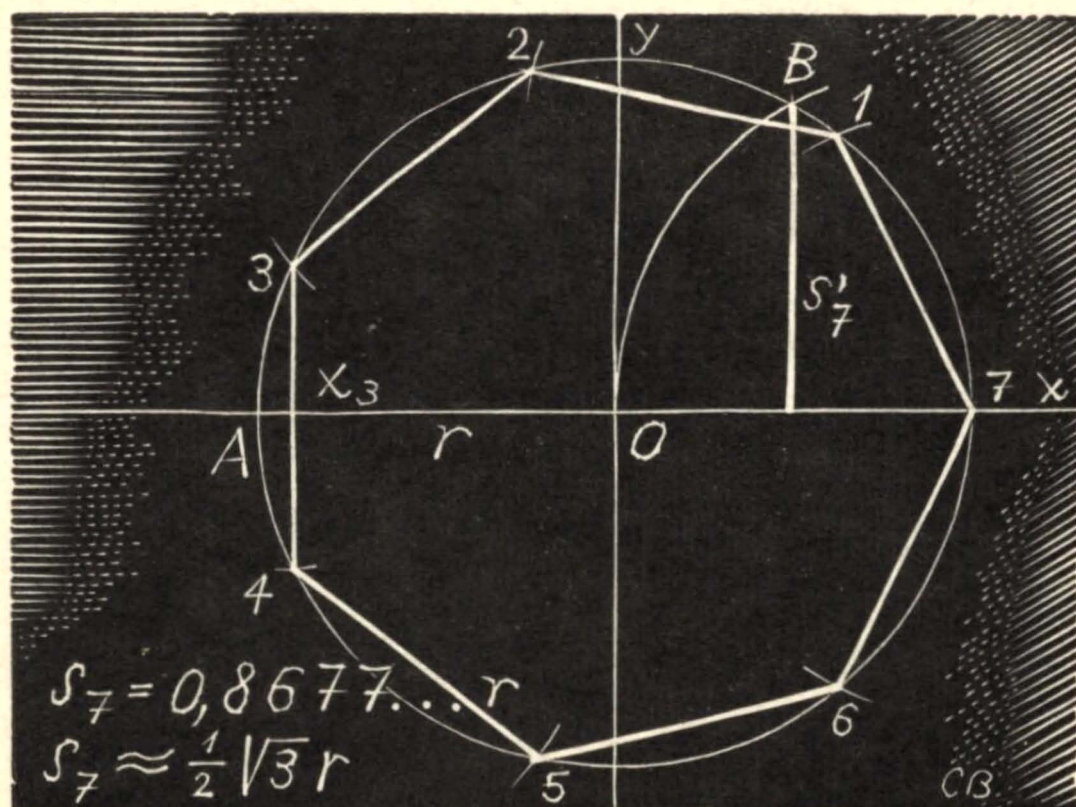


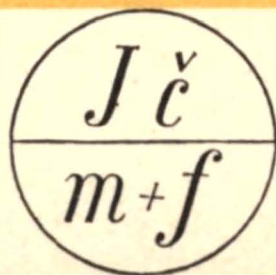
C E S T A K V Ě D E N Í S V. 7.



PROF. DR. V. HRUŠKA

KONSTRUKCE OMEZENÝMI PROSTŘEDKY A GEOMETRICKÉ APROXIMACE

JEDNOTA ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE



K 10,80

Hruška:

Konstrukce omezenými prostředky a geometrické aproximace

Při grafickém provádění geometrických konstrukcí se setkáváme často se třemi základními obtížemi. Jednak části konstrukcí zapadají mimo nákresnu nebo nemáme dostačující přesné pomůcky k jejich provedení, nebo konečně konstrukce není přesně proveditelná jednoduchými rýsovacími prostředky, t. j. pravítkem a kružítkem.

Knížka Hruškova ukazuje na řadě základních úloh nejčastěji se vyskytujících, jak se prakticky odstraňují tyto obtíže, jak se tedy provádí konstrukce v omezené nákresně, nebo jen některými prostředky a konečně jak se konstrukce, které nejsou pravítkem a kružítkem přesně proveditelné, nahrazují (aproximují) příbližnými jednoduchými konstrukcemi a jak se určují jejich chyby.

Přesnost grafických konstrukcí, aproximace třetění úhlu a konstrukce některých pravidelných mnohoúhelníků, empirické křivky atd., to jsou věci, s kterými se setkáváme v praxi, v tisku, v životě a které zaujmou čtenáře a rozšíří obor jeho středoškolských poznatků.

K 10,80

U všech knihkupců

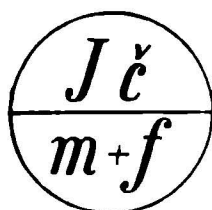
J Č M F

C E S T A K V Ě D Ě N Í

PROF. DR. V. HRUŠKA

KONSTRUKCE
OMEZENÝMI PROSTŘEDKY A
GEOMETRICKÉ APROXIMACE

Se 45 obrázky



Vyšlo jako 7. svazek sbírky

CESTA K VĚDĚNÍ

vydáváné Jednotou českých matematiků a fysiků v Praze za redakce

Dra R. BRDIČKY, Dra F. VYČICHLO a Dra L. ZACHOVALA

1 9 4 0

NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE

TISKEM KNIHTISKÁRNY „PROMETHEUS“ V PRAZE VIII

Veškerá práva vyhrazena.

PŘEDMLUVA.

Text zde vytištěný měl původně býti částí Úvodu k připravovanému 2. vydání učebnice Lásků-Hruška, Počet grafický a graficko-mechanický (1. vyd. 1923, JČMF v Praze). Moji posluchači vždy těžce pocítovali, že není levné knihy o provádění konstrukcí omezenými prostředky a o geometrických aproximacích, kteréžto otázky často znesnadňují grafické počítání. Tyto otázky však zajímají i širší kruh čtenářů. Proto redakce této sbírky se rozhodla vydati v ní samostatně tuto partii z naší učebnice. Tím se zpřístupní tato látka i těm, jimž by bylo příliš nákladné zakoupení celé učebnice za účelem studia těchto otázek. Za to bude tato partie vypuštěna v 2. vydání učebnice, čímž se její cena přiměřeně sníží. Redaktor této sbírky, p. RNDr. *Fr. Vyčichlo*, soukromý docent Karlovy university a českého vysokého učení technického v Praze, provedl laskavě úpravy textu nutné k jeho srozumitelnosti po vytržení z většího celku. Vyslovuji mu za to dík. Čtenáře pak prosím, aby toto dílko posuzoval s hlediska účelu, k němuž bylo původně určeno. Děkuji rovněž *Jednotě českých matematiků a fysiků v Praze* za ochotu, s níž se ujala vydání této knížky, a tiskárně „*Prometheus*“ za vzorné provedení tisku.

V Praze v květnu 1940.

V. H.

1.

OMEZENOST PROSTŘEDKŮ.

Úvod. Ve škole a v technické praxi často dáváme přednost jednoduché konstrukci před složitějším výpočtem. Tak na př. dosti přesně a rychleji sestrojíme poloměr kružnice vepsané trojúhelníku určenému stranami, než jej vy-

počítáme ze vztahu $\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$, kde

$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Při grafickém řešení soustav lineárních rovnic, jichž koeficienty jsou velká čísla (nebo čísla desetinná) je tomu podobně. Jsou však ještě jiné přednosti konstrukcí a geometrických obrazců, které daly podnět ke vzniku důležitého odvětví geometrie, t. zv. grafického počítání a které najde čtenář v jiné knížce této sbírky.*)

Provedení geometrických konstrukcí musí býti co možná nejpřesnější, neboť jen o takové lze se při delší práci opřít; proto je třeba složitější konstrukce vhodně upravovati a rozkládati v jednoduché, které můžeme provésti velmi přesně a užívati při nich co nejlepších pomůcek. Tak k rýsování přímek užíváme přesných kovových pravítek s facetou, k vynášení úseček při přesné technické práci (na př. v zeměpisném ústavě) t. zv. koordinátografu (přístroje sloužícího zároveň k přesnému vynášení nebo měření souřadnic pravoúhlých příp. polárních); v podstatě sestává tento přístroj z kovového měřítka opatřeného mikrometrickým a optickým zařízením, aby bylo možno jím přesně úsečky měřiti. Úhly se vynášejí přístroji podobně vybavenými.

K sestrojování rovnoběžek užíváme přístroje t. zv. paralleléálu. Jsou to vlastně dvě pravítka udržovaná v přesné

*) Viz Dr. V. Pleskot: Grafické počítání a nomografie.

rovnoběžné poloze dvěma táhly připevněnými k nim ve čtyřech bodech, které tvoří vrcholy rovnoběžníka.

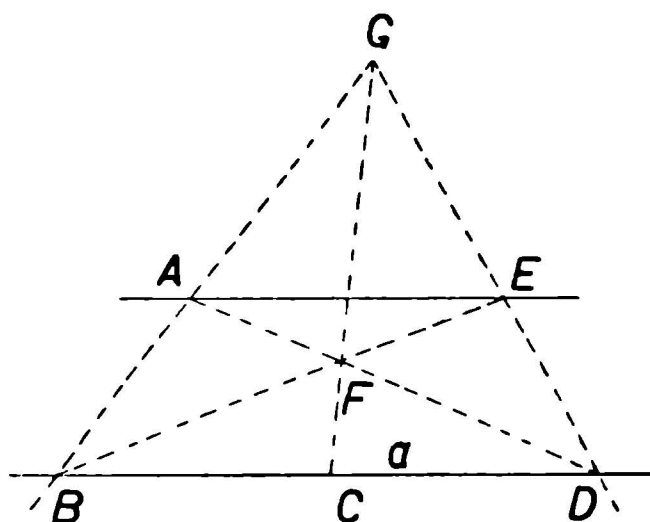
Vedle kružítka užívá se pro řešení úloh třetího a čtvrtého stupně parabolografu (přístroje pro přesné rýsování parabol), elipsografu a j.

Při drobné práci školní a technické tyto nákladné přístroje většinou chybí. Mimo to jejich užití je omezeno často tím, že části konstrukcí leží mimo nákresnu a že právě těchto částí je v dalším třeba. Jak odstraňovati v základních geometrických konstrukcích, z nichž se složitější skládají, obojí obtíže takto vzniklé, je právě úkolem následujících řádků.

1,1. Rozdělení konstrukcí. K praktickému provádění geometrických konstrukcí lze užití jen několika málo jednoduchých pomůcek; tak není potřebí složitého paralellineálu k sestavení rovnoběžek, ale jak známo ze střední školy, stačí k tomu buď kreslicí trojúhelník a obyčejné pravítko, nebo také jen pravítko a kružítko.

Konstrukce rovnoběžky vedené bodem A k přímce a jedním pravítkem a kružítkem (obr. 1) plyne z věty, že

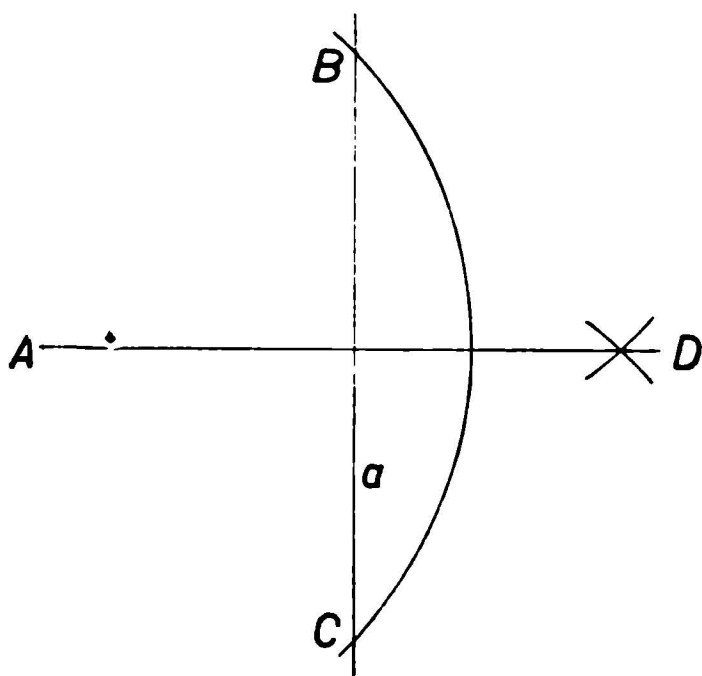
v lichoběžníku $ABDE$ spojnice FG průsečíku F úhlopříček a průsečíku G ramen pólí základnu BD . Zvolíme v rovině bod G a od průsečíku B spojnice AG s a nanese kružítkem dvakrát libovolnou délku $\overline{BC} = \overline{CD}$ na a . Spojíme-li C a D s G , sestrojíme průsečík $F \equiv (AD, CG)$ a průsečík $E \equiv (BF, DG)$, načež je $AE \parallel a$. Dokonce kružítko užit



Obr. 1. Bodem A vésti rovnoběžku s přímkou a užitím jediného pravítka a kružítka.

k této konstrukci může mít stálou, nikoliv měnitelnou vzdálenost obou hrotů.

Podobně můžeme z bodu A spustiti kolmici k přímce a buď pravoúhlým trojúhelníkem, nebo také obyčejným pravítkem a kružítkem (obr. 2). Ze středu A opíšeme kružnici o takovém poloměru, aby protála a ve dvou bodech, B a C . Kružítkem sestrojíme libovolný bod D , jehož vzdálenosti od B a C jsou stejné. AD je hledanou kolmicí.



Obr. 2. S bodu A spustiti kolmici na přímku a užitím pravítka a kružítká.

S praktického hlediska způsob vedení rovnoběžek, uvedený v obr. 1, je výhodný tehdy, je-li bod A značně vzdálený od a a nemáme-li dosti velkého kreslicího trojúhelníka. Podobně je tomu s konstrukcí v obr. 2.

Zároveň však vidíme, že spouštění kolmice z bodu na přímku užitím jen pravítka a kružítká je komplikovanější než užitím pravoúhlého kreslicího trojúhelníka a je dokonce nemožné jen

obyčejným pravítkem bez kružítká nebo bez trojúhelníku. Omezíme-li naše pomůcky k provádění konstrukcí, zkomplikujeme některé konstrukce, některé dokonce znesmůžníme. Vzniká proto otázka klasifikace konstrukcí podle prostředků, jimiž je můžeme provést.

a) Pravítkem můžeme provést konstrukce, v nichž jest vésti pouze konečný počet přímek, které smíme libovolně zvoliti, nebo libovolně vésti známým bodem, nebo konečně které spojují dva známé body. Takové konstrukce nazýváme prvního stupně nebo lineární.

b) Je-li kromě toho v konstrukci nakresliti konečný počet

kružnic o známém středu a poloměru, stačí k ní pravítko a kružítko. Takové konstrukce nazýváme druhého stupně nebo kvadratické. L. Mascheroni¹⁾ však dokázal, že tyto konstrukce můžeme provést také jen kružítkem bez pravítka. Naproti tomu J. Steiner²⁾ dokázal, že veškeré tyto konstrukce lze provést pouhým pravítkem, máme-li v rovině již nakreslenou jedinou kružnici. Nověji A. Adler³⁾ dokázal, že tyto úlohy lze také řešit užitím pohyblivého pravého úhlu atd.⁴⁾

c) K provedení konstrukcí, v nichž se vyskytují ještě jiné křivky, nestačí jen pravítko a kružítko nebo je nahrazující zařízení, na př. jeden pohyblivý pravý úhel. Nazýváme je prozatím vyššího stupně (rozuměj vyššího než druhého).

Pravítka a kružítko můžeme užítí ke konstrukci i způsobem odchylným od definic a) a b). Na příklad k sestrojení společných tečen dvou kružnic, z nichž žádná neleží zcela uvnitř druhé, jest zapotřebí pravítka i kružítko (nebo místo něho kreslicího trojúhelníka), užíváme-li jich podle definic a) a b). Jednodušeji však řešíme úlohu prostým přiložením

¹⁾ La Geometria del compasso (Pavia, 1797).

²⁾ Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linien und eines festen Kreises (Berlin, 1833, znovu otištěno v Ostwald's Klassiker No. 60).

³⁾ Über die zur Ausführung geometrischer Konstruktionen notwendigen Hilfsmittel (Sitzgsber. Wiener Akad. 1890).

⁴⁾ Srovnej též J. Vojtěch, Teorie geometrických konstrukcí (Přil. Časop. pro pěst. mat. a fys., sv. 31, 1902); H. Simon, Geometrische Konstruktionen ohne Zirkel (Zeitschrift f. math. u. naturwis. Unterricht XXII, 1891); G. Wallenberg, Konstruktionen mit Lineal und Eichmaß (Sitzgber. Berliner mat. Gesellsch. IV, 1905); F. Klein, Vorträge über ausgewählte Fragen d. Elementargeometrie (Leipzig, 1895, 2. vyd. Berlin); F. Enriques, Questioni riguardanti la geometria elementare (Bologna, 1900); D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie (Leipzig, 1903); A. Adler, Theorie der geometrischen Konstruktionen (Leipzig, 1906).

pravítka tak, aby se dotýkalo obou nakreslených kružnic. Takové užívání pravítka nevyhovuje ovšem definici a) a J. Hjelmslev⁵⁾ nazývá takto provedenou konstrukci geometrickým experimentem. Podobně je možno užívat i jiných pomůcek konstrukce. Ačkoliv se tím mnohé konstrukce velmi zjednoduší, nedoporučuje se užívat geometrických experimentů pro jejich menší přesnost.

1,2. Jiné klasifikace konstrukcí. Každé konstrukci můžeme přiřaditi, na př. užitím analytické geometrie, jednu nebo několik rovnic mezi různými veličinami v ní užitými, jako jsou délky, úhly, dvojpoměry atd. Jsou-li veškeré tyto rovnice algebraické, nazývejme konstrukci také algebraickou, jinak ji nazývejme transcendentní. Je-li m počet nezávislých algebraických rovnic, přiřazených algebraické konstrukci a známe-li veškeré až na m z těchto veličin, můžeme pak naší konstrukcí najíti i těchto m neznámých veličin. Předpokládáme obvykle, že v každé z těchto rovnic jest pouze jediná neznámá. V opačném případě bychom toho docílili eliminací ostatních neznámých.

V případě algebraických konstrukcí můžeme také přiřazené rovnice vždy upravit na irreducibilní⁶⁾ rovnice, jichž koeficienty jsou racionální funkce známých veličin o racionálních koeficientech. Nejvyšší ze stupňů přiřazených rovnic takto upravených nazýváme také stupněm algebraické konstrukce.

Toto rozdělení algebraických konstrukcí na různé stupně nesouhlasí však úplně s jejich rozdělením provedeným v předchozím odstavci.

Veškeré konstrukce, které lze provést jen pravítkem, jsou lineární i ve smyslu analytické geometrie. Kromě nich však

⁵⁾ Geometrische Experimente (Leipzig, 1915).

⁶⁾ Označení irreducibilní mnohočlen dáváme mnohočlenu o racionálních koeficientech, který nelze rozložit v činitele stupňů nižších rovněž s racionálními koeficienty. Úprava spočívá v odstranění odmocnin umocněním a pod.

je ve smyslu analytické geometrie lineární také na př. rozpůlení úsečky, neboť vede na lineární rovnici o racionálních koeficientech, ačkoliv k této konstrukci potřebujeme kružítka.

Souvisí to s rozdělením vlastností konstrukcí na:

a) Projektivní, t. j. takové, které se nemění středovým promítáním, jako na př., jde-li přímka průsečíkem jiných dvou přímek, nebo má-li dvojpoměr čtyř bodů známou hodnotu atd.

b) Metrické, t. j. takové, které jsou vyjádřeny délkami úseček a velikostmi úhlů, jako na př. rovnoběžnost nebo kolmost dvou přímek, nebo rozpůlení úsečky, atd. Tyto vlastnosti konstrukcí se promítáním mění, na př. rovnoběžky se promítají v různoběžky atd.

