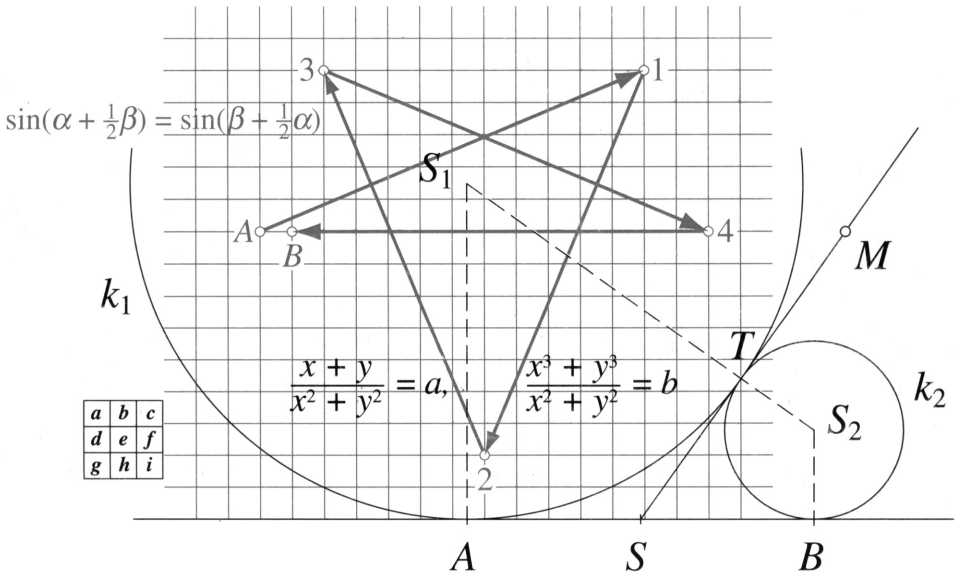
[dokumenty-11] Padesát let matematické olympiády

(EDS.) LEO BOČEK, KAREL HORÁK

PADESÁT LET MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

1951-2001



matfyzpress
VYDAVATELSTVÍ
MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTY
UNIVERZITY KARLOVY

Padesát let matematické olympiády

1951–2001

ISBN 80-85863-64-2

Obsah

Předmluva

Brožurka, kterou právě čtete, vydala Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze ve spolupráci ústředním výborem matematické olympiády při příležitosti 50. ročníku této soutěže, první předmětové olympiády na našich školách. Píšeme rok 2001, a tak si i nematematik snadno spočítá, že matematická olympiáda v tehdejším Československu vznikla v roce 1951. Padesátá léta byla v naší zemi jak po hospodářské, tak především po politické stránce velmi složitá. O to více je třeba ocenit iniciativu několika matematiků v čele s profesorem Karlovy univerzity Dr. Eduardem Čechem, kterým se podařilo v té době založit matematickou soutěž pro studenty tehdejších tzv. výběrových, dnešních středních škol, která se později rozšířila i na žáky základních škol. Profesor Dr. E. Čech, matematik světového významu, pracoval ještě před 2. světovou válkou v Brně, odkud znal Dr. Františka Kahudu, který byl v padesátých letech nejdříve náměstkem, a pak několik let ministrem školství, a plně podpořil vznik a průběh prvních ročníků MO. Dr. Kahuda byl také po dlouhou dobu předsedou Jednoty československých matematiků a fyziků (JČSMF), a zde je třeba konstatovat, že právě Jednota českých matematiků a fyziků je spolu s Matematickým ústavem Akademie věd České republiky odborným garantem matematické olympiády. Hlavním cílem matematické olympiády bylo získat studenty středních škol pro studium technických oborů, aby se stali příštími budovateli našeho, hlavně těžkého průmyslu. Bylo to vyjádřeno i graficky na diplomech pro vítěze celostátního kola MO, kde byl vyobrazen mladý matematik, jak na papíře něco počítá obklopen mnoha mohutně kouřícími komíny továren. Samozřejmě iniciátoři MO i učitelé na školách viděli v MO hlavně prostředek k zvýšení zájmu o matematiku. MO navázala jednak na soutěž v řešení matematických úloh, kterou vypisovala JČMF ve svém časopise (byla to ovšem soutěž trochu jiného druhu), jednak na matematické olympiády v jiných zemích, například v Polsku, Maďarsku nebo v Sovětském svazu.

Prvním předsedou ústředního výboru MO byl prof.Dr.František Vyčichlo, profesor Českého vysokého učení technického. I tím bylo zdůrazněno spojení MO s přípravou studentů na vysoké školy technického zaměření. Bohužel, ze zdravotních důvodů musel prof. Vyčichlo již po roce funkci opustit, jeho nástupcem se stal prof. Dr. Josef Novák, ředitel Matematického ústavu ČSAV. Z dalších předsedů ÚV MO je třeba připomenout docenta Jana Vyšína, kterého zná většina učitelek a učitelů matematiky jako propagátora modernizace výuky matematiky (v dobrém slova smyslu) a autora celé řady učebnic matematiky, metodických příruček a matematických článků v časopisech pro učitele matematiky, a dále slovenského

kolegu prof. Dr. Jozefa Moravčíka ze Žiliny, který vedl ÚV MO od 27. do 32. ročníku soutěže. Pak, až do své smrti v roce 1988, byl předsedou ÚV MO opět pracovník MÚ ČSAV Dr. František Zítek, který v práci pro MO uplatnil mimo jiné své bohaté znalosti cizích jazyků a velmi dbal také o správnou formulaci úloh z hlediska správné češtiny.

Chtěl bych zde zdůraznit, že pod slovy „ústřední výbor", která budí dnes často nepříjemné asociace, je třeba si představit ne příliš početnou skupinu vědeckých pracovníků a učitelů matematiky základních, středních a vysokých škol, kteří převážně nad rámec svých pracovních povinností matematickou olympiádu připravují. A zde bych rád vzpomenul Dr. Rudolfa Zelinku, zástupce ředitele MÚ ČSAV. Vykonával funkci tajemníka ústředního výboru MO od vzniku této soutěže až do své smrti v roce 1956. A právě na tajemníkovi ÚV MO spočívá převážně celý průběh každého ročníku MO, od přípravy konečné formulace textů úloh, přípravy letáků, komentářů úloh, organizace jednotlivých kol, až po přípravu soustředění úspěšných řešitelů úloh MO a organizaci korespondenčního semináře. To vše zařizoval Rudolf Zelinka většinou po skončení své práce v ústavu dlouho do noci, velmi se věnoval také organizaci 4. mezinárodní matematické olympiády, která se konala v roce 1962 v Československu. Hlavně se však věnoval výběru úloh, z nichž většinu sám vymýšlel. Takže evidentně platí věta „Rudolf Zelinka se zasloužil o matematickou olympiádu", kterou vyslovil doc. Vyšín. I ti, kteří ho pak vystřídali, zaslouží, aby byli připomenuti. Dovolte, abych zmínil aspoň doc. Dr. Vlastimila Macháčka a doc. Dr. Jiřího Mídu, oba byli pracovníky Pedagogické fakulty Karlovy univerzity v Praze, a Dr. Karla Horáka z Matematického ústavu AV, který vykonává funkci tajemníka ÚV MO již 18 let. Když se MO rozšířila i do nižších tříd a přidalo se programování, vzrostl počet soustředění, nestačil na práci jeden Rudolf Zelinka, ale musel se počet tajemníků zvýšit na dva, poslední dobou na tři. Jistě, MO nestojí pouze na práci předsedy a tajemníků, není však možné vyjmenovat zde všechny, kteří se na práci pro MO v různých letech podíleli. Zmíním se však aspoň o dvou pracovnících. Nedávno zesnulý doc.Dr.Jiří Sedláček byl členem ÚV MO od 16. ročníku této soutěže, pracoval však pro MO i předtím, připravoval úlohy, měl na starosti soustředění pro přípravu žáků na mezinárodní matematické olympiády, psal texty pro řešitele úloh MO. A jeho kolega z MÚ AV profesor Dr. Miroslav Fiedler pracoval v MO od jejího vzniku a jeho autorita, jeho přehled a zkušenosti nacházejí stále uplatnění při přípravě dalších ročníků MO. O výběr úloh MO se v posledních letech starají dvě úlohové komise, jedna pro kategorie Z — základní školy, druhá pro kategorie A, B, C — střední školy. Vznik obou komisí inicioval doc. Dr. Jaromír Šimša z brněnské pobočky Matematického ústavu AV, který také druhou komisi vede. Pracuje v ní řada mladých lidí, většinou bývalých reprezentantů naší země na mezinárodních matematických olympiádách. Přinášejí do soutěže pěkné, zajímavé a netradiční úlohy. Tady je třeba konstatovat, že obě komise pracují na „federální" úrovni, společně se slovenskými kolegyněmi a kolegy. Výsledkem jsou stejné úlohy a stejné termíny jednotlivých kol MO v České repub-

lice i na Slovensku. Takže MO zůstala vlastně až na výsledkové listiny celostátních kol československou záležitostí.

Měli bychom se zde zmínit o práci regionálních, krajských a okresních výborů MO, ocenit práci členů těchto výborů. Těžko bych však mohl zde všechny vyjmenovat. Za všechny uvedu aspoň tři kolegyně, profesorky gymnázií v Říčanech, Strakonicích a v Plzni paní Ludmilu Tréglovou, doc. Dr. Ladu Vaňatovou a paní Věru Rádlovou. Vedly dlouhá léta krajské výbory MO ve své oblasti, organizovaly celostátní kola i celostátní soustředění, opravovaly žákovská řešení úloh MO. A pokud vím, sledují průběh MO i nadále.

Není možné zde opomenout práci tisíců učitelek a učitelů, profesorek a profesorů matematiky na základních a středních školách, kteří informují své žáky a studenty o existenci MO, předkládají jim úlohy I.kola, pomáhají návodnými úlohami, doporučí jim vhodnou literaturu. Jsou to hlavně učitelky a učitelé, kteří věnují kontrole žákovských řešení úloh MO mnoho svého volného času. Jim patří dík všech pořadatelů soutěže, bez jejich práce by MO nemohla existovat. Většinou je jim odměnou pouze úspěch jejich žáků ve vyšším kole MO.

Pokud se týká kategorie P-programování, která vznikla při MO v roce 1986, spočívá práce na několika málo pracovnících, z nichž je třeba na prvním místě zmínit doc. Dr. Pavla Töpfra z MFF UK Praha, který je nejen autorem většiny úloh v kategorii P, ale také žákovská řešení hodnotí, sepisuje k úlohám komentáře a připravuje naše studenty na mezinárodní soutěže v informatice. Další takovou osobou byl doc. Dr. Václav Sedláček z Masarykovy Univerzity v Brně, který se však po odchodu z oblasti školství už nemůže MO věnovat. Byl však hlavní osobou při organizaci středoevropské soutěže v informatice v Brně v roce 1999.

Kategorie A (pro studenty posledních dvou ročníků střední školy) a kategorie P jsou každým rokem zakončeny celostátním kolem MO. V prvních letech se celostátní kolo konalo vždy v Praze na matematicko-fyzikální fakultě, od 10. ročníku MO se jednotlivé kraje v uspořádání celostátního kola střídaly, za organisaci zodpovídal z pověření MŠMTv odbor školství příslušného krajského národního výboru. To se v posledních letech změnilo a celostátní kola organizuje opravdu dobrovolně vždy některá střední škola, která je ochotna se tohoto úkolu ujmout. V tomto směru nám pomohlo především gymnázium v Jevíčku, kde se celostátní kola MO konala v letech 1993, 1994, 1995 a 1997, dále gymnázium M. Koperníka v Bílovci (1992, 1996 a 2000). I v letech 1998 a 1999 se závěr 47. a 48. ročníku MO odehrával na moravských gymnáziích, v Uherském Hradišti a v Novém Městě na Moravě. Učitelé uvedených gymnázií věnovali vždy akci hodně práce a je to jejich zásluha, že vždy proběhla celostátní kola důstojně, bez problémů. Upřímně jim děkujeme a přejeme učitelským kolektivům uvedených škol a jejich ředitelům Dr. Dagu Hrubému, Mgr. Václavu Vaňkovi, doc. Dr. Z. Botkovi a Dr. Karlu Kotenovi mnoho úspěchů a elánu v jejich pedagogické práci, aby byli jejich žáci úspěšní nejen v školních soutěžích, ale i v dalším studiu.

Letos, při jubilejním 50. ročníku MO, se celostátní kola konají v Praze, a to zásluhou Střední průmyslové školy sdělovací techniky v Praze 1, Panská ul. Děkuji ředitelce školy paní Ing. M. Plockové a všem dalším pracovníkům této školy za práci, kterou pro zdárný průběh závěru 50. ročníku MO vykonali.

Již jsme se několikrát zmínili o mezinárodních matematických olympiádách. Naše republika, a dále pouze Rumunsko, se zúčastnily všech 41 dosud konaných MMO. Jako vedoucí a zástupce vedoucího našeho družstva na MMO se po mnoho let střídali Dr. Zítek a prof. Dr. Moravčík, po roce 1989 převzali štafetu mladší kolegové, například Dr. Horák a doc. Dr. Šimša. Na 33. MMO v Moskvě v roce 1992 soutěžilo ještě společné československé družstvo, od 34. MMO v roce 1993 v Istanbulu již samostatná družstva České republiky a Slovenské republiky. Počet soutěžících družstev se v těchto letech podstatně zvětšil, mimo jiné i rozpadem Sovětského svazu a Jugoslávie. Konkurence je tedy větší, soutěží žáci z 80 i více zemí. V neoficiálním pořadí družstev se umístilo naše v roce 1998 na pěkném 15. místě, v roce 1999 na 49. místě a loni na 41. místě. Věříme, že se nám to podaří opět zlepšit. Také v programování (informatice) se konají mezinárodní olympiády (MOI), poslední se konala v Pekingu. Tři ze čtyř členů českého družstva získali na ní bronzové medaile. Přejeme všem příštím reprezentantům České republiky na MMO v USA a na MOI ve Finsku umístění v první polovině startovního pole, tedy mezi medailisty.

S matematickou olympiádou je spojena řada akcí, které postupně vznikly za účelem podpory řešitelům úloh MO a tím k zvýšení znalostí žáků a studentů v matematice. Byly a jsou to různé semináře celostátní i regionální, z nichž některé probíhají korespondenční formou, dále soustředění úspěšných řešitelů úloh MO, jež jsou zároveň jejich přípravou na další ročníky MO. Konají se i semináře pro učitele, připravujeme pro ně komentáře k úlohám I. kola s návodnými úlohami apod. Patří sem i ediční činnost ÚV MO v minulých letech. Spočívala především ve vydávání tzv. ročenek, jež obsahovaly všechny úlohy včetně jejich řešení z příslušného ročníku MO. Z ekonomických důvodů tomu už tak není. Publikace, kterou držíte v ruce, je stručným shrnutím posledních deseti ročníků MO a má aspoň částečně nahradit těch 10 chybějících ročenek. Podobná situace je s edicí Škola mladých matematiků (ŠMM). Ta vznikla v roce 1961 a do roku 1989 vyšlo 61 svazků, některé ve více vydáních. Uvedu aspoň názvy některých svazků: Mnohostěny, Co asi nevíte o vzdálenosti, Nerovnosti a odhady, Kombinatorika, Množiny bodů v prostoru, Funkcionální rovnice, Matematická indukce. Svazky ŠMM byla v podstatě pokryta tématika úloh MO a nezbývá než doufat, že brožurky ŠMM i ročenky MO si mohou dnešní soutěžící vypůjčit v školních knihovnách.

Padesát let — co přineslo těch padesát let matematické olympiády? Dovolím si tvrdit, že především lepší, rozsáhlejší matematické znalosti účastníků MO. A čteme-li si v ročenkách MO jména vítězů celostátního kola, vidíme, že mnozí z nich se stali matematiky, i když měli třeba původně jiné cíle. Stali se vědeckými pracovníky Akademie věd nebo vysokoškolskými učiteli matematiky u nás

nebo i v cizině. Hlavní přínos matematické olympiády spočívá právě ve vyhledání a v další podpoře širokého spektra matematických talentů, a to i z těch tříd a škol, které nejsou zaměřeny na matematiku, z měst, které nemají možnost využít zázemí některé katedry matematiky vysoké školy. Takže MO určitě přispívá k zvýšení matematické kultury žáků, a částečně snad i učitelů na všech školách, kde se matematické olympiádě daří.

Doc. Dr. *Leo Boček*,
předseda ÚV MO

Vybrané úlohy MO ročníků 41–50

41 – A – I – 3

Jestliže všechny zlomky se jmenovatelem nejvýše rovným n, jež leží v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a jsou zapsány v základním tvaru, seřadíme podle velikosti, pak pro každé dva sousední zlomky $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ bude platit $cb - ad = 1$ (čísla 0 a 1 chápeme jako zlomky $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$). Dokažte.

Řešení. Platí-li $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ $(b, d > 0)$, platí i $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Je-li navíc $bc - ad = 1$, je také $b(a + c) - a(b + d) = 1$ a $c(b + d) - d(a + c) = 1$. Vyjdeme tedy od zlomků $\frac{0}{1}$ a $\frac{1}{1}$, to bude první krok. Při druhém kroku přidáme mezi tyto zlomky zlomek $\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$, při třetím kroku přidáme mezi tyto zlomky $\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{3}$, dostaneme tak konečnou posloupnost $\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$. Tak postupujeme dále, při n-tém kroku přidáme mezi každé dva zlomky $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ zlomek $\frac{a+c}{b+d}$; pokud ovšem bude $b + d \leqq$ $\leqq n$. Dostaneme konečnou posloupnost zlomků, jejichž jmenovatelé jsou vesměs přirozená čísla nejvýše rovná n, a budou-li stát v této posloupnosti zlomky $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ vedle sebe, platí pro ně $bc - ad = 1$. Stačí už jenom ukázat, že jsme tím dostali všechny zlomky z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ se jmenovatelem menším než $n + 1$.

Předpokládejme tedy, že zlomek $\frac{p}{q}$ $(q \leqq n)$ v naší posloupnosti není, pak musí ležet mezi dvěma jejími sousedními členy $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, tj. $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$, odkud plyne $bp - aq \geqq 1$, $cq - dp \geqq 1$. Vynásobíme-li první nerovnost d, druhou b a sečteme-li je, dostaneme s využitím vztahu $bc - ad = 1$ nerovnost $q \geqq b + d$. To ale znamená, že $b + d \leqq n$. Pak by ale zlomky $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ nemohly být sousedními členy uvažované posloupnosti, protože by mezi nimi ležel ještě zlomek $\frac{a+c}{b+d}$. Tím je dokázáno, že po n-tém kroku obsahuje posloupnost všechny zlomky $\frac{p}{q}$, pro které je $0 \leqq p \leqq q \leqq n$.

41 – A – III – 5

Uvažujme funkci f definovanou v intervalu $(0, 1)$ jako

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ iracionální}, \\ \dfrac{p+1}{q}, & x = \dfrac{p}{q}, \end{cases}$$

kde $0 < p < q$ jsou nesoudělná celá čísla. Najděte maximum funkce f na intervalu $(\frac{7}{8}, \frac{8}{9})$.

Řešení. V intervalu $(\frac{7}{8}, \frac{8}{9})$ leží číslo $\frac{15}{17}$, pro které je $f(\frac{15}{17}) = \frac{16}{17} > \frac{8}{9}$. Podle řešení úlohy A–I–3 neleží v intervalu $(\frac{7}{8}, \frac{15}{17})$ žádné racionální číslo $\frac{p}{q}$ se jmenovatelem $q < 25$ a podobně interval $(\frac{15}{17}, \frac{8}{9})$ neobsahuje žádné racionální číslo $\frac{p}{q}$ se jmenovatelem $q < 26$. Pro každé racionální číslo $\frac{p}{q}$ z intervalu $(\frac{7}{8}, \frac{8}{9})$, $\frac{p}{q} \neq \frac{15}{17}$, tedy platí $q \geqq 26$, a proto je

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} + \frac{1}{q} < \frac{8}{9} + \frac{1}{26} < \frac{16}{17}.$$

Protože pro každé iracionální číslo $x \in (\frac{7}{8}, \frac{8}{9})$ je $f(x) = x < \frac{8}{9}$, je hledané maximum $\frac{16}{17}$.

41 – C – I – 5

Jsou-li a, b, c velikosti stran trojúhelníku a t_a, t_b, t_c velikosti příslušných těžnic, pak

$$\frac{3}{4} < \frac{t_a + t_b + t_c}{a + b + c} < 1.$$

Dokažte.

Řešení. Označme K, L, M středy stran po řadě protilehlých vrcholům A, B, C daného trojúhelníku a T jeho těžiště (obr. 1). Podle trojúhelníkové nerovnosti v trojúhelníku BCT platí

$$|BC| < |BT| + |CT|, \quad \text{tj.} \quad a < \frac{2}{3}t_b + \frac{2}{3}t_c.$$

Podobně z trojúhelníků ABT a CAT usoudíme, že

$$c < \frac{2}{3}t_a + \frac{2}{3}t_b \quad \text{a} \quad b < \frac{2}{3}t_c + \frac{2}{3}t_a.$$

Sečtením těchto tří nerovností dostaneme

$$a + b + c < \frac{4}{3} \cdot (t_a + t_b + t_c),$$

což je vlastně levá dokazovaná nerovnost. Dále si všimněme, že podle trojúhelníkové nerovnosti v trojúhelníku KMA platí

$$|AK| < |KM| + |AM|, \quad \text{tj.} \quad t_a < \frac{b}{2} + \frac{c}{2},$$

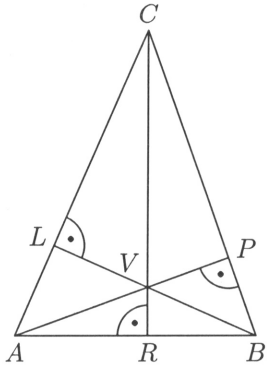
podobně z trojúhelníků LKB a MLC plyne

$$t_b < \frac{c}{2} + \frac{a}{2} \quad \text{a} \quad t_c < \frac{a}{2} + \frac{b}{2}.$$

Sečtením těchto tří nerovností dostaneme

$$t_a + t_b + t_c < 2\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right) = a + b + c,$$

a to je vlastně pravá dokazovaná nerovnost.



Obr. 1

41 – C – I – 6

Najděte nejmenší přirozené číslo n tak, aby existovalo právě 45 uspořádaných dvojic (u, v) přirozených čísel, jejichž nejmenší násobek je n.

Řešení. Je-li $p, q, r, \ldots$ posloupnost všech prvočíselných dělitelů hledaného čísla n, pak rozklad n na prvočinitele má tvar $n = p^a q^b r^c \ldots$, kde exponenty a, b, c, ... jsou celá kladná čísla. Libovolní dva dělitelé čísla n pak mají tvar

$$n = p^d q^e r^f \ldots \quad \text{a} \quad n = p^g q^h r^i \ldots,$$

kde d, e, f, ..., g, h, i, ... jsou celá *nezáporná* čísla. Navíc je číslo n je nejmenší společný násobek těchto čísel u a v, právě když platí soustava rovností

$$a = \max(d, g),\ b = \max(e, h),\ c = \max(f, i),\ \ldots.$$

Výběry možných dvojic (d, g), (e, h), (f, i), ... jsou tedy navzájem nezávislé, např. pro dvojici (d, g) máme možnosti

$$(0, a),\ (1, a),\ \ldots,\ (a, a),\ (a, a-1),\ \ldots,\ (a, 1),\ (a, 0),$$

tj. právě $(2a + 1)$ možností. Existuje tedy právě $(2a + 1)(2b + 1)(2c + 1)\ldots$ uspořádaných dvojic (u, v) zkoumané vlastnosti. (Všimněte si, že určený počet závisí

na exponentech a, b, c, ..., nikoliv na hodnotách prvočísel p, q, r, ... v rozkladu čísla n.) Požadovaná rovnost

$$45 = (2a+1)(2b+1)(2c+1)\dots$$

představuje rozklad čísla 45 na několik celých činitelů větších než 1, tedy jeden ze součinů 45, $15 \cdot 3$, $9 \cdot 5$ nebo $5 \cdot 3 \cdot 3$ (na pořadí činitelů nebereme ohled). To znamená, že číslo n má jeden z tvarů

$$p^{22}, \quad p^7 q^1, \quad p^4 q^2, \quad p^2 q^1 r^1.$$

Nejmenší představitelé těchto čtyř typů jsou čísla 2^{22}, $2^7 \cdot 3$, $2^4 \cdot 3^2$ a $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ (za p, q, r dosazujeme nejmenší prvočísla, přitom vždy k menšímu prvočíslu přiřazujeme větší exponent). Nejmenší je poslední z těchto čísel, tj. číslo 60.

42 – B – I – 4

Honza si zapomněl poznačit kvadratickou rovnici, kterou měl doma řešit. Pamatoval si však, že koeficient u kvadratického členu byl 3 a u lineárního členu 25. U absolutního členu se spletl pouze ve znaménku. Obě rovnice (ta, kterou měl řešit, i ta, kterou řešil) měly celočíselný kořen. Zjistěte, které to byly rovnice.

Řešení. Rovnice mají tvar

$$3x^2 + 25x \pm c = 0; \quad c > 0.$$

Jejich diskriminanty jsou

$$D_{1,2} = 625 \mp 12c \tag{2}$$

a kořeny

$$x_{1,2} = \frac{-25 \pm \sqrt{D_i}}{6}, \quad i = 1, 2.$$

Odtud $\pm\sqrt{D_i} = 25 + 6x_{1,2}$. Je-li některý z kořenů celé číslo, pak musí být také $\pm\sqrt{D_i}$ celé a dále některý z výrazů $-25 \pm \sqrt{D_i}$ je dělitelný šesti. Číslo $\sqrt{D_1} = \sqrt{625 - 12c} < 25$ budeme tedy hledat ve tvaru $\sqrt{D_1} = 6k \pm 1$, $k \in \mathbb{N}_0$. Ze vztahu (2) vyplývá, že $D_1 + D_2 = 1\,250$. $\sqrt{D_2} = \sqrt{1\,250 - D_1}$ musí být celé. Postupně volíme za $\sqrt{D_1}$ čísla 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 a určujeme $\sqrt{D_2}$. Zjistíme, že vyhovuje pouze $\sqrt{D_1} = 5$ nebo $\sqrt{D_1} = 17$.

V prvém případě je $c = \frac{625 - D_1}{12} = 50$ a jedná se o rovnice $3x^2 + 25x \pm 50 = 0$, ve druhém případě to budou rovnice $3x^2 + 25x \pm 28 = 0$. Vyřešením rovnic se přesvědčíme, že vyhovují podmínkám úlohy. Existují tedy dvě různé dvojice rovnic, které jsou řešením dané úlohy.

42 – B – II – 1

Zjistěte, pro která reálná čísla a má soustava rovnic

$$\begin{aligned} x + y &= z + 2, \\ x^2 + y^2 &= z^2 + 4, \\ x^3 + y^3 &= z^3 + a \end{aligned}$$

řešení v oboru reálných čísel, a vyřešte ji.

Řešení. Umocníme-li první rovnici na druhou a od výsledku odečteme rovnici druhou, dostaneme $2xy = 4z$. Z dvojice rovnic $xy = 2z$ a $x + y = z + 2$ vyplývá, že $\{x, y\} = \{2, z\}$. Proto $x^3 + y^3 = z^3 + 8$, takže $a = 8$ je jediná hodnota, kdy má soustava řešení. Všechna řešení pro $a = 8$ jsou trojice (x, y, z) tvaru $(2, p, p)$ nebo $(p, 2, p)$, kde p je libovolný parametr.

42 – B – S – 2

Pro která reálná čísla p má soustava rovnic

$$\begin{aligned} x^3 - x + 3p &= 6, \\ x^3 + x + 4p &= 10 \end{aligned}$$

aspoň jedno řešení v oboru reálných čísel?

Řešení. Je-li u společný kořen obou rovnic, pak

$$0 = (u^3 - u + 3p - 6) - (u^3 + u + 4p - 10) = -2u - p + 4,$$

odkud $u = -\frac{p}{2} + 2$. Dosazením zpět do libovolné z obou rovnic dostaneme podmínku na číslo p, která je po úpravě tvaru kubické rovnice $p(p^2 - 12p + 20) = 0$ s kořeny $p_1 = 0$, $p_2 = 2$ a $p_3 = 10$. Snadno se přesvědčíme, že daná dvojice rovnic pak má skutečně společný kořen u rovný 2, 1 resp. -3.

42 – Z9 – II – 1

Jestliže pro trojciferná čísla a, b platí $a + b = 1\,000$, potom se čísla a^2, b^2 shodují v posledním trojčíslí. Dokažte.

Řešení. Protože $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 1\,000(a - b)$, je v uvažovaném případě rozdíl $a^2 - b^2$ dělitelný číslem 1 000, a proto se čísla a^2, b^2 shodují v posledních třech číslicích.

43 – A – I – 4

Pro která celá $n > 2$ existují racionální čísla p a q taková, že $\sqrt[3]{n} = p + q\sqrt[3]{2}$?

Řešení. Umocněním na třetí dostaneme ekvivalentní rovnost

$$n = (p^3 + 2q^3) + 3p^2q\sqrt[3]{2} + 3pq^2\sqrt[3]{4}. \tag{1}$$

Zabývejme se nejdříve případem $n = 4$. Je-li $\sqrt[3]{4} = p + q\sqrt[3]{2}$, pak z (1) plyne

$$4 = (p^3 + 2q^3) + 3p^2q\sqrt[3]{2} + 3pq^2\big(p + q\sqrt[3]{2}\big), \tag{2}$$

neboli $4 - p^3 - 2q^3 - 3p^2q^2 = \sqrt[3]{2}(3p^2q + 3pq^3)$. Protože $\sqrt[3]{2}$ je iracionální číslo, je poslední rovnost možná, jen když $4 - p^3 - 2q^3 - 3p^2q^2 = 0$ a $3pq(p + q^2) = 0$. Z druhé rovnice plyne $p = 0$, $q = 0$ nebo $p = -q^2$, dosazením do první pak po řadě $q^3 = 2$, $p^3 = 4$, resp. $q^6 + q^3 - 2 = 0$. Protože čísla p a q jsou racionální, je z poslední trojice splnitelná jen třetí podmínka, která znamená, že $q^3 = -2$, nebo $q^3 = 1$. Dostáváme tak jedinou dvojici $(p, q) = (-1, 1)$, pro kterou sice platí (2), ne však $\sqrt[3]{4} = p + q\sqrt[3]{2}$. Proto poslední rovnost nesplňují žádná racionální p a q.

V obecném případě ukážeme, že platí-li (1) pro některá racionální n, p a q, pak koeficient $3pq^2$ u členu $\sqrt[3]{4}$ musí být roven nule. Jinak by totiž šlo z (1) vyjádřit

$$\sqrt[3]{4} = \frac{n - p^3 - 2q^3}{3pq^2} - \frac{p}{q} \cdot \sqrt[3]{2},$$

což by byl spor s tím, že číslo 4 není řešením. Proto platí $3pq^2 = 0$, tj. $p = 0$ nebo $q = 0$. Pak ovšem $n = p^3$ nebo $n = 2q^3$. Je-li navíc číslo n celé, musí být v posledních dvou rovnostech i čísla p, q celá. Odpověď: $n = k^3$ nebo $n = 2k^3$, kde $k > 1$ je celé číslo.

43 – A – II – 4

Rozhodněte, zda existuje kubická rovnice

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

s celočíselnými koeficienty p, q a r, která má v oboru reálných čísel jediný kořen $x_0 = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. *(J. Šimša)*

Řešení. Postupně spočteme

$$x_0^2 = 5 + 4\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}, \quad x_0^3 = 19 + 15\sqrt[3]{2} + 12\sqrt[3]{4}.$$

Dosazením do rovnice (1) tak po úpravě dostaneme podmínku

$$(19 + 5p + q + r) + (15 + 4p + q)\sqrt[3]{2} + (12 + 3p + q)\sqrt[3]{4} = 0,$$

která je splněna, pokud jsou rovna nule všechna tři čísla $19+5p+q+r$, $15+4p+q$ a $12+3p+q$. (Podle úlohy A–I–4 domácího kola je to nejen postačující, ale i nutná podmínka.) Snadným výpočtem zjistíme jedinou trojici $(p,q,r) = (-3,-3,-1)$. Zbývá dokázat, že rovnice

$$x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$$

má jediný reálný kořen. To lze provést více způsoby (asi nepříliš schůdné je dělení kořenovým dvojčlenem $x - x_0$), např. takto: protože $3x^2 + 3x + 1 > 0$ pro každé reálné x, je každý kořen rovnice $x^3 = 3x^2 + 3x + 1 > 0$ kladný; ze zápisu $1 = \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ plyne, že tento kořen je nejvýše jeden (pravá strana je totiž pro kladná x klesající).

Jiné řešení. Platí

$$x_0 = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} = \frac{1^3 - \left(\sqrt[3]{2}\right)^3}{1 - \sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1},$$

takže $\frac{1}{x_0} = \sqrt[3]{2} - 1$. Proto je x_0 řešením rovnice

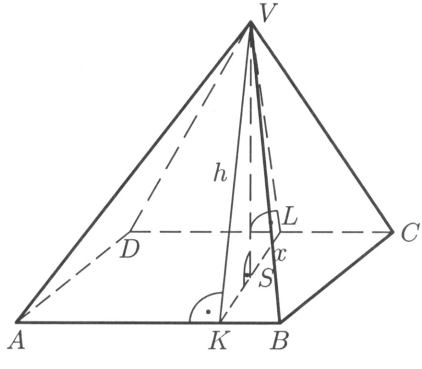
$$\left(\frac{1}{x} + 1\right)^3 = 2,$$

přičemž je jasné, že tato rovnice má v oboru reálných čísel **jediný** kořen. Pro $x \neq 0$ je ovšem tato rovnice ekvivalentní s $(1+x)^3 = 2x^3$, což je po roznásobení hledaná rovnice.

43 – B – I – 6

Určete největší možný objem čtyřbokého jehlanu $ABCDV$, jehož základnou je kosočtverec $ABCD$ se stranou délky a a jehož stěnové výšky z vrcholu V na hrany AB, CD mají délku h.

