matematické studijní soutěže v Maďarsku (přel. Ladislav Berger a Jozef Moravčík)	143
Andrzej Małkowski / Poznámky o Kahanoffových nerovnostech (přel. Ladislav Berger)	162

V.

Bohdan Zelinka / Jak pracuje matematik	167
--	-----

DO SBORNÍKU PŘISPĚLI

českoslovenští autoři :

Prof. RNDr. Miroslav Fiedler, DrSc., Matematický ústav
ČSAV, Praha

Doc. RNDr. Ján Gatiaľ, CSc., Elektrotechnická fakulta SVŠT,
Bratislava

Doc. RNDr. Milan Hejný, CSc., Přírodovědecká fakulta UK,
Bratislava

František Hradecký

Karel Jakoubek

RNDr. Jiří Jarník, CSc., Matematický ústav ČSAV, Praha

RNDr. Milan Koman, CSc., pedagogická fakulta UK, Praha

PhDr. Vlastimil Macháček, pedagogická fakulta UK, Praha

RNDr. Jiří Mída, pedagogická fakulta UK, Praha

Doc. RNDr. Jozef Moravčík, CSc., Vysoká škola dopravná,
Žilina

RNDr. Jaroslav Morávek, CSc., Matematický ústav ČSAV,
Praha

Doc. RNDr. Břetislav Novák, CSc., matematicko-fyzikální
fakulta UK, Praha

Akademik Josef Novák, Matematický ústav ČSAV, Praha

RNDr. Jiří Sedláček, CSc., Matematický ústav ČSAV, Praha

RNDr. Jaroslav Šedivý, matematicko-fyzikální fakulta UK,
Praha

Doc. Jan Vyšín, CSc., Matematický ústav ČSAV, Praha

RNDr. Bohdan Zelinka, CSc., Vysoká škola strojní a textilní,
Liberec

RNDr. František Zítek, CSc., Matematický ústav ČSAV,
Praha

zahraniční autoři :

Prof. Dr. hab. Helmut Bausch, předseda ÚV olympiád mladých matematiků NDR, Berlín

Doc. Endre Hódi, Státní pedagogický ústav, Budapešť

Studijní rada Johannes Lehmann, zasloužilý učitel lidu, hlavní redaktor časopisu Alfa, Berlín

Andrzej Małkowski, Matematický ústav varšavské university,
Varšava

Prof. Vladimír Mičič, Bělehrad

Prof. Ivan Semjonovič Petrakov, Moskva

Prof. Tiberiu Roman, Bukurešť

ÚVODEM

AKADEMIK JOSEF NOVÁK

Naše socialistická společnost věnuje velkou pozornost mladým lidem, jejich výchově a přípravě pro budoucí povolání. Nejruznější zájmová činnost mládeže, péče o mladé talenty, soutěže a různé místní i celostátní akce poskytují naší mládeži nebývalé možnosti. Významné místo mezi soutěžemi zaujímá celostátní matematická olympiáda.

Československá matematická olympiáda byla založena r. 1951 naším vynikajícím matematikem akademikem Eduardem Čechem. Vzorem jí byly olympiády ve SSSR a jiné obdobné soutěže v socialistických zemích. V tomto roce slavíme tedy její pětadvacetileté jubileum. Obě národní ministerstva školství vyhláší každý její ročník, poskytují finanční prostředky a mnoho dobrovolných pracovníků z Jednoty československých matematiků a fyziků, z vysokých, středních i základních škol se stará o její organizaci a zajišťuje její průběh.

Stál jsem u zrodu československé matematické olympiády. Patnáct let jsem vedl její ústřední výbor a měl jsem příležitost sledovat, jak se rozvíjela, jak se zvyšovala její úroveň a její význam, jak vzrůstal její vliv na žáky základních a středních škol, jak ovlivňovala úroveň vyučování matematice. Měl jsem radost z úspěšných účastníků soutěže, z nichž vyrostli znamenití odborníci a z nichž někteří jsou už významnými vědeckými pracovníky. Tato soutěž nám pomáhala navazovat

styky s mladými lidmi, učiteli a školskými pracovníky ostatních socialistických zemí i zemí západních, kteří se účastnili mezinárodních matematických olympiád. Vzpomínám na obětavou a nadšenou práci členů ústředního výboru i krajských výborů matematické olympiády a četných učitelů na školách, kteří vykonali velkou a společensky prospěšnou práci uznávanou jak našimi školskými orgány, tak i naší vrcholnou vědeckou institucí, Československou akademií věd.

Matematická olympiáda dala podnět k vydávání studijní matematické literatury pro žáky. Tak vznikla knižnice Škola mladých matematiků vydávaná nakladatelstvím Mladá fronta. Mnoho matematických námětů školské matematiky, ale i témat překračujících rámec školy bylo zpracováno pedagogickými i vědeckými pracovníky. Vydání dosavadních 36 svazeků této knižnice je bezesporu velkou pomocí našim žákům a umožňuje jim vniknout do logické struktury matematiky, seznámit se s jejími aplikacemi a učit se samostatně studovat.

Další edici tvoří brožury jednotlivých ročníků matematické olympiády. Letos vychází jubilejní 25. ročník. Tyto knížečky obsahují už více než tisíc matematických úloh. Jsou to úlohy podnětné, většinou originální, důmyslné, čerpané z nejrůznějších oblastí školské matematiky. Vysoce oceňuji intenzivní myšlenkovou práci všech autorů, kteří tyto úlohy formulovali.

V životě takové velké akce, jako je matematická olympiáda, není 25 let příliš dlouhá doba. Stojí však za to přehlédnout a bilancovat vykonanou práci podle jejího významu pro potřeby naší společnosti. Domnívám se, že tato bilance je dobrá a povzbudivá.

Přeji matematické olympiádě — a se mnou všichni moji spolupracovníci — mnoho úspěchů do dalších let.

(I)

NA SLOVÍČKO S PROF. MIROSLAVEM FIEDLEREM

Když se připravoval tento jubilejní sborník, zašli jsme za jedním z těch, kteří pracují v matematické olympiádě od jejího začátku. Prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc., je nyní místopředsedou ústředního výboru MO a pracuje v Matematickém ústavu ČSAV v Praze. Navštívili jsme ho, abychom mu položili několik otázek:

1. Kdy jste se poprvé setkal s matematickou olympiádou?

Bylo to někdy na jaře 1951. Byl jsem tehdy vědeckým aspirantem Ústředního ústavu matematického, z něhož se pak vyvinul dnešní Matematický ústav ČSAV. Mnozí možná vědí, že prof. František Vyčichlo se vedle své vědecké práce zabýval i středoškolskou matematikou a didaktickými otázkami. Na jaře zmíněného roku mně Vyčichlo sdělil, že se připravuje žákovská soutěž v matematice, matematická olympiáda, a požádal mne o spolupráci. Při přípravě soutěže jsme neměli žádné zkušenosti a bylo třeba rychle vybrat vhodné příklady a vypracovat řešení. Kdo má brožuru o prvním ročníku MO, může se podívat, jak to dopadlo. Vzpomínám si, že někteří autoři nám narychlo dodali úlohy bez řešení, a dovedete si představit, jak se člověk zapotí, když má řešit úlohu, která je školskými prostředky neřešitelná.

2. *Souvisí nějak matematická olympiáda s vaší vlastní vědeckou prací?*

Nechci tvrdit, že je zde bezprostřední souvislost, i když některé úlohy z olympiády jsou zajímavé i pro vědeckého pracovníka a mohly by být ještě dále zobecněny. Když to trochu obrátíme, dá se říci, že některé výsledky a poznatky z vědeckého výzkumu se dají použít ve studentské soutěži — zpravidla ve zjednodušené formě nebo ve speciálním případě.

3. *Co soudíte o matematické literatuře, která u nás vychází pro účastníky MO?*

Nelze říci, že by nynější situace ve vydávání této literatury byla ideální, i když rozhodně není špatná. Cesta od získání autora do okamžiku, kdy jeho kniha vyjde, trvá však příliš dlouho. Myslím, že by se mělo více využívat rychlé malotirážní vydavatelské techniky, aby čtenáři nemuseli tak dlouho čekat na nové svazky. Co se týče Školy mladých matematiků, je to dobrá edice, která přinesla už řadu hodnotných svazečků.

4. *Co byste chtěl říci našim olympionikům závěrem?*

Chtěl bych jim popřát hodně hezkých chvil při řešení olympijských úloh, řadu nových svazků do jejich matematické knihovny a hodně úspěchů v celém jejich studiu.

Rozmlouval Jiří Sedláček

CO ŘEKL O OLYMPIÁDĚ PŘEDSEDA ÚV MO

V Kabinetě pro modernizaci vyučování matematice při Matematickém ústavu ČSAV jsme navštívili nynějšího předsedu ÚV MO doc. Jana Vyšína, CSc., a podrobili jsme ho také křížovému výslechu. Dali jsme mu několik otázek:

1. *Byl jste jedním z těch, kteří stáli u zrodu matematické olympiády. Mohl byste nám povědět něco o začátcích této naší soutěže?*

Iniciátorem soutěže byl akademik Eduard Čech, ale jejím organizátorem a prvním předsedou jejího ústředního výboru byl prof. František Vyčichlo. Jeho zásluhou se v roce 1951 sešla přípravná schůze, které se zúčastnil též prof. Jur Hronec a na níž bylo rozhodnuto o zrodu naší československé matematické olympiády.

Každý začátek je těžký, těžké byly i začátky naší soutěže. Bylo nutno nalézt vhodné nadšené propagátory po celé republice, zajistit podporu ministerstva školství, sestavovat soutěžní úlohy, informovat o pojetí olympiády školskou veřejnost. K propagaci nové soutěže přispěly i časopisy, hlavně *Matematika ve škole*, která uveřejňovala úlohy a články vztahující se k MO, a *Rozhledy matematicko-fyzikální*. Olympiáda svým pojetím se nesetkala hned a všude s plným ohlasem. Úlohy byly těžší než běžné školské úlohy a bylo třeba vyvracet

názor, že žák, který má na vysvědčení z matematiky jedničku, musí být schopen řešit úlohy MO. Soutěž neměla zpočátku kategorií pro žáky nejvyššího ročníku základní školy a byla soutěží výběrovou. Kategorie D —



Akademiik Eduard Čech

dnešní kategorie Z — vznikla později a měla vzbudit zájem učitelů a žáků o matematiku již na těchto školách. Měla původně charakter propagační, ale v dalších letech se od této zásady ustoupilo. V poslední době se snažíme, aby kategorie Z měla opět svůj původní charakter.

Mohu říci, že matematická olympiáda mně od svého vzniku velmi přirostla k srdci, a i když jsem měl často velmi mnoho jiné práce, stále jsem s ní udržoval důvěrný styk.



Akademik Jur Hronec

2. *Čím se liší úlohy matematické olympiády od školských úloh nebo úloh jiných soutěží?*

Úlohy olympiády předpokládají nejen znalost učiva předepsaného osnovami — vždy jsme se snažili, aby neobsahovaly učivo, které by příliš přesahovalo osnovu

příslušné kategorie — ale vyžadují od řešitele tvořivý přístup, znalost různých způsobů řešení úloh, jistou kombinální schopnost a důvtip. Protože se však osnovy mění a středoškolská matematika se modernizuje, mění se i náměty úloh a pronikají do ní i prvky tzv. moderní matematiky. Úlohy v soutěži však nelze ani dnes plně modernizovat, neboť bychom vyřadili žáky škol s tradiční výukou. Když olympiáda vznikala, byly např. úlohy s nerovnostmi a absolutními hodnotami nové a nezvyklé a je jisté i zásluhou matematické olympiády, že dnes v učivu matematiky pevně zakotvily. Již první jednatel ÚV MO Rudolf Zelinka razil zásadu, aby jednotlivé složky školské matematiky byly v soutěži rovnoměrně zastoupeny. Byly tu tedy úlohy z teorie čísel, z algebry, z goniometrie, úlohy konstrukční, planimetrické a stereometrické úlohy, úlohy s kombinatorickou tematikou; v kategorii Z byly zdůrazňovány zvláště slovní úlohy. Olympiáda se zprvu vyvíjela pod vlivem Čechových učebnic, které podstatně změnily ráz školské matematiky a ovlivnily i autory učebnic pozdějších. Je třeba však připomenout, že matematická olympiáda již od svého prvního ročníku měla jiný cíl než soutěže vyhlašované dříve v časopisech, např. v Rozhledech matematicko-fyzikálních; tam se problematika nevázala tak těsně na školní osnovy, úlohy nebyly rozděleny do kategorií podle věku žáků apod. Posláním celostátní olympiády je zainteresovat pokud možno všechny učitele matematiky na školách 1. a 2. cyklu a jejich prostřednictvím žáky těchto škol, a tak přispívat ke zkvalitnění vyučování a zároveň objevovat matematicky nadané žáky. Proto jsme kladli v minulosti a klademe i dnes takový důraz na studijní přípravná kola.

V prvních ročnících soutěže mělo přípravné kolo

v každé kategorii 16 úloh, ale později byl tento počet postupně redukován až na dnešní 4 úlohy. Tím je podle mého mínění přípravné kolo velmi ochuzeno. Vždyť toto kolo má být nejdůležitější částí celé soutěže. Žák má možnost se poradit, studovat doporučenou literaturu, a tak prohlubovat své znalosti a připravovat se na další kolo. Tento studijní aspekt se často ani ze strany učitelů plně nedoceňuje.

3. *Učitelé ZDŠ a středoškolští profesori jsou nejdůležitější spojkou mezi matematickou olympiádou a jejími řešiteli. Jak se vyvíjela spolupráce v tomto směru? Jaké pomoci se dostává účastníkům matematické olympiády?*

Na každé škole je zpravidla jeden vyučující referentem pro matematickou olympiádu. Jeho úkolem je propagovat a organizovat soutěž na škole, zřizovat kroužky MO apod. Pečuje o dobrý průběh soutěže na škole a je v úzkém styku s OV MO resp. KV MO.

Učitelé matematiky poskytují svým žákům individuální pokyny zaměřené tak, aby žák vlastním studiem a samostatně dospěl k řešení dané úlohy.

Když byla obnovena činnost Jednoty československých matematiků a fyziků, stal se její ústřední výbor spolupořadatelem MO a zajišťuje každoročně prostřednictvím svých poboček ve spolupráci s KV MO pracovní přednášky (semináře) pro účastníky jednotlivých kategorií. V některých letech byla i ústředně navrhována témata pro tyto semináře. Mám však dojem, že tyto semináře nemají takový účinek, jaký jsme předpokládali. Jsem přesvědčen, že záleží především na vyučujících, jak se věnují svým žákům.

4. *Od jisté doby dostávají učitelé a profesori matematiky důležitou pomůcku. Jsou to komentáře k přípravným*

úlohám. Je dobře známo, že jste byl jejich iniciátorem a dosud jediným autorem. Mohl byste něco říci o jejich zaměření a účelu?

Komentáře vznikly ze snahy usnadnit práci učitelům, kteří nemají čas ani možnost, aby se vlastním studiem podrobněji seznamovali s tematikou úloh. Instruktaže pro učitele se v mnohých krajích neuskutečnily a učitelé si často nevěděli rady s didaktickým problémem „jak na to“.

Musím znovu zdůraznit, že komentáře jsou psány pro učitele, a nikoliv pro žáky. Zpracovávají tematiku úlohy ze širšího pohledu, upozorňují na souvislosti, obsahují pokyny, odhalují jádro problému, ale úlohu zpravidla podrobně neřeší. To je záměrné: jde především o to, aby si vyučující rozšířil své znalosti, aby nahlédl do „matematické kuchyně“, kde se úlohy tvoří, aby sám pro práci se žáky podobné úlohy dovedl sestavit.

I když komentáře byly velkou většinou vyučujících přijaty velmi příznivě, vyskytly se hlasy žádající zasílání úplných řešení a více úloh tréninkového charakteru. Prvnímu požadavku nelze vyhovět, druhý se budeme snažit realizovat.

5. Účastnil jste se mnoha mezinárodních matematických olympiád jako vedoucí československé delegace i jako člen mezinárodní jury. Poznal jste organizace zahraničních soutěží a jejich tematiku. Co byste nám mohl k MMO říci?

Podrobný výklad není možno podat v krátkém interview; ostatně podrobné zprávy o MMO máme v ročníkových brožurkách. Osnovy různých zemí, které se účastní MMO, jsou velmi rozdílné, a proto tematika úloh MMO je omezená, výběr úloh není snadný. Ve

srovnání s úlohami naší kategorie A je obtížnost úloh MMO nesporně vyšší. Jde často o úlohy založené na umělých obratech a tricích. Úlohy navrhuji zúčastněné státy. Téměř na každé MMO řešili žáci i československou



Bohuš Sivák, účastník VII. MMO

úlohu. Paradoxní je, že naši žáci tuto úlohu neřešili s velkým úspěchem. To je nepříliš příjemným důkazem, že nebyli na navržené úlohy předem připraveni.

V poslední době MMO nabývá spíše rázu profesionální soutěže. V některých zemích jsou žáci k tomu cíli speci-

álně školeni, a takovou přípravu naši žáci nemají. Můžeme říci, že jsme na MMO měli vždy stoprocentně amatérské družstvo. Záměrně jsme však do družstva zařazovali i žáky z nižších tříd, kteří byli úspěšní v kategorii



Helena Husová, účastnice XIII. MMO

A, aby získali mezinárodní zkušenosti (např. naši žáci Sivák, Mašek aj.).

Účast dívek na MMO je poměrně malá. Ale některé se umístily velmi čestně a získaly ceny (např. H. Husová, A. Vencovská).

MMO přispívají i k seznámení pracovníků matematických soutěží z různých zemí. Vedoucí delegací i členové mezinárodní jury nejsou často pracovníky na poli matematické didaktiky, což je škoda, neboť soutěže by měly být v nejužším styku se školskou matematikou a jejími didaktickými problémy. Snad jen u nás a v několika málo jiných zemích je situace poněkud jiná.

6. *Na matematické olympiádě spolupracují čeští a slovenští matematikové. Jaké jsou zkušenosti s jejich spoluprací?*

Na organizaci MO, tvorbě úloh, na pracovních přednáškách pro olympioniky a na soustředěních účastníků olympiády se již mnoho roků obětavě podílejí někteří pracovníci Matematického ústavu ČSAV a pracovníci pedagogické fakulty UK. Účast pracovníků matematicko-fyzikální fakulty UK je bohužel malá. K dobru této fakulty je však třeba připsat, že od poslední reformy universitního studia je pro posluchače učitelského studia povinný seminář zaměřený k řešení úloh, který vede dr. Jaroslav Šedivý. V něm se mimo jiné analyzují též úlohy MO, což je pro budoucí středoškolské profesory nejlepší přípravou pro jejich práci v MO.

Spolupráce s jinými vysokými školami v ČSR je slabá. Někteří pracovníci vysokých škol přednášeli však v pracovních soustředěních a napsali řadu svazků *Školy mladých matematiků*, které jsou důležitou studijní literaturou pro žáky i pro učitele.

Významnou a velmi záslužnou činnost ve prospěch MO konají slovenští kolegové. Je zásluhou doc. Jozefa Moravčíka a dr. Ladislava Bergera i dalších slovenských spolupracovníků, že MO zůstala i při novém uspořádání naší republiky jednotnou matematickou soutěží v celé ČSSR. Jejich mimořádné organizační schopnosti se

projevily zvláště při uspořádání XIII. mezinárodní matematické olympiády na Slovensku i při uspořádání celostátního kola 22. ročníku naší MO v Žilině.



Alena Vencovská, účastnice XVI. MMO

7. *Při účasti na mezinárodních olympiádách jste zažil jistě některé příhody. Nevzpomínáte si na některou, která by naše čtenáře pobavila?*

Veselých příhod bylo při mezinárodních olympiádách tolik, že by se z nich mohla sestavit celá kratochvilná historie. Vzpomínám si na jednu, která znamenitě cha-

rakterizuje temperament a životní optimismus Jiho-slovanů.

V roce 1967 se konala MMO v Jugoslávii, v černohorském městě Cetyni. K společenským akcím patřil také autobusový zájezd všech účastníků na Jadran. Když jsme v poledne dojeli do Dubrovníku, zajel první autobus, v kterém byli členové mezinárodní jury a jugoslávského organizačního komitétu, na přístavní molo a v rozpacích zastavil. Nikdo ve voze totiž přesně nevěděl, jak se jede k restauraci, v níž byl zajištěn oběd pro celou výpravu. Za „štábním“ vozem dojížděly ostatní autobusy kolony a zablokovaly dokonale průjezd nepříliš širokou komunikací. Za nimi se začala kupit další auta a přiloudala se i dubrovnická električka, která — mimochodem řečeno — byla muzeální raritou z dob staré monarchie; na jejím reostatu bylo možno číst nápis *František Křžík, Praha, Karlín*. A už sem kvapil snědý Dalmatinec v bílé uniformě dopravního policisty a klepal na okénko u řidiče prvního autobusu, dokonce se je snažil otevřít. Řidič je však rázně přibouchl, a tak se výměna názorů mezi ním a dopravním strážníkem vyvíjela v ohnivé gestikulaci. A strážce veřejného pořádku byl neodbytný; už vytahoval z brašny pokutový bloček, neboť na molu je zakázáno zastavovat. Jeho počínání vzrušilo nejen řidiče, ale i celý organizační komitét, který se začal zajímat o to, co se vlastně děje. Členové komitétu se korporativně vyřítili z autobusu a všichni najednou začali policistovi vykládat, že jde o mezinárodní podnik. Přitom ukazovali na označení autobusů znakem mezinárodní matematické olympiády a jejich ruce se výhružně třepetaly kolem hlavy muže v bílé uniformě. Ten poznal, že asi přestřelil, zastrčil bloček, a pohrávaje si s obuškem, počal se vzdalovat. Ale nyní se role vyměnily. Z napadeného se

stal útočník. Jako roj sršňů provázel strážníka organizační komitét a snažil se na něm vynutit přiznání totožnosti. On pochopitelně odmítal, a tu měl kdosi z komitétu geniální nápad: zvolal „foto!“ a po něm všichni ostatní přitakali „foto!“, a už se celý roj řítíl před strážníka, všichni posedali do dřepu a namířili na něho kamery. To ubohého policistu vylekalo tak, že si oběma rukama bleskurychle zakryl tvář jako malé děcko, neboť se už nestačil obrátit zády.

A tu nastala nečekaná peripetie: celý organizační výbor se náhle rozchechtal, ruce s namířenými kamerami klesly. Rozchechtal se i policista, bavili se i chodci, kteří se kolem místa incidentu nakupili a kterých nebylo málo. Pořadatelé si s policistou poplácali po ramenech, a on jim ochotně s mnohou gestikulací ukázal, jak se dostaneme k hledané restauraci. Všechna auta se dala po pohybu a zpočátku hrozivě vypadající konflikt skončil k všeobecné spokojenosti.

8. *A nakonec: Co byste přál naši matematické olympiádě do budoucnosti?*

Přál bych jí, aby se jí podařilo úspěšně proplout všemi úskalími, s nimiž se může v budoucnosti setkat, aby měla stále dosti nadšených spolupracovníků a mohla přispívat ke zvýšení vzdělanosti žáků našich středních škol a ke zkvalitnění vyučování matematice na těchto školách, aby se ve zdraví a svěžesti dožila roku 2000.

Rozmlouvali František Hradecký a Jiří Sedláček

ZASTAVENIE NA KUS REČI S PODPREDESEDOM ÚV MO

Pri jednej z jeho častých pracovných ciest do Prahy sme položili niekoľko otázok doc. RNDr. Jozefovi Moravčíkovi, CSc., prorektorovi Vysokej školy dopravnej v Žiline, ktorý od apríla 1968 pracuje ako podpredseda ÚV MO.

1. *Ako ste po prvý raz prišli do styku s MO?*

Ak mám byť úprimný, MO mi učarovala hneď od svojho vzniku a stala sa mi osudnou. Prvých dvoch ročníkov MO som sa totiž aktívne zúčastnil v kategórii A ako septimán, resp. oktaván piešťanského gymnázia. Hoci som nezískal žiadne vavríny, v druhom ročníku som postúpil iba do krajského kola, riešenie úloh MO, pre ktoré ma získal môj vtedajší profesor matematiky dr. Karol Rován, malo za následok, že som sa rozhodol pre štúdium matematiky.

Natrvalo pre organizačnú prácu v MO ma angažoval r. 1958 ako začínajúceho asistenta katedry matematiky na PF UK v Bratislave prof. Milan Kolibiar, vtedajší predseda KV MO Bratislavského kraja, keď mi zveril úlohu tajomníka KV MO. Táto práca si ma získala natoľko, že som jej zostal verný aj potom, keď som r. 1962 z rodinných dôvodov bol nútený zmeniť svoje pôsobisko a prejsť na katedru matematiky Strojníckej a elektrotechnickej fakulty Vysokej školy dopravnej

v Žiline. V tomto smere mal tam na mňa značný vplyv nadšený a neúnavný organizátor MO v žilinskej oblasti a v celom Stredoslovenskom kraji dr. Ladislav Berger.

2. Je dobre známe, že KV MO v Stredoslovenskom kraji má za sebou veľmi bohatú činnosť pri organizovaní MO, napr. inštruktáže pre učiteľov, sústredenia riešiteľov, krajské kolo kategórie Z a pod. Čo by ste o tom mohli povedať?

Prvoradú zásluhu na tejto činnosti má dlhoročný predseda KV MO Stredoslovenského kraja dr. Berger, ktorý pre realizáciu svojich iniciatívnych organizačných nápadov vie získať ochotných a obetavých spolupracovníkov medzi učiteľmi katedry matematiky Strojníckej a elektrotechnickej fakulty VŠD v Žiline, katedry matematiky Pedagogickej fakulty v Banskej Bystrici a ďalších. Medzi jeho najbližších spolupracovníkov patria súdruhovia Auxt, Beracková, dr. Kršňák, Feťková, Šteffko a ďalší.

V Stredoslovenskom kraji sa začalo s pravidelným poriadaním krajského kola v kategórii D, resp. v kategórii Z už r. 1965 a jeho príklad nasledovali postupne aj ďalšie kraje na Slovensku i v ČSR. Od r. 1973 sa krajské kolo MO kategórie Z poriada vo všetkých slovenských krajoch v ten istý deň a s rovnakými úlohami. Krajské sústredenia riešiteľov MO sa v oboch oblastiach Stredoslovenského kraja (žilinskej a banskobystrickej) uskutočňujú pravidelne už od r. 1962, a dalo by sa veľa hovoriť o viacerých ďalších úspešných podujatiach.

Organizačné schopnosti stredoslovenských a najmä žilinských matematikov popri úspešnom priebehu XIII. MMO najlepšie charakterizuje celoštátne kolo 22. ročníka MO, pôvodne plánované do Bratislavy.

O tom, že sa celoštátne kolo MO pre slintavkovú epidémiu nemôže konať v hlavnom meste SSR, sa Žilinčania dozvedeli telefonicky v pondelok a už vo štvrtok toho istého týždňa sa do centra severozápadného Slovenska schádzali účastníci celoštátneho kola.

3. *Ako by ste charakterizovali prácu na príprave nového štatútu MO a FO ako predsedu komisie, ktorá pripravovala jeho návrh?*

Doteraz platné smernice ministerstva školstva pre organizovanie MO a FO z roku 1963 sa ukázali už v roku 1969 vo viacerých smeroch prežitými a prekonanými. Preto v tomto roku ÚV MO vytvoril komisiu, ktorej som zhodou okolností predsedal, a poveril ju spracovať návrh nových organizačných smerníc, ktoré by zodpovedali súčasným podmienkam organizácie nášho školstva i celej spoločnosti. *Štatút MO* bol pracovný názov tohto návrhu, ktorý presne vymedzuje organizáciu súťaže — kategórie, kolá, riadiace orgány, úlohy jednotlivých spoluporiadateľov, pomocné akcie pre žiakov i učiteľov a pod. Na tomto návrhu si zvlášť cením to, že jednoznačne usiluje o celoštátny charakter MO, hoci jeho prvý variant vznikol v prvom roku federalizácie nášho štátu a v niektorých nematematických kruhoch obidvoch republík sa objavovali tendencie „federalizovať“ MO. Nám, matematikom, bolo zrejmé, že rozdelenie súťaže by znamenalo zbytočné trieštenie síl, a preto sme sa zo všetkých síl snažili mu zabrániť. Zvlášť pre slovenskú matematiku a jej rozvoj má úzka spolupráca s českými matematikmi neoceniteľný význam.

Je však treba len ľutovať, že nové organizačné smernice MO, ktorých návrh bol od roku 1969 do roku 1974 niekoľkokrát prepracovaný na základe pripomienok JČSMF,

JSME, ministerstiev školstva oboch republík a ďalších inštitúcií, neuzreli dosiaľ svetlo sveta. Je nesporné, že to sťažuje prácu organizátorov MO na všetkých úrovniach.

4. *Ako sa s odstupom času pozeráte na XIII. MMO, ktorej organizáciou boli poverení slovenskí súdruhovia v Žiline a Bratislave?*

Myslím, že to bolo po všetkých stránkach úspešné podujatie s výnimkou snád' výsledkov československého družstva. Pričinením mnohých nadšených a obetavých pracovníkov z radov matematikov (dr. Berger, Fefková, dr. Gatiaľ, dr. Grešák, Sivošová, inšp. Zöldy a mnoho ďalších) a vďaka vzácnemu porozumeniu zo strany štátnych, straníckych a spoločenských orgánov na Slovensku, zvlášť v Stredoslovenskom kraji a v okrese a meste Žilina, sa táto MMO v dobrom zmysle zapísala natrvalo do histórie. Jej zahraniční účastníci si na ňu i po rokoch spomínajú len v dobrom a zvlášť vyzdvihujú formu patronátov priemyselných závodov nad jednotlivými družstvami, ktorá sa tu objavila po prvý raz a nenašla zatiaľ nasledovníka.

5. *Čo by ste mohli spomenúť z Vašich skúseností z ďalších MMO, na ktorých ste sa zúčastnili ako vedúci československého družstva alebo jeho zástupca?*

Na MMO v zahraničí som sa dosiaľ zúčastnil dvakrát ako vedúci delegácie ČSSR a trikrát ako pedagogický vedúci družstva. Z týchto ciest si najviac cením možnosť výmeny poznatkov s vedúcimi zahraničných delegácií z práce pri objavovaní a vedení matematických talentov. Hlboko na mňa zapôsobila najmä návšteva diaľkovej matematickej školy pri MGU v Moskve a perfektná organizácia XVI. MMO v NDR.

6. *Ako hodnotíte podiel slovenských matematikov na organizovaní MO?*

O tom je mi opravdu ťažko hovoriť. V prvých rokoch existencie MO bola slovenská matematika v úlohe pozorného žiaka vo vzťahu k matematike v českých zemiach. Pokiaľ ide o školskú matematiku, platí toto konštatovanie dvojnásobne. Nám na Slovensku chýbajú zatiaľ takí skúsení a zapálení pracovníci v oblasti školskej matematiky, akými sú v Čechách napr. doc. Vyšín, dr. Šedivý a ďalší. Preto podiel Slovenska pri práci v MO bol skromnejší. Treba však povedať, že zásluhou viacerých obetavých učiteľov vysokých, stredných i základných škôl dosahovali v MO i účastníci zo Slovenska pekné výsledky. Za mnohých mi dovoľte spomenúť prof. Kolibiara, doc. Hejného, doc. Gatiaľa, dr. Jodasa, s. Kropilákovú, dr. Bartoša, doc. Bukovského, s. Hončarivovú, dr. Korca, doc. Známa, dr. Franeka, s. Trnovského, s. Kútika, s. Berackovú, dr. Kršňáka, s. Bergerovú, s. Štefíka a veľa, veľa ďalších. Vo svojej funkcii ústredného školského inšpektora veľa pre rozvoj MO na Slovensku urobil s. Zöldy. Nie je snáď celkom zanedbateľný ani podiel slovenských autorov na tvorbe edície *Škola mladých matematikov*. Z nich spomeniem aspoň prof. Šaláta, doc. Hejného, doc. Gatiaľa, doc. Bukovského, doc. Riečana, doc. Riečanovú, dr. Bosáka a doc. Černého.

7. *Áká bola spolupráca Jednoty slovenských matematikov a fyzikov pri zabezpečovaní úspešného priebehu MO?*

Možno povedať, že JSMF venuje práci s talentami a pomoci MO značnú pozornosť. Nie je to len organizovanie pracovných seminárov pre riešiteľov MO v jednotlivých pobočkách, inštruktáže pre učiteľov v rámci

letných školení i mimo nich, príprava sústredení riešiteľov MO a pod., ale zvýšená starostlivosť o MO zo strany ÚV JSMF sa prejavuje i v tom, že od roku 1966 má zvláštnu komisiu pre MO, ktorá pozorne sleduje všetko dianie okolo MO na Slovensku, koordinuje činnosť pobočiek JSMF na pomoc MO a predkladá na rokovanie ÚV JSMF a jeho predsedníctva hodnotiace zprávy i iniciatívne návrhy. Táto komisia má napr. zásluhu na už spomínanom celoslovensky organizovanom krajskom kole kategórie Z.

8. *Čo by ste navrhovali pre zlepšenie MO v budúcnosti?*

Svoje návrhy som predložil a predkladám na zasadnutiach PÚV MO a ÚV MO. Som rád, že viaceré z nich sa realizovali a snáď trochu prispeli k skvalitneniu súťaže. Želal by som si však, aby v budúcnosti MO našla podstatne viac aktívnych fanúškov medzi učiteľmi-matematikmi na ZDŠ i stredoškolskými profesormi matematiky. Veľmi by som si prial tiež to, aby nezištná a obetavá práca stoviek učiteľov matematiky a ďalších pracovníkov v MO bola hodnotená orgánmi štátnej správy tak, ako si to zasluhuje a ako to zodpovedá významu matematiky v období rozvíjajúcej sa vedecko-technickej revolúcie, ktorý podčiarkol ÚV KSČ na svojom júlovom zasadnutí v roku 1973 i pri viacerých ďalších príležitostiach.

Rozprával František Hradecký

(II)

Z KRONIKY MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

VLASTIMIL MACHÁČEK A JIŘÍ MÍDA

1. Prehistorie matematické olympiády v Československu

Tradice matematických soutěží pro žáky středních škol v Československu souvisí s činností Jednoty československých matematiků a fyziků, kterou založili roku 1862 posluchači filosofické fakulty pražské university. Její původní název byl Spolek pro volné přednášky z matematiky a fyziky*). Od roku 1870 začala Jednota uveřejňovat ve svých časopisech matematické a fyzikální úlohy pro středoškoláky a na jejich řešení byly vypisovány ceny. Již tehdejší vedení Jednoty pochopilo, že vyučování matematice na středních školách neposkytuje žákům, kteří mají matematické nadání, dostatek úloh a problémů. I když se mezi řešiteli těchto úloh setkáváme s řadou jmen později význačných matematiků, zůstává přece jen okruh zájemců velmi úzký. Bylo to způsobeno hlavně malou publicitou časopisů vydávaných Jednotou a také tím, že žádný veřejný orgán neměl na této činnosti zájem.