Metrické vlastnosti konstrukcí však můžeme vyjádřit také jako vlastnosti projektivní, zavedeme-li v rovině úběžnou přímku a kruhové body,⁷⁾ které dohromady nazýváme absolutními útvary roviny. Místo kruhových bodů užíváme někdy isotropických přímek, jimiž se kruhové body promítají z některého bodu roviny. Isotropické přímky jsou imaginární sdružené, stejně jako body kruhové. Tak na př. rovnoběžnost dvou přímek, která je jejich vlastností metrickou, můžeme projektivně vyjádřit tím, že se protínají na úběžné přímce roviny; kolmost přímek, že jsou navzájem harmonicky sdruženy vzhledem k isotropickým přímkám. Rovněž rozpůlení úsečky $\overline{AB}$ projektivně vyjádříme jako vyhledání čtvrtého bodu harmonicky sdruženého vzhledem k A, B s úběžným bodem spojnice AB atd.

Projektivní konstrukce, lineární ve smyslu analytické geometrie, lze provést jediným pravítkem a naopak. Souhlasí proto úplně s lineárními konstrukcemi podle definice 1,1 a).

Metrické lineární konstrukce se stanou projektivními

⁷⁾ T. j. průsečíky úběžné přímky s libovolnou kružnicí v rovině. Všechny kružnice roviny procházejí těmito body.

a tedy proveditelnými jediným pravítkem, zavedeme-li do roviny její absolutní útvary. K tomu však potřebujeme míti v rovině kružnici, která by do ní zavedla kruhové body. Tedy ke konstrukci potřebujeme kružítko. Předpokládáme-li jako J. Steiner,²⁾ že v rovině máme již nakreslenu třeba jedinou kružnici, známe v rovině i kruhové body a můžeme pak samozřejmě i lineární metrické úlohy provést jediným pravítkem.

Kvadratické konstrukce ve smyslu analytické geometrie, t. j. konstrukce, které vedou na irreducibilní kvadratickou rovnici o racionálních koeficientech, lze řešiti pravítkem a kružítkem. Jsou tedy obsaženy mezi konstrukcemi definovanými v odst. 1,1 b).

Podotknouti sluší, že pravítkem a kružítkem lze řešiti i některé úlohy stupně vyššího než druhého ve smyslu nyní užívaném. Nejznámější z těchto konstrukcí jest sestrojiti stranu x pravidelného pětiúhelníka, vepsaného do kružnice o poloměru 1. Strana x je kořenem rovnice čtvrtého stupně

$$x^4 - 5x^2 + 5 = 0, \quad (1)$$

kterou nelze rozložit v činitele nižších stupňů o racionálních koeficientech.

Skutečně, jsou-li její kořeny

$$x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}},$$

lze psáti její levou stranu ve tvaru

$$x^4 - 5x^2 + 5 \equiv (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

ať je x jaké chce. Snadno se však přesvědčíme, že žádný rozklad tohoto mnohočlenu v činitele tvaru $(x - x_i)$, $(x - x_i)(x - x_k)$, $i \neq k$, atd. nemá vesměs racionální koeficienty.

Úloha je čtvrtého stupně. Jeden z těchto rozkladů ve dvě kvadratické rovnice

$$\left(x^2 - \frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right) \left(x^2 - \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right) = 0 \quad (2)$$

má však koeficienty, které dovedeme sestrojiti pravítkem a kružítkem, neboť jsou kořeny kvadratické rovnice s racionálními koeficienty

$$y^2 - 5y + 5 = 0.^8) \quad (3)$$

Pak ale můžeme také řešiti pravítkem a kružítkem obě rovnice (2), jejichž koeficienty jsou známe po sestrojení kořenů rovnice (3), a tedy i rovnici čtvrtého stupně (1).

Nebudeme se pouštět do podrobností, jež vyžadují hlubší znalosti z algebry, které nechceme předpokládati a jen uvedeme, že pravítkem a kružítkem lze řešiti pouze úlohy, v nichž neznámá je vyjádřena výrazem tvaru

$$a + \sqrt{b + \sqrt{c + \sqrt{d + \sqrt{\dots \sqrt{n}}}}} \quad (4)$$

o konečném počtu druhých odmocnin a konečném počtu racionálních čísel $a, b, c, d, \dots, n$, což věděl již Descartes.⁹⁾ Speciálně je tedy nemožné pravítkem a kružítkem řešiti úlohy stupně dělitelného lichým prvočíslem. Takové staré problémy třetího stupně, tedy neřešitelné kružítkem a pravítkem, jsou na př. rozdělení úhlu na 3 stejné úhly (*trisectio anguli*) a nalezení hrany krychle o dvojnásobném objemu krychle dané (*duplicatio cubi*, nazývaný též Délickým problémem). Z novějších, takto neřešitelných problémů je to vepsání do kružnice pravidelného sedmiúhelníka (viz později odst. 4,2 B) a pravidelného devítiúhelníka. Z nejslavnějších problémů vyššího stupně, řešených pravítkem a kružítkem, je vepsání do kružnice pravidelného sedmnáctiúhelníka.¹⁰⁾

⁸⁾ Viz Dr. V. Pleskot, *Grafické počítání a nomografie* (Praha, JČMF, 1940).

⁹⁾ *La géométrie* (Leyde, 1638), přel. Schlesinger, Berlin, 1894.

¹⁰⁾ Gauss, *Werke I*, str. 412, viz též A. Strnad, *Příl. Časop. pro pěst. mat. a fys.*, sv. 33 (1904) a 36 (1907).

Na příklad, kovová pravítka s přesně přímou hranou jsou velmi drahá. Je-li nakresliti spojnici bodů A, B a disponujeme-li pouze takovým pravítkem kratším než úsečka AB (obr. 3), znamená to značný výdaj za opatření delšího pravítka. Úlohu řešíme však snadno naším krátkým pravítkem, dovedeme-li vyhledati vhodný bod na spojnici AB .

12

k dispozici, opakováním konstrukce vložíme mezi body A , H nebo H , B další bod spojnice AB atd.

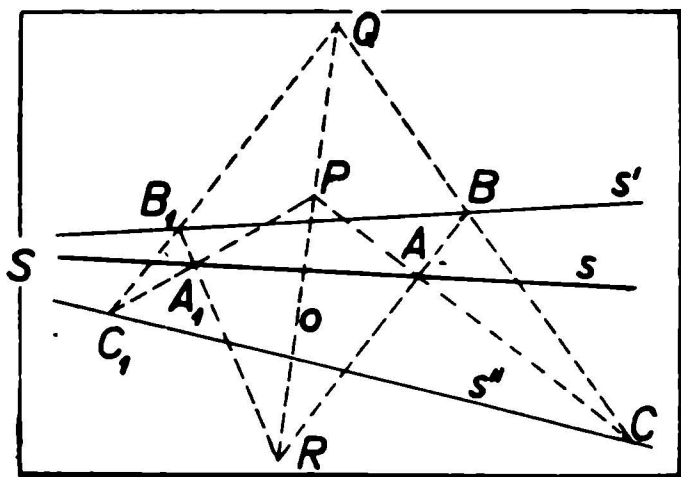
Nejvíce ztěžuje konstrukci, padnou-li některé její prvky (body, přímky, atd.) mimo nákresnu, která je v praxi vždy omezených, konečných rozměrů. Takových nedostupných prvků nemůžeme v konstrukci užívatí stejným způsobem jako dostupných prvků na nákresně.

Na příklad nemůžeme pravítko přiložiti k nedostupnému průsečíku B přímek b' a b'' , nakreslených na nákresně. Proto jeho spojnici s dostupným bodem A nemůžeme nakresliti podle pravítka, které bylo přiloženo k oběma bodům, jak by tomu bylo, kdyby oba body byly dostupné. Můžeme však přes to, že B je nedostupný, najíti podle obr. 3 na spojnici AB bod H , volíme-li vhodně C , D na b' a E , F na b'' . Je-li H dostupný, část AH spojnice AB leží zcela na nákresně a můžeme ji již nakresliti obvyklým způsobem podle pravítka, přiloženého k bodům A a H .

Konstrukcím tak pozměněným, aby bylo možno v nich užívatí také prvků nedostupných, budeme říkati stručně konstrukce v omezené nákresně. Pro jejich praktickou důležitost věnujeme jim zvláštní kapitulu.

KONSTRUKCE V OMEZENÉ NÁKRESNĚ.¹⁾

2,1. Nedostupné body a přímky. A. Bod A na omezené nákresně jest spojití s nedostupným průsečíkem S přímkou s' a s'' (obr. 4). Řešení této úlohy bylo již naznačeno v odst. 1,3. Výhodnější však je užití k tomu t. zv. Desarguesovy konfigurace.



Obr. 4. Spojiti bod A s nedostupným průsečíkem přímkou $(s', s'') \equiv S$. (Desarguesova konfigurace.)

Sestrojíme trojúhelník ABC , jehož jedním vrcholem je daný bod A a jehož ostatní dva vrcholy leží resp. na přímkách s' a s'' . Zvolme osu o a sestrojíme trojúhelník $A_1B_1C_1$, jehož vrcholy B_1 a C_1 leží také na s' a s'' a jehož strany se protínají na o s odpovídajícími stranami trojúhelníka ABC (tedy na př. B_1C_1 protne

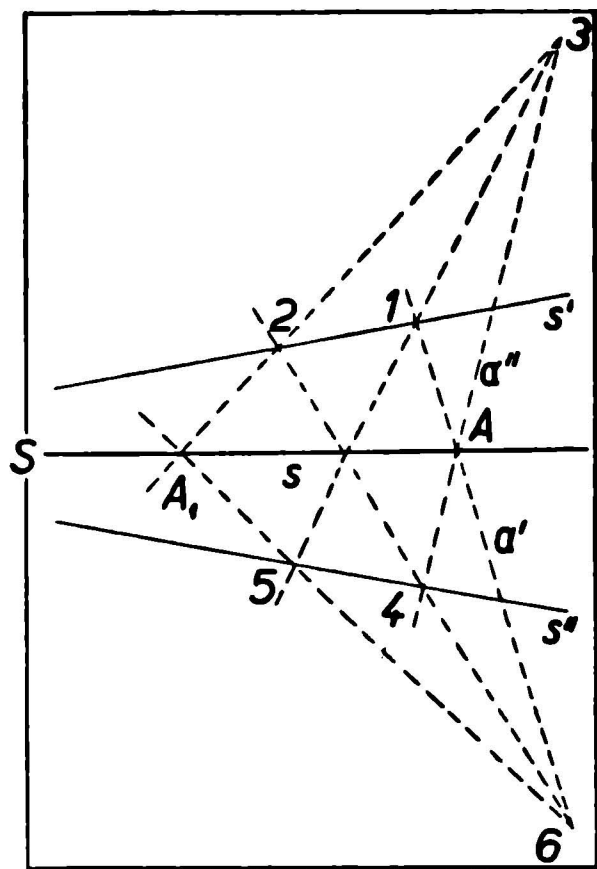
BC v bodě Q atd.). Hledaná spojnice $s \equiv SA$ prochází pak také bodem A_1 .

¹⁾ A. Adler, cit. kap. 1, pozn. 4); F. Redl, *Constructions de planimétrie. Solutions nouvelles de problèmes compliqués par des conditions particulières.* (L'Enseignement mathématique, t. XII, 1910, str. 293—310); Th. Vahlen, *Konstruktionen und Approximationen* (Leipzig, 1911); A. Witting, *Geometrische Konstruktionen, insbesondere in begrenzter Ebene* (Pro gr. d. Gymn. zum hlg. Kreuz, Dresden, 1899); P. Zühlke, *Konstruktionen in begrenzter Ebene* (Math.-Physik. Bibl., sv. 11).

Aby konstrukce zůstala celá na nákresně a abychom se vyhnuli spojnicím, určeným příliš blízkými body a tedy nepřesným, doporučuje se vycházeti z vhodně voleného bodu Q . Veďme jím osu o a přímky QBC a QB_1C_1 tak, aby A byl mezi o a QBC a aby také průsečíky R a P stran AB a AC s osou o padly na nákresnu. Doplněná konfigurace, která poskytuje bod A_1 , zůstane pak na nákresně. Ke konstrukci stačí jediné pravítko.

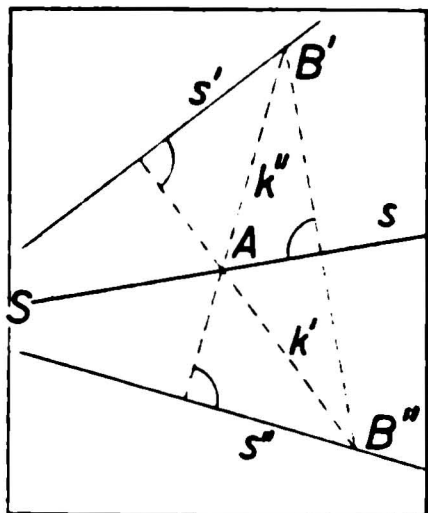
Volíme-li osu o v nekonečnu, strany trojúhelníka ABC a trojúhelníka $A_1B_1C_1$ jsou rovnoběžné a oba trojúhelníky stejnohlé (homothetické) podle středu S . Naše konstrukce přejde u této úlohy v řešení známé ze střední školy. Nevýhodou tohoto „zjednodušení“ konstrukce jest nutnost vedení rovnoběžek, což je operace málo přesná, zvláště, jsou-li rovnoběžky od sebe značně vzdálené. Mimo to ke konstrukci jest pak zapotřebí kromě pravítka ještě kružítka nebo kreslicího trojúhelníka.

Úlohu však lze řešiti i jinými konstrukcemi, na příklad Pascalovou větou v kuželosečce degenerované ve dvě přímky $1; 3; 5$ a $2; 4; 6$ (obr. 5). Bodem A veďme přímky a' , a'' tak, aby protály přímky s' a s'' na nákresně v bodech $1 \equiv (s', a')$, $4 \equiv (s'', a'')$. Zvolme na a' a a'' body $3, 6$ a označme průsečíky: $2 \equiv (s', 46)$ a $5 \equiv (s'', 13)$. Na Pascalově přímce s leží body $S \equiv (12, 45) \equiv (s', s'')$,



Obr. 5. Spojiti bod A s nedostupným průsečíkem přímek $(s', s'') \equiv S$. (Užitím Pascalovy věty).

$A \equiv (34, 61)$, $A_1 \equiv (23, 56)$ a jest to tedy hledaná spojnice AS . Velmi výhodné je voliti body 3 a 6 v nekonečnu. Podobně by bylo možno užiti k této konstrukci věty Brianchonovy v kuželosečce degenerované ve dva svazky paprsků (viz Zühlke, cit. str. 10).



Obr. 6. Spojiti bod A s nepřístupným průsečíkem přímek $(s', s'') \equiv S$. (Užitím výšek trojúhelníka.)

Ještě jiné řešení úlohy podává věta, že výšky trojúhelníka se protínají v jednom bodě (obr. 6). Z A spustíme kolmice k' a k'' na s' a s'' a označíme $B'' \equiv (k', s'')$ a $B' \equiv (k'', s')$. Pak je spojnice $s \equiv AS$ kolmá na $B'B''$.

B. Veškeré body spojnice dvou nedostupných bodů mohou padati mimo nákresnu. Pak říkáme, že ona spojnice je nedostupná. Část spojnice takových dvou nedostupných bodů však může také padnouti na nákresnu. Jest sestrojiti, pokud existuje, dostupnou část takové spojnice dvou nedostupných bodů $A \equiv (a', a'')$ a $S \equiv (s', s'')$.

Zvolme vhodně B na s' a C na s'' a spojíme je s A . Padnou-li průsečíky (s', a') a (s'', a'') na nákresnu jako v obr. 7, volíme je přímo za B a C . V opačném případě užijeme k sestrojení spojnic BA a CA některé z konstrukcí v uvedených pod A. Konstrukcí podle obr. 4 sestrojíme nyní na nákresně bod A_1 na spojnici AS , který spojíme opět podle A s nedostupným bodem A nebo S (na př. v obr. 7 užitím $\triangle A_1PR \sim \triangle A_2P_2R_2$).

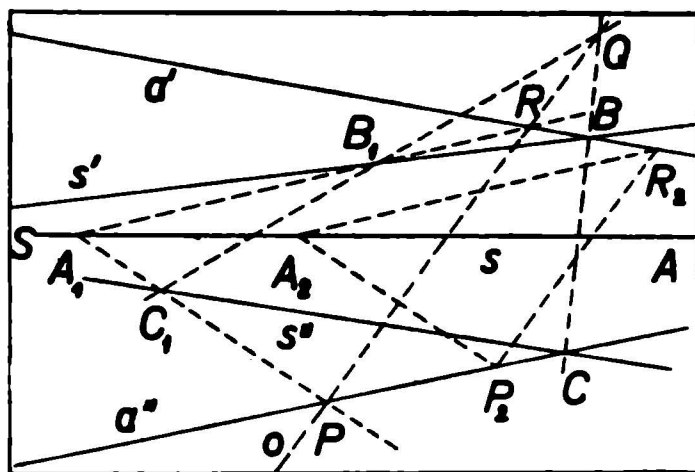
Jiné řešení podává konstrukce popsaná v odst. 1,3 (obr. 3), zvolíme-li čtyřroh $CDEF$ na nákresně tak, aby také H byl dostupný. Jeho spojnice s nedostupným A nebo S je hledanou spojnicí obou nedostupných bodů. Padnou-li zbývající čtyři průsečíky přímek a', a'', s', s'' na nákresnu, jest nejjednodušší voliti je přímo za čtyřroh $CDEF$ jako v obr. 8.

Nedostupným bodem $S \equiv (s', s'')$ vésti rovnoběžku s přímkou a jest speciálním případem předešlé úlohy, padne-li A do nekonečna na a . Lépe však úlohu řešíme spuštěním kolmice z S na libovolnou přímku $k \perp a$ (odst. 2,2 A.)

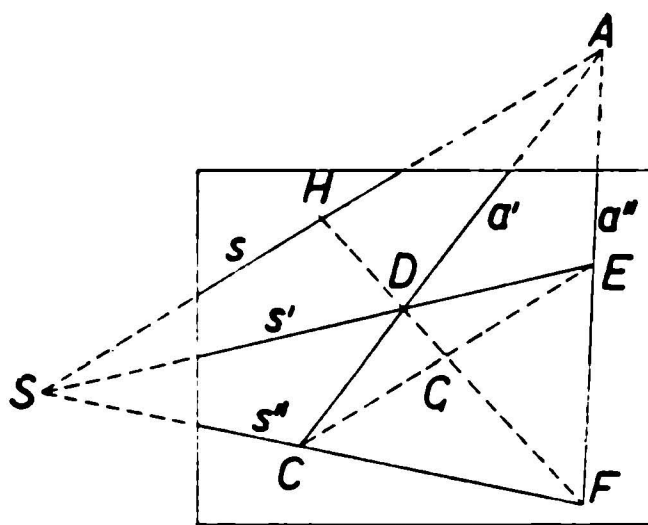
C. Dosud jsme mlčky předpokládali, že nedostupné body jsou určeny jako průsečíky dvou dostupných přímek. Říkejme jim nedostupné body prvního řádu.

V konstrukcích však může býti bod také průsečíkem přímky dostupné a přímky nedostupné, která sama je určena jako spojnice dvou nedostupných bodů prvního řádu. Nazýváme jej pak nedostupným bodem druhého řádu. Na příklad v obr. 9 je $S \equiv (s', s'')$ takovým nedostupným bodem druhého řádu, jelikož přímka $s'' \equiv (B, C)$ jest sama nedostupná. Body $B \equiv (b', b'')$ a $C \equiv (c', c'')$, jimiž je určena, jsou nedostupné prvního řádu.