Řešení. Označme K, L paty kolmic z V na hrany AB, CD. Přímka AB je kolmá na rovinu KLV, protože je kolmá k přímkám KV, LV (obr. 2). Odtud $KL \perp AB$.



Obr. 2

Výška kosočtverce $ABCD$ je $|KL| = 2x$. Pata výšky jehlanu leží v rovině KLC a je zřejmě totožná se středem S úsečky KL. Z pravoúhlého trojúhelníku KSV je tato výška $v = \sqrt{h^2 - x^2}$. Objem jehlanu je tedy

$$V = \frac{2}{3}ax\sqrt{h^2 - x^2} = \frac{2}{3}a\sqrt{x^2h^2 - x^4}.$$

Objem bude maximální, právě když bude maximální výraz pod odmocninou

$$U = x^2h^2 - x^4 = \frac{1}{4}h^4 - \left(x^2 - \frac{1}{2}h^2\right)^2.$$

Maximum hledáme na intervalu $0 < x < \frac{1}{2}a$, protože výška kosočtverce $2x$ je menší než velikost a jeho strany. Kvadratická funkce U proměnné $t = x^2$ nabývá absolutního maxima pro $x = \dfrac{h}{\sqrt{2}}$, proto závisí další diskuse na tom, zda bod $\dfrac{h}{\sqrt{2}}$ padne do intervalu $(0, \frac{1}{2}a)$ či nikoliv. Pro $h\sqrt{2} < a$ je tedy maximální objem jehlanu $V_{\max} = \frac{1}{3}ah^2$.

Pro $a \leqq h\sqrt{2}$ je kvadratická funkce U v intervalu $(0, \frac{1}{2}h^2)$ rostoucí, a proto objem jehlanu v tomto případě nemá maximum, ale neomezeně se blíží hodnotě $V_{\max} = a^2\dfrac{\sqrt{4h^2 - a^2}}{6}$ (pro $x = \frac{1}{2}a$ dostaneme čtvercovou podstavu — zde předpokládáme, že *podle běžně užívané definice* čtverec *není* kosočtverec).

43 – B – II – 4

Každý z bodů krychle o hraně délky a obarvíme právě jednou ze tří barev. Dokažte, že pak mezi těmito body existují dva téže barvy, jejichž vzdálenost je větší než $\frac{7}{5}a$.

(*P. Leischner*)

Řešení. Označme vrcholy dané krychle obvyklým způsobem A, B, C, D, E, F, G, H. Je-li vrchol A obarven jednou ze tří barev a některý z vrcholů C, F, H má tutéž barvu, jsme hotovi, neboť $|AC| = |AF| = |AH| = a\sqrt{2} > 1{,}41a > \frac{7}{5}a$. V opačném případě musí být uvedené tři vrcholy rovnostranného trojúhelníku CFH obarveny nejvýše dvěma různými barvami, takže aspoň dva z bodů C, F, H mají tutéž barvu. Jejich vzdálenost je větší než $\frac{7}{5}a$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

43 – Z5 – I – 4

V jednom městě mají tři kina. V kině Slunce prodávají vstupenky za 7 korun. V kině Mars za 8 korun, ale každý desátý návštěvník má vstup zdarma. V kině Venuše prodávají vstupenky za 9 korun, také každý desátý návštěvník má vstup zdarma, ale navíc každý stý návštěvník vyhrává 100 korun. V kině Mars vybrali na posledním představení 2 776 korun. Kolik by vybrali v kině Venuše a Slunce,

kdyby je navštívil stejný počet diváků? (Pod vybranými penězi rozumíme ty, které zůstanou po zakoupení lístků v pokladně. Výhry se platí z vybraných peněz, tedy ve Venuši vyberou o to méně.) (*M. Koman*)

Řešení. Od každé desítky diváků vyberou v kinu Mars $9 \cdot 8 = 72$ korun. Kino Mars navštívilo $2\,776 : 72 = 38$ (zbytek 40) celých desítek diváků. Zbývajících 40 korun vybrali od 5 diváků. Do kina Mars přišlo 385 diváků.

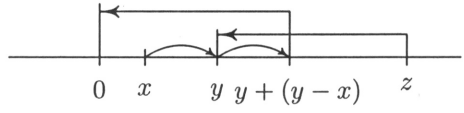
Od stejného počtu diváků by v kinu Slunce vybrali $7 \cdot 385 = 2\,695$ korun.

V kinu Venuše od 38 desítek diváků vyberou $38 \cdot (9 \cdot 9) = 3\,078$ korun a od posledních pěti diváků $5 \cdot 9 = 45$ korun. Na výhrách přitom vyplatili 300 korun. V pokladně kina Venuše zůstalo $3\,078 + 45 - 300 = 2\,833$ korun.

43 – Z8 – I – 3

Na číselné ose jsou znázorněna tři čísla x, y, z. Narýsuj na této číselné ose obraz nuly, jestliže víš, že $3y = x + z$. Najdi řešení pro všechny polohy čísel x, y, z, pro které $x < y < z$. (*P. Černek*)

Řešení. Danou rovnost $3y = x + z$ můžeme upravit takto: $y + (y - x) + (y - z) = 0$. Proto dostaneme obraz počátku tak, že k obrazu bodu y „přičteme“ $y - x$ a $y - z$. Obě tyto hodnoty vyčteme z číselné osy (obr. 3).



Obr. 3

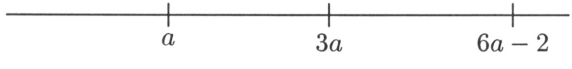
Jiné řešení. Rovnost $3y = x + z$ dělíme číslem 2. Dostaneme

$$1{,}5 \cdot y = \frac{x + z}{2}.$$

Obrazem aritmetického průměru x a z je střed úsečky určené body x a z, což je zároveň obraz bodu $1{,}5 \cdot y$. Známe-li obrazy čísel y a $1{,}5 \cdot y$ snadno najdeme počátek.

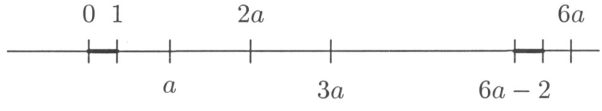
43 – Z8 – II – 2

Na číselné ose jsou vyznačeny obrazy čísel a, $3a$, $6a - 2$. Sestrojte obrazy čísel 0 a 1.



Řešení. Nejprve najdeme obraz čísla $2a$ jako střed úsečky s krajními body a a $3a$ a pak obraz 0 (a je střed úsečky určené obrazy čísel 0 a $2a$, obr. 4) a čísla $6a$ ($3a$ je střed dvojice bodů 0 a $6a$). Orientovaná úsečka s počátečním bodem $6a-2$ a koncovým bodem $6a$ znázorňuje číslo 2, takže její polovina odpovídá jednotkové úsečce. Jejím posunutím do bodu 0 dostaneme obraz čísla 1.

Při konstrukci je třeba rozlišit případy, kdy obraz $6a-2$ leží vlevo nebo vpravo od obrazu $6a$. Pokud by tyto obrazy splynuly, nemá úloha řešení.



Obr. 4

44 – A – I – 1

Pro daná kladná čísla $x \neq y$ uvažujme průměry

$$a = \frac{x+y}{2},\ g = \sqrt{xy},\ h = \frac{2xy}{x+y},\ k = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

(Jde o aritmetický, geometrický, harmonický a kvadratický průměr čísel x a y.) Ze všech rozdělení čtveřice a, g, h, k na dvě dvojice r, s a t, u vyberte to rozdělení, při kterém má výraz $V = r + s - t - u$ nejmenší kladnou hodnotu. (*J. Šimša*)

Řešení. Uvedené kladné průměry splňují známé nerovnosti $h < g < a < k$. Ty plynou např. z vyjádření

$$k^2 - a^2 = \frac{(x-y)^2}{4},\quad a^2 - g^2 = \frac{(x-y)^2}{4},\quad g^2 - h^2 = \frac{xy(x-y)^2}{(x+y)^2}$$

a z podmínky $x \neq y$. (Je to poněkud vyumělkované zdůvodnění, řešitele vyzveme dokazovat každou ze tří nerovností metodou ekvivalentních úprav.)

Označme $V_1 = k + a - g - h$, $V_2 = k + g - a - h$ a $V_3 = k + h - a - g$. Ostatní tři hodnoty výrazu V jsou $-V_1$, $-V_2$ a $-V_3$. Protože

$$V_1 - V_2 = 2(a-g) > 0 \quad \text{a} \quad V_2 - V_3 = 2(g-h) > 0,$$

platí $V_1 > V_2 > V_3$. Dokážeme-li, že $V_3 > 0$, bude V_3 hledaná nejmenší kladná hodnota výrazu V. Nerovnost $V_3 > 0$ je ekvivalentní s nerovností $k - g > a - h$, jejíž obě strany jsou kladné. Můžeme ji proto ekvivalentně umocnit na druhou a pak přepsat do tvaru

$$2kg < k^2 + g^2 - a^2 + 2ah - h^2.$$

Před dalším umocněním vyjádříme pravou stranu této nerovnosti pomocí čísel x a y (a tak zjistíme, že je skutečně kladná). Vyjde nám

$$k^2 + g^2 - a^2 = \frac{(x+y)^2}{4} \quad \text{a} \quad 2ah - h^2 = \frac{2xy(x^2+y^2)}{(x+y)^2}.$$

Proto můžeme poslední nerovnost ekvivalentně umocnit na druhou:

$$4k^2g^2 = 2xy(x^2+y^2) < \frac{(x+y)^4}{16} + xy(x^2+y^2) + \frac{4x^2y^2(x^2+y^2)^2}{(x+y)^4}.$$

Tuto nerovnost lze ekvivalentně upravit na tvar

$$0 < \left\{ \frac{(x+y)^2}{4} - \frac{2xy(x^2+y^2)}{(x+y)^2} \right\}^2.$$

Výraz v složené závorce je kladný, neboť je roven

$$\frac{(x+y)^4 - 8xy(x^2+y^2)}{4(x+y)^2} = \frac{(x-y)^4}{4(x+y)^2}$$

a $x \neq y$. Tím je důkaz hotov. Odpověď: Hledané rozdělení je $\{r,s\} = \{k,h\}$ a $\{t,u\} = \{a,g\}$, neboť nejmenší kladná hodnota výrazu V je rovna $k+h-a-g$.

44 – A – S – 3

Určete kladná reálná čísla $x \neq y$ taková, že jejich průměry

$$a = \frac{x+y}{2}, \quad g = \sqrt{xy}, \quad h = \frac{2xy}{x+y}, \quad k = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

leží všechny v množině $\mathsf{M} = \left\{ \frac{45}{2}, 18\sqrt{2}, 30, 25\sqrt{2}, 40, 10\sqrt{23} \right\}$. (*J. Šimša*)

Řešení. Víme, že $h < g < a < k$. Protože prvky M jsou vypsány v pořadí od nejmenšího po největší, musí nastat některý z těchto případů:

(i) $g = 18\sqrt{2}$, (ii) $a = 40$, (iii) $g = 30$ a $a = 25\sqrt{2}$.

V každém z nich je už další postup snadný:

(i) Z $g = 18\sqrt{2}$ plyne $h = \frac{45}{2}$. Protože $xy = g^2 = 2 \cdot 18^2$, dostáváme

$$\frac{x+y}{2} = \frac{g^2}{h} = \frac{16 \cdot 9^2}{45} = \frac{144}{5}.$$

Poslední číslo nepatří do M, takže případ (i) nemůže nastat.

(ii) Z $a = 40$ plyne $k = 10\sqrt{23}$, takže

$$x + y = 2a = 80$$

a

$$x^2 + y^2 = 2k^2 = 4\,600.$$

Odtud $2xy = 80^2 - 4\,600 = 1\,800$, čili $xy = 900$ a $g = \sqrt{900} = 30 \in \mathsf{M}$. Konečně $h = \frac{2 \cdot 900}{80} = \frac{45}{2} \in \mathsf{M}$. Čísla x a y jsou kořeny rovnice $t^2 - 80t + 900 = 0$, tedy $\{x, y\} = \{40 \pm 10\sqrt{7}\}$.

(iii) Platí

$$xy = g^2 = 900$$

a

$$x + y = 2a = 50\sqrt{2},$$

odkud $h = \frac{2 \cdot 900}{50\sqrt{2}} = 18\sqrt{2} \in \mathsf{M}$. Dále

$$x^2 + y^2 = \left(50\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot 900 = 3\,200,$$

takže $k = \sqrt{1\,600} = 40 \in \mathsf{M}$. Čísla x a y jsou kořeny rovnice $t^2 - 50\sqrt{2}\,t + 900 = 0$, tedy $\{x, y\} = \{25\sqrt{2} \pm 5\sqrt{14}\}$.

Odpověď: $\{x, y\} = \{40 \pm 10\sqrt{7}\}$, $\{x, y\} = \{25\sqrt{2} \pm 5\sqrt{14}\}$.

44 – A – III – 2

Určete kladná reálná čísla x a y, víte-li, že průměry

$$a = \frac{x+y}{2}, \quad g = \sqrt{xy}, \quad h = \frac{2xy}{x+y}, \quad k = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

jsou přirozená čísla, jejichž součet se rovná 66. (*J. Šimša*)

Řešení. Protože číslo 66 není dělitelné čtyřmi, nemůže platit $a = g = h = k$, takže jak dobře víme, platí $h < g < a < k$. Označme c největší společný dělitel čísel a, g. Pak $a = ca_1$ a $g = cg_1$, přičemž $g_1 < a_1$ jsou nesoudělná přirozená čísla. Protože $h = \frac{g^2}{a} = \frac{cg_1^2}{a_1}$, je číslo c dělitelné číslem a_1, tedy $c = da_1$ pro vhodné přirozené číslo d. Dostáváme tak vyjádření průměrů pomocí čísel d, a_1, g_1:

$$h = dg_1^2, \; g = da_1g_1, \; a = da_1^2, \; k = \sqrt{2a^2 - g^2} = da_1\sqrt{2a_1^2 - g_1^2}.$$

Protože druhá odmocnina z přirozeného čísla je buď přirozené, nebo iracionální číslo, musí být číslo $\sqrt{2a_1^2 - g_1^2}$ přirozené (a to větší než a_1, neboť $g_1 < a_1$). Proto je levá strana rovnosti

$$dg_1^2 + da_1g_1 + da_1^2 + da_1\sqrt{2a_1^2 - g_1^2} = 66 \qquad (*)$$

větší než $2a_1^2$ (vzhledem k nerovnosti $d \geqq 1$ stačí uvažovat jen třetí a čtvrtý sčítanec). Odtud plyne $2a_1^2 < 66$, neboli $a_1 \leqq 5$. Snadno se zjistí, která z deseti odmocnin

$$\sqrt{2a_1^2 - g_1^2}, \qquad \text{kde} \quad 1 \leqq g_1 < a_1 \leqq 5,$$

je rovna přirozenému číslu: taková je jedině odmocnina $\sqrt{2 \cdot 5^2 - 1^2}$ pro $a_1 = 5$ a $g_1 = 1$. Dosazením do $(*)$ zjistíme, že $d = 1$. Průměry $(h, g, a, k) = (1, 5, 25, 35)$ má dvojice kořenů rovnice $t^2 - 50t + 25 = 0$, tedy dvojice čísel $\{x, y\} = \{25 + 10\sqrt{6}, 25 - 10\sqrt{6}\}$.

44 – B – I – 3

Pro daná kladná čísla $x \neq y$ uvažujme průměry

$$a = \frac{x+y}{2}, \; g = \sqrt{xy}, \; h = \frac{2xy}{x+y}, \; k = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

(Jde o aritmetický, geometrický, harmonický a kvadratický průměr čísel x a y.) Ze všech rozdělení čtveřice a, g, h, k na dvě dvojice r, s a t, u vyberte to rozdělení, pro které má výraz $V = rs - tu$ nejmenší kladnou hodnotu. (*J. Šimša*)

Řešení. Jedná se o známé průměry, které (při $x \neq y$) splňují nerovnosti

$$0 < h < g < a < k \tag{2}$$

(viz např. svazek ŠMM č. 39). Výraz V nabývá pouze hodnot

$$V_1 = ka - hg, \; V_2 = kg - ah, \; V_3 = ag - kh \;\text{ a }\; -V_1, \; -V_2, \; -V_3.$$

Dokážeme-li, že

$$V_1 > V_2 > V_3 > 0, \tag{3}$$

bude to znamenat, že V_3 je nejmenší kladná hodnota výrazu V. Levé dvě nerovnosti ve (3) plynou okamžitě z (2), neboť $V_1 - V_2 = (k+h)(a-g)$ a $V_2 - V_3 = (g+h)(k-a)$. Zbývá tedy dokázat, že $V_3 > 0$, neboli $ag > kh$. Důkaz je výhodné provést sporem: Nechť existují taková různá $x, y \in \mathbb{R}_+$, že $ag \leqq kh$, tj.

$$\sqrt{xy} \cdot \frac{1}{2}(x+y) \leqq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot \frac{2xy}{x+y}.$$

Obě strany této nerovnosti jsou kladné. Po umocnění na druhou a snadné úpravě dostaneme $(x+y)^4 \leqq 8(x^2+y^2)xy$; odtud $(x-y)^4 \leqq 0$, a to je spor.

44 – C – I – 3

Každý bod obvodu čtverce o straně 10 cm je obarven jednou ze dvou barev. Dokažte, že při libovolném obarvení můžeme na obvodu čtverce vždy najít body stejné barvy tak, aby trojúhelník s těmito vrcholy měl obsah aspoň 25 cm^2. (*M. Čadek*)

Řešení. Vrcholy čtverce označme A, B, C, D. Mohou nastat dva případy:

1. Dva vrcholy na jedné straně mají stejnou barvu (např. modrou). Nechť jsou to např. vrcholy A, B. Existuje-li na straně CD čtverce bod X, který je obarven toutéž barvou, dostáváme trojúhelník ABX, jehož vrcholy jsou obarveny modrou barvou a jehož obsah je $50\,\text{cm}^2 > 25\,\text{cm}^2$. Mají-li však všechny body strany CD barvu jinou (např. červenou), uvažujme střed S strany BC. Je-li obarven modrou barvou, má trojúhelník ABS všechny vrcholy obarveny modrou barvou a obsah $25\,\text{cm}^2$. Je-li S červený, pak trojúhelník CDS má všechny vrcholy červené a přitom obsah $25\,\text{cm}^2$.

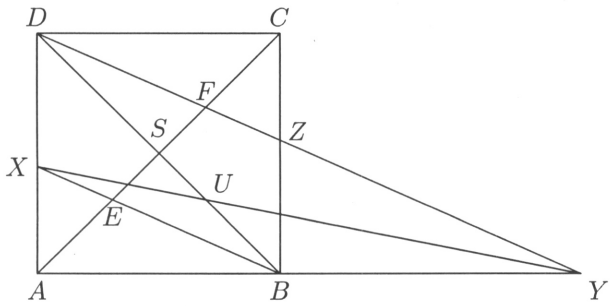
2. Žádné dva sousední vrcholy čtverce $ABCD$ nejsou obarveny stejnou barvou. (Např. A, C jsou modré a B, D jsou červené.) Uvažujme opět bod S, který je středem strany BC. Je-li obarven modrou barvou, pak trojúhelník ACS má obsah $25\,\text{cm}^2$, a přitom jeho vrcholy jsou obarveny modrou barvou. Je-li bod S obarven červenou barvou, má trojúhelník BDS obsah $25\,\text{cm}^2$, a přitom všechny jeho vrcholy mají červenou barvu.

Tím je důkaz ukončen.

44 – C – S – 2

V rovině je dán čtverec $ABCD$ se středem S. Uvnitř úseček SA a SC jsou zvoleny po řadě body E a F tak, že $|SE| = |SF|$. Sestrojme průsečík X polopřímky BE se stranou AD a průsečík Y polopřímky DF s prodloužením strany AB. Dokažte, že obsah trojúhelníka AXY nezávisí na poloze bodů E a F. (*J. Šimša*)

Řešení. Označme Z průsečík úseček BC a DY a U průsečík úseček BD a XY (obr. 5).



Obr. 5

1. způsob: Z dvojic podobných trojúhelníků $AYF \sim CDF$ a $AFD \sim CFZ$ plyne

$$\frac{|AY|}{|CD|} = \frac{|AF|}{|CF|} = \frac{|AD|}{|CZ|}.$$

Odtud dostáváme $|AY| \cdot |CZ| = |AD| \cdot |CD| = a^2$, kde a je délka strany daného čtverce $ABCD$. Díky své konstrukci jsou body X a Z středově souměrné podle středu S, proto je $|CZ| = |AX|$, takže pro obsah P trojúhelníka AXY platí $P = \frac{1}{2}|AY|\,|AX| = \frac{1}{2}|AY|\,|CZ| = \frac{1}{2}a^2$, tj. obsah nezávisí na volbě bodů E a F.

2. způsob: Protože body X a Z jsou středově souměrné podle středu S, je $YDXB$ lichoběžník (obr. 5), přičemž bod U je průsečíkem jeho úhlopříček BD a XY. Obsah trojúhelníka DXU je proto roven obsahu trojúhelníka BYU. Vzhledem k tomu, že obsah trojúhelníka AXY je součtem obsahů čtyřúhelníka $AXUB$ a trojúhelníka BYU, je obsah trojúhelníka AXY roven obsahu trojúhelníka ABD, což je $\frac{1}{2}a^2$.

44 – Z8 – III – 1

Pro dvě různá přirozená čísla a, b platí $a + \frac{a}{b} = 81$. Určete číslo $b + \frac{a}{b}$. Uveďte všechny možnosti.

Řešení. Číslo $\frac{a}{b}$ musí být přirozené, proto $a = k \cdot b$, kde k je přirozené, a platí $k(b+1) = 81$. Protože čísla a a b mají být různá, nemůže být $k = 1$, a protože $b \neq 0$, nemůže být $k = 81$. Musí tedy nastat jedna z těchto možností:

1. $k = 3$, $b = 26$, $a = 78$, pak je $b + \frac{a}{b} = 29$,
2. $k = 9$, $b = 8$, $a = 72$, pak je $b + \frac{a}{b} = 17$,
3. $k = 27$, $b = 2$, $a = 54$, pak je $b + \frac{a}{b} = 29$.

44 – Z9 – II – 2

Pro která celá čísla x, y platí $x^2 = 3xy + 10$? Najděte všechna řešení.

Řešení. Zadaný vztah můžeme upravit na tvar $x(x - 3y) = 10$. Odtud vidíme, že x i $x - 3y$ dělí číslo 10. Mohou tedy nastat pouze možnosti uvedené v prvních dvou řádcích tabulky:

x	1	−1	2	−2	5	−5	10	−10
$x - 3y$	10	−10	5	−5	2	−2	1	−1
y	−3	3	−1	1	1	−1	3	−3

Pro každou z možností vypočítáme y. Řešením úlohy budou ty dvojice, pro které bude získané číslo y celé. Výsledek je uveden v třetím řádku tabulky. Protože ve všech případech vyšlo y celé, má úloha 8 řešení. Jsou jimi tyto dvojice čísel (x, y):

$$(1,-3),\ (-1,3),\ (2,-1),\ (-2,1),\ (5,1),\ (-5,-1),\ (10,3),\ (-10,-3).$$

45 – A – I – 4

Dokažte, že pokud pro přirozená čísla a, b je i číslo

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$$

přirozené, pak pro největší společný dělitel D čísel a, b platí nerovnost $D \leqq \sqrt{a+b}$. Může nastat rovnost v případě, že $D < a < b$?

Řešení. Po jednoduché úpravě dostaneme, že

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}=\frac{a^2+b^2+a+b}{ab}. \tag{1}$$

Protože D je největší společný dělitel čísel a, b, můžeme psát $a = Da_1$ a $b = Db_1$, kde a_1, b_1 jsou nesoudělná přirozená čísla. Výraz (1) má po vykrácení tvar

$$\frac{Da_1^2+Db_1^2+a_1+b_1}{Da_1b_1}. \tag{2}$$

Aby výraz (2) byl přirozené číslo, musí být čitatel dělitelný jmenovatelem, a tedy i všemi jeho děliteli. Proto musí být čitatel dělitelný D,

$$D \mid Da_1^2+Db_1^2+a_1+b_1.$$

Číslo D zřejmě dělí čísla Da_1^2 a Db_1^2, proto musí platit

$$D \mid a_1+b_1. \tag{3}$$

Protože čísla a_1, b_1, D jsou přirozená a platí (3), musí zároveň být

$$D \leqq a_1+b_1, \tag{4}$$

což po přenásobení D ($D > 0$) dává

$$D^2 \leqq a+b.$$

Po odmocnění (obě strany jsou kladné) vychází, že

$$D \leqq \sqrt{a+b}. \tag{5}$$

Ještě musíme zjistit, zda někdy nastane v (5) rovnost. Ta zřejmě nastane, právě když nastane rovnost v nerovnosti (4). Proto musí být $D = a_1 + b_1$. Aby byla zároveň splněna podmínka $D < a < b$, musí platit $1 < a_1 < b_1$. Volme proto $a_1 = 2$ a $b_1 = 5$. Potom musí být $D = 2 + 5 = 7$, neboli $a = Da_1 = 14$ a $b = Db_1 = 35$. Snadno se přesvědčíme, že v tomto případě rovnost (5) skutečně nastane.

Poznámka. Můžeme postupovat také tak, že na začátku zavedeme substituci $a = a_1 D$, $b = b_1 D$ a po obdobných úvahách dojdeme k tvrzení $D^2 \mid a + b$, což po odmocnění dává (5).

45 – A – I – 5

Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ splňující pro každá $x, y \in \mathbb{N}$ rovnost

$$f(xy) = f(x) + f(y) - f\big(D(x,y)\big),$$

kde $D(x,y)$ značí největší společný dělitel čísel x, y, víte-li, že platí $f(p) = p$ pro každé prvočíslo p. *(P. Hliněný)*

Řešení. Především si všimněme, že pro nesoudělná čísla x, y platí

$$f(xy) = f(x) + f(y) - f(1).$$

Proto pro prvočíselný rozklad $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$ čísla n ($p_1, p_2, \dots, p_m$ jsou různá prvočísla a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ jsou přirozená čísla) dostáváme, že $f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2}) + \dots + f(p_m^{\alpha_m}) - (m-1)f(1)$. Dále opakovaným použitím dané rovnosti zjistíme, že $f(p^\alpha) = f(p^{\alpha-1}) = \dots = f(p) = p$ pro prvočíslo p a libovolné přirozené číslo α. Odtud vyplývá, že platí

$$f(n) = p_1 + p_2 + \dots + p_m - (m-1)f(1), \quad n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}.$$

Dokažme ještě uvedené tvrzení podrobněji:

Nejdříve dokážeme matematickou indukcí podle α, že pro prvočíslo p platí $f(p^\alpha) = f(p) = p$.

První krok. Pro $\alpha = 1$ plyne tvrzení přímo ze zadání.

Druhý krok. Nechť tvrzení platí pro $\alpha \geqq 1$, potom

$$f(p^{\alpha+1}) = f(p^\alpha) + f(p) - f\big(D(p^\alpha, p)\big) = f(p^\alpha).$$

Odtud podle indukčního předpokladu plyne, že je také

$$f(p^{\alpha+1}) = f(p^\alpha) = f(p) = p.$$

Dále dokážeme, že pokud $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$ je prvočíselný rozklad čísla $n \geqq 2$, je

$$f(n) = f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}) = p_1 + p_2 + \dots + p_m - (m-1)f(1).$$

Tvrzení dokážeme opět indukcí, tentokrát podle počtu m prvočíselných dělitelů čísla n.

První krok. Pro $m = 1$ dostáváme předchozí tvrzení, které jsme právě dokázali.

Druhý krok. Nechť tvrzení platí pro $m \geqq 1$. Potom platí

$$\begin{aligned} f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_{m+1}^{\alpha_{m+1}}) = f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}) + f(p_{m+1}^{\alpha_{m+1}}) - \\ - f\left(D(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}, p_{m+1}^{\alpha_{m+1}})\right). \end{aligned}$$

Protože ale $D(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}, p_{m+1}^{\alpha_{m+1}}) = 1$, má dle indukčního předpokladu předcházející rovnost tvar

$$\begin{aligned} f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_{m+1}^{\alpha_{m+1}}) &= p_1 + p_2 + \dots + p_m - \\ &\quad - (m-1)f(1) + p_{m+1} - f(1) = \\ &= p_1 + \dots + p_{m+1} - mf(1). \end{aligned} \tag{1}$$

Ještě zbývá ukázat, že takto definovaná funkce f vyhovuje dané podmínce pro libovolnou hodnotu $f(1)$. Nechť a a b jsou přirozená čísla. Označme $c = D(a, b)$ a nechť $c = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$ je jeho prvočíselný rozklad. Prvočíselný rozklad čísla a má pak zřejmě tvar

$$a = p_1^{\beta_1} \dots p_m^{\beta_m} q_1^{\beta_{m+1}} \dots q_s^{\beta_{m+s}}$$

a podobně číslo b bude mít prvočíselný rozklad

$$b = p_1^{\gamma_1} \dots p_m^{\gamma_m} r_1^{\gamma_{m+1}} \dots r_s^{\gamma_{m+t}}.$$

Zároveň víme, že prvočísla $p_1, \dots, p_m$, $q_1, \dots, q_s$ a $r_1, \dots, r_t$ jsou navzájem různá. Proto rozklad čísla $a \cdot b$ na prvočinitele je

$$a \cdot b = p_1^{\beta_1+\gamma_1} \dots p_m^{\beta_m+\gamma_m} q_1^{\beta_{m+1}} \dots q_s^{\beta_{m+s}} r_1^{\gamma_{m+1}} \dots r_s^{\gamma_{m+t}}.$$

Podmínka ze zadání říká, že

$$f(a \cdot b) = f(a) + f(b) - f\big(D(a, b)\big). \tag{2}$$

Spočítejme tyto hodnoty pro funkci definovanou pomocí (1):

$$\begin{aligned} f(a) &= p_1 + \dots + p_m + q_1 + \dots + q_s - (m+s-1)f(1), \\ f(b) &= p_1 + \dots + p_m + r_1 + \dots + r_t - (m+t-1)f(1), \\ f(a \cdot b) &= p_1 + \dots + p_m + q_1 + \dots + q_s + r_1 + \dots + r_t - \\ &\quad - (m+s+t-1)f(1), \\ f(c) &= p_1 + \dots + p_m - (m-1)f(1). \end{aligned}$$

Snadno nahlédneme, že po dosazení těchto hodnot do (2) dostaneme identitu (ještě je potřeba si uvědomit, že všechny tyto úvahy jsou korektní i v případě $m = 0$, $s = 0$, $t = 0$). Funkce f definovaná pomocí (1) je tedy jediným řešením dané úlohy pro libovolnou hodnotu $f(1)$.

45 – A – III – 5

Pro která celá čísla k existuje funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ splňující

(i) $f(1\,995) = 1\,996$,

(ii) $f(xy) = f(x) + f(y) + k \cdot f\big(D(x,y)\big)$ pro všechna přirozená čísla x, y?

$D(x,y)$ označuje největší společný dělitel čísel x, y. *(P. Hliněný)*

Řešení. Ze vztahu (ii) pro $x = y$ vyplývá $f(x^2) = f(x \cdot x) = (k+2)f(x)$. Dvojnásobnou aplikací předchozího vztahu dostaneme

$$f(x^4) = f(x^2 \cdot x^2) = (k+2)f(x^2) = (k+2)^2 f(x).$$

Jiným postupem ale dostaneme

$$\begin{aligned} f(x^4) &= f(x \cdot x^3) = f(x) + f(x^3) + kf(x) = \\ &= (k+1)f(x) + f(x \cdot x^2) = \\ &= (k+1)f(x) + f(x) + f(x^2) + kf(x) = \\ &= (2k+2)f(x) + f(x^2) = (3k+4)f(x). \end{aligned}$$

Nyní stačí najít libovolné x, pro které je $f(x) \neq 0$, tedy například podle (i) $x = 1\,995$. Porovnáním předchozích dvou vztahů dostaneme podmínku

$$\begin{gathered} (k+2)^2 f(1\,995) = f(1\,995^4) = (3k+4)f(1\,995), \\ (k+2)^2 = 3k+4, \\ k \in \{0, -1\}. \end{gathered}$$

Pro $k = -1$ dostáváme funkcionální rovnici z domácího kola. Víme, že jejím obecným řešením je pro $x = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ funkce

$$f(x) = f(p_1) + \dots + f(p_n) - (n-1)f(1).$$

Podmínku (i) úlohy můžeme splnit například volbou $f(5) = 1\,996$, $f(p) = 0$ pro všechna prvočísla $p \neq 5$ a $f(1) = 0$.

Pro $k = 0$ dostáváme funkcionální rovnici

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Odtud především pro $x = y = 1$ plyne $f(1) = 0$. Obecným řešením této rovnice pak je pro $x = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ funkce

$$f(x) = \alpha_1 f(p_1) + \dots + \alpha_n f(p_n),$$

kde $f(p_i)$ jsou libovolná celá čísla. Opět stačí zvolit $f(5) = 1\,996$ a $f(p) = 0$ pro všechna prvočísla $p \neq 5$ jako výše.

45 – B – I – 4

Číslo $2n^4 + n^3 + 50$ je dělitelné šesti právě pro ta přirozená čísla n, pro která je číslo $2 \cdot 4^n + 3^n + 50$ dělitelné třinácti. Dokažte. *(J. Šimša)*

Řešení. Sestavíme tabulku zbytků při dělení čísel $A = 2n^4 + n^3 + 50$ šesti v závislosti na zbytku čísla n (zbytek při dělení čísla A šesti totiž závisí jen na zbytku při dělení čísla n šesti):

n	n^2	n^3	n^4	$2n^4$	$2n^4 + n^3$	$A = 2n^4 + n^3 + 50$
0	0	0	0	0	0	2
1	1	1	1	2	3	5
2	4	2	4	2	4	0
3	3	3	3	0	3	5
4	4	4	4	2	0	2
5	1	5	1	2	1	3

Z tabulky vidíme, že číslo A je násobkem šesti, právě když číslo n dává při dělení šesti zbytek rovný 2, tj. je rovno jednomu z čísel 2, 8, 14, 20, ...