Tyto čtenářské soutěže dnes pokračují v časopise *Rozhledy matematicko-fyzikální*, který pravidelně uveřejňuje úlohy pro své čtenáře, řešení úloh hodnotí a vyhlašuje vítěze. Rozhledy vydává ministerstvo školství

*) František Veselý: *100 let Jednoty československých matematiků a fyziků*, SPN Praha 1962

ve Státním pedagogickém nakladatelství, ale o jejich obsah pečuje Jednota čs. matematiků a fyziků.

Nová situace ve vyučování matematice nastala po druhé světové válce v roce 1945. Obrovský pokrok ve všech oborech vědeckého poznání, který signalizoval nastupující vědeckotechnickou revoluci, náhle vyžadoval velké množství pracovníků s kvalitním matematickým vzděláním. Proto bylo třeba získávat studenty pro studium matematiky.

Ve školním roce 1949/50 byla zorganizována matematická soutěž pro žáky středních škol v Olomouckém a Ostravském kraji. Podobnou soutěž připravovaly pro školní rok 1951/52 také některé kraje na Slovensku.

Tyto akce a hlavně dobré zkušenosti s podobnými soutěžemi v SSSR a v Polsku byly akademiku Eduardu Čechovi (1893—1960) bezprostředním popudem k návrhu, aby se pořádala celostátní matematická soutěž pro žáky našich středních škol s názvem matematická olympiáda.

2. Vznik československé matematické olympiády

Dne 12. září roku 1951 se ustavil přípravný výbor MO, který se usnesl, aby se vedení soutěže ujal nejvyšší školský orgán, který by soutěž nejen hmotně zajistil, ale svou autoritou zmobilizoval k práci příslušné školské orgány a především učitele matematiky. Vedle tehdejšího ministerstva školství, věd a umění bylo nutno ke spolupráci získat také tehdejší mládežnickou organizaci, ČSM. Po těchto rozhodnutích vypracoval přípravný výbor návrh organizačního řádu soutěže a předložil jej MŠVU se žádostí, aby se spolu s Československým svazem mládeže a Ústředním ústavem matematickým*)

*) dnes Matematický ústav ČSAV

ujalo uspořádání této soutěže. Podle navrhovaného organizačního řádu měla to být soutěž celostátní, určená prozatím pro žáky výběrových škol.

MŠVU s velikým porozuměním návrh přijalo, a tak



Prof. dr. František Vyčichlo

v prosinci roku 1951 vychází ve Věstníku MŠVU oběžník č. 190, kterým se zřizuje matematická soutěž pro žáky nazvaná matematická olympiáda. Oběžník poukazuje především na praktický a výchovný význam matematiky pro mládež, oceňuje soutěž z hlediska soustavného

zvyšování úrovně vyučování matematice, fyzice a technickým vědám a zdůrazňuje, že pomocí soutěže mají být vyhledáváni a včas podchyceni mladí talentovaní studenti.



Akademik Josef Novák

Tak se zrodila soutěž, která již po 25 let ovlivňuje pedagogickovýchovnou práci v matematice na našich školách a jejíž existence byla impulsem pro vznik podobných soutěží ve fyzice, chemii a biologii.

Celostátním řízením soutěže byl hned od 1. ročníku

pověřen ústřední výbor MO, který byl jmenován ministerstvem školství (tehdy MŠVU) na návrh spolupředatelů, tj. Ústředního ústavu matematického a ÚV ČSM. V současné době jeho členy jmenují společně ministerstva školství České a Slovenské socialistické republiky. Pořadatelé soutěže jsou dnes obě ministerstva školství, ÚV Jednoty československých matematiků a fyziků, ÚV Jednoty slovenských matematiků a fyziků, Matematický ústav ČSAV a ÚV Socialistického svazu mládeže.

Prvním předsedou ÚV MO se stal prof. dr. František Vyčichlo (1905—1958). Od 2. ročníku do 15. ročníku vykonával tuto funkci akademik Josef Novák. Od 16. ročníku je předsedou doc. Jan Vyšín. Ze slovenských matematiků se o MO zvláště zasloužil akademik Jur Hronec (1881—1959), který byl místopředsedou ÚV MO po osm ročníků, od vzniku MO až do konce svého života. S československou MO je nerozlučně spjato jméno Rudolfa Zelinky (1907—1965), zástupce ředitele Matematického ústavu ČSAV, který byl od 1. ročníku MO až do svého náhlého skonu po čtrnáct let jednatelem ÚV MO. Po těchto čtrnáct let na něm spočívala největší část prací spojených s MO. Vedl též československou delegaci na pěti mezinárodních matematických olympiádách.

K technice řízení soutěže uvedeme ještě: ÚV MO se schází pravidelně dvakrát ročně: na podzim v Praze, na jaře při konání III. kola kategorie A v městě, kde III. kolo probíhá. Vlastní centrální agendu vyřizuje předsednictvo ÚV MO, které se schází podle potřeby jednou měsíčně, někdy i častěji.

3. Kronika matematické olympiády

1. ročník (1951/52)

Soutěž se podařilo ve školním roce 1951/52 uspořádat, ač přípravný výbor MO se ustavil až 12. září 1951 a organizační řád (statut) MO byl uveřejněn teprve v prosinci ve Věstníku MŠVU. Přitom ještě příslušný Věstník vyšel opožděně. Významnou úlohu v propagaci soutěže přitom měl časopis *Matematika ve škole*.

Soutěžilo se ve dvou kategoriích. Kategorie A byla určena pro žáky 3. a 4. ročníků gymnasií a středních průmyslových škol, v kategorii B soutěžili žáci 1. a 2. ročníků těchto škol. Soutěž probíhala jako dnes, po 25 letech, ve třech kolech. Každý ze soutěžících musel nejprve úspěšně projít I. kolem, jehož charakter byl studijní, pak následovalo II. kolo, které mělo podobu klauzurní zkoušky, a úspěšní řešitelé II. kola v kategorii A postoupili do celostátního III. kola, které mělo také formu klauzurní zkoušky.

Počet účastníků v 1. ročníku nebyl veliký — 434 v kategorii A a 569 v kategorii B.

Veřejnost byla po skončení 1. ročníku o jeho průběhu informována brožurou *První ročník matematické olympiády*, v níž byla uveřejněna i řešení všech zadáných úloh. Brožuru vydalo SPN v roce 1953. Byla tak založena tradice vydávání brožur tohoto druhu po uzavření každého ročníku MO.

2. ročník (1952/53)

Matematická olympiáda se rozběhla již v září. V časopise *Matematika ve škole* se objevily první články, které popisují zkušenosti z MO a rozebírají příčiny nejčastějších chyb v žákovských řešeních.

3. ročník (1953/54)

Školní rok 1953/54 znamenal přechod k novému uspořádání československého školství: osmileté střední školy a jedenáctileté střední školy. Jsou zavedeny čtyři kategorie: A, B, C a D. Kategorie A, B, C jsou určeny po řadě pro žáky 11., 10. a 9. ročníku JSS. Kategorie D je určena pro žáky osmých tříd osmiletých, a MO tak přestává být omezena na žáky výběrových škol. Úlohy I. kola byly poprvé zveřejněny nejen v časopise Matematika ve škole, ale také ve zvláštním letáku MO.

4. ročník (1954/55)

Poprvé se stalo, že úspěšných řešitelů II. kola kategorie A bylo více než 80 a bylo nutno užít toho článku statutu, podle něhož se může celostátního III. kola zúčastnit nejvýš 80 úspěšných řešitelů II. kola kategorie A. Někteří úspěšní řešitelé II. kola kategorie A nemohli být do III. kola pozváni.

5. ročník (1955/56)

Velmi účinnou pomoc poskytl v tomto ročníku MO časopis Matematika ve škole. Ve školním roce 1955/56 bylo v něm zveřejněno celkem 15 článků věnovaných MO.

6. ročník (1956/57)

O MO začala projevovat zájem širší veřejnost. Ve školním roce 1956/57 psala o ní řada deníků a týdeníků, např. časopis *Květy* přinesl o MO obsáhlou reportáž a jména vítězů III. kola oznámil také Československý rozhlas.

Od ledna 1957 začaly opět vycházet *Rozhledy matema-*

ticko-fyzikální. Okamžitě se rozvinula úzká spolupráce mezi jejich redakční radou a ÚV MO.

7. ročník (1957/58)

Absolutním vítězem tohoto ročníku se stal Zdislav Kovářik z 10. třídy JŠŠ v Hodoníně. Bylo to poprvé, co absolutním vítězem byl žák, který využil možné výjimky a soutěžil v kategorii A, ačkoliv patřil podle školního ročníku do nižší kategorie.

8. ročník (1958/59)

Původní statut MO z roku 1951 byl nahrazen novým statutem, který byl zveřejněn v srpnu 1958 ve Věstníku ministerstva školství a kultury. Tento statut obsahoval všechny změny, ke kterým v průběhu let došlo.

Od 8. ročníku byla přenesena značná část odpovědnosti za průběh I. kola na učitele a vedení škol. Řešení úloh I. kola začali opravovat učitelé příslušných škol a KV MO (resp. OV MO v kategorii D) je od nich dostávaly již opravené a provedly jen recenzi a výběr žáků do II. kola.

V červenci 1959 byla v Rumunsku uspořádána I. mezinárodní matematická olympiáda. Zúčastnila se jí družstva ze 7 zemí, mezi nimi i z Československa. Od té doby se MMO pořádá každoročně.

9. ročník (1959/60)

Koncem října 1959 vychází ve Věstníku ministerstva školství a kultury nový organizační řád, podle něhož dalším spolupředatelem MO se stala Jednota československých matematiků a fyziků.

Po vzoru MO vzniká fyzikální olympiáda (FO). Tato

nová soutěž bezesporu začala odčerpávat MO řadu zdatných účastníků.

Poprvé se stává absolutním vítězem MO student průmyslové školy, a to Petr Tomšů z Kopřivnice.

10. ročník (1960/61)

Novinkou tohoto ročníku jsou pracovní přednášky pro účastníky MO. Organizují je KV MO spolu s příslušnými pobočkami JČSMF.

První kolo má v tomto ročníku poprvé dvě části: přípravnou a soutěžní. Řešení přípravných úloh je však povinné. Přípravné úlohy jsou velmi podobné úlohám, které se běžně řeší ve škole.

K 10. výročí MO udělilo ministerstvo školství a kultury uznání za práci vykonanou v MO 25 pracovníkům a předsednictvo ÚV JČSMF uznání za práci dalším 56 pracovníkům. Nakladatelství Mladá fronta věnovalo putovní pohár pro nejlepšího řešitele III. kola kategorie A, tj. pro absolutního vítěze ročníku. V budově Vysoké školy pedagogické v Praze byla uspořádána výstava k 10. výročí MO.

11. ročník (1961/62)

Koncem roku 1961 začala na návrh dlouholetého člena ÚV MO Františka Veselého, odb. asistenta VŠSE v Plzni, vycházet v nakladatelství Mladá fronta knižnice *Škola mladých matematiků*. Vyšly její první dva svazky (viz přílohu 4). MŠK se rozhodlo vykupovat část nákladu těchto brožur a rozdělovat je školám 2. cyklu, aby tam byly pro žáky k dispozici.

V únoru 1962 bylo v Klánovicích internátní soustředění 28 nejlepších řešitelů kategorie A; bylo to vůbec první soustředění olympioniků od vzniku MO.

Třetí kolo kategorie A se poprvé konalo mimo Prahu, a to v Liberci.

V rámci oslav 100. výročí založení JČSMF byla v první polovině července 1962 uspořádána v Československu IV. mezinárodní matematická olympiáda. Dějištěm byl Jihočeský kraj; vlastní soutěž se konala v kouzelném prostředí zámku Hluboká.

12. ročník (1962/63)

Třetí kolo kategorie A se konalo poprvé na Moravě, a to v Brně, V dubnu 1963 vydává MŠK ve svém Věstníku nový organizační řád, společný pro MO i FO. Podle něho byla jako příprava na další ročník uspořádána soustředění nejlepších řešitelů MO a FO v kategorii B. Soustředění byla dvě, jedno na Richtrových boudách v Krkonoších a druhé v Ružomberku, v každém bylo 50 účastníků. Konala se koncem června a začátkem července po dobu 3 týdnů. Další novinkou statutu z r. 1963 bylo zřizování speciálních tříd pro žáky zajišťující se o matematiku a fyziku. Již od školního roku 1963/64 byly zřízeny speciální 3. třídy na matematicko-fyzikálních větvích středních všeobecně vzdělávacích škol v Praze, Brně a Bratislavě.

13. ročník (1963/64)

Třetí kolo kategorie A bylo poprvé na Slovensku, a to v Bratislavě. Soustředění pro nejlepší řešitele kategorie B bylo už jen jedno, pro české i slovenské účastníky, ve Žďáru nad Sázavou.

14. ročník (1964/65)

Mezi vítězi 14. ročníku se na 3. až 7. místě umístil Bohuš Sivák, tehdy žák 8. ročníku ZDŠ ve Zvolenu.

Poprvé se tak mezi vítězi setkáváme se žákem dosud nestudujícím na střední škole. Bohuš Sivák pak jede jako člen čs. družstva na VII. MMO do Berlína, kde získává 3. cenu.

15. ročník (1965/66)

Na jaře 1966 vyhlásila JČSMF konkurs na návrhy úloh pro MO. Podmínky konkursu byly zveřejněny v dubnovém čísle časopisu Matematika ve škole. Konkurs probíhá od 15. ročníku MO nepřetržitě a informace o něm byly mnohokrát uveřejněny. Od 23. ročníku se na něj také upozorňuje v letáčích s úlohami MO.

16. ročník (1966/67)

Odevzdávání přípravných úloh přestalo být povinné. V tomto ročníku se poprvé v celém státě po celý rok prováděla příprava vybraných žáků pro mezinárodní matematickou olympiádu podle ústředně připravených materiálů. Tito žáci byli přiděleni školitelům, kterými byli většinou vysokoškolští učitelé.

Novinkou II. a III. kola kategorie A bylo zavedení bodovacího systému místo tradičního klasifikování.

Na celostátním soustředění úspěšných řešitelů kategorie B se přednášela poprvé také nestředoškolská látka. Byla to témata *Použití Dirichletova principu v teorii čísel a v kybernetice* (Bukovský — Černý); *Dotyk geometrických útvarů jako extrémní vlastnost* (Kovářík — Kováříková); *Oddělování konvexních množin* (Morávek — Vlach).

17. ročník (1967/68)

Bodovacího způsobu se použilo již také ve II. kole kategorie B a C. Vzhledem k blížící se školské reformě

začal ÚV MO připravovat nový statut MO. Olympiády se týkalo hlavně nahrazení tříletých všeobecně vzdělávacích škol čtyřletými gymnasii a připravované modernizování osnov matematiky.

18. ročník (1968/69)

Soutěž III. kola kategorie A proběhla poprvé ve dvou dnech formou obdobnou mezinárodní matematické olympiádě. Každý den řešili účastníci tři úlohy ve čtyřech hodinách.

19. ročník (1969/70)

V tomto ročníku byly realizovány všechny již od roku 1967 chystané úpravy soutěže. Kategorie D byla přejmenována na kategorii Z. Pro školy 2. cyklu byly zavedeny jen dvě kategorie, A a B, vždy pro žáky dvou ročníků (kategorie A pro 3. a 4. ročník, kategorie B pro 1. a 2. ročník).

V kategorii Z vzrostl v I. a v II. kole počet účastníků i úspěšných řešitelů. Zřejmě k tomu došlo zásluhou komentářů k úlohám přípravné i soutěžní části I. kola kategorie Z. Tyto komentáře byly určeny jen učitelům a obsahovaly návrhy, jak uvést žáky do řešení úloh.

20. ročník (1970/71)

Komentáře k úlohám byly vypracovány i pro I. kolo kategorie B.

V kategorii Z bylo umožněno OV MO rozdělit čtyři hodiny klauzurní práce na dvě dvouhodinovky a mezi ně zařadit přestávku.



XIII. MMO v Žilině r. 1971
Slavnostní zasedání mezinárodní jury —
projev akademika Schwarze

☞ V prosinci 1970 byla navázána spolupráce s ÚV SSM, který se stal spolupořadatelem MO.

Při příležitosti 20. ročníku MO byla na Slovensku uspořádána XIII. mezinárodní matematická olympiáda. Slavnostní zahájení i zakončení se uskutečnilo v Bratislavě. Vlastní soutěž proběhla v Žilině. Československé družstvo v ní však nemělo valný úspěch. XIII. MMO



Panel výstavy XIII. MMO

byla¹ jinak¹ po¹ všech¹ stránkách — organizační, společenské i kulturněpolitické — velmi zdařilá. Zahraniční účastníci zvláště oceňovali, že se na organizaci MMO podílely též průmyslové závody. Některé podniky okresů Žilina, Povážská Bystrica a Martin převzaly nad jednotlivými družstvy patronáty, všestranně se o svěřená družstva celý jeden den staraly a věnovaly též hod-

notné ceny pro vítěze MMO. Značný podíl na organizaci a zajištění patronátů měl RNDr. Ladislav Berger, odb. asistent VŠD v Žilině.

21. ročník (1971/72)

Opět byla zavedena kategorie C. Od tohoto ročníku MO je kategorie A určena žákům 3. a 4. ročníku středních škol všech druhů, kategorie B žákům 2. ročníku a kategorie C žákům 1. ročníku těchto škol.

Komentáře k úlohám I. kola byly zpracovány pro kategorie Z a C.

22. ročník (1972/73)

V tomto ročníku se v kategoriích A, B a C započalo se systematickým zadáváním úloh z modernizované školské matematiky. Komentáře k úlohám I. kola byly zpracovány již pro všechny kategorie.

23. ročník (1973/74)

Se soutěží III. celostátního kola kategorie A ve Strakonících byl spojen i kulturní večer s jihočeským folkloristickým programem. Účinkoval Prácheňský soubor písní a tanců. V televizním seriálu „Setkání s talenty“ byl jeden večer věnován MO a MMO.

24. ročník (1974/75)

Na začátku ročníku bylo vybráno 30 studentů, o nichž se předpokládalo, že mezi nimi jsou členové budoucí-



Záběr z klauzurní práce na XIII. MMO

ho čs. družstva na XVII. MMO. Během roku jim byly posílány úlohy a žáci je řešené zasílali zpět. Opravené jim byly vráceny. Pro tuto metodu přípravy se vžil název „korespondenční seminář“.

V tomto ročníku poprvé udělil Matematický ústav ČSAV zvláštní peněžitou cenu, která je určena pro toho účastníka 3. kola kategorie A, jenž použije při řešení některé úlohy tohoto kola nejoriginálnějšího postupu. Prvním odměněným se stal Jiří Peňáz z Brna.

Příloha 1 — První a druhé kolo československé MO
v číslech. Počet úspěšných řešitelů

Ročník	Školní rok	Kategorie A kolo		Kategorie B kolo		Kategorie C kolo		Kategorie D (Z) kolo	
		I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1.	1951/52	76	47	90	30	—	—	—	—
2.	1952/53	106	51	133	42	—	—	—	—
3.	1953/54	119	70	126	99	94	64	2 499	1 852
4.	1954/55	196	151	361	189	321	174	2 827	1 807
5.	1955/56	376	205	469	130	541	187	6 660	4 711
6.	1956/57	373	146	343	129	409	273	7 634	4 935
7.	1957/58	342	162	419	208	820	518	6 725	4 171
8.	1958/59	605	131	539	206	566	288	5 894	3 677
9.	1959/60	541	130	417	107	667	204	7 877	4 135
10.	1960/61	369	129	330	92	558	240	7 362	3 281
11.	1961/62	386	77	426	124	510	224	7 081	3 894
12.	1962/63	277	52	321	81	777	373	5 054	2 913
13.	1963/64	257	68	782	224	994	317	6 888	2 899
14.	1964/65	661	152	837	187	1 186	498	6 851	3 551
15.	1965/66	454	132	754	131	771	350	5 441	2 263
16.	1966/67	670	244	612	81	1 053	270	6 210	2 311
17.	1967/68	344	70	513	114	938	99	6 065	2 191
18.	1968/69	273	37	370	34	636	35	4 264	1 455
19.	1969/70	447	88	612	149	—	—	5 550	1 790
20.	1970/71	352	58	656	162	—	—	7 376	3 807
21.	1971/72	445	170	354	122	926	180	7 870	3 063
22.	1972/73	858	152	667	225	975	418	6 989	2 423
23.	1973/74	775	198	601	120	1 192	230	7 049	1 561
24.	1974/75	981	272	628	66	818	141	6 618	2 737

Příloha 2 — Celostátní třetí kola **MO** v kategorii **A**

Ročník	Školní rok	Místo soutěže	Počet			Jméno vítěze, ročník a škola, kterou navštěvoval
			účastníků	vítězů	dalších úspěšných řešitelů	
1.	1951/52	Praha	46	22	—	<i>Juraj Bosák</i> , 4. roč.
2.	1952/53	Praha	51	20	—	2. gymn., Bratislava
3.	1953/54	Praha	71	20	25	<i>Ervén Kindler</i> , 3. ročník gymn., Praha, Londýnská
4.	1954/55	Praha	80	20	14	<i>Oldřich Kovalski</i> , 11. ročník JSS, Brno-Tábor
5.	1955/56	Praha	77	20	—	<i>Jaromír Jakeš</i> , 11. ročník JSS, Brno-Královo Pole <i>Břetislav Novák</i> , 11. ročník JSS, Chrudim
6.	1956/57	Praha	79	20	—	<i>Jaroslav Lukeš</i> , 11. ročník JSS, Praha, U Santošky
7.	1957/58	Praha	80	20	—	<i>Zdislav Kovářik</i> , 10. ročník JSS, Hodonín
8.	1958/59	Praha	73	20	—	<i>Jiří Moudrý</i> , 11. ročník JSS, Pardubice, Slov. nár. povst.
9.	1959/60	Praha	62	20	—	<i>Petr Tomáš</i> , 4. ročník SPSS, Koprivnice
10.	1960/61	Praha	80	20	—	<i>Karel Příkrý</i> , 3. ročník SVVŠ, Výchov
11.	1961/62	Liberec	60	15	—	<i>Jaroslav Ježek</i> , 3. ročník SVVŠ, Praha, 4. Křesomyslova

12.	1962/63	Brno	50	18	—	<i>Josef Daneš</i> , 3. ročník SVVŠ, Praha 9, Lidových milicí <i>Jaroslav Zemánek</i> , 3. ročník SVVŠ, Praha 4, Křesomyslova <i>Jura Charvát</i> , 3. ročník SVVŠ, Příbor <i>Milan Štědrý</i> , 3. ročník SVVŠ, Chotěboř <i>Peter Mederly</i> , 3. ročník SVVŠ, Prievidza
13.	1963/64	Bratislava	75	15	—	
14.	1964/65	Olomouc	80	20	—	
15.	1965/66	Žilina	57	20	—	
16.	1966/67	Plzeň	77	11	7	<i>Pavel Vejvoda</i> , 3. ročník SVVŠ, Praha 2, W. Piecka <i>Bohuš Svák</i> , 2. ročník SVVŠ, Zvolen
17.	1967/68	Brno	52	17	6	<i>Tomáš Mašek</i> , 3. ročník SVVŠ, Praha 2, W. Piecka
18.	1968/69	Havířov	35	8	15	<i>Pavel Pudlák</i> , 3. ročník SVVŠ, Praha 7, Nad štolou
19.	1969/70	Košice	44	11	13	<i>Jan Brychta</i> , 3. ročník gymn., Praha 3, Pražanka
20.	1970/71	Pardubice	58	8	12	
21.	1971/72	Kladno	74	19	14	<i>Miroslav Knošek</i> , 3. ročník gymn., Brno, tř. kap. Jaroše
22.	1972/73	Žilina — Bratislava	75	10	17	<i>Jaromír Šimša</i> , 3. ročník gymn., Ostrava 1, Šmeralova 1
23.	1973/74	Strakonice	79	11	12	<i>Jiří Navrátil</i> , 1. ročník gymn., Olomouc-Hejčín
24.	1974/75	Ústí n. L.	79	18	19	<i>Jiří Navrátil</i> , 2. ročník gymn., Olomouc-Hejčín
25.	1975/76	Bratislava				

Příloha 3 — Účast ČSSR na MMO

Ročník MMO	Rok	Země konání soutěže	Počet bodů čs. družstva	Počet zemí	Neoficiální pořadí	Ceny získané čs. družstvem			
						1.	2.	3.	Diplom za ori- ginální řešení
1.	1959	Rumunsko	192	7	3	1	—	—	4
2.	1960	Rumunsko	257	5	1	1	1	2	2
3.	1961	Maďarsko	159	6	4	—	—	1	3
4.	1962	Československo	212	7	4—5	—	1	3	—
5.	1963	Polsko	151	8	5	1	—	1	—
6.	1964	SSSR	194	9	7	—	2	2	—
7.	1965	NDR	159	10	6	—	1	3	—
8.	1966	Bulharsko	215	9	8	—	1	2	—
9.	1967	Jugoslávie	159	13	6—7	—	1	3	—
10.	1968	SSSR	248	12	7	2	4	—	—
11.	1969	Rumunsko	170	14	8	—	—	3	1
12.	1970	Maďarsko	150	14	7	—	—	4	1
13.	1971	Československo	55	15	8	—	—	1	—
14.	1972	Polsko	130	14	9	—	—	4	—
15.	1973	SSSR	149	16	7	—	1	4	—
16.	1974	NDR	156	18	12	—	—	2	—
17.	1975	Bulharsko	162	17	12	—	—	2	—

Příloha 4 — Seznam dosud vydaných svazků edice *Škola mladých matematiků* v nakladatelství Mladá fronta

1. *František Hradecký - Milan Koman - Jan Vyšín* : Několik úloh z geometrie jednoduchých těles, 1961 a 1963
2. *Jiří Sedláček* : Co víme o přirozených číslech, 1961 a 1965
3. *Jaroslav Šedivý* : Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách, 1962
4. *Miroslav Šisler - Jiří Jarník* : O funkcích, 1962 a 1963
5. *František Veselý* : O nerovnostech, 1963
6. *Rudolf Výborný* : Matematická indukce, 1963 a 1966
7. *Jaroslav Šedivý* : O podobnosti v geometrii, 1963 a 1967
8. *Jiří Váňa* : O rovnicích s parametry, 1964 a 1970
9. *Jan Vyšín* : Konvexní útvary, 1964
10. *Jiří Sedláček* : Faktoriály a kombinační čísla, 1964
11. *Josef Holubář* : Geometrická místa bodů v prostoru, 1965
12. *Karel Havlíček* : Prostory o čtyřech a více rozměrech, 1965
13. *Miroslav Šisler - Josef Andrys* : O řešení algebraických rovnic, 1966
14. *František Veselý* : O dělitelnosti čísel celých, 1966
15. *Milan Koman* : Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic, 1966
16. *Stanislav Horák* : Kružnice, 1966
17. *Jaromír Hroník* : Úlohy o maximech a minimech funkcí, 1967
18. *Karel Havlíček* : Analytická geometrie a nerovnosti, 1967
19. *Jiří Jarník* : Komplexní čísla a funkce, 1967
20. *Bruno Budinský - Stanislav Šmakal* : Goniometrické funkce, 1968
21. *Alois Apfelbeck* : Kongruence, 1968
22. *Tibor Šalát* : Dokonalé a spřátelené čísla, 1969
23. *Jaroslav Morávek - Milan Vlach* : Oddělitelnost množin, 1969
24. *Ján Gatiaľ - Milan Hejný* : Stavba Lobačevského planimetrie, 1969

25. *Leo Bukovský - Igor Kluvánek* : Dirichletov princíp, 1970
26. *Karel Hruša* : Polynomy v moderní algebře, 1970
27. *Stanislav Horák* : Mnohostěny, 1970
28. *Bruno Budinský - Stanislav Šmakal* : Vektory v geometrii, 1971
29. *František Zítek* : Vytvořující funkce, 1972
30. *Milan Koman - Jan Vyšín* : Malý výlet do moderní matematiky, 1972 a 1974
31. *Oldřich Odvárko* : Booleova algebra, 1973
32. *Jan Vyšín - Jitka Kučerová* : Druhý výlet do moderní matematiky, 1973
33. *Jaroslav Morávek* : O dynamickém programování, 1973
34. *Ladislav Rieger* : O grupách, 1974
35. *Alois Kufner* : Co asi nevíte o vzdálenosti, 1974
36. *Ján Černý* : O aplikáciach matematiky (v tisku)
37. *Beloslav Riečan - Zdena Riečanová* : O pravdepodobnosti (v tisku)
38. *Juraj Bosák* : Latinské štvorce (v tisku)
39. *Alois Kufner* : Nerovnosti a odhady, 1975

VZPOMÍNKA NA MATEMATICKOU OLYMPIÁDU

BŘETISLAV NOVÁK A JAROSLAV MORÁVEK

V době, kdy již probíhal první ročník MO, jsme oba počítali obsahy ploch a objemy těles různých geometrických útvarů a potýkali se s trojčlenkou a úpravou algebraických výrazů. Na chrudimskou jedenáctiletku jsme sice přišli s jistým časovým odstupem, ale oba již jako známí počtáři (zejména v představách strýců, tet a známých), sami pak pyšní na to, že nám nejsou cizí taje derivování a integrování — prostě ve vyšší matematice jsme se cítili již jako doma.

Našim profesorům S. Novotnému a J. Hamerníkovi připadl nelehký úkol — přesvědčit nás, že naše počty a matematika jsou různé věci. S odstupem času vidíme zřetelně, jak to muselo být nesnadné obrátit nás z víry „Vojtěcha Jana“ na „víru Vojtěcha Jarníka“. Abychom však byli spravedliví, uveďme, že oba naši vyučující měli velmi účinného pomocníka — matematickou olympiádu, která nás někdy velmi tvrdě ztrátou bodů v prvním kole poučila, co pravá matematika vyžaduje.

Řada jmen studentů chrudimské jedenáctiletky, která najdete mezi vítězi i úspěšnými řešiteli při listování ročenkami MO, svědčí jasně o tom, že díky profesorům S. Novotnému a J. Hamerníkovi (a také díky tradici, kterou v Chrudimi založil nedávno zesnulý prof. J. Langpaul) vzešla z východočeských Athén početná skupina mladých lidí, kterým láska k matematice zůstala trvalou nemocí po celý život. Málo je třeba známo, že pod

vedením prof. S. Novotného probíhala na chrudimské jedenáctiletce místní miniolympiáda, která zachytila zájemce, kteří si na velkou olympiádu ještě netroufali.

Když jsme se probojovali do krajského kola v Pardubicích, seznámili jsme se s neúnávným propagátorem matematiky a MO v bývalém Pardubickém kraji, prof. J. Honzákem, dlouholetým předsedou KV MO. Byl to tak řečeno matematik tělem i duší, který snad ještě více než matematiku miloval fyziku, více než fyziku královskou hru šachy — a více než šachy opět matematiku. Věnoval nám oběma (i řadě jiných středoškolských studentů) mnoho času, zval nás k sobě do bytu, rozebíral s námi naše řešení úloh olympiády — prostě staral se o nás. Nebylo řídkým zjevem, že jsme od něho dostali zásilku knih jakožto dar KV MO. Dodnes máme však podezření, že značná část z nich byl jeho osobní dárek. Při každém setkání nás častoval problémy, jako např.: Buď dán trojúhelník ABC a tři čísla p, q, r . Na přímkách AB, BC, CA určíme body C', A', B' tak, aby jejich dělicí poměr k dvojicím bodů $(A, B), (B, C)$ a (C, A) byl po řadě p, q, r . Úloha záležela v určení poměru obsahů ploch trojúhelníků ABC a $A'B'C'$. Když jeden z nás přinesl v krátké době analytické řešení, narazil na zasmušilou tvář profesora Honzáka: „Ale já jsem chtěl syntetické řešení.“

Stalo se též, že jeden z nás odevzdal v prvním kole řešení úlohy, které bylo sice po věcné stránce v naprostém pořádku, avšak bylo těžkopádné tím, že se v něm vyšetřovalo velmi mnoho zvláštních případů, z nichž mnohé bylo možné vyšetřovat společně. Důsledkem této nešikovnosti pak bylo jedenáct stránek rukopisu, které si popis řešení vyžádal. Při pozdějším setkání se studentem řekl prof. Honzák zpola vyčítavě: „Ty jsi mi ale

hochu dal; já mám 50 haléřů za opravu jedné úlohy; ale máš to dobré.“*)

Též příslušníci starší generace rádi vzpomínají na prof. Honzáka, působícího před válkou na pardubické reálce. Tehdy se běžně stávalo, že profesor Honzák pozval do kavárny studenta, kterého náhodou potkal na ulici během své procházky, zaplatil mu občerstvení a hrál s ním šachy. Jestliže student partii vyhrál (což se ovšem nestávalo často), vyzval jej prof. Honzák k měření sil ve školním předmětu, např. ve fyzice, a student nemohl odmítnout. V tomto souboji byl ovšem již student poražen, z čehož měl prof. Honzák téměř dětsky upřímnou radost: „Vidíte, hochu, v šachách jste mne porazil, ale ve fyzice jsem porazil já vás.“

Ještě mnoho veselých příhod by bylo možné vyprávět o tomto přísném, ale současně velmi lidském učiteli. Např. jeden z nás byl svědkem toho, jak prof. Honzák na krajském soustředění předložil olympionikům za domácí úlohu slavnou Fermatovu hypotézu.