Jest však také možno, že nedostupný bod je dán jako průsečík dvou nedostupných přímek, jako na př. $S \equiv (s', s'')$ v obr. 10. Nazýváme pak S nedostupným bodem řádu třetího.

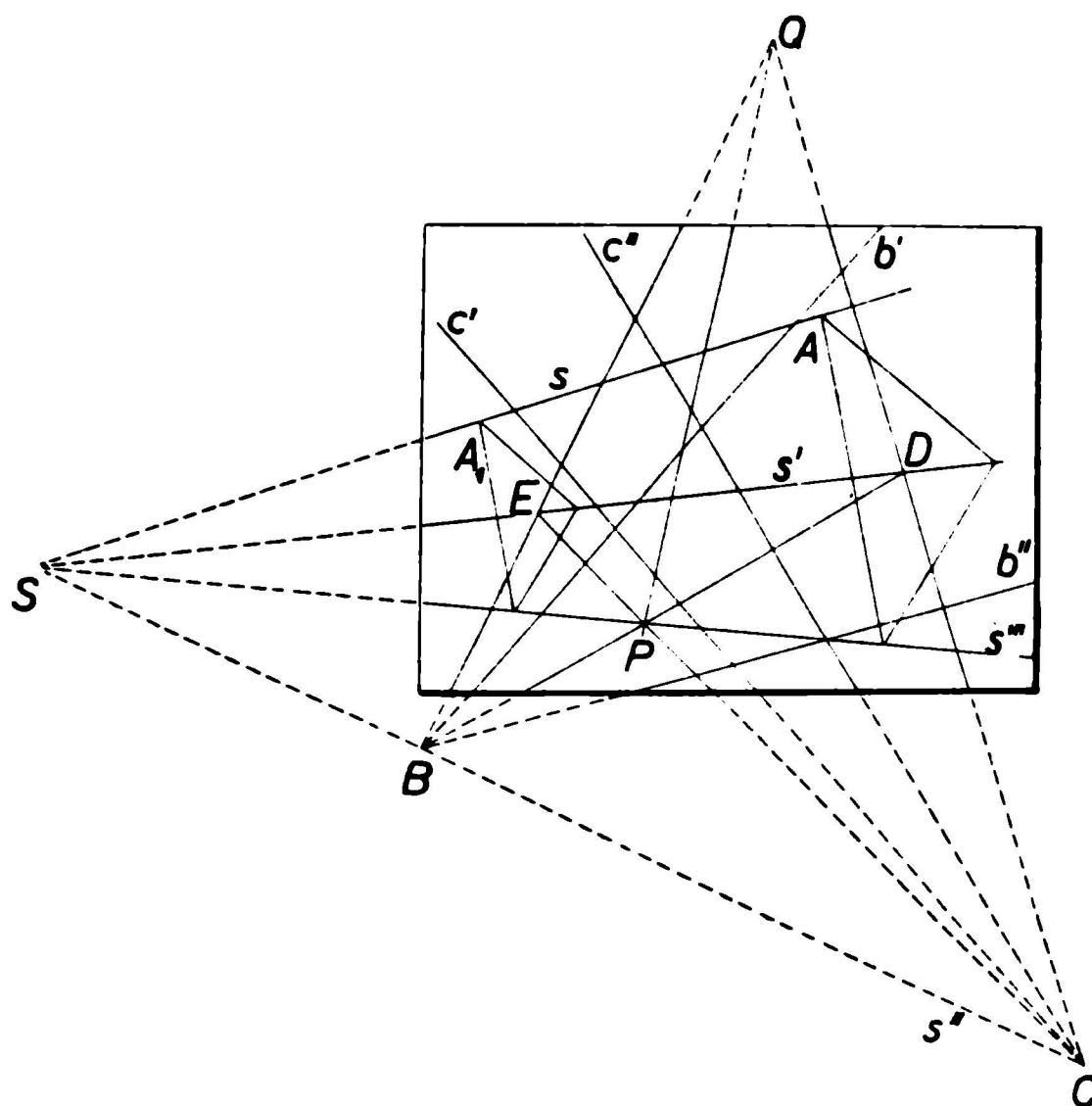


Obr. 17. Sestrojení spojnice s dvou nepřístupných bodů $A \equiv (a', a'')$, $S \equiv (s', s'')$.



Obr. 8. Jiné sestrojení spojnice dvou nedostupných bodů $A \equiv (a', a'')$, $S \equiv (s', s'')$.

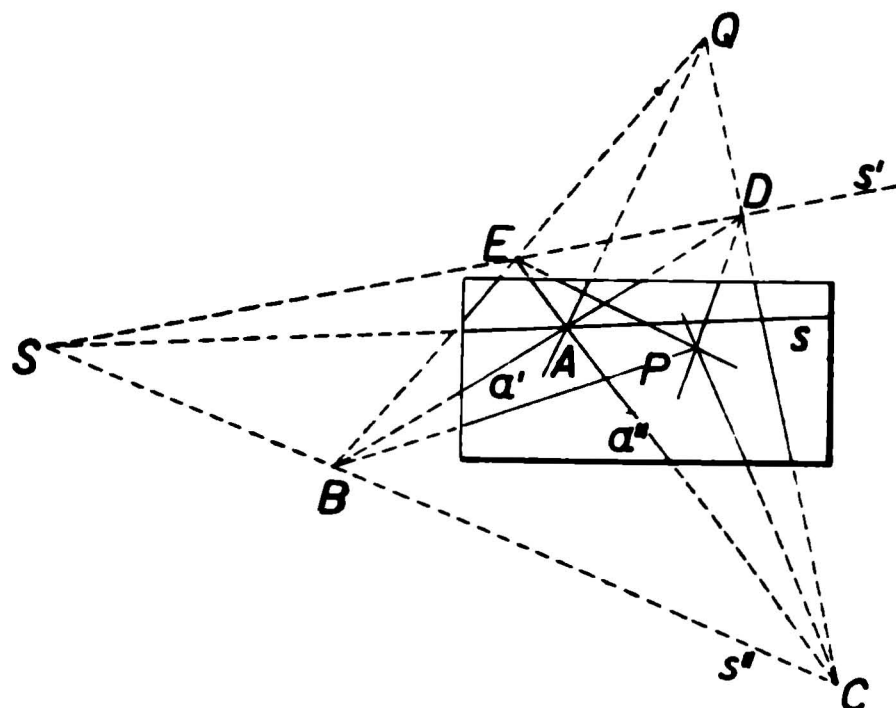
a) Nejprve sestrojme spojnicí s bodu A (obr. 9) s nedostupným bodem druhého řádu $S \equiv (s', s'')$. Na dostupné přímce s' zvolené body E, D spojme podle odst. A s oběma nedostupnými body prvního řádu $B \equiv (b', b'')$,



Obr. 9. Sestrojení spojnice bodu A s nedostupným bodem S druhého řádu.

$C \equiv (c', c'')$, které určují nedostupnou přímku $s'' \equiv BC$. Tato konstrukce však byla v obr. 9 vynechána pro přehlednost. Označme P průsečík spojníc EC a DB a Q průsečík spojníc EB a DC . Volíme-li vhodně body E, D (hlavně navzájem dosti blízko), padne P určitě na nákresnu. Spojme

jej s Q , který může být i nedostupný, ale pak nejvýš prvního řádu, jelikož je průsečíkem dostupných přímek EB a DC . V úplném čtyřrohu $BCDE$ tvoří spojnice PE , PD , PQ a PS harmonickou čtveřinu, z níž prvé tři paprsky známe a k nimž tedy čtvrtý $s''' \equiv (PS)$ snadno sestrojíme. Nedostupný bod S je nyní již určen jako průsečík dostupných přímek s' a s''' , tedy je nedostupný již pouze prvního řádu. Jeho spojnicí

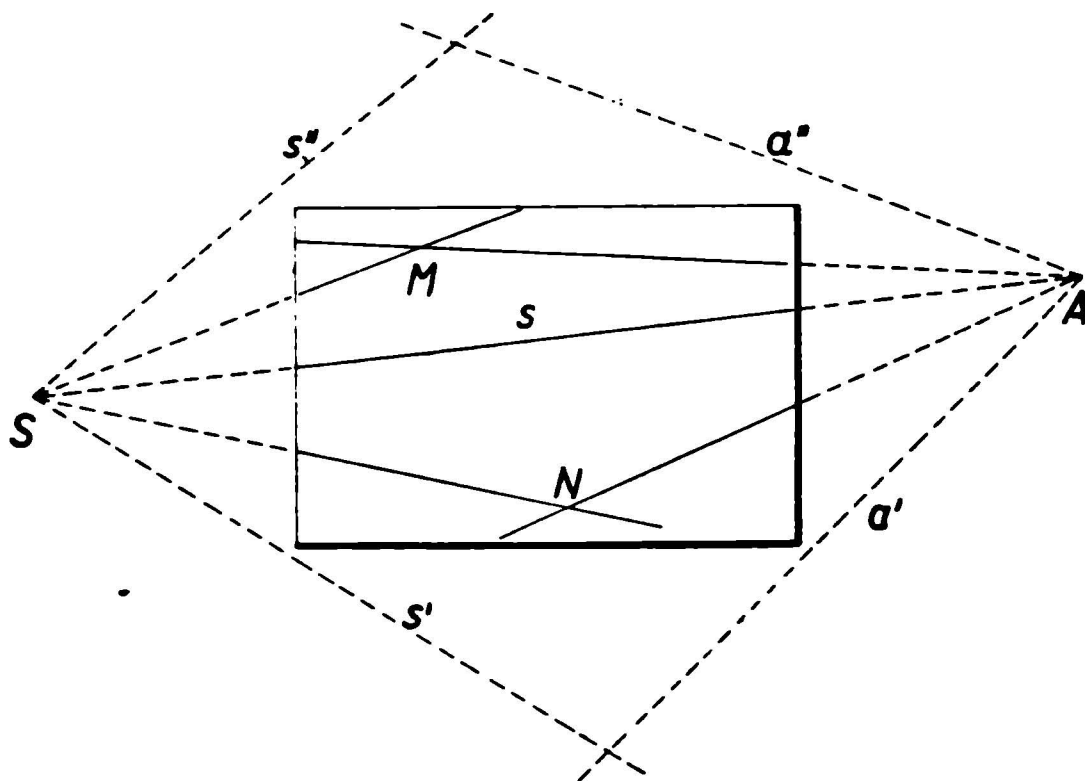


Obr. 10. Sestrojení spojnice bodu A nákresny s nedostupným bodem S třetího řádu.

s A dovedeme vždy sestrojiti, buď podle odst. A, je-li A dostupný, nebo podle odst. B, je-li A nedostupný prvního řádu.

b) Nedostupný bod třetího řádu $S \equiv (s', s'')$ jest spojití s dostupným bodem A (obr. 10). Bodem A vedme dvě přímky a' , a'' , jejichž průsečíky $BCDE$ s s'' a s' jsou nedostupné body druhého řádu. Právě popsanou konstrukcí spojme je s libovolně zvoleným dostupným bodem P . Tím jsme body $BCDE$ proměnili v nedostupné body řádu pouze prvního.

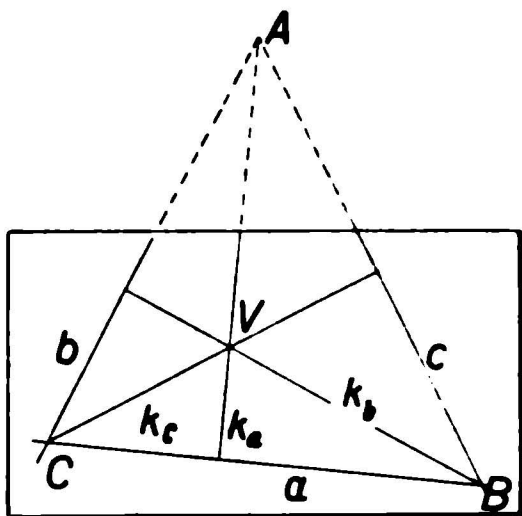
Podle odst. B veďme spojnice BE a CD , které nepadnou zcela mimo nákresnu, jestliže přímky a', a'' byly vhodně vedeny bodem A . Průsečík Q spojnic BE a CD jest tedy nedostupný řádu nejvýš prvního. Spojme jej s A (odst. A). Hledaná spojnice $s \equiv (SA)$ pak je paprsek harmonicky sdružený s AQ vzhledem k a' a a'' .



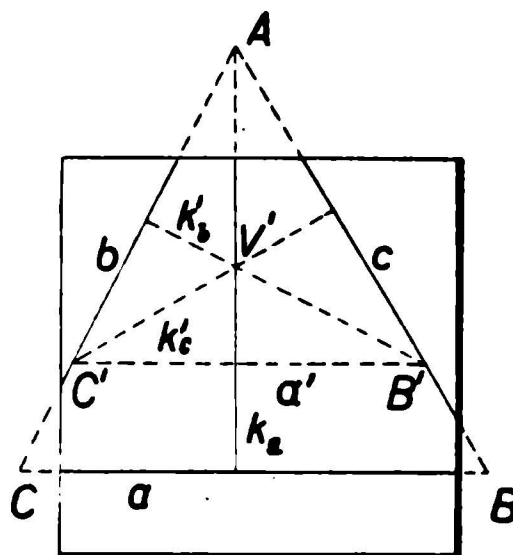
Obr. 11. Rozbor sestrojení spojnice s dvou nedostupných bodů A, S třetího řádu.

c) Nyní můžeme také nakreslit spojnicí dvou nedostupných bodů řádu druhého nebo třetího. Na příklad v obr. 11 je naznačeno sestrojení spojnice dvou nedostupných bodů třetího řádu $A \equiv (a', a'')$, $S \equiv (s', s'')$. Na nákresně zvolme dva body M a N a spojme je s A i s S konstrukcí naznačenou v obr. 10. Tím je proměníme v nedostupné body pouze řádu prvního. Jejich spojnicí s sestrojíme tedy nyní podle odst. B. V obr. 11 byly vynechány veškeré konstrukce, jichž provedení bylo již dříve vyloženo.

2,2. Metrické úlohy v omezené nákresně. A. Z nedostupného průsečíku A dostupných přímek b a c jest spustiti kolmici k_a na danou dostupnou přímku a .



Obr. 12. Spuštění kolmice k_a na přímku a z nedostupného bodu A prvního řádu.

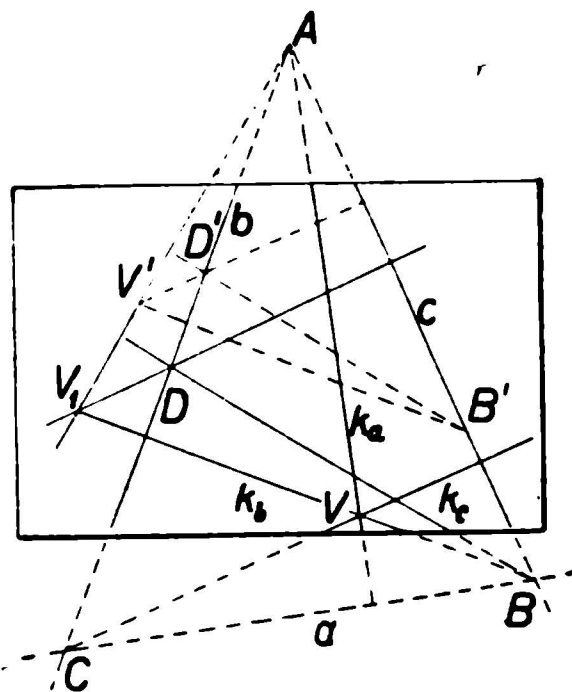


Obr. 13. Alternativa obr. 12, je-li jeden (příp. oba) z bodů B, C nepřístupný.

Užijeme věty, že výšky trojúhelníka, vytvořeného přímkami a, b, c se protínají v jednom bodě V .

a) Jsou-li $B \equiv (a, c)$ a $C \equiv (a, b)$ dostupné (obr. 12), jest sestrojení bodu V zřejmé. Je-li V dostupný, kolmice z něho spuštěná na a je hledanou k_a . Nemá-li V dostupný, jest nejvýš nedostupný prvního řádu. Hledanou výšku sestrojíme pak jako spojnicí $k_a \equiv VA$ podle odst. 2,1 A nebo B.

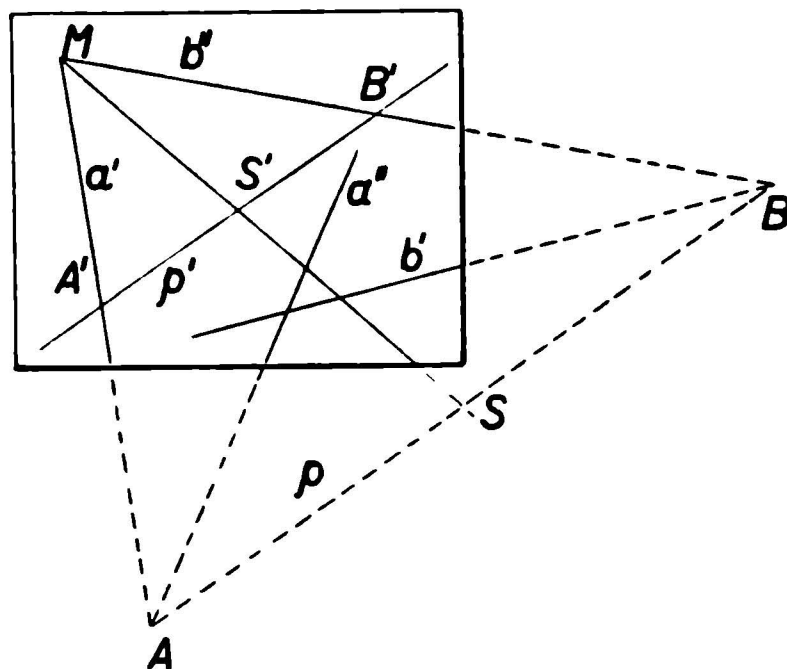
b) Je-li jeden nebo oba body $B \equiv (a, c)$ a $C \equiv (a, b)$ také



Obr. 14. Z nedostupného bodu A spustiti kolmici k_a na nedostupnou přímku a .

nedostupné, pomůžeme si rovnoběžkou $a' \parallel a$ (obr. 13) tak zvolenou, aby její průsečíky B' a C' s b a c již padly na nákresnu.

c) Kdyby také přímka a byla nedostupná (obr. 14), spojíme podle odst. 2,1 C nedostupný bod druhého řádu $B \equiv (a, c)$ s bodem D , který jsme libovolně zvolili na b . Kol-



Obr. 15. Rozpůlení nedostupné úsečky AB .

mici k_b sestojíme užitím průsečíku V_1 výšek v $\triangle ABD$. K sestrojení výšky na stranu BD musíme ovšem užití obratu načrtnutého v obr. 13, je-li A nedostupný (v obr. 14 tato konstrukce je čárkovaná). Podobně sestojíme kolmici k_c (její konstrukce v obr. 14 je již vynechána). Další konstrukce $k_a \equiv VA$ je stejná jako dříve.

d) Nyní dovedeme také bodem vésti rovnoběžku s nedostupnou přímkou a . Je to kolmice spuštěná z onoho bodu na libovolnou přímku $k \perp a$ (bez obrázku; srov. s odst. 2,1 B).

e) Na základě předešlých konstrukcí můžeme vztýčiti kolmici k přímce a v jejím nedostupném bodě A . Na nákresně

veďme přímku $a' \parallel a$ a spustíme na ni kolmici z A (bez obrázku).

B. Rozpůliti úsečku AB , je-li nedostupný aspoň jeden z jejích koncových bodů.

Na nákresně veďme rovnoběžku p' s úsečkou AB (obr. 15). Promítněme na ni koncové body úsečky AB do $A'B'$ z bodu M tak zvoleného na nákresně, aby oba body A', B' byly dostupné. Půlí-li S' úsečku $A'B'$, prochází MS' středem S úsečky AB . Je to bod dostupný nebo nedostupný nejvýš druhého řádu.