Nyní sestavíme tabulku zbytků při dělení několika prvních čísel $B = 2 \cdot 4^n + 3^n + 50$ třinácti. (Na rozdíl od výrazu A, který je mnohočlenem, se ve výrazu B vyskytuje proměnná n i v exponentu. Nelze proto říci, že zbytek při dělení čísla B třinácti závisí na zbytku při dělení čísla n třinácti. Až při sestavování tabulky se ukáže, s jakou periodou se zbytky opakují.)

n	3^n	4^n	$2 \cdot 4^n$	$2 \cdot 4^n + 3^n$	$B = 2 \cdot 4^n + 3^n + 50$
0	1	1	2	3	1
1	3	4	8	11	9
2	9	3	6	2	0
3	1	12	11	12	10
4	3	9	5	8	6
5	9	10	7	3	1
6	1	1	2	3	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Další výpočty už nemusíme provádět. Vidíme totiž, že zbytky mocnin 3^n a 4^n se vzhledem k číslu n opakují se společnou periodou rovnou šesti (u mocnin 3^n existuje dokonce menší perioda rovna třem). Proto i posloupnost zbytků čísel B má periodu 6. Navíc je z tabulky patrno, že B je násobkem třinácti, právě když číslo n dává při dělení šesti zbytek 2, tj. je rovno jednomu z čísel 2, 8, 14, 20, ...

Poznámka. Periodicitu v posloupnosti zbytků při dělení mocnin a^k číslem d přesněji postihují Fermatova a Eulerova věta. Podle Fermatovy věty je v případě, kdy d je prvočíslo, délka periody rovna některému děliteli čísla $d-1$.

45 – B – I – 1

Zjistěte, pro která reálná čísla p má rovnice

$$x^3 + px^2 + 2px = 3p + 1$$

tři různé reálné kořeny x_1, x_2 a x_3 takové, že $x_1x_2 = x_3^2$. *(J. Šimša)*

Řešení. Využijeme vztahů mezi kořeny a koeficienty mnohočlenu, tzv. Viètových vzorců. Podle nich je

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -p, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= 2p, \\ x_1x_2x_3 &= 3p + 1. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do druhého vztahu za $x_1x_2 = x_3^2$, dostaneme

$$2p = x_3^2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_3(x_1 + x_2 + x_3) = -px_3,$$

a protože $p = 0$ zřejmě nevyhovuje, je $x_3 = -2$.

Dále platí

$$4 = x_3^2 = x_1x_2 = \frac{x_1x_2x_3}{x_3} = \frac{3p+1}{-2},$$

odkud $p = -3$. Jen pro toto p tedy může daná rovnice vyhovovat daným podmínkám. Dosadíme-li do Viètových vzorců za x_3 a za p, dopočteme zbývající řešení $x_1 = 4$, $x_2 = 1$ a přesvědčíme se, že je tomu opravdu tak.

45 – B – II – 3

Dokažte, že rovnice $x^3 - 1\,996x^2 + rx - 1\,995 = 0$ má pro každý reálný koeficient r nanejvýš jeden celočíselný kořen. *(A. Vrba)*

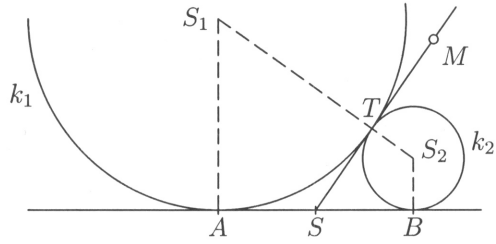
Řešení. Připusťme, že pro některé číslo r má daná rovnice dva celočíselné kořeny a, b. Dělení levé strany rovnice mnohočlenem $(x-a)(x-b)$ vyjde beze zbytku a výsledný podíl bude tvaru $x-c$ pro vhodné reálné číslo c. Číslo c musí být ovšem

celé, neboť $a + b + c = 1\,996$. Všechna tři čísla a, b, c nemohou být lichá, když je jejich součet sudý. Jejich součin je však liché číslo 1 995, což není možné. Rovnice může mít tedy nanejvýš jeden celočíselný kořen.

45 – C – II – 4

V polorovině ABM sestrojte kružnice k_1 a k_2, které se dotýkají přímky AB po řadě v daných bodech A a B, dotýkají se vně v nějakém bodě T a jejich společná tečna v tomto bodě prochází daným bodem M. (*J. Švrček*)

Řešení. Označme S průsečík uvažované tečny obou hledaných kružnic s přímkou AB. Z vlastností tečen ke kružnici plyne, že je $|SA| = |ST| = |SB|$ (obr. 6), takže bod S je středem úsečky AB. Odtud již snadno plyne *konstrukce.*



Obr. 6

Nejprve sestrojíme střed S úsečky AB, pak najdeme bod T na polopřímce SM takový, že $|ST| = |SA|$. Střed S_1 hledané kružnice k_1 najdeme jako průsečík kolmice k přímce AB v bodě A a kolmice k přímce SM v bodě T. Podobně sestrojíme i střed S_2 kružnice k_2. Sestrojené kružnice k_1 a k_2 zřejmě mají všechny požadované vlastnosti.

Úloha má vždy jedno řešení.

46 – B – I – 2

Najděte všechny kvadratické funkce, které zobrazí interval $\langle 2, 5\rangle$ na interval $\langle 15, 27\rangle$ a jejichž graf prochází počátkem soustavy souřadnic. (*P. Černek*)

Řešení. Funkci budeme hledat ve tvaru $f(x) = ax^2 + bx + c$. Protože její graf prochází počátkem souřadnic, je $c = 0$. Proto $f(x) = ax^2 + bx$ pro vhodné konstanty a, b.

Prozkoumáme nejprve možnosti, kdy je f na intervalu $\langle 2, 5\rangle$ monotónní, a tedy buď

a) $f(2) = 15$, $f(5) = 27$, je-li tam rostoucí, anebo

b) $f(2) = 27$, $f(5) = 15$, je-li tam klesající.

Řešme nejprve případ a). Dostaneme dvě lineární rovnice $4a + 2b = 15$ a $25a + 5b = 27$. Řešením této soustavy je $a = -\frac{7}{10}$ a $b = \frac{89}{10}$. Ještě musíme ověřit, zda je skutečně f na intervalu $\langle 2, 5\rangle$ monotónní. Stačí zřejmě zjistit, zda nenabývá svůj extrém (maximum) na tomto intervalu. V našem případě se extrém nachází v bodě $\frac{89}{14}$, který je mimo uvažovaný interval.

Případ b). Obdobně jako v a) dostaneme funkci $-\frac{7}{2}x^2 + \frac{41}{2}x$, která nabývá maximum v bodě $\frac{41}{14}$, který však tentokrát je v intervalu $\langle 2, 5\rangle$, a hodnota funkce v něm je větší než 27, tedy tato funkce nevyhovuje zadaným podmínkám.

Nechť teď f není na intervalu $\langle 2, 5\rangle$ monotónní. Z tvaru kvadratické funkce vyplývá, že f mění svoji monotónnost jen v bodě extrému, tedy v našem případě bude bod $-\dfrac{b}{2a}$ ležet v intervalu $\langle 2, 5\rangle$. Protože y-ová souřadnice vrcholu paraboly je $-\dfrac{b^2}{4a}$, je buď

$$-\frac{b^2}{4a} = 27, \quad a < 0, \tag{1}$$

anebo $-\dfrac{b^2}{4a} = 15$ pro $a > 0$, což však zřejmě nemůže nastat.

Minimum se zřejmě nabývá na kraji intervalu, tedy buď

$$f(2) = 4a + 2b = 15, \tag{2}$$

anebo

$$f(5) = 25a + 5b = 15. \tag{3}$$

V prvním případě vyjádříme z (2) výraz $4a$ a dosadíme do (1). Dostaneme kvadratickou rovnici $b^2 - 54b + 405 = 0$, která má dva kořeny $b = 9$, $b = 45$. V jednotlivých případech dostáváme kvadratické funkce:

$$f(x) = -\frac{75}{4}x^2 + 45x \qquad \text{a} \qquad f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 9x.$$

Ještě zřejmě musíme ověřit, že $f(5) \geqq 15$. Z této podmínky vyplývá, že jen druhá funkce může vyhovovat zadaným podmínkám, ale její extrém není v intervalu $\langle 2, 5\rangle$.

V druhém případě dostáváme obdobně kvadratickou rovnici $5b^2 - 108b + 324 = 0$, která má dva kořeny $b = 18$, $b = \frac{18}{5}$. V jednotlivých případech tentokrát dostáváme kvadratické funkce

$$f(x) = -3x^2 + 18x \qquad \text{a} \qquad f(x) = -\frac{3}{25}x^2 + \frac{18}{5}x.$$

Nyní musíme ověřit, že $f(2) \geqq 15$. Tentokrát vyhovuje jen první funkce.

Takto jsme dostali všechna možná řešení, a to kvadratické funkce

$$f(x) = -\frac{7}{10}x^2 + \frac{89}{10}x; \qquad f(x) = -3x^2 + 18x.$$

46 – B – S – 2

Rovnice $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, kde a, b a c jsou celá čísla, má kořen $x = 1 - \sqrt{2}$. Dokažte, že pak platí $a - 2b + 5c = 0$. *(P. Černek)*

Řešení. Po dosazení čísla $x = 1 - \sqrt{2}$ do dané rovnice a jednoduché úpravě dostáváme

$$(5 + 2a + b) \cdot \sqrt{2} = 7 + 3a + b + c.$$

Protože na pravé straně je celé číslo, musí platit

$$5 + 2a + b = 0 \qquad \text{a} \qquad 7 + 3a + b + c = 0$$

(jinak bychom mohli vyjádřit $\sqrt{2}$ jako podíl dvou celých čísel, což vzhledem k iracionalitě nejde). Vyjádříme-li b a c z těchto dvou rovnic pomocí a, dostaneme $b = -5 - 2a$ a $c = -2 - a$, takže

$$a - 2b + 5c = a - 2 \cdot (-5 - 2a) + 5 \cdot (-2 - a) = 0.$$

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

46 – B – II – 2

Určete, pro která reálná čísla p má funkce $f(x) = x^3 - px^2 + 1\,997$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ minimum v bodě $x = 1$.

Řešení. Zřejmě stačí zkoumat funkci $g(x) = x^3 - px^2$, protože v každém intervalu nabývá minima ve stejných bodech jako daná funkce f. Funkce g má v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ minimum v bodě 1, právě když pro všechna x z tohoto intervalu platí $g(x) \geqq g(1)$, neboli $x^3 - px^2 \geqq 1 - p$. Po úpravě dostáváme ekvivalentní nerovnost

$$x^3 - 1 \geqq p(x^2 - 1), \tag{1}$$

kterou můžeme upravit na tvar

$$(1 - x)\big(x^2 + x + 1 - p(x + 1)\big) \leqq 0.$$

Vzhledem k tomu, že pro číslo $x = 1$ je nerovnost (1) splněná triviálně, můžeme pro $x \in \langle 0, 1)$ vydělit poslední nerovnost dvojčlenem $1 - x$ a dostaneme ekvivalentní podmínku

$$q(x) = x^2 + (1 - p)x + 1 - p \leqq 0.$$

Protože q je kvadratická funkce s kladným koeficientem u x^2 (jejím grafem je parabola „obrácená vzhůru"), platí nerovnost $q(x) \leqq 0$ pro všechna $x \in \langle 0, 1)$, právě když je současně $q(0) \leqq 0$ a $q(1) \leqq 0$, tj. právě když $1 - p \leqq 0$ a $3 - 2p \leqq 0$. Dohromady tak vychází jediná (nutná i postačující) podmínka $p \geqq \frac{3}{2}$.

Jiné řešení. Po odvození nerovnosti (1) můžeme postupovat také následovně. Pro číslo $x = 1$ je nerovnost triviálně splněná, pro $x \in \langle 0, 1)$ můžeme nerovnost vydělit záporným dvojčlenem $x^2 - 1$, takže vyjde

$$p \geqq \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = x + \frac{1}{x + 1} \tag{2}$$

pro všechna $x \in \langle 0, 1\rangle$. Ukážeme, že funkce $h(x) = x + \dfrac{1}{x+1}$ je v tomto intervalu rostoucí.

Pokud je totiž $x \geqq 0$ a $\varepsilon > 0$, je $h(x + \varepsilon) > h(x)$, neboť

$$x + \varepsilon + \frac{1}{x + \varepsilon + 1} > x + \frac{1}{x + 1}, \quad \text{po úpravě dává} \quad 1 < (x + \varepsilon + 1)(x + 1).$$

Tato nerovnost však vzhledem k volbě x a ε platí, a protože všechny úpravy byly ekvivalentní, dokázali jsme, že funkce h je rostoucí dokonce v intervalu $\langle 0, \infty)$. Nerovnost (2) je splněna pro všechna $x \in \langle 0, 1)$, právě když platí pro $x = 1$, tj. právě když $p \geqq \frac{3}{2}$. Řešením jsou všechna reálná čísla p z intervalu $\left\langle \frac{3}{2}, \infty\right)$.

Poznámka. Je možno postupovat i pomocí diferenciálního počtu. Z první a druhé derivace funkce f snadno zjistíme, že v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ nabývá funkce f jen dva extrémy: v bodě $x = 0$ a v bodě $x = \frac{2}{3}p$. Z toho pak lze snadno odvodit, že úloze vyhovují právě čísla $p \geqq \frac{3}{2}$.

46 – C – II – 1

V čtyřciferném čísle jsou stejné první dvě číslice a také poslední dvě číslice. Určete toto číslo, víte-li, že je druhou mocninou přirozeného čísla.

Řešení. Číslo $1\,000a + 100a + 10b + b = 11(100a + b)$ má být druhou mocninou, proto musí být číslo $100a+b$ dělitelné číslem 11 a podíl $\frac{1}{11}(100a+b) = 9a+\frac{1}{11}(a+b)$ musí být druhou mocninou přirozeného čísla. Vzhledem k tomu, že a a b ($a \neq 0$) jsou číslice, musí být $a + b = 11$, a protože $9a + 1$ má být druhou mocninou, vyjde $a = 7$. Hledané číslo je $7\,744 = 88^2$.

46 – Z5 – I – 2

Lukáš sečítal dvě pěticiferná čísla. V obou číslech se každá z číslic 5, 6, 7, 8 a 9 vyskytovala právě jednou. Vyšel mu výsledek 164 528. Markéta jeho výsledek kontrolovala a prohlásila, že Lukáš udělal chybu. Měla Markéta pravdu? (*Macura*)

Řešení. Sčítání zapíšeme ve tvaru

$$\begin{array}{r} * * * * * \\ + * * * * * \\ \hline 1\,6\,4\,5\,2\,8 \end{array}$$

a zkusíme nahrazovat hvězdičky v obou sčítancích číslicemi. Hvězdičky nahrazujeme zprava doleva a vzhledem k tomu, že každá z číslic 5, 6, 7, 8 a 9 se v každém sčítanci vyskytuje právě jednou, máme pro jejich nahrazení pouze (až na pořadí sčítanců) tyto dvě možnosti:

$$\begin{array}{r} *5869 \\ +*8659 \\ \hline 164528 \end{array} \qquad \begin{array}{r} *5769 \\ +*8759 \\ \hline 164528 \end{array}$$

Zbývající hvězdičky však v obou případech nelze zbývajícími číslicemi doplnit na správný zápis sčítání.

Markéta měla pravdu.

47 – A – I – 1

Číslo $1\,997^{2^n} - 1$ je dělitelné číslem 2^{n+2} pro každé přirozené číslo n. Dokažte. *(P. Kaňovský)*

Řešení. Označme $k = 1\,997$ a všimněme si, že pro každé n platí

$$k^{2^{n+1}} - 1 = \left(k^{2^n}\right)^2 - 1^2 = \left(k^{2^n} - 1\right)\left(k^{2^n} + 1\right). \tag{1}$$

To nám umožní dokazovat uvedené tvrzení indukcí. Můžeme začít s hodnotou $n = 0$, neboť číslo $k - 1$ je dělitelné číslem 2^2. Protože číslo $k^{2^n} + 1$ je pro každé n sudé, plyne z rozkladu (1), že pokud číslo $k^{2^n} - 1$ je dělitelné číslem 2^{n+2}, je číslo $k^{2^{n+1}} - 1$ dělitelné číslem $2^{n+2} \cdot 2$, tedy číslem 2^{n+3}. Tím je důkaz indukcí ukončen. Dodejme, že místo (1) je možné obdobně využít rovností

$$\left(k^{2^n} - 1\right)^2 = k^{2^{n+1}} - 2 \cdot k^{2^n} + 1 = \left(k^{2^{n+1}} - 1\right) - 2\left(k^{2^n} - 1\right).$$

Jiné řešení. Místo matematické indukce můžeme využít binomickou větu a dokázat, že pro každé celé číslo k je rozdíl $(4k + 1)^{2^n} - 1$ dělitelný číslem 2^{n+2}. (Odtud volbou $k = 499$ dostaneme tvrzení úlohy.) Z binomické věty pro exponent 2^n vyplývá rozklad

$$\begin{aligned}(4k+1)^{2^n} - 1 = (4k)^{2^n} + \binom{2^n}{1}(4k)^{2^n-1} + \ldots + \\ + \binom{2^n}{j}(4k)^{2^n-j} + \ldots + \binom{2^n}{2^n-1}4k.\end{aligned}$$

První sčítanec napravo je dělitelný mocninou $2^{2^{n+1}}$, a tedy i mocninou 2^{n+2}, neboť $n + 2 \leqq 2^{n+1}$ pro každé celé $n \geqq 0$ (snadná indukce). Nyní pro každé

$j \in \{1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$ zjistíme, jakou mocninou čísla 2 je dělitelné kombinační číslo $\binom{2^n}{j}$. K tomu využijeme vyjádření

$$\binom{2^n}{j} = \frac{2^n}{j} \cdot \frac{2^n - 1}{1} \cdot \frac{2^n - 2}{2} \cdot \frac{2^n - 3}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{2^n - j + 1}{j - 1}, \tag{2}$$

které je výhodné proto, že čísla i a $2^n - i$ mají ve svých rozkladech na prvočinitele tutéž mocninu čísla 2, $1 \leqq i \leqq 2^n - 1$. Je-li proto $j = 2^\alpha l$, kde $0 \leqq \alpha \leqq n - 1$ a l je liché, je podle (2) uvažované číslo $\binom{2^n}{j}$ lichým násobkem mocniny $2^{n-\alpha}$. Odtud plyne, že číslem 2^{n+2} je dělitelný každý sčítanec na pravé straně (1), právě když pro každý uvažovaný index j platí nerovnost $n + 2 \leqq (n - \alpha) + 2(2^n - j)$, neboli $\alpha + 2 \leqq 2(2^n - j)$. Protože $\alpha + 2 \leqq 2^{\alpha+1}$ (snadná indukce), stačí nám dokázat silnější nerovnosti $2^\alpha \leqq 2^n - j$. Ty ale plynou z definice čísel $\alpha = \alpha(j)$: jelikož mocnina 2^α dělí číslo j, dělí i číslo $2^n - j$, takže ho nepřevyšuje.

47 – A – II – 1

Číslo $1\,997^{3^n} + 1$ je dělitelné číslem 3^{n+3} pro každé přirozené číslo n. Dokažte. *(J. Šimša)*

Řešení. Tvrzení dokážeme indukcí podle čísla n. Můžeme začít od hodnoty $n = 0$: číslo $1\,997^{3^0} + 1$ je skutečně násobkem čísla 3^3 ($1\,998 = 27 \cdot 74$). Platí-li podle indukčního předpokladu rovnost $1\,997^{3^n} + 1 = 3^{n+3} k_n$ pro vhodné přirozené číslo k_n, dostaneme ze vzorce $A^3 + B^3 = (A + B)^3 - 3AB(A + B)$ pro hodnoty $A = 1\,997^{3^n}$ a $B = 1$ následující vyjádření:

$$\begin{aligned} 1\,997^{3^{n+1}} + 1 &= \left(3^{n+3} k_n\right)^3 - 3 \cdot 1\,997^{3^n} \cdot \left(3^{n+3} k_n\right) = \\ &= 3^{n+4}\left(3^{2n+5} k_n^3 - 1\,997^{3^n} k_n\right). \end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov.

Dodejme, že při druhém indukčním kroku bylo rovněž možné využít rozklad

$$x^{3^{n+1}} + 1 = \left(x^{3^n}\right)^3 + 1^3 = \left(x^{3^n} + 1\right)\left(x^{2 \cdot 3^n} - x^{3^n} + 1\right)$$

a vysvětlit, proč pro $x = 1\,997$ je druhý činitel dělitelný třemi: čísla $1\,997^{2 \cdot 3^n}$ a $1\,997^{3^n}$ totiž při dělení třemi dávají po řadě zbytky 1 a 2.

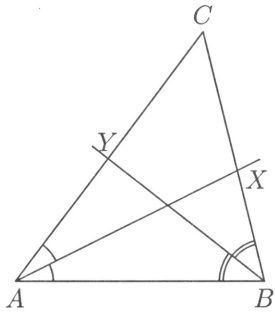
47 – A – S – 1

Najděte všechny trojúhelníky ABC, pro které platí rovnost

$$|BC| \cdot |AX| = |AC| \cdot |BY|,$$

kde bod X je průsečíkem osy úhlu BAC se stranou BC a bod Y průsečíkem osy úhlu ABC se stranou AC. *(P. Černek)*

Řešení. Zkoumanou rovnost přepíšeme do tvaru $|BC| : |BY| = |AC| : |AX|$ a oba poměry vyjádříme pomocí sinových vět pro trojúhelníky BCY a ACX (ve kterých při obvyklém označení vnitřních úhlů trojúhelníku ABC zřejmě platí $|\sphericalangle BYC| = \alpha + \frac{1}{2}\beta$ a $|\sphericalangle AXC| = \beta + \frac{1}{2}\alpha$, obr. 7):



Obr. 7

$$\frac{|BC|}{|BY|} = \frac{\sin(\alpha + \frac{1}{2}\beta)}{\sin\gamma} \quad \text{a} \quad \frac{|AC|}{|AX|} = \frac{\sin(\beta + \frac{1}{2}\alpha)}{\sin\gamma}.$$

Hledáme proto právě ty trojúhelníky, pro které

$$\sin(\alpha + \tfrac{1}{2}\beta) = \sin(\beta + \tfrac{1}{2}\alpha).$$

Protože oba argumenty leží mezi 0° a 180°, rovnost jejich sinů nastane, jen pokud $\alpha + \frac{1}{2}\beta = \beta + \frac{1}{2}\alpha$, nebo $(\alpha + \frac{1}{2}\beta) + (\beta + \frac{1}{2}\alpha) = 180°$. První podmínka znamená $\alpha = \beta$, druhá $\alpha + \beta = 120°$, neboli $\gamma = 60°$.

Malá obměna první části: Srovnáme-li zkoumanou rovnost s obecně platnou rovností $|BC| \cdot |AP| = |AC| \cdot |BQ|$, kde AP a BQ jsou výšky daného trojúhelníku, dostaneme ekvivalentní podmínku ve tvaru $|AP| : |AX| = |BQ| : |BY|$. Z pravoúhlých trojúhelníků APX a BQY tak opět vyjde rovnost $\sin(\alpha + \frac{1}{2}\beta) = \sin(\beta + \frac{1}{2}\alpha)$.

Odpověď: Hledanými jsou právě ty trojúhelníky, pro které platí $|AC| = |BC|$ nebo $|\sphericalangle ACB| = 60°$.

47 – B – I – 1

Magický čtverec je čtvercová tabulka přirozených čísel, v níž je součet všech čísel v každém řádku, v každém sloupci i na obou úhlopříčkách stejný. Najděte všechny magické čtverce 3×3, pro které je součin čtyř čísel v rohových polích roven 3 465.

(*P. Černek*)

Řešení. Označme přirozená čísla v magickém čtverci písmeny $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ jako na obr. 8 a písmenem S označme součet tří čísel v každém řádku, sloupci i úhlopříčce. Ukážeme, že je $S = 3e$: Sečteme-li totiž čísla v prvním a třetím řádku a od výsledku odečteme čísla v prostředním sloupci, dostaneme rovnost

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Obr. 8

$$S + S - S = a + c + g + i - e.$$

Odtud vzhledem k rovnostem $a + i = c + g = S - e$ plyne

$$S = (S - e) + (S - e) - e, \quad \text{neboli} \quad S = 3e.$$

Důsledkem jsou rovnosti

$$a + i = c + g = 2e.$$

Hledejme tedy čtyři přirozená čísla a, i, c, g, jejichž součin je roven číslu 3 465, a přitom $a + i = c + g$. Probrat konečnou množinu řešení rovnice $aicg = 3\,465$ můžeme tak, že nejprve vypíšeme všechny možné rozklady čísla $3\,465 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ na součin dvou činitelů M a N (jež by měly odpovídat součinům ai a cg):

$$\begin{aligned} 3\,465 &= 1 \cdot 3\,465 = 3 \cdot 1\,155 = 5 \cdot 693 = 7 \cdot 495 = 9 \cdot 385 = \\ &= 11 \cdot 315 = 15 \cdot 231 = 21 \cdot 165 = 33 \cdot 105 = 35 \cdot 99 = \\ &= 45 \cdot 77 = 55 \cdot 63. \end{aligned}$$

Nyní pro jednotlivé dvojice M, N snadno vyhledáme rozklady $M = ai$ a $N = cg$ s vlastností $a+i = c+g$ (pro prvních osm dvojic takové rozklady zřejmě neexistují). Jediné dva vyhovující rozklady jsou

$$3\,465 = (5 \cdot 11) \cdot (7 \cdot 9) = (3 \cdot 15) \cdot (7 \cdot 11).$$

V prvním případě $2e = 16$, tedy $e = 8$; v druhém $2e = 18$, tedy $e = 9$. Snadno dopočteme i ostatní čísla magického čtverce (obr. 9).

5	12	7
10	8	6
9	4	11

3	17	7
13	9	5
11	1	15

Obr. 9

Protože čtyři rohová čísla můžeme do tabulky umístit osmi způsoby, je každá tabulka na obr. 9 zástupcem osmi tabulek, jež z ní vzniknou „překlopením“ podle os souměrnosti čtverce. Jiná řešení úlohy neexistují.

47 – B – S – 3

Najděte všechny čtvercové tabulky 3×3 přirozených čísel, v nichž je součin všech čísel v každém řádku, v každém sloupci i na obou úhlopříčkách stejný a pro něž platí, že součet čtyř čísel v jejich rohových polích je jednociferné číslo.

(*J. Aragorn Těšínský*)

Řešení. Označme a, b, c, d jednomístná čísla v rohových polích hledané tabulky (obr. 10) a e číslo v jejím středovém poli. Vzhledem k souměrnosti (překlopením podle jedné z úhlopříček nebo středního sloupce či řádku se uvažované vlastnosti tabulky nezmění) můžeme předpokládat, že je $a \leqq d$, $b \leqq c$ a $a+d \leqq b+c$, a protože má být $a+b+c+d \leqq 9$, bude za uvedených předpokladů $a + d \leqq 4$ a $b + c \leqq 5$. Z rovnosti $aed = bec$ plyne $ad = bc$, takže stačí prozkoumat následujících pět možností:

a	b
	e	
c		d

Obr. 10

a	1	1	1	2	2
d	1	2	3	2	2
b	1	1	1	1	2
c	1	2	3	4	2

V každém z těchto pěti případů můžeme pomocí „prostředního“ čísla e stejnou metodou vyjádřit ostatní čísla tabulky, a to tak, že využijeme rovnosti součinů čísel v obou úhlopříčkách, obou krajních řádcích a obou krajních sloupcích. Tabulky pak vypadají takto:

1	e	1
e	e	e
1	e	1

1	$2e$	1
e	e	e
2	$\frac{1}{2}e$	2

1	$3e$	1
e	e	e
3	$\frac{1}{3}e$	3

2	$2e$	1
$\frac{1}{2}e$	e	$2e$
4	$\frac{1}{2}e$	2

2	e	2
e	e	e
2	e	2

Porovnáme-li nyní zmíněné součiny se součinem čísel v druhém řádku (či v druhém sloupci), dostaneme v každém z uvedených případů jedinou rovnici

$$e^3 = (ad)e, \quad \text{kde postupně } ad = 1, 2, 3, 4, 4.$$

Tato rovnice má v přirozených číslech řešení pouze pro $ad \in \{1, 4\}$ a tomu odpovídají tři tabulky na obr. 11. Z poslední tabulky dostaneme zmíněnými souměrnostmi ještě tři další, ale jak snadno zjistíme, vznikne každá z nich otáčením uvedené tabulky o 90°.

1	1	1
1	1	1
1	1	1

2	2	2
2	2	2
2	2	2

2	4	1
1	2	4
4	1	2

Obr. 11

47 – B – II – 3

Je dána čtvercová tabulka 3×3 přirozených čísel, v níž je součin všech čísel v každém řádku, v každém sloupci i na obou úhlopříčkách roven číslu s.

a) Dokažte, že číslo s je třetí mocninou přirozeného čísla.

b) Pokud je jedno z rohových čísel tabulky rovno 1, je součet všech čtyř rohových čísel druhou mocninou přirozeného čísla. Dokažte. (*J. Aragorn Těšínský*)

Řešení. Uvažujme čtvercovou tabulku 3×3 (obr. 12) splňující podmínky úlohy.

a) Z tabulky je patrné, že pro uvažovaný součin s platí

$$s = \frac{(aei)(def)(gec)}{(adg)(cfi)} = e^3.$$

Číslo s je tedy třetí mocninou přirozeného čísla e, které je umístěno uprostřed tabulky.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Obr. 12

1	e^2	e
e^2	e	1
e	1	e^2

Obr. 13

b) Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a = 1$ (otočením tabulky o 90° nebo o 180° se uvažované vlastnosti tabulky nezmění). Vzhledem k výsledku části a) ze součinu čísel na obou úhlopříčkách zjistíme, že musí být $i = e^2$ a $c = \frac{e^2}{g}$. Ze součinu čísel v třetím řádku pak dostaneme, že $h = \frac{e}{g}$, a ze součinu čísel v třetím sloupci $f = \frac{g}{e}$. Protože h i f jsou přirozená čísla, musí být $e = g$, a proto také $h = f = 1$. Uvažovaná čtvercová tabulka je tedy typově shodná s tabulkou na obr. 13. Odtud plyne, že součet všech čtyř čísel v jejích rohových polích je

$$a + c + g + i = 1 + e + e + e^2 = (1 + e)^2,$$

což je druhá mocnina přirozeného čísla. Tím je důkaz hotov.

47 – C – I – 1

Pro libovolné trojciferné číslo určíme jeho zbytky při dělení čísly 2, 3, 4, ..., 10 a získaných devět čísel pak sečteme. Zjistěte nejmenší možnou hodnotu takového součtu. (*J. Šimša*)

Řešení. Označme $S(n)$ součet uvedených zbytků trojciferného čísla n. Vysvětlíme, proč $S(n) \geqq 3$.

- Pro liché n je $S(n) \geqq 5$ (uvažte zbytky při dělení sudými čísly 2, 4, 6, 8, 10). Dále tedy nechť n je sudé.
- Pokud $4 \nmid n$, tak $S(n) \geqq 4$ (n dává při dělení čísly 4 a 8 zbytek aspoň 2). Nechť n je dále dělitelné čtyřmi.
- Pokud $8 \nmid n$, tak $S(n) \geqq 4$ (zbytek 4 při dělení číslem 8). Proto nechť je dále n dělitelné osmi.
- Pokud $3 \nmid n$, tak $S(n) \geqq 3$ (n dává při dělení čísly 3, 6, 9 zbytek aspoň 1). Nechť je dále n dělitelné osmi a třemi.
- Pokud $9 \nmid n$, tak $S(n) \geqq 3$ (zbytek aspoň 3 při dělení číslem 9). Nechť dále $8 \mid n$ a $9 \mid n$.
- Pokud $5 \nmid n$, tak $S(n) \geqq 3$ (zbytek aspoň 1 při dělení číslem 5 a zbytek aspoň 2 při dělení číslem 10).

Předpokládejme proto, že $5|n, 8|n$ a $9|n$. Pak přicházejí do úvahy už jen čísla 360 a 720, pro něž $S(360) = 3$ a $S(720) = 9$. Tím je nerovnost $S(n) \geqq 3$ dokázaná. Zároveň jsme zjistili, že $S(n) = 3$ např. pro $n = 360$. (Je také $S(840) = 3$.)

Jiné řešení. Uvažujme jen ten případ, kdy číslo n není dělitelné nejvýše dvěma z čísel $2, 3, \ldots, 10$ (jinak $S(n) \geqq 3$). Pokud je tento „nedělitel" jediný, je to nutně číslo 7 (musí to být prvočíslo, jehož dvojnásobek je větší než 10), takže $360 \mid n$. Pokud jsou takoví „nedělitelé" dva, musí to být některá z dvojic 5 a 10, 8 a 9, 7 a 8, 7 a 9, 4 a 8. V každém případě $6 \mid n$, takže snadno ukážeme, že jeden z obou kladných zbytků je větší než 1, tedy $S(n) \geqq 3$.

47 – C – S – 2

Zjistěte nejmenší trojciferné číslo, které je dělitelné právě polovinou z čísel

$$2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 12,\ 16,\ 18,\ 24,\ 27,\ 36.$$

(*P. Černek*)

Řešení. Hledané číslo A má být dělitelné právě šesti z vypsaných čísel. Každé z těchto 12 čísel je dělitelné pouze prvočísly 2 a 3. Jelikož mezi těmito čísly jsou jen čtyři mocniny dvou (2, 4, 8, 16) a jen tři mocniny tří (3, 9, 27), musí být číslo A dělitelné jak dvěma, tak třemi (a tedy i šesti).

Protože kromě čísel 2, 3 a 6 má číslo A ještě další tři dělitele mezi vypsanými čísly, musí být A dělitelné čtyřmi nebo devíti, ne však oběma čísly zároveň (pak by mělo osm dělitelů 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 a 36). Rozlišme proto dva případy.