K dokreslení lidského profilu prof. Honzáka uvedme na závěr jeden jeho výrok nutící k zamyšlení. Když se kdosi tázal na konci školního roku, zda se bude konat schůze KV MO, odpověděl prof. Honzák: „Poslední schůze byla v listopadu, od té doby jsem žádnou další nesvolal. Já nerad schůze svolávám — dělám raději všechno sám.“

*) Dnes už je tento povzdech prof. Honzáka neaktuální: dnes opravují učitelé žákovská řešení zdarma — z pouhého nadšení pro věc,

TŘINÁCT LET PRÁCE V KATEGORII Z

KAREL JAKOUBEK

Přerovávám šestikilogramový balík dokumentů z této soutěže. Byl jsem po léta referentem KV MO hl. m. Prahy. Pečoval jsem o zdárný průběh soutěže, propagoval účast, přípravu a doškolování účastníků, kontroloval a hodnotil snahu a úspěchy svých deseti znamenitých spolupracovníků, kteří vedli MO ve svých obvodech. Soutěž se nám vydařila a košatě se rozrostla. Stala se stálým a spolehlivým zdrojem péče o žáky z 9. tříd, které matematika zajímá a kteří mají k ní i nadání. Zmíněný balík obsahuje hodnocení a zápisy asi o 155 000 úlohách od 22 588 účastníků, z nichž 5 352 (z toho 2 145 dívek) splnilo úspěšně druhé kolo a obdrželo diplomy (pochvalná uznání*). Výsledky uvádím v této tabulce:

Ročník 10.—22.	Přípravný stupeň		I. kolo		II. kolo		Klasifi- kace II. kola
	P	U	P	U	P	U	
Počet účast- níků	22 588	17 904	13 901	9 440	8 256	5 352	2,3
v %	13,5	10,7	8,3	5,6	4,9	3,2	

*) Byl tudíž poměr úspěšných chlapců a dívek $\div 3 : 2$

Za základ pro výpočet procent byl vzat počet všech žáků 9. tříd za 13 roků. P značí počet všech účastníků, U počet úspěšných řešitelů. Číslo 3,2 můžeme chápat tak, že tolik procent žáků 9. tříd pražských škol vyniká v matematice, neboť byli úspěšní v II. kole kategorie Z (D), jehož podmínky byly značně přísné (pracuje se ve vymezeném čase, ve značné izolaci, samostatně a za dozoru). Klasifikace 2,3 je průměrem všech účastníků při klasifikaci: 1 výborně, 2 dobře, 3 nevyhovuje. Podle výsledku II. kola byl úkol splněn přibližně na 35 %, přičemž úspěšní splnili tento úkol vysoko nad uvedený průměr, kdežto neúspěšní zůstali hluboko pod tímto průměrem.

Matematická olympiáda kategorie Z změnila svůj původní charakter, propagační. Stala se soutěží výběrovou, náročnost úloh se velmi zvýšila. Je nezbytné doškolení žáků a pomoc, zvláště na přípravném stupni; poskytuje se formou komentářů, určených učitelům. Podle posledního usnesení ÚV MO bude mít kategorie Z opět původní propagační charakter.

Učitelé matematiky sloužili v těch uplynulých letech velikému množství zájemců o matematiku, sloužili obětavě, trpělivě a nezištně. Odměnou jim byla pochvala a uznání, radost z úspěchů a blažený pocit, že rozvíjejí schopnosti dětí, které mají zájem, schopnosti a nadání pro matematiku.

Také pomoc obvodních národních výborů byla značná. V těchto třinácti letech věnovaly částku 100 000 Kčs, aby úspěšní řešitelé druhých kol mohli být odměněni odbornou literaturou a technickými pomůckami.

Úspěchy účastníků ve druhých kolech MO kategorie Z přiměly KV MO v Praze uspořádat ještě třetí kola a tak soutěž zdokonalit. Byly zde však překážky: značná časová tíseň, současný shluk důležitých akcí, velmi

kratičké lhůty. Ale pokus se zdařil a velmi se osvědčil. Do třetích kol byli vybráni dvojím řízením nejlepší účastníci druhých kol ze všech pražských obvodů. Počet žáků byl omezen na 40. Soutěže se konaly v 20., 21. a 22. ročníku MO (tj. v letech 1970—1973). Úlohy připravili dr. F. Běloun a prof. F. Hradecký. Užívalo se bodovacího způsobu hodnocení, přičemž počet bodů pro jednotlivé části řešení každé úlohy stanovili autoři úloh. Tak byla zajištěna objektivita hodnocení. V průměru byla tato třetí kola splněna všemi účastníky na 48 %, přičemž sedm nejlepších dosáhlo v každém z uvedených ročníků 69—96 %. Mezi vítězi byli žáci, kteří se umísťují na předních místech ve vyšších kategoriích.

RNDr. LADISLAV BERGER

A 25 ROKOV MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

JOZEF MORAVČÍK

Pri spomienkovom ohliadnutí sa na históriu štvrtstoročnej existencie našej matematickej olympiády si zvláštnu zmienku zaslúžia tí učitelia matematiky a organizační pracovníci, ktorí stáli pri jej kolíske a zostali jej verní až do dnešného dňa. Medzi nich nepochybne patrí i odborný asistent katedry matematiky na Strojníckej a elektrotechnickej fakulte Vysokej školy dopravnej v Žiline RNDr. Ladislav Berger.

Prvý ročník MO v školskom roku 1951/52 ho našiel ako profesora gymnázia v Žiline a odborného poradcu pre matematiku pri odbore školstva rady ONV v Žiline plne pripraveného využívať túto novú formu objavovania a vedenia matematických talentov. Je nesporne do značnej miery jeho zásluhou, že na stredných školách vtedajšieho Žilinského kraja našla MO úrodnú pôdu a úspešne sa rozvíjala už od prvých ročníkov. Od ustanovenia žilinského krajského výboru matematickej olympiády v školskom roku 1954/55 sa stal jeho predsedom a prostredníctvom metodickej pomoci učiteľom pracujúcim s riešiteľmi MO získaval týchto nielen pre prácu s nadanými žiakmi, ale aj za členov Jednoty československých matematikov a fyzikov. Žilinská pobočka JČSMF rozširovala rady svojich členov a zapúšťala hlboké korene v okresoch kraja práve vďaka matematickej olympiáde.

Dr. Berger bol vo funkcii predsedu KV MO priekop-

níkom nových foriem a metód práce. Z jeho iniciatívy vydával KV MO pravidelný spravodaj o výsledkoch jednotlivých škôl v súťaži a tým podnecoval učiteľov k cielavedomej systematickej práci s talentami. Okrem výsledkov obsahovali jednotlivé čísla spravodaja pokyny pre organizáciu súťaže, upozornenia na najčastejšie chyby, ktorých sa žiaci v riešení dopúšťali, a pod.

Po územnej reorganizácii v roku 1960 a vzniku Stredoslovenského kraja pracoval dr. Berger v KV MO tohto kraja 3 roky ako podpredseda, ale už od školského roku 1963/64 je opäť predsedom KV MO a túto funkciu s jemu vlastným zánietením a organizačnými schopnosťami vykonáva doteraz.

Opäť len jeho iniciatíve možno pripísať organizovanie krajských sústredení riešiteľov MO, ktoré sa od júna 1962 poriadajú pravidelne každý rok. Zúčastňuje sa ich 35—40 vybraných riešiteľov MO v žilinskej a práve toľko v banskobystrickej oblasti. Počas 5—6 dní v pracovných seminároch žiaci nielen načerpajú nové matematické poznatky, ale vo veľmi peknom prírodnom prostredí si oddýchnu pri popoludňajšom športovaní.

V širokej učiteľskej verejnosti sa stal dr. Berger známym predovšetkým ako zánietený organizátor školení pre učiteľov, ktoré sa stali predobrazom letných škôl. Od roku 1959 organizoval a organizuje takéto školenia pravidelne. Sú bohato navštevované, pretože majú veľmi dobrú odbornú úroveň a vždy sú lokalizované do príjemného prostredia poskytujúceho možnosti turistiky a oddychu. Na žiadnom z týchto školení nechýbala prednáška na pomoc učiteľom pracujúcim v MO, resp. pri vedení matematických talentov všeobecne. Na pomoc učiteľom ZDŠ pracujúcim v MO organizuje pobočka JSMF v Žiline z iniciatívy dr. Bergera od r. 1966 dvoj až trojdňové inštruktáže v jednotlivých okresoch. Učitelia

ich veľmi radi navštevujú a pochvaľujú si ich odbornú náplň.

Bol to opäť KV MO Stredoslovenského kraja na čele so svojim predsedom dr. Bergerom, ktorý začal od školského roku 1965/66 pravidelne organizovať krajské kolo MO v kategórii pre ZDŠ, čím sledoval zvýšenie úrovne súťaže v jednotlivých okresoch.

Zvláštnu zmienku si zaslúži skutočnosť, že dr. Berger bol pedagogickým vedúcim československého družstva na XII. MMO v Maďarsku a skúsenosti tam nadobudnuté veľmi dobre využil ako tajomník organizačného výboru XIII. MMO, ktorá sa v roku 1971 konala na Slovensku — v Žiline a v Bratislave. Zahraniční účastníci XIII. MMO si veľmi pochvaľovali organizáciu súťaže a najmä formu patronátov, ktoré prevzali nad jednotlivými družstvami podniky v žilinskej oblasti. Iniciátorom týchto patronátov bol opäť dr. Berger.

Svoje vynikajúce organizačné schopnosti uplatňoval však na pomoc MO aj ako tajomník ÚV JSMF, ktorý si od roku 1966 na jeho podnet vytvoril zvláštnu komisiu pre MO, aby sledovala priebeh súťaže na Slovensku a predkladala iniciatívne návrhy na zlepšenie.

V krátkom spomienkovom článku sme stačili vymenovať opravdu len málo z toho, čo je v doterajších ročníkoch MO spojené s menom dr. Bergera. Veď on doslovne zasvätil viac ako tretinu zo svojho bohatého a plodného života matematickej olympiáde. Školský rok 1975/76, ktorý je jubilejným pre našu MO, je zhodou okolností jubilejným aj pre dr. Bergera, dožívajúceho sa 7. XI. 1975 šesťdesiatpäť rokov. Zaželajme mu preto pri tejto príležitosti pevné zdravie a ešte veľa tvorivých síl, aby sme sa s ním stretávali pri mnohých ďalších jubileách matematickej olympiády.

KDO BYL RUDOLF ZELINKA

JAN VYŠÍN

Je nemožné psát o prvních dvaceti pěti letech československé celostátní matematické olympiády a nevzpomenout přitom na profesora Rudolfa Zelinku, jednoho z jejích předních budovatelů. Jeho parafa RZ, která stávala pod každým článkem, pod každým sdělením, pod každým materiálem týkajícím se matematické olympiády, je většině dnešních účastníků soutěže a dokonce i některým jejím mladším spolupracovníkům již zcela neznáma.

Rudolf Zelinka byl od založení olympiády v r. 1951 až do své smrti v r. 1965 jejím prvním jednatelem; toto strohé označení jeho funkce ovšem nic neříká o vpravdě průkopnickém a tvořivém způsobu, jakým ji plnil. Zvláště je třeba zdůraznit, že jeho činnost nebyla jen organizační, ale z velké části odborná. Při samém vzniku olympiády se vytvořila pro ni příznivá konstelace: Matematický ústav ČSAV byl a dosud je jejím spolupředatelem, a Rudolf Zelinka, který byl zástupcem jeho ředitele, dovedl získat řadu tehdejších jeho mladých pracovníků pro školskou matematiku a pro práci v matematické olympiádě; někteří z nich patří dodnes k hlavním oporám soutěže.

Rudolf Zelinka měl velké pedagogické zkušenosti ze svého dřívějšího povolání středoškolského profesora; těch mohl v olympiádě vydatně použít. Po skončení své úřední práce sedával ve své pracovně v ústavě nebo

doma po dlouhé hodiny, vypisoval a kriticky glosoval originální a hodnotné úlohy z nejrůznějších pramenů — učebnic, sbírek, časopisů domácích a hlavně zahraničních, vymýšlel jejich varianty, přikomponovával vlastní



Prof. Rudolf Zelinka

původní úlohy, přizpůsoboval je vyšší či nižší věkové úrovni žáků, hledal jejich souvislosti a návaznosti; celou tuto složitou činnost nazýval Rudolf Zelinka „zvelebování úloh“. Tak se hromadila zdánlivě chaotická spousta rozpracovaných úloh, ve které se mohlo při

vybírání soutěžních úloh „zalovit“. Když se hledala úloha s určitou tematikou, říkával Rudolf Zelinka: „Počkejte, něco takového tu máme; to je ta úloha s třemi kružnicemi. Ale má to jeden háček: diskuse je složitá; buď se to musí dělat trigonometricky, nebo podobnými trojúhelníky, a dostaneme pět případů...“ Tak dobře znal všechny své „zvelebené úlohy“, že věděl o jejich slabinách, o potřebných tricích a různých úskalích. Jako deskriptivář inklinoval ke konstrukční geometrii, ostražitě hlídal úplnost a správnost diskusí i přesnost slovních formulací. Tenkrát v počátcích olympiády ještě nebyl konkurs JČSMF pro olympiádní úlohy. Většinu úloh navrhoval tehdy Rudolf Zelinka sám s několika svými spolupracovníky.

Nemůžeme se tvářit pohrdlivě nad touto prací jako nad čímsi překonaným. Rudolf Zelinka si byl dobře vědom hodnoty úloh; že jejich řešením si žák i student prověřuje zvládnutí teorie; že tato zásada platí ve škole i ve výběrové soutěži. Možná že i školská konstrukční geometrie si zaslouží trochu rehabilitace: bývala to vynikající škola myšlení s minimální mechanizací pomocného aparátu a klasická ukázka harmonického spojení intuice a dedukce. Leckdy s povzdechem omezujeme dnes tuto tradiční tematiku pro nedostatek času.

Rudolf Zelinka neviděl jediný cíl olympiády jen v soutěžení; byl si dobře vědom i jejího poslání studijního. Proto se ve funkci jednatele přičiňoval podle svých možností o pomocné akce matematické olympiády (přednášky — semináře — školení), ale hlavně o studijní literaturu. Protože byl nedostatek původní studijní literatury (Škola mladých matematiků začala vycházet teprve v r. 1961), propagoval literaturu cizí — zejména sovětskou. Jistým vyvrcholením této činnosti byl překlad sovětské sbírky řešených úloh z elementární mate-

matiky (autoři Lidskij a kol.), který pořídil Rudolf Zelinka se svými spolupracovníky a který vyšel v Státním pedagogickém nakladatelství r. 1965.

Zvláštní stať by si zasloužilo téma Rudolf Zelinka a mezinárodní matematické olympiády. Také u jejich zrodu stál a vedl čs. družstvo na první tři soutěže v letech 1959, 1960 (Rumunsko) a 1961 (Maďarsko). Mezinárodní matematické olympiády vznikly z iniciativy Rumunska a byly původně soutěžemi socialistických států. Sovětský svaz se zúčastnil již první olympiády, a pak zase až roku 1962 vyslal družstvo na čtvrtou mezinárodní olympiádu, které se konala v Československu v souvislosti s oslavami stého výročí založení Jednoty čs. matematiků a fyziků. Od té doby je v neoficiálním žebříčku sovětské družstvo každoročně na prvním nebo výjimečně na druhém místě.

Když Rudolf Zelinka navrhl, aby se Čtvrtá mezinárodní matematická olympiáda konala v Jihočeském kraji na zámku Hluboká, byly pochybnosti, zda je vhodné pořádat ji tak daleko od kulturních center státu. Ale ukázalo se, že to byla volba výborná; olympiáda se vydařila i po stránce společenské a všichni tehdejší účastníci domácí i zahraniční na ni podnes rádi vzpomínají.

Vzpomíná na ni zejména „stará garda“, tj. dlouholetí vedoucí olympijských družstev i jejich zástupci, z nichž mnozí již na mezinárodní olympiády nejezdí. Ke staré gardě patřil ovšem i Rudolf Zelinka, který vedl čs. družstvo i r. 1962 na domácí půdě a pak ještě r. 1964 v Moskvě; s mnohými jejími členy ho pojilo upřímné přátelství (s prof. Petrakovem a doc. Morozovovou ze Sovětského svazu, s prof. Czyzykowskim z Polska, s prof. Hódim z Maďarska, s insp. Budurovem z Bulharska).

Na mezinárodních olympiádách se Rudolf Zelinka výrazně projevoval jako komunista, člověk-humanista. Při jednáních mezinárodní jury odmítal rozhodovat „z pozice síly“, tj. hlasováním. Přál si, aby všichni členové jury byli přesvědčeni diskusí o správnosti rozhodnutí, aby nikdo neodcházel z porady „přehlasován“; a skutečně se mu to taktickými zásahy do jednání dařilo. Velice si cenil společenské stránky olympiád, domácích i mezinárodních. Doporučoval takovou organizaci, aby účastníci poznali při exkurzích nejen přírodní krásy a historické památky země, ale také práci lidu v průmyslových i zemědělských závodech a úspěchy v budování socialismu. Těšil se z toho, že se poznávali mladí lidé sice různých národností, ale společného odborného zájmu a že se navazovala mezinárodní přátelství.

Vzpomínka na Rudolfa Zelinku by nebyla úplná, kdybychom se nezmínili o jeho vlastnostech, které se výrazně projevovaly právě v olympiádách: o jeho širokých kulturních zájmech, zejména zájmu o historii a literaturu, a o jeho smyslu pro humor, někdy ironický, ale vždy zdravý a prospěšný věci.

Kdyby byla založena kronika matematické olympiády, musila by nepochybně na jednom z předních míst stát věta: „Rudolf Zelinka se zasloužil o matematickou olympiádu.“

(III)

O ŠKOLE MLADÝCH MATEMATIKŮ

JAN VYŠÍN

Už během prvních deseti let československé matematické olympiády (1951 až 1960) se ukazovalo stále jasněji, že účastníkům soutěže schází přiměřená populární studijní literatura. Tento nedostatek nemohly zmírnit ani články v žákovském matematickém časopise ani brožury vydávané SPN po proběhnutí každého ročníku MO. S povzdechem jsme sledovali, kolik a jaké literatury tohoto druhu se vydává v zahraničí, zejména v Sovětském svazu. I když sovětské publikace byly našim žákům v podstatě srozumitelné a cenově zcela dostupné, byly přece jen dost nesnadné a mimoto nebyly k dispozici v dostatečném množství. Za této situace vzešel z iniciativy prof. Františka Veselého návrh na založení původní knižnice populární studijní matematické literatury; návrh byl prodiskutován v ÚV MO a podařilo se získat mládežnické nakladatelství Mladá fronta, aby vydávalo ročně 3 až 4 svazečky nové knižnice, nazvané *Škola mladých matematiků* (ŠMM). Odborného vedení knižnice se ujal tehdejší předseda ÚV MO akademik Josef Novák. Tak vyšel r. 1961 první svazek pod názvem *Několik úloh z geometrie jednoduchých těles*.

Tehdejší ministerstvo školství ČSSR se zavázalo vykupovat část nákladu každého svazku knižnice; zakoupené brožury rozdělovalo do školních žákovských knihoven; tento závazek převzala pak obě národní ministerstva školství a plní jej dodnes. Tím je zároveň

zajištěn odbyt podstatné části nákladu a využití vydaných svazků, na které nakladatelství vynakládá značné prostředky — tituly ŠMM jsou vesměs ztrátové.

Protože knižnice měla sloužit především ku pomoci účastníkům MO, bylo pojetí prvních svazečků ŠMM úlohové. Byly tu jednak řešené příklady, jednak úlohy pro cvičení. Teoretický výklad byl omezen na nejnutnější minimum. Teprve později se objevily v knižnici brožury tzv. výběrové řady, které se lišily od školsky pojatých svazečků tzv. základní řady hlavně ve dvou směrech:

a) tematicky přesahovaly náplň střední školy;

b) zpracováním se více blížily běžné odborné literatuře, neboť jádrem textu byl souvislý výklad, doplněný ilustračními příklady a cvičeními.

Tyto svazky byly zčásti knižním zpracováním přednášek z celostátních prázdninových soustředění a jejich autory byli i někteří vědečtí pracovníci MÚ ČSAV. V poslední době obrací knižnice ŠMM svou pozornost i k nejmladším čtenářům-účastníkům MO. Žákům ZDŠ zamýšlí věnovat populární brožury takového charakteru, jako je *Malý výlet do moderní matematiky*.

V edici ŠMM vycházejí svazky s českým i slovenským textem; až dosud jich vyšlo celkem 36. Protože některé z nich, zejména starší, jsou přístupné — bohužel — jen ve školních žákovských knihovnách, patří snad k historii olympiády i malá revue či procházka touto knižnicí a upozornění na zajímavé detaily některých svazků.

*

Procházku začneme třeba u prvního „stereometrického“ svazečku. Má tři části, první z nich je jakási „stereometrie bez stereometrie“, vlastně geometrie na povrchu tělesa — třeba mnohostěnu nebo koule. Nejdříve

se brožura zabývá úlohou zjistit všechny sítě daného mnohostěnu, např. pravidelného čtyřstěnu. Síť tetraedru, lépe řečeno rozvinutý povrch, je rovinný, třeba nevy-puklý mnohoúhelník, který je sjednocením obrazců shodných postupně se všemi stěnami tetraedru. Sjed-nocení je omezeno jistými podmínkami motivovanými praktickou úlohou: Složit ze sítě model povrchu tělesa. Čtenář je upozorněn na nutnost definovat různost sítí pomocí shodnosti obrazců.

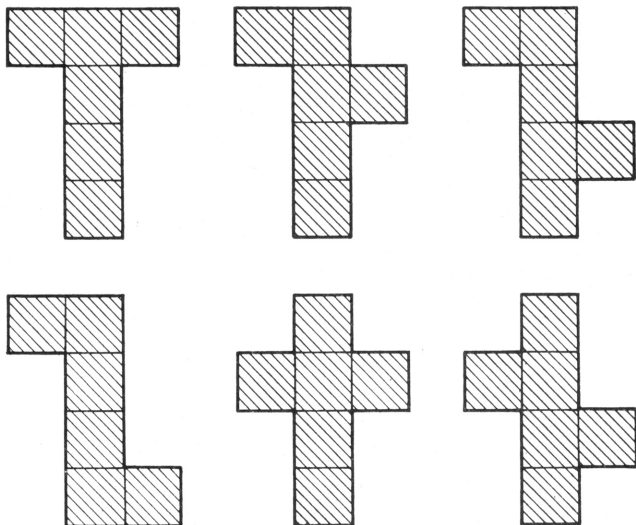
Po této úvodní analýze problému se rozřeší úloha o počtu sítí pravidelného čtyřstěnu, výsledek zní: *Prá-videlný čtyřstěn má právě dvě různé sítě*. Text brožury doporučuje rozvíjení problémové situace „počet sítí daného mnohostěnu“, např. sestrojení všech 11 různých sítí krychle. Na úlohu rozřešenou v textu brožury lze bezprostředně navázat úlohu sestrojit všechny navzá-jem různé sítě pravidelného dvojjeřhanu, tj. šestistěnu složeného ze dvou shodných pravidelných čtyřstěnů. Je užitečné znát všechny sítě daného mnohostěnu, neboť při řešení konkrétní úlohy si vybereme vhodnou síť.

Část I využívá rozvinutého povrchu tělesa k určení nejkratší spojnice dvou bodů povrchu vedené po povrchu tělesa. Výsledek se dá předem experimentálně odhad-nout pomocí gumičky upevněné v daných bodech. Ma-tematické určení spojnice lze provést buď konstrukcí v části vhodné sítě, nebo výpočtem, který se zpravidla opírá o nejjednodušší planimetrické vzorce. Do tematiky I. části patří i úlohy o různých způsobech převazování krabice tvaru kvádru, zejména vázání „přes rohy“, které je v síti zobrazeno úsečkou konstruovanou obdobně jako při řešení kulečnickového problému. Je zajímavé porovnat co do délky „vázání přes rohy“ a „dvojitě vázání křížem“; výsledek závisí na jistém vztahu mezi délkami hran kvádru. V I. části jsou dále i některé

jednoduché úlohy o nejkratší spojnici dvou bodů na válcové, kuželové a kulové ploše. Jde tedy vlastně o problém tzv. geodetiky na ploše — o problém diferenciální geometrie, řešený ve zvláštních případech elementárními prostředky.

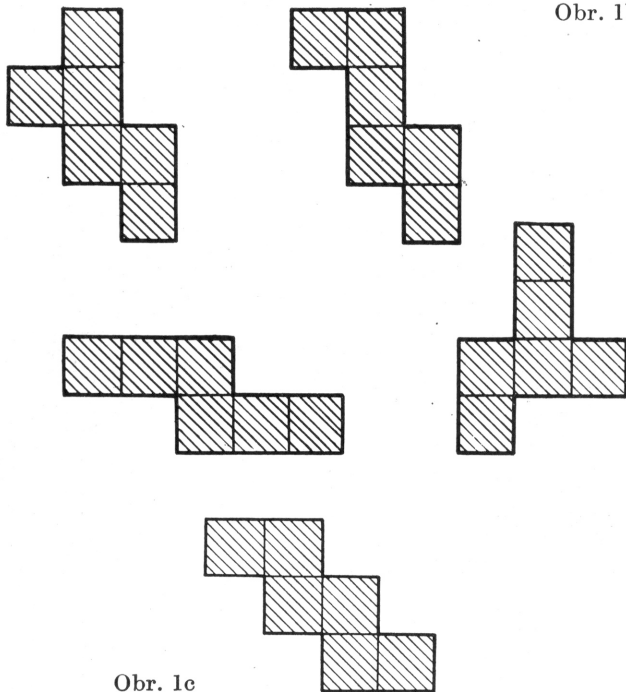
Vraťme se ještě k úloze *nalézt všechny navzájem různé sítě krychle*. Jde o sestavení jistých nekonvexních mnohoúhelníků, složených ze 6 shodných čtverců. Sítě rozdělíme do tří skupin charakterizovaných takto:

- (a) Síť obsahuje čtyři čtverce ležící v téže pásu roviny;
- (b) síť neobsahuje žádnou čtveřici čtverců téhož pásu, ale obsahuje aspoň jednu takovou trojici čtverců;



Obr. 1a

Obr. 1b



Obr. 1c

(c) síť obsahuje jen dvojice čtverců ležících v témž pásu.

Skupina (a) dá 6 sítí, skupina (b) 4 sítě, skupina (c) jedinou.

Všech jedenáct sítí je na obr. 1a, 1b, 1c.

II. část brožury je věnována průsekům (průnikům) roviny s hranolem (hlavně kvádrem) a jehlanem. Také zde lze využít při konstrukčních řešeních sítí těles. Nej-

zajímavější úloha je pravděpodobně úloha o nakloněném akváriu:

Akvárium má tvar krychle $ABCD A'B'C'D'$ o hraně délky 1 se dnem $ABCD$ a je naplněno do poloviny vodou. Je nakloněno tak, že vodní hladina sahá až k bodu B' a hrana AA' je pod hladinou až do vzdálenosti $AX = x$.

(a) Máme načrtnout obvod vodní hladiny a její skutečnou velikost.

(b) Máme vyjádřit velikost vodní hladiny jako funkci proměnné x a studovat její průběh.

Zajímavé je také studium průseku krychle se soustavou rovin kolmých k její tělesové úhlopříčce; lze při něm použít sítě z obr. 1c.

III. část brožury je věnována několika úlohám o ploše kulové. Bylo zcela přirozené sblížit tyto úlohy s realitou tím, že autor volil některé náměty z geodézie, kosmonautiky apod. Toho druhu je např. úloha:

Na Zemi jsou čtyři pozorovací stanice S_1, S_2, S_3, S_4 . Bod S_1 je v daném okamžiku jediné místo na Zemi, z kterého můžeme (teoreticky) pozorovat současně družice A_1, A_2 . Tutéž vlastnost má v témž okamžiku bod S_2 a družice A_2, A_3 , bod S_3 a družice A_3, A_4 a konečně bod S_4 a družice A_4, A_1 . Máme vyšetřit polohu stanic S_1, S_2, S_3, S_4 (máme dokázat, že leží na kružnici).

Při řešení pochopitelně pokládáme Zemi za kouli.

Úlohy „ryze geometrické“ jsou snad dobře reprezentovány touto úlohou — možná problémovou situací:

Je dán pravidelný dutý čtyřstěn $ABCD$, jehož hrany mají délku a . Uvnitř čtyřstěnu se po jeho podstavě, stěně ABC , pohybuje volně míč, jehož poloměr je menší než poloměr koule vepsané čtyřstěnu $ABCD$. Máme vyšetřit množinu všech bodů, které může zaujmout střed míče.

Je snad jasné, jak lze tuto úlohu obměňovat či zobecňovat, proč jsme ji tedy nazvali problémovou situací.

Tento svazeček, jehož autory jsou Hradecký, Koman, Vyšín, byl později při reedici spojen s brožurou Jar. Šedivého *Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách*. Přehlédneme-li všech 36 vyšlých svazků edice ŠMM, uvědomíme si, že by bylo užitečné vydat novou brožuru o stereometrii na poněkud vyšší úrovni.

*

V olympiádách se často vyskytují úlohy z teorie čísel, jednak pro půvab svých důkazů, jednak proto, že každý matematik potřebuje základy této teorie při své práci. V naší edici vyšly čtyři svazečky o teorii čísel, a to:

J. Sedláček: *Co víme o přirozených číslech* (svazek 2),

F. Veselý: *O dělitelnosti čísel celých* (svazek 14),

A. Apfelbeck: *Kongruence* (svazek 21),

T. Šalát: *Dokonalé a spřátelené čísla* (svazek 22).

Ve školské matematice se hojně vyskytuje úloha, v níž se má dokázat, že daný mnohočlen $f(n)$ je pro všechna přirozená čísla n dělitelný některým pevně daným přirozeným číslem. Ukážeme si to na dvou příkladech vzatých z knížky J. Sedláčka.

Příklad. Je-li n libovolné přirozené číslo, pak číslo $n^3 - n$ je dělitelné šesti. Dokažte.

Řešení. Dokážeme nejprve, že číslo $n^3 - n$ je dělitelné třemi. Dvojčlen $n^3 - n$ upravíme na tvar $(n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$. Rozložili jsme tedy výraz $n^3 - n$ v součin tří činitelů; tito činitelé jsou tři po sobě jdoucí celá nezáporná čísla $n - 1$, n , $n + 1$. Probíráme-li po řadě všechna celá nezáporná čísla, je známo, že každé třetí

z nich je dělitelné třemi. Protože čísla $n - 1$, n , $n + 1$ tvoří trojici po sobě jdoucích celých nezáporných čísel, musí být jedno z nich dělitelné třemi, a proto také jejich součin $n^3 - n$ je dělitelný třemi.

Dále dokážeme, že číslo $n^3 - n$ je dělitelné dvěma. Probíráme-li po řadě všechna celá nezáporná čísla, střídá se vždy číslo sudé s číslem lichým. Z toho plyne, že alespoň jedno z čísel $n - 1$, n , $n + 1$ je sudé, a tedy také součin těchto čísel je sudé číslo.

Protože pro libovolné číslo n je rozdíl $n^3 - n$ dělitelný jednak třemi, jednak dvěma, je tento rozdíl nutně dělitelný šesti. To je právě tvrzení, které jsme měli dokázat.

Jiné řešení. Čtenář, který zná princip matematické indukce, může úlohu řešit takto:

Pro $n = 1$ platí $n^3 - n = 1^3 - 1 = 0$; číslo 0 je dělitelné šesti, takže tvrzení v tomto případě platí.

Předpokládejme, že tvrzení, které máme dokázat, platí pro některé přirozené číslo n , a budeme je dokazovat pro přirozené číslo $n + 1$. Jestliže ve výrazu $n^3 - n$ místo n píšeme $n + 1$, dostáváme $(n + 1)^3 - (n + 1)$. Upravujeme tento výsledek takto:

$$\begin{aligned}(n + 1)^3 - (n + 1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = \\ &= (n^3 - n) + (3n^2 + 3n) = (n^3 - n) + 3n(n + 1).\end{aligned}$$

Výraz $3n \cdot (n + 1)$ je dělitelný třemi, snadno však nahlédneme, že je dělitelný také dvěma. Je tedy dělitelný šesti. Výraz $n^3 - n$ je dělitelný šesti, neboť je to předpoklad, ze kterého jsme vyšli. Je tedy také součet těchto dvou výrazů dělitelný šesti. Tento součet je však (jak víme) roven $(n + 1)^3 - (n + 1)$. Z předpokladu, že naše tvrzení platí pro některé přirozené číslo n , plyne, že toto tvrzení platí též pro číslo $n + 1$. Důkaz matematickou indukcí je tím podán.

Další příklad je obdobný, avšak při jeho řešení budeme potřebovat složitější matematické obraty.

Příklad. Je-li n libovolné přirozené číslo, pak číslo $n^5 - n$ je dělitelné pěti. Dokažte.

Řešení. Rozdíl $n^5 - n$ upravujeme takto:

$$\begin{aligned} n^5 - n &= n \cdot (n^4 - 1) = n \cdot (n^2 - 1) \cdot (n^2 + 1) = \\ &= n \cdot (n - 1) \cdot (n + 1) \cdot (n^2 + 1). \end{aligned}$$

Nepodařilo se nám zde rozložit uvažované číslo v součin pěti po sobě jdoucích celých čísel (pak bychom totiž tvrzení snadno dokázali obdobným postupem jako v předcházejícím příkladě). Pomůžeme si však tímto obratem: Uvažme, jak se liší součin $(n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3)$ od našeho součinu $(n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (n^2 + 1)$. Jejich rozdíl je

$$\begin{aligned} &(n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) \cdot [(n + 2) \cdot (n + 3) - (n^2 + 1)] = \\ &= (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) [n^2 + 5n + 6 - n^2 - 1] = \\ &= (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (5n + 5) = 5 \cdot (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)^2. \end{aligned}$$

Je vidět, že tento rozdíl je dělitelný pěti. Součin $(n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3)$ je však také dělitelný pěti, neboť je to součin pěti po sobě jdoucích celých nezáporných čísel. Z úvahy o rozdílu proto vyplývá, že náš součin $(n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (n^2 + 1)$ je dělitelný pěti. Tím je důkaz proveden.

Přenecháváme čtenáři, aby i v tomto příkladě podal jiné řešení, při kterém se používá matematické indukce.

Poznamenejme, že oba příklady jsou vlastně speciálním tvarem jedné slavné číselněteoretické věty, která se nazývá *malá Fermatova věta**). Francouzský právník

*) Tato věta zní: Je-li p libovolné prvočíslo a n libovolné přirozené číslo, pak $n^p - n$ je dělitelné p .

a matematik Pierre de Fermat (1601—1665) si dobyl předního místa v matematice svými pracemi z teorie čísel a patří mezi první pěstitele analytické geometrie.

Další ukázka se týká zkoumání, jak jsou v posloupnosti přirozených čísel rozmístěna prvočísla. Po prolisťování tabulek vidíme, že střídání prvočísel a čísel složených je velmi nepravidelné. V některých intervalech pozorujeme, že je tu nakupeno velmi mnoho prvočísel, jinde můžeme opět najít velkou skupinu vytvořenou výhradně z čísel složených. O této otázce nás trochu poučí další příklad.

Příklad. Ukažte, že je možno najít tisíc po sobě jdoucích přirozených čísel, jež jsou vesměs složená.

Řešení. Příkladem takové skupiny tisíce po sobě jdoucích přirozených čísel, jež jsou vesměs složená, je skupina*)

$$1\ 001! + 2, \quad 1\ 001! + 3, \quad 1\ 001! + 4, \\ 1\ 001! + 5, \dots, 1\ 001! + 1\ 000, \quad 1\ 001! + 1\ 001.$$

Číslo $1\ 001! + 2$ je zřejmě dělitelné dvěma, číslo $1\ 001! + 3$ třemi a konečně číslo $1\ 001! + 1\ 001$ je dělitelné číslem $1\ 001$; všechna tato čísla jsou tedy složená.