Podobně bychom rozdělili nedostupnou úsečku AB na libovolný jiný počet stejných dílů. Stejně promítáním řešíme úlohu: Na přímce p budiž dána zčásti neb zcela nedostupná úsečka. Jest ji zdvojnásobiti, ztrojnásobiti atd.

Nyní dovedeme také nakresliti symetrálu nedostupné úsečky AB . Je to kolmice v S na AB . Sestrojíme ji podle odst. A spuštěním kolmice z S na p' .

Rovněž dovedeme najíti střed kružnice, jdoucí třemi body A, B, C , z nichž některé nebo všechny mohou býti nedostupné. Je to průsečík symetrál úseček AB a BC . Za kontrolu správné konstrukce slouží, že jím také prochází symetrála úsečky CA (bez obrázku).

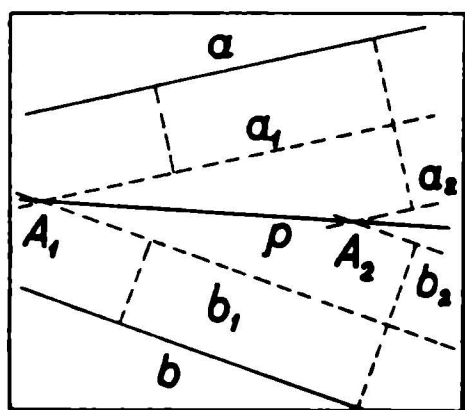
C. Rozpůliti úhel s nedostupným vrcholem.

a) Půlicí přímka p je geometrickým místem bodů stejně vzdálených od obou ramen a, b úhlu (obr. 16a).

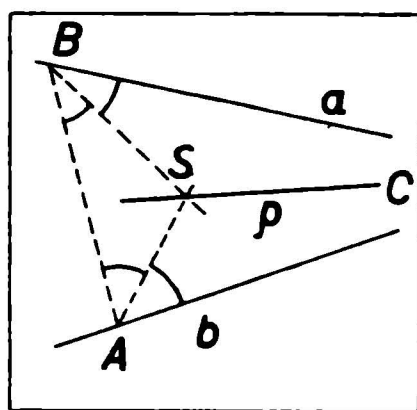
b) Na ramenech zvolme dostupné body A, B a označme C jeho nedostupný vrchol (obr. 16b). V $\triangle ABC$ symetrály úhlů se protínají v jednom bodě S , který najdeme jako průsečík dostupných symetrál $\sphericalangle CBA$ a $\sphericalangle CAB$. Hledaná symetrála $\sphericalangle ACB$ je spojnice SC .

c) Dosud jsme mlčky předpokládali, že obě ramena úhlu, který půlíme, jsou dostupná. Jsou-li jedno nebo obě ramena úhlu nedostupná, spustíme podle odst. A na ně kolmice k_a a k_b z vhodně zvoleného bodu M na nákresně (obr. 16c). Budiž k_p symetrála úhlu jimi sevřeného, která je patrně

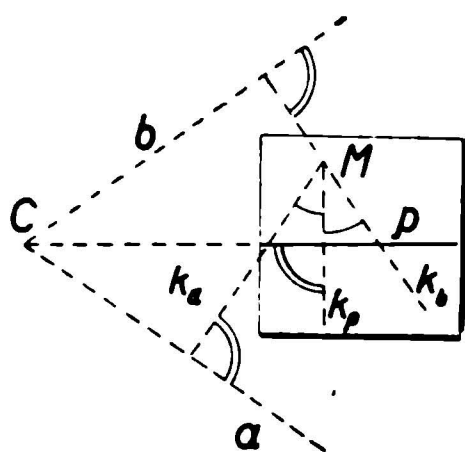
dostupná. Z vrcholu $C \equiv (a, b)$ spuštěná $p \perp k_p$ (odst. A) je hledaná půlící přímka.



Obr. 16a.



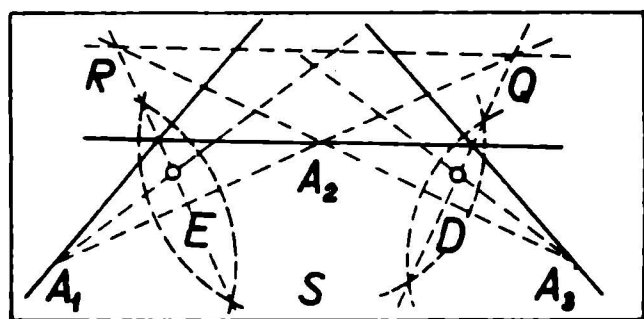
Obr. 16b.



Obr. 16c.

Obr. 16. Rozpůlení úhlu s nedostupným vrcholem.

D. Kružnice procházející dostupnými body A_1, A_2, A_3 měž nedostupný střed S (obr. 17). Pak není možno kružítkem sestrojiti její dostupný oblouk. Můžeme však sestrojiti tečny kružnice v A_1, A_2, A_3 a takový počet dalších dostupných bodů na ní, aby ji bylo možno jimi proložit s dostatečnou přesností od ruky.



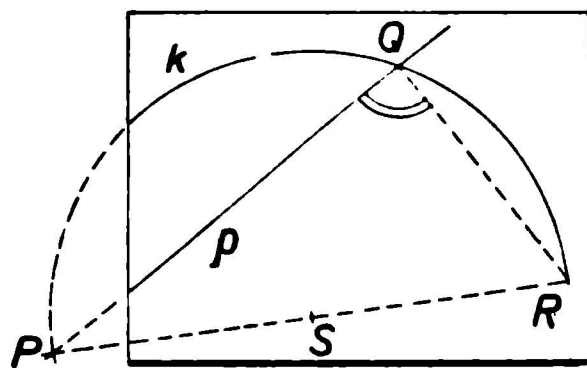
Obr. 17. V bodech A_1, A_2, A_3 kružnice (s nedostupným středem) sestrojiti její tečny a sestrojiti další body na kružnici.

Sestrojme symetrály DQ a ER tětiv A_2A_3 a A_1A_2 . Najdeme průsečíky R a Q těchto tětiv se symetrálami. Spojnice RQ je rovnoběžná s tečnou kružnice v A_2 . Neboť A_2 je průsečík výšek v trojúhelníku RQS , takže $SA_2 \perp RQ$, charakteristická to vlastnost

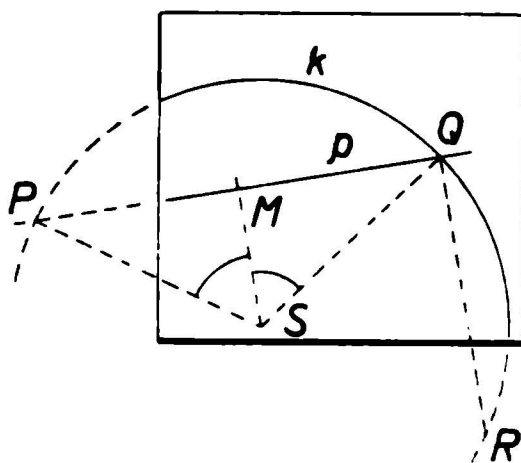
tečny kružnice. Tečny kružnice v A_1 a A_3 protínají se s tečnou v A_2 na symetrálách. Rozpůlíme-li úhel tečny a tětivy (čárkovaně), dostaneme další bod kružnice na symetrále tětivy (označený kroužkem). Jinou konstrukci dalších bodů kružnice poskytuje Pascalova věta, dobře známá ze střední školy, považujeme-li kružnici za kuželosečku určenou třemi body a tečnami ve dvou z nich. Nebo můžeme užít i věty Brianchonovy (tři tečny kuželosečky se dvěma body dotyku).

E. Přímka p protíná kružnici k v nedostupném bodě P . Jest jí vésti další přímku, aby byl určen jako průsečík dvou přímek. Ve všech dosavadních konstrukcích byly totiž nedostupné body určeny vždy tímto způsobem.

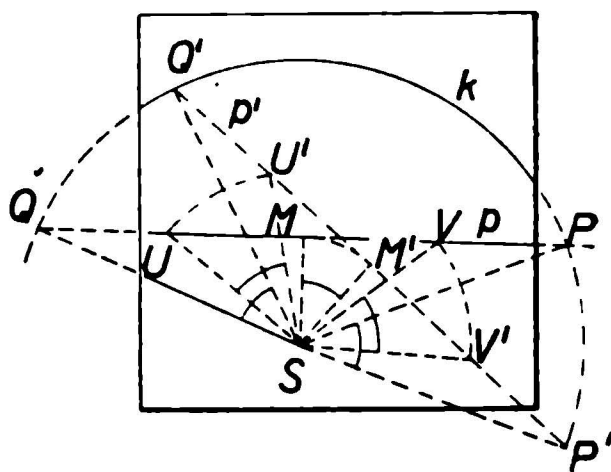
a) Je-li dostupný střed S kružnice a druhý průsečík Q přímky a kružnice (obr. 18), vztyčme $QR \perp p$. Protně-li tato kolmice kružnici po druhé v dostupném bodě R , spojnice RS jde bodem P .



Obr. 18.



Obr. 19.



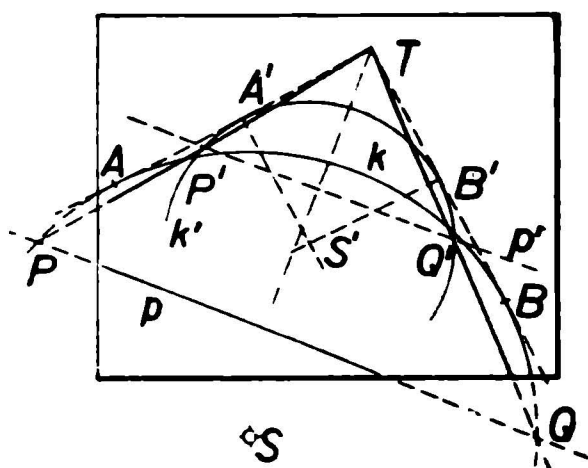
Obr. 20.

Obr. 18.—20. Spojiti bod S s nedostupným průsečíkem P přímky p a kružnice k .

Je-li také R nedostupný (obr. 19), spustíme z S kolmici SM na p a přenesením učiníme $\sphericalangle QSM = \sphericalangle MSP$. Toto řešení platí ostatně i při dostupném R .

Je-li také Q nedostupný (obr. 20), otočíme přímku p okolo středu S do takové polohy p' , aby aspoň jeden průsečík $Q' \equiv (p', k)$ byl dostupný. Otočení přímky provedeme buď otočením kolem středu S nejbližšího bodu M na ní nebo otočením dvou bodů U, V přímky o stejný úhel. Právě vyloženým způsobem najdeme SP' a body P' a Q' otočíme kolem S zpátky o stejný úhel

$\sphericalangle P'SP = \sphericalangle Q'SQ = \sphericalangle U'SU = \sphericalangle V'SV (= \sphericalangle M'SM)$ jestliže jsme k otáčení přímky užili bodu M).



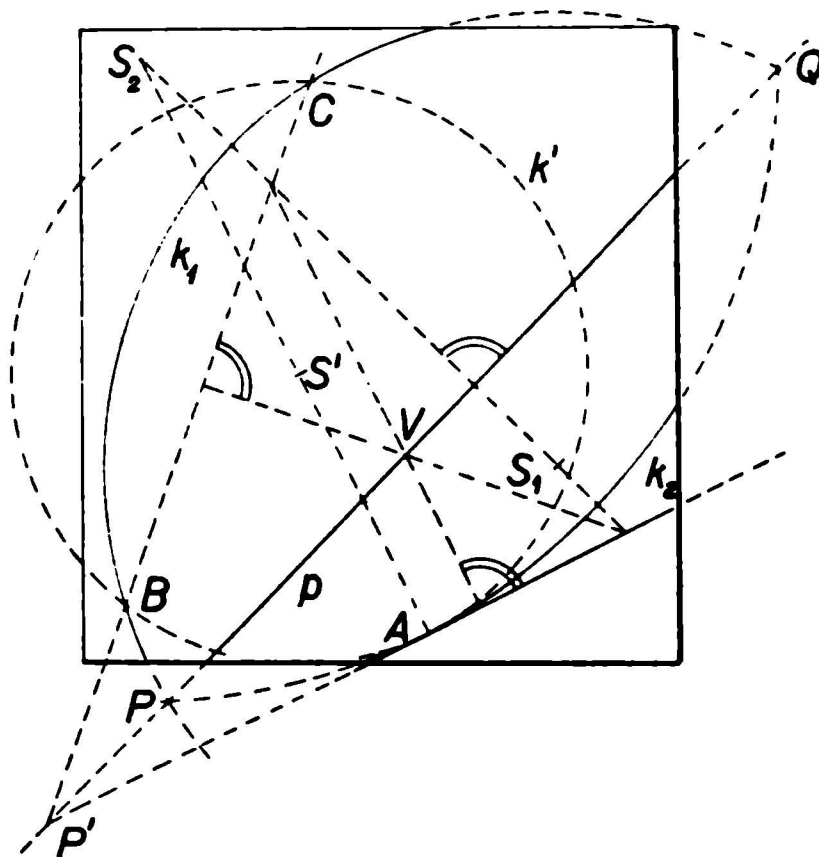
Obr. 21. Sestrojení přímek nedostupnými průsečíky přímky p s kružnicí k o nedostupném středu S .

b) Je-li střed S kružnice k nedostupný, nemůžeme její dostupný oblouk sestrojití kružítkem (odst. D). Proto také nemůžeme na ní přímo sestrojití žádný z obou průsečíků P, Q kružnice k a přímky p , i když padne na nákresnu. Sestrojíme však ke kružnici tečny ve dvou jejích dostupných bodech A, B (odst. D) tak zvolených, aby průsečík T obou tečen byl dostupný (obr. 21). Sestrojíme kružnici k' a přímku p' , které jsou s k a p

stejnolehlé podle středu T . Padnou-li průsečíky $P', Q' \equiv (k', p')$ na nákresnu, procházejí TP' a TQ' průsečíky $P, Q \equiv (k, p)$.

c) Úloha: určití nedostupné průsečíky P, Q dvou kružnic k_1 a k_2 jako průsečíky přímek se převede na předešlou sestrojením chordály p obou kružnic. K tomu užíváme nejčastěji poznatku, že chordály tří kružnic procházejí týmž bodem, jemuž říkáme potenční střed těch tří kružnic.

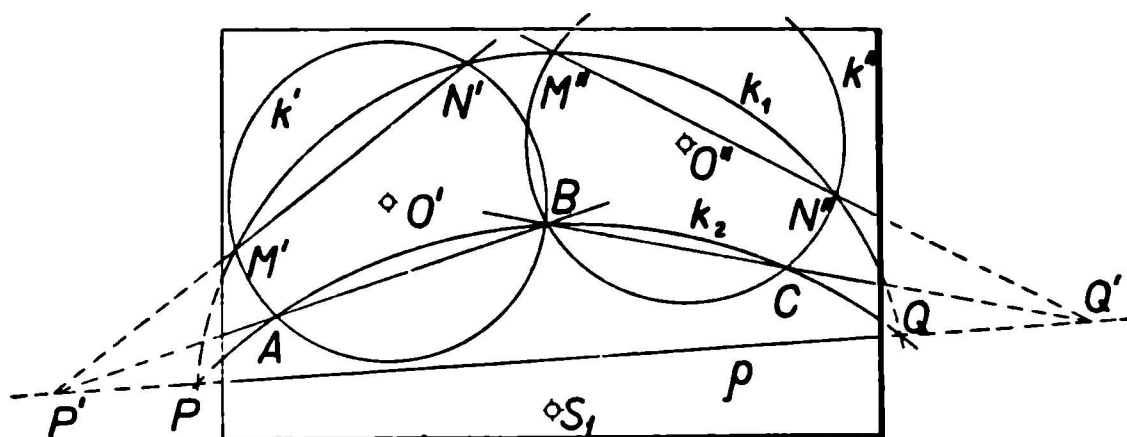
Jsou-li středy S_1, S_2 obou kružnic dostupné (obr. 22), nakresleme libovolnou kružnici k' s dostupným středem S' , která protíná dané kružnice v dostupných bodech. Sestrojme chordály kružnic $(k_1, k') \equiv BC$ a kružnic k_2, k' . Pro jednoduchost jsme volili k' dotýkající se k_2 v A . Proto jejich chordála je jejich společnou tečnou v A . Průsečíkem P' obou chordál jde i chordála $(k_1, k_2) \equiv p \perp S_1S_2$ (odst. A).



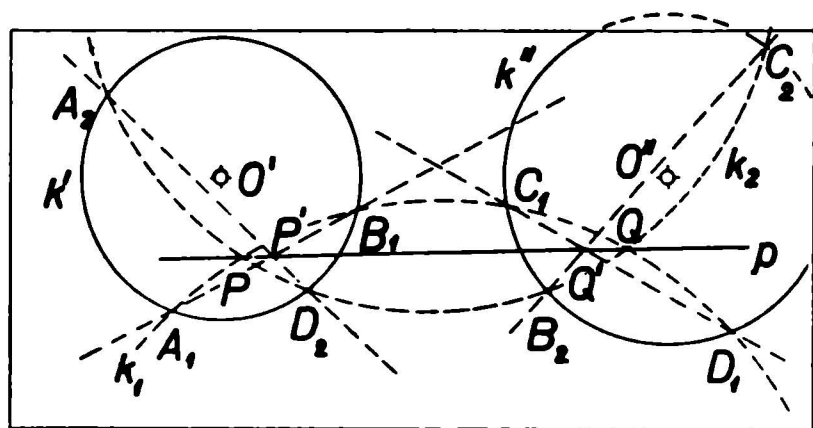
Obr. 22. Sestrojení chordály p kružnic k_1, k_2 s dostupnými středy, jsou-li průsečíky P, Q obou kružnic nedostupné.

Má-li jedna z obou kružnic nedostupný střed (k_2 v obr. 23), sestrojme na ní tři body A, B, C (odst. D). Body A, B proložme kružnicí k' s dostupným středem O' a sestrojme průsečík P' chordál $(k_2, k') \equiv AB$ a $(k_1, k') \equiv M'N'$. Jím prochází také hledaná chordála $p \equiv (k_1, k_2)$. Pomocnou kružnici k'' vedenou body B, C sestrojme podobně bod Q' na chordále $p \equiv (P', Q')$. Kontrolou je, že $p \perp S_1S_2$. Chordálu p

dvou kružnic k_1 a k_2 , z nichž jedna má nedostupný střed, sestrojíme stejným způsobem i tehdy, protínají-li se obě kružnice v dostupných bodech P, Q , které však nemůžeme najítí přímo protnutím oblouků obou kružnic, protože kružítkem nemůžeme sestrojiti oblouk kružnice s nedostupným středem.



Obr. 23. Sestrojení chordály p kružnic k_1, k_2 , je-li střed kružnice k_2 nedostupný.



Obr. 24. Sestrojení chordály p kružnic k_1, k_2 s nedostupnými středy.