- $4 \mid A$ a $9 \nmid A$. Pak je číslo A dělitelné 2, 3, 4, 6 a 12, šestý vypsaný dělitel je nutně (jediné) z čísel 8, 16, 24. Proto $8 \mid A$, takže také (ve sporu s předchozí větou) $24 \mid A$. Musí tedy nastat druhý případ.
- $9 \mid A$ a $4 \nmid A$. Pak je číslo A dělitelné 2, 3, 6, 9 a 18, šestý vybraný dělitel je nutně číslo 27. Proto $54 \mid A$, tedy $A = 54l$, kde l je liché číslo (neboť $4 \nmid A$).

Na druhé straně, *každé* takové číslo $54l$ má zřejmě mezi vypsanými čísly právě 6 dělitelů (2, 3, 6, 9, 18, 27). Takové nejmenší trojciferné číslo je $54 \cdot 3 = 162$.

Jiné řešení. Hledané trojciferné číslo A nemůže být dělitelné ani číslem 36 (pak by mělo osm dělitelů 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36), ani číslem 24 (pak by mělo sedm dělitelů 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24). Probírejme zbylých 10 vypsaných čísel (sestupně od největšího) a zjišťujme, zda mohou dělit číslo A.

- $27 \mid A$. Protože číslo A je nutně sudé (jinak by mělo jen dělitele 3, 9, 27), platí $54 \mid A$. Číslo $54 \cdot 2 = 108$ podmínce úlohy nevyhovuje, zato číslo $3 \cdot 54 = 162$ ano. Dále už předpokládejme, že $27 \nmid A$.
- $18 \mid A$. Číslo A má pět dělitelů 2, 3, 6, 9 a 18. Šestý vypsaný dělitel je (jediné) z čísel 4, 8, 12, 16. Proto $4 \mid A$, takže také $12 \mid A$, což je spor s předchozí větou.
- $16 \mid A$. Číslo A má čtyři dělitele 2, 4, 8 a 16, poslední dva vypsaní dělitelé musí být z čísel 3, 6, 9, 12. Proto $3 \mid A$, takže také $24 \mid A$, a to jsme úvodem vyloučili.
- $12 \mid A$. Číslo A má pět dělitelů 2, 3, 4, 6 a 12, šestým vypsaným dělitelem musí být číslo 8 nebo číslo 9. Z $8 \mid A$ pak ale plyne $24 \mid A$ (spor), z $9 \mid A$ zase $18 \mid A$, a tím jsme se už zabývali.

Kdyby číslo A nebylo dělitelné žádným z čísel 36, 24, 27, 18, 16 a 12, muselo by být dělitelné všemi šesti čísly 2, 3, 4, 6, 8 a 9, a tedy přece jen i číslem 18. Tím je naše diskuse uzavřena. Hledané číslo je 162.

Jiné řešení. Stejně jako v prvním řešení vysvětlíme, že hledané číslo je dělitelné šesti. Budeme proto postupně probírat trojciferná čísla dělitelná šesti (od nejmenšího z nich, čísla 102), dokud nenajdeme takové, které má mezi vypsanými čísly právě šest dělitelů (počet těchto dělitelů dále uvádíme vždy v závorce za číslem): 102 (3), 108 (9), 114 (3), 120 (7), 126 (5), 132 (5), 138 (3), 144 (11), 150 (3), 156 (5), 162 (6). Hledané číslo je 162.

48 – A – I – 2

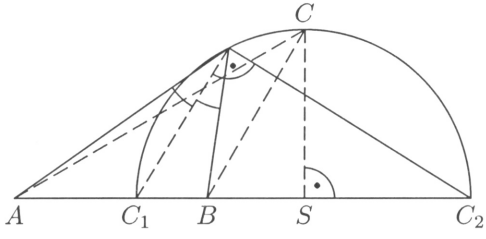
Najděte všechna kladná čísla k, pro něž platí: Ze všech trojúhelníků ABC, v nichž $|AB| = 5\,\text{cm}$ a $|AC| : |BC| = k$, má největší obsah trojúhelník rovnoramenný.

(*P. Černek*)

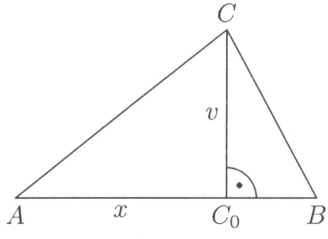
Řešení. Pro $k = 1$ uvedené charakterizaci vyhovuje libovolný rovnoramenný trojúhelník s danou základnou AB a libovolně velkou výškou z vrcholu C. Mezi nimi zřejmě neexistuje trojúhelník s největším obsahem.

Zřejmě $k \neq 1$ (pro $k = 1$ maximum neexistuje). Obě čísla k a $\frac{1}{k}$ zkoumanou vlastnost zároveň buď mají, nebo ne. Předpokládejme tedy (bez újmy na obecnosti), že $k > 1$. Na přímce AB existují dva různé body C_1, C_2, pro které platí $\frac{|AC_1|}{|BC_1|} = \frac{|AC_2|}{|BC_2|} = k$. Všechny body C v rovině, pro které $|AC| : |BC| = k$, leží na

Apolloniově kružnici o středu S sestrojené nad průměrem C_1C_2 (obr. 14). Odtud je zřejmé, že trojúhelník ABC bude mít největší obsah pro vrchol C ve středu oblouku C_1C_2 (v libovolné z polorovin určených přímkou AB). Za předpokladu $k > 1$ pro takto zvolený bod C platí $|AC| > |BC|$ a také $|AC| > |AS| > |AB|$, takže trojúhelník ABC bude rovnoramenný, právě když bude $|AB| = |BC|$. Odtud sestavíme rovnici pro odpovídající hodnotu k.



Obr. 14



Obr. 15

Pro bod C_1 především platí

$$|BC_1| = \frac{1}{k+1}|AB|, \qquad |BC_2| = \frac{1}{k-1}|AB|,$$

takže z rovnosti $|C_1C_2| = |BC_1| + |BC_2|$ vychází

$$|SC_1| = \frac{1}{2}|C_1C_2| = \frac{k}{k^2-1}|AB|.$$

Ještě spočteme

$$|BS| = |SC_1| - |BC_1| = \Big(\frac{k}{k^2-1} - \frac{1}{k+1}\Big)|AB| = \frac{1}{k^2-1}|AB|$$

a

$$|BC|^2 = |BS|^2 + |SC|^2 = |BS|^2 + |SC_1|^2 = \frac{1+k^2}{\big(k^2-1\big)^2}|AB|^2.$$

Proto z podmínky $|AB| = |BC|$ vychází rovnice

$$1 + k^2 = k^4 - 2k^2 + 1, \quad \text{neboli} \quad k^2\big(k^2-3\big) = 0,$$

která má jediné kladné řešení $k = \sqrt{3}$.

Úloze vyhovují dvě kladná čísla k, $k = \sqrt{3}$ a $k = 1/\sqrt{3}$.

Jiné řešení (bez Apolloniovy kružnice). Předpokládejme opět (bez újmy na obecnosti), že $k > 1$ je pevné. Označme C_0 patu výšky z vrcholu C a $x = |AC_0|$ (obr. 15). Pro dané x spočítáme závislost $v = v(x)$, najdeme maximum této funkce

a nakonec se podíváme, pro které $k > 1$ tomuto extrému odpovídá rovnoramenný trojúhelník.

Zřejmě je

$$|AC|^2 = x^2 + v^2, \quad |BC|^2 = (x-c)^2 + v^2, \tag{1}$$

kde $c = |AB|$ a $v = |CC_0|$, takže podmínka $|AC| = k|BC|$ je ekvivalentní rovnosti

$$x^2 + v^2 = k^2\big((x-c)^2 + v^2\big),$$

neboli

$$v^2 = -x^2 + \frac{2k^2c}{k^2-1}\,x - \frac{k^2c^2}{k^2-1}.$$

Jak víme, nabývá nalezená kvadratická funkce maxima pro

$$x = \frac{k^2c}{k^2-1} > c$$

a té odpovídá maximální hodnota

$$v_{\max} = \frac{kc}{k^2-1}.$$

Protože vyšlo $x > c$, znamená to, že $|AC| > c$, takže trojúhelník ABC může být rovnoramenný, jedině když $|BC| = |BA| = c$. Dosazením do druhé rovnosti v (1) dostaneme podmínku

$$c^2 = \left(\frac{k^2c}{k^2-1} - c\right)^2 + \frac{k^2c^2}{(k^2-1)^2} = \frac{c^2\big(k^2+1\big)}{(k^2-1)^2},$$

odkud pro $t = k^2$ vychází kvadratická rovnice

$$t + 1 = (t-1)^2,$$

která má jediný kladný kořen $t = 3$, takže $k = \sqrt{3}$. Závěr je stejný jako v předchozím řešení.

48 – A – S – 2

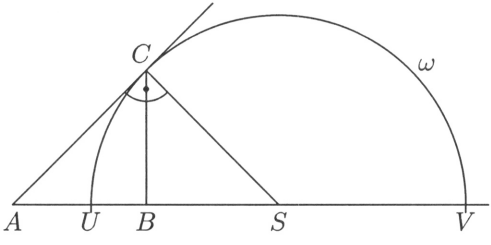
V rovině jsou dány dva různé body A a B. Najděte všechna reálná čísla $k > 1$, pro něž platí: Ze všech trojúhelníků ABC, v nichž $|AC| : |BC| = k$, největší možný vnitřní úhel při vrcholu A má trojúhelník rovnoramenný. (*J. Šimša, L. Boček*)

Řešení. Ze sinové věty $\sin\alpha : \sin\beta = a : b$ za podmínky $b = ka$, $k > 1$, plyne odhad

$$\sin\alpha = \frac{\sin\beta}{k} \leqq \frac{1}{k},$$

přitom rovnost nastane, právě když $\sin\beta = 1$, tedy $\beta = 90°$. Proto největší úhel α má ten z uvažovaných trojúhelníků ABC, který má pravý úhel u vrcholu B a jeho (ostrý) úhel při vrcholu A je určen rovností $\sin\alpha = \frac{1}{k}$. Tento pravoúhlý trojúhelník je zřejmě rovnoramenný, právě když $\alpha = 45°$, tedy když $\frac{1}{k} = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, což nastane pouze pro hodnotu $k = \sqrt{2}$.

Jiné řešení. Předpokládejme, že číslo $k > 1$ je pevné. Zvolíme-li v rovině úsečku AB, vrcholy C všech uvažovaných trojúhelníků ABC zaplní Apolloniovu kružnici ω všech bodů X s vlastností $|AX| : |BX| = k$. Úhel BAC bude maximální, právě když přímka AC bude tečnou této kružnice ω (a bod C bude její bod dotyku, obr. 16).



Obr. 16

Popišme polohu krajních bodů U, V toho průměru kružnice ω, který leží na přímce AB: bod U je vnitřním bodem úsečky AB, bod V vnitřním bodem polopřímky opačné k polopřímce BA, přičemž pochopitelně platí

$$|AU| : |BU| = |AV| : |BV| = k.$$

Odtud snadno pomocí délky $c = |AB|$ určíme, že

$$|AU| = \frac{kc}{k+1} \quad \text{a} \quad |AV| = \frac{kc}{k-1}.$$

Bod C na kružnici ω je bodem dotyku tečny vedené bodem A k této kružnici, právě když platí (mocnost bodu ke kružnici) rovnost $|AC|^2 = |AU| \cdot |AV|$, z níž po dosazení za $|AU|$ a $|AV|$ dostaneme

$$|AC| = \frac{kc}{\sqrt{k^2-1}}, \quad \text{takže} \quad |BC| = \frac{|AC|}{k} = \frac{c}{\sqrt{k^2-1}}.$$

Snadno se zjistí, že trojúhelník o stranách

$$\frac{c}{\sqrt{k^2-1}}, \ \frac{kc}{\sqrt{k^2-1}}, \ c$$

(jenž je pravoúhlý pro každé $k > 1$) je rovnoramenný jedině pro $k = \sqrt{2}$.

Jiné řešení. Do kosinové věty $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ dosadíme $b = ka$ a vyjádříme z ní $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{(k^2-1)a^2 + c^2}{2kac} = \frac{(k^2-1)a}{2kc} + \frac{c}{2ka}.$$

Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dvou čísel platí

$$\frac{(k^2-1)a}{2kc} + \frac{c}{2ka} \geqq 2\sqrt{\frac{(k^2-1)a}{2kc} \cdot \frac{c}{2ka}} = \frac{\sqrt{k^2-1}}{k},$$

takže $\cos\alpha \geqq \cos\alpha_0$, neboli $\alpha \leqq \alpha_0$, kde α_0 je ostrý úhel určený rovností

$$\cos\alpha_0 = \frac{\sqrt{k^2-1}}{k}.$$

Maximální hodnota $\alpha = \alpha_0$ se dosáhne, když se obě průměrovaná čísla rovnají, tedy když

$$\frac{(k^2-1)a}{2kc} = \frac{c}{2ka}, \quad \text{čili} \quad c = a\sqrt{k^2-1}.$$

Protože navíc $b = ka > a$, zjišťujeme, že největší možný úhel α má trojúhelník rovnoramenný jedině v případě $c = a$; z rovnosti $a\sqrt{k^2-1} = a$ tak nacházíme (jedinou) hledanou hodnotu $k = \sqrt{2}$.

48 – A – I – 3

Pro která celá čísla a je maximum i minimum funkce

$$y = \frac{12x^2 - 12ax}{x^2 + 36}$$

celé číslo? *(P. Černek)*

Řešení. Budeme nejprve zjišťovat obor hodnot uvedené funkce, tj. pro která reálná s existuje aspoň jedno reálné x takové, že

$$y = \frac{12x^2 - 12ax}{x^2 + 36} = s.$$

Jednoduchou úpravou dostaneme rovnici

$$(s-12)x^2 + 12ax + 36s = 0, \tag{1}$$

která je kvadratická, pokud $s \neq 12$. Z rovnice plyne, že $s = 12$ patří do oboru hodnot, jen když $ax = -36$, tedy jen když $a \neq 0$. Pro $a = 0$ dostaneme pro x

rovnici $x^2 = \dfrac{-36s}{s-12}$, z níž vychází pro s nerovnost $0 \leqq s < 12$, takže obor hodnot uvažované funkce nemá pro $a = 0$ maximum.

Předpokládejme proto, že $a \neq 0$ a $s \neq 12$. V tomto případě je rovnice (1) kvadratická a bude mít v reálném oboru řešení, právě když její diskriminant

$$D = 12^2a^2 - 4 \cdot 36s(s-12) = 12^2(a^2 - s^2 + 12s)$$

bude nezáporný, tj. právě když

$$6 - \sqrt{36 + a^2} \leqq s \leqq 6 + \sqrt{36 + a^2}.$$

Krajní body nalezeného intervalu (který zřejmě obsahuje i dříve nalezený prvek oboru hodnot $s = 12$) jsou minimum a maximum dané funkce. Pokud to mají být celá čísla, musí pro vhodné přirozené číslo b platit $36+a^2 = b^2$, tedy $(b-a)(b+a) = 36$. Z každého rozkladu čísla 36 na součin dvou přirozených činitelů $36 = mn$ dostaneme $a = \frac{1}{2}(m-n)$, $b = \frac{1}{2}(m+n)$, což jsou celá čísla, jen když m a n mají stejnou paritu ($m \equiv n \pmod 2$), a protože $a \neq 0$, vyhovuje jedině rozklad $36 = 2 \cdot 18$, odkud $b = 10$, $a = \pm 8$.

Odpověď: Požadovanou vlastnost mají právě dvě celá čísla a, a to $a = 8$ a $a = -8$.

48 – A – III – 6

Najděte všechny dvojice reálných čísel a a b, pro které má soustava rovnic

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} = a, \qquad \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = b$$

s neznámými x a y řešení v oboru reálných čísel. (*J. Šimša*)

Řešení. Má-li daná soustava řešení (x, y) pro čísla $a = A$, $b = B$, má zřejmě i řešení (kx, ky) pro libovolné $k \neq 0$ a pro čísla $a = \dfrac{1}{k}A$, $b = kB$. Odtud vidíme, že existence řešení dané soustavy závisí jen na hodnotě součinu ab.

Budeme tedy nejdříve zkoumat hodnoty výrazu

$$P(u, v) = \frac{(u+v)(u^3+v^3)}{(u^2+v^2)^2},$$

kde čísla u a v splňují normalizační podmínku $u^2 + v^2 = 1$. Podle ní platí

$$\begin{aligned} P(u,v) &= (u+v)(u^3+v^3) = (u+v)^2(u^2-uv+v^2) = \\ &= (u^2+2uv+v^2)(1-uv) = (1+2uv)(1-uv). \end{aligned}$$

Za podmínky $u^2+v^2=1$ nabývá součin uv všech hodnot z intervalu $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ (je-li $u=\cos\alpha$ a $v=\sin\alpha$, je $uv=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$). Proto stačí zjistit množinu hodnot funkce $f(t)=(1+2t)(1-t)$ na intervalu $t\in\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$. Z vyjádření

$$f(t)=-2t^2+t+1=-2\Big(t-\frac{1}{4}\Big)^2+\frac{9}{8}$$

plyne, že hledanou množinou hodnot je uzavřený interval s krajními body $f(-\frac{1}{2})=$ $=0$ a $f(\frac{1}{4})=\frac{9}{8}$.

To tedy znamená, že pokud má daná soustava řešení, musí pro její parametry a a b platit $0\leqq ab\leqq\frac{9}{8}$, přitom rovnost $ab=0$ je možná, jen když $x+y=0$, tehdy však $a=b=0$.

Splňují-li naopak některá čísla a a b nerovnosti $0<ab\leqq\frac{9}{8}$, existují dle dokázaného čísla u a v taková, že $u^2+v^2=1$ a $(u+v)(u^3+v^3)=ab$. Označíme-li $a'=u+v$ a $b'=u^3+v^3$, pak z rovnosti $a'b'=ab\neq 0$ plyne, že oba poměry $a:a'$ a $b':b$ mají tutéž hodnotu $k\neq 0$. Pak ale dvojice $x=ku$ a $y=kv$ je zřejmě řešením soustavy rovnic ze zadání úlohy pro uvažované hodnoty a a b.

48 – C – I – 6

Pro libovolnou dvojici reálných čísel a, b splňující vztah $a+b=1$ platí

$$\sqrt{a^2+a+1}+\sqrt{b^2+b+1}>2. \tag{1}$$

Jsou-li navíc čísla a, b nezáporná, platí také

$$\sqrt{a^2+a+1}+\sqrt{b^2+b+1}<3. \tag{2}$$

Obě tvrzení dokažte. *(P. Leischner, J. Švrček)*

Řešení. Nejprve je nutné ověřit, zda jsou dané výrazy definovány pro všechna reálná čísla a, b. Stačí dokázat, že pro každé reálné u je výraz $U=u^2+u+1$ nezáporný.

1. způsob:

$$U=u^2+2\cdot\frac{1}{2}u+\Big(\frac{1}{2}\Big)^2-\Big(\frac{1}{2}\Big)^2+1=\Big(u+\frac{1}{2}\Big)^2+\frac{3}{4}.$$

Odtud vidíme, že je dokonce

$$U=u^2+u+1\geqq\frac{3}{4}, \tag{3}$$

protože druhá mocnina reálného výrazu je vždy nezáporná.

2. způsob: Pro $u\geqq 0$ je zřejmě výraz U kladný. Je-li $u<0$, je

$$U>u^2+u+1+u=(u+1)^2\geqq 0.$$

3. způsob: Představme si rovnost $U = u^2 + u + 1$ jako kvadratickou rovnici $u^2 + u + (1 - U) = 0$ s parametrem U. Tento vztah je splněn pro nějaké reálné u, jen když je příslušný diskriminant nezáporný, tj. $1 - 4(1 - U) \geqq 0$, a odtud $U \geqq \frac{3}{4}$.

4. způsob: Úpravou na tvar $U = u(u + 1) + 1$ a substitucí $u = s - \frac{1}{2}$ (viz též první pomocnou úlohu) máme $U = (s - \frac{1}{2})(s + \frac{1}{2}) + 1 = s^2 + \frac{3}{4}$, což vede na odhad (3).

Dále asi řešitelé budou zkoušet výraz

$$V = \sqrt{a^2 + a + 1} + \sqrt{b^2 + b + 1} \tag{4}$$

upravovat, aby jej mohli odhadnout. Jak asi budou postupovat? Uvedeme některé možnosti:

I. Dosazením $b = 1 - a$ do (3) dostaneme

$$V = \sqrt{a^2 + a + 1} + \sqrt{a^2 - 3a + 3}. \tag{5}$$

Tím jsme se ovšem k cíli moc nepřiblížili. Zkusme ještě obě strany rovnosti (5) umocnit:

$$\begin{aligned} V^2 &= a^2 + a^2 - 2a + 1 + 3 + 2\sqrt{a^2 + a + 1}\sqrt{a^2 - 3a + 3} = \\ &= a^2 + (a - 1)^2 + 3 + 2\sqrt{a^4 - 2a^3 + a^2 + 3}. \end{aligned}$$

Výraz pod odmocninou se dá ještě po vytknutí a z prvních tří členů upravit, takže dostaneme

$$V^2 = 3 + a^2 + (a - 1)^2 + 2\sqrt{3 + a^2(a - 1)^2} \tag{6}$$

II. Rovnost (4) umocníme přímo a při dalších úpravách opakovaně nahrazujeme součty $a + b$ jedničkami:

$$\begin{aligned} V^2 &= a^2 + b^2 + 3 + 2\sqrt{a^2b^2 + ab(a + b + 1) + a^2 + b^2 + a + b + 1} = \\ &= 3 + a^2 + 2\sqrt{3 + a^2b^2} + b^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Důkaz nerovnosti (1).

1. řešení (bez umocňování výrazu V): Jsou-li a, b nezáporná, je $V > \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$. Jestliže je $b < 0$, pak musí být $a > 1$. Položme tedy na pravé straně vztahu (4) $a = 1$ a druhou odmocninu odhadněme pomocí (3). Dostaneme tak silnější odhad, než se požaduje: $V > \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{3} > \frac{5}{2}$.

2. řešení: Když uvážíme, že druhá mocnina každého reálného čísla je nezáporná, odhadneme z (6), že $V^2 \geqq 3 + 2\sqrt{3} > 4$, a po odmocnění vyjde, že $V > 2$.

3. řešení: Ze vztahu (7) vidíme, že

$$\begin{aligned} V^2 &> 3 + \left(a^2 + 2\sqrt{a^2}\sqrt{b^2} + b^2\right) = \\ &= 3 + \left(\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}\right)^2 = 3 + (|a| + |b|)^2 \geqq 4, \end{aligned}$$

a tedy $V > 2$.

Důkaz nerovnosti (2).

1. řešení: Protože a, b jsou nezáporná a nemůže být $a = b = 0$, platí

$$V < \sqrt{a^2 + 2a + 1} + \sqrt{b^2 + 2b + 1} = (a + 1) + (b + 1) = 3.$$

2. řešení: Z podmínky $a + b = 1$ pro nezáporná čísla a, b máme $0 \leqq a \leqq 1$, $0 \leqq b \leqq 1$ a hodnotu výrazu V můžeme odhadnout dosazením $a = b = 1$ do (7): $V^2 < 3 + 1 + 2\sqrt{4} + 1 = 9$, takže $V < 3$.

3. řešení: Při odhadu můžeme různým způsobem uplatnit užitečné nerovnosti ze čtvrté pomocné úlohy. Zvolíme-li například $m = a^2 + a + 1$ a $n = b^2 + b + 1$, dostáváme

$$m + n = (a^2 + b^2) + (a + b) + 2 = 1 - 2ab + 3 = 4 - 2ab \leqq 4,$$

kde vztah

$$a^2 + b^2 = 1 - 2ab$$

použitý při úpravě jsme získali umocněním podmínky $a+b = 1$. Podle nerovnosti b) ze 4. pomocné úlohy pak je

$$V = \sqrt{m} + \sqrt{n} \leqq \sqrt{2(m + n)} \leqq \sqrt{8} < 3.$$

48 – C – S – 1

Najděte všechny dvojice a, b nezáporných reálných čísel, pro které platí

$$\sqrt{a^2 + b} + \sqrt{b^2 + a} = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a + b}.$$

(*J. Šimša*)

Řešení. Umocněním rovnice s nezápornými stranami a dalšími ekvivalentními úpravami postupně dostaneme

$$\begin{aligned}
a^2 + b + 2\sqrt{(a^2 + b)(b^2 + a)} + b^2 + a &= a^2 + b^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(a + b)} + a + b, \\
\sqrt{(a^2 + b)(b^2 + a)} &= \sqrt{(a^2 + b^2)(a + b)}, \\
(a^2 + b)(b^2 + a) &= (a^2 + b^2)(a + b), \\
a^2b^2 + a^3 + b^3 + ab &= a^3 + ab^2 + ba^2 + b^3, \\
ab(ab + 1 - a - b) &= 0, \\
ab(a - 1)(b - 1) &= 0.
\end{aligned}$$

Hledanými jsou proto právě ty dvojice nezáporných čísel a, b, které splňují aspoň jednu z podmínek $a = 0$, $b = 0$, $a = 1$ nebo $b = 1$.

48 – Z5 – I – 4

V šestici čísel 7, _, _, _, _, 66 doplňte chybějící čísla tak, aby každé číslo bylo součtem předcházejících dvou.

Řešení. Označme x první z neznámých čísel. Následující čísla jsou $7 + x$, $x + (7 + x) = 2x + 7$, $(7 + x) + (2x + 7) = 3x + 14$ a poslední číslo šestice je $(2x + 7) + (3x + 14) = 5x + 21 = 66$. Odtud máme $x = 9$.

Hledaná šestice čísel je 7, 9, 16, 25, 41 a 66.

48 – Z6 – I – 2

Rodné číslo má deset číslic. První dvojčíslí rodného čísla je posledním dvojčíslím roku narození. Druhé dvojčíslí je u chlapců určeno měsícem narození, u děvčat je to měsíc narození zvětšený o 50. Třetí dvojčíslí je dáno dnem narození. Poslední nenulová čtveřice čísel je zvolena tak, aby rodné číslo bylo dělitelné 11. Kolik nejvíce dětí se mohlo narodit 23. 11. 1998, jestliže každé z nich musí mít jiné rodné číslo?

Řešení. Rodné čísla chlapců narozených 23. 11. 1998 jsou čísla tvaru

$$9\,811\,230\,000 + x = 891\,930\,000 \cdot 11 + x.$$

Číslo x je tedy libovolné přirozené nejvýše čtyřciferné číslo, které je násobkem 11, tj. libovolné z čísel $1 \cdot 11, 2 \cdot 11, \ldots, 909 \cdot 11 = 9\,999$. Počet možných rodných čísel pro chlapce je 909.

Rodná čísla dívek narozených 23. 11. 1998 jsou čísla tvaru

$$9\,861\,230\,000 + x = 896\,475\,454 \cdot 11 + 6 + x.$$

Aby byla tato rodná čísla dělitelná 11, musí být x přirozené nejvýše čtyřciferné číslo, které při dělení 11 dává zbytek 5, tj. některé z čísel $5, 5+1 \cdot 11, 5+2 \cdot 11, \ldots, 5 + 908 \cdot 11 = 9\,993$. Takových čísel je $1 + 908 = 909$.

Pro den 23. 11. 1998 lze přiřadit nejvýše 1 818 různých rodných čísel.

48 – Z9 – II – 3

Najděte prvočísla p, r, která splňují rovnost

$$p + p^2 + p^3 + r + r^2 + r^3 = 2\,393.$$

(*Mészáros*)

Řešení. Levou stranu zadané rovnosti rozdělíme na dva součty: $(p+p^2+p^3)+(r+r^2+r^3) = 2\,393$. Hledaná prvočísla p, r musí být různá, protože pravá strana

je liché číslo. Zároveň je jasné, že jeden ze součtů na levé straně musí být sudý a druhý lichý. Součet prvočísla s jeho druhou a třetí mocninou je však sudý jen pro sudé prvočíslo 2. Položme $p = 2$, čili $p + p^2 + p^3 = 2 + 4 + 8 = 14$, takže $r + r^2 + r^3 = 2\,393 - 14 = 2\,379$. Mezi prvočísly, jejichž třetí mocnina je menší než 2 379, je největší číslo 13 ($13^3 = 2\,197$). Dosazením ověříme, že $r = 13$ splňuje rovnost $r + r^2 + r^3 = 2\,379$.

Hledanými prvočísly jsou čísla 2 a 13.

49 – A – I – 1

Nechť $P(x)$, $Q(x)$ jsou kvadratické trojčleny takové, že tři z kořenů rovnice $P(Q(x)) = 0$ jsou čísla -22, 7, 13. Určete čtvrtý kořen této rovnice.

Řešení. Vzhledem k tomu, že rovnice $P\big(Q(x)\big) = 0$ má reálný kořen, má kvadratická rovnice $P(x) = 0$ dva reálné kořeny r_1, r_2 (nevylučujeme, že $r_1 = r_2$). Mnohočlen $P\big(Q(x)\big)$ lze proto zapsat ve tvaru

$$P\big(Q(x)\big) = a\big(Q(x) - r_1\big)\big(Q(x) - r_2\big),$$

kde a je reálné číslo $a \neq 0$. Rovnice $P\big(Q(x)\big) = 0$ má podle zadání čtyři reálné kořeny, proto každá z kvadratických rovnic $Q(x) - r_1 = 0$, $Q(x) - r_2 = 0$ musí mít dva reálné kořeny. Z Viètových vzorců plyne, že součet kořenů v obou kvadratických rovnicích je týž, neboť obě rovnice mají stejný koeficient u lineárního členu. Přitom tři ze čtyř reálných kořenů obou kvadratických rovnic $Q(x) - r_1 = 0$, $Q(x) - r_2 = 0$ jsou dle zadání čísla -22, 7, 13, čtvrtý kořen označme q. Dále mohou nastat tři možnosti:

(i) Jedna z kvadratických rovnic má kořeny -22, 7, druhá má kořeny 13 a q. Pak platí $-22 + 7 = 13 + q$, tedy $q = -28$.

(ii) Jedna z kvadratických rovnic má kořeny -22, 13, druhá má kořeny 7 a q. Pak platí $-22 + 13 = 7 + q$, tedy $q = -16$.

(iii) Jedna z kvadratických rovnic má kořeny 13, 7, druhá má kořeny -22 a q. Potom však platí $13 + 7 = -22 + q$, tedy $q = 42$.

Je zřejmé, že v každém z případů (i), (ii), (iii) existují příslušné kvadratické trojčleny $P(x)$ a $Q(x)$. Má-li mít jedna z kvadratických rovnic $Q(x) - r_1 = 0$, $Q(x) - r_2 = 0$ kořeny -22, 7 a druhá 13, -28, položíme $Q(x) = x^2 + 15x$, $r_1 = (-22) \cdot 7 = -154$, $r_2 = 13 \cdot (-28) = -364$, $P(x) = (x + 154)(x + 364) = x^2 + 518x + 56056$. Obdobně lze postupovat ve zbývajících případech.

Čtvrtým kořenem rovnice $P\big(Q(x)\big) = 0$ může být kterékoliv z čísel -28, -16, 42.

Jiné řešení. Úvahy o koeficientu u lineárního členu s využitím Viètových vztahů lze nahradit následující úvahou o grafech kvadratických funkcí.

Protože grafy kvadratických funkcí $f_1 : y = Q(x) - r_1$ a $f_2 : y = Q(x) - r_2$ mají tutéž osu souměrnosti a přitom existují čtyři reálné kořeny rovnice $P(Q(x)) = 0$, jsou tyto kořeny na ose x po dvou středově souměrné podle průsečíku os souměrnosti grafů obou funkcí f_1 a f_2 s osou x. Vzhledem k poloze daných tří kořenů na ose x lze dále uvažovat tři možnosti stejně jako v předcházejícím řešení. Např.

(i) Střed souměrnosti je $-7{,}5 = \frac{-22+7}{2}$, čtvrtý kořen leží na ose x a je symetrický s obrazem čísla 13 dle středu souměrnosti v bodě $-7{,}5$. Čtvrtým hledaným kořenem je tudíž číslo -28.

Podobně lze postupovat ve zbylých dvou případech a dospějeme tak ke stejnému výsledku.

49 – B – I – 1

Pro která reálná čísla t má funkce $f(x) = 5x + 44 + t|x - 2| - 3|x - t|$ maximum rovné 0? *(P. Černek)*

Řešení. Daná funkce je lineární lomená, protože obsahuje dva výrazy s absolutní hodnotou, které způsobují, že jejím grafem není přímka, nýbrž lomená čára. Její definiční obor, množinu $\mathbb{R}$ všech reálných čísel, můžeme v tomto případě rozdělit na tři disjunktní části podle toho, jak se příslušná absolutní hodnota chová (zda je výraz v absolutní hodnotě kladný, či záporný). Protože jedna z absolutních hodnot závisí na parametru t, rozlišíme, zda je $t < 2$ (případ A), či $t \geqq 2$ (případ B).

Rozlišíme dva případy, podle toho, zda je $t < 2$ (případ A), či $t \geqq 2$ (případ B).

A. Nechť $t < 2$. Množina $\mathbb{R}$ se nám rozpadne na tři disjunktní intervaly, $\mathbb{R} = (-\infty, t\rangle \cup (t, 2\rangle \cup (2, \infty)$.

(a) V intervalu $(-\infty, t\rangle$ je, jak snadno spočteme, $f(x) = (8 - t)x + 44 - t$. Protože za uvedeného předpokladu je $8 - t > 0$, je funkce f v tomto intervalu rostoucí a nabyde maxima v bodě $x = t$.

(b) V intervalu $(t, 2\rangle$ je $f(x) = (2 - t)x + 44 + 5t$. Protože za uvedeného předpokladu je $2 - t > 0$, je funkce f i v tomto intervalu rostoucí a nabyde maxima v bodě $x = 2$. Přitom zřejmě platí $f(t) < f(2) = 2(2 - t) + 44 + 5t$.

(c) V intervalu $(2, \infty)$ je $f(x) = (2 + t)x + 44 + t$. Tato funkce je pro $2 + t > 0$ na tomto intervalu rostoucí a shora neomezená, takže nemůže mít maximum. Musí tedy nutně být $2 + t \leqq 0$, tj. $t \leqq -2$, funkce f bude v intervalu $(2, \infty)$ nerostoucí a její hodnota nebude větší než $f(2)$, kterou jsme spočítali v (b).