Poznamenejme, že z naší úvahy nevyplývá, že v posloupnosti všech přirozených čísel existuje mezi prvočísly mezera obsahující právě $1\ 000$ čísel složených. V předcházející úvaze jsme totiž nezkoumali, zda číslo $1\ 001! + 1$ je složené nebo není, a na první pohled je patrné, že číslo $1\ 001! + 1\ 002$ je složené (je totiž sudé).

*) Připomeňme, že zápis $n!$ (čti n faktoriál) znamená součin všech přirozených čísel počínaje číslem 1 a konče číslem n ; je tedy např. $4! = 1.2.3.4 = 24$.

Ještě si všimněme jedné aritmetické posloupnosti, v níž po sobě následuje pět prvočísel.

Příklad. Pět prvočísel tvoří pět po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 6$. Určete tato čísla.

Řešení. Nejprve ukážeme toto: Je-li a libovolné celé nezáporné číslo, pak alespoň jedno z čísel

$$a, \quad a + 6, \quad a + 12, \quad a + 18, \quad a + 24 \quad (1)$$

je dělitelné pěti. Víme, že každé číslo a lze vyjádřit v právě jednom ze tvarů $5k$, $5k + 1$, $5k + 2$, $5k + 3$, $5k + 4$. Je-li $a = 5k$, pak první z čísel v řádku (1) je dělitelné pěti. Je-li $a = 5k + 1$, pak $a + 24 = 5k + 25 = 5(k + 5)$, takže poslední z čísel v (1) je dělitelné pěti. Obdobně pro $a = 5k + 2$ vychází $a + 18 = 5(k + 4)$, pro $a = 5k + 3$ je $a + 12 = 5(k + 3)$ a konečně pro $a = 5k + 4$ máme $a + 6 = 5(k + 2)$.

Ukázali jsme tedy, že v řádku (1) je jedno z čísel dělitelné pěti. Podle podmínek uvedených v textu příkladu chceme, aby všechna čísla v řádku (1) byla prvočísla. Z toho vyplývá, že číslo, pro něž jsme před chvílí prokázali dělitelnost pěti, musí být rovno právě pěti. Vzhledem k tomu, že $d = 6$, stojí nutně číslo 5 na prvním místě mezi uvažovanými prvočíslly. Hledaná pětice může být jedině 5, 11, 17, 23, 29.

Zkouškou se přesvědčíme, že všech pět nalezených čísel jsou prvočísla.

Odpověď. Úloze vyhovuje jediná pětice prvočísel, totiž 5, 11, 17, 23, 29.

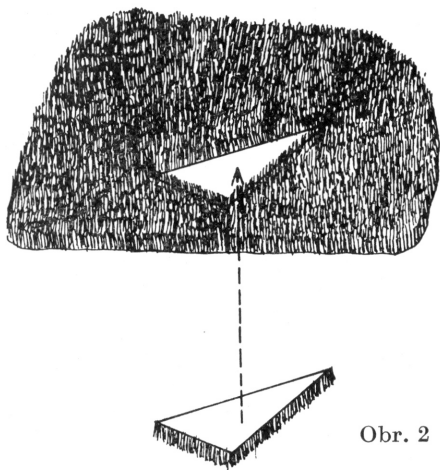
Čtenář se snadno přesvědčí, že šestý člen uvažované aritmetické posloupnosti již není prvočíslo.

Závěrem přenecháváme čtenáři, aby si sám rozřešil obdobnou úlohu:

Pět prvočísel tvoří pět po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 12$. Určete tato prvočísla.

*

Třetí svazek edice nese název *Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách*, proto objasňuje nejprve pojem shodného zobrazení a skládání shodných zobrazení. Pojem nepřímé shodnosti je uveden tímto problémem:



Obr. 2

Kožešník měl opravit poškozený kabát; učeň vystříhl znehodnocenou část a otvor zarovnal na pravouhlý trojúhelník. Dále chtěl vystříhnout z náhradního kousku kožešiny shodný trojúhelník, aby jej mohl vsadit do otvoru. Otočil kožešinu na rub a na vydělanou kůži

si vyznačil hranici, podle které vystříhl trojúhelník. Ať však učen dělal co dělal, nemohl vystřížený trojúhelník zasadit tak, aby srst zakryla otvor. Co byste poradili kožešníkovi, který už nemá náhradní kožešinu?

Situace je zakreslena na obr. 2, řešení je poměrně snadné — pravoúhlý (nerovnoramenný) trojúhelník je třeba rozstříhnout na dva rovnoramenné trojúhelníky. Zcela přirozeně vzniká pak otázka, na nejméně kolik rovnoramenných trojúhelníků lze rozstříhnout kterýkoliv pravoúhlý trojúhelník.

V dalších částech brožury jsou zařazeny konstrukční úlohy, ve kterých se výhodně uplatňují jednotlivé druhy shodných zobrazení v rovině (středová souměrnost, osová souměrnost, posunutí a otočení). Vedle čistě geometrických úloh jsou zařazeny i známé kulečnickové problémy a jejich „hokejové varianty“ uvažující odrazy touše od mantinelů. Uveďme si ukázky ryze geometrických úloh ze závěrečného odstavce brožury.

1. Je dána přímka p s bodem M , kružnice k a úhel α . Sestrojte kružnici, která se dotýká v bodě M přímky p a protíná danou kružnici tak, že tečny těchto kružnic ve společném bodě svírají úhel o velikosti α .

2. Jsou dány tři přímky procházející jedním bodem a další bod A . Sestrojte všechny trojúhelníky ABC , pro které nastane jedna z možností:

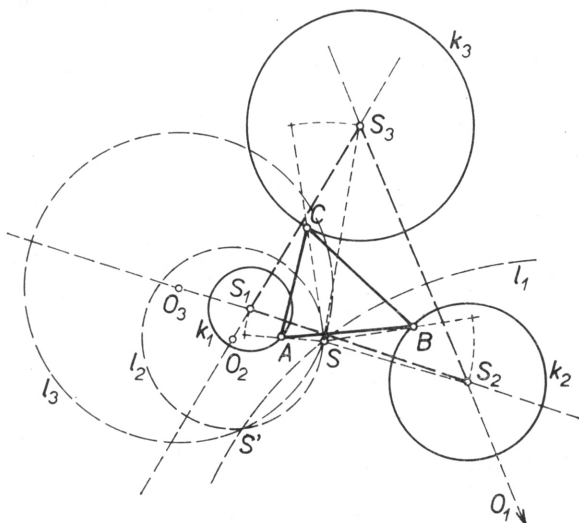
- jejich výšky leží na daných přímkách,
- jejich těžnice leží na daných přímkách,
- osy jejich vnitřních úhlů leží na daných přímkách.

Čtenář se může přesvědčit vlastní úvahou, zda je účelné řešit tyto úlohy pomocí souměrností nebo jinak.

Sedmý svazek, *O podobnosti v geometrii*, navazuje na třetí svazek tematicky i způsobem zpracování. Obsahuje úlohy důkazové i konstrukční, k 16 řešeným příkladům je připojeno 125 cvičení.

Povrchnímu odříkávání vět o shodnosti a podobnosti trojúhelníků se snaží brožura čelit tímto příkladem:

Víte, že dva trojúhelníky, které mají úměrné strany,



Obr. 3

jsou podobné. Zajímavou dvojicí podobných trojúhelníků jsou ty, z nichž jeden má strany a , ka , k^2a a druhý ka , k^2a , k^3a (číslo $k \neq 1$ je kladné, $a > 0$). Tyto trojúhelníky se shodují v pěti dvojicích prvků (třech úhlech a dvou stranách), ale nejsou shodné.

Čím to je, že se vymykají větám o shodnosti trojúhelníků? Jakých hodnot může nabývat k ? Pro které hodnoty k je trojúhelník pravoúhlý? Sestrojte jej.

Další část svazku se zabývá mocností bodu ke kružnici a důkazem koncirkulárnosti většího počtu bodů; posloupnost vět přirozeně končí u kružnice devíti bodů trojúhelníka a Eulerovy přímky (obsahující střed kružnice opsané, střed kružnice devíti bodů, průsečík výšek a těžiště trojúhelníka). Tuto látku procvičuje např. tato úloha s bohatou diskusí:

Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno těžiště T , střed kružnice opsané a poloměr kružnice devíti bodů.

V brožuře je podána klasifikace různého využití stejnolehlosti při řešení konstrukčních úloh. Údiv a zájem studentů vzbuzují úlohy, ve kterých se pracuje se stejnolehlostí, jejíž střed neznáme, případně neznáme ani její koeficient.

Po stručném výkladu o podobných zobrazeních jsou zařazeny úlohy, které jich využívají. Mezi náročnější patří např. tato úloha (vložená do druhého vydání):

Jsou dány tři kružnice k_1, k_2, k_3 se středy S_1, S_2, S_3 neležícími na jedné přímce; na k_1 je dán bod A . Sestrojte trojúhelník ABC přímo podobný trojúhelníku $S_1S_2S_3$ tak, aby jeho vrchol B ležel na k_2 a vrchol C na k_3 (obr. 3).

V řešení se uplatní přímé podobné zobrazení $\mathbf{P}$ ($S_1 \rightarrow A, S_2 \rightarrow B, S_3 \rightarrow C$), jehož samodružný bod S leží

na Apolloniových kružnicích $l_1 = \left(S_2, S_3, \frac{r_2}{r_3}\right), l_2 = \left(S_3, S_1, \frac{r_3}{r_1}\right), l_3 = \left(S_1, S_2, \frac{r_1}{r_2}\right)$. Složením stejnoleh-

losti $\kappa = \left(S, \frac{SS_1}{SA}\right)$ a otočení $\mathbf{R}$ kolem S o úhel S_1SA získáme zobrazení $\mathbf{P}$, ve kterém zobrazíme S_2, S_3 na B a C .

Apolloniovy kružnice l_1, l_2, l_3 se protínají ve dvou bodech S a S' . V obr. 3 je provedena konstrukce jen pro bod S .

Oba svazečky, *Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách* a *O podobnosti v geometrii*, napsal Jaroslav Šedivý; vyšly již dvakrát (svazek *Shodná zobrazení...* byl při reedici spojen se svazkem *Několik úloh z geometrie jednoduchých těles*).

*

Devatenáctý svazek ŠMM *Komplexní čísla a funkce* měl za úkol zopakovat a prohloubit znalosti studentů o komplexních číslech. Vzhledem k předpokládané různé úrovni těchto znalostí zůstává jeho výklad na velmi elementární úrovni a zachovává úlohové pojetí prvních svazků knižnice.

Knížka se dělí v podstatě na dvě části. První se věnuje algebře komplexních čísel a jejich geometrickému znázornění. Řeší se příklady týkající se pojmu odmocniny z komplexního čísla, např.: Co tvoří koncové body vektorů znázorňujících všechny hodnoty „třetí odmocniny z jedné“, tj. všechna řešení rovnice $z^3 = 1$? Při řešení se ukazuje výhodnost komplexního čísla v goniometrickém tvaru a čtenář je upozorněn na možnost řešit obdobně obecný případ.

Knížka dále obsahuje řadu řešených příkladů a cvičení na geometrické znázornění komplexních čísel. Čtenář je veden k tomu, aby spojoval množiny komplexních čísel s jejich znázorněním v Gaussově rovině. Řeší se např. tato úloha:

Znázorněte v Gaussově rovině množiny komplexních čísel, pro něž platí

$$(a) \quad \text{Im } z^2 > 0,$$

$$(b) \quad \text{Re } z^2 \geq 0.$$

Je-li $z = x + yi$, je $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. První podmínku můžeme tedy psát ve tvaru $2xy > 0$, druhou $x^2 - y^2 \geq 0$.

(a) Nerovnost $2xy > 0$ znamená, že souřadnice x i y mají totéž znamení, tj. jsou buď obě kladné, nebo obě záporné. První možnost nastává pro body v prvním kvadrantu, druhá pro body v třetím kvadrantu. Množina čísel, pro něž $\operatorname{Im} z^2 > 0$, je tedy znázorněna prvním a třetím kvadrantem, osy souřadnic jsou vyloučeny.

(b) se řeší nejprve obdobně, převedením podmínky na tvar $-|x| \leq y \leq |x|$, pak se uvede goniometrické řešení: Je-li $z = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha)$, dá se podmínka (b) napsat ve tvaru $|\cos \alpha| \geq |\sin \alpha|$, tj. $|\operatorname{tg} \alpha| \leq 1$. Tato nerovnost platí pro úhly z intervalů $\langle -45^\circ, 45^\circ \rangle$ a $\langle 135^\circ, 225^\circ \rangle$. Těmto hodnotám odpovídají právě všechny body Gaussovy roviny ležící mezi osami kvadrantů v těch částech roviny, které obsahují osu x . Obě hraniční přímky patří ovšem v tomto případě do výsledné množiny.

Podrobně se zkoumá i opačná možnost — tj. vyjádřit jednoduché geometrické útvary v Gaussově rovině pomocí algebraických podmínek. Jako příklad uveďme toto cvičení:

Jakou podmínku splňují komplexní čísla znázorněná geometricky body ležícími (a) uvnitř kružnice o středu $(3,1)$ a poloměru 2; (b) v pásu mezi přímkami $x = -1$, $x = 3$; (c) na úsečce spojující body $(-1, -1)$ a $(1, 4)$?

V druhé části svazku se výklad obrací k funkcím komplexní proměnné. Jako příklad vyšetřování různých elementárních vlastností funkce uveďme:

Stanovte obor funkce $f(z) = (i - z)/(i + z)$. Je-li $\operatorname{Im} z > 0$, dokažte, že $|f(z)| < 1$. Je-li z reálné, je $|f(z)| = 1$.

Řešení. Výraz $(i - z)/(i + z)$ má smysl pro všechna komplexní čísla s výjimkou $z = -i$, kdy jmenovatel je roven nule. Oborem funkce je tedy množina všech komplexních čísel s výjimkou $z = -i$.

Vypočtěme nyní $|f(z)|$, jestliže $z = x + iy$:

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \frac{i - z}{i + z} \right| = \left| \frac{i - x - iy}{i + x + iy} \right| = \left| \frac{-x + i(1 - y)}{x + i(1 + y)} \right| = \\ &= \left[\frac{x^2 + (1 - y)^2}{x^2 + (1 + y)^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{x^2 + 1 + y^2 - 2y}{x^2 + 1 + y^2 + 2y} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Je-li z reálné číslo, je ovšem $y = 0$ a tedy $|f(z)| = 1$. Je-li $\text{Im } z = y > 0$, je čitatel zlomku zřejmě menší než jmenovatel. Ve jmenovateli přičítáme totiž kladné číslo $2y$, zatímco v čitateli totéž kladné číslo odčítáme. Celý zlomek je tedy menší než jedna.

Na příkladě tzv. Žukovského funkce se ukazuje možnost geometrického znázornění funkce komplexní proměnné.

V poslední kapitole se čtenář seznámí s funkcí $E(z)$, která je definována jako komplexní funkce dvou reálných proměnných rovnicí $E(z) = e^x (\cos y + i \sin y)$. Ukazuje se jednak, že funkce $E(z)$ je rozšířením exponenciální funkce v reálném oboru, jednak že tato funkce i v komplexním oboru zachovává některé podstatné vlastnosti známé z reálného oboru.

Dále se řeší rovnice $E(u) = z$ (při daném z) a odtud se dochází k definici logaritmu komplexního čísla $L(z) = \ln |z| + i \arg z$, kde $\arg z$ je libovolný úhel, jehož tangens rovná se $\text{Im } z / \text{Re } z$. Ze zajímavějších rozřešených úloh lze uvést třeba:

Příklad. Jsou dána komplexní čísla $u = \sqrt[3]{3} - i$, $v = \frac{7}{2}(1 + i\sqrt[3]{3})$, $w = 7(\sqrt[3]{3} + i)$. Ověřte, že $u \cdot v = w$; najděte logaritmy L_1, L_2, L_3 komplexních čísel u, v, w (použijte hodnot argumentů mezi 0° a 360°) a vysvětlete, proč neplatí $L_1 + L_2 = L_3$.

Výpočtem dojdeme k hodnotám $L_1 = \ln 2 + i\frac{11}{6}\pi$,
 $L_2 = \ln 7 + i\frac{1}{3}\pi$, $L_3 = \ln 14 + i\frac{1}{6}\pi$. To však znamená, že $L_1 + L_2 = \ln 14 + i\frac{13}{6}\pi \neq L_3$. Výsledek není ve sporu s vlastnostmi logaritmu komplexního čísla. Skutečně, $L_3 - (L_1 + L_2) = (-1) \cdot 2\pi i$. To znamená, že jak číslo $L_1 + L_2$, tak ovšem i číslo L_3 je logaritmem čísla w .

Tento příklad má vést čtenáře ke správnému chápání pojmu nejednoznačné funkce, jejíž definice je dále naznačena. Čtenář je upozorněn na nutnou opatrnost při práci s těmito pojmy (např. rozбором zdánlivě paradoxního postupu $-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$).

V této kapitole zůstává však převážná většina úloh v rámci algebry komplexních čísel. Vývoj knižnice ŠMM naznačuje, že alespoň nejelementárnější otázky teorie komplexních funkcí by si zasloužily v jejím novém rámci nové, již více výkladově pojaté zpracování.

Autorem svazku *Komplexní čísla a funkce* je Jiří Jarník.

*

O axiomatizaci reálné situace se může čtenář seznámit ve 24. svazku ŠMM *Stavba Lobačevského planimetrie*, který napsali Ján Gatial a Milan Hejný. Uvádíme ukázkou:

Každé slovo jazyka, ktorým hovorí presne budovaná exaktná disciplína, patrí do jednej a len jednej zo skupín:

1. pojmy základné, 2. pojmy odvodené, 3. pojmy doplnkové, 4. prirodzený jazyk.

Ilustrujme túto klasifikáciu na príklade.

Príklad 1. Za základné pojmy planimetrie volíme tri termíny:

bod, priamka, ležať na. (1)

V tvrdení: „nech a , b sú dve rovnobežné priamky a nech priamka c je rôznobežná s priamkou a , potom priamka c je rôznobežná aj s priamkou b “ je 19 slov (symboly a , b , c nie sú slová). Tieto patria v poradí skupinám: 4, 4, 3, 2, 1, 4, 4, 1, 4, 2, 4, 1, 4, 1, 4, 2, 4, 4, 1. Pojmy „rovnobežné“ a „rôznobežné“ sa dajú definovať pomocou pojmov (1). Pojem „dve“ patrí do aritmetiky, ktorá vystupuje ako doplnková disciplína ku planimetrii.

Úloha 1. Rovnako ako v príklade 1 urobte slovný rozbor vety z planimetrie: Nech A , B , C sú tri body neležiace na priamke, potom existuje aspoň jedna priamka a rovnobežná s priamkou BC a obsahujúca bod A .

Hlbšie preskúmame termín *pojem základný*. Je to asi taký pojem, o ktorom majú všetci ľudia rovnakú predstavu. Tento názor, bežný a oprávnený v humánných vedách, v matematike neobstojí.

Keď povieme, že pojem „srdce“ je v medicíne všeobecne známy, máme na mysli fakt, že každý lekár pozná tvar, uloženie, funkciu a mnohé iné vlastnosti srdca. Presnejšie povedané, lekár pozná väzby medzi telom a srdcom. Pritom ani najväčší odborník nepozná tieto väzby všetky, lebo je to nemožné. V matematike úslovie „pojmy (1) sú všeobecne známe“ precizujeme tak, že udáme všetky základné väzby medzi pojmami (1). Tieto väzby nazveme *axiomy*, niekedy tiež postuláty. Súhrn všetkých axiom menujeme *axiomatická sústava*. Súbor základných pojmov, odvodených pojmov, všetkých axiom a všetkých tvrdení z axiom vyplývajúcich nazveme *axiomatizovaná teória*.

Axiomy sú také výroky o základných pojmoch, ktoré prehlásime za pravdivé. Pritom nás okolnosť názornosti axiom vôbec nezaujíma. Existuje mnoho príkladov v histórii matematiky a fyziky, kde naše vrodené predstavy brzdili hlbšie preniknutie k podstate veci. V nasledujúcom, hodne obsírnom príklade sa pokúsime oboznámiť čitateľa s jednoduchou, ale veľmi dôležitou axiomatickou teóriou.

Príklad 2. Axiomatizovaná teória **S** nech je daná

a) tromi základnými pojmami:

chlapec, dievča, páčiť sa (2)

a ďalej

b) skupinou piatich axiom:

S₁ Existuje aspoň jedno dievča.

S₂ Ak *A*, *B* sú dvaja chlapci, potom existuje aspoň jedno dievča *c*, ktoré sa páči aj chlapcovi *A*, aj chlapcovi *B*.

S₃ Ak *A*, *B* sú dvaja rôzni chlapci, potom existuje najviac jedno dievča *c*, ktoré sa páči aj chlapcovi *A*, aj chlapcovi *B*.

S₄ Ak *a* je dievča, potom existujú aspoň dvaja rôzni chlapci *B*, *C*, ktorým (obidvom) sa dievča *a* páči.

S₅ Ak *a* je dievča, potom existuje aspoň jeden chlapec *B* tak, že nie je pravda, že sa dievča *a* páči chlapcovi *B*.

Na základe pojmov (2) a axiom

S₁, **S**₂, **S**₃, **S**₄, **S**₅ (3)

rozvinieme teóriu **S**. Čitateľovi doporučujeme, aby niektoré z axiom rozobral podľa vzoru príkladu 1 a úlohy 1.

Dohovor 1.S. Chlapcov budeme označovať veľkými latinskými písmenami *A, B, C, X*, atd., dievčatá malými

písmenami a, b, c, y , atd. Symbolom Ch označíme množinu chlapcov, symbolom D množinu dievčat. Základný pojem „páčiť sa“ označíme symbolom ε v nasledujúcom zmysle:

dievča y sa páči chlapcovi X označíme $X \varepsilon y$.

Poznámka 1.S. Úslovie „dvaja chlapci A, B “ nehovorí ešte, že chlapci A, B sú rôzni. Fakt, že A je chlapec, môžeme zapísať tiež symbolicky $A \in Ch$. Podobne $a, b \in D$ značí, že a, b sú dievčatá.

Veta 1.S. Ak A, B sú dvaja rôzni chlapci, potom existuje jedno a len jedno dievča c , ktoré sa obidvom chlapcom páči.

Dôkaz. Existencia dievčata c vyplýva z S_2 , jeho jednoznačnosť z S_3 .

Dohovor 2.S. Dievča c z vety 1.S označíme tiež AB resp. BA . Upozorňujeme, že symbol AB je zavedený len ak $A \neq B$.

Veta 2.S. Množina Ch má aspoň tri rôzne prvky.

Dôkaz. Podľa S_1 existuje $a \in D$, podľa S_4 existujú potom $B, C \in Ch$ tak, že $B \neq C$ a $B \varepsilon a, C \varepsilon a$. Z axiomy S_5 vyplýva existencia takého chlapca A , ktorému sa dievča a nepáči. Preto je $A \neq B, A \neq C$ a A, B, C sú tri rôzne prvky množiny Ch . Veta je dokázaná.

Úloha 2. V dôkaze vety 2.S je nezmyselný pojem. Nájdite ho a opravte dôkaz!

Definícia 1.S. Povieme, že dievča a sa nepáči chlapcovi B prave vtedy, ak nie je pravda, že dievča a sa chlapcovi B páči. Značíme $B \not\varepsilon a$.

Veta 3.S. Nech $a, b \in D$ a symbolom $a \cap b$ označíme množinu všetkých chlapcov X , pre ktorých platí $X \varepsilon a$ a $X \varepsilon b$. Potom nastáva jeden a len jeden z prípadov:

1. $a \cap b = \emptyset$, 2. $a \cap b$ je jednoprvková, 3. $a = b$.

Dôkaz. Pretože prípady 1 a 2 sa navzájom vylučujú, treba dokázať dve tvrdenia: a) $a \cap b$ je aspoň dvojprvková $\Rightarrow a = b$; b) $a = b \Rightarrow a \cap b$ je aspoň dvojprvková. Prvé tvrdenie vyplýva z S_3 a druhé z S_4 .

Definícia 2.S. Ak neexistuje chlapec, ktorému sa páčia dané dve rôzne dievčatá a, b , potom tieto dievčatá nazveme priateľkami. V opačnom prípade hovoríme, že a, b sú nepriateľky. Teda dievčatá $a \neq b$ sú priateľkami (resp. nepriateľkami), práve keď pre ne nastáva prípad 1 (resp. 2) vety 3.S.

Dohovor 3.S. Budeme hovoriť tiež, že „dievča a je (ne)priateľkou dievčaťa b “ namiesto úslovia „dievčatá a, b sú (ne)priateľky“. Podobne budeme hovoriť „dievča x má (ne)priateľku“ namiesto „existuje dievča, ktoré je (ne)priateľkou dievčaťa x “.

Veta 4.S. Každé dievča má aspoň dve rôzne nepriateľky.

Dôkaz. Nech a je dievča a A, B, C chlapci z dôkazu vety 2.S. Označme $b = AB$, $c = AC$. Zo vzťahov $A \notin a$, $A \in b$, $A \in c$ vyplýva $b \neq a \neq c$. Sporom dokážeme vzťah $b \neq c$. Z $b = c$ vyplýva $C \in b$ a preto množina $a \cap b$ obsahuje aspoň dva prvky, a to B a C , lebo $B \neq C$. Podľa vety 3.S je potom $a = b$, čo je spor. Dievčatá $b \neq c$ sú hľadané dve nepriateľky dievčaťa a . Dôkaz je vykonaný.

Veta 5.S. Existujú tri rôzne dievčatá tak, že každé dve z nich sú nepriateľky.

Dôkaz. Existencia dievčaťa (označme ho a) vyplýva z S_1 . Teraz stačí vziať dievčatá a, b, c z dôkazu predošlej vety.

Dôsledok. Množina D má aspoň tri rôzne prvky.

Veta 6.S. Ku každému chlapcovi X existuje aspoň jedno dievča x , ktoré sa mu nepáči.

Dôkaz. Podľa dôsledku existujú dve rôzne dievčatá a, b . Ak je $X \notin a$, alebo $X \notin b$, potom sme hotoví. Nech teda $X \in a$, $X \in b$. Podľa **S**₄ existujú chlapci A, B tak, že $A \neq X \neq B$, $A \in a$, $B \in b$. Potom je $A \neq B$, lebo inak by vzhľadom na vetu 3.**S** bolo $a = b$. Dievča $x = AB$ sa chlapcovi X nepáči, lebo inak by bolo podľa **S**₃ $a = x$ aj $b = x$. Tým je dôkaz vykonaný.

Veta 7.S. Každému chlapcovi X sa páčia aspoň dve rôzne dievčatá.

Dôkaz. Podľa vety 6.**S** existuje dievča x tak, že $X \notin x$. Podľa **S**₄ existujú $B \neq C$, ktorým sa x páči. Potom XB a XC sú hľadané rôzne dievčatá páčiace sa chlapcovi X .

Axiomatizovaná teória **S** postavená na troch základných pojmoch a piatich axiomach v tomto štádiu obsahuje tri definované odvodené pojmy: nepáčiť sa, priateľky, nepriateľky a sedem tvrdení.

*

A nakoniec dve úlohy od Františka Zítka, autora kníčky *Vytvárající funkce* (svazek 29).

Úloha 1. Pro reálná x a $n = 0, 1, 2, \dots$ definujeme mnohočleny $P_n(x)$ takto:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \dots, \quad P_{n+1}(x) = (x + n)P_n(x).$$

Potom pro všechna přirozená n a reálná x, y platí

$$P_n(x + y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k(x) \cdot P_{n-k}(y)$$

(tzv. *Nörlundova formule*). Dokažte.

Návod. Formulí snadno dokážeme matematickou indukci podle n .

Úloha 2. Určete, kolika způsoby lze přirozené číslo n

vyjádřit jako součet navzájem různých přirozených čísel. K pořadí sčítanců se nepřihlíží.

Návod. Hledaný počet je roven koeficientu při x^n v mnohočlenu

$$(1 + x)(1 + x^2) \dots (1 + x^n).$$

$\left(\text{Je to mnohočlen stupně } \binom{n+1}{2}. \right)$ Pro $n = 1, 2, 3, \dots, 10$ jsou tyto počty rovny po řadě 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10.

(IV)

MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY V SOVĚTSKÉM SVAZU

IVAN SEMJONVIČ PETRAKOV

Záliba v řešení matematických úloh je velmi rozšířená a prastará. Už ve starověku a ve středověku, kdy mnohé vědy teprve vznikaly, lidé spolu v tomto oboru soutěžili a vždy to byl a bude vyhledávaný způsob, jak příjemně strávit volný čas.

V minulém století začaly matematické časopisy v některých evropských zemích vyhlášovat soutěže v řešení matematických úloh a v našem století se začaly organizovat matematické soutěže pro žáky, matematické olympiády.

Na jaře roku 1934 uspořádala leningradská universita zásluhou vynikajícího geometra, tehdy mladého profesora B. N. Delonea první matematickou olympiádu pro žáky, kteří byli členy matematických kroužků. Olympiáda měla tři kategorie. První z nich měla za úkol popularizovat matematické soutěže a obsahovala poměrně lehké úlohy. Úlohy třetí kategorie vyžadovaly již kromě znalosti středoškolské látky jistou matematickou kulturu účastníků a matematický důvtip. Každý z účastníků řešil dvě úlohy z různých oblastí matematiky. Uvedme si některé úlohy z třetí kategorie leningradské olympiády:

1. a) Jsou-li a , b , c délky stran trojúhelníka, pak jsou kořeny rovnice

$$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$$

imaginární.

b) Trojúhelník se pohybuje ve své rovině tak, že dvě z jeho stran stále procházejí dvěma pevnými body. Dokažte, že pak existuje bod, od něhož má přímka, na které leží třetí strana trojúhelníka, stále stejnou vzdálenost.

2. a) Nechť α a β jsou kořeny rovnice $x^2 + px + 1 = 0$, γ a δ jsou kořeny rovnice $x^2 + qx + 1 = 0$. Dokažte, že platí

$$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha + \delta)(\beta + \delta) = -p^2 + q^2.$$

b) Trojboký jehlan protněte rovinou tak, aby jeho řezem byl kosočtverec.

3. a) Vypočtěte x a y z rovnic

$$\begin{aligned} a \sin^2 x + b \cos^2 x &= n, \\ b \sin^2 y + a \cos^2 y &= m. \end{aligned}$$

b) Dvě kružnice se protínají v bodech A , B . Bodem A je vedena přímka protínající kružnice v bodech P a Q . Jakou čáru opisuje střed úsečky PQ , když se protínající přímka otáčí kolem bodu A .

4. a) Určete limitu zlomku

$$\frac{\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg}(a-x)}{\operatorname{arctg}(a+x) - \operatorname{arctg}(a-x)}$$

pro x konvergující k nule.

b) Dvě tečny ke kružnici jsou pevné, třetí se pohybuje po kružnici. Dokažte, že úsečku, kterou na pohybující se tečně vytínají pevné tečny, lze ze středu kružnice vidět stále pod týmž úhlem.

5. a) Tři stěny trojhranu s navzájem kolmými hranami protínají kouli ve třech kruzích. Dokažte, že součet obsahů těchto kruhů se nezmění, pootočíme-li tento trojhran kolem vrcholu tak, že žádná z jeho stěn nepřestane protínat kouli.

6. a) Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x^2 &= a + (y - z)^2, \\y^2 &= b + (z - x)^2, \\z^2 &= c + (x - y)^2.\end{aligned}$$

b) Dokažte, že délky tečen ke dvěma navzájem se protínajícím kružnicím, které jsou vedeny z libovolného bodu ležícího na prodloužení jejich společné tětiny, jsou si rovny.

7. a) Dokažte, že

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.$$

b) Dokažte, že vzdálenost libovolného bodu kružnice od její tětiny je geometrickým průměrem vzdáleností téhož bodu od tečen ke kružnici, sestrojených v koncových bodech tětiny.

8. a) Je-li $\sec \alpha \sec \beta + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \gamma \geq 0$, pak $\cotg 2\gamma \leq 0$.

b) Dokažte, že úsečky spojující vrcholy trojbokého jehlanu s těžišti protilehlých stěn se protínají v jednom bodě, který dělí každou z těchto úseček v poměru 3 : 1.

Roku 1935 začíná pořádat matematické olympiády mechanicko-matematická fakulta moskevské university. Zřejmě je zde úzká souvislost s přechodem profesora B. N. Delonea na moskevskou universitu. Organizační výbor vedl známý sovětský matematik, prezident Moskevské matematické společnosti akademik L. A. Alexandrov. Členy výboru byli A. N. Kolmogorov, L. A. Ljusternik, S. L. Sobolev, A. G. Kuroš, S. A. Janovská a jiní.

Na této olympiádě soutěž probíhala ve dvou kolech, a tuto tradici zachovává universita dodnes. V prvním

kole se předkládaly 4 varianty, každá po 3 úlohách. Každý účastník si mohl vybrat libovolnou z předložených variant. Úlohy byly pro všechny třídy stejné a měly školní charakter.

Zde je jedna z variant prvního kola:

1. Určete poměr dvou čísel, je-li poměr jejich aritmetického průměru k průměru geometrickému $25 : 24$.
2. Sestrojte trojúhelník, jsou-li dány délky jeho stran a a b a délka u osy úhlu, který tyto strany svírají.
3. Jehlan, jehož bočné stěny svírají s jeho podstavou úhel φ , má za podstavu rovnoramenný trojúhelník, jehož ramena svírají úhel α . Určete velikost úhlu, který svírají stěny jehlanu při hraně spojující vrchol jehlanu s vrcholem úhlu α .

Ve druhém kole se varianty podstatně lišily. Jedna varianta obsahovala geometrické úlohy, druhá algebraické a třetí číselněteoretické.

První varianta obsahovala tyto úlohy:

1. Je dána kružnice a na ní 3 body M, N, P , ve kterých se s kružnicí protínají (po prodloužení) výška, osa úhlu a těžnice vycházející z téhož vrcholu trojúhelníka vepsaného do kružnice. Sestrojte tento trojúhelník.
2. Na povrchu krychle určete všechny body, z nichž je vidět tělesovou úhlopříčku krychle pod nejmenším úhlem.
3. Ve dvou různých rovinách leží dva trojúhelníky ABC a $A_1B_1C_1$. Přímka AB se protíná s přímkou A_1B_1 , přímka BC s přímkou B_1C_1 , přímka CA s přímkou C_1A_1 . Dokažte, že přímky AA_1 , BB_1 a CC_1 se buď protínají všechny v jednom bodě, anebo jsou navzájem rovnoběžné.

Od roku 1945 se matematické olympiády začaly pořádat také v Kyjevě, od r. 1947 v Kujbyševě a roku 1949 zahájily podobné soutěže university a pedagogické ústavy v Ivanovu, Lvově, Smolensku, Saratově a v některých dalších sovětských městech. Každým rokem pak k nim přibývaly další vysoké školy. Tyto olympiády však stále měly místní charakter. Zúčastňovali se jich žáci pouze z těch měst, ve kterých se olympiády pořádaly, a přitom zpravidla jen ti žáci, kteří navštěvovali matematické kroužky při universitách nebo pedagogických ústavech. Mnozí žáci, kteří měli zájem o matematiku, ale do kroužků nechodili, se olympiád neúčastnili.