Jsou-li nedostupné středy obou kružnic k_1, k_2 , sestrojme na každé z nich tři dostupné body A_1, B_1, C_1 , resp. A_2, B_2, C_2 (obr. 24). Body $A_2A_1B_1$ proložme kružnici k' s dostupným středem O' . Z kružnic k' a k_1 jedna má střed dostupný a druhá nedostupný. Jejich chordálu A_2D_2 dovedeme sestrojiti (podobně jako v obr. 23). Průsečík $P' \equiv (A_2D_2, A_1B_1)$ je po-

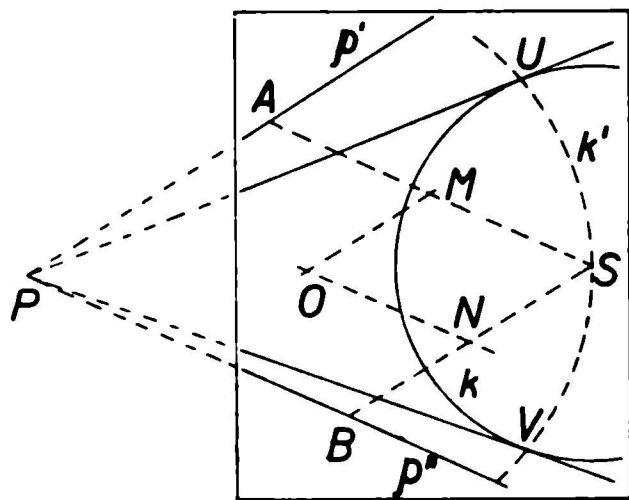
tenčním středem kružnic (k_1, k_2, k') a leží proto na hledané chordále $p \equiv (k_1, k_2)$. Podobně pomocnou kružnicí k'' s dostupným středem O'' , proloženou body B_2, C_2, C_1 najdeme další bod Q' na chordále p . Průsečíky P, Q chordály $P'Q'$ s kteroukoliv z kružnic k', k'' jsou také průsečíky obou kružnic a sestrojíme je podle b).

F. Z nedostupného bodu $P \equiv (p', p'')$ vésti tečny ke kružnici k .

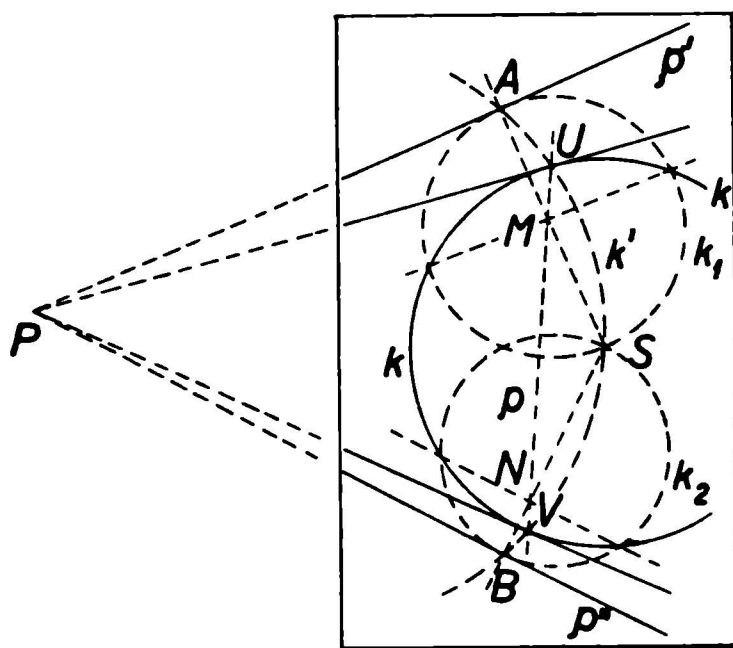
a) Je-li dostupný střed S kružnice (obr. 25), vedme jím libovolné přímky SA a SB až protnou p' a p'' v dostupných bodech A, B , rozpůlme úsečky SA a SB body M, N a vedme $MO \parallel p'$ a $NO \parallel p''$. O je středem kružnice k' o průměru SP , která prochází dotykovými body U, V tečen z P vedených ke k . Konstrukce je výhodná, padne-li i O na náčrtu. Je-li úhel přímek p' a p'' malý, je tato konstrukce nepřesná.

b) Buďtež A, B paty kolmic, spuštěných z S na p' a p'' (obr. 26).

Tyto body leží na kružnici k' nad průměrem PS , která pro-

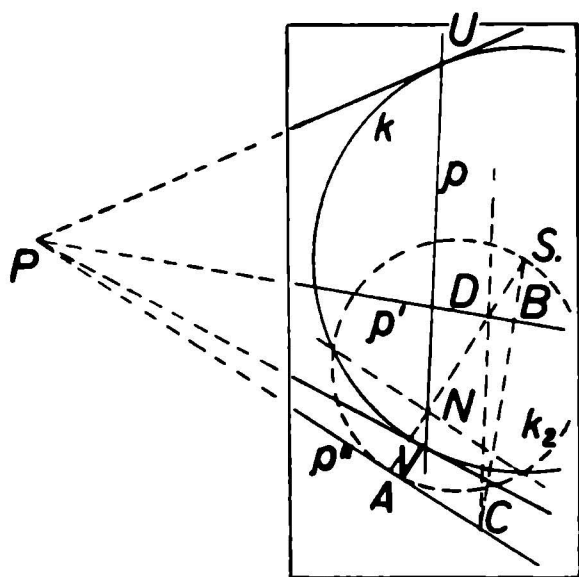


Obr. 25. Sestrojení tečen vedených z nepřístupného bodu P ke kružnici k s dostupným středem S .

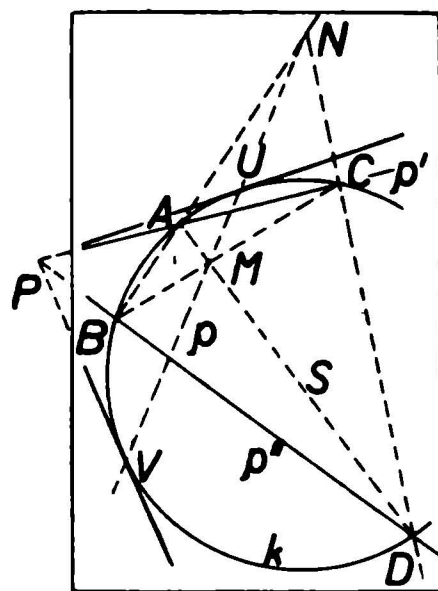


Obr. 26. Sestrojení bodů dotyku U, V tečen vedených ke kružnici k z nepřístupného bodu P .

chází body dotyku U, V tečen, vedených ke k z P . Body U, V najdeme na k bez kreslení kružnice k' chordálou p kružnic (k, k') . Chordálu sestrojíme podle odst. E. Nejlépe užijeme pomocných kružnic k_1 a k_2 nad průměry AS a BS , které poskytnou potenční středy M a N na p . Spojnice $p \equiv MN$ vytíná na k hledané body dotyku U, V . Jelikož není potřeba kresliti kružnici k' , může její střed O býti i nedostupný.



Obr. 27. Sestrojení tečen vedených z nedostupného bodu P ke kružnici k .



Obr. 28. Sestrojení tečen vedených z nedostupného bodu P ke kružnici k .

c) Tato konstrukce je nevýhodná, probíhá-li jedna z přímk p', p'' blízko S (v obr. 27 je to p'). Pak potenční střed M padá zpravidla mimo nákresnu. Jsou-li však C a D průsečíky kolmic SB s p'' a SA s p' , jest S průsečíkem výšek v $\triangle PDC$. Proto spojnice CD stojí kolmo na spojnici PS , t. j. je rovnoběžná s hledanou chordálou p . Stačí na ní sestrojiti proto jediný další bod N stejnou konstrukcí jako dříve.

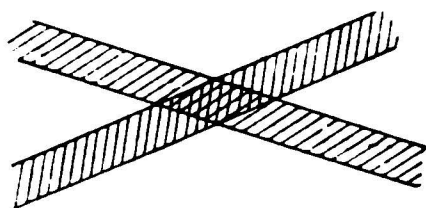
d) Jiná konstrukce (obr. 28): Zvolme na k body A, B , spojme je s P a najdeme druhé průsečíky C, D spojníc AP a BP s k . Body $(AD, BC) \equiv M$, $(AB, CD) \equiv N$ leží na poláře p bodu P vzhledem ke kružnici. Dotykové body U, V

jsou průsečíky poláry p a kružnice k . Konstrukce je zvláště výhodná, protínají-li již přímky p' a p'' kružnici k v dostupných bodech, které volíme přímo za $ABCD$.

Konstrukci podle b), c) nebo d) můžeme provést, ovšem s jistými obtížemi, i tehdy, je-li střed kružnice nedostupný.

PŘESNOST GEOMETRICKÝCH KONSTRUKCÍ.

3.1. Pravidla Wienerova. Body na nákresně jsou vždy realisovány jako průsečíky čar konečné šířky. Takové dvě čáry nemají nikdy společný jediný bod, nýbrž celou část roviny přibližně tvaru rovnoběžníka, v obr. 29 nadměrně zvětšeného a dvakrát šrafovaného. Tím vznikne jistá neurčitost ve vedení přímky, nakreslené podle pravítka



Obr. 29. Zvětšené okolí průsečíku dvou narýsovaných různoběžek.

přiloženého ke dvěma takto daným bodům. V obr. 30 jsou přímkami p_1 a p_2 naznačeny krajní možnosti v nesprávném sestrojení spojnice bodů A, B . Vidíme, že neurčitost jejího průsečíku s přímkou q_1 , vyjádřená úsečkou CD , je menší než neurčitost průsečíku spojnice AB a přímkou q_2 , vyjádřená úsečkou EF .

K omezení těchto nepřesností v konstrukci doporučuje Wiener¹⁾ zachovávat následující pravidla:

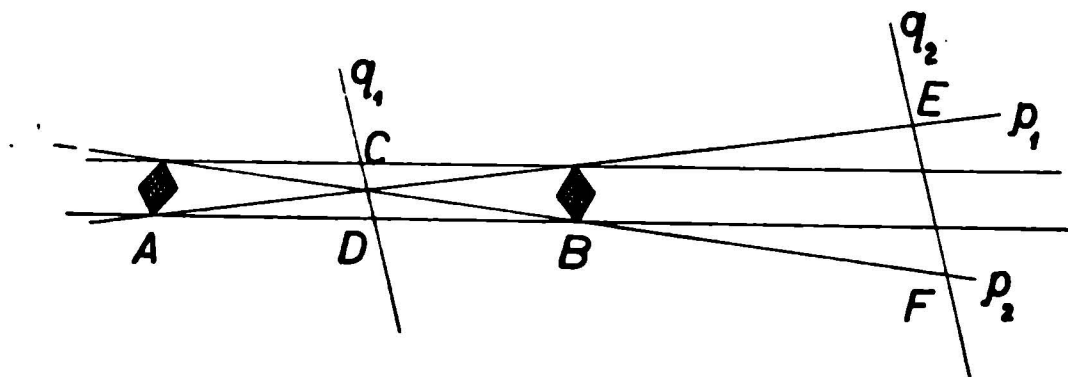
a) Má-li spojnice a bodů A, B v celém svém průběhu býti nakreslena pokud možno přesně podle pravítka přiloženého k oběma bodům, jest nutno zvoliti je navzájem co nejdále.

b) Má-li průsečík P přímek a, b býti určen pokud možno bezpečně, jest obě přímky určiti body, které leží blízko průsečíku P .

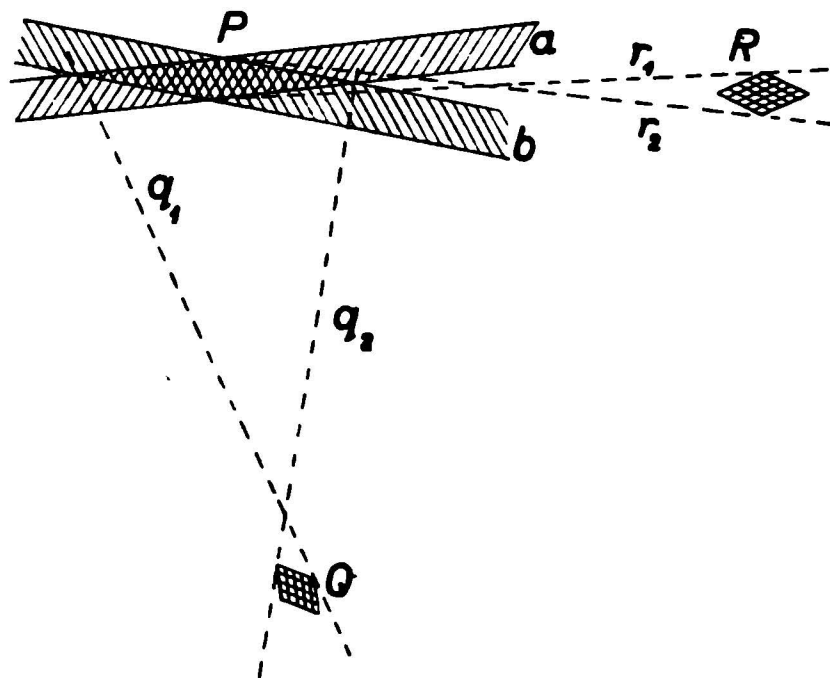
Rovnoběžník, společný dvěma čarám a, b konečné šířky, jest velmi protáhlý, protínají-li se obě čáry pod velmi malým úhlem (obr. 31). Spojnice průsečíku P takových

¹⁾ Darstellende Geometrie, Leipzig (1884), 1. sv., str. 190.

dvou čar s dalším bodem Q , který leží v tupém úhlu jimi sevřeném, je spojnice velmi nepřesná, jak ukazují obě krajní možnosti q_1, q_2 . Naproti tomu spojnice P s bodem R uvnitř



Obr. 30. Narýsované spojnice dvou bodů ve zvětšení.



Obr. 31. Zvětšené okolí průsečíku dvou narýsovaných různoběžek, které svírají malý úhel.

ostrého úhlu čar a, b , je mnohem bezpečnější, neboť obě krajní možnosti r_1 a r_2 svírají teď malý úhel.

Protínají-li se čáry konečné šířky přibližně kolmo, rovnoběžník jim společný je blízký čtverci. Jeho spojnice s libovolným bodem roviny je určena přibližně stejně přesně.

c) Má-li se užití průsečíku P čar a, b k nakreslení dalších přímk, mají se obě čáry protínati přibližně kolmo. Protínají-li se však a, b pod malým úhlem, jejich průsečík P můžeme bezpečně spojití přímkou pouze s body, které leží uvnitř ostrého úhlu obou čar.

Při užívání kružítko dopouštíme se chyby jednak excentrickým zabodnutím jeho hrotu, jednak nesprávně odpíchnutým poloměrem. Prvá chyba je podle Wienera²⁾ průměrně asi 0,012 mm, podle K. Nitze³⁾ asi 0,05 mm.

Druhou chybu můžeme vzítí asi stejnou jako chybu ve vedení přímky podle pravítka, přiloženého k bodu. Podle Nitze³⁾ je to asi průměrně opět 0,05 mm.

d) Nedoporučuje se užívati v konstrukcích kružítko rozevřeného více než 60° , neboť pak pérování jeho hrotu a ramen způsobuje nepřesnost výsledku (Wiener¹⁾). Znovu podotýkáme, že používání pomůcek konstrukce způsobem naznačeným ke konci odst. 1,1 se nedoporučuje pro menší přesnost.

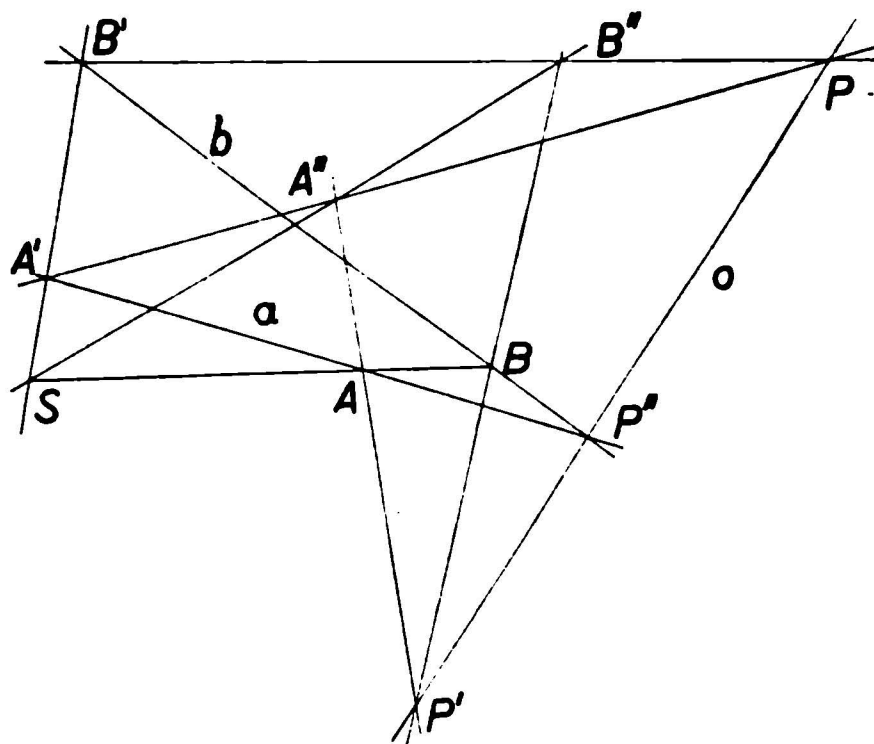
3,2. Úprava základních konstrukcí. V praksi nemáme často prvky konstrukce dány v tak příznivé vzájemné poloze, jak by mělo býti podle uvedených pravidel. Konstrukce s nimi provedené by tedy byly nepřesné. Jest proto nutno znáti, jak musíme změnití běžné konstrukce, jsou-li v nich prvky v nepříznivé vzájemné poloze, abychom obdrželi co možno nejpřesnější výsledky.

a) Buďtež dány dva blízké body A, B (obr. 32). Na jejich spojnici jest najíti vzdálený bod S tak, aby ji bylo možno přesně nakresliti podle pravítka, přiloženého k vzdáleným bodům S, B . Zvolme od bodů A, B dosti vzdálenou úsečku $A'B'$, a průsečíkem

²⁾ Schlömilch Ztschr. 16 (1871), str. 112.

³⁾ Anwendungen der Theorie der Fehler in der Ebene auf Konstruktionen mit Zirkel u. Lineal. (Dissertation Königsberg, 1905).

$P'' \equiv (AA', BB')$ vedme vhodně přímku o . Na ní zvolme body P a P' a sestrojme průsečíky $A'' \equiv (PA', P'A)$ a $B'' \equiv (PB', P'B)$. Podle Desarguesovy věty průsečík $S \equiv (A'B', A''B'')$ leží na AB . Doporučuje se voliti $A'B'$, skoro kolmé na AB . Přesvědčte se, že v obr. 32 kreslíme spojnice bodů vzájemně vesměs vzdálenějších, než A, B , tedy přesnější.

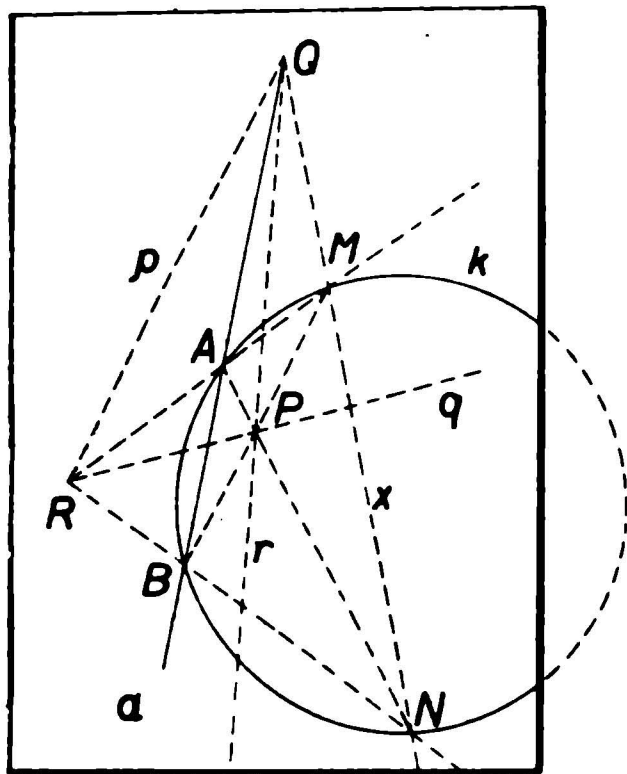


Obr. 32. α) Sestrojení bodu S na spojnici blízkých bodů AB . β) Sestrojení spojnice průsečíku P'' přímkou a, b , které se protínají pod ostrým úhlem, s bodem P ležícím v jejich tupém úhlu.

b) Bod P'' je nepřesně určen jako průsečík přímkou a, b , které svírají navzájem malý úhel. Jest jej spojití přímkou o s bodem P' , který leží v tupém úhlu obou přímkou.