Zjistili jsme tedy, že za předpokladu $t < 2$ nabývá funkce f maxima jedině pro $t \leqq -2$, přičemž její maximum je $f(2) = 2(2 - t) + 44 + 5t$. Toto maximum se rovná 0, právě když $2(2 - t) + 44 + 5t = 0$, neboli $t = -16$, což je naštěstí číslo, které splňuje podmínku $t \leqq -2$.

B. Nechť $t \geqq 2$. Množina $\mathbb{R}$ se nám rozpadne na tři disjunktní intervaly, $\mathbb{R} = (-\infty, 2\rangle \cup (2, t\rangle \cup (t, \infty)$, přičemž prostřední „interval“ bude prázdný pro $t = 2$

(to však není pro další úvahy podstatné, jinak bychom mohli tento případ snadno rozebrat samostatně).

V intervalu $(-\infty, 2\rangle$ je $f(x) = (8-t)x + 44 - t$. Kdyby teď bylo $8 - t < 0$, byla by funkce f v tomto intervalu klesající a shora neomezená, takže by nemohla mít maximum. Proto je $8 - t \geqq 0$, tj. $t \leqq 8$. Pak ale je $f(2) = 2(8-t) + 44 - t = 60 - 3t > 0$. Odtud hned vidíme, že za uvedeného předpokladu nemůže funkce f nikdy mít maximum rovné 0.

Z uvedeného rozboru vyplývá, že uvažovaná funkce má maximum rovné 0 jedině pro $t = -16$.

Jiné řešení. Víme, že grafem dané funkce f je lomená čára, která se v našem případě skládá ze dvou polopřímek (pro $t = 2$), resp. ze dvou polopřímek a jedné úsečky (návodná úloha 1).

Dále bychom si měli uvědomit, že pokud má takováto funkce maximum, nabývá ho určitě v některém ze „zlomových" bodů (tam, kde je příslušný výraz v absolutní hodnotě nulový). To samozřejmě neznamená, že funkce nemůže maximum nabýt i v jiných bodech (je-li konstantní na některém intervalu, návodná úloha 2).

V našem případě jsou těmito zlomovými body pro $x = 2$ bod $A(2, 54 - 3|t-2|)$, pro $x = t$ bod $B(t, 5t + 44 + t|t-2|)$.

Protože jeden z bodů $x = 2$, $x = t$ má být bodem maxima funkce f rovného 0, zjistíme, pro která t je jedna z y-ových souřadnic bodů A a B nulová (a druhá nekladná).

A: $54 - 3|t-2| = 0$,
$|t-2| = 18$,
$t = 20$ anebo $t = -16$.

B: $5t + 44 + t|t-2| = 0$,
$t \geqq 2 \Rightarrow t^2 + 3t + 44 = 0$,
nemá řešení.
$t < 2 \Rightarrow t^2 - 7t - 44 = 0$.
$t = 11$ anebo $t = -4$,
vyhovuje jen $t = -4$.

Máme tak tři možnosti:

Pro $t = 20$ je $A(2,0)$, $B(20, 504)$, což nevyhovuje.

Pro $t = -16$ je $A(2,0)$, $B(-16, -80 + 11 - 16 \cdot 18)$, zatím vyhovuje.

Pro $t = -4$ je $A(2, 36)$, $B(-4, 0)$, což nevyhovuje.

Zjistili jsme, že úloha má řešení nejvýše pro $t = -16$, kterému odpovídá funkce $f(x) = 5x + 44 - 16|x-2| - 3|x+16|$. Pro tuto funkci samozřejmě platí $f(2) = 0$. Ověřit, že tato hodnota je skutečně maximem funkce f, můžeme více způsoby. Například tak, že ověříme, že pro $x < -16$ je uvedená funkce neklesající (pro $x < -16$ je $f(x) = 24x + 60$) a současně pro $x > 2$ nerostoucí (pro $x > 2$ je $f(x) = -14x + 28$).

49 – B – II – 1

Zjistěte všechna reálná čísla c, pro která má rovnice

$$(c^2 + c - 8)(x + 2) - 8|x - c + 2| = c|x + c + 14|$$

nekonečně mnoho řešení v oboru celých čísel. (*J. Šimša*)

Řešení. Označíme-li pro dané reálné c

$$f_c(x) = c|x + c + 14| + 8|x - c + 2| - (c^2 + c - 8)(x + 2)$$

odpovídající po částech lineární funkci, je zřejmé, že rovnice $f_c(x) = 0$ bude mít nekonečně mnoho celočíselných řešení, právě když bude funkce f_c identicky rovna nule na některém z nekonečných intervalů $(-\infty, \min(c - 2, -c - 14)\rangle$ nebo $\langle\max(c - 2, -c - 14), \infty)$. Vyšetříme postupně obě možnosti.

a) Nechť $x \leqq \min(c - 2, -c - 14)$, pro taková x platí

$$\begin{aligned} f_c(x) &= -c(x + c + 14) - 8(x - c + 2) - (c^2 + c - 8)(x + 2) = \\ &= -c(2 + c)x - 3c^2 - 8c = -c\big(x(c + 2) + 3c + 8\big). \end{aligned}$$

Na tomto intervalu bude funkce f_c identicky rovna nule, právě když $c = 0$ (soustava $c + 2 = 0$, $3c + 8 = 0$ nemá žádné řešení).

b) Nechť $x \geqq \max(c - 2, -c - 14)$, pro taková x platí

$$\begin{aligned} f_c(x) &= c(x + c + 14) + 8(x - c + 2) - (c^2 + c - 8)(x + 2) = \\ &= (16 - c^2)x - c^2 + 4c + 32. \end{aligned}$$

Na tomto intervalu bude funkce f_c identicky rovna nule, právě když bude současně platit $c^2 = 16$ a $c^2 - 4c - 32 = 0$. Dosazením $c^2 = 16$ do druhé rovnice vychází $c = -4$, což je zřejmě jediné řešení obou rovnic.

Závěr. Daná rovnice má v oboru celých čísel nekonečně mnoho řešení, právě když $c = 0$ nebo $c = -4$ (v prvním případě rovnici vyhovují všechna celá čísla $x \leqq -14$, v druhém pak všechna celá čísla $x \geqq -6$).

49 – C – I – 4

Jirka zhotovil papírový model pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ s podstavou $ABCD$. Když pak model podél čtyř hran rozřízl, bylo ho možno rozvinout (bez překrytí) do roviny. Kolik různých sítí daného jehlanu tak mohl Jirka dostat? Ukázalo se, že síť, kterou Jirka dostal, měla tvar (nekonvexního) sedmiúhelníku. Vypočtěte úhel AVB v boční stěně jehlanu. (*P. Leischner*)

Řešení. Počet různých sítí daného jehlanu určíme tak, že nejprve všechny možné sítě nakreslíme. Abychom některou možnost neopomenuli, měli bychom do výčtu

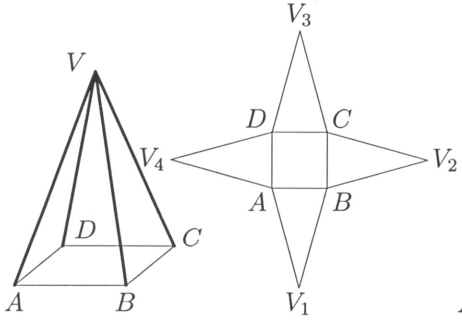
sítí vnést *určitý systém*. Popíšeme dva přístupy, které takový systém vytvářejí (a které budou patrně žákům nejbližší).

Přístup 1 („od sítě k jehlanu"). Každá síť bude složena z jednoho čtverce o straně a a čtyř rovnoramenných trojúhelníků o stranách a, b, b, kde a značí délku podstavné hrany a b délku boční hrany daného jehlanu $ABCDV$. Přemýšlejme tedy o tom, jak takový čtverec a čtyři trojúhelníky „slepit" podél shodných stran do „celku" a zda tento celek skutečně vytvoří síť jehlanu. Je velmi přirozené rozčlenit řešení tohoto úkolu *podle počtu stran čtverce, které budou slepeny* (možné počty jsou 1 až 4).

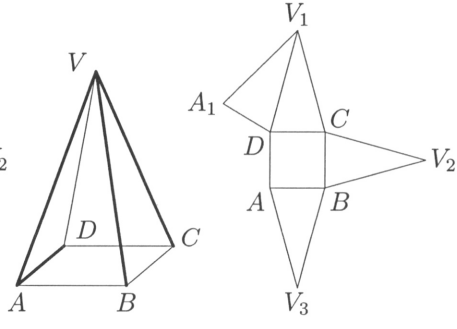
Přístup 2 („od jehlanu k síti"). Přemýšlejme o tom, jak rozříznout daný jehlan $ABCDV$ podél čtyř hran, abychom po rozvinutí dostali jeho síť. (Brzy si při tom uvědomíme jeden obecný poznatek: z každého vrcholu tělesa musí vycházet aspoň jedna hrana řezu.) Protože nám jde o počet různých (tj. po dvou neshodných) sítí, s ohledem na symetrii daného jehlanu není příliš vhodné systematizovat čtveřice hran řezu podle toho, zda obsahují některé konkrétní hrany (jako např. hrany AB, AV apod.). Výhodnější je rozdělení těchto čtveřic do skupin podle toho, *kolik hran řezu je v jehlanu podstavných* (a kolik bočních).

Protože oba popsané přístupy vedou ke shodné systematizaci (je-li právě k hran řezu podstavných, je v příslušné síti právě $4 - k$ stran čtverce slepeno s trojúhelníky), popíšeme výčet všech sítí jen podle Přístupu 2:

1. Neleží-li v podstavě $ABCD$ žádná hrana řezu, je jehlan rozříznut podél všech čtyř bočních hran, příslušná síť je na obr. 17.



Obr. 17

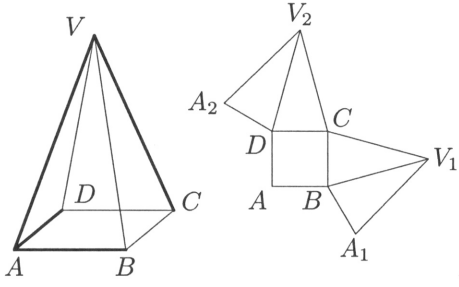


Obr. 18

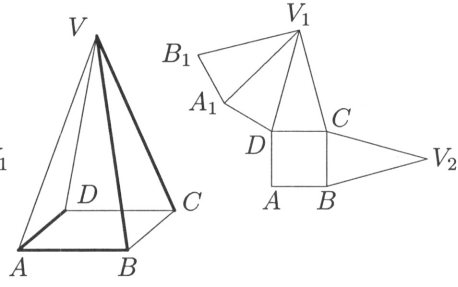
2. Předpokládejme, že v podstavě $ABCD$ leží jediná hrana řezu, například hrana AD. Z vrcholů B a C musí vycházet nějaké hrany řezu, mohou to tedy být jedině hrany BV a CV. Tři hrany řezu jsou tedy AD, BV a CV, s ohledem na symetrii je lhostejno, zda je čtvrtou hranu řezu AV nebo DV, nechť je to tedy hrana AV jako na obr. 18.

3. Předpokládejme, že v podstavě $ABCD$ leží právě dvě hrany řezu. Rozlišme, zda jsou to hrany sousední (např. AB a AD), nebo hrany protější (např. AD a BC); pro větší přehlednost oba případy posuďme v oddělených odstavcích:

(3a) Je-li podstava rozříznuta právě podél hran AB a AD (takže řezem v podstavě je lomená čára BAD), musí být třetí hranou řezu hrana CV, čtvrtá hrana řezu je pak jedna z hran AV, BV, nebo DV. S ohledem na symetrii případů, kdy je čtvrtou hranou řezu BV nebo DV, uvádíme jen obrázky pro hrany řezu AV (obr. 19) a BV (obr. 20).

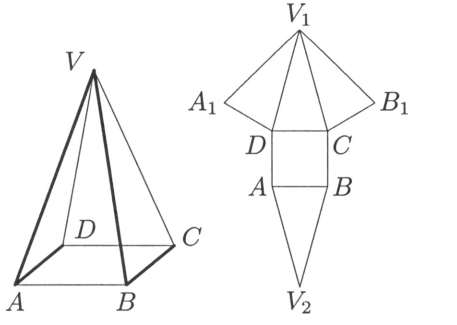


Obr. 19

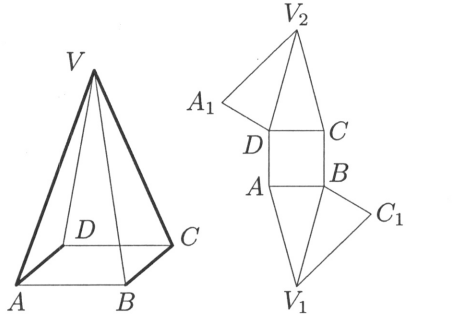


Obr. 20

(3b) Je-li podstava rozříznuta právě podél hran AD a BC, je třetí hranou řezu jedna z bočních hran AV, DV a čtvrtou hranou řezu jedna z bočních hran BV, CV (nemohou to totiž být ani obě hrany AV, DV, ani obě hrany BV, CV). S ohledem na symetrii stačí rozlišit jen dva případy: boční hrany řezu jsou buď AV a BV (obr. 21), nebo AV a CV (obr. 22).

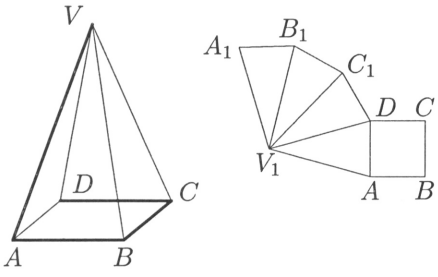


Obr. 21

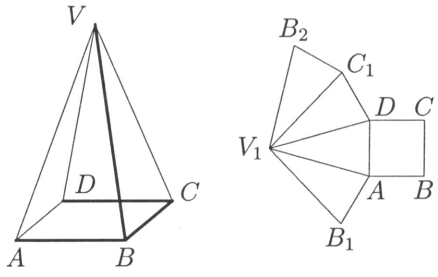


Obr. 22

4. Předpokládejme, že v podstavě $ABCD$ leží právě tři hrany řezu, například hrany AB, BC a CD, takže řezem v podstavě je lomená čára $ABCD$. S ohledem na symetrii nyní stačí rozlišit jen dva případy: čtvrtá hrana řezu vede do vrcholu V buďto z jednoho z obou krajních vrcholů zmíněné lomené čáry



Obr. 23



Obr. 24

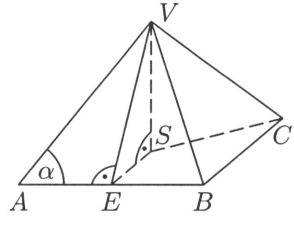
$ABCD$, například bodu A (obr. 23), nebo z jednoho z obou prostředních vrcholů, například bodu B (obr. 24).

Zjistili jsme, že daný jehlan má právě osm různých sítí. (Většina žáků asi správně všech osm sítí do svých řešení nakreslí, aniž pocítí nutnost vysvětlovat, proč jiné sítě neexistují. Diskutujme s nimi o této otázce.)

Přejděme nyní k druhé části úlohy, otázce, kdy některá ze sítí daného jehlanu má tvar nekonvexního sedmiúhelníku. Podle obrázků vidíme, že každá síť má, obecně vzato, osm vrcholů; jejich počet se sníží na sedm, právě když se úhel u jednoho z osmi obecných vrcholů „napřímí", tj. bude mít velikost 180°. Velikosti všech dotyčných úhlů lze snadno vyjádřit pomocí $\omega = |\sphericalangle AVB|$ a $\alpha = |\sphericalangle BAV|$; zjistíme tak, popsaná situace nastane, jen když jeden z úhlů

$$2\alpha,\ \alpha + 90°,\ 2\alpha + 90°,\ 2\omega,\ 3\omega \text{ nebo } 4\omega \qquad (*)$$

bude 180°. Položme si nyní poněkud obecnější otázku: Jaké hodnoty α a ω jsou přípustné, tj. odpovídají nějakému jehlanu $ABCDV$? Označme S střed čtverce $ABCD$ a E střed hrany AB (obr. 25), z pravoúhlého trojúhelníku EVS plyne, že



Obr. 25

$|EV| > |ES|$ neboli $|EV| > |AE|$, proto pro úhel α v pravoúhlém trojúhelníku AVE platí $45° < \alpha < 90°$ (pro $\alpha = 45°$ bychom dostali „zdegenerovaný" jehlan s nulovou výškou, pro $\alpha = 90°$ „jehlan" s nekonečnou výškou, tedy hranol). Zároveň je jasné, že pro každé $\alpha \in (45°, 90°)$ odpovídající jehlan existuje. Odtud

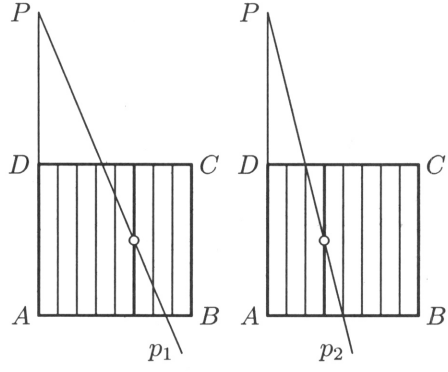
vzhledem k rovnosti $2\alpha + \omega = 180°$ plyne, že přípustné hodnoty ω zaplní interval $(0°, 90°)$. Proto z úhlů $(*)$ mohou být přímé jedině úhly 3ω a 4ω. Pro $\omega = 60°$ mají tvar sedmiúhelníku sítě z obr. 20 a 21, pro $\omega = 45°$ sítě z obr. 23 a 24.

Odpověď: Jirka mohl dostat právě osm různých sítí. Úhel AVB měl velikost 45° nebo 60°.

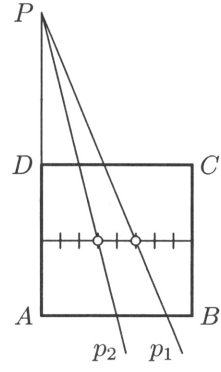
49 – Z8 – I – 3

Je dán čtverec $ABCD$ a bod P tak, že bod D je střed úsečky AP. Bodem P prochází přímka p. Ta dělí čtverec na dva útvary, jejichž obsahy jsou v poměru 5 : 3. Narýsujte takovou přímku. *(D. Hrubý)*

Řešení. Čtverec rozdělíme na osm shodných obdélníků (obr. 26). Z obrázku je zřejmé, že zvýrazněné úsečky dělí čtverec $ABCD$ na dva útvary, jejichž obsahy jsou v poměru 5 : 3 (resp. 3 : 5). Vedeme-li libovolnou přímku protínající stranu AB středem zvýrazněné úsečky, bude jí čtverec rozdělen v daném poměru. Řešením je tedy přímka procházející daným bodem P a středem zvýrazněné úsečky. Úloha má dvě řešení, neboť pořadí útvarů v poměru není určeno.



Obr. 26



Obr. 27

Jiné řešení. Přímka p dělí čtverec na dva pravoúhlé lichoběžníky. Obsah lichoběžníku je roven součinu jeho střední příčky a výšky. Obsahy lichoběžníků jsou v poměru 5 : 3 nebo 3 : 5 a jejich výšky jsou shodné, proto střední příčky lichoběžníků musí být též v poměru 5 : 3 nebo 3 : 5. Hledaná přímka p proto prochází daným bodem P a bodem, který dělí střední příčku čtverce rovnoběžnou se stranou AB v daném poměru (obr. 27).

49 – Z9 – III – 3

Najděte všechna trojciferná čísla x, která po zaokrouhlení na stovky se rovnají číslu $\dfrac{8x + 240}{9}$.

Řešení. Trojciferné číslo x zaokrouhlené na stovky označme $[x]$. Číslo $[x]$ může být některé z čísel 100, 200, 300, ..., 1 000. Nejdříve vynásobíme tato čísla číslem 9, potom odečteme 240 a výsledek vydělíme číslem 8 (to plyne z rovnosti $x = \frac{9[x] - 240}{8}$). Řešením jsou ta z nich, jež jsou trojciferná a lze je zaokrouhlit na číslo $[x]$.

$[x]$	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000
$9[x]$	900	1 800	2 700	3 600	4 500	5 400	6 300	7 200	8 100	9 000
$9[x] - 240$	660	1 560	2 460	3 360	4 260	5 160	6 060	6 960	7 860	8 760
$(9[x] - 240) : 8$	82,5	195	307,5	420	532,5	645	757,5	870	982,5	1 095

Úloha má tedy tři řešení: 195, 420 a 645.

50 – A – I – 1

V urně jsou jen bílé a černé kuličky, jejichž počet zaokrouhlen na stovky je 1 000. Pravděpodobnost vytažení dvou černých kuliček je o $\frac{17}{43}$ větší než pravděpodobnost vytažení dvou bílých kuliček. Kolik bílých a kolik černých kuliček je v urně? (Pravděpodobnost vytažení kterékoli kuličky je stejná.) (*P. Černek*)

Řešení. Nechť je v urně n kuliček, z toho b bílých (a $n - b$ černých). Potom pravděpodobnost vytažení dvou bílých kuliček je rovna podílu

$$\frac{\binom{b}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{b(b-1)}{n(n-1)},$$

zatímco pravděpodobnost vytažení dvou černých kuliček podílu

$$\frac{\binom{n-b}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{(n-b)(n-b-1)}{n(n-1)}.$$

Podle zadání úlohy platí rovnost

$$\frac{(n-b)(n-b-1)}{n(n-1)} = \frac{b(b-1)}{n(n-1)} + \frac{17}{43},$$

kterou lze algebraickými úpravami zjednodušit do tvaru $43b = 13n$ (pro $n \notin \{0, 1\}$ jde o ekvivalentní rovnice). Odtud vzhledem k nesoudělnosti čísel 13 a 43 plyne, že přirozená čísla n a b jsou tvaru $n = 43k$ a $b = 13k$, kde k je vhodné přirozené

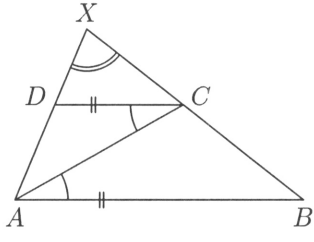
číslo. Podle zadání pro číslo n platí odhady $950 \leqq n < 1\,050$, z nichž zjistíme, že $k \in \{23, 24\}$. Pro $k = 23$ vychází $n = 989$ a $b = 299$ (tehdy $n - b = 690$), zatímco hodnotě $k = 24$ odpovídá $n = 1\,032$ a $b = 312$ (tehdy $n - b = 720$).

Odpověď: Úloha má dvě řešení — v urně je buď 299 bílých a 690 černých, nebo 312 bílých a 720 černých kuliček.

50 – A – I – 3

V rovině je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Paty výšek z vrcholů A, B označme po řadě A_1, B_1. Tečny kružnice opsané trojúhelníku CA_1B_1 sestrojené v bodech A_1, B_1 se protínají v bodě M. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům AMB_1, BMA_1, CA_1B_1 procházejí jedním bodem. *(J. Švrček)*

Řešení. Označme k kružnici opsanou trojúhelníku CA_1B_1. V první části řešení ukážeme, že bod M z textu úlohy je středem strany AB. Protože trojúhelník ABC je ostroúhlý, leží paty A_1, B_1 příslušných výšek uvnitř odpovídajících stran. S ohledem na symetrii dané situace stačí uvažovat jen tečnu t ke kružnici k sestrojenou v bodě A_1, označit X její průsečík s přímkou AB a dokázat rovnost $|AX| = |BX|$ (obr. 28).



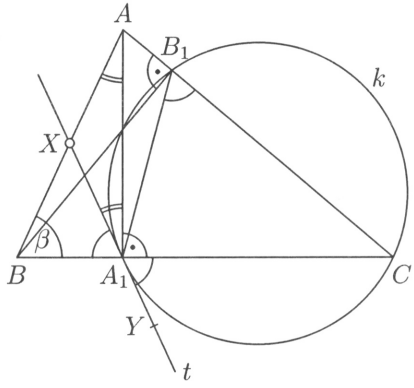
Obr. 28

Označme ještě Y libovolný vnitřní bod polopřímky opačné k polopřímce A_1X. Protože jsou oba úhly AA_1B a BB_1A pravé, je čtyřúhelník ABA_1B_1 tětivový, a tak platí $|\sphericalangle AB_1A_1| = 180° - |\sphericalangle ABA_1| = 180° - \beta$, kde jako obvykle $\beta = |\sphericalangle ABC|$. Proto má obvodový úhel A_1B_1C v kružnici k nad tětivou A_1C velikost $|\sphericalangle A_1B_1C| = 180° - |\sphericalangle AB_1A_1| = 180° - (180° - \beta) = \beta$, stejnou velikost má i příslušný úsekový úhel YA_1C.[1] Protože úhly XA_1B a YA_1C jsou vrcholové, dohromady dostáváme $|\sphericalangle XA_1B| = |\sphericalangle YA_1C| = |\sphericalangle A_1B_1C| = \beta$ (tyto shodné úhly jsou na obr. 28 vyznačeny obloučky). Zároveň platí i $|\sphericalangle XA_1A| = |\sphericalangle XAA_1| = 90° - \beta$. Zjistili jsme, že tečna t protne přímku AB v takovém bodě X, pro který jsou trojúhelníky BA_1X a A_1AX rovnoramenné, tj. $|BX| = |A_1X| = |AX|$.

Dokázali jsme, že bod M (průsečík tečen ke kružnici k s body dotyku A_1 a B_1) splývá se středem strany AB. Označme nyní k_1 a k_2 kružnice opsané po řadě

[1] K pojmu úsekového úhlu a jeho shodnosti s obvodovým úhlem viz S. Horák: *Kružnice*, ŠMM 16, MF, Praha 1966, str. 3–7.

trojúhelníkům AMB_1 a BMA_1 a S_1, S_2 jejich středy (obr. 29). Jedním průsečíkem kružnic k_1 a k_2 je bod M, druhý průsečík označme N. Protože body S_1, S_2 leží



Obr. 29

v polorovině ABC, leží v ní i bod N, neboť je souměrně sdružený s M podle středné S_1S_2. Naší úlohou je dokázat, že bod N leží na jedné kružnici s body A_1, B_1 a C.

Jak už víme, je trojúhelník BA_1M rovnoramenný, a protože je $|\sphericalangle BB_1M| = 90° - \alpha < \beta = |\sphericalangle BA_1M|$ (tato nerovnost je ekvivalentní tomu, že $\gamma < 90°$), leží bod B_1 vně kružnice k_2. To znamená, že kružnice k_2 musí protínat kružnici k_1 v tom jejím oblouku nad tětivou MB_1, který odpovídá obvodovému úhlu $180° - \alpha$. Analogicky zjistíme, že bod A_1 leží vně kružnice k_1, takže průsečík N leží na oblouku kružnice k_2 příslušného tětivě MA_1 a obvodovému úhlu $180° - \beta$. Protože zároveň

$$|\sphericalangle B_1NM| + |\sphericalangle A_1NM| = (180° - \alpha) + (180° - \beta) = 360° - (\alpha + \beta) = \\ = 180° + \gamma > 180°,$$

musí bod N ležet uvnitř trojúhelníku A_1B_1M (přímka A_1B_1 tedy odděluje body C a N). Protože $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (kde $\gamma = |\sphericalangle A_1CB_1|$), plyne odtud, že ve čtyřúhelníku A_1CB_1N je součet vnitřních úhlů u protilehlých vrcholů C a N roven 180°, a tak je tento čtyřúhelník skutečně tětivový.

50 – B – I – 5

Určete všechny polynomy $P(x)$, které pro každé reálné číslo x splňují rovnost

$$P(2x) = 8P(x) + (x - 2)^2.$$

(P. Černek)

Řešení. Stupeň polynomu P je aspoň dva. Nechť nejprve $P(x) = ax^2 + bx + c$. Dosazením tohoto vyjádření do vztahu v zadání dostáváme

$$4ax^2 + 2bx + c = (8a + 1)x^2 + (8b - 4)x + 8c + 4.$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x na levé a pravé straně dostaneme $4a = 8a + 1$, $2b = 8b - 4$ a $c = 8c + 4$. Odtud $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = -\frac{4}{7}$.

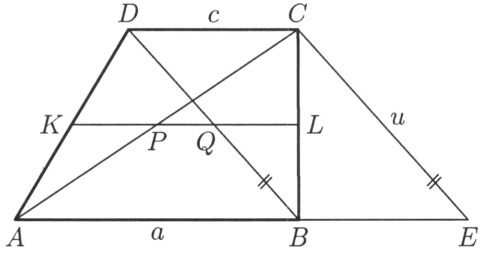
Je-li dále stupeň n polynomu P větší než dva, zjistíme analogicky, že jeho člen $a_n x^n$ s nejvyšší mocninou x splňuje vztah $2^n a_n = 8a_n$, tedy $n = 3$, přičemž $a_n \neq 0$ je libovolné. Koeficienty mnohočlenu P u mocnin x^2, x^1 a x^0 vyjdou stejně jako v předchozí situaci.

Celkový závěr: $P(x) = ax^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{4}{7}$, kde a je libovolné reálné číslo.

50 – C – I – 2

Sestrojte lichoběžník, jsou-li dány délky 9 cm a 12 cm jeho úhlopříček, délka 8 cm střední příčky a vzdálenost 2 cm středů úhlopříček. (*E. Kováč*)

Řešení. Zvolme označení podle obr. 30, KP je střední příčka v trojúhelníku ACD,



Obr. 30

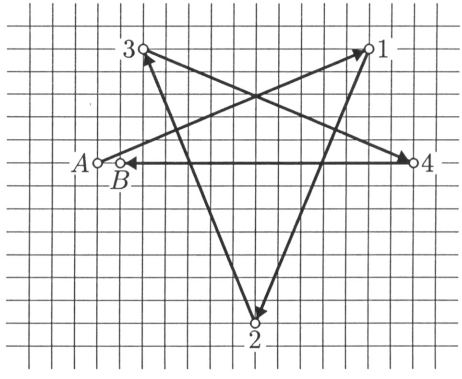
proto $|KP| = \frac{1}{2}|DC|$, obdobně $|QL| = \frac{1}{2}|DC|$, $|PL| = \frac{1}{2}|AB|$, takže $|PQ| = \frac{1}{2}(a - c) = 2\,\text{cm}$. Protože $|KL| = \frac{1}{2}(a + c) = 8\,\text{cm}$, je $a = 10\,\text{cm}$, $c = 6\,\text{cm}$. Nejdříve sestrojíme trojúhelník AEC podle věty *sss*, na úsečce AE pak bod B, jím vedeme rovnoběžku s CE. Ta protne přímku vedenou bodem C rovnoběžně s AE v bodě D.

50 – Z8 – I – 5

Blecha se dostala na čtvercovou síť se čtverečky 1 cm × 1 cm. Rozhodla se, že bude skákat jen po uzlových bodech této sítě. Protože její šťastné číslo je 13, udělá vždy skok dlouhý jen 13 cm. Může se takto dostat do libovolného uzlového bodu? (*P. Černek*)

Řešení. Blecha může skákat buď ve směru mřížových čar, nebo se může přesouvat do protějšího vrcholu obdélníku s rozměry 5 a 12 (podle Pythagorovy věty).

Blecha se může dostat do libovolného uzlového bodu, jestliže se může dostat do sousedního uzlového bodu. Do libovolného dalšího bodu se dostane potom sledem skoků. Do sousedního uzlového bodu se může dostat například podle obr. 31.



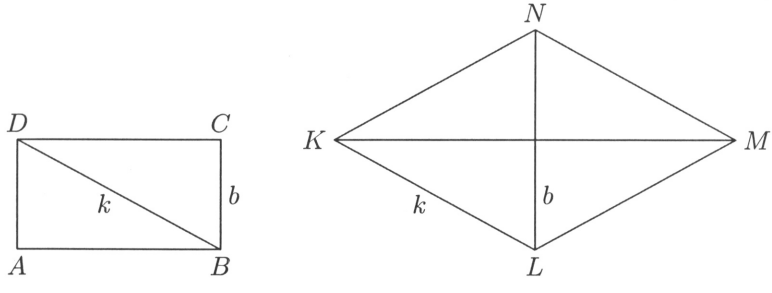
Obr. 31

Odpověď: Blecha se může dostat do libovolného uzlového bodu.

50 – Z7 – I – 5

Jedna ze stran obdélníku $ABCD$ je dvakrát kratší než jedna z úhlopříček kosočtverce $KLMN$. Jedna ze stran kosočtverce $KLMN$ je stejně dlouhá jako jedna z úhlopříček obdélníku $ABCD$. Kosočtverec $KLMN$ má obsah $36\,\mathrm{cm}^2$. Jak velký obsah má obdélník $ABCD$? (*S. Bednářová*)

Řešení. Úhlopříčka obdélníku dělí obdélník na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky, úhlopříčky kosočtverce ho dělí na čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky. Podle zadání je pravoúhlý trojúhelník v obdélníku shodný s pravoúhlým trojúhelníkem v kosočtverci podle věty Ssu (obr. 32). Obsah obdélníku je tak roven polovině obsahu kosočtverce, proto obsah obdélníku je $18\,\mathrm{cm}^2$.



Obr. 32

Vybrané úlohy MO kategorie P ročníků 41–50

42 – P – II – 1

Nákladní auta. Z města A vede silnice do města B. Na této silnici leží města $A_1, \ldots, A_n$, $B_1, \ldots, B_n$ — ne nutně v tomto pořadí, ale pro každé i $(1 \leqq i \leqq n)$ je vždy město A_i blíže k A než město B_i. Nákladní auto jezdí mezi městy A a B a má za úkol vyřídit n objednávek; i-tá $(1 \leqq i \leqq n)$ objednávka spočívá v převezení nákladu z města A_i do města B_i. Auto přitom může vézt vždy nejvýše jeden náklad a po naložení ve městě A_i ho může vyložit jedině v B_i.

Jízdou nákladního auta rozumíme jednu cestu auta z města A do města B a zpět do města A s případným splněním některých objednávek během této jízdy. Směr jízdy auta lze změnit jen ve městě B.