V opravdu velkém a celostátním měřítku se olympiády v Sovětském svazu začaly pořádat v době vzniku mezinárodních matematických olympiád.

Roku 1959 se zásluhou matematiků z Rumunska, Maďarska, Československa a řady jiných zemí uskutečnila první mezinárodní matematická olympiáda.

My jsme se o ní dověděli poměrně pozdě. Družstvo bylo sestaveno narychlo a jen neúplné. Nemělo úspěch. V následujících dvou letech se sovětské družstvo MMO nezúčastnilo. V těchto letech jsme z podnětu profesora A. I. Markuševiče začali pořádat olympiády v celostátním měřítku.

V roce 1960 se konala matematická olympiáda žáků, které se zúčastnila družstva 13 oblastí RSFSR a 9 dalších svazových republik. Byla to — dá-li se to tak nazvat — experimentální matematická olympiáda v opravdu velkém měřítku.

V následujícím roce se konala oficiálně první všeruská matematická olympiáda. Zúčastnila se jí družstva skoro všech oblastí Ruské federace a též družstva většiny ostatních svazových republik.

Úlohy byly pro každou třídu různé. Například žákům

desátých tříd na I. všeruské matematické olympiádě, která se konala v dubnu 1961 v Moskvě, byly předloženy úlohy:

1. Dokažte, že pro libovolné tři posloupnosti přirozených čísel $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$; $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$; $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ existují dvě taková čísla p a q , pro která $a_p \geq a_q$, $b_p \geq b_q$, $c_p \geq c_q$.
2. V obdélníku o stranách 20 a 25 je rozmístěno 120 čtverců o straně 1. Dokažte, že v obdélníku lze umístit kruh o průměru 1, který nemá společný bod se žádným ze čtverců.
3. V rovině je dán pevný bod P . Vyšetřete všechny možné rovnostranné trojúhelníky ABC , pro které $AP = 3$, $BP = 2$. Jakou největší délku může mít CP ?
4. Je dána konečná posloupnost $x_1, x_2, \dots, x_{2^k}$, kde $x_i = 1$ nebo $x_i = -1$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, 2^k$. Utvořme novou konečnou posloupnost $x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{2^k}x_1$, atd. Dokažte, že po konečném počtu kroků dostaneme konečnou posloupnost samých jedniček.

Zajímavé jsou i úlohy pro jiné třídy. Žákům devátých tříd byly předloženy tyto úlohy:

1. Body A a B se pohybují rovnoměrně a stejnými úhlovými rychlostmi po kružnicích o_1 a o_2 (ve smyslu pohybu hodinových ručiček). Dokažte, že vrchol C rovnostranného trojúhelníka ABC se pohybuje rovnoměrně po kružnici.
2. Do polí tabulky $m \times n$ jsou vepsána nějaká čísla. Změníme současně znaménka u všech čísel některého sloupce a některého řádku. Dokažte, že mnohonásobným opakováním této operace lze danou tabulku převést na takový tvar, že součty čísel libovolného sloupce a libovolného řádku jsou nezáporné.

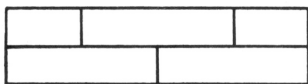
3. Necht a, b, c jsou libovolná celá čísla. Dokažte, že existují přirozená nesoudělná čísla k, l , pro něž platí, že $ak + bl$ je dělitelné číslem c .
4. n bodů je spojeno úsečkami tak, že každý bod je spojen s některým jiným bodem a přitom neexistují žádné dva body, které by byly spojeny dvěma různými cestami. Dokažte, že počet úseček je $n - 1$.
5. Péťa a Kolja se dělí o $2n + 1$ ořechů ($n \geq 2$), přičemž každý chce získat pokud možno největší počet ořechů. Možné jsou tři způsoby dělení (každé probíhá ve třech etapách a I. a II. etapa jsou společné pro všechny tři způsoby):
 - I. Kolja rozdělí všechny ořechy na dvě části tak, že v každé části jsou aspoň dva ořechy.
 - II. Péťa rozdělí každou část znovu na dvě části tak, že v každé části je alespoň jeden ořech.
 - III. Při prvním způsobu bere Péťa největší a nejmenší část; při druhém způsobu Péťa bere prostřední části; při třetím způsobu bere Péťa buď největší a nejmenší část, anebo obě prostřední, ale za právo výběru odevzdá Koljovi jeden ořech.
 Určete, který ze způsobů je nejvýhodnější pro Péťu a který je pro něj nejméně výhodný.

Žákům osmých tříd byly předloženy tyto úlohy:

1. Ve vrcholech obdélníku $ABCD$ jsou sestrojeny kružnice. Přitom pro poloměry těchto kružnic platí rovnost $r_A + r_C = r_B + r_D$. Ke kružnicím o středech A a C , B a D jsou vedeny vnější tečny. Dokažte, že čtyřúhelníku vymezenému tečnami lze vepsat kružnici.
2. Je dána čtveřice kladných čísel (a, b, c, d) . Sestrojme postupně další čtveřice (ab, bc, cd, da) , $(ab^2c, bc^2d, cd^2a, da^2b)$ atd. Dojdeme-li tímto postupem někdy

k původní skupině, stane se tak jedině, je-li $a = b = c = d = 1$. Dokažte.

3. Dokažte, že neexistuje lomená čára, která by protínala každou úsečku obrazce na obrázku 4 právě jednou.



Obr. 4

4. Dokažte, že neexistují celá čísla a, b, c, d vyhovující rovnostem

$$abcd - a = \underbrace{11\dots1}_{1961}$$

$$abcd - b = \underbrace{11\dots1}_{1960}$$

$$abcd - c = \underbrace{11\dots1}_{1959}$$

$$abcd - d = \underbrace{11\dots1}_{1958}$$

Úlohy předložené žákům sedmých tříd:

1. Strany pravidelného konvexního mnohoúhelníku jsou obarveny z vnějšku. Sestrojte několik úhlopříček tak, že žádné tři se neprotínou v jednom bodě. Každou úhlopříčku vybarvěte z jedné strany. Dokažte, že aspoň jeden z mnohoúhelníků, na které je úhlopříčkami rozdělen původní mnohoúhelník, je celý obarven z vnějšku.

(Pozn. překl. V úloze jde o vybarvení polorovin vytvářených stranami resp. úhlopříčkami mnohoúhelníku.)

2. Ve čtverci $ABCD$ je na straně AB dán bod P , na straně BC bod Q , na straně CD bod R a na straně DA bod S . Ukázalo se, že obrazec $PQRS$ je obdélník. Dokažte, že obrazec $PQRS$ je buďto čtverec, nebo jsou jeho strany rovnoběžné s úhlopříčkami čtverce $ABCD$.
3. Dokažte, že mezi 39 po sobě jdoucími přirozenými čísly existuje nutně takové, že součet jeho cifer je dělitelný 11.
4. Je dána tabulka s 4×4 poli. V některých polích je hvězdička. Dokažte, že lze rozmístit 7 hvězdiček tak, že při vyškrtnutí libovolných dvou řádek a dvou sloupců ve zbylých polích zůstane alespoň jedna hvězdička. Dokažte, že když je hvězdiček méně než 7, pak vždy lze vyškrtnout dva řádky a dva sloupce tak, že zbývající pole jsou vesměs prázdná.

Uvedené úlohy dávají konkrétní představu o obtížnosti úloh, které se zadávají na všesvazových olympiádách.

Brzy se začaly pořádat televizní olympiády žáků a také dálkové matematické olympiády. Takto se mohou zúčastnit soutěží i žáci z nejvzdálenějších měst a sídlišť; mohou vyzkoušet své síly a v případě vítězství v dálkové nebo televizní olympiádě získat právo na účast v oblastní matematické olympiádě.

Zájem dětí a mládeže o matematiku tím vším značně vzrostl. Téměř na každé škole začaly pracovat matematické kroužky. Pro ty žáky sedmých, osmých a devátých tříd, kteří se nejvíce zajímají o matematiku, se na mnoha místech v červenci pořádají matematické letní školy. Poprvé takovou letní školu zorganizovali vědci z novosibirského akademického městečka a pozvali na ni stovky dětí z různých škol ze Sibíře, z Dálného východu, ze Střední Asie a z Uralu. Novosibirské akademické

městečko leží v lese na břehu řeky Ob, u přehrady, které se říká Obské moře. Děti tam odpočívají, koupou se, opalují, sportují a přitom jsou neustále ve společnosti vědců, matematiků. Ti tam bydlí a žijí s nimi; při společných procházkách s nimi docela nenuceně a neformálně mluví o matematice a o jejích různých problémech a nepozorovaně tak děti uvádějí do jejího světa. Mimoto pro ně denně pořádají přednášky a semináře. Účast na těchto seminářích a přednáškách není povinná, je zcela dobrovolná. Přednáší se matematika, fyzika, přírodní vědy. Byla tam např. tato témata: teorie výbuchů, problémy současné fyziky, Maxwellovy rovnice, základy teorie množin, topologie, neeukleidovská geometrie, teorie relativity, fotonová raketa, molekulární fyzika, biologie a matematika aj.

Vědci chtějí, aby se jejich mladí přátelé hodně dověděli a aby se jejich zájem prohloubil. A mají úspěchy. Za měsíc získají děti velmi mnoho. Na konci pobytu v letní škole se všechny zúčastňují fyzikálně-matematické olympiády a nejúspěšnější z nich jsou přijaty do fyzikálně-matematické (a nyní i biologické) internátní školy při novosibirské universitě.

Mezi hrami, soutěžemi a rozpravami, které se pořádají na letní škole, je zvlášť zajímavá obhajoba projektu. Projekt je obvykle svérázné předvedení nějaké myšlenky v originální, zajímavé a obvykle žertovné formě; přitom obsahuje často vážná tvrzení. Stejným způsobem se pak také obhajuje i vyvrací. Ve škole pracují kromě toho různé kroužky.

Podle novosibirského vzoru byly organizovány matematické letní školy i v mnoha jiných městech. Např. v Simferopolu pro žáky z krymských škol. Na tuto školu často jezdí přednášet a besedovat s účastníky i společně s nimi si odpočinout akademik A. N. Kolmogorov.

Dobrou školu organizuje v okolí Moskvy moskevská universita. Přednášejí na ní vědci a mládež z moskevské university. Několik škol v severozápadní oblasti pořádá leningradská universita.

Bylo by dobré, kdyby se podobné školy organizovaly i v jiných zemích a kdyby se na letní školy zvaly a vysílaly delegace žáků ze zahraničí.

Z iniciativy moskevské university, k níž se připojily i jiné vysoké školy, byla zřízena Všesvazová dálková matematická škola. V ústředním tisku (Komsomolské pravdě, Učitelských novinách aj.) se otiskují podmínky pro přijetí do této školy a úlohy přijímací zkušební práce. Žáci, kteří chtějí být přijati, tyto úlohy řeší a řešení posílají na universitu. Tam se práce opravují, a je-li z řešení vidět, že žák má matematické schopnosti, i když látku ještě příliš neovládá, je do školy přijat. Škola pak dva roky řídí jeho matematické studium. Posílá mu brožury s výkladem různých matematických otázek, např.: metody matematické indukce, metoda souřadnic, funkce a grafy aj.; doporučuje mu postup studia a zadává úlohy ke studované látce. Žák se může obrátit na školu s libovolným dotazem a dostane kvalifikovanou odpověď. Každý žák přijatý do této školy dostává pravidelně kontrolní úlohy. Jejich řešení posílá ke klasifikaci. Podle těchto kontrolních prací mohou pracovníci školy zjistit, kde má žák potíže a v čem naopak úspěchy a podle toho řídit jeho další studium.

Všesvazová dálková matematická škola poskytuje takto pomoc a vedení žákům nejrozličnějších škol, které samy by jim při studiu matematiky dostatečně pomáhat nemohly.

V současné době se ve většině škol dvakrát až třikrát do roka pořádají matematické soutěže různých forem, olympiády. Vítězové těchto soutěží se zúčastňují okres-

ních olympiád a vítězové okresních olympiád oblastních. Tři až čtyři vítězové oblastní olympiády postupují do závěrečného kola celostátní olympiády.

V roce 1967 bylo zřízeno svazové ministerstvo osvěty. Od té doby byl název Všeruská matematická olympiáda změněn na Všesvazová matematická olympiáda, přičemž organizace olympiády zůstala stejná. Svazové republiky však mohou nyní vysílat víc družstev. Tak např. dříve se z Ukrajiny zúčastňovala závěrečného kola 1—2 družstva, nyní 27—28 družstev, z Gruzie místo jednoho 4—5 družstev, z Kazachstánu 17 družstev atp.

Přirozeně, že to velmi podnítilo aktivitu dětí. Navíc ještě směrnice o přijímacích zkouškách na vysoké školy stanoví, že vítězové olympiády mají při rovnosti podmínek při přijímání na vysokou školu přednost. Účastníci mezinárodní matematické olympiády se od r. 1963 zapisují na vysoké školy bez přijímacích zkoušek.

Z matematických kroužků moskevské university a z moskevských olympiád vyšli takoví vědci, jako je člen korespondent AV SSSR Igor Šafarevič, doktoři fyzikálně-matematických věd, profesori moskevské university Alexandr Kirillov a Valerij Alexejev a jiní.

Skutečné oživení vnesla do olympiád účast SSSR na mezinárodních matematických olympiádách. V roce 1962 jsme dostali od našich československých přátel pozvání na IV. MMO. Družstvo jsme vybrali podle výsledků Všeruské olympiády — bylo v něm 7 chlapců a jedna dívka, Lída Gončarovová. A nesmírně nás všechny potěšilo, když Lída vybojovala spolu s jedním sovětským a dvěma maďarskými chlapci první cenu. Později se Lída dala zapsat na moskevskou universitu, studium dovršila universitní aspiranturou a obhájila kandidátskou práci.

Musím říci, že „československá“ mezinárodní olympiá-

da utkvěla nám všem nadlouho v paměti. Její hlavní část se odehrála v Českých Budějovicích. Jak mezi vedoucími, tak také mezi účastníky vládl duch vzájemného porozumění a srdečného přátelství. Viděli jsme také mnoho stavebních památek a navštívili mnoho muzeí v Jihočeském kraji a v Praze.

Českoslovenští matematici vypracovali statut olympiády a celý její řád. Statut nebyl potvrzen, dosud však se všechny mezinárodní matematické olympiády tímto statutem řídí.

Na mezinárodní matematické olympiády se družstvo SSSR vybírá podle výsledků v celém systému olympiád. Široká síť olympiád a účast neobyčejně velkého počtu žáků umožňují vybrat družstvo a jet s ním na soutěže bez doplňujícího tréninku. Děti se samozřejmě před odjezdem na olympiádu připravují doma a v universitních kroužcích. Je to přirozenější a dává to dobré výsledky, zajišťuje to také všem stejnou možnost zúčastnit se olympiády. Např. Andrej Suslin studoval na jedné leningradské škole humanitního směru a na IX. MMO v Jugoslávii získal první cenu. Nyní je Andrej aspirantem na universitě a členem poroty Všesvazové matematické olympiády. Alexej Tolpygo studoval v Kyjevě. Byl tak roztržitý, že jsme se báli vzít ho s sebou na olympiádu. Mohlo se stát, že by při procházce v zamýšlení nad řešením nějaké úlohy zašel tak daleko, že by se nemohl včas vrátit. Proto na V. MMO ve Vratislavi musely děti chodit s Aljošou na procházku. Aljoša vynikajícím způsobem vystudoval moskevskou universitu, dokončil vědeckou aspiranturu a sám nyní přednáší na universitě. Je jedním z autorů sbírky úloh pro žáky dálkové matematické školy.

Účastník VI. MMO Jurij Matiasievič navštěvoval nejprve 239. leningradskou školu a potom fyzikálně-mate-

matickou internátní školu při moskevské universitě. Po VI. MMO měl ještě rok chodit do školy a my jsme doufali, že ho budeme moci vzít na VII. MMO do NDR, Jurij si však přál studovat na universitě. Jako jeden z vítězů olympiády byl zapsán před dokončením školy bez přijímacích zkoušek na leningradskou universitu. Potom, ještě jako student, rozřešil desátý Hilbertův problém o řešitelnosti diofantovských rovnic. O tomto problému přemýšleli význační matematici mnoho deseti-letí. Brzy obhájl Matiasavič kandidátskou disertaci a nyní už je doktorem fyzikálně-matematických věd a přednáší na leningradské universitě.

V posledních letech jsou členové sovětského družstva svoláváni na krátké přípravné srazy ve škole V. I. Lenina v Leninských Gorkách. Při těchto soustředěních se probírají úlohy z různých oblastí matematiky: úlohy logického charakteru, různé rovnice, nerovnosti, kombinatorika, funkce a grafy, geometrické transformace a různé geometrické úlohy. Úlohy se vybírají ze svazků edice *Knihovna matematického kroužku*, z knihy *Mezinárodní matematické olympiády* a odjinud. Mnohé úlohy jsou původní, sestavují je vedoucí. Také sami žáci jsou vedeni k tomu, aby formulovali úlohy. Program na soustředění většinou vedou mladí matematici. Mnozí z nich byli účastníky mezinárodních a všesvazových olympiád. Přitom někteří z přednášejících bydlí během soustředění společně se žáky v Leninských Gorkách. Chodí s dětmi na procházky, tráví s nimi chvíle odpočinku, hrají s nimi i různé sportovní hry. Často jim při procházkách vymýšlejí a sestavují zajímavé a někdy i poměrně obtížné úlohy. O těchto úlohách společně s dětmi přemýšlejí, diskutují, posuzují předpoklady a řešení.

Na soustředěních se snažíme připravit žáky na řešení

úloh, které se zadávají na universitních, všesvazových a republikových olympiádách, a pokud možno je naučit, jak mají přistupovat k řešení úloh na libovolné téma, pokud ovšem nevyžadují znalosti přesahující rámec středoškolské matematiky. Naše příprava dětí na mezinárodní olympiády mívá dobré výsledky. Družstvo SSSR obsazuje na mezinárodních matematických olympiádách přední místa. Děti dovedou řešit poměrně složité úlohy. Někdy se i zkušený matematik nad některou úlohou pozastaví, a přece žáci naleznou poměrně originální řešení.

Chtěl bych to doložit případem jedné úlohy, kterou předložila jury X. MMO v Moskvě československá delegace. Je formulována takto:

V prostoru je rozloženo n bodů tak, že každé tři z nich jsou vrcholy trojúhelníku, jehož jeden úhel je větší než 120° . Dokažte, že tyto body lze označit písmeny $A_1, A_2, \dots, A_n$ tak, že každý úhel $\sphericalangle A_i A_j A_k$ je větší než 120° , když $i < j < k$.

Jury prozkoumala zadání úlohy a její řešení. Usoudila, že řešení úlohy je velmi složité a úloha je těžká. Některé delegace však požádaly, aby úloha nebyla během roku zveřejňována, aby jí bylo možno použít na národních olympiádách. Zejména se úloha zalíbila členům jury všesvazové olympiády a v roce 1969 byla předložena žákům desátých tříd na Třetí všesvazové olympiádě. Mnozí účastníci předvedli původní, logicky jasné, hezké řešení a lze říci, že se jim úloha zalíbila. Uvedu s nepodstatnými úpravami řešení, které našla řada žáků:

Řešení. Nechť n bodů v prostoru splňuje uvedené podmínky. Potom libovolný úhel s vrcholy v těchto bodech je buď větší než 120° , anebo menší než 60° . To plyne z podmínky, že v každém trojúhelníku je jeden

úhel větší než 120° , a tedy každý ze dvou zbývajících úhlů je menší než 60° .

Ukážeme, že v systému daných bodů jsou jen dva body, jejichž vzdálenost je největší, a každý úhel s vrcholem v jednom z těchto bodů je menší než 60° . Předpokládejme, že největší je vzdálenost bodů B a C . Potom pro libovolný bod A_i různý od B a C platí, že $\sphericalangle BA_iC > 120^\circ$, protože tento úhel je největší v trojúhelníku BA_iC . Na druhé straně pro libovolné body A_i, A_j (obr. 5a) je $\sphericalangle A_iBC < 60^\circ$ a $\sphericalangle A_jBC < 60^\circ$. Libovolný rovinný úhel hran trojhranu je menší než součet zbývajících dvou stran (tj. hranových úhlů) tohoto trojhranu. Proto je

$\sphericalangle A_iBA_j < \sphericalangle A_iBC + \sphericalangle A_jBC < 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$,
tj.

$$\sphericalangle A_iBA_j < 120^\circ.$$

Odtud plyne $\sphericalangle A_iBA_j < 60^\circ$, a tedy vzdálenost A_iA_j není největší.

Tvrzení věty dokážeme matematickou indukcí. Dokážeme, že když B a C jsou nejvzdálenější dva body z daných n bodů, potom všechny body lze očíslovat tak, že je $\sphericalangle A_iA_jA_k > 120^\circ$ pro všechna $1 \leq i < j < k \leq n$, přičemž $A_1 = B$, $A_n = C$.

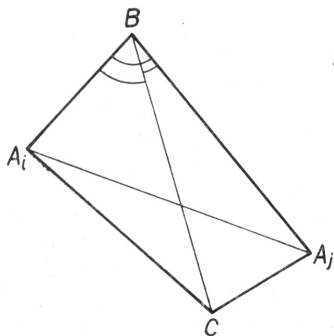
Pro $n = 3$ je tvrzení pravdivé.

Předpokládejme, že toto tvrzení platí pro m bodů, a dokážeme pak jeho pravdivost pro $m + 1$ bodů.

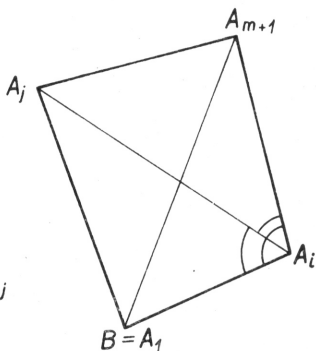
Vybereme z těchto $m + 1$ bodů dva od sebe nejvzdálenější body a označíme je B a C ; bod C označíme jako A_{m+1} a vyloučíme jej z dalšího vyšetřování. Ze zbývajících bodů je B jeden z krajních bodů. Všechny úhly s vrcholem B jsou menší než 60° . Proto je možno je podle předpokladu očíslovat tak, že $A_1 = B$ a $\sphericalangle A_iA_jA_k > 120^\circ$ pro všechna $1 \leq i < k < j \leq m$. Dokážeme, že $\sphericalangle A_iA_jA_{m+1} > 120^\circ$ pro všechna $1 \leq i <$

$< j \leq m$. Pro $i = 1$ je to splněno, neboť A_1 a A_{m+1} jsou krajní (nejvzdálenější) body.

Nechť $1 < i < j \leq m$. Potom $\sphericalangle A_i A_j A_{m+1} > 120^\circ$, protože v trojúhelníku $A_i A_j A_{m+1}$ je úhel při vrcholu A_{m+1} menší než 60° . Úhel $\sphericalangle A_j A_i A_{m+1}$ (obr. 5b) je také



Obr. 5a



Obr. 5b

menší než 60° . Kdyby tento úhel byl větší než 120° , pak také úhel $\sphericalangle A_1 A_i A_{m+1} > 120^\circ$ (A_1, A_{m+1} jsou nejvzdálenější body a podle indukčního předpokladu je $\sphericalangle A_1 A_i A_j > 120^\circ$), dostali bychom, že každý z úhlů při vrcholu A_i je větší než 120° . To však není možné. Tím je tvrzení dokázáno.

Mezinárodní matematické olympiády už nyní mají značný vliv na obsah a charakter studia účastníků ze všech států, které mezinárodní olympiády obesílají, i z těch států, které se dosud těchto olympiád neúčastní. Přáli bychom si, aby se pracovní styky, které matematici i žáci navazují na mezinárodních matematických olympiádách, stále rozvíjely, sílily a přinášely své dobré plody.

O SOUTĚŽÍCH MLADÝCH MATEMATIKŮ V JUGOSLÁVII

VLADIMÍR MIČIČ

Soutěže mladých matematiků jsou jednou z velmi významných činností Svazu spolků matematiků, fyziků a astronomů Jugoslávie. Historie těchto soutěží není příliš dlouhá. Ve školním roce 1973/74 probíhal 15. cyklus pro žáky středních škol (od deváté po dvanáctou třídu, věk 15 až 19 let) a 5. cyklus pro žáky základní školy (soutěží žáci 5. až 8. třídy, věk 11 až 15 let). Pokusíme se stručně seznámit čtenáře s těmito soutěžemi.

Cyklus (tj. ročník soutěže — pozn. překl.) začíná soutěžemi na školách. Toto první kolo bezprostředně řídí učitelé matematiky na svých školách a jeho cílem je vybrat nejlepší reprezentanty školy. Následující kolo se organizuje pouze pro žáky základní školy. Jsou to tzv. „opštinske“ soutěže: zahrnují několik škol v témž místě a jeho okolí, v menším městě nebo v jednom obvodu velkých měst. Žáci páté a šesté třídy na této úrovni svou účast v soutěži končí, žáci sedmé a osmé třídy pokračují v bojích o ceny a uznání až do svazové soutěže. Následují kola oblastní. Jsou organizována zvlášť pro sedmou a osmou třídu a zvlášť pro vyšší třídy. Vítězové, nejlepší účastníci, se přihlašují do republikových soutěží a posledním kolem je pak svazová soutěž. Ta je také organizována zvlášť pro žáky základní školy (7. a 8. třída) a zvlášť pro žáky středních škol. Svazové soutěže se účastní nejlepší žáci všech našich republik, a to 60 žáků ze základních škol a 100 žáků ze středních

škol. Tak žáci základních škol absolvují 5 kol a žáci středních škol 4 kola do konce cyklu. Mezi vítězi svazové soutěže žáků středních škol se vybírají kandidáti pro účast na mezinárodní matematické olympiádě. Tito kandidáti se utkávají v doplňkovém kole (populárně se mu říká „malá olympiáda“), v němž se rozhoduje o sestavě družstva pro MMO.

Je zřejmé, že organizační schéma je poměrně úzce svázáno se systémem vyučování, proto také jsou úlohy předkládané žákům při soutěžích obsahově spjaty se školními osnovami pro danou třídu.

Při porovnání organizace olympiády v SFRJ s organizací MO v ČSSR je vidět, že jedna připomíná druhou, jsou však i jisté rozdíly. Počet kategorií v jugoslávských soutěžích je větší (je jich celkem osm) a závěrečného kola se účastní nejlepší účastníci v šesti kategoriích. Počet účastníků — snad i vlivem schématu soutěží — je na našich olympiádách velmi vysoký, v jednom cyklu převyšuje 100 000 žáků.

Soutěže přímo řídí příslušné komise, které vybírají úlohy a vydávají pokyny. Svazová komise pro mladé matematiky je organizátorem celého cyklu a bezprostředně řídí svazovou soutěž a účast družstva SFRJ na mezinárodních olympiádách. Úlohy jsou poměrně různorodé co do obtížnosti i problematiky, které se dotýkají. Lze říci, že na začátku cyklu velmi úzce souvisí se školními osnovami a poměrně zřídka se vyskytují nestandardní úlohy, zatímco na vyšším stupni jsou častější úlohy nezávislé na školních osnovách, i když stále ještě ne příliš. Srovnáme-li je s úlohami z československých olympiád, můžeme říci, že v průměru jsou československé úlohy různorodější, méně se přidrží toho, co se učí ve škole, ale jejich obtížnost je přibližně stejná. V poslední době lze v Jugoslávii pozorovat

tendenci zavádět do soutěží nový obsah. „Malá olympiáda“ už svým obsahem a úrovní úloh zcela připomíná MMO. Při výběru často sáhneme po úlohách, které byly předloženy na olympiádách v jiných zemích, a velmi často také používáme úlohy z olympiád v ČSSR.

Příprava žáků na soutěže má různé formy. Nepochybně největším přínosem jsou časopisy *Matematicko-fyzikální list* pro žáky střední školy a *Matematický list* pro žáky základní školy. Jsou vydávány už řadu let ve velkém nákladu (kolem 50 tisíc výtisků každý). Sbírky úloh v těchto časopisech a vhodné články přivádějí žáky k mimoškolní práci v matematice a k účasti na soutěžích. Jinou rozšířenou formou přípravy jsou školní kroužky. V některých městech se organizují speciální skupiny a kroužky pro nejlepší žáky. Ve školním roce 1973/74 např. v Bělehradě velmi úspěšně pracovala městská skupina mladých matematiků. Její práce se zúčastňovali profesori středních škol, universitní pracovníci a velký počet studentů matematiky, nedávných účastníků mezinárodních olympiád, kteří s velkým zaujetím a nadšením sdělovali své vědomosti a zkušenosti svým mladým nástupcům. Přednášelo se např. na tato témata: Dirichletův princip, konvexní útvary, diferenční rovnice, řešení rovnic celými čísly, některé číselněteoretické funkce, problém čtyř barev, komplexní čísla a jejich použití při řešení geometrických úloh, elementární nerovnosti, pokrytí a rozklady, několik matematických her, rozložení bodů a přímek v rovině a v prostoru, geometrické nerovnosti atd.

Žáci tak získávají ve škole základní vědomosti, ve školních skupinách (kroužcích) si je prohlubují a v časopisech pak nalézají látku k dalšímu prohloubení svých znalostí i různé soutěžní úlohy. To všechno je připraveno na účast v organizovaném cyklu soutěží. Začínají

bojovat o postup z jednoho kola do druhého. Všem se to samozřejmě nepovede. Na olympiádách však není poražených. Jsou všichni jako jedna rodina a v následujícím roce se zúčastní znovu. Znovu vyzkoušejí své síly. Na jakých úlohách? Vybrali jsme několik úloh z cyklu 1973/74 a předkládáme je mladým československým přátelům k řešení. Nejsou nejtěžší ani nejzajímavější, ale jsou prostě podle našeho mínění charakteristické pro naše olympiády.

1. Určete tečnu elipsy $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, která vytíná mezi souřadnicovými osami nejkratší úsečku.
2. Jsou dány dva navzájem kolmé průměry AB a CD kružnice se středem O a poloměrem r . Na úsečce OA je dán bod M tak, že $OM = \frac{r}{\sqrt{3}}$. Libovolná přímka procházející bodem M protíná přímku CD v bodě R a kružnici v bodech P a Q , přičemž body P a R leží na téže polopřímce s počátkem M . Dokažte, že

$$\frac{1}{MQ} = \frac{1}{MP} + \frac{1}{MR}.$$

3. Strany trojúhelníka ABC mají délky $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$. Dokažte, že jsou-li α , β , γ vnitřní úhly trojúhelníka ABC , pak rovnice

$$x \sin \alpha + y \sin \beta + z \sin \gamma = 0$$

má jediné celočíselné řešení $x = y = z = 0$.

4. Vypočítejte součet

$$\frac{1}{\binom{n}{0}} - \frac{1}{\binom{n}{1}} + \frac{1}{\binom{n}{2}} - \frac{1}{\binom{n}{3}} + \dots + (-1)^n \frac{1}{\binom{n}{n}}.$$

5. V zemi Z je n měst. Mají se spojit telefonními vedeními tak, aby byly splněny tyto podmínky:
1. Každé vedení spojuje dvě města.
 2. Celkem je $n - 1$ vedení.
 3. Z každého města lze (přímo anebo nepřímo) mluvit s libovolným městem.
- Kolika způsoby to lze udělat?
6. Řešte nerovnici

$$\log_{2x^2-x} (2x + 2) < 1.$$

Děkuji redaktorům tohoto jubilejního sborníku za to, že mně poskytli příležitost seznámit vás, drazí přátelé, s našimi mladými matematiky a jejich soutěžemi. Pozdravuji matematiky a žáky v Československu při příležitosti významného 25. výročí matematické olympiády a přeji jí další rozkvět a mnoho nových úspěchů.

POZDRAV Z NDR

HELMUT BAUSCH

Jménem ústředního výboru olympiád mladých matematiků NDR chci blahopřát k jubileu všem našim československým přátelům a kolegům, kteří již dvacet pět let obětavě pracují v matematické olympiádě, a připojit i přání dalších úspěchů. S mnoha kolegy z ČSSR nás už léta váže přátelství. Účast obou našich zemí na mezinárodních matematických olympiádách a jiné podobné příležitosti poskytují našim učitelům a žákům velké možnosti k navázání kontaktů a k výměně zkušeností. Víme, že se v ČSSR vyvíjí značné úsilí ke zvýšení zájmu o matematickou olympiádu obsahově i organizačně zajímavými formami. Mnoho podnětů jsme převzali; např. po zhodnocení zkušeností získaných v ČSSR jsme i u nás zavedli volitelné povinné úlohy, což naši žáci velmi uvítali.

V NDR nemají ještě matematické olympiády tak dlouhou tradici. Naše první olympiáda se konala až v roce 1962, i když jsme se už od roku 1959 každoročně zúčastňovali mezinárodních matematických olympiád, bohužel s velmi malým úspěchem. Při přípravě a organizaci našich olympiád jsme však aspoň mohli sbírat a využívat zkušenosti získané v jiných zemích. Dnes mají olympiády v mimoškolní práci našich žáků a učitelů své pevné místo. K jejich náplni přispívají mnozí matematici z universit, vysokých škol i Akademie věd NDR. Každoročně statisíce žáků řeší úlohy prvního

kola (toto se nazývá školní olympiáda) anebo se o to alespoň snaží. Úlohy školní olympiády se uveřejňují i v deníku *FDJ Junge Welt* a je přípustné, aby žáci požádali své rodiče nebo příbuzné o pomoc při řešení. Úlohy druhého, třetího a čtvrtého kola (okresní, krajská a celostátní olympiáda) musí být řešeny v klauzurních podmínkách. Obtížnost úloh rok od roku roste. Žáci se připravují v pracovních skupinách, v matematických táborech o prázdninách a o obzvláště schopné pečují učitelé a vědci individuálně. V Berlíně je také žákovská matematická společnost. Všechna tato příprava ale zdaleka není jenom tréninkem na olympiády. Jejím hlavním cílem je všestranně prohloubit matematické vzdělání žáků.

V roce 1974 jsme podruhé měli možnost uspořádat mezinárodní matematickou olympiádu. Učinili jsme tak s velkou radostí. V účasti bylo dosaženo nového rekordu (18 zemí). Poprvé jsme uvítali družstva VDR a USA. Zájem o mezinárodní matematické olympiády zřejmě stále roste, takže mají před sebou dobré vyhlídky. Přes všechny obtíže vyvolané růzností školních programů v tak mnoha zemích je možné zadat soutěžní úlohy, které jsou zajímavé pro všechny účastníky.

Chtěl bych nyní předložit úlohu, která je odvozena z formulace praktického problému, na který jsem narazil při svém učitelském působení na berlínské Vysoké škole zemědělské techniky.