Úlohu řešíme opět konstrukcí v obr. 32. Vhodně voleným bodem S vedme tři přímky, z nichž dvě protínají a v A, A' a b v B, B' a třetí protíná spojnice $P'A$ a $P'B$ v A'' a B'' . Spojnice $A'A''$ a $B'B''$ protínají se v bodě P , který leží na o , spojující $P'P''$.

c) Protíná-li přímka a kružnici k pod malým úhlem, jejich průsečíky A, B jsou nepřesné (obr. 33). Abychom je přesněji určili jako průsečíky dvou přímek, které nesvírají příliš ostrý úhel, zvolme na a bod Q a sestrojme jeho poláru q ke kružnici. Na q zvolme bod R , jehož polára r jde Q a protíná q v bodě P . Označme $p \equiv RQ$ a sestrojme bodem Q jdoucí, čtvrtý paprsek x , harmonický s $(p, r, a, x) = -1$. Označme M, N jeho průsečíky s kružnicí k . Zřejmě $MP = NP$ i $MR = NR$ procházejí průsečíky A, B přímky a a kružnice k . Tohoto řešení úlohy lze užití i tehdy, jde-li o nepřesné průsečíky přímky s kuželosečkou.



Obr. 33. Sestrojení průsečíků přímky a s kružnicí k , protínají-li se obě pod malým úhlem.

méně obsahuje těchto zdrojů chyb, čili, zhruba řečeno, čím je jednodušší.

Prvý, kdo se těmito otázkami skutečného a pokud možno přesného provádění konstrukcí zabýval, byl J. Steiner. Dokázal,⁴⁾ že veškeré úlohy druhého stupně lze řešit užitím jediné kružnice a vedením přímek. Naopak Mascheroni⁵⁾ dokázal, že veškeré úlohy druhého stupně lze řešit pouze kružnicemi, bez vedení jakýchkoliv přímek. Žádný z těchto

⁴⁾ Cit. kapit. 1., pozn. ²⁾.

⁵⁾ Cit. kapit. 1., pozn. ¹⁾.

extrémů nebude ovšem nejjednodušší konstrukcí, obsahující nejmenší počet uvedených zdrojů nepřesnosti konstrukce. E. Lemoine⁶⁾ první vybudoval v systém nauku o jednoduchosti a přesnosti konstrukcí a nazval ji geometrografií. Její užitečnost s praktického hlediska byla podrobena četným kritikám a pokusům o zlepšení.⁷⁾

⁶⁾ Géométrographie ou l'art des constructions géométriques. (Paříž Coll. Scientia, No. 18). Viz též heslo geometrografie v Teyssler-Kotyškově Technickém slovníku naučném (IV, 864).

⁷⁾ Viz Adler, cit. kapit. 1., pozn. ⁴⁾, str. 277 a násl.

GEOMETRICKÉ APROXIMACE.

4,1. Pojem přesné konstrukce. Konstrukce provedené způsobem definovaným v odst. 1,1 a), b) pouze pravítkem a kružítkem považují se za přesné. K takovým konstrukcím jest totiž potřebí pouze konečného počtu přímek a kružnic, které dovedeme přesně nakresliti těmito pomůckami, nehledíme-li k nedokonalosti pomůcek a k chybám vzniklým jejich užíváním (kapit. 3.). Pak jsou také v konstrukci přesně určeny všechny úhly, dále všechny body jako průsečíky přesně nakreslených přímek a kružnic a tedy i všechny délky.

Všechny konstrukce, k jichž provedení bylo třeba nakresliti také jiné křivky, nepovažovaly se dříve za přesné. Takové křivky nebylo totiž možno nakresliti jinak než spojením od ruky konečného počtu bodů, sestrojených pravítkem a kružítkem. Mezi těmito body byl pak průběh křivky určen pouze podmínkou, aby byla spojitá a měla hladký průběh, t. j. aby byla bez „hrbů“. Průsečíky křivek, z nichž aspoň jedna byla sestrojena tímto empirickým způsobem, byly ovšem do jisté míry libovolné, nepřesné.

Novými pomůckami staly se některé z těchto konstrukcí právě tak přesnými, jako konstrukce provedené pouze pravítkem a kružítkem. Na příklad, veškeré úlohy třetího a čtvrtého stupně lze řešiti sestrojením průsečíků kvadratické paraboly jednou pro vždy nakreslené a vhodné kružnice.¹⁾ Parabolografem dovedeme však nakresliti parabolu právě tak přesně jako kružnici kružítkem. Proto i její průsečíky s kružnicí budou docela přesné, nepřihlížíme-li

¹⁾ Viz J. Vojtěch, Základy matematiky I. (5. vyd., Praha, 1939), str. 123 a násl.

k nedokonalosti těchto prostředků a k chybám toho druhu, o nichž byla řeč v kapitole 3.

Obecněji lze v tomto smyslu přesně řešiti každou úlohu vedoucí na sestrojení křivek, které dovedeme vhodnými mechanismy přesně nakresliti. Speciálně jsou to veškeré algebraické úlohy, t. j. úlohy, k jichž řešení jsou nutné pouze algebraické křivky, neboť každou algebraickou křivku můžeme nakresliti vhodným kloubovým mechanismem.²⁾ Kružítka se skládá pouze ze dvou tyčí navzájem spojených jedním kloubem a jest tedy vlastně nejjednodušší z řady těchto mechanismů.

Velkého praktického významu však tento poznatek nemá. Kdežto k přesnému řešení veškerých úloh třetího a čtvrtého stupně stačí jediný parabolograf kromě kružítko a pravítka, není tomu tak při přesném řešení úloh stupně vyššího.

Na příklad v obecné rovnici šestého stupně

$$x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6 = 0 \quad (1)$$

je 6 konstant, z nichž jedinou dovedeme odstraniti známou lineární transformací

$$y = x + \frac{1}{6}a_1,$$

kterou graficky tedy můžeme provésti užitím pouhého pravítka. Obdržíme tím pro neznámou y rovnici 6. stupně, v níž schází člen s y^5 .

Kdybychom chtěli tuto metodu rozšíriti položením

$$y = \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3 + \alpha_4x^4 + \alpha_5x^5, \quad (2)$$

obdrželi bychom pro y opět rovnici 6. stupně

²⁾ Dokázal to sir A. B. Kempe, How to draw a straight line (1877). Viz též M. d'Ocagne, Cours de géométrie pure et appliquée de l'École polytechnique (Paris, 1917—18) str. 315.

³⁾ T. zv. Tschirnhausenova transformace. Viz na př. H. Weber, Lehrbuch der Algebra I, str. 199—206 (Brunswick, 1898).

$$y^6 + b_1 y^5 + b_2 y^4 + b_3 y^3 + b_4 y^2 + b_5 y + b_6 = 0, \quad (3)$$

jejíž koeficienty jsou homogenní mnohočleny v koeficientech (1) a (2), a to v argumentech

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \quad (4)$$

b_1 jest lineární, b_2 kvadratický, b_3 kubický atd., b_6 mnohočlen v α stupně šestého. Kdybychom tedy chtěli odstraniti z (3) koeficienty b_1, b_2 , t. j. položit

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad (5)$$

musili bychom řešiti kvadratickou rovnici o neznámých (4), což dovedeme graficky provést pravítkem a kružítkem. Kdybychom však chtěli odstraniti 3 koeficienty b_1, b_2, b_3 z (3), t. j. položit

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 0, \quad (6)$$

vedlo by to na řešení rovnice stupně $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ o neznámých (4), t. j. téhož stupně jako byla rovnice daná (1) atd.

V rovnici kružnice disponujeme třemi konstantami. Kdybychom tedy chtěli řešiti rovnici (1) určením průsečíků kružnice s jednou provždy nakreslenou kubickou křivkou, musili bychom napřed rovnici (1) podrobiti takové transformaci (2), aby v ní zbyly také jen 3 konstanty jako v rovnici kružnice. Jak jsme však viděli z (6), musili bychom k tomu řešiti napřed graficky rovnici 6. stupně, což je problém, o jehož grafické řešení právě jde. Proto nemůžeme veškeré úlohy 6. stupně graficky řešiti nalezením průsečíků vhodné kružnice s kubickou křivkou jednou provždy nakreslenou.

Bylo by proto nutno kresliti novou kubickou křivku k řešení každé úlohy šestého stupně. Kubické křivky se však také dělí na několik typů podobně jako kuželosečky. K nakreslení kuželoseček různých typů jest však potřebí různých přístrojů a podobně tomu je u křivek kubických. Ačkoliv tedy dovedeme sestrojiti mechanismus pro přesné

řešení každé jednotlivé úlohy šestého stupně, nevystačíme s jedním mechanismem pro veškeré úlohy šestého stupně.

4,2. Definice a příklad geometrické aproximace. (Trisekce úhlu.) Geometrické konstrukce stupně vyššího než čtvrtého a konstrukce, které vedou na rovnice transcendentní, jsou tedy prakticky proveditelné pouze přibližně nakreslením od ruky křivek, jejichž několik bodů bylo sestrojeno pravítkem a kružítkem. Podobně tomu je i u konstrukcí stupně třetího a čtvrtého, nedisponujeme-li parabolografem. Avšak i když jím disponujeme, je někdy jednodušší užití v konstrukci jiné kuželosečky než paraboly, i za cenu řešení nikoliv zcela přesného.

Na příklad rozdělení úhlu ($\sphericalangle GOF = 2\alpha$) (obr. 34) na tři stejné díly (trisekce úhlu) dá se provést podle odst. 1,2 řešením konstrukci přiřazené rovnice

$$\sin 2\alpha = 3 \sin \frac{2\alpha}{3} - 4 \sin^3 \frac{2\alpha}{3}, \quad (1)$$

v níž $\sin 2\alpha$ najdeme spuštěním kolmice z F na OG . S výjimkou některých zvláštních úhlů, kubická rovnice (1) pro $x = \sin \frac{2}{3}\alpha$ nemá koře 1e, který by byl v racionálním poměru k $\sin 2\alpha$. Kdyby totiž bylo

$$\sin \frac{2}{3}\alpha = \frac{p}{q} \sin 2\alpha, \quad (2)$$

značí-li p, q celá čísla nesoudělná, obdrželi bychom dosazením takového vztahu (2) do (1)

$$\sin 2\alpha = \pm \frac{q}{2p} \sqrt{\frac{3p - q}{p}}. \quad (3)$$

Pouze pro úhly, jejichž sinus se dá vyjádřit vzorcem (3), má rovnice (1) kořen v racionálním poměru k $\sin 2\alpha$ a rozpadá se v rovnici lineární a kvadratickou s koeficienty také v racionálním poměru k $\sin 2\alpha$, kteréžto rovnice tedy dovedeme řešit pravítkem a kružítkem. Jsou to na př. úhly:



$$p = 2, q = -2, \sin 2\alpha = 1, \quad 2\alpha = 90^\circ,$$

$$p = 1, q = 1, \quad \sin 2\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad 2\alpha = 45^\circ, \text{ atd.}$$

Zřejmě sinus každého úhlu nelze psáti ve tvaru (4).⁴⁾ Pro jiné úhly než (3) nelze rovnici (1) redukovati na lineární a kvadratickou s koeficienty v racionálním poměru k $\sin 2\alpha$. Rozdělení takových úhlů na tři stejné díly je problém třetího stupně, neproveditelný pouhým užitím pravítka a kružítka.⁵⁾

Místo rovnice (1) můžeme ovšem užití obdobně rovnice

$$\cos 2\alpha = 4 \cos^3 \frac{2\alpha}{3} - 3 \cos \frac{2\alpha}{3},$$

o níž platí podobné dedukce jako o (1).

Úlohu však můžeme také řešiti touto úvahou: Dělí-li body A, D oblouk $FADG$ kružnice o středu O na tři stejné díly a pŕl-li přímka p úhel FOG , pak vzdálenosti AB od p a AF jsou v poměru 1 : 2. Bod A leží tedy na hyperbole o ohnisku F , řídící přímce p a numerické výstřednosti $\varepsilon = 2$. Její reálná osa je na spojnici FG , její vrchol V a střed S dělí tětivu FG na tři stejné díly a její asymptoty a', a'' svírají úhel 120° . Hledaný bod A leží však blízko vrcholu V , v jehož okolí hyperbolu dosti přesně nahradíme oskulační kružnicí. Její střed C obdržíme jednoduchou konstrukcí $VE \perp FG, E$

⁴⁾ Na př. pro $2\alpha = 30^\circ$ plynulo by z (9) $p^2 - 3q^2 = \frac{q^3}{p}$, t. j. $\frac{q}{p}$ by muselo býti celé, tedy $p = \pm 1$, jelikož p, q jsou nesoudělná. Stejně však by z $\frac{p^3}{q} = 3pq - q^2$ plynulo, že $\frac{p}{q}$ je celé, tedy i $q = \pm 1$. Pro tyto hodnoty však vzorec (3) nepodává $\sin 30^\circ$.

⁵⁾ Viz blíže o tom v knize Vl. Knichala: Konstrukce pravítkem a kružítkem (Praha. JČMF).

na a' , $EC \perp a'$. Z podobnosti trojúhelníků plyne ostatně $\overline{CV} = \overline{FG}$.⁶⁾

Touto kružnicí obdržíme místo A bod H .⁷⁾ Abychom našli nepřesnost

$$\delta = \psi - \frac{\alpha}{3}$$

naší přibližné konstrukce, vezměme středem O pravoúhlé soustavy souřadnic osy tak, aby $p \equiv x = 0$ a považujeme $\overline{OF} = 1$. Oskulační kružnice má pak střed

$$C(\cos \alpha; \frac{1}{3} \sin \alpha),$$

poloměr $\overline{FG} = 2 \sin \alpha$ a tedy rovnici

$$x^2 + y^2 - 2x \cos \alpha - \frac{1}{3} y \sin \alpha + 1 + \frac{4}{9} \sin^2 \alpha = 0. \quad (4)$$

Na ní ležící bod H má souřadnice $(\cos \psi; \sin \psi)$, jichž dosazením do (4) dostaneme

$$\cos \psi \cos \alpha + \frac{1}{3} \sin \psi \sin \alpha = 1 + \frac{2}{9} \sin^2 \alpha,$$

čili

$$\begin{aligned} & \frac{4}{3} \left(\sin \psi - \sin \frac{\alpha}{3} \right) \sin \alpha = \\ & = \frac{2}{9} \sin^2 \alpha + 1 - \cos(\alpha - \psi) - \frac{4}{3} \sin \frac{\alpha}{3} \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$

Z konstrukce však plyne $\alpha - \psi < \frac{2}{3}\alpha$ a tedy $\cos(\alpha - \psi) > \cos(\frac{2}{3}\alpha)$, proto

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}\delta & < \frac{\sin^2 \alpha + 9 \sin^2(\frac{1}{3}\alpha) - 6 \sin(\frac{1}{3}\alpha) \cdot \sin \alpha}{12 \sin \alpha \cdot \cos(\frac{1}{2}\delta + \frac{1}{3}\alpha)} \approx \\ & \approx \frac{4 \sin^6(\frac{1}{3}\alpha)}{3 \sin \alpha \cdot \cos(\frac{1}{3}\alpha)}. \end{aligned}$$

⁶⁾ O. Taraba, Příl. Časop. pro pěst. mat. a fys., 1907, str. 76.

⁷⁾ V obr. 34 body A, D nedělí oblouk kružnice na 3 stejné díly. Pro zřetelnost výkladu získáme tím v obrázku δ nadměrně velké.

Tak pro $2\alpha = 60^\circ$ plyne odtud $\delta < 32''$, t. j. pro poloměr menší než 650 mm body A a H se liší o méně než 0,1 mm. Dokonce ještě pro $2\alpha = 90^\circ$, je $\delta < 4' 08''$ a body A, H se liší o méně než 0,1 mm až do poloměru 80 mm. Je-li rozdělití na tři díly úhel $2\alpha > 90^\circ$, napřed od něho třikrát odečteme takový menší úhel, aby k rozdělení na 3 díly zbyl úhel menší než 60° , pro nějž je konstrukce velmi přesná.*)

Z tohoto příkladu plyne: Sestrojíme-li bod A pomocí hyperboly rýsované pouze od ruky na základě řady přesně sestrojených bodů, nemůžeme se o jeho přesnosti (resp. nepřesnosti) nijak přesvědčiti; dovedeme však určit přesnost přibližné konstrukce provedené pravítkem a kružítkem (a dávající bod H). Takovým přibližným konstrukcím, se známou horní hranicí nepřesnosti, provedeným pouze pravítkem a kružítkem, říkáme geometrické aproximace. Dáváme jim přednost před konstrukcemi, vyžadujícími kreslení křivek od ruky, tedy prakticky také jen přibližnými, avšak s nepřesností neznámou.

4.3. Přibližné konstrukce některých pravidelných mnohoúhelníků. Pro techniky jsou velmi důležité konstrukce pravidelných n -úhelníků vepsaných do kružnice (ozubená kola). Ze střední školy jsou známy přesné konstrukce pro $n = 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12$; atd. V této řadě vynechané $n = 7; 9$ a 11úhelníky nejsou přesně sestrojiti pravítkem a kružítkem. Uvedeme pro ně vhodné geometrické aproximace.

a) Sedmiúhelník. Znázorňujeme-li komplexní čísla body v rovině,⁸⁾ kořeny

$$z_k = \cos \frac{2\pi \cdot k}{7} + i \sin \frac{2\pi \cdot k}{7}, i = +\sqrt{-1}, k = 1, 2 \dots 7, (1)$$

*) Přesnější konstrukci trisekce úhlu pravítkem a kružítkem najde čtenář v článku: F. Vyčichlo: O Kopfově trisekci úhlu, Rozhledy 14, str. 67—70.

⁸⁾ Viz na př. učebnici Bydžovský-Teplý-Vyčichlo, Aritmetika pro V.—VII. tř. stř. škol.

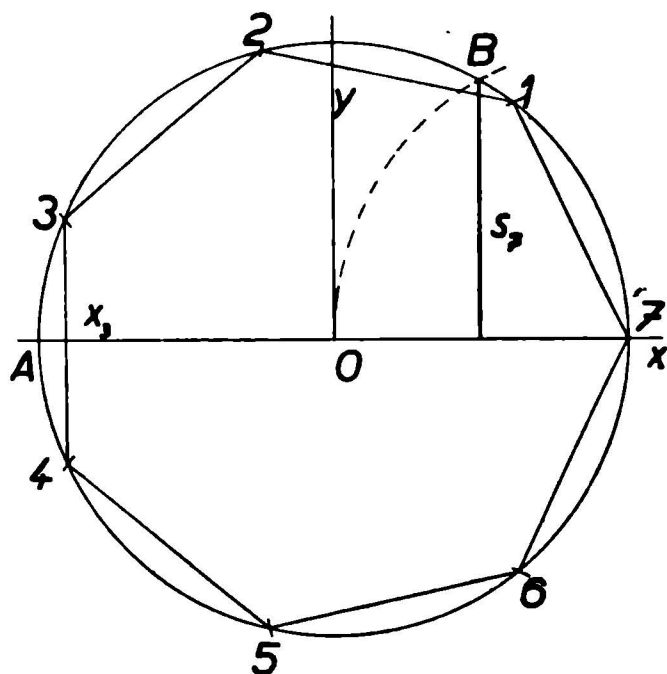
rovnice

$$z^7 - 1 = 0 \quad (2)$$

jsou vrcholy takového pravidelného sedmiúhelníka. Jeden z nich známe

$$z = 1,$$

je to vrchol označený 7 v obr. 35. Ostatních 6 kořenů hověí reciproké rovnici



Obr. 35. Přibližná konstrukce pravidelného sedmiúhelníka vepsaného do kružnice.

$$\frac{z^7 - 1}{z - 1} = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0, \quad (3)$$

jejíž kořeny jsou po dvou komplexní sdružené.