Napište a zdůvodněte program, který pro zadané vzdálenosti měst A_i a B_i od města A sestaví plán nákladního auta (tj. určí počet jízd a splněné objednávky pro každou jízdu) tak, aby auto vyřídilo všechny zadané objednávky minimálním počtem jízd.

Řešení. Označme si $a_i = |AA_i|$ a $b_i = |AB_i|$. Dle zadání $0 \leqq a_i < b_i$ pro každé i. V následujícím textu budeme jako objednávku j označovat tu objednávku, která patří městům A_j a B_j. Myšlenka algoritmu je jednoduchá — dokud existují nějaké nesplněné objednávky, přidáme vždy další jízdu a simulujeme cestu auta z A do B. Pokud je auto v nějakém městě volné, vybereme si jako další objednávku z dosud nesplněných tu, která začíná co nejdříve.

Přímá implementace této myšlenky vede k příliš složitému programu. Proto nebudeme přiřazovat objednávky jízdám, ale naopak. Čísla $a_1, \ldots, a_n$ a $b_1, \ldots, b_n$ uspořádáme vzestupně a poté procházíme úsek od A do B. Přitom si udržujeme zatím potřebný počet jízd v proměnné p a seznam „volných jízd“ (na začátku prázdný). Jestliže narazíme na město A_i a seznam je prázdný, zvýšíme počet jízd na $p + 1$ a i-tou objednávku splníme v této jízdě. Jestliže narazíme na město Bi, jízdu, ve které jsme splnili i-tou objednávku, „uvolníme“, tj. přidáme do seznamu volných jízd.

Poznámky k implementaci:

- Při třídění si ke každému prvku pamatujeme jeho původní index;
- seznam volných jízd implementujeme např. jako zásobník;
- je-li $b_i = a_k$, nejprve zpracováváme b_i.

Důkaz správnosti algoritmu:

Algoritmus zřejmě nalezne nějaký korektní plán, neboť každé objednávce přiřadí právě jednu jízdu a jízda, která je objednávce přiřazena, je v dané chvíli volná. Nyní dokážeme optimalitu získaného plánu. Označme $k_0 = \max |\{i \colon x \in (a_i, b_i\rangle\}|$ pro $x \in \langle 0, |AB|\rangle$ (maximální počet intervalů s neprázdným průnikem). Zřejmě potřebujeme alespoň k_0 jízd. Ukážeme, že algoritmus nalezne plán s přesně k_0 jízdami. Uvažujme takové i, že počet jízd (proměnná p) se zvyšuje z p na $p + 1$ při přidání bodu a_i. Tehdy není k dispozici žádná volná jízda, tedy bod a_i leží

v nějakých intervalech $\langle a_{kj}, b_{kj})$ pro $j = 1, \ldots, p$. Bod $a_i + e$, kde e je dostatečně malé číslo, leží uvnitř těchto p intervalů a navíc v intervalu $(a_i, b_i\rangle$, tedy $p+1 \leqq k_0$, takže hodnota p nikdy nevzroste nad k_0.

Odhad časové složitosti:

Odhlédneme-li od třídění, pro každý prvek a_i nebo b_i vykonáme konstantní množství operací, tedy celkem $O(n)$. Složitost třídění je $O(n \log n)$, dohromady tedy máme časovou složitost algoritmu $O(n \log n)$.

Paměťová složitost je lineární.

42 – P – III – 2

Nepostradatelné silnice. V zemi je N měst označených čísly od 1 do N. Mezi městy je vybudována silniční síť. Každá silnice spojuje vždy dvojici měst. Všechny silnice jsou obousměrné. Mezi některými dvojicemi měst přímá silnice nevede, ale z každého města je možné dojet po silnicích do libovolného jiného města (třeba i více různými způsoby). Všechna případná křížení silnic mimo města jsou mimoúrovňová a neumožňují vozidlům přejet z jedné silnice na druhou.

Silnici nazveme nepostradatelnou, pokud by se jejím zničením úplně přerušilo silniční spojení mezi některou dvojicí měst.

Napište program, který vyhledá a vypíše všechny nepostradatelné silnice. Vstupem programu je počet měst N a dále seznam všech silnic vedoucích mezi městy. Každá silnice je zadána dvojicí čísel měst, mezi nimiž vede.

Řešení. Úloha je jednou z klasických úloh teorie grafů. Silniční síť představuje souvislý neorientovaný graf, v němž vrcholy grafu odpovídají městům a hrany grafu silnicím. Nepostradatelné silnice, tak jak jsou definovány v zadání úlohy, odpovídají v teorii grafů zvláštním hranám zvaným mosty. Úkolem tedy je nalézt v daném grafu všechny mosty.

Algoritmus řešení je založen na procházení zadaným grafem do hloubky. Při procházení bude každý vrchol grafu navštíven právě jednou. Způsob procházení lze znázornit stromem. Kořenem stromu procházení je vrchol, z něhož bylo procházení zahájeno. Za kořen můžeme zvolit libovolný vrchol grafu. Bezprostředními následníky některého vrcholu V jsou všechny ty vrcholy, do nichž prohledávání z vrcholu V bezprostředně pokračovalo. Protože zadaný graf je souvislý, budou ve stromu procházení obsaženy všechny vrcholy původního grafu (města). Ze všech hran (silnic) budou ve stromě procházení obsaženy jen ty, které nás v průběhu procházení dovedly do nového, doposud nenavštíveného vrcholu.

Představme si, že do stromu procházení dokreslíme zelenou barvou všechny zbývající hrany grafu. To jsou tedy takové, kterými průchod do hloubky nepokračoval. Jinak řečeno, v průběhu procházení tyto silnice vedly z právě procházeného města do jiného, již dříve navštíveného města. Doplněný strom tedy bude izomorfní s původním grafem.

Nyní vyslovíme jedno pomocné tvrzení: Oba koncové vrcholy každé zelené hrany leží na téže větvi stromu procházení. Tvrzení snadno dokážeme sporem. Předpokládejme, že by některá zelená silnice spojovala dvě města A a B, která neleží na jedné větvi stromu procházení. Označme je tak, že během průchodu bylo A poprvé navštíveno dříve než B. Město B jistě neleží v podstromu procházení s kořenem A (jinak by A a B ležela na téže větvi). Pro postup procházení to znamená, že nejprve bylo (případně několikrát) navštíveno město A a teprve potom (případně několikrát) navštíveno město B. Všimněme si okamžiku během procházení, kdy jsme město A navštívili naposledy. To bylo v situaci, kdy jsme se z něho vraceli zpět (kdybychom šli vpřed, museli bychom do A přijít ještě na zpáteční cestě). V tomto okamžiku jsme se ale nezachovali správně podle algoritmu procházení grafem do hloubky: vraceli jsme se zpět, a přitom jsme ještě měli projít silnicí AB, protože ta vedla do tehdy ještě nenavštíveného města B.

K tomu, aby hrana byla mostem, je nutné a stačí, aby se jejím odstraněním oddělil podstrom ve stromu procházení, který nebude dostupný ani po některé zelené hraně. Podle předchozího tvrzení by takové spojení zelenou hranou muselo vést do vyšší vrstvy ve stromě procházení.

Na základě provedených úvah již lze zformulovat algoritmus. Zadaný graf budeme procházet do hloubky, začít můžeme libovolným vrcholem (např. vrcholem číslo 1). Během procházení si budeme u každého vrcholu M pamatovat jeho hloubku ve stromě procházení H_M. Kořen stromu procházení bude mít hloubku 0. Postupně během průchodu budeme pro každý procházený vrchol M určovat číslo Z_M definované takto: Z_M je minimum z H_M a z hloubek koncových měst všech zelených silnic, které vycházejí z vrcholů v podstromu s kořenem M. Z_M je tedy číslo nejvyšší hladiny ve stromě procházení, do které vede přímé spojení zelenou silnicí z nějakého města v podstromu s kořenem M. Přitom si všímáme jen hladin nad vrcholem M. Nastane-li pro některý vrchol M nerovnost $Z_M < H_M$, existuje zelená silnice, která spojuje podstrom s kořenem ve vrcholu M se zbytkem grafu. Je-li $Z_M = H_M$, je silnice, po níž jsme do M během procházení přišli, mostem.

Zbývá ukázat, jak budeme počítat hodnoty H_M a Z_M pro vrchol M. Hodnotu H_M určíme snadno při prvním vstupu do vrcholu M během procházení grafem — je o 1 větší než odpovídající hodnota H_X vrcholu X, z něhož do M přicházíme. Stanovení hodnoty Z_M je o něco obtížnější. Hodnota Z_M je rovna minimu z hodnoty H_M a z hodnot Z_i všech vrcholů ležících v podstromu s kořenem ve vrcholu M. Při prvním vstupu do vrcholu M můžeme tudíž inicializovat hodnotu Z_M již známou hodnotou H_M a pak ji během procházení podstromu vrcholu M budeme případně zmenšovat, bude-li to možné. Při každém dalším příchodu do vrcholu M (tj. při návratu z nějakého následníka vrcholu M) lze hodnotu Z_M snížit na Z-hodnotu tohoto následníka. K dalšímu snížení Z_M mohou přispět hrany, které vedou z vrcholu M do již navštívených uzlů a po nichž se tudíž při průchodu nepostupuje. Hodnotu Z_M můžeme snížit na H-hodnotu koncových vrcholů těchto zelených hran. Definitivní hodnotu Z_M získáme až při posledním opuštění vrcholu M.

Složitost celého algoritmu je dána složitostí průchodu grafem do hloubky. Ostatní výpočty spojené s určováním hodnot H_M a Z_M mají konstantní časové nároky. Časová složitost programu pro průchod grafem do hloubky závisí na vhodné volbě vnitřní reprezentace grafu. Při vhodně zvolené reprezentaci (viz uvedená programová ukázka) je přímo úměrná počtu hran v grafu, tj. je řádu n^2, kde n je počet vrcholů grafu.

```
program Nepostradatelne_silnice;

{Formát očekávaných vstupních dat - zadání grafu:
 - sousedi každého vrcholu vždy na jednom řádku ve tvaru
     <číslo-vrcholu> <číslo-souseda1> <číslo-souseda2> ...
 - vrcholy musí být očíslovány od jedné po jedné a v tomto
   pořadí musí být také řádky na vstupu zadány
 - každá hrana se tedy uvádí dvakrát (na řádcích pro jeden
   a pro druhý její koncový vrchol)
 - program pro jednoduchost netestuje správnost zadaných
   vstupních dat (nebylo by těžké testy doplnit) }

const
  MaxPocetMest = 40;
  MaxPocetSilnic = 200;

type
  Mesto   = 1..MaxPocetMest+1;   {fiktivní město na konci}
  Silnice = 1..MaxPocetSilnic;

var
  GMesto : array [Mesto] of record
                              Spoje   : Silnice;
                              Hloubka : integer;
                              Projito : Boolean;
                            end;
  GSilnice : array [Silnice] of Mesto;
   {pole GMesto a GSilnice představují vnitřní uložení grafu
   - ke každému vrcholu je v poli GSilnice uložen seznam
     jeho sousedů, položka Spoje v GMesto určuje, kde přesně
     jsou uloženi sousedi každého konkrétního vrcholu
   - viz úvodní komentář o tvaru vstupních dat a procedura
     NactiGraf}

  PocetMest   : 0..MaxPocetMest;
  PocetSilnic : 0..MaxPocetSilnic;
  F:integer;    {pomocná proměnná - je potřebná pro správné
                 volání procedury Pruchod v hlavním programu}

procedure NactiGraf;
{načtení vstupních dat - zadání zkoumaného grafu}
```

```
var dummy:integer;
begin
  PocetMest:=0;
  PocetSilnic:=1;
  repeat
    PocetMest:=PocetMest+1;
    read(dummy);                {číslo města - nevyužívá se}
    GMesto[PocetMest].Spoje:=PocetSilnic;
    while not eoln do
      begin
        read(GSilnice[PocetSilnic]);
        PocetSilnic:=PocetSilnic+1;
      end;
    readln;
  until eof;
  GMesto[PocetMest+1].Spoje:=PocetSilnic;
end;

function min(X,Y:integer):integer;
{pomocná procedura - minimum ze dvou celých čísel}
begin
  if X<Y then min:=X else min:=Y;
end;

procedure PisMost(odkud,kam : Mesto);
{vypíše, že z města "odkud" do města "kam" vede most}
begin
  writeln('Most z ',odkud,' do ',kam,'.');
end;

procedure PredPruchodem;
{označí všechna města za dosud neprojitá - nutné!}
var i:Mesto;
begin
  for i:=1 to PocetMest do GMesto[i].Projito := false;
end;

procedure Pruchod(Start: Mesto; hl:integer; var Z: integer);
{Projde odpovídající část grafu do hloubky.
 Začíná ve městě Start, jeho hloubka je hl, spočítá pro něj
 hodnotu Z (viz text).}
var Nasl : Mesto;
    S : Silnice;
    pomZ : integer;
begin
  GMesto[Start].Projito := true; {vrchol navštíven}
  GMesto[Start].Hloubka := hl; {má hloubku hl}
  Z := hl; {prozatímní hodnota Z}
```

```
  for S:=GMesto[Start].Spoje to GMesto[Start+1].Spoje-1 do
    begin
      Nasl := GSilnice[S]; {město dostupné po silnici S}
      if GMesto[Nasl].Projito then
        begin {nepočítat silnici, po níž jsme přišli!}
          if GMesto[Nasl].Hloubka+1 <> hl then
                  {zelená silnice, buď nahoru, nebo dolů}
            Z := min(Z,GMesto[Nasl].Hloubka)
                  {pokud vede zelená silnice nahoru,
                   snížíme hodnotu Z v našem uzlu}
    end
  else
    begin
      Pruchod(Nasl,hl+1,pomZ);
      if hl+1 = pomZ then
        PisMost(Start,Nasl);          {nalezen most v grafu}
      Z := min(Z,pomZ);          {případné snížení hodnoty Z}
    end;
  end;
end;

begin
  NactiGraf;
  PredPruchodem;
  Pruchod(1,0,F);
  {vždy je F=0}
end.
```

47 – P – III – 2

Kódy. Při přenosu dat (posloupností bitů) po linkách mezi počítači může někdy dojít k chybě: čas od času se stane, že se místo některého vyslaného bitu přijme na konci linky bit jiný. Nedochází ovšem k tomu, že by se při přenosu některý bit zcela ztratil nebo že by naopak bit přibyl.

Pro přenos dat po nespolehlivých vedeních se proto často používají různé zabezpečovací kódy. K přenášeným bitům $b_1 \ldots b_n$ se přidají navíc kontrolní bity $c_1 \ldots c_m$ tak, aby podle nich bylo možné na druhé straně linky zjistit, zda se zpráva přenesla v pořádku.

Nejjednodušším možným zabezpečovacím kódem je paritní kód doplňující jediný bit c_1 takový, aby celkový počet jedničkových bitů v celé zprávě byl sudý. Tento kód umožňuje spolehlivě odhalit nejvýše jeden chybný bit v celé zprávě (ať již to byl jeden z datových bitů b_i nebo přidaný paritní bit). Neumožňuje však přesně zjistit, který bit je chybný (což by se rovnalo opravení tohoto bitu, jelikož jsou pouze dvě možnosti, jakou hodnotu může mít).

a) Navrhněte zabezpečovací kód, který k n-bitové zprávě přidá m zabezpečovacích bitů tak, aby případnou chybu v jednom bitu zprávy bylo možné nejen zjistit, ale také opravit.

b) Navrhněte zabezpečovací kód, který k n-bitové zprávě přidá m zabezpečovacích bitů tak, aby bylo možné ověřit správnost došlé zprávy za předpokladu, že při jejím přenosu dojde k chybě v nejvýše dvou bitech (včetně bitů zabezpečovacích).

V obou případech se snažte o co nejmenší prodloužení zprávy (tzn. minimalizujte počet přidaných bitů m) a dokažte, že navržený kód skutečně požadované vlastnosti má.

Řešení. Následující kód řeší obě podúlohy (nikoliv však současně — není schopen rozhodnout, jestli došlo k opravitelné jednochybě nebo neopravitelné dvojchybě).

Nechť zpráva má $n = 2^k - 1$ bitů označených $b_1 \ldots b_n$ (v případě, že je kratší, považujeme zbylé bity za nuly). My ji doplníme o paritní bit p (stejně jako v ukázkovém příkladu v zadání) a zabezpečovacími bity c_0 až c_{k-1}, jež budou paritními bity jednotlivých bloků zvolených podle následujícího pravidla: v i-tém bloku budou právě ty bity, jejichž pořadové číslo (pro bit b_z to je z) má v i-tém binárním řádu jedničku (každý bit původní zprávy tak patří do alespoň jednoho bloku a je jednoznačně identifikován tím, do kterých bloků patří a do kterých nikoliv).

a) Po příjmu zprávy zkusíme podle přijatých datových bitů znovu spočíst všechny bity kontrolní (tedy p a všechna c_i). Pokud souhlasí s těmi, které byly přijaty, zpráva byla přijata bezchybně nebo došlo k více jak jedné chybě. Pokud došlo k právě jedné chybě, mohlo k ní dojít těmito způsoby:

- V jednom datovém bitu b_i: v tomto případě zaručeně nesouhlasí paritní bit p a rovněž některé z blokových paritních bitů c_j — konkrétně ty, jež odpovídají blokům, do nichž bit b_i patří. Jenže tím, ve kterých blocích se b_i nachází, je již jeho pořadové číslo i jednoznačně určeno.
- V jednom kontrolním bitu c_i: v tomto případě souhlasí centrální paritní bit p, čímž tento případ snadno odlišíme.
- V centrálním paritním bitu p: v tomto případě nesouhlasí tento bit, ale souhlasí všechny ostatní kontrolní bity, což znamená, že chyba se nenachází v žádném bloku, ale to u chyb v datových bitech nastat nemůže.

b) Nedošlo-li k žádné chybě, souhlasí všechny zabezpečovací bity s jejich vypočtenými hodnotami (viz řešení úlohy a). Došlo-li k právě jedné chybě, nesouhlasí centrální paritní bit nebo jeden z blokových paritních bitů (viz diskuse výše). Došlo-li k právě dvěma chybám, mohou nastat následující případy:

- Chyba ve dvou různých datových bitech: centrální paritní bit jistě souhlasí, ale jelikož každý datový bit je jednoznačně popsán kombinací bloků, do nichž patří, zaručeně existuje alespoň jeden blok, do kterého patří právě jeden z chybně přijatých bitů, a proto jeho blokový paritní bit nesouhlasí.

- Chyba ve dvou různých blokových paritních bitech: centrální paritní bit souhlasí, ale oba chybně přijaté blokové paritní bity nikoliv.
- Chyba v jednom datovém bitu a jednom blokovém paritním bitu: nesouhlasí centrální paritní bit.
- Chyba v jednom datovém bitu a centrálním paritním bitu: centrální paritní bit souhlasí, ale alespoň jeden z blokových nikoliv (každý datový bit je v alespoň jednom bloku).
- Chyba v centrálním paritním bitu a jednom z blokových: nesouhlasí centrální paritní bit.

Ve všech případech tedy poznáme, že k chybě došlo.

48 – P – I – 4

Normální algoritmy Markova. Konečnou množinu symbolů $T = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ nazveme **abecedou**. Prvky množiny T budeme nazývat **znaky** abecedy. Slovem P v abecedě T nazveme každou konečnou posloupnost znaků abecedy T. **Prázdné slovo** budeme označovat symbolem Λ. **Algoritmem** v abecedě T budeme rozumět funkci, jejíž definičním oborem je podmnožina slov v abecedě T a oborem hodnot je opět podmnožina slov v T. Nechť P je slovo v abecedě T. Řekneme, že algoritmus $\mathcal{A}$ je **přípustný** pro slovo P, právě když P je prvkem jeho definičního oboru. Většinu algoritmů je možno rozdělit na nějaké jednodušší kroky. Jeden ze způsobů navrhl v roce 1954 A. A. Markov. Základní operací je substituce jednoho slova za jiné. Výrazy $P \to Q$ a $P \to \cdot Q$, kde P a Q jsou slova v abecedě T, nazýváme **formulemi substituce** v abecedě T. Přitom předpokládáme, že šipka ($\to$) a tečka ($\cdot$) nejsou prvky T. Některé ze slov P a Q může být i prázdné. Formuli $P \to Q$ nazýváme **obyčejnou** a formuli $P \to \cdot Q$ nazýváme **koncovou**. Zápisem $P \to (\cdot)Q$ rozumíme buď formuli $P \to Q$, nebo $P \to \cdot Q$. Konečný seznam formulí substituce v abecedě T

$$\begin{cases} P_1 & \to (\cdot)Q_1 \\ P_2 & \to (\cdot)Q_2 \\ \vdots & \\ P_r & \to (\cdot)Q_r \end{cases}$$

nazýváme **schéma algoritmu** $\mathcal{A}$.

Řekneme, že **slovo** W **je obsaženo ve slově** Q, právě když existují taková slova U, V (mohou být i prázdná), že $Q = UWV$. Algoritmus $\mathcal{A}$ pracuje následujícím způsobem. Nechť je dáno slovo P v abecedě T. Ve schématu algoritmu $\mathcal{A}$ najdeme první formuli $P_m \to (\cdot)Q_m$ $(1 \leqq m \leqq r)$ takovou, že P_m je obsaženo v P. Provedeme substituci nejlevějšího výskytu slova P_m na Q_m. Označme R_1 slovo, které je výsledkem této substituce. Můžeme napsat $\mathcal{A}\colon P \vdash R_1$. Je-li $P_m \to \cdot Q_m$ koncová formule substituce, činnost algoritmu $\mathcal{A}$ končí, jeho **hodnotou** je slovo R_1 a píšeme $\mathcal{A}(P) = R_1$. Je-li $P_m \to Q_m$ obyčejná formule substituce, aplikujeme na

R_1 stejný postup, který jsme použili na slovo P. Tímto způsobem pokračujeme dále. Dostaneme posloupnost slov $P, R_1, \ldots, R_i$ $(i \geqq 1)$. Můžeme psát

$$\mathcal{A}\colon P \vdash R_1, \ldots, \vdash R_i \quad \text{nebo též zkráceně} \quad \mathcal{A}\colon P \vdash^* R_i.$$

Jestliže v určitém okamžiku nastane situace, že ani jedno ze slov $P_1, \ldots, P_r$ není obsaženo v R_i, potom činnost algoritmu rovněž končí a R_i je hodnotou algoritmu $\mathcal{A}$. Může se ovšem stát, že popsaný postup nikdy nekončí. V takovém případě řekneme, že algoritmus **není přípustný** pro slovo P.

Příklad 1: Nechť $T = \{b, c\}$. Uvažujme schéma

$$\begin{cases} b \to \cdot\Lambda \\ c \to c \end{cases}$$

normálního algoritmu $\mathcal{A}$ pro slovo P v abecedě T.

Výsledek činnosti algoritmu $\mathcal{A}$ je pro P následující:

- Je-li P prázdné slovo, je hodnota algoritmu rovněž prázdné slovo ($\mathcal{A}(\Lambda) = \Lambda$).
- Obsahuje-li P aspoň jeden znak b, potom hodnotou algoritmu je slovo, které vznikne z P vynecháním nejlevějšího výskytu znaku b v P (např. $\mathcal{A}(cbcb) = ccb$).
- Algoritmus není přípustný pro slova neobsahující znaky b.

Příklad 2: Nechť $T = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$. Uvažujme schéma

$$\begin{cases} a_0 \to \Lambda \\ a_1 \to \Lambda \\ \vdots \\ a_n \to \Lambda \end{cases}$$

Takové schéma zapisujeme zkráceně ve tvaru

$$\{ \quad \xi \to \Lambda \quad (\xi \in T).$$

Při tomto zkráceném zápisu schématu předpokládáme, že odpovídající prvky seznamu mohou být zapsány v libovolném pořadí. Výsledkem algoritmu $\mathcal{A}$ je vždy prázdné slovo. Říkáme též, že $\mathcal{A}$ přepisuje libovolné slovo (v abecedě T) na prázdné slovo. Činnost tohoto algoritmu můžeme zapsat například ve tvaru $\mathcal{A}$: $a_1a_3a_0 \vdash a_1a_3 \vdash a_3 \vdash \Lambda$ nebo $\mathcal{A}\colon a_1a_3a_0 \vdash^* \Lambda$, takže $\mathcal{A}(a_1a_3a_0) = \Lambda$.

Příklad 3: Nechť $T = \{1\}$. Definujme induktivně $\bar{0} = 1$ a $\overline{n+1} = \bar{n}1$, tj. $\bar{1} = 11$, $\bar{2} = 111$ atd. Slova $\bar{n}$ nazveme čísla.

Uvažujme schéma

$$\Lambda \to \cdot 1.$$

Pro libovolné slovo P v T platí zřejmě $\mathcal{A}(P) = 1P$, což můžeme zapsat ve tvaru $\mathcal{A}(\overline{n}) = \overline{n+1}$ pro libovolné přirozené číslo n. (Uvědomte si, že každé slovo P začíná prázdným slovem Λ, tj. $P = \Lambda P$).

Abecedu B nazveme **rozšířením** abecedy T, platí-li $T \subseteq B$. V řadě případů je nutno při konstrukci schématu algoritmu v abecedě T použít mimo znaků abecedy T ještě další pomocné znaky. Pak řekneme, že jsme vytvořili schéma algoritmů **nad abecedou** T (tj. v nějaké abecedě B, která je rozšířením T).

Příklad 4: Nechť $T = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ je abeceda. Pro každé slovo $P = a_{j_0}a_{j_1}\cdots a_{j_k}$ v T $(k \geqq 0,\ a_{j_i} \in T,\ i = 0,1,\ldots,n)$ je slovo $\breve{P} = a_{j_k}\cdots a_{j_1}a_{j_0}$ **obrácením** slova P. Sestrojte normální algoritmus $\mathcal{A}$, který pro libovolné slovo P vytvoří jeho obrácení, tj. $\mathcal{A}(P) = \breve{P}$.

Uvažujme zkrácené schéma algoritmu v abecedě $B = T \cup \{\alpha, \beta\}$:

$$\left\{\begin{array}{rll} \alpha\alpha & \to \beta & \text{(a)} \\ \beta\xi & \to \xi\beta \quad (\xi \in T) & \text{(b)} \\ \beta\alpha & \to \beta & \text{(c)} \\ \beta & \to \cdot\Lambda & \text{(d)} \\ \alpha\nu\xi & \to \xi\alpha\nu \quad (\xi, \nu \in T) & \text{(e)} \\ \Lambda & \to \alpha & \text{(f)} \end{array}\right.$$

- Na základě formule (f) dostaneme $\mathcal{A}$: $P \vdash \alpha P$.
- Potom je aplikována v potřebném počtu opakování formule (e): $\mathcal{A}$: $P \vdash$ $\vdash a_{j_1}\alpha a_{j_0}a_{j_2}\cdots a_{j_k} \vdash a_{j_1}a_{j_2}\alpha a_{j_0}a_{j_3}\cdots a_{j_k} \vdash^* a_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_k}\alpha a_{j_0}$.
- S opakováním předchozích dvou kroků postupně dostaneme

$$\mathcal{A}\colon P \vdash^* a_{j_2}a_{j_3}\cdots a_{j_k}\alpha a_{j_1}\alpha a_{j_0} \vdash^* \alpha a_{j_k}\alpha a_{j_{k-1}}\cdots\alpha a_{j_1}\alpha a_{j_0} \vdash$$
$$\vdash \alpha\alpha a_{j_k}\alpha a_{j_{k-1}}\cdots\alpha a_{j_1}\alpha a_{j_0}.$$

- S pomocí (a) dále dostaneme $\mathcal{A}$: $P \vdash^* \beta a_{j_k}\alpha a_{j_{k-1}}\cdots\alpha a_{j_1}\alpha a_{j_0}$, pomocí (b) a (c) a s posledním použitím (d) dostaneme $\mathcal{A}(P) = \breve{P}$.

Tím jsme popsali činnost normálního algoritmu $\mathcal{A}$ nad abecedou T obracející slovo v abecedě T.

Soutěžní úlohy:

1. Nechť $H = \{1\}$, $M = \{1, *\}$. Každé přirozené číslo n může být zapsáno jako $\bar{n}$, což je slovo v abecedě H (viz př. 3 ve studijním textu). Napište schéma algoritmu $\mathcal{A}$ v M, který je přípustný pouze pro slova, jež jsou zápisem přirozeného čísla. Hodnotou algoritmu $\mathcal{A}$ pro libovolné $\bar{n}$ bude $\mathcal{A}(\bar{n}) = \bar{0}$. Zdůvodněte správnost navrženého algoritmu.
2. Je dána abeceda T, která neobsahuje znaky α, β, γ, $B = T \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Sestrojte schéma algoritmu $\mathcal{A}$ v abecedě B, který každé slovo v abecedě T zdvojí (tj. $\mathcal{A}(P) = PP$). Zdůvodněte jeho správnost.

Řešení. a) Výskyt znaku $*$ ve vstupním slově musí způsobit, že Markovův algoritmus nebude pro toto slovo přípustný. Toho dosáhneme tak, že prvním pravidlem schématu budeme hvězdičku stále přepisovat samu na sebe. Jinak se má jakýkoliv počet jedniček ve vstupním slově zredukovat na jediný znak 1 představující číslo nula. To zajistí formule (2). Poslední jednička ve slově zůstane a výpočet se ukončí podle formule (3). Zbývá ošetřit případ, že vstupní slovo je prázdné. V takovém případě slovo neobsahuje zápis čísla, proto pomocí pravidla (4) vložíme do slova hvězdičku, což v následujícím kroku vede opět k nekonečnému výpočtu podle první formule.

$$\begin{cases} * & \to * & (1) \\ 11 & \to 1 & (2) \\ 1 & \to \cdot 1 & (3) \\ \Lambda & \to * & (4) \end{cases}$$

Rychlost výpočtu podle tohoto schématu Markovova algoritmu je lineární, počet kroků výpočtu je roven nejvýše délce vstupního slova.

b) Úlohu lze řešit s použitím pouze dvou pomocných symbolů mimo abecedu T. Pomocí formule (5) se nejprve umístí na začátek vstupního slova symbol α. Pomocí formule (1) pak tímto symbolem procházíme slovo zleva doprava a za sebou zdvojujeme jednotlivé znaky slova. V každém okamžiku je umístěno před znakem, který má být v příštím kroku zdvojen, zatímco každý nově přidaný „dvojník" je označen symbolem β (umístěn bezprostředně před ním). Formule (1) se použije přesně tolikrát, kolik znaků má vstupní slovo. Po jejím posledním použití se dostane symbol α až na konec slova. Dále se používá opakovaně formule (2). Ta zajišťuje přesunutí přidaných dvojníků i se svými symboly β na pravý konec slova, nepřipouští však změnu vzájemného pořadí dvojníků. V okamžiku, kdy již nelze pravidlo (2) použít, jsme v podstatě hotovi — původní vstupní slovo je zdvojené, zbývá už jen odstranit pomocné symboly. Před každým dvojníkem v pravé části slova se nachází jeden symbol β a na samém konci slova je jeden symbol α. Všechny pomocné symboly snadno odstraníme pravidly (3) a (4).

$$\begin{cases} \alpha\xi & \to \xi\beta\xi\alpha & (\xi \in T) & (1) \\ \beta\xi\eta & \to \eta\beta\xi & (\xi, \eta \in T) & (2) \\ \beta & \to \Lambda & & (3) \\ \alpha & \to \cdot\Lambda & & (4) \\ \Lambda & \to \alpha & & (5) \end{cases}$$

Zbývá stanovit rychlost výpočtu. Formule (4) a (5) se použijí každá jednou, formule (1) a (3) každá n-krát, kde n je počet znaků vstupního slova. Nejpracnější je přerovnání pořadí znaků ve slově pomocí formule (2). První dvojník se musí vyměnit postupně se všemi $n-1$ zbývajícími znaky, druhý již jen s $n-2$ znaky, atd. Celkový počet použití pravidla (2) při výpočtu je proto $(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+1 = \frac{1}{2}n(n-1)$. Algoritmus má tedy kvadratickou časovou složitost.

49 – P – II – 2

Posloupnost. Nechť $A = (a_1, a_2, \ldots, a_M)$ je posloupnost celých čísel. Posloupnost A' nazveme vybranou podposloupností této posloupnosti, jestliže vznikne z posloupnosti A vynecháním některých jejích členů, přičemž pořadí ostatních prvků zachováme. Společná vybraná podposloupnost posloupností A, B je každá taková posloupnost C, která je vybranou podposloupností obou posloupností A i B.

Příklad. Nechť $A = (1, 11, 2, 1, 4, 99)$, $B = (9, 4, 1, 2, 7, 1, 99)$. Posloupnost $(1, 2, 1, 99)$ je společnou vybranou podposloupností posloupností A, B. Posloupnost $(1, 2, 4)$ je vybranou podposloupností posloupnosti A, ale není vybranou podposloupností posloupnosti B, takže není ani společnou vybranou podposloupností A a B.

Soutěžní úloha. Máme dány dvě posloupnosti celých čísel $A = (a_1, a_2, \ldots, a_M)$ a $B = (b_1, b_2, \ldots, b_N)$ s délkami M, resp. N. Tyto posloupnosti jsou uloženy v polích $a[1 \ldots M]$, resp. $b[1 \ldots N]$, jejichž obsah není dovoleno měnit. Uvažujme takovou společnou vybranou podposloupnost posloupností A a B, ve které součet všech jejích členů je největší možný. Napište program, který vypíše součet členů takovéto posloupnosti.

Poznámka. Existuje algoritmus, který tuto úlohu řeší v čase úměrném $M \times N$ a paměti, jejíž velikost je úměrná menšímu z čísel M, N.

Příklad:

```
Vstup:                Výstup:
M=6, N=7              103
A=(1,11,2,1,4,99)
B=(9,4,1,2,7,1,99)
```

(Vybrané podposloupnosti se součtem 103 existují dvě: $4, 99$ a $1, 2, 1, 99$.)