Mnohé biologické procesy růstu lze přibližně popsat pomocí funkcí tvaru

$$y = \alpha x^{\beta} e^{-\gamma x}, \quad x > 0, \quad (1)$$

případně

$$\ln y = \bar{\alpha} + \beta \ln x - \gamma x, \quad (2)$$

($\bar{\alpha} = \ln \alpha$), přičemž α , β , γ jsou jisté kladné konstanty.

Např. lze pomocí (1) vyjádřit závislost zemědělského výnosu y na množství x jistého hnojiva, které bylo dodáno půdě. Znalost takové funkční závislosti poskytuje mnohé výhody zejména pro optimalizační úlohy. Aby bylo možné pracovat s funkcí (1), je třeba nejdříve určit hodnoty konstant α, β, γ , příp. $\bar{\alpha}, \beta, \gamma$. Vychází se přitom z výsledků pokusů, které dají tabulku hodnot (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) ($x_i > 0, y_i > 0$), n je počet provedených měření. Rozdíly $\bar{\alpha} + \beta \ln x_i - \gamma x_i - \ln y_i$ jsou obecně různé od nuly, neboť jinak by bylo možné přesně vyjádřit výsledky měření pomocí (2), a tedy také pomocí (1).

Utvořme nyní součet S druhých mocnin těchto rozdílů, tj.

$$S(\bar{\alpha}, \beta, \gamma) = \sum_{i=1}^n (\bar{\alpha} + \beta \ln x_i - \gamma x_i - \ln y_i)^2 \quad (3)$$

a vypočítejme $\bar{\alpha}, \beta, \gamma$ tak, aby součet S byl minimální (to je tzv. metoda nejmenších čtverců). S je funkce tří nezávislých proměnných $(\bar{\alpha}, \beta, \gamma)$, neboť x_i a y_i jsou pevně dané hodnoty. Dostali jsme tak úlohu na určení extrémních hodnot funkce tří proměnných, kterou zde vyšetřovat nebudeme. Poznamenejme jenom ještě toto:

Pro existenci právě jednoho minima funkce (3) je nutné, aby determinant třetího řádu

$$D = \begin{vmatrix} n, & \sum \ln x_i, & \sum x_i \\ \sum \ln x_i, & \sum \ln^2 x_i, & \sum x_i \ln x_i \\ \sum x_i, & \sum x_i \ln x_i, & \sum x_i^2 \end{vmatrix} \quad (4)$$

byl různý od nuly. Odtud plyne následující úloha.

Úloha. Budte $x_1, x_2, \dots, x_n$ kladná reálná čísla, z nichž alespoň tři jsou navzájem různá. Dokažte, že determinant (4) je kladný.

Řešení. Pro zkrácení zápisu položíme $x_i = a_i$, $\ln x_i = b_i$ a sčítat budeme přes všechna $i, j, k = 1, 2, \dots, n$; pak je

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} n & \sum_i b_i & \sum_i a_i \\ \sum_i b_i & \sum_i b_i^2 & \sum_i a_i b_i \\ \sum_i a_i & \sum_i a_i b_i & \sum_i a_i^2 \end{vmatrix} = \\
 &= n \sum_i a_i^2 \sum_i b_i^2 + 2 \sum_i a_i \sum_i b_i \sum_i a_i b_i - (\sum_i a_i)^2 \sum_i b_i^2 - \\
 &\quad - \sum_i a_i^2 (\sum_i b_i)^2 - n (\sum_i a_i b_i)^2 = \\
 &= n \sum_{i,j} a_i^2 b_j^2 + 2 \sum_{i,j,k} a_i b_k a_j b_j - \sum_{i,j,k} a_i a_k b_j^2 - \sum_{i,j,k} a_i^2 b_i b_k - \\
 &\quad - n \sum_{i,j} a_i b_i a_j b_j = \\
 &= \sum_{i,j,k} (a_i^2 b_i^2 + 2 a_i a_j b_j b_k - a_i a_k b_j^2 - a_i^2 b_j b_k - a_i a_j b_i b_j) = \\
 &= \sum_{i,j,k} (a_i^2 b_j^2 + a_i a_j b_j b_k + a_i a_k b_i b_j - a_i a_k b_j^2 - a_i^2 b_j b_k - a_i a_j b_i b_j) = \\
 &= \sum_{i,j,k} a_i b_j (a_i b_j + a_j b_k + a_k b_i - a_k b_j - a_i b_k - a_j b_i) = \sum_{i,j,k} a_i b_j \Delta_{ijk},
 \end{aligned}$$

kde

$$\Delta_{ijk} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{vmatrix}.$$

Hodnota součtu nezávisí na uspořádání indexů, neboť všechny indexy probíhají nezávisle hodnoty od 1 až do n . Celkem existuje šest různých uspořádání indexů i, j, k a v důsledku toho existuje šest vyjádření součtu, která jsou analogická vyjádření výše uvedenému. Při

záměně dvou indexů změnil determinant Δ_{ijk} své znaménko. V důsledku toho platí

$$D = \frac{1}{6} \sum_{i,j,k} (a_i b_j - a_j b_i - a_i b_k + a_k b_i + a_j b_k) \Delta_{ijk} = \\ = \frac{1}{6} \sum_{i,j,k} \Delta_{ijk}^2 \geq 0.$$

Nyní ukážeme, že alespoň jeden z determinantů Δ_{ijk} je různý od nuly.

Podle předpokladu jsou alespoň tři hodnoty a_i navzájem různé; nechť jsou to hodnoty a_p, a_q, a_r . Platí

$$\Delta_{pqr} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_p & a_q & a_r \\ b_p & b_q & b_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_p & a_q - a_p & a_r - a_p \\ b_p & b_q - b_p & b_r - b_p \end{vmatrix} = \\ = (a_q - a_p)(b_r - b_p) - (a_r - a_p)(b_q - b_p) = \\ = (x_q - x_p) \ln(x_r/x_p) - (x_r - x_q) \ln(x_q/x_p).$$

Připusťme, že by bylo $\Delta_{pqr} = 0$. To by znamenalo (protože $x_p > 0$), že je $(\bar{x}_q - 1) \ln \bar{x}_r = (\bar{x}_r - 1) \ln \bar{x}_q$, kde $\bar{x}_q = x_q/x_p \neq 1$, $\bar{x}_r = x_r/x_p \neq 1$, $\bar{x}_q \neq \bar{x}_r$ a tedy

$$\frac{\ln \bar{x}_r}{\bar{x}_r - 1} = \frac{\ln \bar{x}_q}{\bar{x}_q - 1}.$$

Tato rovnost však nemůže být splněna, neboť $\bar{x}_r \neq \bar{x}_q$ a $f(x) = \ln x/(x - 1)$ je klesající funkce v celém svém definičním oboru. Proto je $\Delta_{pqr} \neq 0$ a tím také $D > 0$.

Poznámka. Existuje podstatně kratší důkaz, který však předpokládá některé speciální znalosti:

Definujme tři vektory v n -rozměrném prostoru

$$a = \{1, 1, \dots, 1\}, \quad b = \{\ln x_1, \ln x_2, \dots, \ln x_n\}, \\ c = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Potom lze vyjádřit prvky determinantu D jako skalární součiny těchto vektorů, totiž

$$D = \begin{vmatrix} aa, & ab, & ac \\ ba, & bb, & bc \\ ca, & cb, & cc \end{vmatrix}.$$

Toto je ale Gramův determinant třetího řádu (viz např. V. J. Smirnov: *Kurs vyšší matematiki*, díl III, kap. 1, § 2). Jeho hodnota je kladná, když jsou vektory a, b, c lineárně nezávislé, a je rovna nule, když jsou tyto vektory lineárně závislé.

Vektory a, b, c jsou však lineárně nezávislé, neboť výše bylo ukázáno, že je $\Delta_{pqr} \neq 0$, a proto je hodnota matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \ln x_1 & \ln x_2 & \dots & \ln x_n \end{pmatrix}$$

rovna 3.

ČINORODÉ PŘÁTELSTVÍ

JOHANNES LEHMANN

Smyslem mimoškolní práce je vyjít důsledně vstříc přirozeným předpokladům, sklonům a zájmům mládeže a rozvinout je tak, abychom z každého mladého člověka vychovali užitečného člena socialistické společnosti. K dosažení vynikajících výkonů v nějakém oboru — jak svědčí zkušenost zejména z posledního desetiletí — dnes už nestačí jen vzorně spolupracovat při výuce a svědomitě plnit uložené úkoly. Dvě až tři hodiny tělocviku týdně anebo jedna až dvě hodiny hudební výchovy nestačí k získání ceny při utkání nebo při soutěži.

Ohlédnete-li se nazpět, na čtvrtstoletí nepřetržité, obsahově bohaté mimoškolní práce v oboru matematiky, uvidíte jasný důkaz, že jste poznali význam matematiky pro všestranný rozvoj socialistické osobnosti a poskytnete všem mladým lidem možnost plně rozvinout své vlohy, sklony a zájmy v tomto stěžejním oboru.

S velkou radostí vzpomínám na své návštěvy u vás. Vždy jsem u vás načerpal mnoho zkušeností a pokaždé jsem se domů vracel s kupou matematické literatury pro mládež a s množstvím úloh pro naši olympiádu.

Naši mladí matematici mohli tak poznat úroveň vaší mimoškolní práce a současně si na předložených problémech vyzkoušet své síly.

Mám před sebou německá vydání vašich knížek: J. Vyšín: *Metody řešení matematických úloh*; O. Zich, A. Kolman: *Zajímavá logika*; J. Sedláček: *Nebojte se*

matematiky; J. Sedláček: *Úvod do teorie grafů*. Tyto knihy si v NDR získaly mnoho přátel. Jsou příkladem syntézy odborné a zábavné matematiky a podněcují čtenáře, aby studoval jak moderní, tak tradiční problémy našeho stěžejního oboru.

Často jsem sedával s kolegy z časopisu *Rozhledy* a shromažďovali jsme zkušenosti a především materiál k našemu společnému snažení: přiblížit slovem i obrazem co největšímu počtu lidí exaktnost, eleganci a krásu matematiky. Copak není projevem opravdového přátelství, když — jak jsem to sám zažil — své síly měří družstva z Neubrandenburgu a Prahy nebo z Brna, Plovdivu, Poznaně a Chotěbuzi? Tento druh vztahů by se měl podle mého soudu pěstovat ještě víc.

Osmkrát jsem měl možnost zúčastnit se mezinárodních olympiád jako šéfredaktor matematického časopisu pro žáky *Alfa*. Na XIII. MMO, která se konala v roce 1971 v Žilině, jsem měl příležitost navázat osobní styky s mnoha kolegy z vaší země a předat pak jejich zkušenosti šedesáti tisícům čtenářů časopisu *Alfa* i mnoha mladým matematikům, vedoucím pracovních skupin a učitelům, kterým jsem přednášel.

Každá mezinárodní olympiáda mi poskytla možnost mluvit se členy a vedoucími vašeho družstva a poznat výkony vašich nadaných žáků. K tomuto příspěvku přikládám fotografie tří vašich účastníků MMO.*) Obě dívky, Helena Husová a Alena Vencovská, byly v posledních letech nejúspěšnější z dívek a Bohuš Sivák patřil k nejúspěšnějším účastníkům VII. MMO spolu s W. Burmeisterem z NDR a J. Pelikanem z MLR. Všichni tři jsou živým dokladem dobré práce.

Mé upřímné uznání a nejsrdečnější pozdravy patří

*) Viz str. 19, 20 a 22. Pozn. red.

všem, kdo s vytrvalostí, energií a radostí z matematiky pracují pro dobro naší společné věci.

Při každém našem setkání se mluvilo i o vlastních matematických problémech. A tak vám i při této příležitosti předkládám několik úloh z naší matematické olympiády a přeji vám radost a úspěch při jejich řešení.

V NDR se matematické olympiády konají ve čtyřech kolech: 1. kolem jsou školní olympiády (pro žáky 5. až 12. tříd) a účastní se ho zhruba půl miliónu žáků; 2. kolem jsou okresní olympiády (opět pro žáky 5. až 12. tříd) a těch se účastní zhruba 20 000 žáků; 3. kolem pak jsou krajské olympiády (pro žáky 7. až 12. tříd) s počtem účastníků asi 2 500, a konečně nejvyšším, 4. kolem je olympiáda NDR, do níž postupuje už jen asi 250 žáků z 10. až 12. tříd. Z těchto 250 účastníků celostátní olympiády je delegováno 8 nejlepších mladých matematiků na mezinárodní olympiádu.

Čtenářům tohoto příspěvku předkládám úlohy pro žáky 10. tříd z XIII. olympiády mladých matematiků NDR, která se konala 8. až 10. dubna 1974. Mohou z nich poznat úroveň posledního kola našich olympiád. Ve dvou čtyřhodinových klauzurách se řeší po třech úlohách (žák má možnost volit mezi 3A a 3B).

1. V ornamentu je dán rovnostranný trojúhelník ABC , v něm je nakreslena polokružnice k_1 (se středem M_1 a poloměrem r_1) a kružnice k_2 (se středem M_2 a poloměrem r_2) tak, že jsou splněny následující podmínky:

- (1) M_1 leží na úsečce AB ,
- (2) k_1 se dotýká obou úseček AC a BC ,
- (3) k_2 se dotýká k_1 zvenčí a obou úseček AC a BC .

Ukažte, že platí $r_1 > r_2$, a vyjádřete poměr $r_1 : r_2$.

2. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C , je-li $t_a = 6$ cm, $t_b = 8$ cm, přičemž t_a je délka těžnice jdoucí vrcholem A a t_b délka těžnice jdoucí vrcholem B .

Popište a odůvodněte konstrukci. Vyšetřte, zda takový trojúhelník ABC s danými délkami těžnic existuje a zda je až na shodnost určen jednoznačně.

- 3A. a) Dokažte, že k danému reálnému číslu x_0 lze číslo $x_0^2 + x_0 + 1$ vyjádřit graficky touto metodou: V pravoúhlém souřadnicovém systému s počátkem O se zkonstruuje čtverec $OPEQ$, jehož bod E má souřadnice $(1, 1)$ a body Q a E leží na rovnoběžce q s osou x . Na q se sestrojí bod X tak, že orientovaná úsečka (její smysl určuje znaménko při x_0) EX má délku $|x_0|$. V bodě X se sestrojí kolmice k přímkce určené body P a X a určí se její průsečík Y s osou y . Pak je číslo $x_0^2 + x_0 + 1$ souřadnicí bodu Y .

b) Dokažte pomocí tohoto grafického postupu, že funkce f definovaná pro všechna x vztahem $f(x) = x^2 + x + 1$ nemá reálný nulový bod.

- 3B. Najděte všechny celočíselné dvojice (x, y) , které vyhovují rovnici

$$(x + 2)^4 - x^4 = y^3.$$

4. Vyšetřete, zda je číslo $x = \sqrt[3]{4 + \sqrt{7}} - \sqrt[3]{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{2}$ kladné, záporné nebo rovno nule.
5. Znázorněte v pravoúhlém souřadnicovém systému množinu všech číselných dvojic (x, y) které splňují rovnost

$$||x| + ||y| - 3| - 3| = 1.$$

6. Pravidelný čtyřstěn s vrcholy A, B, C a D s délkou hrany a protíná šest navzájem různých rovin, při-

čemž každá z nich obsahuje právě jednu hranu čtyřstěnu a střed protilehlé hrany.

- a) Kolik vznikne celkem těles, jsou-li všechny rovinné řezy provedeny současně?
- b) Vypočítejte objemy jednotlivých těles pomocí délky hrany a .

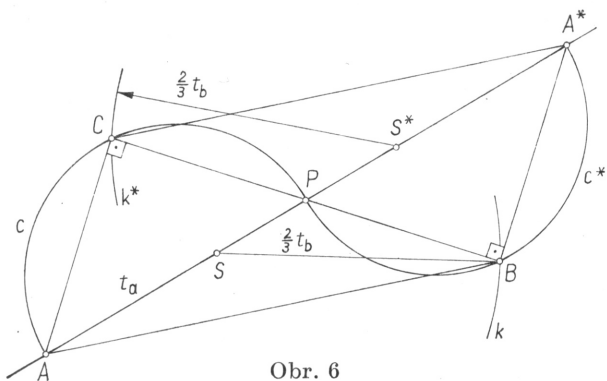
Z této skupiny sedmi úloh jsme vybrali náročnou 2. úlohu a ukážeme jednak návrh řešení vypracovaného skupinou, která úlohu připravila, a jednak velmi elegantní žakovské řešení.

Úlohu 2 řešilo 99 žáků. Bylo možno dosáhnout sedmi bodů. Výsledky udává tato tabulka:

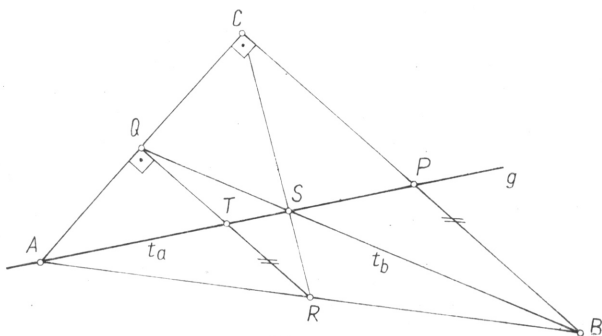
Body:	0	1	2	3	4	5	6	7
Počet žáků:	31	11	6	7	11	11	14	8

Při řešení bylo často použito aritmetických pomocných prostředků. To zpravidla vedlo ke složitým algebraickým výrazům, jejichž konstrukce dala vzhledem k nepřesnostem rýsování (spojování bodů ležících těsně vedle sebe) neuspokojivé řešení. Tak např. neměly trojúhelníky sestrojené podle vypočtených údajů u vrcholu C pravý úhel, a tak u žáků vznikly pochybnosti o správnosti řešení. Tvrzení o existenci trojúhelníka žáci touto metodou rovněž nepodali.

Základní myšlenka doplnění trojúhelníka ABC na rovnoběžník vedla převážně ke správnému řešení. Např. byly určeny body A^* a S^* středově souměrné k bodům A a S podle středu souměrnosti v bodě P (krajním bodě těžnice $AP = t_a$). Žáci správně určili, že bod C leží na Thaletově polokružnici k s průměrem AP a že $CS^* = \frac{2}{3}t_b$. Bod B je pak středově souměrný podle středu P k bodu C (obr. 6).



Obr. 6



Obr. 7

Někteří účastníci řešili úlohu konstrukcí založenou na zrcadlení podle bodu P .

Plný počet bodů však byl udělen jen těm účastníkům, kteří našli také správný důkaz existence trojúhelníka (obr. 7).

1. Řešení komise pro úlohy:

I. Předpokládejme, že trojúhelník ABC znázorněný na obr. 7 splňuje podmínky úlohy. P , Q , R jsou středy stran BC , CA , AB trojúhelníka ABC . S je průsečík všech tří těžnic. Platí $SA : SP = SB : SQ = 2 : 1$. Ze stejnosti se středem v bodě A plyne, že QR je rovnoběžná s BC . QR a těžnice AP se protínají v bodě T . Protože $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, $BC \parallel QR$, je také $\sphericalangle AQT = 90^\circ$ (obr. 7).

II. Trojúhelník ABC splňuje podmínky úlohy, jestliže jej lze sestavit tímto způsobem:

(1) Sestrojíme na přímce g čtyři body A , T , S , P v tomto pořadí tak, že $AT = \frac{1}{2}t_a$, $TS = \frac{1}{6}t_a$, $SP = \frac{1}{3}t_a$.

(2) Nad AP opíšeme polokružnici k_1 a nad AT polokružnici k_2 tak, že k_1 a k_2 jsou ve stejné polovině určené přímkou g .

(3) Kolem bodu S opíšeme kružnici k_3 poloměrem $\frac{1}{3}t_b$. Tato kružnice protíná k_2 v bodě Q .

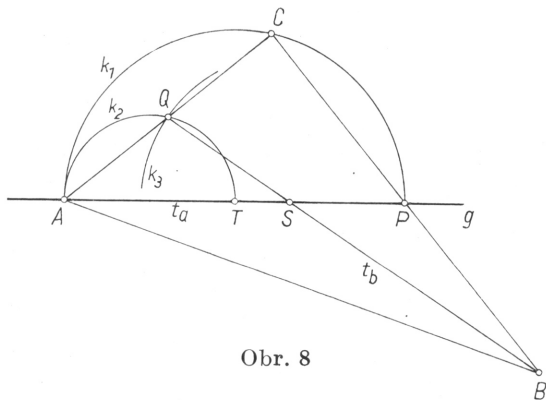
(4) Spojíme body A a Q a prodloužíme úsečku AQ za bod Q , až protne k_1 . Získáme tak bod C .

(5) Úsečku CP prodloužíme za bod P . Spojíme Q a S a prodloužíme QS za bod S . Přímkou CP a QS se protnou v bodě B (obr. 8).

III. Důkaz toho, že každý takto sestavený trojúhelník splňuje podmínky úlohy:

Podle konstrukce je AP těžnice v trojúhelníku ABC vycházející z bodu A a má délku t_a . Protože $AS =$

$= \frac{2}{3}t_a$, je S těžiště trojúhelníka ABC . Protože $BC \parallel QT$, $2 \cdot AT = AP$ a $\gamma = 90^\circ$, leží C na polokružnici k_1 s průměrem AP , Q na polokružnici k_2 s průměrem AT a Q je středem strany AC . Protože



Obr. 8

můžeme obrátit větu o dělicím poměru těžiště v trojúhelníku, protínají se přímky QS a CP v bodě B tak, že platí $PC = PB$ a $BS = 2 \cdot SQ$. Tedy jsou AP a BQ těžnice trojúhelníka ABC .

IV. Kroky (1) a (2) v konstrukci určí body A, T, S, P a kružnice k_1 a k_2 jednoznačně až na shodnost. Z (3) dostaneme bod Q právě tehdy, jsou-li splněny nerovnosti

$$\frac{2}{3}t_a < \frac{1}{2}t_a + \frac{1}{3}t_b \text{ a } \frac{1}{3}t_b < \frac{2}{3}t_a.$$

Tedy musí platit

$$t_a < 2t_b \text{ a } t_b < 2t_a \quad (*)$$

Jestliže bude $t_a = 6$ cm a $t_b = 8$ cm, pak bude podmínka (*) splněna. Existuje tudíž průsečík Q . Tím (4) vede k určení bodu C . Protože $PC \parallel QS$, je možno podle (5) vrchol B trojúhelníka ABC sestrojit.

2. Vzorné žákovské řešení:

I. Předpokládejme, že $\triangle ABC$ lze sestrojit na základě daných údajů. Potom nechť P a Q jsou středy odvěsen BC a AC a S průsečík AP a QB . Dále nechť je A^* bod na AP ležící za P tak, že platí $AP = A^*P = t_a$. Čtyřúhelník ABA^*C je rovnoběžník, protože jeho úhlopříčky se navzájem půlí. Tedy platí $\triangle ABC \cong \triangle BA^*C$. Nechť N je střed úsečky BA^* , S^* průsečík CN ($= t_b$) s PA^* ($= t_a$). Tato rovnost vyplývá ze shodnosti. Protože se těžnice protínají v poměru $2 : 1$, platí $PS^* = \frac{1}{3}t_a$ a $CS^* = \frac{2}{3}t_b$.

Tím dostaneme následující konstrukci:

II. (1) Konstrukce $AP = t_a = 6$ cm.

(2) Konstrukce Thaletovy kružnice nad AP .

(3) Na AP nanese za bod P úsečku $PS^* = \frac{1}{3}t_a = 2$ cm.

(4) Oblouk kružnice se středem S^* a poloměrem $\frac{2}{3}t_b = \frac{16}{3}$ cm protne Thaletovu kružnici v bodě C .

(5) Bod B se určí na CP za bodem P pomocí vztahu $CP = BP$. Trojúhelník ABC je hledaný trojúhelník.

III. *Důkaz.* Z (2) plyne, že $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ a $t_a = 6$ cm.
Z I. a dále ze shodnosti plyne

$$\triangle BA^*C \cong \triangle ABC \Rightarrow t_b = 8 \text{ cm},$$

tedy $\triangle ABC$ je hledaný trojúhelník.

IV. Krok (4) v konstrukci lze provést, pouze když platí

$$\frac{1}{3}t_a < \frac{2}{3}t_b < t_a + \frac{1}{3}t_a$$

a tudíž

$$t_a < 2t_b < 4t_a. \quad (*)$$

Jelikož je $6 \text{ cm} < 16 \text{ cm} < 24 \text{ cm}$, existuje v našem případě právě jeden trojúhelník.

Jestliže platí (*), lze konstrukci provést vždy jednoznačně, a tedy existuje právě jeden trojúhelník ABC . Jestliže (*) neplatí, neexistuje trojúhelník ABC , konstrukci nelze provést.

Závěrem předkládáme čtenářům ještě 3 úlohy, které na XIII. olympiádě mladých matematiků NDR řešili žáci 11. a 12. tříd.

1. V rovině buďte dány dva nenulové vektory x a y .
Vztahem

$$c_n = |x - ny| \text{ pro } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

je definována posloupnost reálných čísel. Udejte nutné a postačující podmínky pro to, aby posloupnost (1) byla

- a) rostoucí,
- b) klesající,
- c) v případě, že posloupnost (1) není ryze monotonní, vyšetřete, zda existuje přirozené číslo n_0 tak, že intervaly $1 \leq n \leq n_0$ a $n_0 < n$ jsou intervaly monotonie posloupnosti (1).

2. Je-li x reálné číslo, označme $[x]$ největší celé číslo, které není větší než x . (Tak je např. $[\pi] = 3$, $[0,7] = 0$, $[-0,7] = -1$).
- a) Ukažte, že existují dvě racionální čísla a , b tak, že čísla $c_n = an + b - [an + b]$ ($n = 1, 2, \dots$) tvoří nekondantní posloupnost a že všechna c_n jsou různá od nuly.
- b) Dokažte, že pro každá dvě racionální čísla a , b má posloupnost čísel definovaná v a) minimum.
3. Buďte n_1 , n_2 celá kladná čísla; v rovině buď dána množina M_1 mající $2n_1$ navzájem různých bodů a množina M_2 mající $2n_2$ navzájem různých bodů, které jsou různé od všech bodů množiny M_1 , a necht' neexistuje přímka, která by procházela třemi z těchto $2n_1 + 2n_2$ bodů. Dokažte, že pak existuje přímka g s následující vlastností: Rozdělíme-li přímkou g rovinu na dvě poloroviny H a K (g samotná nepatří ani k H , ani ke K), pak leží jak v polorovině H , tak v polorovině K právě polovina všech bodů z M_1 a právě polovina všech bodů z M_2 .

MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY — „PRO“ A „PROTI“

TIBERIU ROMAN

V mnohých zemích světa se „matematickou olympiádou“ (MO) rozumí matematická soutěž pro žáky středních škol, organizovaná každoročně ve dvou až čtyřech etapách (kolech). Cíle, jež si tato soutěž obvykle klade, jsou: získávat stále větší počet žáků pro hlubší studium matematiky, vyhledávat mezi nimi ty nejschopnější, vést nadané mladé lidi ke specializovanému studiu na vysoké škole.

Ve všech zemích, které pořádají MO, se shodně považuje za žádoucí, aby se prvního kola soutěže zúčastnilo co nejvíce žáků, kteří tím velmi získají, neboť MO probouzí jejich zájem o samostatnou práci; organizují se kolektivy prostřednictvím vědeckých sdružení (ve škole nebo ve městě) a za přispění vysokoškolských učitelů matematiky; podněcuje se touha po sebezdokonalení a zlepšuje se i vzdělání (znalosti, technika práce a výpočtů) a výchova (přesný, deduktivní vědecký přístup, charakteristický pro matematiku), a to u velkého počtu mládeže. Pomoc rodičů a organizací mládeže, spolupráce s hromadnými sdělovacími prostředky, soustavné využívání časopisů a knih, to vše je velmi důležité, avšak koordinaci těchto snah musí zajistit především vyučující.

V Rumunsku jako v mnoha jiných socialistických zemích se MO považuje za součást výchovného systému, jehož cílem je vzdělávat — paralelně se školou a ve spolupráci s ní — mládež v matematice.

Rumunské matematické soutěže, jež začaly v r. 1902 a v r. 1974 proběhly již po čtyřiašedesáté, se staly trvalou tradicí života naší školy. Tak jako v jiných zemích se i u nás tyto soutěže konají za spolupráce ministerstva výchovy a vyučování a jeho podřízených orgánů, Matematické vědecké společnosti a jejích poboček, lyceí a jiných škol druhého stupně, podněcují aktivitu tisíců vyučujících a nadšení desítek, ba stovek tisíců zúčastněných žáků (ve věku od 10 do 18 let). Komplexní výchovný program MO přispívá k všestrannému vzdělávání žáků a je součástí všeobecného úsilí školy o výchovu nové generace v ideálech práce a kultury naší socialistické společnosti.

V rumunských matematických soutěžích jsou také některé zvláštnosti, o nichž se nyní zmíním: společná organizace pro žáky všech druhů škol druhého stupně (14—18 let) rozdělené do 18 pracovních skupin (podle ročníku a typu školy — všeobecně vzdělávací, technické, ekonomické, zemědělské, pedagogické, odborné, mistrovské); tříkolová soutěž pro všechny ročníky; písemné práce za dozoru profesorů ve všech kolech; postup do posledního kola závislý jen na výsledcích žáka, bez ohledu na počet soutěžících v kraji; úlohy pro první kolo jsou vybírány krajskými komisemi MO, pro druhé a třetí pak ústřední komisí; vítězové posledního kola, žáci posledních ročníků, jsou přednostně přijímáni na matematickou fakultu a dostávají stipendium po dobu vysokoškolských studií.

Je třeba se též zmínit o dalším rozšíření těchto soutěží: soutěž pro žáky základních škol (10—14 let) o dvou kolech; soutěž pro studující na universitách a jiných vysokých školách (dvoukolová); fyzikální, chemická, biologická, literární, společenskovědní žakovská soutěž (o čtyřech kolech).

Mezinárodní matematické olympiády (MMO) vzniklé z rumunské iniciativy se staly živoucí manifestací, oceňovanou v mnoha zemích světa, nejen v těch 18, které se zúčastnily MMO v r. 1974. Československá delegace se účastnila všech dosavadních 16 ročníků MMO. Cíle vytčené pro první MMO (1959) jsou dodnes platné (viz můj článek *O vzniku a průběhu první Mezinárodní matematické olympiády*, Matematika ve škole, 1960, č. 1). Mezi pozitivními výsledky MMO lze jmenovat: pořádání nových soutěží v národním měřítku, vydávání nových časopisů pro žáky, stále rozšiřování okruhu účastníků MMO, činnost zvláštní pracovní skupiny pro matematické soutěže na II. mezinárodním kongresu o vyučování matematice (Exeter 1972).

Stručný přehled faktů, jež mluví pro MO a MMO, dokazuje, že je správné, že tyto soutěže existují, a že je třeba pečovat o jejich další rozvoj.

Existují však také námitky proti těmto soutěžím; pokusím se je vyložit a vyvrátit.

a) *Žáci musí konat mnoho zkoušek a není vhodné je přetěžovat.*

U nás však bylo třeba zorganizovat na žádost žáků i rodičů soutěže tak, aby žáci mohli soutěžit současně v několika předmětech; ve Velké Británii, kde se koná opravdu velmi mnoho zkoušek, se přesto MO ujala. Je ostatně možno se ptát obráceně, zda je tak velký počet zkoušek nutný.

b) *Příliš těžká soutěž je nebezpečná, zvláště pro neúspěšné žáky, kteří tím ztratí sebedůvěru.*

Avšak výchovné prostředky školy mohou odstranit toto nebezpečí a naopak vést žáky ke snaze o dosažení lepších výsledků v příští soutěži.

c) *Stupňovitá struktura MO, která vyúsťuje ve výběr nejlepších žáků v zemi (nebo v několika zemích), je méně*

užitečná nežli pořádání menších soutěží k povzbuzení „průměrných“ žáků „průměrných“ škol.

Domnívám se však, že tyto dva druhy akcí si nemají konkurovat, nýbrž mohou existovat společně tak, aby bylo dosaženo všech cílů, které má matematika realizovat ve vyučování mas. Příklady pro to se najdou v Rumunsku stejně jako v jiných zemích.

d) Matematické soutěže nemohou být „fair“, poněvadž jsou rozdíly ve vyučovacích metodách, v kvalitě vyučujících, v osnovách, a to nejen mezi jednotlivými zeměmi, ale i uvnitř jedné země.

U nás mohou krajské komise takovým situacím odpomoci; ústřední komise každé MO a mezinárodní jury MMO mají volit úlohy tak, aby žáci nebyli poškozováni. Rozhodně by však neúspěchy měly přimět zainteresované školy k přijetí příslušných opatření. Na druhé straně je třeba připomenout, že posledního kola MO (resp. MMO) se účastní jen ti nejlepší žáci, takže při správném výběru úloh rozhodují jen osobní schopnosti a práce účastníků.

e) Úlohy vybírané pro MMO zůstávají v rámci klasické matematiky a nemohou zahrnovat moderní matematické disciplíny, poněvadž je nutno respektovat osnovy všech zúčastněných zemí.

Je jisté, že nelze žádat od žáka řešení úlohy, jež vyžaduje znalosti, s nimiž se ve škole nesetkal. Avšak hlavní je schopnost postavit se k novému problému a najít prostředky k jeho řešení, které nejsou nijak omezeny.

f) Účast na MMO může zabránit pořádání národní MO, nejsou-li náklady s ní spojené hrazeny některou státní institucí.

„Bohaté“ státy mohou zůstat lhotejné k pořádání MO, ale organizace profesorů matematiky v mnohých

takových zemích našly prostředky, zmobilizovaly vyučující, žáky, rodiče, a zorganizovaly národní MO i vyslání delegace na MMO. Ostatní nechť je následují.

g) *Dva problémy zůstávají nerozřešeny: větší účast dívek na MO a pořádání MO v zemích „třetího světa“.*

MO a MMO nejsou všelékem na nesnáze ve vyučování matematice ani nejsou samoučelné. Představují však prostředky, které mohou být spolu s jinými využity vyučujícími s dobrým výsledkem.

MATEMATICKÉ ŠTUDIJNÉ SÚŤAŽE V MAĎARSKU*)

ENDRE HÓDI

Úvodom niekoľko slov o organizácii školstva v Maďarsku (MLR). Deti vo veku 6 až 14 rokov chodia do všeobecnej školy. Dochádzka je povinná. Po úspešnom skončení všeobecnej školy môžu pokračovať v štúdiu na jednom z troch typov stredných škôl:

- a) ústavy pre výchovu odborných robotníkov (3-ročné štúdium),
- b) stredné odborné školy (4-ročné),
- c) gymnázia (4-ročné štúdium).