Substitucí

$$z + \frac{1}{z} = 2x \quad (4)$$

převédeme ji na kubickou

$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0. \quad (5)$$

Kořenu z_k je sdružený

$$\cos \frac{2\pi k}{7} - i \sin \frac{2\pi k}{7} = \frac{1}{z_k}.$$

Proto

$$x_k = \frac{1}{2} \left(z_k + \frac{1}{z_k} \right) = \cos \frac{2\pi k}{7}$$

jest společnou reálnou částí k -tého kořene a sdruženého $(7 - k)$ -tého kořene. Kořeny rovnice (5) jsou tedy úsečky vrcholů 1; 2 a 3 hledaného sedmiúhelníka 1234567; jsou tedy vesměs reálné.

Rovnice (5) nemá racionálních kořenů. Předpokládejme, že by měla racionální kořen $x = \frac{p}{q}$, jehož čitatel a jmenovatel jsou nesoudělná čísla celá, splňující tedy rovnici

$$p(8p^2 + 4pq - 4q^2) = q^3. \quad (6)$$

Odtud však plyne, že $\frac{q}{p}$ je číslo celé, t. j. $p = \pm 1$ a pak, že

$\frac{2}{q}$ je také číslo celé, t. j. $q = \pm 1$ nebo ± 2 . Žádný z párů těchto čísel však nehoví rovnici (6). Proto ani (5) nemá racionálního kořene a nelze ji rozložit na součin rovnic lineárních nebo rovnice lineární a kvadratické. Konstrukce je třetího stupně a nelze ji provést pouze pravítkem a kružítkem.

Velmi vhodnou aproximací kořene x_1 rovnice (5) jest $\frac{5}{8}$. Značíme-li A bod kružnice protilehlý vrcholu 7, je trojúhelník o vrcholech 7, 1, A pravoúhlý. Z něho plynoucí aproximace strany s_7 sedmiúhelníka

$$s_7^2 \approx \frac{3}{8} \cdot 2; \quad s_7 \approx \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = 0,8660 \dots$$

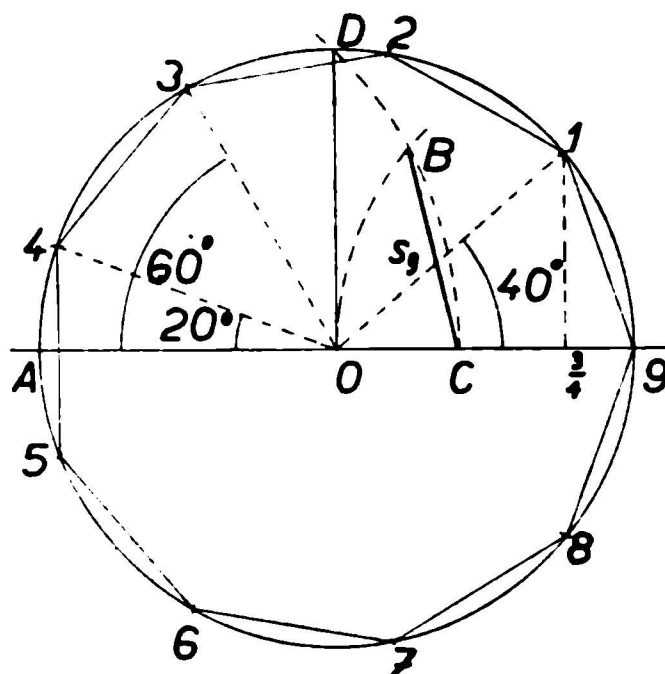
jest výškou rovnostranného trojúhelníka $OB7$ o straně 1. Přesná délka strany je $s_7 = 2 \sin \frac{1}{4}\pi = 0,8677 \dots$,

nepřesnost konstrukce $0,0017 \dots$ nepřesahuje $0,1 \text{ mm}$ do poloměru 60 mm .

Jinou přibližnou konstrukci pravidelného sedmiúhelníka poskytuje aproximace kořene $x_2 = -0,9$ rovnice (5), která vede k hodnotě

$$s_7 \approx 2\sqrt{0,1 \cdot 1,9} \doteq 0,8718.$$

Nepřesnost $-0,0041$ dostupuje $0,1 \text{ mm}$ již při poloměru 25 mm .



Obr. 36. Přibližná konstrukce pravidelného devítiúhelníka vepsaného do kružnice.

b) V devítiúhelníku $123 \dots 9$ (obr. 36) vrchol 4 dělí na tři stejné díly úhel $AO3 = 60^\circ$. Přibližnou trisekcí tohoto úhlu, popsanou v odst. 4,2, obdržíme tedy nepřesnost strany asi $2 \text{ arc } 30'' \doteq 0,0003$, t. j. menší než $0,1 \text{ mm}$ do poloměru 330 mm .

Jinou aproximaci poskytuje rovnice

$$\cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi,$$

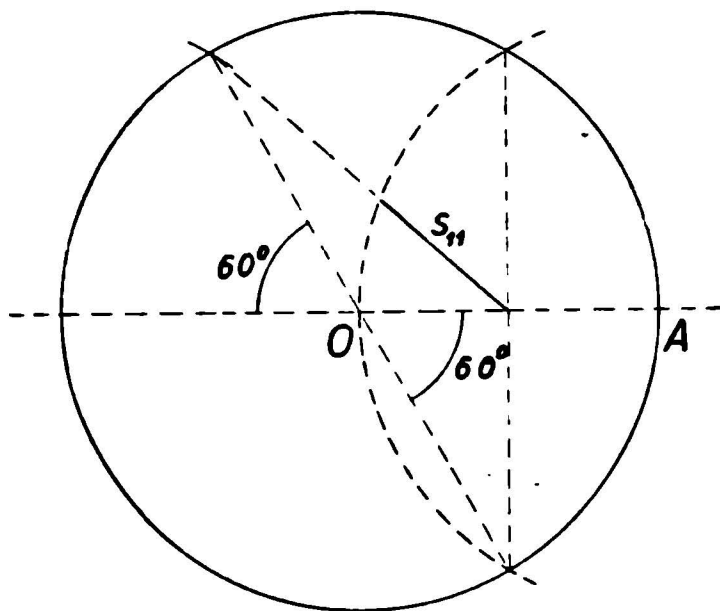
volíme-li $\varphi = 40^\circ$, t. j. $\cos 3\varphi = -0,5$, takže $x = \cos 40^\circ$ jest kořenem kubické rovnice

$$8x^3 - 6x + 1 = 0. \quad (7)$$

Kdyby měla racionální kořen $x = \frac{p}{q}$, nesoudělná čísla celá p, q byhověla rovnici

$$8p^3 - 6pq^2 + q^3 = 0, \quad (8)$$

z níž by jednak plynulo $\frac{q}{p}$ celé, t. j. $p = \pm 1$, jednak $\frac{8}{q}$ celé,



Obr. 37. Přibližná konstrukce pravidelného jedenáctiúhelníka vepsaného do kružnice.

t. j. $q = \pm 1$ nebo ± 2 . Žádný pár těchto čísel však nehoví rovnici (8); proto (7) nemá racionálního kořene. Konstrukce je třetího stupně, neproveditelná jen pravítkem a kružítkem.

Jednoduchou aproximací kořene rovnice (7), t. j. úsečky vrcholu 1 jest $x_1 \doteq \frac{3}{4}$. Odtud plynoucí přibližná délka strany s_9

$$s_9^2 \doteq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}; \quad s_9 \doteq \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707$$

liší se od přesné $s_9 = 2 \cdot \sin 20^\circ = 0,684 \dots$ o $(-0,023)$. Aproximace je špatná. Trochu lepší aproximací je

$$x_1 \approx \frac{1}{2}\sqrt{2}; s_9^2 = \frac{5}{2} \cdot 2, s_9 = \sqrt{\frac{5}{11}} = 0,674$$

o nepřesnosti $+ 0,010$.

Jiná přibližná konstrukce $s_9 = \overline{BC}$ (obr. 36) užívá průsečíku B dvou kružnic, z nichž jedna má střed 9 a jde středem O a druhá má střed A a jde koncovým bodem D poloměru $OD \perp OA$. Obdržíme $s_9 = 0,681 \dots$ Nepřesnost $+ 0,003$ je asi desetkrát horší než konstrukce trisekcí úhlu 60° .

c) Přibližná konstrukce strany pravidelného jedenáctiúhelníka je načrtnuta v obr. 37, k němuž není potřeba výkladu. Obdržíme opět pro kružnici poloměru 1

$$s_{11} \approx 0,5669$$

proti přesné hodnotě

$$s_{11} = 2 \sin \frac{\pi}{11} = 0,5635 \dots$$

Nepřesnost $- 0,0034$ nedosahuje $0,1$ mm až do poloměru 30 mm.

4.4. Přibližná rektifikace oblouku kružnice. Další konstrukcí, často se vyskytující v grafickém počtu a přesně neproveditelnou pouhým pravítkem a kružítkem, jest určení délky nakresleného oblouku kružnice a zvláště určení délky obvodu kružnice. Úloha ta se nazývá rektifikací oblouku kružnice. Obvykle takový oblouk aproximujeme konečným počtem krátkých tětiv, které kružítkem přeneseme na přímku. Nepřesnost této aproximace lze však těžko odhadnouti. Proto dáváme přednost níže uvedeným aproximacím.

a) Oblouk $\widehat{AB}$ kružnice o poloměru $\overline{OA} = r$ promítneme z libovolného bodu S průměru SOA na tečnu kružnice v A do úsečky AB' (obr. 38). Leží-li S ve vzdálenosti a od středu O na opačné straně než bod A , pak jest

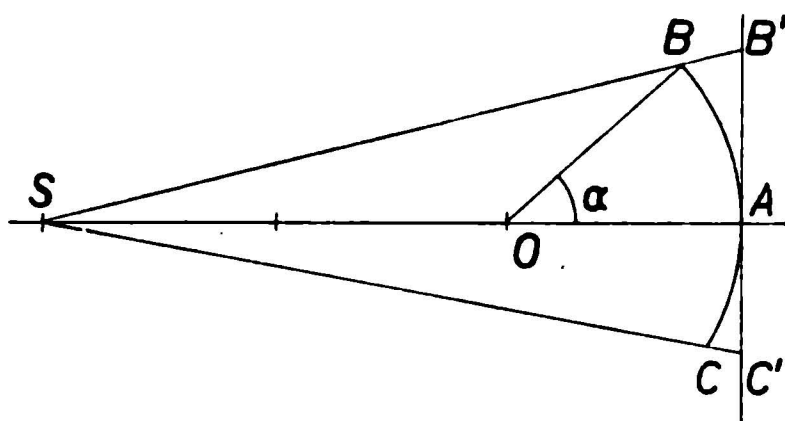
$$\overline{AB'} = (r + a) \frac{r \cdot \sin \alpha}{r \cdot \cos \alpha + a} = \quad (1)$$

$$= r \cdot \left[\alpha + \frac{2r - a}{6(r + a)} \cdot \alpha^3 + \frac{16r^2 - 13ar + a^2}{120(a + r)^2} \cdot \alpha^5 + \dots \right],$$

značí-li v rozvoji $\alpha = \widehat{AB} : r$ obloukovou míru pro $\sphericalangle AOB$.

Skutečně, bod B má v pravoúhlé soustavě souřadnic o počátku O a kladné ose OA souřadnice $(r \cos \alpha; r \sin \alpha)$. Jeho spojnice s bodem $S(-a; 0)$ má tedy rovnici

$$y = \frac{r \sin \alpha}{r \cos \alpha + a} (x + a);$$



Obr. 38. Aproximace délky oblouku kružnice.

její průsečík s tečnou $x = r$, sestrojenou k naší kružnici v bodě A , je bod B' o pořadnici $\overline{AB'}$ dané právě středním členem v (1).

Rozvoj (1) odvodíme dosazením známých řad

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \dots,$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \dots \text{ } ^9)$$

do středního členu. Poněvadž záměnou $-\alpha$ za $+\alpha$ výraz

⁹⁾ Viz na př. M. Kössler: Úvod do počtu diferenciálního, (Praha, 1926), str. 138 a j., nebo J. Vojtěch: Základy matematiky ke studiu věd přírod. a tech. 1. díl (5. vyd., Praha, 1939), str. 281.

pro $\overline{AB'}$ mění znamení, schází v rozvoji sudé mocniny α a tedy rozvoj je:

$$\begin{aligned} \frac{r \sin \alpha}{r \cos \alpha + a} &= \frac{r\alpha - \frac{r\alpha^3}{3!} + \frac{r\alpha^5}{5!} - \dots}{r + a - \frac{r\alpha^2}{2!} + \frac{r\alpha^4}{4!} - \dots} = \\ &= A_1\alpha + A_3\alpha^3 + A_5\alpha^5 + \dots \end{aligned}$$

Odstraníme-li v poslední rovnici jmenovatele, uspořádáme-li součín podle mocnin α a přirovnáme-li jejich koeficienty ke koeficientům stejným mocnin α v čitateli, dostaneme pro $A_1, A_3, A_5, \dots$ řadu lineárních rovnic, z nichž plynou právě hodnoty uvedené v posledním členu v (1).

Volíme-li $a = 2r$, aproximace $\overline{AB'}$ oblouku $\widehat{AB} = r \cdot \alpha$ je pro malé úhly zvláště dobrá, neboť rozdíl

$$\overline{AB'} - \widehat{AB} = \overline{AB'} - r \cdot \alpha = -\frac{r \cdot \alpha^5}{180} + \dots \quad (2)$$

začíná pak až pátou mocninou α . Relativní nepřesnost konstrukce

$$\varrho(\alpha) = \frac{\overline{AB'} - \widehat{AB}}{\widehat{AB}} = \frac{3 \cdot \sin \alpha}{\alpha (2 + \cos \alpha)} - 1 \quad (3)$$

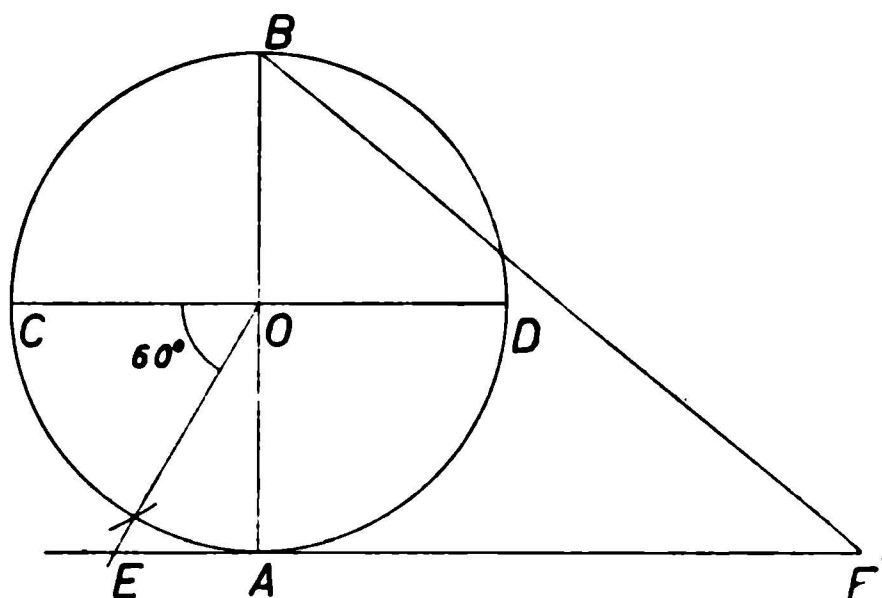
sestavme si v tabulku:

α	10°	20°	30°	40°	50°
$\text{arc } \alpha$	0,17453	0,34907	0,52360	0,69813	0,87266
$-\varrho(\alpha)$	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0034

Až do $\alpha = 30^\circ$ jest aproximace velmi dobrá, poskytující oblouky kružnic až do poloměru $r = 250$ mm s absolutní

nepřesností menší než 0,1 mm. Delší oblouky až do $\alpha = 60^\circ$ rektifikujeme nejvýše s dvojnásobnou nepřesností na tečnu kružnice vedenou zhruba uprostřed oblouku (na př. $\widehat{CB} \approx \approx C'B'$ v obr. 38). Ještě delší oblouky rozdělíme napřed v několik oblouků vhodně kratších, z nichž každý rektifikujeme zvlášť.

b) Použijeme-li této konstrukce na rektifikaci oblouku kružnice příslušného k středovému úhlu 30° , obdržíme



Obr. 39. Kochaňského aproximace délky půlkružnice.

dobrou aproximaci $\frac{1}{12}$ obvodu kružnice. Mnohem lepší aproximaci dostaneme však konstrukcí Kochaňského (obr. 39), známou ze střední školy.

Sestrojíme k sobě kolmé průměry AB a CD a vedme k ní tečnu v bodě A . Od poloměru OC nanесme $\sphericalangle COE = 60^\circ$, takže $\overline{AE} = r \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = r : \sqrt{3}$. Od bodu E nanесme na tečnu $\overline{EF} = 3r$ tak, aby A byl mezi E a F . Pak polovina obvodu kružnice rovná se přibližně

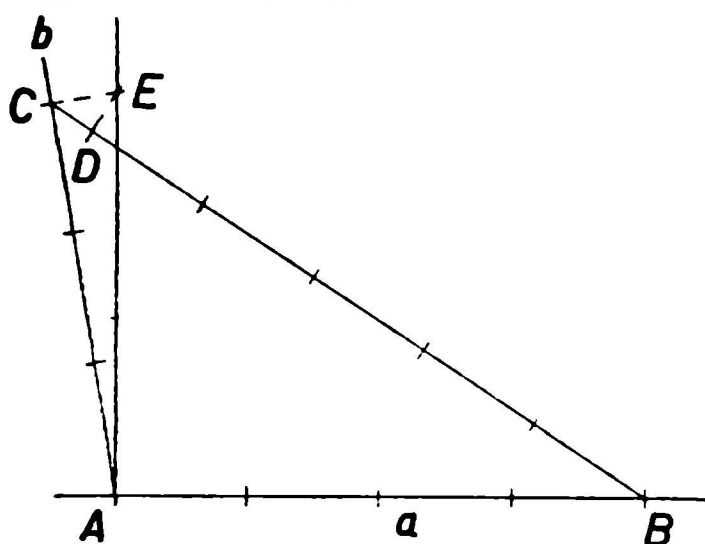
$$\overline{BF} = r \cdot \sqrt{4 + \left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \doteq 3,14153r.$$

Nepřesnost konstrukce $0,00006r$ dosahuje 0,1 mm teprve

při poloměru 1,7 m, tedy prakticky nikdy nepřichází v úvahu.¹⁰⁾

c) Obou těchto konstrukcí užíváme také výhodně k přibližnému vepsání pravidelných n -úhelníků do kružnice. Na příklad $\frac{2}{13}\overline{BF}$ v obr. 39 jest délka oblouku kružnice, jehož tětivou je přibližně strana pravidelného třináctiúhelníka, vepsaného do kružnice. Koncové body tohoto oblouku najdeme obrácením konstrukce v obr. 38.

4,5. Příklady jiných aproximací. Někdy je výhodné geometricky aproximovati i konstrukce druhého stupně.



Obr. 40. Aproximace konstrukce kolmice vztyčené v bodě A k přímce a .