Řešení. V řešení úlohy použijeme metodu dynamického programování. Označme $A_i = a[1], a[2], \ldots, a[i]$ posloupnost tvořenou prvními i členy posloupnosti a, analogicky $B_j = b[1], \ldots, b[j]$. Budeme nejprve řešit obecnější úlohu: Pro každé i, j ($0 \leqq i \leqq M$, $0 \leqq j \leqq N$) spočítáme, jaký je maximální součet členů společné vybrané podposloupnosti posloupností A_i a B_j. Tyto maximální součty si budeme zapisovat do tabulky $p[0 \ldots M, 0 \ldots N]$, kde $p[i, j]$ je součet maximální společné vybrané podposloupnosti posloupností A_i a B_j. Hledaným maximálním součtem bude tedy hodnota $p[M, N]$.

Tabulku p budeme vyplňovat po řádcích s využitím předpočítané informace uložené v předešlém řádku. Řádek $p[0]$ obsahuje samé nuly, protože neexistuje vybraná podposloupnost prázdné posloupnosti. Řádek $p[i]$ (pro $i > 0$) vyplníme podle řádku $p[i-1]$ takto: Políčko $p[i, 0]$ má zřejmě hodnotu nula. Políčko $p[i, j]$ (pro $j > 0$) umíme určit pomocí hodnot $p[i-1, j]$, $p[i, j-1]$ a $p[i-1, j-1]$. Jestliže se čísla $a[i]$ a $b[j]$ neshodují, každá vybraná podposloupnost posloupností A_i a B_j je zároveň vybranou podposloupností posloupností A_{i-1} a B_j nebo A_i

a B_{j-1}. Tedy v tomto případě je $p[i,j]$ rovno maximu z čísel $p[i-1,j]$ a $p[i,j-1]$. Jestliže $a[i] = b[j]$, každá vybraná podposloupnost posloupností A_i a B_j je vybranou podposloupností posloupností A_{i-1} a B_j nebo A_i a B_{j-1}, nebo je vybranou podposloupností posloupností A_{i-1} a B_{j-1} s přidaným členem $a[i] = b[j]$. Proto $p[i,j]$ je rovno maximu z čísel $p[i-1,j]$, $p[i,j-1]$ a $p[i-1,j-1]+a[i]$.

Navržený algoritmus má časovou složitost $O(MN)$. Paměťová složitost je také $O(MN)$. Jelikož každý řádek tabulky p závisí pouze na předcházejícím řádku, stačí si pamatovat jen poslední dva řádky (při počítaní řádku $p[i]$ si pamatujeme předcházející řádek $p[i-1]$; v programu p_1 označuje řádek $p[i-1]$ a p_2 řádek $p[i]$), paměťová složitost algoritmu je při této realizaci proto pouze $O(M+N)$.

```
program Posloupnost;
const MAX = 1000;
var a,b: array[1..MAX] of integer;
var p1,p2: array[0..MAX] of integer;
    M,N,i,j: integer;

Begin
  for i:=0 to N do p1[i]:=0;
  p2[0] := 0;
  for j:=1 to M do begin
    for i:=1 to N do begin
      if p2[i-1] > p1[i] then p2[i] := p2[i-1]
      else p2[i] := p1[i];
      if (b[i] = a[j]) and (p1[i-1]+a[j] > p2[i]) then
        p2[i] := p1[i-1]+a[j];
    end;
    for i:=1 to N do p1[i] := p2[i];
  end;
  Writeln('Největší součet podposloupnosti je: ',p1[N]);
End.
```

50 – P – I – 2

Posel. Na království krále Mírumila III. zaútočila nepřátelská vojska a podařilo se jim obsadit několik měst. Král nyní potřebuje dát svému generálovi příkaz k protiútoku (bez příkazu přeci generál nemůže bojovat). Generál však momentálně provádí inspekci vojsk v jiném městě. Je proto třeba vyslat posla, který příkaz co nejrychleji doručí. Příkaz ovšem v žádném případě nesmí padnout do rukou nepřítele! Proto se posel musí neustále držet co nejdále od nepřítelem obsazených měst. Vaším úkolem je navrhnout pro posla co nejlepší trasu.

Soutěžní úloha: Program dostane na vstupu zadaný počet měst N ($1 \leqq N \leqq 100$). Jednotlivá města budeme označovat čísly $1 \ldots N$. Dále je na vstupu uveden počet cest M ($1 \leqq M \leqq 10\,000$) a seznam těchto cest vedoucích mezi městy. Každá cesta

je určena dvojicí čísel měst, která spojuje. Cesty se kříží pouze ve městech a je možno se po nich dostat z libovolného města do libovolného (případně přes města jiná). Další údaj K zadaný na vstupu určuje počet měst obsazených nepřítelem, následuje seznam obsazených měst. Nakonec program dostane číslo města, odkud vyráží posel, a číslo města, kde se zdržuje generál. Váš program má nalézt trasu, jejíž vzdálenost od měst obsazených nepřítelem je maximální. Pokud existuje takových tras více, program určí libovolnou nejkratší z nich. Vzdálenost měst $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ počítáme jako minimální počet cest, po kterých musíme projít, abychom se dostali z města $\mathcal{A}$ do města $\mathcal{B}$. Vzdálenost trasy od města $\mathcal{A}$ je pak nejmenší ze vzdáleností města $\mathcal{A}$ od jednotlivých měst ležících na uvažované trase. Vzdáleností trasy od obsazených měst rozumíme nejmenší ze vzdáleností mezi trasou a některým z obsazených měst nebo nulu pokud některé město na trase samé je obsazeno.

Formát vstupu: První řádek vstupního souboru `posel.in` obsahuje čísla N (počet měst) a M (počet cest). Po něm následuje M řádků, z nichž každý obsahuje popis jedné cesty. Cesta je popsána dvojicí čísel koncových měst. Následuje řádek s číslem K (počet obsazených měst) a za ním K řádků s čísly obsazených měst. Poslední řádek vstupního souboru obsahuje číslo města, odkud vyjíždí posel, a číslo města, kde dlí generál.

Formát výstupu: Výstupem programu v souboru `posel.out` jsou čísla měst na nejlepší nalezené trase uvedená v pořadí, v jakém jimi má posel projíždět. Všechna čísla měst jsou zapsána na jediném řádku výstupního souboru a jsou oddělena mezerami.

Příklad:

`posel.in`

```
10 12
1 2
2 3
3 4
4 5
2 5
1 6
6 7
7 8
8 5
1 9
9 10
10 5
1
3
1 5
```

`posel.out`

```
1 9 10 5
```

Řešení. Algoritmus řešící tuto úlohu se dá rozdělit do tří fází. V první fázi se pro každé město spočítá, jaká je jeho vzdálenost od nepřítelem obsazených měst

(ve smyslu definice uvedené v zadání). Ve druhé fázi se zjistí, jakou maximální vzdálenost od nepřátelských měst dokážeme udržet při cestě z počátečního do cílového města. Ve třetí fázi pak nalezneme nejkratší z tras vedoucích z počátečního do cílového města, které udržují spočtenou vzdálenost.

První fáze: Vzdálenost od obsazených měst budeme hledat pomocí prohledávání do šířky. U každého města si budeme udržovat informaci, zda jsme v něm již byli (na počátku bude nastaveno právě u všech obsazených měst) a jeho vzdálenost od nepřítele. Pro města obsazená nepřítelem bude tato vzdálenost rovna 0. Dále si budeme udržovat frontu měst ke zpracování, do které na začátku uložíme všechna nepřátelská města. V každém kroku výpočtu vždy vezmeme jedno město z fronty a u všech jeho sousedů, ve kterých jsme dosud nebyli, nastavíme vzdálenost o jedna větší, než je vzdálenost vybraného města. U všech těchto sousedů také označíme, že jsme v nich už byli, a přidáme je na konec fronty. První fáze výpočtu končí, když se vyprázdní fronta. Tehdy jsme prošli všechna města a určili jsme vzdálenost každého z nich od nepřítele.

Druhá fáze: V této fázi si budeme udržovat front hned několik, pro každou vzdálenost od nepřátelských měst jednu. Dále si pro každé město budeme zaznamenávat, zda jsme v něm už byli. Také si budeme pamatovat dosud největší nalezenou vzdálenost, kterou dokážeme udržet od nepřítele. Na začátku nastavíme udržitelnou vzdálenost od nepřítele na hodnotu vzdálenosti královského města od nepřítele a toto město vložíme do fronty pro příslušnou vzdálenost. U tohoto města také nastavíme, že jsme v něm už byli. Výpočet probíhá tak, že postupně vyzvedáváme města z fronty pro aktuální udržitelnou vzdálenost, dokud se tato fronta nevyprázdní. Když se fronta vyprázdní, snížíme udržitelnou vzdálenost o jedna a opět začneme vybírat města z příslušné fronty. Vždy, když vezmeme nějaké město z fronty, projdeme všechny jeho sousedy, u dosud nenavštívených z nich nastavíme příznak, že už jsme je nenavštívili, a přidáme je do fronty — jestliže je vzdálenost takového města od nepřátelských měst větší, než je aktuální udržitelná vzdálenost, přidáme vrchol do fronty odpovídající aktuální udržitelné vzdálenosti, jinak město přidáme do fronty odpovídající jeho vzdálenosti od nepřátelských měst. Druhá fáze končí, jakmile vybereme z fronty cílové město. Aktuální udržitelná vzdálenost je pak výslednou udržitelnou vzdáleností.

Třetí fáze: Tato fáze představuje opět prosté prohledávání do šířky. Pro každé město si pamatujeme, zda jsme v něm již byli, a pokud ano, zaznamenáme si také město, ze kterého jsme do něj přišli. Opět používáme frontu na dosud nezpracovaná města. Na začátku vložíme do fronty cílové město. U něj nastavíme, že jsme v něm již byli, a jako jeho předchůdce nastavíme je samé. V každém kroku výpočtu pak vezmeme jedno město z fronty a projdeme všechny jeho sousedy. Každého souseda, kterého jsme dosud nenavštívili a jehož vzdálenost od nepřátelských měst je větší nebo rovna výsledné udržitelné vzdálenosti, označíme jako navštíveného a přidáme ho na konec fronty. Také u něj jako město, ze kterého jsme přišli, nastavíme právě vybrané město. Prohledávání končí ve chvíli, když je z fronty vyzvednuto počáteční

(královské) město. Poté už jenom projdeme cestu z počátečního do cílového města (to je velmi snadné díky odkazům na města, odkud jsme do nich při prohledávání přišli) a cestu vypíšeme.

Algoritmus má časovou složitost $O(M + N)$, kde M je počet cest a N je počet měst.

Správnost algoritmu budeme ukazovat opět po fázích. To, že algoritmus spočte správně vzdálenosti od nepřátelských měst v první fázi, plyne z následujícího: Na počátku mají všechny vrcholy se vzdáleností nula tuto vzdálenost přiřazenu. V okamžiku, kdy jsou zpracovány všechny vrcholy vzdálenosti nula, prošli jsme všechny jejich sousedy, přiřadili jsme jim vzdálenost jedna a zařadili je do fronty. Protože jiné vrcholy vzdálenost jedna mít nemohou, je vzdálenost jedna přiřazena právě všem správným vrcholům. Tuto úvahu lze snadno zobecnit pro libovolnou vzdálenost D. Prohledávání tedy skutečně určí vzdálenosti od nepřátelských měst správně.

Ve druhé fázi se správně spočítá maximální udržitelná vzdálenost od obsazených měst. Sledujeme v ní totiž souběžně všechny možné trasy vedoucí z počátečního města tak dlouho, dokud dokážeme udržet vzdálenost počátečního města (výsledná vzdálenost od nepřítele zřejmě nemůže být větší než vzdálenost počátečního města). Když už neexistuje město s dostatečně velkou vzdáleností, do kterého bychom mohli jít, snížíme udržitelnou vzdálenost o jedna. Všechny vrcholy se vzdáleností o jedna nižší, do kterých se dokážeme dostat přes vrcholy s dosavadní udržitelnou vzdáleností, máme již připraveny v příslušné frontě a začneme tedy prohledávat z nich. Protože udržitelnou vzdálenost snižujeme až když jsme se již dostali všude, kam to bylo možné, její výsledná hodnota bude zřejmě nejvyšší možná.

To, že ve třetí fázi nalezneme nejkratší trasu s danou vzdáleností, je zřejmé. Provádíme totiž jednoduché prohledávání do šířky s tím, že ignorujeme města s příliš malou vzdáleností od nepřítele. Nalezneme tedy určitě trasu s dostatečnou vzdáleností od nepřítele. Skutečnost, že to bude trasa nejkratší možná, plyne z vlastností prohledávání do šířky uvedených v první části důkazu.

Program je přímou implementací uvedeného algoritmu.

Výsledky celostátních kol ročníků 41–50

Výsledky celostátního kola 41. ročníku MO
kategorie A

Vítězové

1.–2.	*Luboš Motl*, 4 G Plzeň, Opavská,	42 b.
	Michal Stehlík, 4 G Brno, kpt. Jaroše,	42 b.
3.	*Juraj Lanyi*, 4 GAM Bratislava,	41 b.
4.–6.	*Kamil Budinský*, 3 GJH Bratislava,	38 b.
	Vít Novák, 3 G Praha, Korunní,	38 b.
	Pavel Růžička, 4 G Brno, kpt. Jaroše,	38 b.
7.–11.	*Ondřej Klíma*, 3 G Brno, kpt. Jaroše,	37 b.
	Michal Kubeček, 4 G Praha, Korunní,	37 b.
	Martin Niepeľ, 2 GAM Bratislava,	37 b.
	Matej Ondrušek, 3 GJH Bratislava,	37 b.
	Daniel Štefankovič, 3 GAM Bratislava,	37 b.
12.–16.	*Viliam Búr*, 3 GAM Bratislava,	35 b.
	Pavol Mederly, 4 GAM Bratislava,	35 b.
	Filip Münz, 4 G Brno, kpt. Jaroše,	35 b.
	Josef Menšík, 4 G Brno, kpt. Jaroše,	35 b.
	Herbert Vojčík, 4 G Košice, Pivovarská,	35 b.
17.–19.	*Richard K. Kollár*, 3 GAM Bratislava,	34 b.
	Ľuboš Pástor, 4 G Košice, Pivovarská,	34 b.
	Andrej Zlatoš, 2 GAM Bratislava,	34 b.

Další úspěšní řešitelé

20.–21.	*Katarína Skalová*, 3 GAM Bratislava,	33 b.
	Michal Skokan, 2 G Žilina, Veľká Okružná,	33 b.
22.–23.	*Pavol Marton*, 3 GAM Bratislava,	32 b.
	Petr Novotný, 4 G Praha, Korunní,	32 b.
24.–26.	*Petr Staufčík*, 3 GMK Bílovec,	31 b.
	Miloš Volauf, 3 GAM Bratislava,	31 b.
	Tomáš Zellerin, 4 G Ústí n. L., Jateční,	31 b.
27.–29.	*Jiří Černý*, 3 G Plzeň, Mikulášské nám.,	30 b.
	Roman Koch, 4 GMK Bílovec,	30 b.
	Václav Komínek, 3 G Brno, kpt. Jaroše,	30 b.

30.–36. *Martin Beneš*, 3 GMK Bílovec, 29 b.
Marcela Hlawiczková, 3 G Třinec, 29 b.
Ján Maňuch, 4 G Košice, Pivovarská, 29 b.
Dušan Svitek, 4 G Ban. Bystrica, Tajovského, 29 b.
Jana Uhrová, 3 GMK Bílovec, 29 b.
Jiří Vaníček, 3 G Praha, Korunní, 29 b.
Ján Žabka, 3 G Žilina, Veľká Okružná, 29 b.
37.–43. *Tomáš Bruna*, 3 G Žilina, Veľká Okružná, 28 b.
Martin Kačer, 3 G Liberec, 28 b.
Ladislav Kis, 4 GAM Bratislava, 28 b.
Matej Kordoš, 4 GJH Bratislava, 28 b.
Alexander Kupčo, 4 GMK Bílovec, 28 b.
Roman Mackovčák, 4 G Banská Štiavnica, 28 b.
Michael Schenk, 4 G Č. Budějovice, Jírovcova, 28 b.

Výsledky celostátního kola 41. ročníku MO
kategorie P

Vítězové

1.	*Matej Ondrušek*, 3 GJH Bratislava	40 b.
2.	*Michal Kubeček*, 4 G Praha, Korunní	37 b.
3.	*Herbert Vojčík*, 4 G Košice, Pivovarská	30 b.
4.	*Jana Syrovátková*, 3 G Brno, kpt. Jaroše	29 b.
5.–6.	*Tomáš Vinař*, 2 G Košice, Šrobárova	28 b.
	Jan Kotas, 4 G Plzeň, Mikulášské nám.	28 b.
7.–8.	*Jan Kybic*, 4 G Praha, Korunní	27 b.
	Rastislav Královič, 3 G Bratislava, Vazovova	27 b.
9.	*Pavel Kaňkovský*, 4 G Brno, kpt. Jaroše	26 b.
10.–11.	*Michal Koucký*, 4 G Praha, Korunní	25 b.
	Daniel Štefankovič, 3 GAM Bratislava	25 b.
12.	*Pavel Petrovič*, 3 GJH Bratislava	24 b.

Další úspěšní řešitelé

13.–16.	*Martin Helmich*, 4 G Mladá Boleslav	22 b.
	Jaroslav Kaas, 4 G Plzeň, Mikulášské nám.	22 b.
	Martin Mareš, 1 G Praha, U libeň. zámku	22 b.
	Karel Sršeň, 4 G Benešov	22 b.
17.–18.	*Peter Budai*, 4 G Košice	22 b.
	Tomáš Němec, 4 G Beroun	22 b.
19.–22.	*Juraj Barát*, 3 G Košice, Šrobárova	19 b.
	Milan Bok, 3 G Praha, Korunní	19 b.
	Vít Novák, 3 G Praha, Korunní	19 b.
	Dušan Vallo, 4 GJH Bratislava	19 b.
23.–26.	*Marek Gura*, 4 G Poprad	18 b.
	Richard Ostertág, 4 GJH Bratislava	18 b.
	Michael Schenk, 4 G Č. Budějovice, Jírovcova	18 b.
	Jiří Vaníček, 3 G Praha, Korunní	18 b.

Výsledky celostátního kola 42. ročníku MO
kategorie A

Vítězové

1.	*Villiam Búr*, 4b G Bratislava, Grösslingová	35 b.
2.	*Andrej Zlatoš*, 3b G Bratislava, Grösslingová	34 b.
3.	*Jiří Černý*, 4a G Plzeň, Mikulášské nám.	32 b.
4.–5.	*Michal Brodský*, 4a G Brno, kpt. Jaroše	31 b.
	Jana Syrovátková, 4a G Brno, kpt. Jaroše	31 b.
6.–7.	*Marek Mačuha*, 3b G Bratislava, Grösslingová	30 b.
	Vít Novák, 4e G Praha 2, Korunní	30 b.
8.	*Robert Šámal*, 2d G Praha 2, Korunní	29 b.
9.–11.	*Petr Kaňovský*, 2a G Brno, kpt. Jaroše	28 b.
	Pavol Marton, 4 G Bratislava, Grösslingová	28 b.
	Daniel Štefankovič, 4b G Bratislava, Grösslingová	28 b.
12.–14.	*Marcela Hlawiczková*, 4c G Třinec	27 b.
	Daniel Pastor, 3b G Bratislava, Grösslingová	27 b.
	Jiří Vaníček, 4e G Praha 2, Korunní	27 b.
15.	*Ondřej Klíma*, 4a G Brno, kpt. Jaroše	26 b.
16.	*František Vymazal*, 4a G Brno, kpt. Jaroše	25 b.
17.–19.	*Jan Mach*, 3c G Bílovec	24 b.
	Martin Niepel, 3b G Bratislava, Grösslingová	24 b.
	Martin Vagaský, 3b G Bratislava, Grösslingová	24 b.

Další úspěšní řešitelé

20.–24.	*Kamil Budínský*, 4b G Bratislava, Novohradská	23 b.
	Blažej Neradílek, 3a G Brno, kpt. Jaroše	23 b.
	Jan Rychtář, 2c G Strakonice	23 b.
	Katarína Skalová, 4b G Bratislava, Grösslingová	23 b.
	Juraj Slanička, 4 G Bratislava, Grösslingová	23 b.
25.–26.	*Jana Uhrová*, 4d G Bílovec	22 b.
	Miloš Volauf, 4 G Bratislava, Grösslingová	22 b.
27.–28.	*Matej Ondrušek*, 4b G Bratislava, Novohradská	21 b.
	Marek Žabka, 4f Banská Bystrica, Tajovského	21 b.

29.–31.	*Milan Hokr*, 3d G Praha 2, Korunní	20 b.
	Filip Krška, 2a G Brno, kpt. Jaroše	20 b.
	Libor Mašíček, 2a G Brno, kpt. Jaroše	20 b.
32.–35.	*Ivana Brudňáková*, 2e G Prešov, Konštantínova	19 b.
	David Kruml, 4a G Brno, kpt. Jaroše	19 b.
	Boris Krupa, 1 G Bratislava, Grösslingová	19 b.
	Petr Vachovec, 3a G Plzeň, Mikulášské nám.	19 b.
36.–38.	*Matúš Kirchmayer*, 3a G Bratislava, Metodova	17 b.
	Mikuláš Piňos, 3a G Brno, kpt. Jaroše	17 b.
	Martin Semerád, 4e G Praha 2, Korunní	17 b.

Výsledky celostátního kola 42. ročníku MO
kategorie P

Vítězové

1.	*Tomáš Vinař*, 3.A G Košice, Šrobárova	33 b.
2.	*Jiří Vaníček*, 4.E G Praha, Korunní	31 b.
3.–5.	*Martin Mareš*, 2.E G Praha, U lib.zámku	30 b.
	Martin Niepel, 3.B G Bratislava, Grösslingova	30 b.
	Matej Ondrušek, 4.B G Bratislava, Novohradská	30 b.
6.	*Bronislava Brejová*, 3.B G Bratislava, Novohradská	29 b.
7.–8.	*Vít Novák*, 4.E G Praha, Korunní	26 b.
	Daniel Štefankovič, 4.B G Bratislava, Grösslingova	26 b.
9.–10.	*Jiří Hanika*, 4.E G Praha, Korunní	23 b.
	Cyril Sochor, 4.E G Praha, Korunní	23 b.
11.–13.	*Martin Gažák*, 3.B G Žilina, V.okružná	22 b.
	Ondřej Pár, 3.D G MK Bílovec	22 b.
	Jana Syrovátková, 4.A G Brno, kpt. Jaroše	22 b.

Další úspěšní řešitelé

14.–15.	*Ivana Brudňáková*, 2.E G Prešov, Konšt.	20 b.
	Rastislav Kráľovič, 4.F G Bratislava, Vazovova	20 b.
16.–19.	*Milan Bok*, 4.E G Praha, Korunní	19 b.
	Zoltán Bugár, 4.A G Galanta	19 b.
	Pavel Machek, 2.D G Praha, Korunní	19 b.
	Ondřej Pořádek, 4.E G Praha, Korunní	19 b.
20.	*Jan Mach*, 3.C G MK Bílovec	18 b.
21.–25.	*Marek Fekete*, 4.A G Michalovce	17 b.
	Patrik Horník, 2.B G Bratislava, Grösslingova	17 b.
	Boris Letocha, 3.A G H. Králové, Tylovo nám.	17 b.
	Robert Šámal, 2.D G Praha, Korunní	17 b.
	Martin Vagaský, 3.B G Bratislava, Grösslingová	17 b.
26.–28.	*Kamil Budinský*, 4.B G Bratislava, Novohradská	16 b.
	Pavel Petrovič, 4.B G Bratislava, Novohradská	16 b.
	Marián Varga, 3.A G Bratislava, Novohradská	16 b.

Výsledky celostátního kola 43. ročníku MO
kategorie A

Vítězové

1.	*David Pavlica*, 3.r. GMK Bílovec, 17. listopadu	29 b.
2.	*Martin Nečesal*, 3.r. G Brno, kpt. Jaroše	28 b.
3.	*Robert Šámal*, 3.r. G Praha 5, Zborovská	27 b.
4.–5.	*Petr Kaňovský*, 3.r. G Brno, kpt. Jaroše	26 b.
	Libor Mašíček, 3.r. G Brno, kpt. Jaroše	26 b.
6.–7.	*Jan Mach*, 4.r. GMK Bílovec, 17. listopadu	24 b.
	David Opěla, 2.r. GMK Bílovec, 17. listopadu	24 b.
8.–9.	*Filip Krška*, 3.r. G Brno, kpt. Jaroše	23 b.
	Jan Vaněk, 4.r. G Praha 5, Zborovská	23 b.
10.–11.	*Michal Beneš*, 2.r. G Praha 5, Zborovská	21 b.
	Michal Fabinger, 3.r. G Praha 6, Nad alejí	14 b.
12.–13.	*Michaela Prokešová*, 3.r. G Č. Budějovice, Jírovcova	20 b.
	Jan Rychtář, 3.r. G Strakonice, Máchova	20 b.

Další úspěšní řešitelé

14.–16.	*František Šanda*, 4.r. GJV Klatovy, Nár. mučedníků	18 b.
	Jaroslav Ševčík, 4.r. G Brno, kpt. Jaroše	18 b.
	Karel Výborný, 2.r. G Praha 5, Zborovská	18 b.
17.–20.	*Igor Glücksmann*, 4.r. G Písek, Komenského	17 b.
	Stanislav Hencl, 4.r. G Pardubice, Dašická	17 b.
	Jitka Nečasová, 4.r. G Praha 5, Zborovská	17 b.
	Petr Vilím, 2.r. GMK Bílovec, 17. listopadu	17 b.
21.–22.	*Milan Hokr*, 4.r. G Praha 5, Zborovská	16 b.
	Jan Hradil, 4.r. G Brno, kpt. Jaroše	16 b.
23.–24.	*Michal Johanis*, 4.r. GJKT Hradec Kr., Tylovo nábř.	15 b.
	Daniel Král, 2.r. G Zlín, Lesní čtvrť	15 b.
	Karel Švadlenka, 3.r. G Č. Budějovice, Jírovcova	15 b.
26.	*Pavel Körber*, 4.r. G Praha 5, Zborovská	14 b.

Výsledky celostátního kola 43. ročníku MO
kategorie P

Vítězové

1.	*Robert Špalek*, 2.r. G Brno, tř. kpt. Jaroše	31 b.
2.	*Petr Kaňovský*, 3.r. G Brno, tř. kpt. Jaroše	30 b.
3.–4.	*David Stanovský*, 3.r. G Pardubice, Dašická	28 b.
	Daniel Škarda, 4.r. G Praha, Zborovská	28 b.
5.	*Petr Novák*, 4.r. G Brno, tř. kpt. Jaroše	27 b.

Další úspěšní řešitelé

6.	*Jaroslav Ševčík*, 4.r. G Brno, tř. kpt. Jaroše	25 b.
7.	*Jiří Hájek*, 3.r. G Praha 5, Zborovská	24 b.
8.–9.	*Tomáš Müller*, 2.r. G Ml. Boleslav, Palackého	23 b.
	Mikuláš Patočka, 1.r. G Brno, tř. kpt. Jaroše	23 b.
10.	*StanislavHencl*, 4.r. G Pardubice, Dašická	22 b.
11.–13.	*Jan Kratochvíl*, 1.r. G Praha 8, U libeňského zámku	21 b.
	Martin Mareš, 3.r. G Praha 8, U libeňského zámku	21 b.
	Jiří Valášek, 4.r. G Jablonec n. N., U balvanu	21 b.
14.	*Pavel Machek*, 3.r. G Praha 5, Zborovská	20 b.

Výsledky celostátního kola 44. ročníku MO
kategorie A

Vítězové

1.	*Robert Šámal*, 4.r. G Praha 5, Zborovská	42 b.
2.	*David Pavlica*, 4.r. GMK Bílovec	40 b.
3.–4.	*Filip Krška*, 4.r. G Brno, kpt. Jaroše	35 b.
	Libor Mašíček, 4.r. G Brno, kpt. Jaroše	35 b.
5.	*Karel Švadlenka*, 4.r. G České Budějovice, Jírovcova	33 b.
6.	*Tomáš Bárta*, 3.r. G Praha 5, Zborovská	31 b.
7.	*Robert Špalek*, 3.r. G Brno, kpt. Jaroše	29 b.
8.	*Martin Nečesal*, 4.r. G Brno, kpt. Jaroše	27 b.
9.–10.	*Petr Kaňovský*, 4.r. G Brno, kpt. Jaroše	26 b.
	Dalibor Šmíd, 3.r. G Plzeň, Mikulášské nám.	26 b.
11.–12.	*Michal Beneš*, 3.r. G Praha 5, Zborovská	25 b.
	Michaela Prokešová, 4.r. G České Budějovice, Jírovcova	25 b.

Další úspěšní řešitelé

13.	*Jan Vybíral*, 2.r. GMK Bílovec	23 b.
14.–17.	*Petr Pudlák*, 2.r. G Praha 5, Zborovská	22 b.
	David Stanovský, 4.r. G Pardubice	22 b.
	Norbert Vaněk, 4.r. G Praha 5, Zborovská	22 b.
	Samuel Zajíček, 3.r. G Praha 10, Voděradská	22 b.
18.–19.	*Milan Roupec*, 4.r. G Brno, kpt. Jaroše	20 b.
	Petr Vodstrčil, 3.r. G Polička	20 b.
20.	*Michal Fabinger*, 4.r. G Praha 6, Nad alejí	18 b.
21.	*Petr Mařík*, 4.r. G Plzeň, Mikulášské nám.	17 b.
22.–23.	*Hedvika Šimková*, 4.r. G Plzeň, Mikulášské nám.	16 b.
	Petr Škovroň, 3.r. GMK Bílovec	16 b.

Výsledky celostátního kola 44. ročníku MO
kategorie P

Vítězové

1.	*Martin Mareš*, 4.r., G Praha 8, Libeň	49 b.
2.	*Jiří Hájek*, 4.r., G Praha 5, Zborovská	48 b.
3.	*Daniel Kráľ*, 3.r., G Zlín, Lesní čtvrť	44 b.
4.–6.	*Martin Nečesal*, 4.r., G Brno, tř. kpt. Jaroše	43 b.
	David Stanovský, 4.r., G Pardubice, Dašická	43 b.
	Robert Šámal, 4.r., G Praha 5, Zborovská	43 b.
7.	*Robert Špalek*, 3.r., G Brno, tř. kpt. Jaroše	42 b.
8.	*Pavel Machek*, 4.r., G Praha 5, Zborovská	40 b.

Další úspěšní řešitelé

9.	*Mikuláš Patočka*, 2.r., G Brno, tř. kpt. Jaroše	39 b.
10.–11.	*Ondřej Chum*, 4.r., G Praha 5, Zborovská	38 b.
	Jan Kratochvíl, 2.r., G Praha 8, Libeň	38 b.
12.	*Stanislav Mikeš*, 3.r., G České Budějovice, Jírovcova	33 b.
13.–14.	*Tomáš Müller*, 3.r., G Dr. J. Pekaře Ml. Boleslav	31 b.
	Ondřej Najdek, 3.r., G M. Koperníka Bílovec	31 b.
15.–17.	*Petr Mařík*, 4.r., G Plzeň, Mikulášské nám.	30 b.
	Petr Vilím, 2.r., G M. Koperníka Bílovec	30 b.
	Roman Ženka, 3.r., G České Budějovice, Jírovcova	30 b.

Výsledky celostátního kola 45. ročníku MO
kategorie A

Vítězové

1.	*David Opěla*, 4.r. GMK Bílovec	34 b.
2.	*Tomáš Bárta*, 4.r. G Zborovská, Praha	32 b.
3.	*Jan Spěvák*, 3.r. G Hellichova, Praha	29 b.
4.	*Michal Beneš*, 4.r. G Zborovská, Praha	28 b.
5.–6.	*Daniel Kráľ*, 4.r. G Zlín	26 b.
	Robert Špalek, 4.r. G tř. Kpt. Jaroše, Brno	26 b.
7.–9.	*Tomáš Brauner*, 3.r. G Moravský Krumlov	23 b.
	Petr Vilím, 4.r. GMK Bílovec	23 b.
	Jan Vybíral, 3.r. GMK Bílovec	22 b.
10.–11.	*Karel Výborný*, 4.r. G Zborovská, Praha	21 b.
	Petr Vodstrčil, 4.r. G Polička	21 b.

Další úspěšní řešitelé

12.–13.	*Roman Ženka*, 4.r. G Jírovcova, Č. Budějovice	20 b.
	Pavel Strnad, 5.r. GFXŠ Liberec	20 b.
14.	*Zbyněk Pawlas*, 4.r. GMK Bílovec	17 b.
15.–17.	*Petr Pudlák*, 3.r. G Zborovská, Praha	15 b.
	Jana Flašková, 3.r. Svob. cheb. škola, Cheb	15 b.
	Petr Škovroň, 4.r. GMK Bílovec	15 b.
18.–20.	*Jan Štola*, 3.r. G Zborovská, Praha	14 b.
	Radek Pelánek, 2.r. G tř. Kpt. Jaroše, Brno	14 b.
	Jiří Benedikt, 4.r. G Mikulášské nám., Plzeň	14 b.
21.	*Karel Zikmund*, 4.r. G Jihlava	13 b.

Výsledky celostátního kola 45. ročníku MO
kategorie P

Vítězové

1.	*Daniel Kráľ*, 4 G Zlín	48 b.
2.	*Stanislav Mikeš*, 4 G Jírovcova, České Budějovice	38 b.
3.–4.	*Michal Beneš*, 4 G Zborovská, Praha	37 b.
	Tomáš Tichý, 4 G Dašická, Pardubice	37 b.
5.	*Robert Špalek*, 4 G tř. Kpt. Jaroše, Brno	35 b.
6.	*Jan Vodička*, 4 G Zborovská, Praha	33 b.
7.–8.	*Tomáš Müller*, 4 G J. Pekaře, Mladá Boleslav	32 b.
	Mikuláš Patočka, 3 G Kpt. Jaroše, Brno	32 b.

Další úspěšní řešitelé

9.	*Pavel Jelínek*, 4 G Mikulášské nám., Plzeň	30 b.
10.–13.	*Vlastimil Janda*, 5 G Humpolec	29 b.
	Věroslav Kaplan, 3 G tř. Kpt. Jaroše, Brno	29 b.
	Petr Vilím, 4 GMK Bílovec	29 b.
	Roman Ženka, 4 G Jírovcova, České Budějovice	29 b.
14.	*Aleš Přívětivý*, G Dašická, Pardubice	28 b.
15.–16.	*Jan Březina*, 3 G F. X. Šaldy, Liberec	27 b.
	Karel Zikmund, 4 G Jihlava	27 b.