*) Doc. Endre Hódi z katedry matematiky Štátneho pedagogického ústavu v Budapešti mal 31. augusta 1972 na Medzinárodnom kongrese o vyučovaní matematiky v Exeteri prednášku o matematických študijných súťažiach v Maďarsku (MLR). Z jeho obsiahlej prednášky uvádzame podstatné časti. So súhlasom doc. Hódiho sme vynechali z jeho prednášky zmienku o organizácii školstva v MLR, tu sme uviedli iba školy. Stručnejšie uvádzame matematickú súťaž pre 7. a 8. ročníky všeobecných škôl a takmer v plnom znení Celoštátne stredoškolské súťaže so stručnejším náznamom ostatných stredoškolských súťaží, akými sú: Matematická súťaž Dániela Aranya, Bodovacia súťaž Matematických listov a súťaž pre odborné učilištia ako aj televízna súťaž „Kto v čom je vedcom“. Ďalej tiež stručnejšie uvádzame tie časti prednášky doc. Endre Hódiho, v ktorých sa zmieňuje o matematickej súťaži pre poslucháčov pedagogických ústavov a univerzít a o Súťažiach Miklósa Schweitzera. Celkom sme vynechali tie časti zo záveru prednášky doc. Hódiho, v ktorých sa zmieňuje o medzinárodnej matematickej olympiáde a v ktorých vyslovuje poďakovanie matematikom za pomoc pri zostavovaní jeho prednášky.

Absolventi stredných odborných škôl, resp. gymnázií môžu po úspešne vykonaných prijímacích skúškach pokračovať na niektorej z týchto škôl:

- a) učiteľské ústavy vyššieho stupňa, ústavy pre vychovávateľky, priemyselné školy atď. (3-ročné štúdium),
- b) vysoké školy pre prípravu profesorov, vysoké školy technické (väčšinou 4-ročné štúdium),
- c) univerzity, techniky, poľnohospodárske vysoké školy, záhradnícka univerzita a pod., ktoré obyčajne trvajú 5 študijných rokov.

Okrem uvedených škôl existujú v MLR aj školy s mimoriadnymi formami štúdia.

Teraz stručne uvedieme matematické študijné súťaže, ktoré t. č. existujú v MLR.

Od škol. roku 1966/67 poriadajú sa každý rok študijné súťaže pre žiakov 7. a 8. ročníkov všeobecných škôl.

Na základe skúseností zo súťaží, ktoré boli v župách, v mestách, hlavne však už aj v predchádzajúcich rokoch, zriadilo ministerstvo školstva MLR v spolupráci s Matematickou spoločnosťou Jánoša Bolyaia (Bolyai János Matematikai Társulat) a Maďarským zväzom pionierov (Magyar Úttöröl Szövetsége) celoštátnu súťaž. Organizačne ju zabezpečuje Maďarský zväz pionierov a o odbornú stránku sa stará celoštátna 10-členná súťažná komisia, ktorú ustanovuje predsedníctvo Bolyai János Matematikai Társulat. Táto 10-členná komisia pozostáva z vedúcich odborných inšpektorov všeobecných škôl, z profesorov všeobecných a stredných škôl, z odborníkov Celoštátneho pedagogického ústavu a ministerstva školstva.

Súťaž má štyri kolá. Prvé kolo sa koná do konca januára takmer na všetkých všeobecných školách, a to pre pionierske družiny žiakov 7. a 8. ročníkov.

Podľa zistených údajov zúčastní sa I. kola približne 114 tisíc žiakov všeobecných škôl. Úlohy I. kola zostávajú odborní profesori jednotlivých škôl. Títo vykonávajú aj hodnotenie riešení. Do druhého okresného (v Budapešti do obvodového) kola sa dostanú dvaja — traja žiaci zo 7. a práve toľko aj z 8. ročníkov. Títo sú vyhlásení za víťazov I. kola.

Druhé kolo sa koná v sídlach okresov (v Budapešti v jednotlivých obvodoch), a to v ten istý deň. Táto súťaž sa porieša už zvlášť pre žiakov 7. a zvlášť pre žiakov 8. ročníka, a to obyčajne v polovici februára. Súťaž má slávnostný charakter. Úlohy zostavuje už celoštátna súťažná komisia. Okresné súťažné komisie dostanú súťažné úlohy v zapečatených obálkach až v deň súťaže, a to v toľkých exemplároch, koľko je súťažiacich. Súťažiaci musia vyriešiť 6 úloh obyčajne za 2 hodiny. Hodnotenie riešení robí okresná súťažná komisia tak, že posudzujúci dostanú očíslované riešenia a len po ich ohodnotení sa priradí k udaným číslam patričné meno súťažiaceho. Po dvoch-troch víťazoch zo 7. a z 8. ročníka okresného kola postupuje ďalej do III. — župného (v Budapešti do „budapešťského“) kola.

Aj župné kolá sa konajú v ten istý deň — v polovici marca — obyčajne v sídlach žúp. Pre túto súťaž zostávajú úlohy opäť celoštátna súťažná komisia, a to osobitne pre žiakov 7. a osobitne pre žiakov 8. ročníkov. Hodnotenie a organizácia tohto III. kola sú také isté ako v II. kole. Každý víťaz župného (III.) kola a z budapešťského kola v poradí prví štyria postupujú do záverečného IV. kola, celoštátneho. Počet súťažiacich v celoštátnom kole je približne 27.

Celoštátne kolo býva spravidla hneď po skončení škol. roku, a to v rámci pionierskeho tábora. Táto záve-

rečná súťaž je dvojdenná. V prvý deň súťažiaci jednotlivých tried riešia súťažné úlohy zostavené pre každú triedu zvlášť. Súťažné úlohy zostavuje opäť celoštátna súťažná komisia, ktorá obyčajne určí aj jednu spoločnú úlohu. Tá istá komisia vykoná aj hodnotenie riešení. Hodnotenie sa robí — tak ako v predchádzajúcich kolách — tiež bodovacím systémom. 8—10 súťažiacich žiakov z každej triedy, ktorí získajú najviac bodov, pokračuje v súťaži aj na druhý deň, kedy súťažiaci musia uviesť podrobne aj postup riešení. Konečné poradie súťažiacich sa určuje podľa výsledkov a hodnotení za obidva dni.

Víťazi celoštátneho kola sú odmenení vyslaním do letných zahraničných táborov a dostanú vecné odmeny (knihy, vreckové rádio, magnetofón a pod.). Všetci tí súťažiaci, ktorí sa dostanú do celoštátneho kola, môžu sa bezplatne zúčastniť na dvojtyždennom odbornom táborení pri Balatone. V rámci tohto táborenia popri rekreácii a zábave majú žiaci možnosť venovať sa aj matematike (domáce súťaže, matematické hry, odborné krúžky, premietanie filmov, počúvanie prednášok známych matematikov a pod.).

Aj súťažiaci, ktorí v nižších kolách boli najlepší, bývajú odmenení — obyčajne knihami. Žiaci, ktorí boli úspešní v III. kole, môžu byť prijatí na strednú školu bez prijímacích skúšok.

Celoštátna súťažná komisia zostavuje súťažné úlohy tak, aby tieto naväzovali na učebnú látku všeobecnej školy, aby riešenie úloh nevyžadovalo väčšie požiadavky ako platné učebné osnovy, a hlavne aby kládli dôraz na logické myslenie súťažiacich. Zostavovatelia úloh majú na zreteli, aby tieto neboli jednotvárne, ale pestré, ďalej aby upozornili profesorov matematiky na tie partie, ktoré pri výklade boli zanedbané, ako napr.

dôkazy, konštrukcie, približné výpočty, geometrické transformácie a pod.

Pre stredoškolákov poriadajú v našej vlasti pomerne veľa matematických študijných súťaží.

Matematická a fyzikálna spoločnosť (Matematikai és Fizikai Társulat) sa rozhodla v r. 1894 poriadat každoročne v jeseni pre žiakov, ktorí práve zmaturovali, „Matematické študijné súťaže“. V tom čase bol predsedom spoločnosti fyzik Loránd Eötvös, ktorý sa neskôr stal tiež ministrom školstva.

Súťaže sa poriadali v Budapešti a v Kluži a po prvej svetovej vojne — po trojročnej prestávke — v Budapešti, v Szegede a neskôr aj v Debrecíne, teda iba v sídlach vysokých škôl. Súťažiaci riešili tri úlohy počas štyroch hodín, pričom mohli používať všetky pomôcky, knihy alebo poznámky. Tieto podmienky sa dodnes nezmenili. Autori dvoch najlepších riešení boli finančne odmenení — prvý resp. druhý dostal Eötvösovú cenu.

Odmenené práce boli publikované — pokiaľ možno bez akýchkoľvek úprav — vo vedeckom časopise spoločnosti Matematické a fyzikálne listy (Matematikai és Fizikai Lapok).

V takejto forme sa konali spomínané súťaže do r. 1943. Vojnové udalosti a potom zánik spoločnosti zapríčinili trojročnú nútenú prestávku v poriadaní súťaží. Po oslobodení v r. 1947 utvára sa Bolyai Társulat a od tejto doby sa súťaž znova poriadá v jeseni každého roku. Od r. 1949 nesie súťaž meno Józsefa Kürscháka, ktorý celý svoj život zasvätil matematickým študijným súťažiam. Aj keď je súťaž určená pre žiakov, ktorí už zmaturovali, súťažná komisia dovoľuje, aby sa jej mohli zúčastniť aj žiaci stredných škôl. Takto dostávajú možnosť zmerať svoje vedomosti s tými, ktorí sú už po maturite. Aj táto okolnosť prispela k tomu, že počet účastníkov

súťaže, ktorý pred oslobodením málokedy bol väčší ako 50, dnes obyčajne prevyšuje niekoľko sto. V roku 1972 sa súťaž konala už v 18 mestách — vo všetkých v ten istý deň. Organizuje ju Bolyai Társulat, a to v tých mestách, v ktorých spoločnosť má svoje pobočky. Vyhlásenie výsledkov a rozdelenie cien uskutočňuje sa na prednáškovom zasadaní spoločnosti, na ktorom zodpovedný člen súťažnej komisie oboznámi prítomných s riešením súťažných úloh, upozorní na možnosť viacerých riešení, uvedie didaktické pripomienky, ktoré sa viažu na riešenia úloh, poukáže na možnosť zovšeobecnenia vzťahov vyskytujúcich sa v úlohách a v odpovediach na nadhodené otázky vysvetlí prípadné nejasnosti.

Tieto prednášky uverejňovali v dobe od r. 1949 do r. 1966 Štredoškolské matematické listy (Középiskolai Matematikai Lapok). Od r. 1967 vychádza ročenka, ktorá podáva prehľad o súťažiach v príslušnom roku.

Vychádzajúc z viac ako trištvrtstoročnej tradície sú súťažné úlohy volené tak, aby k ich riešeniu neboli potrebné vedomosti prekračujúce rámec stredoškolských osnov, ale vyžadujú samostatné matematické myslenie. Cieľom súťaže je vyhľadávanie matematických talentov a vzbudenie záujmu o matematiku.

Mnohí z víťazov Študijných matematických súťaží Loránd Eötvösa resp. Józsefa Kürscháka stali sa medzinárodne uznávanými matematikmi, alebo sa preslávili pri rôznych aplikáciach matematiky, napr. Gyözö Zemplén, Lipót Fejér, Tódor Kármán, Déness König, Alfréd Haar, Marcel Riesz, Gábor Szegő, Tibor Radó, Ferenc Krbek, László Rédei, László Kalmár, Ede Teller, Tibor Gallai, Endre Makai, Tibor Szele, Ákos Császár atď.

Súťažné úlohy, ktoré sa riešili v súťažiach v rokoch 1894—1928, publikoval József Kürschák s riešeniami a s poznámkami pod názvom Matematické súťažné tézy

(Matematikai versenytételek) v r. 1929. Túto prácu čiastočne prepracovali György Hajós, Gyula Neukomm a János Surányi. Prepracovaný zborník pod názvom Matematikai versenytételek — I. časť vyšiel r. 1955. II. časť, v ktorej je zhrnutý súťažný materiál zo súťaží v rokoch 1929—1955, vyšla r. 1957. Aj túto II. časť spracovali György Hajós, Gyula Neukomm a János Surányi. Druhé vydanie II. časti sa objavilo v r. 1965. Toto už spracováva aj súťaž v r. 1963, a to v poslednej časti zborníka. Prepracovaná I. časť bola vydaná aj v jazyku anglickom v r. 1962.*)

Veľký význam majú Celoštátne stredoškolské matematické študijné súťaže.

Začiatky týchto súťaží siahajú do roku 1923 a svoj dnešný charakter nadobudli v polovici päťdesiatych rokov a aj od tej doby boli niekoľkokrát upravené v súlade s požiadavkami modernizácie. Celoštátnej stredoškolskej študijnej súťaže zúčastňujú sa žiaci 3. a 4. tried gymnázií a stredných odborných škôl. Riešia rovnaké úlohy, ale žiaci špeciálnych tried (s rozšíreným obsahom matematiky) súťažia v osobitnej skupine. V tejto skupine riešia podstatne ťažšie úlohy, čo je aj odôvodnené tým, že počet týždenných hodín v matematike je u týchto žiakov dvojnásobný ako u ostatných.

Súťaž má dve kolá. Úlohy I. kola riešia súťažiaci síce v ten istý deň, ale každý účastník súťaže na vlastnej škole a pod dozorom určeného profesora. I. kola sa môže zúčastniť každý žiak. Pri hodnotení výsledkov I. kola je rozhodujúci posudok odborného profesora.

V prvých rokoch súťaže riešili v I. kole všetci žiaci — teda aj žiaci špeciálnych tried — tri úlohy, ktoré vy-

*) Hungaria Problem Book, based on the Eötvös Competitions. I: 1894—1905. II: 1906—1928. Translated by Elvira Rapaport, NML 11—12, Random House, New York.

chádzali z náplne stredoškolských učebných osnov viac než úlohy Súťaže Józsefa Kürscháka. Boli zamerané najmä na rutinné výpočty a menej vyžadovali nápaditosť alebo hlbšie myslenie žiakov. Od r. 1968—69 riešia žiaci obidvoch skupín v prvom kole po 8 súťažných úloh. Na žiakov špeciálnych tried sú pre postup do II. kola kladené náročnejšie požiadavky ako na ostatných. Na riešenie úloh I. kola majú žiaci 5 hodín času a môžu použiť ľubovoľné pomôcky.

Riešenia úloh I. kola, ktorých býva v posledných rokoch približne 3000, hodnotia najprv odborní profesori, a to podľa vzorových riešení. Z viacerých škôl došlé ohodnotené riešenia po kontrole hodnotí znovu osobitná komisia. Takáto komisia pozostáva z dvoch až troch členov. Po kontrole a prípadnej oprave hodnotenia rozdelí súťažiacich na tri skupiny: V jednej skupine sú tí, ktorí sú navrhnutí na ďalší postup bez podmienok, v druhej skupine sú takí, ktorí sú navrhnutí na postup s určitou podmienkou, a konečne v tretej skupine sú tí, ktorí nie sú navrhnutí na postup.

Riešenia súťažiacich z I. a II. skupiny dostanú sa potom pred 10—12člennú ústrednú komisiu, ktorá podľa pravidiel súťaže určí postupujúcich do II. kola. Platí zásada, aby riešenia takého súťažiaceho, ktorého ústredná komisia nevybrala do II. kola, prezreli aspoň dvaja členovia komisie.

V II. kole súťaží každoročne približne 300 žiakov. Títo sú rozdelení opäť do dvoch skupín: žiaci zo špeciálnych matematických tried a ostatní.

V obidvoch skupinách súťažiaci musia riešiť tri úlohy a na riešenie majú 5 hodín času. Pri riešení môžu používať akékoľvek pomôcky. Úlohy v tomto prípade sú samozrejme ťažšie ako v predchádzajúcich kolách. Pre ilustráciu uvádzame úlohy, ktoré boli vybrané v r. 1972

na Celoštátnej stredoškolskej matematickej študijnej súťaži:

Úlohy I. kola :

1. Riešte sústavu rovníc:

$$\begin{aligned}7^{x+1} - 6^{y+3} &= 1, \\6^{y+2} - 7^x &= 5(6^y + 1).\end{aligned}$$

2. Kružnicu s polomerom 5 cm pretína priamka p v bodoch A , B . Vzdialenosť bodu A , resp. B od daného bodu P tejto priamky je 12,8 cm, resp. 20 cm. Vedte z bodu P dotýčnicu ku kružnici. Nech dotykovým bodom je bod C . Určite pomer veľkosti úsečiek AC a BC .
3. V pravouhlom trojuholníku ABC zvolíme na odvesne AC , resp. BC bod X , resp. Y tak, aby platilo

$$\frac{AX}{XC} + \frac{BY}{YC} = 1.$$

Dokážte, že priamka XY prechádza ťažiskom trojuholníka ABC .

4. Daná je kružnica s polomerom r a rovnobežne s rovinou kružnice vo vzdialenosti r je daná úsečka AB , ktorej pravouhlým priemetom na rovinu kružnice je priemer kružnice.

Z každého bodu úsečky AB viedeme polpriamky na ňu kolmé (z vnútorných po dvoch, z koncových po jednej) tak, aby prechádzali bodmi danej kružnice. Nech ρ je rovina rovnobežná s rovinou kružnice vzdialená od tejto roviny a od úsečky AB o $r/2$. Akú krivku vytvoria priesečníky uvažovaných polpriamok s rovinou ρ ?

5. Pre reálne čísla a , b , x , y , z platí, že

$$x^2 = y^2 + a^2 = z^2 + b^2 = (a + b)^2 + (y - z)^2.$$

Vyjadrite číslo x pomocou čísel a , b .

6. Pre ktoré prirodzené n je číslo $3^{(n+1)(n+2)} + 63$ deliteľné číslom 72?
7. Uvažujme o grafoch funkcií $y = \cos x$ a $y = \sin 2x$ v otvorenom intervale $(0, \pi/2)$. Zostrojte dotýčnicu ku každej z kriviek v ich priesečníku a určite uhol dotýčnic. Vychádzajúc z názoru určite, koľko oblúkov daných grafov leží v jednotlivých uhloch, na ktoré uvažované dotýčnice rozdeľujú rovinu.
8. Na zoznamovacom večierku sa stretne spoločnosť, o členoch ktorej vieme, že medzi nimi nie sú štyria (rôzni) ľudia A, B, C, D takí, že A pozná B , B pozná C , C pozná D . Dokážte, že potom možno spoločnosť rozdeliť do troch miestností tak, že v každej miestnosti sú ľudia, ktorí sa nepoznajú. (Známosť považujeme za vzájomnú, tj. ak A pozná B , potom aj B pozná A .)

Úlohy II. kola:

- A) Úlohy určené pre žiakov tried s učebnými osnovami zameranými na všeobecný a matematicko-fyzikálny odbor. (Žiaci tried zameraných na matematiku a fyziku majú týždenne o 1—2 hodiny viac matematiky ako žiaci, ktorých učebné osnovy sú zamerané všeobecne. Tieto nadpočetné hodiny sú v prvom rade vyhradené na prehĺbenie prebraného učiva a na jeho aplikáciu.)
1. Určite maximum funkcie s troma premennými

$$f(x, y, z) = \frac{x}{2} + y - z$$

pri nasledujúcich podmienkach:

$$|x - 2y + z| \leq 2, |y| \leq 3, xz \geq 0.$$

2. V urne je 8 rôzne zafarbených guľiek. Vytiahneme jednu a vrátime ju. Toto urobíme celkom desať-

krát. Aká je pravdepodobnosť, že takýmto spôsobom každá guľka sa nám dostane do ruky aspoň raz?

3. Z papiera vystrihneme rovnoramenný trojuholník ABC . Na základni AB bližšie k bodu A leží bod D a bližšie k bodu B bod E . Otáčajúce trojuholníky ACD a BCE okolo priamok CD , resp. CE stretnú sa vrcholy A a B v bode F . Dokážte, že pravouhlý priemet vrchola C uvažovaného trojuholníka do roviny DEF splynie so stredom kružnice, ktorá je zvonku vpísaná trojuholníku DEF — k strane DE .

B) Úlohy určené pre žiakov špeciálnych matematických tried:

1. Pre rôzne body $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ roviny je $\sphericalangle A_1B_2C_1 = \sphericalangle B_1C_2A_1 = \sphericalangle C_1A_2B_1 = 90^\circ$,
 $A_2B_1 = B_1C_2, B_2C_1 = C_1A_2, C_2A_1 = A_1B_2$.

Dokážte, že priamky A_1A_2, B_1B_2 a C_1C_2 prechádzajú jedným bodom.

2. Funkcia $f(x)$ definovaná v intervale $0 < x < 1$ premennej x priraduje v intervale medzi 0 a 1 také číslo, pre ktoré v desiatkovej sústave n -té desatinné miesto rovná sa číslu n alebo číslu 0 podľa toho, či n -té desatinné miesto čísla x sa rovná číslu n alebo nie ($n = 1, 2, \dots$). Možno funkciu $f(x)$ integrovať v intervale $\langle 0, 1 \rangle$, a ak áno, akú hodnotu má jej integrál?
3. Dokážte, že k ľubovoľnému páru funkcií $f(x), g(x)$ definovaných v uzavretom intervale $\langle 0, 1 \rangle$ existuje taká dvojica čísel $[x, y]$: $0 \leq x \leq 1$ a $0 \leq y \leq 1$, pre ktoré

$$|f(x) + g(x) - xy| \geq \frac{1}{4}.$$

Druhé kolo Celoštátnej stredoškolskej matematickej študijnej súťaže sa koná v rovnakom čase a v tých istých miestach ako súťaž Kürschákova. Riešenia úloh účastníkov tohto II. kola posudzujú priamo členovia ústrednej súťažnej komisie. Každé riešenie musia vidieť najmenej dvaja členovia komisie a tie riešenia, ktoré prichádzajú do úvahy na odmenenie, všetci členovia komisie.

Poradie riešiteľov v II. kole sa určuje výlučne podľa povahy riešenia a úloh v tomto kole. Prvoradou podmienkou je, aby z troch daných súťažných úloh každá bola vyriešená úplne aspoň jedným spôsobom. Až potom prídu do úvahy prípadné ďalšie riešenia (riešenia iným spôsobom), zovšeobecnenia, hodnotné poznámky a doplnky, prípadne v práci sa vyskytujúce hodnotné zvláštnosti.

Súťažiaci umiestnení na prvých troch miestach v obidvoch kategóriách sú odmenení. Prvá cena od dávna je 2000 Ft, druhá cena 1000 Ft a tretia cena 500 Ft. Podľa výsledkov súťaže môžu byť tieto ceny v určitom zmysle preskupené. Okrem toho súťažiaci umiestnení na prvých 10 miestach sú oslobodení od prijímacích skúšok na takých vysokých školách, na ktorých skúšobným predmetom je aj matematika. Toto sa vzťahuje na súťažiacich v obidvoch kategóriách. Od škol. roku 1972/73 stredoškoláci 3. a 4. triedy súťažia v troch kategóriách, a to: súťažiaci zo špeciálnych matematických tried, zo špeciálnych matematicko-fyzikálnych tried a ostatní.

Výdavky spojené s touto súťažou kryje MŠ, organizácie súťaž riadi MŠ v spolupráci s Bolyai Társulat. Mená odmenených v tejto súťaži uverejňuje aj denná tlač. Záverečná správa ústrednej súťažnej komisie spolu s riešeniami úloh súťaží sa do roku 1965 publikovala každoročne v Középiskolai Matematikai Lapok, od roku 1965 vychádza v osobitnej ročenke.

Ďalšou súťažou pre žiakov 1. a 2. tried stredných škôl je od roku 1951 každoročne organizovaná Súťaž Dániela Aranya (stredoškolský profesor, ktorý v r. 1894 začal vydávať Stredoškolské matematické listy).

Táto súťaž je organizovaná podobne ako Celoštátna stredoškolská matematická študijná súťaž. Aj tu osobitne súťažia žiaci zo špeciálnych matematických tried a osobitne ostatní. Je povolené používať vecné pomôcky, ale pre riešenie úloh v obidvoch kolách majú len po 4 hodiny času. Okrem toho súťažiaci z 1. tried (začínajúci) dostávajú iné úlohy ako žiaci 2. tried (pokračujúci).

Počínajúc škol. rokom 1966/67 žiaci 1. tried dostávajú k riešeniu 15 úloh a žiaci 2. tried 12 úloh namiesto do toho času obvyklých troch úloh. Vo väčšom počte úloh objavili sa samozrejme oveľa ľahšie úlohy ako v predchádzajúcich rokoch. Súťažná komisia chcela tým docieľiť to, aby sa zvýšil počet súťažiacich žiakov. Je len prirodzené, že sa tým rozšírila práca súťažnej komisie, lebo sa zvýšil počet potrebných úloh. V Súťaži Dániela Aranya postupuje do II. kola zo začiatočníkov ako aj z pokročilých približne rovnaký počet úspešných riešiteľov ako v celoštátnej študijnej súťaži. V prvom kole je však 1,5krát viac účastníkov.

Súťaž Dániela Aranya organizuje Bolyai Társulat za podpory MŠ. Od škol. roku 1972/73 aj v tejto súťaži súťažia žiaci namiesto v troch kategóriach podľa jednotlivých ročníkov. Súťaž Dániela Aranya pre žiakov 7. a 8. ročníkov je výhodnejšia ako Celoštátna súťaž, lebo v nej nie je nijaké obmedzovanie: z tej istej triedy môže postúpiť do rozhodujúceho kola ľubovoľný počet súťažiacich.

Okrem toho je v MLR ešte jedna významná matematická súťaž: Bodovacia súťaž Stredoškolských matematických listov.

Odhlídnuc od prerušenia počas svetovej vojny časopis Stredoškolské matematické listy (Középiskolai Matematikai Lapok) vychádza ešte aj dnes. V rokoch 1894—1914, 1925—1939 a potom od r. 1948 vychádzal, resp. vychádza mesačne v každom školskom roku. Časopis má veľký význam, lebo privyká svojich čitateľov a spolupracovníkov, aby sa pravidelne zaoberali riešením matematických úloh, ktoré sú na patričnej úrovni, a aby sa tieto riešenia naučili presne popísať. Pred zriadením špeciálnych matematických tried Stredoškolské matematické listy vyplňali medzeru v rozvíjaní matematických talentov. Medzi bývalými riešiteľmi v spomínanom časopise publikovaných úloh nájdeme takmer všetkých našich vynikajúcich profesorov matematiky, prírodovedcov, technikov a iných významných vedcov. Tejto Bodovacej súťaže zúčastňuje sa pravidelne približne 600 žiakov.

V roku 1965 na počesť 20. výročia oslobodenia MĽR založilo ministerstvo práce MĽR matematickú súťaž pre žiakov učňovských škôl.

Ešte pred týmto rokom boli študijné súťaže o titul „Vynikajúci žiak odboru“. V požiadavkách tejto súťaže vyskytli sa aj isté matematické znalosti, tieto však boli silne odbornej povahy a nie veľmi prekročili úroveň učebnej látky všeobecných škôl.

Aj prvé matematické súťaže boli zamerané viac na odbornú stránku. Ani úlohy neboli jednotné. Rôzne odbory (strojárenský, banícky, elektrotechnický, stavebný atď.) pre žiakov príslušných odborných škôl usporiadali osobitné súťaže.

Keď potom všeobecné predmety nadobúdali patričný význam a úroveň a úroveň obsahu vyučovania matematiky rástla, aj povaha matematických súťaží sa zmenila — charakter odbornosti súťaží postupne ustúpil do pozadia.

V súčasnosti ministerstvo práce vyhlasuje súťaž každý september. Súťaž pozostáva z dvoch kôl.

Prvé kolo sa koná na školách. Osobitné hárky so súťažnými úlohami rozosiela ministerstvo na jednotlivé školy v požadovanom počte. Hodnotenie žiackych riešení sa robí na školách podľa ústredím zaslaného bodovacieho poriadku. Do druhého rozhodujúceho kola môže vyslať každý ústav 1—2 žiakov, ktorí splnili stanovené podmienky pre postup.

Opravu riešení úloh v rozhodujúcom kole robí príslušná komisia. Žiaci, ktorí docielia najlepšie výsledky, sú odmenení zahraničnou alebo domácou rekreáciou, resp. finančnou odmenou. Texty úloh sú publikované v časopise aj v ruskom a anglickom preklade.

Medzi súťaže matematického charakteru možno zaradiť aj televíznu súťaž „Kto v čom je vedcom“, ktorú každoročne vysíela od r. 1964 maďarská televízia. Charakter televízneho vysielania však neumožňuje do nej zaraďovať zvlášť náročné úlohy.

Z uvedených stredoškolských matematických študijných súťaží ani jedna nie je dostatočne prístupná žiakom učňovských učilíšť. Požiadavky z matematiky na týchto ústavoch sú podstatne nižšie ako na odborných stredných školách alebo gymnáziách.

Uvedme, že v škol. roku 1971/72 z asi 14 000 žiakov odborných učilíšť zúčastnilo sa súťaže približne 5000 žiakov, z ktorých do záverečného kola postúpilo asi 60 žiakov.

Doc. Endre Hódi založil v r. 1952 matematickú súťaž pre posluchačov vysokých škôl pre výchovu profesorov, a to na budapeštianskej vysokej škole. Súťaž bola v roku 1952 a 1953 v hlavnom meste, v r. 1954 v Szegede a v r. 1955 v Egeri. Z každej vysokej školy zúčastnilo sa po 8 poslucháčov, ktorí po dobu 5 hodín mali písomne

vyriešiť päť úloh, pričom pri riešení mohli použiť akékoľvek pomôcky. Po zániku vysokej školy v Budapešti viac rokov sa matematické súťaže neporiadali.

V r. 1965 katedry matematiky univerzít začali opäť neoficiálnu matematickú súťaž a podľa jej skúseností ministerstvo školstva a Bolyai Társulat organizuje od r. 1966 v každom roku celoštátnu matematickú súťaž pre vysoké školy pre výchovu profesorov.

Cieľom súťaže nie je vyhľadávanie matematických talentov, ale podnietenie poslucháčov k cvičeniu v riešení úloh a pomoc pri prehľbovaní nadobudnutých vedomostí.

Súťažná komisia je zložená zo zástupcov jednotlivých katedier matematiky univerzít a vyslaného zástupcu Bolyai Társulat. Tým posledným doteraz vždy bol doc. Hódi. Súťažná komisia zostavuje súťažné úlohy a hodnotí riešenia.

Súťažiaci musia riešiť 7 úloh v čase 5 hodín. S výnimkou posledných dvoch rokov súťažiaci súťažili v ten istý deň na svojej vysokej škole. Počet súťažiacich na jednotlivých vysokých školách sa pohyboval medzi 12—20. V posledných rokoch sa koná vždy v sídle niektorej vysokej školy v rámci celoštátnej konferencie súťaž pre poslucháčov inštitúcií vychovávajúcich pedagógov. Tejto súťaže sa zúčastňuje po 5 poslucháčov z každej vysokej školy.

Pre riešenie vybraných úloh predpokladajú sa vedomosti nanajvýš z druhého ročníka vysokej školy. Úlohy sú však prevažne také, že ich môžu vyriešiť aj prvoročníci. Témy úloh sú rozmanité. V rovnakej miere môžu sa vyskytnúť úlohy z teórie čísel, z algebry, z geometrie, z analýzy, z logiky atď., aby si súťažiaci mohli zvoliť z daných úloh také, ktoré zodpovedajú ich záujmu.

Pre ilustráciu uvedieme ukážku textov úloh v súťaži r. 1972:

1. Nájdite maximálny súčin, ktorého činitele sú prirodzené čísla a súčet činiteľov je $3k + 1$; k je prirodzené číslo.
2. Každý z troch chlapcov a troch dievčat má k dispozícii telefón a vieme o nich toto:
 - a) Žiadne dve osoby nepoznajú vzájomne svoje telefónne čísla, ale každý chlapec pozná telefónne číslo jedného z dievčat.
 - b) Telefónne číslo každého z uvedených chlapcov a dievčat pozná niekto z ostatných, ale žiaden nepozná viac ako dve telefónne čísla.
 - c) Dve z uvedených osôb nepoznajú telefónne číslo žiadneho z ostatných.
 - d) Počet iných osôb, ktoré poznajú telefónne číslo účastníka, a počet tých, ktorých telefónne číslo pozná on, dáva súčet, ktorý nie je väčší než tri.
 Najmenej koľko z uvedených osôb je treba vyrozumieť o správe, aby sa ju dozvedela každá osoba?
3. V množine $\mathbf{R}$ racionálnych čísel definujeme nižšie uvedené operácie:

$$a * b = r(a + b) + s ab + t,$$

kde r, s, t sú pevné racionálne čísla a $s \neq 0$.

Akú podmienku je potrebné vymedziť pre t a pri zanechaní ktorého racionálneho čísla vytvorí obdržaná množina komutatívnu skupinu podľa definovanej operácie?

4. V rovine sú dané štyri rovnostranné trojuholníky: ABC , AA_1A_2 , BB_1B_2 a CC_1C_2 . Poloha jednotlivých trojuholníkov a veľkosť strany je ľubovoľne voliteľná, podstatné však je, aby vrcholy všetkých trojuholníkov zachovávali dané poradie (napr. kladné, tj. proti pohybu ručičiek hodinových) bez cyklickej zámeny.

Stred úsečky A_2B_1 označme P , stred úsečky B_2C_1 označme Q a konečne stred úsečky C_2A_1 označme R .

Dokážte, že potom aj trojuholník PQR je rovnostranný.

5. Vrcholy pravidelného p -uholníka ($p > 2$ je prvočíslo) sú vyznačené farebne červené alebo belaso tak, že sú červené aj belasé vrcholy. Otáčajme mnohoúholník okolo jeho stredu v kladnom zmysle dovtedy, kým sa nebudú kryť červené vrcholy s červenými a belasé s belasými. Dokážte, že veľkosť uhla otočenia je 2π .

6. Je rad $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log_2 n)^{\log_2 n}}$ konvergentný?

7. Funkcia $f(x)$ má nasledujúce vlastnosti:

- a) je definovaná pre každé reálne číslo rôzne od 0;
- b) môže nadobúdať každú reálnu hodnotu;
- c) najviac v dvoch bodoch jej môžeme priradiť akúkoľvek funkčnú hodnotu;
- d) jej deriváciou je: $f'(x) = x^{-2} - |x^{-3}|$;
- e) minimum funkcie v jednom bode je 1,5.

Nájdite nulové body funkcie $f(x)$!

Z vysokoškolských súťaží má popri matematickej súťaži univerzít či už z hľadiska vedeckého a či medzinárodného podstatne väčší význam Matematická súťaž Miklósa Schweitzera. Túto súťaž usporiadal Bolyai Társulat prvýkrát v r. 1949. K jej založeniu viedla myšlienka podnietiť poslucháčov vysokých škôl k bádaniu a dať mladým záujemcom o matematiku možnosť prejaviť sa v ich nadaní. Kládla si za cieľ objaviť mladých bádateľov. V zmysle súťažných pravidiel sa môžu tejto súťaže zúčastňovať poslucháči univerzít, ďalej aj takí, ktorí svoje vysokoškolské štúdium ukončili v bežnom roku, v ktorom sa súťaž koná.