Na příklad najítí patu kolmice spuštěné z bodu A na velmi vzdálenou přímku a nelze dosti přesně provésti obvyklým způsobem pravoúhlým kreslicím trojúhelníkem nebo kružítkem. Pravý úhel trojúhelníků není nikdy tak dokonalý, abypata dlouhé kolmice jím sestrojené se nelišila podstatně od správné polohy. Rovněž příliš dlouhé

kružítko, nebo obyčejné kružítko prodloužené nástavci, deformuje se snadno tak značně, že výsledek bývá velmi nejistý. Uveďme vyhovující aproximace dvou základních konstrukcí tohoto druhu.

¹⁰⁾ Jest veliké množství přibližných konstrukcí délky obvodu kružnice a s tím souvisících přibližných konstrukcí čtverce, který by měl s kružnicí stejný obsah (*quadratura circuli*). Viz na př. H. E. Timmerding, *Zeichnerische Geometrie* (Leipzig, 1928) a Th. Wahlen, cit. v kapit. 2., pozn. ¹⁾. Tamtéž viz důkaz nemožnosti přesného provedení obou těchto konstrukcí pouze pravítkem a kružítkem.

A diagram of a parallelogram $ABCD$ with vertices A (top-left), B (bottom-left), C (bottom-right), and D (top-right). A line segment EF is drawn parallel to the base BC , with E on side AD and F on side CD . The segment EF is labeled with the letter a .

55

nosti. Není-li, opakováním konstrukce obdržíme výsledek prakticky správný.

Volíme-li AB a CD přibližně kolmé k a , vidíme z obr. 41, že rovnoběžka AF se prakticky neliší od spojnice AD . Stačí tedy sestrojiti dvě přibližné kolmice AB a CD k a , třeba kreslicím trojúhelníkem o nikoliv docela správném pravém úhlu, a nanést na ně stejné délky $\overline{BA} = \overline{CD}$. Spojnice AD je již velmi dobrou rovnoběžkou s a .

c) Z bodu A spustíme kolmici na přímku a tím způsobem, že podle obr. 40 v A vztyčíme kolmici k přímce $b \parallel a$, kterou jsme sestrojili bodem A podle obr. 41.

d) Tyto geometrické aproximace se liší od předešlých v tom, že u nich zpravidla nevyšetřujeme horní hranici nepřesnosti.

4,6. Empirické křivky. V grafickém počtu se užívá často křivek daných nebo, lépe řečeno, aproximovaných pouze svým obrazem na nákresně, jejichž výtvarný zákon však neznáme. Takové křivky nazýváme empirické křivky.

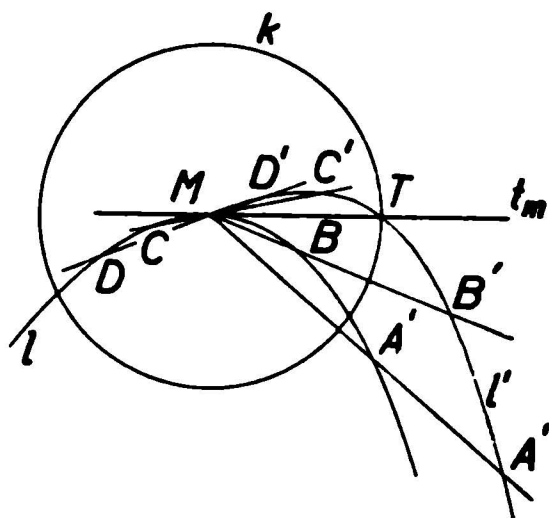
b) Abychom sestrojili tečnu empirické křivky l v bodě M (obr. 42), vedme jí svazek paprsků, jejichž druhé průsečíky s l označme $A, B, C, D, \dots$. Od nich nanesme na tyto paprsky vhodnou stálou délku

$$a = \overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'} = \dots$$

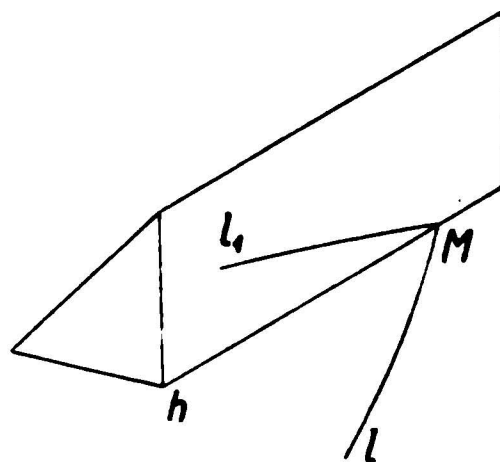
a opišme kružnici k poloměrem a kolem středu M . Body $A', B', C', D', \dots$ spojme křivkou l' a označme T její průsečík s kružnicí k . Z konstrukce plyne, že spojnice $MT \equiv t_M$ jest oním paprskem svazku, jehož druhý průsečík s l padá také do M . Jest to tedy tečna křivky l v bodě M .

Uvedená konstrukce je značně pracná. Pohodlnější je sestrojiti napřed normálu křivky l v M zrcátkem, jehož rovina je kolmá k nákresně, načež tečna křivky je kolmicí k normále. Takové zrcátko nejlépe realizujeme vyleštěnou stěnou pláště kovového trojbokého hranolu, jehož rovinný řez, kolmý k pobočným hranám, je pravoúhlým trojúhelníkem (obr. 43). Položme jej na nákresnu tak, aby zrcadlící

stěna byla kolmá k nákresně a aby hrana h při pravém úhlu procházela bodem M křivky l . Není-li hrana h normálou křivky, svírá křivka l úhel se svým obrazem l_1 v zrcátku, křivka vypadá v M zlomená. Otáčíme-li hranou h okolo bodu M až hrot při M zmizí, uvedeme ji do polohy kolmé ke

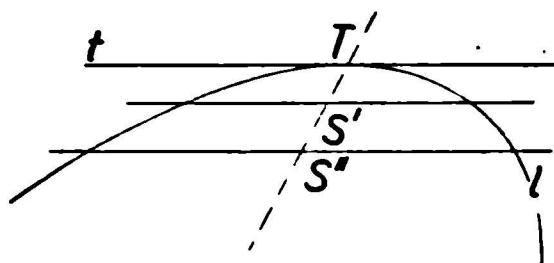


Obr. 42. Tečna empirické křivky l v bodě M .



Obr. 43. Kovový trojboký hranol na sestrojení normál křivek.

křivce. Podél hrany h nakreslená přímka jest pak normálou křivky l v M . Při dostatečném cviku jest tato metoda značně přesná, vyžaduje však hranolu (pomůcky značně nákladné).

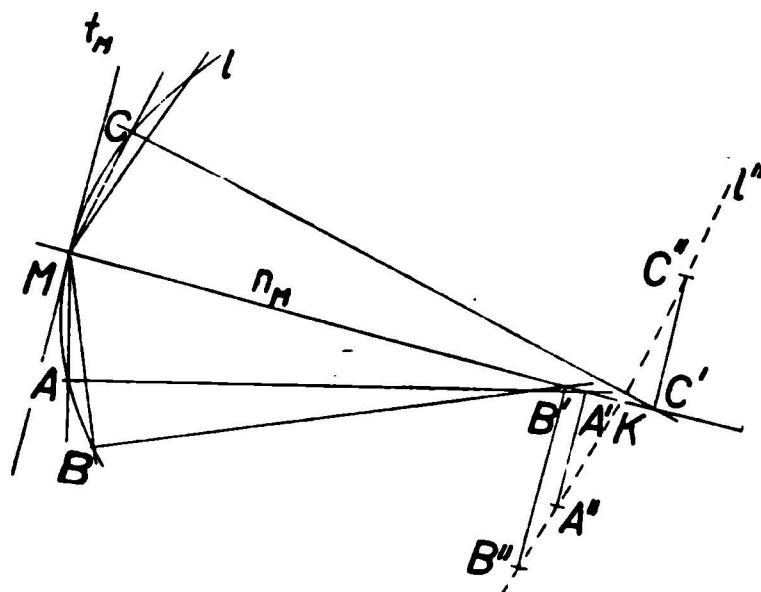


Obr. 44. Sestrojení bodu dotyku T tečny t empirické křivky.

b) V četných konstrukcích bývá úkolem sestrojiti tečny empirické křivky v několika bodech libovolně na ní zvolených. Místo konstrukce hranolem nebo obtížné konstrukce podle obr. 42 sestrojme raději zkusmo (geometrický experiment ve smyslu odst. 1,1) několik tečen křivky

a hledejme naopak jejich body dotyku (obr. 44). V okolí neznámého dotykového bodu T nakreslené tečny t , aproximujme danou křivku kvadratickou parabolou. Bodem T prochází průměr paraboly, který spojuje středy S' a S'' tětiv rovnoběžných s t .

c) Jinou úlohou bývá sestrojiti oskulační kružnici empirické křivky l v M (obr. 45). Sestrojme normálu n_M



Obr. 45. Přibližná konstrukce oskulační kružnice v bodě M empirické křivky l .

křivky v M . Veďme jím dále svazek paprsků. V jejich druhých průsečících $A, B, C, \dots$ s l vztyčme k těmto paprskům kolmice. Jejich průsečíky s n_M označme resp. $A', B', C', \dots$. Vztyčme v těchto bodech kolmice k normále n_M a nanesme na ně resp. délky tětiv, které na paprscích svazku vytíná křivka. Tak na př. $\overline{B'B''} = \overline{MB}$. Při tom tětivy ležící po jedné straně bodu M nanášeje na tutéž stranu od normály n_M , kdežto tětivy, ležící po opačné straně bodu M , nanášeje na opačnou stranu od n_M . Body $A'', B'', C'', \dots$, které takto dostaneme, spojme křivkou l'' . Kružnice sestrojená nad průměrem MA' dotýká se křivky l v M a v jeho okolí ji protíná ještě v A . Podobně je tomu s ostatními kružnicemi nad průměry MB' atd. Je-li K průsečík l'' s n_M ,

kružnice nad průměrem $\dot{M}K$ dotýká se l v M a další její průsečík s l v okolí M splývá s M . Jest to tedy přibližně oskulační kružnice křivky l v M .

d) Z povahy věci plyne, že nedovedeme najít hranici nepřesnosti těchto aproximací, poněvadž neznáme výtvarný zákon křivky.

OBSAH.

1. Omezenost prostředků.

	Str.
Úvod	4
1,1. Rozdělení konstrukcí	5
1,2. Jiné klasifikace konstrukcí	8
1,3. Příklady konstrukcí omezenými prostředky . . .	12

2. Konstrukce v omezené nákresně.

2,1. Nedostupné body a přímky	14
2,2. Metrické úlohy v omezené nákresně	21

3. Přesnost geometrických konstrukcí.

3,1. Pravidla Wienerova	32
3,2. Úprava základních konstrukcí	34

4. Geometrické aproximace.

4,1. Pojem přesné konstrukce	38
4,2. Definice a příklad geometrické aproximace (Trisekce úhlu)	41
4,3. Přibližné konstrukce některých pravidelných mnoho- úhelníků	45
4,4. Přibližná rektifikace oblouku kružnice	50
4,5. Příklady jiných aproximací	54
4,6. Empirické křivky	56

KRUH SBÍRKA SPISŮ VYDÁVANÁ JEDNOTOU ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

1. Závíška František, profesor university v Praze: Einsteinův princip relativnosti a teorie gravitační. 1925. 166 str. 10 obr. 16 K
2. Hostinský Bohuslav, profesor university v Brně: Geometrické pravděpodobnosti. 1926. 87 str. 11 K
3. Hlavatý Václav, profesor university v Praze: Úvod do neeuklidovské geometrie. 1926. 212 str. 32 obr. 30 K
4. Kössler Miloš, profesor university v Praze: Úvod do počtu diferenciálního. 1926. 147 str. 16 obr. 18,70 K
5. Bragg William, ředitel Royal Institution v Londýně: O povaze věcí. Přeložili A. Šimek, profesor university v Brně, a H. Šimková-Kadlcová. 1927. 134 str. 57 obr. 32 tab. 22,80 K
6. Batěk Alexander Sommer, profesor průmysl. školy v Praze: Chemické rovnice. Jak je psáti, čísti a jim rozuměti. 1927. 139 str. 19,60 K
7. Rychlík Karel, profesor techniky v Praze: Úvod do elementární teorie číselné. 1931. 104 str. 1 obr. 22 K
8. Schneider Rudolf, profesor univ. a přednosta meteorologického ústavu v Praze: Předpovídání povětrnosti. 1928. 109 str. 26 obr. 1 tab. 18 K
9. Běhounek František, docent university v Praze, a Heyrovský Jaroslav, profesor university v Praze: Úvod do radioaktivity. 1931. 116 str. 59 obr. 24 K
10. Novák Vladimír J., docent university v Praze: Kolísání podnebí v dobách historických a geologických. 1933. 191 str. 9 obr. 36 K
11. Frank Philipp, univ. profesor v Praze: Rozvrat mechanické fysiky. Přel. F. Závíška. 1937. 57 str. 12 K.
12. Jarník Vojtěch, profesor university v Praze: Úvod do integrálního počtu. 1938. 166 str. 12 obr. 26,40 K

80. Brož. Další svazky se připravují.

Dodá každý knihkupec nebo nakladatel

JEDNOTA ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ
Praha II, Žitná 25

K N I H O V N A S P I S Ů M A T E M A T I C K Ý C H A F Y S I K Á L N Í C H

1. *H o s t i n s k ý B o h u s l a v*, profesor české university v Brně: *Diferenciální geometrie křivek a ploch*. 2. vyd. v tisku.
- 2,7. *V o j t ě c h J a n*, profesor techniky v Praze: *Základy matematiky* ke studiu věd přírodních a technických. Část první. 5. vyd. 1939. 419 str. 90 obr. 60 K. Část druhá. 4. vyd. 1931. VIII, 390 str. 40 obr. 60 K.
- 3,4. *N o v á k V l a d i m í r*, profesor techniky v Brně: *Fysika*. 3. pozm. a dopl. vyd. Díl I. Mechanika. Akustika. Nauka o teple. 1929. X, 544 str. 375 obr. 96 K. Díl II. Elektřina. Optika. 1932. XIV, 640 str. 513 obr. 116 K.
5. *S e m e r á d A u g u s t i n*, profesor techniky v Brně: *Příručka praktické geometrie*. Díl I. a II. 1921. XV, 523 str. 303 obr. 4 tab. 72 K.
6. *K u č ě r a B o h u m í l*, profesor české university Karlovy v Praze: *Základy mechaniky tuhých těles*. 1921. VIII, 296 str. 121 obr. 48 K.
8. *B y d ž o v s k ý B o h u m í l*, profesor české university Karlovy v Praze: *Úvod do analytické geometrie*. 1923. IV, 412 str. 62 obr. 48 K.
9. *H r u š k a V á c l a v*, profesor techniky v Praze: *Počet grafický*. 2. vyd. se připravuje.
10. *D u s l K a r e l*, profesor techniky v Praze: *Úvod do vektorového počtu*. 1923. VIII, 121 str. 21 obr. Kart. 19 K.

11. *Hostinský Bohuslav*, profesor české university v Brně: *Mechanika tuhých těles*. 1924. VIII, 286 str. 124 obr. 48 K.
12. *Posejpal Václav*, profesor české university Karlovy v Praze: *Roentgenovy X-paprsky*. 1925. VI, 154 str. 66 obr. 8 tab. 40 K.
13. *Macků Bedřich*, profesor české university v Brně: *Fysika*. 1928. IV, 528 str. 359 obr. 92 K.
14. *Bydžovský Bohumil*, profesor české university Karlovy v Praze: *Základy teorie determinantů a matic a jich užití*. 1930. IV, 212 str. 44 K.
15. *Láska Václav*, profesor české university Karlovy v Praze, a *Hruška Václav*, profesor techniky v Praze: *Teorie a praxe numerického počítání*. 1934. IV, 496 str. 7 příl. 42 obr. 112 K.
- 16, 17. *Kadeřávek František*, profesor techniky v Praze, *Klíma Josef*, profesor techniky v Brně, *Kounovský Josef*, profesor techniky v Praze, *Deskriptivní geometrie*. Učebnice pro vysoké školy. Díl I. 1930. IV, 420 str. 491 obr. 1 anaglyf, 1 brejle. 98 K. Díl II. 1932. 563 str. 388 obr. 128 K.
18. *Čech Eduard*, profesor české university v Brně: *Bodové množiny*. Část první. 1936. VIII, 275 str. 68 K.
19. *Nachtikal František*, profesor techniky v Praze: *Technická fysika*. 2. rozš. vyd. 1937. 776 str. 603 obr. 144 K.

8°. Váz. Další svazky se připravují.

Dodá každý knihkupec nebo nakladatel

JEDNOTA ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

Praha II, Žitná 25



Společnost s r. o.
založená Jedno-
tou českých ma-
tematiků a fysiků

Výroba vědeckých a učebních přístrojů
Učebné pomůcky pro všechny obory

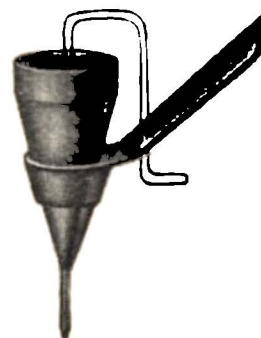
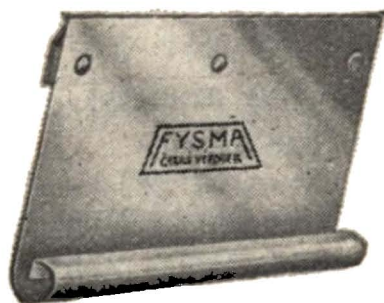
Á Ě Č Ď Ě G H I J K L M N Ů P Ř Š Ť Ů V W X Y Ž 1003¹

á ě č ď ě g h i j k l m n ů p ř š ť ů v w x y ž 1003^{1/2} a

PODLE NORMY ČSN 1234567 9 9 0 X I I I V I FYSMA 1003^{1/2} c

Á Ě Ě Ů D K M N P Ř Š Ů V X Ž 234567 9 9 803^{1/2}

á ě ě l g f h j k m ů ř š ů v x y ž a b γ δ ε η θ ν π ρ 803^{1/2} o



Přesné kreslicí náčiní z celuloidu
pro školy a technické kanceláře

Telefon 237-14, 293-08

PRAHA II

Žitná 25

CESTA K VĚDĚNÍ

Sv. 1.

Dr. S. Schwarz:

O ROVNICÍCH

Brož.

K 14,—



Sv. 2

Doc. Dr. V. Petržílka -

Ing. Dr. J. B. Slavík:

PIEZOELEKTRINA A JEJÍ POUŽITÍ

V TECHNICKÉ PRAXI

Brož.

K 19,—



Sv. 3

Prof. Dr. D. Iřkovič:

POLAROGRAFIE

V tisku



Sv. 4

Prof. J. Holubář:

METODY PLANIMETRIE A APOLLONIOVA ÚLOHA

Brož.

K 18,80



Sv. 5

Ing. Dr. J. Strnad:

ZVUKOVÝ FILM

V tisku



Sv. 6

Doc. Dr. F. Link:

JAK POZNÁVÁ ASTROFYSIKA VESMÍR

V tisku

KNIHKUPECTVÍ JEDNOTY ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

Odborné knihkupectví pro literaturu domácí i zahraniční z oboru matematiky, fyziky, chemie, astronomie, techniky a věd příbuzných. — Obstaráme spolehlivě knihy kdekoli vyšlé, vědecké i zábavné. — Máme stálé komisionářské zastoupení v Lipsku (Leipzig), Miláně, New Yorku, Paříži, Londýně, Záhřebu.

Obracejte se vždy s důvěrou na nás — budete spokojeni.

Zveme k nezávazné prohlídce našeho knihkupectví.

ADRESA: PRAHA II, ŽITNÁ 25.

TELEFON: 293 08, 237 14.