Výsledky celostátního kola 46. ročníku MO
kategorie A

Vítězové

1.	*Petr Zima*, 3 G nám. dr. E. Beneše, Kladno	38 b.
2.	*Libor Barto*, 3 G Hellichova, Praha 1	33 b.
3.–4.	*Jan Vybíral*, 4C GMK 17. listopadu 526, Bílovec	32 b.
	Tomáš Brauner, 4B G Smetanova 168, Mor. Krumlov	32 b.
5.–7.	*Pavel Podbrdský*, 3A G tř. Kpt. Jaroše, Brno	30 b.
	Martin Viščor, 2A G tř. Kpt. Jaroše, Brno	30 b.
	Jan Spěvák, 4A G Hellichova, Praha 1	30 b.
8.	*Jan Šťovíček*, 3 G nám. dr. E. Beneše, Kladno	29 b.

Další úspěšní řešitelé

9.	*Tomáš Hanžl*, 3A G tř. Kpt. Jaroše, Brno	26 b.
10.–13.	*Radek Pelánek*, 3A G tř. Kpt. Jaroše, Brno	25 b.
	Jan Štola, 4D G Zborovská 45, Praha 5	25 b.
	Petr Šimeček, 3A G tř. Kpt. Jaroše, Brno	25 b.
	Lukáš Vokřínek, 2A G tř. Kpt. Jaroše, Brno	25 b.
14.–15.	*Jan Březina*, 4 G FXŠ, Partyzánská 530/1, Liberec	24 b.
	Jana Flašková, 4 Svob. cheb. š., Kubelíkova 4, Cheb	24 b.
16.–17.	*Aleš Benda*, 4C GMK 17. listopadu 526, Bílovec	23 b.
	Roman Rožník, 3A G tř. Kpt. Jaroše, Brno	23 b.
18.–20.	*Eva Burešová*, 2A G tř. Kpt. Jaroše, Brno	22 b.
	Libor Inovecký, 3 G Zborovská 45, Praha 5	22 b.
	Jiří Houška, VII G Mikulášské nám. 23, Plzeň	22 b.
21.–23.	*Oldřich Stražovský*, 4A G tř. Kpt. Jaroše, Brno	21 b.
	Aleš Návrat, 2A G tř. Kpt. Jaroše, Brno	21 b.
	Filip Matějka, 3 G Zborovská 45, Praha 5	21 b.

Výsledky celostátního kola 46. ročníku MO
kategorie P

Vítězové

1.	*Mikuláš Patočka*, 4.A G tř. kpt. Jaroše 14, Brno	31 b.
2.	*Jan Kratochvíl*, 4.C G U libeňského zámku, Praha 8	26 b.
3.–4.	*Filip Kábrt*, 4.A G Litoměřická 720, Praha 9	25 b.
	Radek Pelánek, 3.A G tř. kpt. Jaroše 14, Brno	25 b.
5.	*Aleš Přívětivý*, 7.K G Dašická 1083, Pardubice	23 b.
6.	*Jan Tauš*, 3.A I. G Mikulášské nám. 23, Plzeň	22 b.

Další úspěšní řešitelé

7.–11.	*Jan Březina*, 4.D GFXŠ Partyzánská 530/3, Liberec 11	21 b.
	Vlastimil Janda, sexta G Komenského ul., Humpolec	21 b.
	Petr Chaloupka, 4.C G Zborovská 45, Praha 5	21 b.
	Petr Sedláček, 4.C G Husova 470, Benešov	21 b.
	Petr Šimeček, 3.A G tř. kpt. Jaroše 14, Brno	21 b.
12.–13.	*Ladislav Kavan*, 6.A G Ústavní 400, Praha 8	20 b.
	Vladimír Šišma, 3.r GMK, 17.listopadu 526, Bílovec	20 b.
14.–16.	*Karel Carva*, V7G Gymnázium, Tábor	19 b.
	Věroslav Kaplan, 4.A G tř. kpt. Jaroše 14, Brno	19 b.
	Jiří Šrain, septima G Vágnerovo nám. 458, Beroun	19 b.

Výsledky celostátního kola 47. ročníku MO
kategorie A

Vítězové

1.–3.	*Libor Barto*, 4. G Hellichova 3, Praha 1	42 b.
	Pavel Podbrdský, 4. M G tř. Kpt. Jaroše, Brno	42 b.
	Lukáš Vokřínek, 3. M G tř. Kpt. Jaroše, Brno	42 b.
4.–5.	*Tomáš Hanžl*, 4. M G tř. Kpt. Jaroše, Brno	41 b.
	Libor Inovecký, 4. M G Zborovská 45, Praha 5	41 b.
6.	*Martin Viščor*, 3. M G tř. Kpt. Jaroše, Brno	40 b.
7.	*Martin Ondráček*, VII. G, Kyjov	37 b.
8.–9.	*Eva Burešová*, 3. M G tř. Kpt. Jaroše, Brno	36 b.
	Zdeněk Dvořák, VI. G L. Čecha 152, Nové Město n. Mor.	36 b.
10.–11.	*Petr Liška*, 3. M G tř. Kpt. Jaroše, Brno	35 b.
	Jan Šťovíček, 4. G nám. dr. E. Beneše 1573, Kladno	35 b.

Další úspěšní řešitelé

12.–13.	*Radek Pelánek*, 4. M G tř. Kpt. Jaroše, Brno	34 b.
	Petr Zima, 4. G nám. dr. E. Beneše 1573, Kladno	34 b.
14.	*Petr Šimeček*, 4. M G tř. Kpt. Jaroše, Brno	32 b.
15.–16.	*Martina Kupčíková*, 3. M G tř. Kpt. Jaroše, Brno	31 b.
	Aleš Návrat, 3. M G tř. Kpt. Jaroše, Brno	31 b.
17.–18.	*Jan Houštěk*, 3. G Jirsíkova 244, Pelhřimov	30 b.
	Petr Laštovička, 4. G Komenského nám. 4, Děčín	30 b.
19.–20.	*Filip Matějka*, 4. M G Zborovská 45, Praha 5	29 b.
	Lenka Zdeborová, 3. G Mikulášské nám. 23, Plzeň	29 b.
21.–22.	*Alexandr Jevsejenko*, 3. M G tř. Kpt. Jaroše, Brno	26 b.
	Antonín Slavík, VII. G Národní 25, Karlovy Vary	26 b.
23.–25.	*Jaroslav Jánský*, 3. M G tř. Kpt. Jaroše, Brno	25 b.
	Tomáš Kubař, 4. G Pivovarská 323, Domažlice	25 b.
	Jan Petr, 4. M G Zborovská 45, Praha 5	25 b.

Výsledky celostátního kola 47. ročníku MO
kategorie P

Vítězové

1.	*Zdeněk Dvořák*, 6.A G Nové Město na Moravě	38 b.
2.	*Pavel Nejedlý*, 4.A G Vídeňská, Brno	37 b.
3.	*Jan Kára*, 4.C G U libeň. zámku, Praha 8	36 b.
4.	*Michal Illich*, septima G Buďánka, Praha 5	35 b.
5.	*Radek Pelánek*, 4.A G tř. Kpt. Jaroše, Brno	31 b.
6.	*Petr Šimeček*, 4.A G tř. Kpt. Jaroše, Brno	30 b.

Další úspěšní řešitelé

7.	*Jaromír Malenko*, 3.C G M. Koperníka, Bílovec	27 b.
8.	*Jiří Benc*, 3.C G M. Koperníka, Bílovec	26 b.
9.	*Vlastimil Janda*, 7.r. G Dr. A. Hrdličky, Humpolec	25 b.
10.–11.	*Ladislav Kavan*, 7.A G Ústavní, Praha 8	24 b.
	Antonín Slavík, 7.A G Národní, Karlovy Vary	24 b.
12.–13.	*Lukáš Kroc*, 4.C G Zborovská, Praha 5	22 b.
	Michal Šída, septima G Tanvald	22 b.

Výsledky celostátního kola 48. ročníku MO
kategorie A

Vítězové

1.	*Jan Houštěk*, 4. G Jirsíkova 244, Pelhřimov	41 b.
2.	*Zdeněk Dvořák*, VII G L. Čecha 152, Nové Město n. Mor.	40 b.
3.–5.	*David Holec*, 4. M G tř. Kpt. Jaroše, Brno	30 b.
	Pavel Moravec, 4. M G tř. Kpt. Jaroše, Brno	30 b.
	Lukáš Vokřínek, 4. M G tř. Kpt. Jaroše, Brno	30 b.
6.–7.	*Aleš Návrat*, 4. M G tř. Kpt. Jaroše, Brno	29 b.
	Martin Viščor, 4. M G tř. Kpt. Jaroše, Brno	29 b.
8.	*Lenka Zdeborová*, 4. G Mikulášské nám. 23, Plzeň	26 b.
9.	*Luboš Dostál*, VIII G a OA, Stříbro	25 b.
10.	*Karel Kyrián*, G Jírovcova 8, České Budějovice	24 b.

Další úspěšní řešitelé

11.	*Robert Káldy*, 4. M G Zborovská 45, Praha 5	20 b.
12.	*Karel Honzl*, 4. G Komenského 843, Podbořany	19 b.
13.–16.	*Jaroslav Hlinka*, 4. M G Zborovská 45, Praha 5	17 b.
	Jaroslav Jánský, 4. M G tř. Kpt. Jaroše, Brno	17 b.
	František Němec, 2. M G Zborovská 45, Praha 5	17 b.
	Ondřej Rucký, VI-M G Mikulášské nám. 23, Plzeň	17 b.
17.–19.	*Jaromír Dobrý*, VI-M G Mikulášské nám. 23, Plzeň	14 b.
	Josef Křišťan, V M G Mikulášské nám. 23, Plzeň	14 b.
	Jakub Šácha, VII G Komenského 549/550, Kyjov	14 b.
20.	*Pavel Nejedlý*, VII G Vídeňská 47, Brno	13 b.
21.	*David Pelikán*, 4. SPŠ Strojnická Klatovská 109	12 b.
22.	*Jan Vršovský*, VII G FXŠ, Partyzánská 530/3, Liberec	11 b.

Výsledky celostátního kola 48. ročníku MO
kategorie P

Vítězové

1.–2.	*Zdeněk Dvořák*, G V. Makovského, Nové Město na Mor.	28 b.
	Michal Illich, G Buďánka, Holečkova 31a, Praha 5	28 b.
3.	*Josef Zlomek*, Purkyňovo G, Strážnice	27 b.
4.	*Jakub Bystroň*, G Mírová 1442, Karviná 6	24 b.
5.–6.	*Pavel Nejedlý*, G Vídeňská 47, Brno	22 b.
	Petr Zika, G Voděradská 900/2, Praha 10	22 b.

Další úspěšní řešitelé

7.–9.	*Jiří Benc*, G Mikuláše Koperníka, Bílovec	20 b.
	Pavel Charvát, G Ohradní 55, Praha 4	20 b.
	Stanislav Živný, G Ed. Beneše 449, Soběslav	20 b.
10.	*Ondřej Nekola*, G Žižkova 162, Kolín	19 b.
11.	*Jiří Svoboda*, G Ch. Dopplera, Praha 5	18 b.
12.	*Ondřej Rucký*, G Mikulášské nám. 23, Plzeň	16 b.
13.	*Milan Roubal*, G Mikulášské nám. 23, Plzeň	15 b.
14.–16.	*Pavel Čížek*, Dvořákovo G a OA, Kralupy nad Vlt.	13 b.
	Michal Karásek, G Jírovcova 8, České Budějovice	13 b.
	Jan Vršovský, GFXŠ, Partyzánská, Liberec 11	13 b.

Výsledky celostátního kola 49. ročníku MO
kategorie A

Vítězové

1.	*Jan Houštěk*, 7/7 G Jirsíkova 244, Pelhřimov	40 b.
2.	*Jan Herman*, 3/4 (M) G tř. Kpt. Jaroše 14, Brno	37 b.
3.	*Jan Kynčl*, 5/6 G Kostelní 259, Jilemnice	36 b.
4.	*Jan Pipek*, 7/8 G Parléřova 2/118, Praha 6	32 b.
5.–6.	*Jaroslav Hájek*, 2/4 G 17. listopadu 526, Bílovec	31 b.
	Ondřej Šerý, 7/8 G a sport. šk. Plzeňská 3103, Kladno	31 b.
7.	*Ondřej Suchý*, 6/7 G Mikulášské nám. 23, Plzeň	27 b.
8.–10.	*Josef Křišťan*, 6/7 G Mikulášské nám. 23, Plzeň	26 b.
	Ondřej Rucký, 7/7 G Mikulášské nám. 23, Plzeň	26 b.
	Rudolf Stolař, 3/4 (M) G tř. Kpt. Jaroše 14, Brno	26 b.
11.–12.	*Jan Kulveit*, 7/7 G Ústavní 400, Praha 8	25 b.
	Tomáš Protivínský, 2/4 (M) G tř. Kpt. Jaroše 14, Brno	25 b.

Další úspěšní řešitelé

13.	*Martin Tancer*, 2/4 (M) G Zborovská 45, Praha 5	23 b.
14.–16.	*David Chodounský*, 3/4 (M) G Zborovská 45, Praha 5	22 b.
	Filip Jaroš, 3/4 (M) G Zborovská 45, Praha 5	22 b.
	Jiří Koula, 3/4 (P) G U Libeňského zámku 1, Praha 8	22 b.
17.–18.	*Tomáš Matoušek*, 7/7 G Národní 25, Karlovy Vary	21 b.
	Pavel Vališ, 3/4 G Dvořákovo nám. 800, Kralupy	21 b.
19.–20.	*Ondřej Bystrý*, 4/4 (M) G tř. Kpt. Jaroše 14, Brno	20 b.
	Václav Flaška, 7/8 Svob. cheb. šk. Jánské nám. 15, Cheb	20 b.
21.	*Jaromír Dobrý*, 7/7 G Mikulášské nám. 23, Plzeň	19 b.
22.	*Ondřej Kreml*, 3/4 G 17. listopadu 526, Bílovec	18 b.
23.	*Pavel Augustinský*, 7/7 G Studentská 11, Havířov 2	17 b.
24.	*František Němec*, 3/4 (M) G Zborovská 45, Praha 5	16 b.

Výsledky celostátního kola 49. ročníku MO
kategorie P

Vítězové

1. *Ondřej Rucký*, 7/7, G Mikulášské nám., Plzeň 41 b.
2. *Pavel Charvát*, 7/7, G Ohradní, Praha 4 39 b.
3. *Jakub Bystroň*, 7/7, G Karviná 34 b.
4. *Jiří Svoboda*, 6/8, G Ch. Dopplera, Praha 5 33 b.
5. *Matyáš Novák*, 7/7, G Ústavní, Praha 8 30 b.
6. *Pavel Čížek*, 5/8, Dvořákovo G, Kralupy nad Vltavou 29 b.
7. *Václav Jůza*, 7/7, G Špitálská, Praha 9 26 b.

Další úspěšní řešitelé

8. *Miroslav Trmač*, 7/8, Biskupské gymnázium, Brno 25 b.
9. *Roman Krejčík*, 3/4, G Ch. Dopplera, Praha 5 24 b.
10. *Miroslav Pištěk*, 7/7, GOA Sedlčany 23 b.
11. *Ondřej Šerý*, 7/8, G a SG Plzeňská, Kladno 22 b.
12. *Martin Beránek*, 6/7, G Ohradní, Praha 4 21 b.
13. *Ladislav Prošek*, 7/7, G V. Hlavatého, Louny 19 b.
14. *Zdeněk Bulan*, 6/7, G Benešov 18 b.
15. *Martin Vejnár*, 3/8, G tř. Kpt. Jaroše, Brno 17 b.

Účast na mezinárodních olympiádách ročníků 41–50

33. mezinárodní matematická olympiáda
10.–21. července 1992
Moskva (Rusko)

	úlohy	1.	2.	3.	4.	5.	6.	body	ceny	pořadí
Michal Kubeček 4. ročník *G Praha, Korunní*		7	7	7	1	0	6	28	II	47.–50.
Luboš Motl 4. ročník *G Plzeň, Opavská*		5	2	1	7	0	6	21	III	93.–99.
Martin Niepeľ 2. ročník *GAM Bratislava*		7	3	1	5	0	6	22	III	86.–92.
Pavel Růžička 4. ročník *G Brno, tř. kpt. Jaroše*		5	0	1	2	7	4	19	III	108.–114.
Michal Stehlík 4. ročník *G Brno, tř. kpt. Jaroše*		7	3	7	2	7	5	31	II	27.–31.
Daniel Štefankovič 3. ročník *GAM Bratislava*		5	4	0	0	0	4	13		156.–169.

(322 studentů z 56 zemí)

		ceny			
		I	II	III	body
1.	ČLR	6			240
2.	USA	3	3		181
3.	Rumunsko	2	2	2	177
4.	SNS	2	3		176
5.	Velká Británie	2	2	2	168
6.	Rusko	2	2	2	158
7.	Německo	0	4	2	149
8.–9.	Maďarsko	1	3	1	142
8.–9.	Japonsko	1	3	1	142
10.–11.	Vietnam	1	2	3	139
10.–11.	Francie	1	3	1	139
12.	Jugoslávie		2	4	136
13.	*Československo*		2	3	134

34. mezinárodní matematická olympiáda 13.–24. července 1993, Istanbul (Turecko)

	úlohy	1.	2.	3.	4.	5.	6.	body	ceny	pořadí
Michal Brodský 4. ročník *G Brno, tř. kpt. Jaroše*		2	2	1	7	4	3	19	III	102.–110.
Marcela Hlawiczková 4. ročník *G Třinec*		1	7	0	0	7	0	15	III	143.–150.
Ondřej Klíma 4. ročník *G Brno, tř. kpt. Jaroše*		1	0	4	7	1	4	17	III	122.–132.
Vít Novák 4. ročník *G Praha, Korunní*		7	0	4	5	3	6	25	II	52.–58.
Jana Syrovátková 4. ročník *G Brno, tř. kpt. Jaroše*		7	2	7	4	7	5	32	I	19.–24.
Robert Šámal 2. ročník *G Praha, Korunní*		7	2	0	7	5	3		II	59.–65.

(412 studentů z 73 zemí)

		ceny			
		I	II	III	body
1.	ČLR	6			215
2.	Německo	4	2		189
3.	Bulharsko	2	4		178
4.	Rusko	4	1	1	177
5.	Taiwan	1	4	1	162
6.	Írán	2	3	1	153
7.	USA	2	2	2	151
8.	Maďarsko	3	1	2	143
9.	Vietnam	1	4	1	138
10.	*Česká republika*	1	2	3	132
12.	*Slovensko*	1	3	1	126

35. mezinárodní matematická olympiáda
8.–20. července 1994
Hongkong

	úlohy	1.	2.	3.	4.	5.	6.	body	ceny	pořadí
Petr Kaňovský 3. ročník *G Brno, tř. kpt. Jaroše*		7	7	7	7	0	3	31	II	78.–87.
Filip Krška 3. ročník *G Brno, tř. kpt. Jaroše*		0	7	6	2	3	0	18		
Jan Mach 4. ročník *GMK Bílovec*		0	7	5	2	3	0	17		
Libor Mašíček 3. ročník *G Brno, tř. kpt. Jaroše*		0	7	7	7	4	0	25	III	126.–131.
David Pavlica 3. ročník *GMK Bílovec*		0	7	7	7	2	5	28	III	102.–113.
Robert Šámal 3. ročník *G Praha 5, Zborovská*		0	7	7	7	7	7	35	II	49.–57.

(385 studentů z 69 zemí)

		ceny			
		I	II	III	body
1.	USA	6			252
2.	ČLR	3	3		229
3.	Rusko	3	2	1	224
4.	Bulharsko	3	2	1	223
5.	Maďarsko	1	5		222
6.	Rumunsko		5	1	208
7.	Vietnam	1	5		207
8.	Velká Británie	2	2	2	206
9.	Írán	2	2	2	203
10.	Japonsko	1	2	3	180
21.	*Česká republika*		2	2	154
22.	*Slovensko*	1	1	2	150

36. mezinárodní matematická olympiáda
13.–25. července 1995
Toronto (Kanada)

	úlohy	1.	2.	3.	4.	5.	6.	body	ceny	pořadí
Petr Kaňovský 4. ročník *G Brno, tř. kpt. Jaroše*		7	7	7	7	0	2	30	II	81.–88.
Filip Krška 4. ročník *G Brno, tř. kpt. Jaroše*		7	0	7	7	7	0	28	III	101.–112.
Libor Mašíček 4. ročník *G Brno, tř. kpt. Jaroše*		6	0	7	7	7	1	28	III	101.–112.
Martin Nečesal 4. ročník *G Brno, tř. kpt. Jaroše*		7	0	6	4	3	0	20	III	181.–190.
David Pavlica 4. ročník *GMK Bílovec*		7	0	7	7	2	0	23	III	152.–160.
Robert Šámal 4. ročník *G Praha 5, Zborovská*		6	0	7	5	7	0	25	III	136.–146.

(412 studentů z 73 zemí)

		ceny			
		I	II	III	body
1.	ČLR	4	2		236
2.	Rumunsko	4	2		230
3.	Rusko	4	2		227
4.	Vietnam	2	4		220
5.	Maďarsko	3	1	2	210
6.	Bulharsko	1	4	1	207
7.	Korea	2	3	1	203
8.	Írán	2	3	1	202
9.	Japonsko	1	3	2	183
10.	Velká Británie	2	1	3	180
17.–18.	*Česká republika*		1	5	154
21.–22.	*Slovensko*		2	2	145

37. mezinárodní matematická olympiáda
5.–17. července 1996
Bombaj (Indie)

	úlohy	1.	2.	3.	4.	5.	6.	body	ceny	pořadí
Tomáš Bárta 4. ročník *G Praha 5, Zborovská*		7	1	6	0	0	7	21	II	81.–93.
Michal Beneš 4. ročník *G Praha 5, Zborovská*		7	1	6	0	0	7	21	II	81.–93.
Daniel Kráľ 4. ročník *G Zlín*		4	2	1	0	0	1	8		236.–247.
David Opěla 4. ročník *GMK Bílovec*		4	1	7	0	0	6	18	III	111.–120.
Jan Spěvák 3. ročník *G Praha 5, Zborovská*		2	1	1	1	0	0	5		290.–324.
Robert Špalek 4. ročník *G Brno, tř. kpt. Jaroše*		1	0	5	3	0	1	10		216.–226.

(426 studentů z 75 zemí)

		ceny			
		I	II	III	body
1.	Rumunsko	4	2		187
2.	USA	4	2		185
3.	Maďarsko	3	2	1	167
4.	Rusko	2	3	1	162
5.	Velká Británie	2	4		161
6.	ČLR	3	2	1	160
7.	Vietnam	3	1	1	155
8.	Korea	2	3		151
9.	Írán	1	4	1	143
10.	Německo	3	1	1	137
17.–18.	*Slovensko*		1	5	108
28.	*Česká republika*		1	4	83

38. mezinárodní matematická olympiáda
18.–31. července 1997
Mar del Plata (Argentina)

	úlohy	1.	2.	3.	4.	5.	6.	body	ceny	pořadí
Libor Barto 3. roč. *G Praha 1, Hellichova*		5	7	7	7	4	0	30	II	60.–69.
Pavel Podbrdský 3. roč. *G Brno, tř. kpt. Jaroše*		7	7	7	7	7	0	35	I	32.–39.
Jan Spěvák 4. roč. *G Praha 1, Hellichova*		1	1	0	3	4	0	9		299.–321.
Lukáš Vokřínek 2. roč. *G Brno, tř. kpt. Jaroše*		4	0	0	7	7	0	18	III	177.–191.
Jan Vybíral 4. roč. *GMK Bílovec*		7	7	0	6	7	0	27	II	86.–96.
Petr Zima 3. roč. *G Kladno*		1	7	1	7	4	0	20	III	155.–166.

(460 studentů z 82 zemí)

		ceny			
		I	II	III	body
1.	Čína	6			223
2.	Maďarsko	4	2		219
3.	Írán	4	2		217
4.–5.	Rusko	3	2	1	202
4.–5.	USA	2	4		202
6.	Ukrajina	3	3		195
7.–8.	Bulharsko	2	3	1	191
7.–8.	Rumunsko	2	3	1	191
9.	Austrálie	2	3	1	187
10.	Vietnam	1	5		183
18.	*Česká republika*	1	2	2	139
36.	*Slovensko*		1	2	96

39. mezinárodní matematická olympiáda
10.–21. července 1998
Taipei (Tchaj-wan)

	úlohy	1.	2.	3.	4.	5.	6.	body	ceny	pořadí
Libor Barto 4. roč. *G Praha 1, Hellichova*		0	7	6	6	7	0	26	II	73.–85.
Tomáš Hanžl 4. roč. *G Brno, tř. kpt. Jaroše*		3	0	7	7	0	3	20	III	134.–144.
Pavel Podbrdský 4. roč. *G Brno, tř. kpt. Jaroše*		7	7	7	7	0	1	29	II	49.–57.
Jan Šťovíček 4. roč. *G Kladno*		2	7	2	6	2	0	19	III	145.–157.
Martin Viščor 3. roč. *G Brno, tř. kpt. Jaroše*		7	0	1	0	7	0	15	II	183.–193.
Lukáš Vokřínek 3. roč. *G Brno, tř. kpt. Jaroše*		4	7	1	7	7	0	26	II	73.–85.

(419 studentů z 76 zemí)

		ceny			
		I	II	III	body
1.	Írán	5	1	0	211
2.	Bulharsko	3	3	0	195
3.–4.	Maďarsko	4	2	0	186
	USA	3	3	0	186
5.	Tchaj-wan	3	2	1	184
6.	Rusko	2	3	1	175
7.	Indie	3	3	0	174
8.	Ukrajina	1	3	2	166
9.	Vietnam	1	3	2	158
10.	Jugoslávie	0	5	0	156
15.	*Česká republika*	0	3	3	135
33.–34.	*Slovensko*	0	1	4	88

40. mezinárodní matematická olympiáda
10.–22. července 1999
Bukurešť (Rumunsko)

	úlohy	1.	2.	3.	4.	5.	6.	body	ceny	pořadí
Luboš Dostál 8. roč. *GOA Stříbro*		1	1	2	4	0	1	9		270.–291.
Zdeněk Dvořák 7. roč. *G Nové Město na Moravě*		3	0	0	4	0	4	11		227.–247.
David Holec 4. roč. *G Brno, tř. kpt. Jaroše*		1	0	1	2	1	0	5		371.–393.
Pavel Moravec 4. roč. *G Brno, tř. kpt. Jaroše*		2	0	1	3	0	0	6		343.–370.
Martin Viščor 4. roč. *G Brno, tř. kpt. Jaroše*		7	1	0	1	1	0	10		248.–269.
Lukáš Vokřínek 4. roč. *G Brno, tř. kpt. Jaroše*		6	0	4	2	1	1	14	III	159.–177.

(450 studentů z 81 zemí)

		ceny			
		I	II	III	body
1.–2.	ČLR	4	2	0	182
	Rusko	4	2	0	182
3.	Vietnam	3	3	0	177
4.	Rumunsko	3	3	0	173
5.	Bulharsko	3	3	0	170
6.	Bělorusko	3	3	0	167
7.	Korea	3	3	0	164
8.	Írán	2	4	0	159
9.	Tchaj-wan	1	5	0	153
10.	USA	2	3	1	150
21.	*Slovensko*	0	2	3	88
49.–50.	*Česká republika*	0	0	1	55

41. mezinárodní matematická olympiáda
13.–25. července 2000
Taejon (Jižní Korea)

	úlohy	1.	2.	3.	4.	5.	6.	body	ceny	pořadí
Jaroslav Hájek 2. roč. *GMK Bílovec*		0	0	0	2	0	0	2		395.–416.
Jan Herman 3. roč. *G Brno, tř. kpt. Jaroše*		7	2	0	2	0	0	11	III	205.–213.
Jan Houštěk 7. roč. *G Pelhřimov*		7	2	1	7	4	0	21	II	100.–110.
Jan Kynčl 5. roč. *G Jilemnice*		7	1	4	2	0	2	16	III	139.–149.
Rudolf Stolař 3. roč. *G Brno, tř. kpt. Jaroše*		0	1	0	3	0	0	4		351.–368.
Ondřej Suchý 6. roč. *G Plzeň, Mikulášské nám.*		7	0	0	2	0	2	11	III	205.–213.

(462 studentů z 82 zemí)

		ceny			
		I	II	III	body
1.	ČLR	6	0	0	218
2.	Rusko	5	1	0	215
3.	USA	2	4	0	184
4.	Korea	3	3	0	172
5.–6.	Bulharsko	2	3	1	169
	Vietnam	3	2	1	169
7.	Bělorusko	2	2	2	165
8.	Tchaj-wan	2	3	1	164
9.	Maďarsko	1	5	0	156
10.	Írán	1	4	1	155
18.–19.	*Slovensko*	0	2	3	111
42.	*Česká republika*	0	1	3	65

Výsledky našich studentů na mezinárodních programátorských olympiádách

Uvádíme výsledky od roku 1993, neboť od tohoto ročníku se mezinárodních olympiád účastnilo samostatné družstvo České republiky (do té doby bylo společné československé družstvo). V roce 1993 se konal 5. ročník Mezinárodní olympiády v informatice, zatímco Středoevropská olympiáda v informatice vznikla až v roce 1994. V obou soutěžích se účastní vždy čtyři soutěžící z každé země. U každého soutěžícího uvádíme pořadí a případnou medaili, kterou získal. Počet udělených medailí závisí na počtu zúčastněných. Některou z medailí získá vždy první polovina soutěžících v celkovém pořadí, přičemž zlaté, stříbrné a bronzové medaile se rozdělují v poměru 1 : 2 : 3. Počet bodů jednotlivých studentů v soutěži neuvádíme, neboť v různých ročnících olympiád byl maximální dosažitelný bodový zisk různý.

Mezinárodní olympiáda v informatice (IOI — International Olympiad in Informatics)

1993 – Argentina, Mendoza

Martin Mareš	1.	zlatá medaile
Vít Novák	15.	stříbrná medaile
Jan Syrovátková	31.	stříbrná medaile
Jiří Vaníček	137.	

1994 – Švédsko, Haninge

Martin Mareš	6.	zlatá medaile
Robert Špalek	25.	stříbrná medaile
Daniel Škarda	44.	stříbrná medaile
Petr Novák	73.	bronzová medaile

1995 – Holandsko, Eindhoven

Jiří Hájek	6.	zlatá medaile
Martin Mareš	7.	zlatá medaile
Robert Špalek	16.	zlatá medaile
Pavel Machek	18.	zlatá medaile

1996 – Maďarsko, Veszprém

Daniel Kráľ	1.	zlatá medaile
Tomáš Tichý	71.	bronzová medaile
Stanislav Mikeš	84.	bronzová medaile
Robert Špalek	95.	bronzová medaile

1997 – Jihoafrická republika, Kapské Město

Mikuláš Patočka	19.	zlatá medaile
Filip Kábrt	60.	bronzová medaile
Jan Kratochvíl	69.	bronzová medaile
Aleš Přívětivý	90.	bronzová medaile

1998 – Portugalsko, Setúbal

Michal Illich	stříbrná medaile
Zdeněk Dvořák	bronzová medaile
Jan Kára	bronzová medaile
Pavel Nejedlý	bronzová medaile

Pozn.: na základě dosažených výsledků byly uděleny medaile, pořadí jednotlivých soutěžících nebylo pořadateli vydáno.

1999 – Turecko, Antalya

Zdeněk Dvořák	10.	zlatá medaile
Pavel Nejedlý	81.	bronzová medaile
Michal Illich	86.	bronzová medaile
Josef Zlomek	93.	bronzová medaile

2000 – Čína, Peking

Pavel Charvát	79.	bronzová medaile
Jakub Bystroň	102.	bronzová medaile
Jiří Svoboda	108.	bronzová medaile
Ondřej Rucký		

Středoevropská olympiáda v informatice (CEOI — Central European Olympiad in Informatics)

1994 – Rumunsko, Cluj

Jiří Hájek	2.	zlatá medaile
David Stanovský	18.	bronzová medaile
Jan Kratochvíl	19.	
Petr Kaňovský	28.	

1995 – Maďarsko, Szeged

Daniel Kráľ	2.	zlatá medaile
Mikuláš Patočka	5.	stříbrná medaile
Jan Kratochvíl	7.	stříbrná medaile
Stanislav Mikeš	26.	

1996 – Slovensko, Bratislava

Věroslav Kaplan	17.
Mikuláš Patočka	20.
Jan Kratochvíl	21.
Martin Dráb	25.

1997 – Polsko, Nowy Sacz

Pozn.: naše účast byla zrušena z důvodu katastrofických záplav na našem i polském území a přerušení vlakového spojení.

1998 – Chorvatsko, Zadar

Zdeněk Dvořák	25.
Jiří Benc	30.
Pavel Nejedlý	33.
Jaromír Malenko	37.

1999 – Česká republika, Brno

Pavel Charvát	8.	stříbrná medaile
Pavel Nejedlý	10.	stříbrná medaile
Jakub Bystroň	14.	bronzová medaile
Zdeněk Dvořák	17.	bronzová medaile
Jiří Svoboda	18.	bronzová medaile
Josef Zlomek	26.	
Michal Illich	28.	
Ondřej Rucký	37.	

Pozn.: jako pořadatelská země jsme do soutěže vyslali dvě soutěžní družstva.

2000 – Rumunsko, Cluj

Miroslav Trmač	20.
Roman Krejčík	23.
Pavel Čížek	26.
Martin Beránek	31.

(eds.) Leo Boček, Karel Horák

50 LET MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Vydal
MATFYZPRESS
vydavatelství
Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy v Praze
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2
jako svou 66. publikaci

Obálku navrhl Petr Kubát

Z připravených předloh v systému TEX
vytisklo Reprostředisko MFF UK
Soklovská 83, 186 75 Praha 8

Vydání první

Praha 2001

ISBN 80-85863-64-2