Najnovšie sa súťaže môžu zúčastňovať aj stredoškoláci (gymnazisti).

Súťažná komisia vyberá také úlohy, ktorých riešenia vyžadujú si poznatky alebo časť poznatkov univerzitnej učebnej látky alebo bezprostredne sa viažu na ňu. K riešeniu týchto úloh je potrebné samostatné matematické myslenie a pohotovosť. Pri súťaži súťažiaci môžu použiť akékoľvek knihy a pomôcky.

Súťaž bola najprv uzavretá — ako stredoškolské súťaže, ale od roku 1950 majú súťažiaci na riešenie zadáných úloh 7—10 dní a potom riešenia zasielajú poštou na adresu spoločnosti. Pri hodnotení dbá sa na to, aby každé riešenie bolo samostatnou prácou súťažiaceho. Obyčajne se dáva 10 úloh.

Celý materiál týkajúci sa súťaží konaných v rokoch 1949—1961 vydalo v roku 1968 v jazyku anglickom Akademické vydávateľstvo v Budapešti pod názvom „Contests in Higher Mathematics, Hungary, 1949—1961, in memoriam Miklós Schweitzer“.

Tam je v predslove zhrnutá podstata súťaže. Texty úloh sú uverejnené v jazyku francúzskom na strane 120 v 8. ročníku Matematikai Lapok.

POZNÁMKY O KAHANOFFOVÝCH NEROVNOSTIACH

ANDRZEJ MAKOWSKI

B. Kahanoff v článku [1] dokázal nasledujúce nerovnosti:

$$n^n(n-2)^{n-2} > (n-1)^{2(n-1)}, \quad (1)$$

$$\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{n-2} > \left(\frac{2n-2}{2n-1}\right)^{2n-2}, \quad (2)$$

$$\left(\frac{n-2}{n-3}\right)^{n-2} > \left(\frac{2n-2}{2n-3}\right)^{2n-2}, \quad (3)$$

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}, \quad (4)$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}, \quad (5)$$

ktoré platia pre každé prirodzené číslo $n > 2$.

Kahanoff v dôkaze používa diferenciálny počet, napríklad v dôkaze nerovnosti (1) ukazuje, že funkcia

$$f(x) = \frac{x^n}{1 + x^{2(n-1)}}$$

(n je prirodzené číslo > 2) nadobúda v $[0, +\infty)$ jediné maximum pre $x_0 = \left(\frac{n}{n-2}\right)^{1/2(n-1)}$.

Pretože $f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, máme $f(x_0) > f(1)$.

Posledná nerovnosť po úprave dáva nerovnosť (1).

Analogicky dokazuje Kahanoff nerovnosti (2) — (5).

Druhý dôkaz nerovnosti (1) dostávame užitím nerovnosti pre geometrický a aritmetický priemer (pozri [2], str. 12—13):

Pre kladné čísla $x_1, x_2, \dots, x_k$ platí nerovnosť

$$\sqrt[k]{x_1 x_2 \dots x_k} \leq \frac{1}{k} (x_1 + x_2 + \dots + x_k), \quad (*)$$

v ktorej nastáva rovnosť iba pre $x_1 = x_2 = \dots = x_k$.

Pre $k = 2n - 2$, $n \geq 3$, $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{n-1}{n}$,

$x_{n+1} = \dots = x_{2n-2} = \frac{n-1}{n-2}$ z tejto nerovnosti dostaneme

$$\left[\left(\frac{n-1}{n} \right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n-2} \right)^{n-2} \right]^{1/(2n-2)} < \frac{1}{2n-2} (n-1 + n-1) = 1,$$

odkiaľ ľahko vyplýva (1).

Nech $a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$, $b_n = \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n$, potom nerovnosti (2) — (5) môžeme napísať v tvare

$$a_{n-2} < a_{2n-2}, \quad (2')$$

$$b_{n-2} < b_{2n-2}, \quad (3')$$

$$b_n < b_{n+1}, \quad (4')$$

$$a_n < a_{n+1}. \quad (5')$$

V knížce [2] (str. 15) je daný jednoduchý dôkaz nerovnosti (4') i (5'). Do nerovnosti (*) dosadíme $k = n + 1$, $x_1 = \dots = x_n = 1 \pm \frac{1}{n}$, $x_{n+1} = 1$. Vidíme, že nerovnosti (2') a (3') vyplývají z nerovnosti (5') a (4').

Literatúra:

- [1] *Boris Kahanoff*: Certaines inégalités des nombres, Bull. Inst. Égypte 29 (1948) 323—327.
- [2] *P. P. Korovkin*: Неравенства (Populjarnyje lekciï po matematike, vyp. 5, izd. 2, GITTL, Moskva 1956.

(V)

JAK PRACUJE MATEMATIK

BOHDAN ZELINKA

O tom, jak pracují vědci různých oborů, jsou již mezi lidmi určité vžitě představy. Chemik zahřívá různé roztoky v kádinkách, astronom se dívá dalekohledem na hvězdy, anatom pitvá. Tyto představy samozřejmě nevystihují plně činnost těchto vědců, ale alespoň ji jaksi charakterizují. Zeptáme-li se však někoho (laika), jak pracuje matematik, nejspíše nám odpoví, že matematik počítá.

Taková je tedy vžitá představa o práci matematika. Musíme říci, že vystihuje tuto práci podstatně méně než představy výše uvedené o chemících, astronomech a anomech. V době, kdy ještě na vysokých školách existovalo umístěnkové řízení, kterýsi průmyslový podnik žádal matematicko-fyzikální fakultu Karlovy univerzity, aby mu přidělila jednoho svého absolventa. Na dotaz fakulty, jak chtějí tohoto absolventa zaměstnat, podnik odpověděl, že ho potřebují jako účetního. Zde se právě projevila ona představa o tom, že matematik je prostě počtář. Je jisté, že účetní musí být zručným počtářem, a je také jisté, že matematik zručným počtářem také obvykle je. Přijmeme-li však matematika na místo účetního, nebude mu sice dělat potíže počítání, zato však si nebude umět hned poradit s „má dáti“ a „dal“. Což o to, naučit se to může také; potom to však bude znamenat, že se přeškolil z matematika na účetního, tedy pověsil své původní povolání

na hřebík, což je škoda — studoval matematiku zbytečně. Stalo se také, že rodiče zázračného dítěte násobícího zpaměti hbitě trojmístná (snad i vícemístná) čísla mluvili s jistým docentem matematiky a ptali se ho, zdali by to uměl také. Když docent prohlásil, že nikoli, byli velice pyšní na to, že jejich dítě předčí docenta. Ono ho skutečně předčilo v mechanickém počítání, zdaleka to však neznamenalo, že by se proto také mělo stát docentem. Ano, existovali kdysi řemeslní počtáři. Německy se jim říkalo Rechenmeister, a mnozí z nich se opravdu zasloužili o rozvoj matematiky. Dnes, kdy existují stolní počítačové stroje a samočinné počítače, by se takoví lidé neuživil. S pojmem počtář se dnes setkáme pouze u dělostřelectva. Je to voják, jehož úkolem je hbitě vypočítat potřebné prvky střelby. Zde jde tedy o dovednost zručného počítání v podmínkách, kdy není možné brát s sebou kalkulačku ani telefonovat do výpočetního střediska.

Matematik je tedy něco jiného než počtář. A co tedy vlastně dělá? Mnoho matematiků samozřejmě vyučuje, a to skoro na všech typech škol. O této práci zde mluvit nebudeme. Každý z vás jistě viděl učitele matematiky při práci. Řekneme si, v čem spočívá vědecká práce v matematice.

Vědeckou práci matematika můžeme zhruba rozdělit na tři druhy. Jednak je to objevování a dokazování matematických vět, jednak nalézání různých metod matematických postupů, jednak aplikování matematiky v jiných vědách.

Jakým způsobem matematik objevuje matematické věty? V čem je to podobné jako u jiných věd, v čem se to liší? Už jsme zde mluvili o tom, že anatom pitvá. Všichni víme, že například žaludek krávy se skládá ze čtyř částí — bachor, kniha, čepce a sléz. Jak anatomové

k tomuto objevu dospěli? Představme si, že rozpitváme žaludek jedné krávy a najdeme v něm ony čtyři části. Pokládáme to ovšem za zajímavé, ale spíše by se nám mohlo zdát, že jde o nějakou chorobnou změnu. Rozpitváme-li však žaludky pěti nebo deseti krav, o nichž víme, že nebyly nijak nemocné, a najdeme opět ony čtyři části, napadne nás, že je to tedy něco normálního a že se to vyskytuje u každé krávy. Vyslovíme tedy hypotézu, že žaludek krávy se skládá ze čtyř částí. Zatím je to pouze hypotéza neboli domněnka; na základě pěti nebo deseti případů nemůžeme ještě činit žádné závěry. Rozpitváme-li však sto, dvě stě nebo pět set krav a zjistíme-li, že se čtyři části žaludku vyskytují bez výjimky u všech krav, můžeme už získaný výsledek zobecnit a tvrdit, že to platí pro všechny krávy. Vidíme-li potom někde na louce pasoucí se krávu, řekneme o ní s jistotou, že se její žaludek skládá ze čtyř částí, aniž bychom ji museli pitvat nebo rentgenovat. To je tak zvaná neúplná indukce.

Metody neúplné indukce používá člověk i v běžném životě a často ho tato metoda vede k mylným závěrům. Tak vznikají nespravedlivé předsudky o příslušnících určitých národů nebo povolání. Proto se také lidem cestujícím do ciziny připomíná, aby dobře reprezentovali svou zemi. Jestliže nějaký cizinec dosud neviděl žádného Čecha a náhle se setká s výpravou Čechů chovajících se jako hulváti, učiní z toho neúplnou indukci závěr, že Češi jsou národem hulvátů. A těžké je potom mu takovýto názor vyvracet.

Matematika se liší od většiny ostatních věd tím, že neúplné indukce neužívá, a to právě proto, že se chce vyvarovat mylných závěrů, k nimž by mohlo při této metodě dojít. Mohli bychom například prozkoumat čísla od 1 do 999 a na základě zkoumání těchto čísel

dojít k závěru, že všechna čísla jsou menší než tisíc. To je ovšem velice zjednodušený příklad. Stalo se však, že se v matematické olympiádě vyskytla úloha, v níž je dána jakási funkce proměnné x a mělo se určit, pro která x nabývá hodnot kladných a pro která hodnot záporných. Jeden řešitel dospěl k závěru, že pro celočíselná x nabývá funkce kladných hodnot, pro ostatní hodnot záporných. Šlo samozřejmě o spojitou funkci, takže bylo na první pohled jasné, že toto řešení není správné. Jak toto mylné tvrzení řešitel „dokázal“? Jednoduše. Dosadil $x = 1$, výsledek byl kladný, pak dosadil $x = 1/2$, výsledek byl záporný. „Důkaz“ byl hotov. Taková neúplná indukce je samozřejmě nepřípustná už z toho důvodu, že bylo zkoumáno příliš málo případů. Mohlo se klidně stát i to, že by řešitel dosadil tisíc celočíselných hodnot a vyšla by mu vždy kladná hodnota funkce a stejně tak by v tisíci necelých hodnotách x mohla vyjít záporná funkce. Přesto by tvrzení nebylo správné. Proto se v matematice neúplné indukce nepoužívá.

Matematika bývá nazývána vědou deduktivní na rozdíl od věd induktivních, které používají neúplné indukce. Znamená to, že se matematické věty odvozují tzv. dedukcí z axiomů. Co je to axiom, je vám jistě známo. Jak však ukazuje například americký matematik (maďarského původu) G. Pólya ve své knize *Mathematics and Plausible Reasoning*, matematik zpravidla nepracuje tak, že by si napsal axiomy a potom dumal, co z nich lze odvodit. I matematik nejprve experimentuje, vyšetří několik případů a na jejich základě vysloví hypotézu. Pravdivost této hypotézy však již neověřuje zkoumáním dalších stovek případů, ale snaží se ji deduktivně dokázat.

Ukažme si to opět na příkladě. Nejde zde o žádný

veliký vědecký objev, ale o příklad, který běžně řeší studenti na vysoké škole. Je vzat z knihy I. V. Proskurjakova *Sborník zadač po linějnoj algebre*.

Nejprve si řekneme něco o tom, co jsou matice. Jsou to určité tabulky čísel, pro něž jsou definovány početní operace podobně jako pro čísla. My se zde omezíme na matice o dvou řádcích a dvou sloupcích, a řekneme si, že máme-li dvě matice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

pak jejich součin je definován takto:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Umocňování matice přirozeným exponentem je odvozeno z násobení, podobně jako u čísel.

Mějme nyní tento příklad: Máme určit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

pro libovolné přirozené číslo n . Jak přitom postupujeme? Nejprve experimentujeme. Vyzkoušíme několik čísel n , např. 2, 3, 4. Dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na základě těchto výsledků vyslovíme hypotézu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pro každé přirozené n . Pozor, zatím je to pouze hypotéza. Nyní teprve musíme začít přemýšlet, jak tuto hypotézu dokázat.

Na důkaze tohoto tvrzení si můžeme ukázat jednu z důležitých metod matematického dokazování. Je to metoda matematické indukce. O ní jste už také asi slyšeli. Máme-li dokázat, že nějaké tvrzení platí pro všechna přirozená čísla n , dokážeme to nejprve pro $n = 1$ (první indukční krok), potom předpokládáme, že platí pro $n = k - 1$ a z tohoto předpokladu dokážeme, že platí pro $n = k$ (druhý indukční krok). V našem případě máme vlastně již první indukční krok proveden. Stejně jako u čísel i u matic umocnění exponentem 1 značí, že se základ mocniny nemění; je tedy skutečně

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní předpokládejme, že platí tvrzení pro $n = k - 1$, tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k-1} = \begin{pmatrix} 1 & k-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dále platí

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & k-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tvrzení tedy platí pro $n = k$, a tím jsme dokázali, že skutečně pro všechna přirozená čísla n máme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Metodu matematické indukce si ukážeme ještě na jednom žertovném příkladě: Kdesi v Orientě je město mudrců. Jeho obyvatelé se vyznačují tím, že vědí všechno na světě kromě jediné věci: žádný z nich neví, zda je jeho manželka nevěrná (o cizích manželkách to ví). Jednoho dne vydal sultán ferman, v němž oznamoval, že v městě mudrců dochází k manželské nevěře, a nařizoval, aby každý muž, jakmile zjistí u své manželky nevěru, tuto manželku ještě týž den zabil. Třicátého dne po vydání fermanu byly všechny nevěrné ženy v městě mudrců zabity. Kolik jich bylo?

Při řešení této úlohy si nejprve dokážeme pomocnou větu: Je-li n počet nevěrných žen v městě mudrců, pak budou zabity n -tého dne po vydání fermanu. (Tato věta má tedy platit pro libovolné přirozené číslo n .) Důkaz provedeme matematickou indukcí. V prvním kroku položíme $n = 1$. Je-li tedy v městě mudrců pouze jedna nevěrná žena, pak její manžel ví, že manželky všech ostatních mužů jsou věrné. Protože však sultánův ferman mluví o tom, že se vyskytuje manželská nevěra, musí být nutně nevěrná jeho manželka. Zabije ji tedy hned první den. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro $n = k - 1$. Necht' nyní počet nevěrných žen je k . Manžel kterékoliv z nich ví celkem o $k - 1$ nevěrných manželkách. V k -tý den uvažuje takto: Je-li moje manželka věrná, pak počet nevěrných žen je $k - 1$. Podle předpokladu by však musely být zabity $(k - 1)$ -ho dne, tedy již včera. Poněvadž se tak nestalo, není nevěrných

žen $k - 1$, ale k ; patří k nim tedy i moje žena. A zabije ji. Pomocí této pomocné věty dojdeme k výsledku, že v městě mudrců bylo třicet nevěrných žen.

Popsali jsme si tedy jeden ze způsobů matematického dokazování. Všechny matematické důkazy se ovšem matematickou indukcí neprovádějí. Někdy můžeme provést důkaz přímý, to jest odvodit větu přímo z axiomů nebo z vět, které jsou již dokázány. Příkladem je důkaz tvrzení, že kosinus šedesáti stupňů je roven jedné polovině. Vycházíme ze známých vět o tom, že velikosti všech úhlů v rovnostranném trojúhelníku jsou rovny šedesáti stupňům a že pata každé výšky v tomto trojúhelníku je středem příslušné strany. Vedeme tedy výšku v rovnostranném trojúhelníku; ta nám rozdělí trojúhelník na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky. Přepona každého z těchto trojúhelníků je stranou původního trojúhelníka a jedna z odvěsen je polovinou této strany. Úhel, který tato odvěsna svírá s přeponou, má velikost šedesát stupňů. Poměr délky této odvěsny k délce přepony, tedy kosinus 60° , je roven jedné polovině. To byl příklad důkazu přímého.

Někdy provádíme důkaz nepřímý neboli důkaz sporem. Předpokládáme, že dané tvrzení neplatí, a z tohoto předpokladu odvodíme závěr, o kterém je zřejmé, že není pravdivý. Tato metoda se často používá v soudní a kriminalistické praxi. Je to tak zvaný důkaz pomocí alibi (alibi je latinské slovo a znamená jinde). Trestný čin byl spáchán v Praze dne 21. listopadu 1973 ve 14 hodin. Podezřelý z tohoto činu je pan X. Je však prokázáno (např. pomocí svědecké výpovědi), že se pan X dne 21. listopadu 1973 kolem 14. hodiny zdržoval v Brně. Provedeme tedy důkaz nevinu pana X sporem. Předpokládejme opak tvrzení, které chceme dokázat: že pan X spáchal onen čin. Z tohoto předpokladu vyplývá, že

dne 21. listopadu ve 14 hodin byl pan X současně v Praze i v Brně. Toto tvrzení je však zřejmě absurdní, tedy není pravdivé. Potom však není pravda ani to, z čeho jsme vycházeli, totiž že pan X spáchal zmíněný čin. Dokázali jsme, že pan X je nevinný.

Podobně se užívá důkazu sporem v matematice. Měli bychom například dokázat, že prvočísel je nekonečně mnoho. Kdybychom to chtěli dokazovat přímo, museli bychom buď všechna prvočísla vyjmenovat, nebo alespoň nalézt nějaký vzorec, podle něhož bychom určovali jednotlivé členy posloupnosti všech prvočísel. To by byl tzv. důkaz konstruktivní. Dokázali bychom existenci nějakého objektu tím, že bychom jej sestrojili. To se však zatím nepodařilo. Můžeme však použít důkazu sporem. Víme, že alespoň jedno prvočíslo existuje. Nechť je tedy všech prvočísel konečný počet. Označme je $p_1, p_2, \dots, p_n$. Součin všech těchto čísel označme P ; číslo P je zřejmě dělitelné všemi čísly $p_1, p_2, \dots, p_n$. Zkoumejme číslo $P + 1$. Kdyby toto číslo bylo dělitelné některým z prvočísel $p_1, p_2, \dots, p_n$, musel by být týmž číslem dělitelný i rozdíl čísel $P + 1$ a P , tedy 1; číslo 1 však není dělitelné žádným prvočíslem. Tedy také číslo $P + 1$ není dělitelné žádným prvočíslem.

Musí být tedy buď samo prvočíslem, zřejmě různým od $p_1, p_2, \dots, p_n$, nebo není prvočíslem, a pak nutně existuje prvočíslo p různé od $p_1, p_2, \dots, p_n$, které dělí číslo $P + 1$. Není tedy možné, aby existoval pouze konečný počet prvočísel, musí jich být nekonečně mnoho.

To bylo několik ukázek, jak matematikové provádějí důkazy. Samozřejmě různé metody dokazování se kombinují a některé matematické věty mohou mít důkazy i na několik stránek. Stává se, že je jako nový objev publikován i nový, jednodušší důkaz některé věty,

kteřá byla již dříve dokázána. Důkazy lze hodnotit i z hlediska estetiky. Mluvíme o elegantních důkazech jako protikladu k těžkopádným. Je to něco podobného, jako když mluvíme o kráse šachové partie.

Někdy se při dokazování používá též pomocných vět. S tím jsme se setkali už u oné úlohy s městem mudrců. Před dokazováním určité věty se dokáže jiná věta a té se pak použije v důkaze. Pomocné větě se říká také *lemma* (pozor, je to slovo středního rodu a skloňuje se jako téma nebo panoráma). Taková věta zpravidla nemívá skutečně jiný význam, než že pomáhá při dokazování jiné věty, a proto by nestála za samostatné publikování. Jsou ovšem výjimky; v teorii uspořádaných množin existuje *Zornovo lemma*, které je významnou matematickou větou. Nicméně stále se mu říká lemma, protože se ho používá jako pomocné věty k dokazování jiných vět (a to velmi často, proto je tak významné).

Řekli jsme si, že lemma zpravidla nemívá význam samo o sobě. Dotkli jsme se faktu, že ne každé matematické tvrzení, které je pravdivé, má smysl předkládat jako větu. Vezměme si opět větu, která tvrdí, že všechny úhly v trojúhelníku mají velikost šedesát stupňů právě, když trojúhelník je rovnostranný. Z této věty bychom mohli odvodit tato tvrzení: Jsou-li v trojúhelníku velikosti všech úhlů rovné šedesáti stupňům a jedna z jeho stran má délku jedna, pak všechny jeho strany mají délku jedna. Jsou-li v trojúhelníku velikosti všech úhlů rovné šedesáti stupňům a jedna z jeho stran má délku dvě, pak všechny jeho strany mají délku dvě. A tak dále. Takto bychom mohli pokračovat do nekonečna a dostávali bychom výsledky, které jsou sice pravdivé, ale neříkají nám nic tak významného, abychom je mohli nazývat větami. O tom, co se má nazývat větou a co ne, musí rozhodnout matematik sám na základě svého

úsudku a zkušenosti. Proto se zatím nedaří odvozování matematických vět pomocí samočinných počítačů. Vložíme-li do počítače nějaké axiomy a odvozovací pravidla, on nám sice odvodí něco, co je pravdivé, ale nedokáže rozpoznat, zda to má význam jako věta nebo ne. Kdyby nám začal odvozovat výše uvedená tvrzení o trojúhelnících, mohl by pokračovat takto do nekonečna a nic jiného bychom z něho už nedostali.

Promluvme si ještě o definicích. Definování nových pojmů nám vlastně umožňuje zestručnit vyjadřování. Místo abychom říkali „čtyřúhelník, jehož všechny strany jsou stejně dlouhé a jehož všechny úhly jsou pravé“, řekneme stručně „čtverec“. Při definování zařadíme vždy definovaný objekt do nějaké širší třídy objektů (čtyřúhelníky) a uvedeme vlastnosti, kterými se tento objekt odlišuje od ostatních objektů této třídy (jeho všechny strany jsou stejně dlouhé a jeho všechny úhly jsou pravé).

Než začne matematik pracovat s nějakým pojmem, musí si přesně uvědomit jeho význam, tak aby o každém objektu mohl jednoznačně prohlásit, zda pod tento pojem spadá či nikoliv. Jak by to vypadalo, kdyby se v matematice pracovalo s mlhavými pojmy, nám ukazuje tzv. paradox holohlavého. Jestliže člověku, který není holohlavý, vytrhneme jeden vlas, nestane se tím holohlavým. Z toho můžeme matematickou indukcí odvodit, že člověk, který není holohlavý, se holohlavým nestane ani po vytržení libovolného konečného počtu vlasů, to jest po vytržení n vlasů, kde n je libovolné přirozené číslo. První indukční krok máme vlastně již proveden: pro $n = 1$ to už bylo řečeno v předpokladu. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro $n = k - 1$, tedy, že po vytržení $k - 1$ vlasů se člověk nestane holohlavým. Vytrhneme-li mu další vlas, opět se ne-

stane holohlavým; to jsme předpokládali již na začátku. Bylo mu však vytrženo celkem k vlasů; tedy tvrzení platí pro $n = k$. Z toho vyplývá, že tvrzení platí pro každé přirozené číslo n a tedy člověk, který není holohlavý, se jím ani po vytržení jakéhokoliv konečného počtu vlasů nestane. To ovšem zřejmě není pravda. Kde je tedy chyba? V postupu důkazu jistě ne; princip matematické indukce přece chybný není. Je tedy chyba v tom, z čeho jsme vycházeli. Není pravda, že člověk, který není holohlavý, se jím nestane po vytržení jednoho vlasu.

Nyní se asi divíte, co vám to autor tvrdí. Ale je to skutečně tak. Chceme-li používat matematických metod, musíme si napřed ujasnit smysl pojmů, s nimiž pracujeme. Používáme-li pojmu „holohlavý člověk“, musíme tento pojem definovat. Definujme si holohlavého člověka jako člověka, který nemá vůbec žádné vlasy. Potom člověk, který má na hlavě právě jeden vlas, není holohlavý. Vytrhneme-li mu tento vlas, stane se holohlavým. A jakmile jsme se přesvědčili o tom, že nějaké tvrzení třeba jen v jednom případě neplatí, nemůžeme je pokládat za pravdivé. Kdybychom definovali holohlavého člověka trochu širě, např. jako člověka, který má nejvýše sto vlasů, pak by opět člověk se 101 vlasem holohlavý nebyl, a po vytržení jednoho vlasu by se holohlavým stal. Nelze definovat holohlavého člověka jako člověka, který má málo vlasů; s tak mlhavými pojmy jako „málo“ nebo „mnoho“ nelze v matematice pracovat. To bychom museli rozhodovat například, zda málo plus jedna se rovná mnoho či málo.

Ukázali jsme si, jak důležitá je přesnost matematických definic. Teď už se asi nebudete divit, že se učitel matematiky zamračí, jestliže mu na otázku, co je to absolutní hodnota, odpovíte, že absolutní hodnota je, když tam není minus.

Poznali jsme také, jak lze vyvrátit určitou hypotézu. Stačí nalézt jediný příklad, kdy tato hypotéza neplatí. Tomu se říká protipříklad neboli krásnou češtinou „kontrabajšpíl“.

Řekli jsme si zde také již dost o větách, hypotézách, lemmatech a důkazech. Nyní se podívejme na jinou stránku práce matematika, na hledání metod určitých matematických postupů. Jestliže se nám podaří detailně rozpracovat určitý matematický postup na jednotlivé kroky na sebe navazující, říkáme tomu algoritmus. Nemá to nic společného s logaritmem, ale vzniklo to z polatinštěného jména středověkého arabského matematika al-Chvárizmího, který jako první popsal postup řešení algebraických rovnic. Příkladem algoritmu může být Eukleidův algoritmus pro nalezení největšího společného dělitele dvou daných přirozených čísel. Větší číslo dělíme menším; je-li zbytek nulový, je hledaným největším společným dělitelem ono menší číslo. Je-li zbytek nenulový, postupujeme s menším číslem a se zbytkem tak, jako předtím s větším a menším číslem. Takto pokračujeme dále, až nakonec dostaneme nulový zbytek. Potom poslední nenulový dělitel je hledaný největší společný dělitel. Mějme např. čísla 112 a 40. Dělíme $112 : 40$, dostáváme zbytek 32. Dělíme $40 : 32$, dostáváme zbytek 8. Dělíme $32 : 8$, dostáváme zbytek 0. Největší společný dělitel čísel 112 a 40 je tedy 8.

Algoritmy mají význam zejména pro výpočet na samočinném počítači, protože mu dávají návod, jak má postupovat. Snahou je najít vždy co nejjednodušší algoritmus. Přenecháváme-li dřinu strojům, neznamená to, že bychom je měli předřídit. Kdybychom se chtěli zvážit na lékárnických vahách, nejenže bychom se nezvážili, ale nezvážili bychom na nich už nikdy nic jiného. Kdybychom chtěli na kalkulačce vypočítat číslo

2⁶⁴ — 1, což je známý počet zrněk v úloze o šachovnici, také bychom ničeho nedosáhli, protože kalkulačka nemá tak veliký rozsah. Stejně tak na některé početní postupy by nestačil samočinný počítač. Buď by na ně nestačila kapacita jeho paměti, která také není nekonečná, nebo by výpočet trval příliš dlouho. Jednotlivé početní operace sice počítač vykonává ve zlomcích vteřiny, ale s počtem těchto operací je to jako s počtem zrněk na šachovnici. Čím je postup složitější, tím více počet operací (a tedy i potřebný čas) narůstá. Z tisícín vteřiny se pak mohou stát tisíce let.

Ukázali jsme si Eukleidův algoritmus pro nalezení největšího společného dělitele dvou daných přirozených čísel. Mohli bychom použít i jiného algoritmu, který nazveme algoritmem nádenickým: brát postupně všechna přirozená čísla od jedné až do menšího z obou čísel, všemi dělit obě daná čísla, vypisovat si ta čísla, kterými jsou obě daná čísla dělitelná, a nakonec z nich vybrat to největší. Jistěže by to bylo mnohem pracnější než Eukleidův algoritmus. A o to tady jde: nalézt způsob nejen jak něco udělat, ale jak to udělat co nejsnáze a co nejrychleji.

Konečně matematikové se zabývají také aplikovanou matematikou. Zkoumají, jak by se matematické objevy daly aplikovat v jiných vědách. O metodách této práce se zde nebudeme šířit; jde zpravidla o kombinaci matematických metod s metodami oboru, v němž se matematika aplikuje. Do aplikované matematiky můžeme zahrnout i zkoumání otázek souvisících s konstrukcí samočinných počítačů. I zde se matematické metody kombinují s metodami technickými.

Zbývá ještě dodat, jak matematik vůbec přichází na to, co by měl hledat a dokazovat. Matematik prostě musí mít nějaký problém, který řeší. Zpočátku tyto

problémy dostává od jiných. Je-li vědeckým aspirantem, dává mu problémy jeho školitel. Dále je možno hledat v různých sbírkách neřešených matematických problémů (takovou sbírkou je např. *Collection of Mathematical Problems* od S. M. Ulama), bývají formulovány v monografiích a v článcích matematických časopisů, je možno je získat ústním či písemným sdělením od některého kolegy, třeba i zahraničního. Vyspělejší matematik, který již má přehled o svém oboru, si klade problémy i sám — sám poznává, kde jsou ještě bílá místa, která by bylo třeba vyplnit. A jakmile má problém, začíná jeho vlastní práce. Odhadne, jaké by asi mohlo být řešení problému, vezme si je jako hypotézu a pak se snaží tuto hypotézu dokázat či vyvrátit, jak jsme již o tom mluvili. Podaří-li se mu ji dokázat, je hotov. Podaří-li se mu ji vyvrátit, je o kus blíže k cíli, ví, která cesta je nesprávná. Nepodaří-li se mu ani to, ani ono, může na čas tuto hypotézu odložit a vyslovit jinou, kterou se mu třeba dokázat podaří. Zde jsem mluvil o dokazování vět, ale i při hledání algoritmů je situace obdobná — zkoušejí se různé způsoby a zkoumá se jejich efektivnost.

Ukázali jsme si, jak vypadá práce matematika. Doufám, že někteří z vás si tuto práci zvolí za životní povolání a že se stanou novou generací matematiků, která bude pokračovat v tom, co zde už bylo uděláno.

DVACET PĚT LET MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY V ČESKOSLOVENSKU

Sborník sestavili Jozef Moravčík a Jan Vyšín

Předmluvu napsal akademik Josef Novák

Přebal, vazbu a grafickou úpravu

navrhl Vladimír Vácha

K tisku připravil Vladimír Doležal

Vydala Mladá fronta

jako svou 3625. publikaci

Odpovědný redaktor Jiří Sixta

Vytiskl Mír, novinářské závody, n. p. závod 1

Praha 1, Václavské náměstí 15

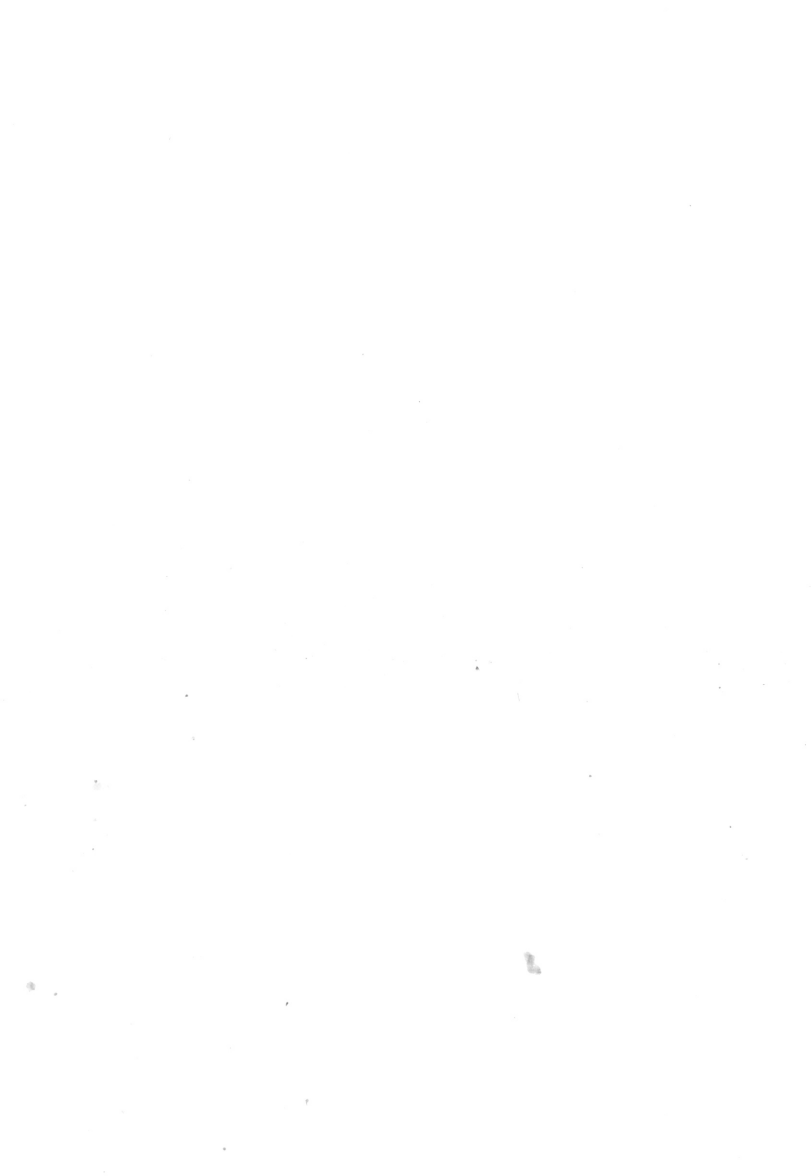
6,76 AA, 7,46 VA. Náklad 6000 výtisků

První vydání. 184 stran

Praha 1976. 508/21/85.5

23-018-76 03/2

Cena váz. výtisku 13,— Kčs



23

16

20

9

8

25

34

23-018-76
03-2
Cena váz.
Kčs 13,—